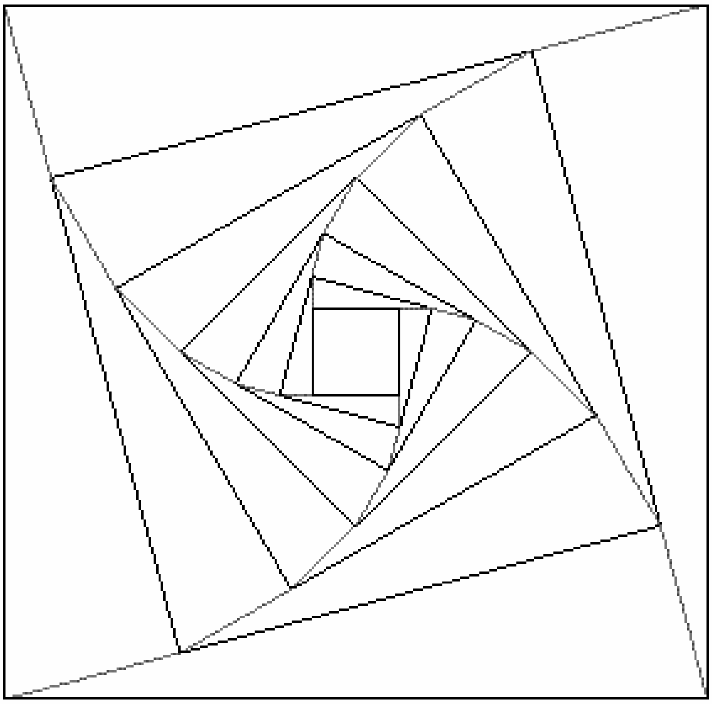
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 96
FEBRERO DE 2014

Número especial dedicado al Profesor Julio Fernández Biarge

ÍNDICE

Págs.

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2014 4

XXXII Concurso de Resolución de Problemas…………..…...……..... 5

XIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid,
por *Joaquín Hernández* y *Juan Jesús Donaire* 6

Otros ejercicios propuestos en el XXXI Concurso Puig Adam (Bol. 95) .. 10

Coplas a la historia de las matemáticas ……………………………….. 11

Sobre el número especial dedicado al Prof. Julio Fernández Biarge ……. 11

Enseñanzas Técnicas para el futuro: Las Matemáticas en las
Enseñanzas Técnicas,
por *Julio Fernández Biarge*... 12

Julio Fernández Biarge, mi padre,
por *Pedro Fernández Liria* ……………………………...…… 37

Apunte biográfico de Julio Fernández Biarge,
por *José Luis Cabanes Torrente* ……………………....….… 47

La labor del Prof. D. Julio Fernández Biarge en el Instituto de
Química Física y en el Centro de Cálculo Electrónico del CSIC,
por *Manuel Rico Sarompas*…………………………………….… 61

Julio Fernández Biarge, "Emérito",
por *Juan Miguel Sánchez Sánchez*…………..………………….… 66

La labor de Julio Fernández Biarge en la Sociedad "Puig Adam"
de Profesores de Matemáticas y en su Boletín,
por *Eugenio Roanes Macías*……………………………………... 70

Continuación del artículo "De Paramétricas a Implícita",
por *Julio Castiñeira Merino* ………………..……………..…... 73

Reseña de libros ……………………………………………………..... 89

Instrucciones para el envío de originales 94

Aquisición de números atrasados de nuestro Boletín 95

Boletín de inscripción ………………………………………………… 96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen ahora en “MathEduc”, es decir, en lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre.

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD “PUIG ADAM” DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
`http://www.sociedadpuigadam.es`

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse
a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
F. JAVIER PERALTA CORONADO
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)
JUAN JESÚS DONAIRE MORENO	(Redacción de Publicaciones)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Tesorero Adjunto:
FERNANDO LISÓN MARTÍN

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Convocatoria de la
Asamblea General Ordinaria de 2014

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2014 para el *sábado día 26 de abril de 2014*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

Cuotas del año 2014 y siguientes

Se recuerda a nuestros socios que en la Asamblea General Ordinaria de 2012 se aprobó que los recibos anuales se pasaran al cobro en el primer trimestre de cada año (véase Boletín nº 91). Por lo tanto, el cobro de la cuota anual del año 2014 se efectuará el próximo mes de marzo de este año.

XXXII Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas

(con la colaboración del Colegio de Doctores y
Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias)

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del *sábado 14 de junio del 2014* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 20 de Mayo del 2014, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid *Fax: 91 394 4662*
Correo electrónico : `jetayo@mat.ucm.es`

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2013-2014.

XIII Concurso Intercentros

"Nos mantenemos"

A pesar de que ciertos informes, al parecer, detectan un bajo nivel de nuestros escolares en el campo de la matemática, un numeroso grupo de los estudiantes de esta Comunidad de Madrid mantienen vivo el interés por esta disciplina, y año tras año, cualquiera que sea el concurso del que se trate, se pasan toda la mañana de un sábado concentrados, razonando e incluso disfrutando con el desafío de la resolución de una batería de problemas.

En esta ocasión, sesenta y nueve equipos, de seis estudiantes cada uno, pertenecientes a cuarenta y cinco centros de enseñanza, tanto públicos como privados, participaron en el XIII Concurso Intercentros con mejores resultados que en años anteriores.

Aunque ya la mayoría de los lectores de la revista conocen la estructura de la prueba, nos parece oportuno resaltar que cada equipo está formado por seis estudiantes de distintos niveles, con edades comprendidas entre 12 y 18 años, que en alguna parte de las pruebas han de trabajar en equipo.

Como siempre, he aquí una muestra de algunos problemas del concurso.

Equipos (1º, 2º ESO)

La tabla adjunta muestra algunos datos del último campeonato de pesca celebrado en el lago de la Casa de Campo.

Número de peces pescados (n)	0	1	2	3	…	13	14	15
Número de participantes que pescaron n peces	9	5	7	23	…	5	2	1

Como puedes observar hubo 9 participantes que no pescaron nada, 5 pescaron un único pez, etc.
En la prensa local que cubría el evento se pudo leer al día siguiente:

- *El ganador obtuvo 15 peces*
- *La media de los que pescaron 3 o más peces fue de 6 peces.*
- *La media de los que pescaron menos de 13 peces fue de 5 peces.*

¿Cuál fue el número total de peces capturados?

Individual (3º, 4º ESO)

Encuentra todas las parejas de enteros positivos a y b tales que $5a - ab = 9b^2$.

Individual (Bachillerato)

En el cuadrado *ABCD* de la Figura 1 hay seis octógonos regulares iguales, de lado 2, que comparten un lado con los octógonos colindantes. Cada uno de los octógonos de los extremos tiene un lado sobre un lado del cuadrado. Calcula el área del cuadrado y expresa el resultado en la forma $m + n\sqrt{2}$.

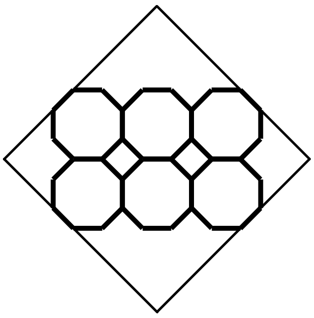


Figura 1

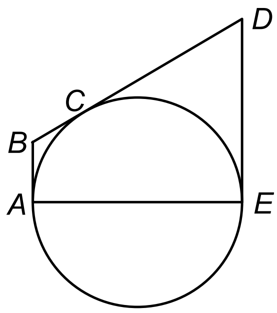


Figura 2

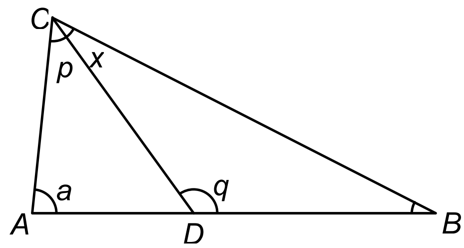


Figura 3

Relevos

3C. Calcula cuántos enteros n hay que verifican que $2^4 < 8^n < 16^{32}$.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 3º- 4º de ESO)

2C. Sea "T" la respuesta del problema 3C.
La longitud del diámetro *AE* de la circunferencia de la Figura 2 es T. Si *BA, ED,* y *BD* son tangentes a dicha circunferencia en los puntos *A, E* y *C*, respectivamente, y *BD* = 50, calcula el área del trapecio *ABDE*.
(Pasa en la tarjeta la respuesta a tu compañero de 1º- 2º de ESO)

1C.- Sea "T" la respuesta del problema 2C y n la suma de los dígitos de T.
En el triángulo *ABC* de la Figura 3 el ángulo a es mayor que 70º y su medida (en grados sexagesimales) viene dada por el número cuyas cifras son n y $\frac{n}{2}$.
D es un punto del lado *AB* tal que *DC* = *DB* y el ángulo q es el triple del ángulo p. ¿Cuál es la medida del ángulo x?
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

La mayoría de los estudiantes salieron contentos con el trabajo que habían realizado y los mayores pensando ya en la primera fase de la 50ª Olimpiada que disputarían la semana siguiente. Los resultados fueron estos:

Centros ganadores

1. *IES San Juan Bautista (Equipo A)*
2. *IES Ramiro de Maeztu (Equipo A)*
3. *IES Alameda de Osuna (Equipo A)*

Estudiantes ganadores

<u>NIVEL I (1º, 2º ESO)</u>

1. *Alejandro Epelde Blanco* (Montessori School Los Fresnos)
2. *Diego Sierra* (Colegio San José del Parque)

<u>NIVEL II (3º, 4º ESO)</u>

1. *Daniel Puignau Chacón* (IES Alameda de Osuna)
2. *Javier González Domínguez* (IES San Juan Bautista)

<u>NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)</u>

1. *Miguel Barrero Santamaría* (IES Alameda de Osuna)
2. *Ángel Prieto Naslín* (Liceo Francés de Madrid)

Relación de los 10 centros con mayor puntuación

1.	*IES San Juan Bautista A*	*43,5*
2.	*IES Ramiro de Maeztu A*	*40,7*
3.	*IES Alameda de Osuna A*	*40,0*
4.	*Colegio Alemán de Madrid*	*37,9*
5.	*Colegio Fray Luis de León A*	*28,6*
6.	*Liceo Francés de Madrid*	*26,45*
7.	*Colegio Virgen de Mirasierra*	*22,9*
8.	*IES La Estrella A*	*21,6*

9.	*Colegio Brains A*	*19,8*
10.	*Colegio Retamar*	*19,7*

Y, como siempre, enhorabuena a todos y un agradecimiento especial a los profesores que se brindaron para ayudarnos a vigilar las pruebas. Con su ayuda hemos llegado hasta aquí y con su ayuda seguiremos muchos años.

Joaquín Hernández Gómez
Juan Jesús Donaire Moreno

Otros ejercicios propuestos en el XXXI Concurso Puig Adam (Boletín 95)

En la Crónica publicada en el Boletín 95 se omitieron, por error, los ejercicios indicados a continuación.

NIVEL II (4º de E.S.O.) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1

Al escribir una a continuación de otra las edades de Alicia y Bruno resulta un número de cuatro cifras que es un cuadrado perfecto. Si hiciéramos lo mismo, en ese orden, dentro de 31 años resultaría un número también de cuatro cifras y también cuadrado perfecto. ¿Cuáles son las edades actuales de Alicia y de Bruno?

Problema 2

En el cuadrado $ABCD$ de la Figura 1 es $AE = 2 \cdot EB$ y $FC = 2 \cdot DF$. ¿Cuál es el cociente entre el área del paralelogramo $EGFH$ y el área del cuadrado $ABCD$?

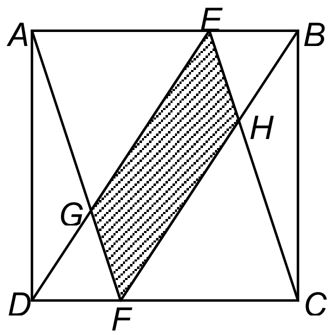


Figura 1

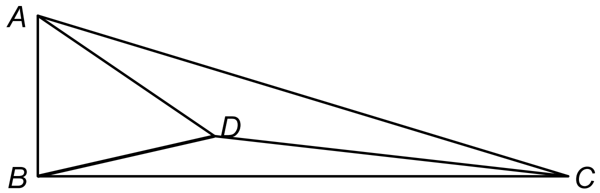


Figura 2

NIVEL III (1º de Bachillerato) Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1

En el interior del triángulo rectángulo ABC de la Figura 2 con ángulo recto en B, tomamos un punto D tal que el área del triángulo ABD es la tercera parte del área del triángulo original y el área del triángulo BDC es la cuarta parte del área del triángulo original. Si las distancias de D a los vértices A y C son, respectivamente, 3 y 4 cm, calcula la distancia de D al vértice B.

Problema 2

Encuentra todos los enteros positivos que escritos en notación usual (base 10) son una unidad mayor que la suma de los cuadrados de sus cifras.

Coplas a la historia de las matemáticas

Dentro del ciclo de conciertos organizado desde el Vicerrectorado de Cooperación y Extensión Universitaria de la Universidad Autónoma de Madrid, se va a presentar un acto titulado «*Coplas a la historia de las matemáticas*», interpretado por miembros del coro y la orquesta de la UAM, sobre versos de una historia de las matemáticas en plan divulgativo. El autor del texto es el Vicepresidente de nuestra Sociedad, Prof. Fco. Javier Peralta Coronado y, el autor de la música, el Prof. Enrique Muñoz Rubio, director del coro y de la orquesta. El acto va a tener lugar el 14 de marzo de 2014 a las 13 horas en el salón de actos de la Facultad de Formación de Profesorado de la UAM, con entrada libre.

Sobre el número especial dedicado al Prof. Julio Fernández Biarge

Como ya se anunció en el número 94 de nuestro Boletín, a petición de muchos socios y amigos, la Junta Directiva de la Sociedad aprobó dedicar este número del Boletín en homenaje al Profesor Julio Fernández Biarge.

Por ello, en este y en el próximo número –las colaboraciones recibidas exceden la capacidad de un solo número del Boletín– se encontrarán los trabajos dedicados que hemos ido recibiendo.

La Junta Directiva

Enseñanzas Técnicas para el futuro: Las Matemáticas en las Enseñanzas Técnicas

Por el Prof. Julio Fernández Biarge
Catedrático de la E.T.S. de Ingenieros Navales

(Julio Fernández Biarge fue estrecho colaborador de Puig Adam en el Instituto San Isidro de Madrid, en el que ambos ocupaban sus dos cátedras de matemáticas entonces existentes. Posiblemente fruto de esa colaboración fue la preocupación por los problemas de enseñanza de las matemáticas plasmada en las conferencias pronunciadas por Julio en la E.T.S. de Ingenieros Navales durante el curso 1974-1975. En ellas se proponen retos que siguen siendo de actualidad. Aunque dictadas, en principio, para alumnos de Ingeniería, por su especial interés para docentes de matemáticas en todos sus niveles, reproducimos aquí esas conferencias, que fueron publicadas en la Revista "Ingeniería Naval", nº 481, págs. 375-385. Agradecemos a su Directora, Belén García de Pablos, el permiso para reproducirlas en este número del Boletín dedicado a la memoria del Prof. J. F. Biarge).

1. Enseñanzas técnicas para el futuro

Estamos reunidos para reflexionar juntos acerca de la *orientación* que debe darse a los estudios de Matemáticas en esta E.T.S. Yo querría que de antemano excluyésemos de nuestro tema de trabajo el examen de los *defectos de realización* observados en estas enseñanzas en los últimos años. No es que pretendamos negar la existencia de tales defectos, sino que pienso que el pararnos a analizados nos desviaría totalmente de la cuestión, que estimo más importante, de *fijar los objetivos* y determinar la estrategia que nos puede aproximar a ellos. Porque mientras no tengamos ideas claras sobre los objetivos perseguidos, mal podemos formular juicios sobre si la manera de llevar la enseñanza es adecuada o no.

Yo tengo mis ideas acerca de esos objetivos y algunas opiniones sobre las estrategias usuales para acercarse a ellos; creo que he contribuido algo a adecuar, según mi honrado parecer, las enseñanzas de esta Escuela a lo que exigen los objetivos mencionados. Pero estoy muy lejos de creerme en posesión absoluta de la verdad, ni de fórmula mágica alguna, y por eso creo necesario suscitar en todos el interés por estas cuestiones y tratar de que colaboremos en la búsqueda de soluciones. Por eso yo querría que esta charla fuese más una invitación a la reflexión de todos que una exposición de presuntas soluciones personales.

Debemos buscar, en primer lugar, un punto de partida, que goce de general consenso para poder iniciar una reflexión en común, si es que tal cosa es posible hoy día. Propongo partir de este enunciado de los objetivos de las actividades de una E. T. S. Tal escuela, como centro de educación, debe:

"Contribuir a la formación de las personas que, a través del desarrollo y de la utilización de ciertas tecnologías, han de participar activamente en el quehacer diario y en el progreso de la sociedad humana del futuro".

Puesto que también parece aceptado por todos el que las Matemáticas, tanto por su manera peculiar de hacer trabajar la mente, como por el conjunto de instrumentos que aporta, tienen algo importante que ofrecer para la formación de esas personas, se plantea el problema de perfilar cómo debe ser utilizada esta disciplina en la labor educativa que nos proponemos. Para fines metodológicos propongo dividir nuestra reflexión en dos partes: en la primera trataremos de examinar *el marco que el futuro* ofrece a las actividades de los ingenieros que vamos a formar. En la segunda nos dedicaremos más concretamente al *papel que deben desempeñar las Matemáticas*, en esa formación.

Atentos, pues, a la primera parte, debemos examinar el período de tiempo que debe abarcar ese futuro a que nos referimos. Los alumnos que entrarán a estudiar en nuestras escuelas en los seis primeros años de vigencia de los próximos planes de estudios tienen actualmente, como promedio, una edad de quince años. No es descabellado suponer que los ingenieros a que den lugar estos jóvenes estén en la plenitud de su ejercicio profesional, en su aspecto directivo, hacia los cincuenta años de edad. Deducimos fácilmente que hemos de comenzar a formar ingenieros que habrán de dirigir las actividades técnicas alrededor del *año 2010* o para no caer en precisiones imposibles, durante *el primer cuarto del siglo próximo*.

Esa sencilla estimación es imprescindible si se quiere tener una perspectiva correcta de nuestro problema. Debemos de tratar, ante todo, de hacer algunas previsiones sobre ese futuro próximo.

Por supuesto que en nuestra futurología vamos a eliminar la consideración de una posible *catástrofe total*, motivada por una conflagración nuclear o por un desastre ecológico. No porque consideremos totalmente improbable el que ocurra, sino porque consideramos inútil dar cabida a esa hipótesis en una planificación. o deberíamos olvidar, de todos modos, el carácter *condicional* que todos nuestros razonamientos adquieren por la eliminación de esa posibilidad. No resulta fácil hacerse una idea de las características que presentará la humanidad dentro de treinta o cuarenta años. La previsión del futuro es una ciencia muy reciente –futurología o precología– a la que hoy día se dedican numerosos especialistas, alentados por los deseos planificadores de las grandes empresas mundiales. El librito de E. Jantsh, Herman Kahn y otros "Pronósticos del Futuro" (1967), puede proporcionar algunas ideas interesantes sobre la marcha de esas investigaciones en los últimos años, pero su lectura es algo decepcionante: En primer lugar, la mayor parte de las predicciones se refieren a períodos de quince o veinte años, demasiado cortos para nuestros fines, y en segundo lugar se saca la impresión de que los autores piensan que el mundo se reduce a la civilización occidental, y que su estudio se encamina a una previsión de cuándo se irán alcanzando distintos logros, supuestos invariables los objetivos que hoy persigue esa civilización, lo cual hace muy dudosa la aplicación de los resultados obtenidos para plazos largos. Claro que del mismo modo que nosotros hemos excluido la hipótesis de una conflagración nuclear generalizada. por inútil en nuestras planificaciones, no es extraño que las empresas que costean las investigaciones citadas exc1uyan las hipótesis de un cambio sustancial de objetivos o de civilización protagonista de la Historia, por considerar que, para ellas, resultan igualmente catastróficas.

Lo que sí parece confirmarse es la previsión de que la aceleración observada en las últimas décadas en los acontecimientos que transforman las condiciones de la vida humana, lejos de frenarse, ha de continuar por muy largo tiempo.

Algunos, como fácil explicación a sus dificultades, han usado la idea de que "estamos en una época de transición"; si por transición se entiende el período intermedio entre dos épocas de estabilidad, creo que tal afirmación es insostenible; si estamos en una transición, se trata de un paso de una época relativamente estable a otra en la que los cambios se han de suceder a velocidad creciente. No se ve motivo alguno para suponer que tras unos años de transición se puede esperar una dilatada época de estabilidad.

Se ha llegado a dudar incluso de la capacidad biológica de las personas para adaptarse a los cambios cuando éstos llegan a ser demasiado rápidos; el estudio de este asunto es uno de los temas centrales del libro de Alvin Toffler "El shock del futuro", un "best-seller" internacional que ha sido muy leído, pero quizá no muy tenido en cuenta.

En otra ocasión tuve oportunidad de explicar que el aumento en la velocidad de ciertos cambios no se puede asimilar a una' simple contracción de la escala de tiempos, pues no es cierto que "todo vaya igual, sólo que más deprisa"; la duración de la vida humana, por ejemplo, no se contrae en modo alguno. Presentaba este símil: mientras los aviones fueron a velocidades moderadas, bastaba aumentar la potencia de sus motores y la resistencia de sus estructuras, adaptando ligeramente su aerodinámica, para que todo pareciese ir igual, sólo que a mayor velocidad. Pero cuando esa velocidad se aproximó a la del sonido. que no "iba más deprisa" que antes, las cosas empezaron a cambiar, y al rebasarse esa velocidad aparecieron fenómenos críticos, totalmente nuevos, con la onda de choque y la consiguiente "barrera del sonido", que obligaron a reconsiderar toda la aerodinámica de la nave. De igual modo, mientras las tecnologías tuvieron períodos de vigencia medios muy superiores a la duración de la vida activa de los técnicos, la aceleración en el proceso de su renovación no causó grandes problemas; cuando la vida media de las tecnologías llegó a ser menor que la duración de la vida profesional de los ingenieros, se hizo bien patente la necesidad de la *educación permanente*, y la de cambiar la orientación de las enseñanzas técnicas; aún no hemos digerido bien este cambio de situación. Cuando la vida media de las tecnologías se haga inferior a la duración de las carreras superiores, como empieza a ocurrir en algunos campos, habrá que revisar los objetivos mismos de la enseñanza técnica. Parece que éstos han de quedar reducidos a enseñar al alumno a coger en marcha el tren del progreso científico y técnico.

De lo que no cabe duda, en todo caso, es de que la enseñanza que hemos de dar a los jóvenes de hoy no podemos pretender que sea la que pensamos que deberíamos haber recibido hace treinta años para hacer frente con éxito a los problemas actuales.

Disponemos hoy de muchos estudios que nos permiten hacer algunos pronósticos acerca del marco en el que habrán de desenvolverse en su madurez los jóvenes de hoy. Entre ellos no podemos ignorar los que se refieren a las perspectivas del crecimiento demográfico para los próximos años.

La población mundial ronda actualmente los 4.000.000.000 de habitantes; la tasa de crecimiento anual, que se mantuvo por debajo del 3 por 1.000 hasta hace mil años, era del 8 por 1.000 hace veinticinco años, y está ahora por encima del 17 por 1.000. Es previsible que en pocos años alcance el 20 por 1.000, a pesar de las medidas adoptadas por algunos países para evitado. El simple mantenimiento de la tasa actual daría para el año 2.300 una población 500 veces mayor que la actual; tan sólo habría que esperar al año 2.700 para tener 10 personas por cada metro cuadrado de superficie terrestre. Parece totalmente imposible, por tanto, que esa tasa de crecimiento se mantenga durante largo tiempo, ni mucho menos que siga creciendo al ritmo a que lo ha hecho en el último siglo. Si no se encarga de evitar esa explosión demográfica alguna catástrofe mundial, natural o provocada, debe pensarse que el problema se hará crítico, y dará lugar a problemas tecnológicos no sospechados hoy, antes de unos treinta y cinco años, es decir, que *son nuestros estudiantes de hoy los que habrán de enfrentarse con ellos.*

Pero la explosión demográfica es sólo un aspecto del conjunto de problemas que a estos jóvenes les va a tocar vivir. En 1972 se publicó el *"Manifiesto para supervivencia"*, avalado por numerosos científicos, del que podemos aprender mucho acerca de esos problemas. En su introducción se dice:

"El defecto fundamental del modo de vida industrial es el de ser insostenible. A menos que una minoría atrincherada siga prestándole apoyo durante algún tiempo –a costa de infligir grandes sufrimientos al resto de la humanidad–, su ocaso será inevitable dentro de la próxima generación. Pero aún en el caso de que reciba dicho apoyo podemos estar seguros de que... el modo de vida industrial sucumbirá... Y también podemos asegurar desde ahora que este acontecimiento se producirá o bien contra nuestra voluntad, tras una serie de epidemias, hambres, crisis sociales y guerras, o bien con nuestro asentimiento ... y como consecuencia de una sucesión de cambios deliberados, medidos y concebidos por el hombre ..."

De este libro, cuya lectura recomiendo a todos los que lo desconozcan, podemos extraer datos impresionantes, de los que sólo recogeré algunos:

Tan sólo con las tasas actuales de utilización de los recursos naturales, en el año 2010 estarán agotadas las reservas conocidas y previsibles de plata, oro, cobre, mercurio, plomo, platino, estaño, wolframio y zinc. Si la tasa de utilización aumenta, como podría deducirse del aumento de población y de la incorporación al desarrollo de los países subdesarrollados, esos metales, y algunos otros, quedarían agotados mucho antes.

Al nivel actual de productividad de la agricultura y de la demanda de productos agrícolas por persona se calcula que hacia el año 2.000 habría sido necesario poner en cultivo *toda* la tierra con posibilidades para ello. Cuadruplicando el rendimiento podría aplazarse este hecho hasta el año 2.050. No obstante, el posible aumento de demanda por persona, unido a la destrucción de tierras cultivables por mala utilización o contaminación industrial, pueden adelantar esas fechas.

Todo parece indicar que hacia el año 2.000 el petróleo será lo suficientemente escaso como para no poder ser destinado a la combustión como fuente de calor o en máquinas térmicas.

Y no debe olvidarse que esas previsiones que a algunos pueden parecer pesimistas están hechas sobre la observación de las tasas de utilización actuales, cuando sólo una pequeña fracción de la población mundial se beneficia de la mayor parte de la producción industrial. El llevar a todos los países subdesarrollados al nivel de desarrollo alcanzado hoy por los Estados Unidos supondría utilizar entre 100 y 200 veces la producción anual actual de materias primas y multiplicar por 4 ó por 5 el consumo anual de las mismas. Es evidente que se produciría el agotamiento de la mayor parte de ellas mucho antes de concluir la tarea. A conclusiones análogas se llega razonando sobre la capacidad de la ecosfera para la absorción de los residuos contaminantes producidos.

Prueba esto en primer lugar la falacia de los planes de generalización del desarrollo, tal como se entiende hoy, a todos los pueblos de la Tierra, y la inevitable reacción de defensa del mundo subdesarrollado, cuyos primeros síntomas estamos percibiendo.

Los problemas derivados de la contaminación de las aguas, de la atmósfera, de los alimentos e incluso la producida por el ruido, el calor residual y hasta la pérdida de la intimidad personal, a pesar de que han sido descubiertos muy recientemente, se agravan por momentos y exigirán grandes esfuerzos, simplemente para paliarlos, en los próximos años.

Dijo Giscard recientemente que la gente está triste porque no sabe a dónde va, pero intuye que si lo averiguase conocería que iba a la catástrofe.

Y no trato de llevar el pesimismo a vuestros ánimos. Al menos en la medida que el pesimismo pueda inhibir la acción. Lejos de esto trato de hacer una seria invitación a trabajar con firmeza para contribuir, con el auxilio de la técnica, a solucionar los problemas que nos afectan a todos, pero muy especialmente a nuestros jóvenes alumnos.

Por otra parte sé que los argumentos anteriores han tenido muchos detractores (no todos desinteresados) y que las extrapolaciones deben ser manejadas con mucha cautela. Alguien sugirió que extrapolando el crecimiento de la cantidad de caballos utilizados en Gran Bretaña en el siglo pasado, la isla entera debería estar hoy día cubierta por una gruesa capa de estiércol. Pero es instructivo observar que esta catástrofe se evitó desarrollando medios de locomoción que sustituían con ventaja a los caballos, es decir, la tecnología salvó la situación, aunque es cierto que dio lugar a nuevos problemas.

Por consiguiente, si no hemos de caer en un derrotismo supersticioso, de fin de milenio, habremos de confiar en que surgirán tecnologías que salven la situación. Pero no podemos ignorar que *este trabajo de salvación tecnológica corresponderá justamente a estos jóvenes que hoy llenan las aulas del mundo.* ¿Cómo podemos planificar su educación ignorando estos hechos? Tenemos que contribuir a preparar a esta juventud para abordar problemas totalmente distintos y mucho más delicados, que todos los que ocupan a los técnicos de hoy.

Hay personas que, asustadas por la magnitud y urgencia de los problemas y desalentadas por el mal uso que la humanidad ha venido haciendo de los instrumentos que le ha brindado la ciencia y la técnica preconizan una solución de abandono y de renuncia a esos instrumentos. El utópico "retorno a la Naturaleza". Creo que se equivocan.

La dificultad del problema no nos permite renunciar a ningún instrumento eficaz. Los que sí parece que han de cambiar urgentemente son los objetivos que actualmente se persiguen valiéndose de las conquistas científicas y tecnológicas. La juventud ha comenzado a dudar de muchos de los objetivos que nuestra civilización tenía por indiscutibles. El objetivo del desarrollo creciente y generalizado a toda la población humana, entendido desde el punto de vista del consumo, se ha comprendido que es falaz e insensato. El objetivo de transformar la Naturaleza circundante a la medida de las necesidades coyunturales del Hombre se ha visto que conduce a la destrucción de la biosfera y al suicidio colectivo. El objetivo de la defensa nacional conduce a la carrera de armamentos. Objetivos tan buscados a ambos lados del telón de acero como la escolarización general de la población durante largos períodos empiezan a tener que ser revisados a la luz de críticas como las llevadas a cabo por lván Illich y Everett Reimer. El objetivo de la libertad individual, tan proclamado como poco buscado con sinceridad, resulta que no es deseado, sino temido, por el gran número de personas que no se han educado para ejercerla, El Progreso, en definitiva, empieza a ser un concepto muy discutido, y esa palabra ha sido aplicada a tales aberraciones, que su uso provoca ya desconfianza en la juventud. Es sorprendente, a la vez que alentador, la frescura y vigencia que conservan los planteamientos religiosos para la vida humana frente al tambaleante aspecto que ofrecen otros planteamientos en estos momentos.

Si a los niños de hoy les va a tocar enfrentarse mañana con dificilísimos problemas técnicos, como hemos dicho antes, eso será además o después de haber tenido que resolver el problema de edificar un nuevo esquema de objetivos y de haber desarrollado las estrategias totalmente nuevas que conduzcan a ellos, para servirlas con las nuevas técnicas.

Nuestros jóvenes deberán ver muy claro que la potencia de las técnicas actuales se ha hecho muy grande, a escala humana, y crece sin cesar. Tendrán que empezar a ver que lo técnicamente posible puede no ser conveniente; algunos han llegado a pensar, embriagados por la vanidad del poder técnico, que lo que se había hecho posible *debía* hacerse; en el futuro, las consideraciones éticas se han de hacer mucho más importantes en el quehacer del técnico. Se sienten escalofríos al pensar a qué consecuencias puede dar lugar el uso insensato de los descubrimientos que actualmente se están haciendo en los campos de la energía nuclear, de la biología molecular, de la genética, del control de la mente por medios físicos, de los trasplantes de órganos, de la provocación de fenómenos meteorológicos e incluso de la psicología de masas. Dentro de la vida activa de nuestros jóvenes estudiantes de hoy, las posibilidades ofrecidas por la técnica llegarán a ser prácticamente ilimitadas, comparadas con las que tuvieron nuestros padres. Pero es necesario que los jóvenes se hagan bien conscientes del carácter auxiliar o instrumental de este poder técnico, cuyo desarrollo puede permitir, pero de ninguna manera garantizar, un verdadero progreso de la Humanidad.

Cualquiera que hace medio siglo observase el maravilloso progreso de los medios que ofrecía la ingeniería de las obras públicas podría soñar con la construcción de una vasta red de canales que interconectase todos los mares. Lo que es más difícil es que pudiese sospechar que el canal de Suez iba a quedar cerrado al tráfico durante largos años.

Si la técnica no sirve a unos buenos objetivos y trata de servirse a sí misma acaba identificándose, como sugiere Lanza del Vasto, con la bestia del Apocalipsis que "... Ejercía todo el poder de la primera bestia (la Ciencia, según L. d. V.), al servicio de ella, hasta hacer descender fuego del cielo a la tierra. Y seducía a los habitantes de la tierra por medio de los prodigios que le había sido dado obrar, al servicio de la bestia... Obtuvo de todos, pequeños y grandes, ricos y pobres, libres y esclavos, que se les imprimiera una marca sobre su mano o su frente, y que nadie pudiera comprar o vender, sino quien llevara la marca ...".

En los últimos años, se está generalizando, a nivel popular, la desconfianza en los objetivos tras los cuales se ha hecho trabajar a la técnica. Hemos podido observar la falta de acuerdo con que se ha enjuiciado la oportunidad de los planes de la NASA respecto a la exploración lunar, la manifiesta insensatez de la carrera de armamentos nucleares y vehículos portadores, entre las grandes potencias, y sobre todo, la endeblez que muestra el sistema de objetivos económicos que, con independencia del sistema político, viene persiguiendo nuestra civilización.

Ni siquiera hay acuerdo sobre si es conveniente el crecimiento y la tesis del crecimiento cero es defendida por amplios sectores; lo malo es que en la discusión correspondiente la falta de acuerdo comienza ya en la elección de la magnitud que se ha de hacer crecer o no; el P.N.B., generalmente usado, directa o indirectamente, para esos fines, es un concepto que no podrá resistir mucho tiempo las críticas que recibe: En efecto, ¿qué clase de contabilidad es ésa en la que cada producto se mide por el precio que le asigna su demanda, aun cuando esa demanda haya sido hábilmente producida artificialmente, con el fin de dar precio al producto que de otro modo sería inútil o perjudicial? La producción de material de guerra, drogas perjudiciales o productos contaminantes, ¿debe ser sumada a la de alimentos, viviendas y medios de educación personal o más bien restada? ¿Puede anotarse en el capítulo de “producción” la dilapidación de recursos naturales limitados? Hay quien traduce P.N.B. por “polución nacional bruta”. No está todavía definida la magnitud que Samuelson preconiza, el B.E.N. (Bienestar Económico Neto). Incluso faltan palabras para designar las cualidades de las mercancías o servicios que deberían hacerlas deseables. Illich ha tenido que inventar la de “convivencialidad” para designar una de las más importantes, que tiene poco que ver con el precio asignado por leyes de la oferta y la demanda.

El joven de hoy ha de estar preparado, por tanto, para asistir a una etapa de profunda revisión los objetivos, e incluso para participar activamente, en esa revisión. Nuestra misión como educadores es ponerlos en condiciones de realizar por sí mismos esa tarea, con el auxilio de la técnica.

Creo que cualquier planificación de la Enseñanza que ignore las consideraciones que hemos tratado de sugerir en todo lo anterior puede calificarse de ciega; si no debemos calificarla además de suicida es porque no sobreestimamos la importancia de la educación que facilitamos en los centros oficiales, y confiamos en que nuestros escolares sabrán adaptarse ellos mismos a los nuevos problemas a lo largo de sus vidas. Lo que no parece serio es ocultarles el problema, ya que no sabemos contribuir mucho a su solución.

Es inexcusable una revisión profunda de los métodos de enseñanza, si hemos de ayudar a nuestros futuros alumnos a participar activamente en los cambios que se avecinan. No conozco una fórmula perfecta para ello ni siquiera en la pequeña parcela de la tarea que corresponde a la enseñanza de las Matemáticas; a suscitar inquietudes acerca de este aspecto parcial del problema, pienso dedicar otra sesión de trabajo. En cuanto a los aspectos generales de las Enseñanzas Técnicas Superiores trataré de sugerir algunas conclusiones como resultado de las consideraciones anteriores:

a) La Enseñanza Técnica suministrada por las E.T.S. ha de centrarse cada vez más en lo fundamental, es decir, en la preparación científica básica, reduciendo progresivamente la especialización y el estudio detallado de tecnologías especiales.

b) A la vez (y aunque en un examen superficial pudiera parecer contradictorio con lo anterior) debe enfrentarse al joven con problemas tecnológicos vivos, no por lo que el conocimiento del problema concreto pueda tener de útil, sino por lo que tiene de educativo el simple enfrentamiento con ese tipo de problemas. Se trata en el fondo de fomentar el espíritu de investigación tecnológica, y es preferible dedicar algún tiempo a unos problemas realmente vivos que tratar de agotar el repertorio completo de las tecnologías actuales.

c) La duración de los estudios técnicos superiores ha de tender a decrecer o al menos a mantenerse al nivel actual, dejando para la "educación permanente" muchos de los contenidos de las asignaturas actuales.

d) El papel de esa "educación permanente" ha de ir cobrando más y más importancia, hasta superar a la de los estudios de iniciación que hoy día llenan casi por completo la actividad de nuestras escuelas.

e) La educación técnica ha de ir acompañada de una educación humanística muy extensa, no entendida en el sentido de las humanidades clásicas, sino en el de una introducción a los problemas candentes de la humanidad, tecnológicos, económicos, ecológicos, sociales, políticos, éticos, artísticos y de cualquier índole, que a la vez permita formarse a los alumnos una amplia visión de los problemas actuales de las ciencias en general. No parece que esta educación pueda conseguirse mediante la introducción de una o varias asignaturas encomendadas a pocas personas, con clases y exámenes convencionales, ni tampoco destinando simbólicamente un pequeño número de horas al mes a estos menesteres.

Creo que otras muchas cosas deberían ser objeto de reforma profunda, pero yo no he venido aquí a formular un plan, sino tan sólo a fomentar una inquietud y a invitar a todos a reflexionar sobre los problemas que tenemos ante nosotros, ya que su urgencia no nos permite dormimos.

2. Las Matemáticas en las Enseñanzas Técnicas

2.1 Introducción

Sólo después de las reflexiones que iniciamos el otro día sobre el porvenir de las Enseñanzas Técnicas podemos abordar con algún provecho el estudio del papel que la enseñanza de las Matemáticas debe jugar en la formación de los técnicos del mañana. Es obvio que cualquier plan de reforma de esta parcela de la enseñanza ha de ir coordinado y sincronizado con la reforma general de la Enseñanza Técnica Superior considerada globalmente, a la que debe servir.

Comienzo, por tanto, con una llamada a la moderación, y me adelanto a la casi inevitable reacción de preguntar por qué no trato de aplicar actualmente las ideas que presentaré como deseables para orientar la futura reforma. Debemos esforzarnos en distinguir lo que es una orientación deseable de lo que es inmediatamente aplicable en el marco de la enseñanza actual.

Una verdadera reforma ha de ser fruto de grandes esfuerzos, realizados por nutridos equipos entre los que reine un consenso general acerca de los objetivos perseguidos. Ni un profesor desde una cátedra, ni un gobernante a través del "Boletín Oficial" puede realizar una reforma verdadera, aunque ambos pueden ayudar mucho a promoverla.

De las consideraciones que el otro día hacíamos acerca del marco en el que se van a desenvolver profesionalmente nuestros jóvenes en el futuro, debemos deducir, en lo que se refiere a la enseñanza de las Matemáticas, lo siguiente:

a) Que la *rapidez* con que cabe esperar que se produzcan *cambios tecnológicos* sucesivos impide conocer qué instrumentos matemáticos requerirán dentro de unos lustros para su ejercicio profesional.

b) Que la *rapidez* análoga con que se *renuevan* las propias *Matemáticas* hace previsible el que la técnica exigirá dentro de unos decenios instrumentos matemáticos que aún no están desarrollados hoy.

c) Que es previsible una total *falta de semejanza* entre los problemas de hoy y los que tendrán que ser resueltos por los ingenieros de finales de siglo, lo que impide basar nuestros planes de enseñanza en los resultados de una encuesta sobre las necesidades de conocimientos de los técnicos actuales.

d) Que es inviable la pretensión de dar una formación matemática completa para las necesidades futuras, de modo que no exija una constante revisión y ampliación a lo largo de una "*educación permanente*".

e) Que la necesidad de un contenido más *universal* de la educación en las E.T.S., en contraposición a las tendencias de especialización que estuvieron muy justificadas en la primera mitad del siglo lleva a dar una formación matemática con una dimensión más amplia que la meramente instrumental.

En realidad deberíamos comenzar por someter a un examen crítico la cuestión de si realmente la enseñanza de las Matemáticas es importante en la formación de los ingenieros, como se ha tenido siempre por indiscutible. Ese examen nos arrojará alguna luz sobre los objetivos que se persiguen con esa enseñanza, y sólo después de haber conseguido alguna claridad en esos objetivos podremos juzgar su importancia y formular estrategias que sean adecuadas para su consecución.

A menos que seamos ciegos a las perspectivas del futuro que mostrábamos el otro día, tendremos que reconocer que si hay una cualidad que debemos potenciar por encima de cualquier otra en nuestros futuros ingenieros, ésta es la capacidad de enfrentarse eficazmente con problemas totalmente nuevos. Las Matemáticas le serán útiles fundamentalmente en la medida que le proporcionen un arma para potenciar esa capacidad, y mi tesis, compartida por la mayor parte de mis compañeros, es que, efectivamente, la enseñanza de las Matemáticas puede y debe proporcionar el arma adecuada, aunque sólo lo conseguirá si se plantea y enfoca de modo conveniente.

2.2 Objetivos

Entre los objetivos que podemos señalar a la enseñanza de las Matemáticas en las E.T.S. escogeremos éstos:

1) Dar al alumno el *lenguaje* adecuado para la comprensión de otras disciplinas, principalmente la física, y especialmente la mecánica.

2) Habituar al alumno al lenguaje y al modo de razonar peculiares de las Matemáticas, poniéndole *en condiciones de adquirir* autónomamente, el día de mañana, los conocimientos matemáticos especializados que exija la técnica que en cada momento tenga que manejar.

3) Educar al alumno en la *capacidad de abstracción* a partir de lo concreto 'y de aplicación a lo concreto de los resultados matemáticos, habituándolo al proceso de formación de *modelos* matemáticos de los fenómenos reales.

4) Proporcionarle las técnicas para *elaborar los datos* suministrados por la observación de la realidad, hasta hacerlos manejables por las máquinas de tratamiento de la información.

5) Desarrollar su capacidad de llevar a cabo procesos analítico-deductivos y manipular entes abstractos.

El primero de esos objetivos --preparación para la física-- es el único que exige que el contenido de las enseñanzas incluya un repertorio determinado de resultados. Los objetivos restantes pueden alcanzarse con una gran variedad de contenidos, determinando la eficacia de la enseñanza, más que la correcta elección de esos contenidos, la manera de presentados y el tipo de trabajo que sobre ellos se invita a realizar al alumno.

La importancia relativa del primer objetivo respecto a los otros es difícil de enjuiciar. Ciertamente, es el que debe ser alcanzado inexcusablemente, so pena de hacer imposible la enseñanza de otras disciplinas, pero en cambio es muy poco exigente, pues resulta sorprendente la pequeña fracción del contenido de las enseñanzas habituales de Matemáticas que luego es realmente usada en otras asignaturas. Haga cada uno un pequeño esfuerzo introspectivo para comprobarlo; incluso se recordará que algunas de las aportaciones de recursos matemáticos que habían de ser útiles llegan tarde, por defecto de acoplamiento de asignaturas en el Plan de Estudios.

Si creyéramos que el primer objetivo citado era el único importante habríamos de concluir que la planificación de la Enseñanza había sido siempre desastrosa. No lo entiendo así; más bien debemos reconocer que son otros los objetivos que han justificado en su mayor parte la planificación.

Para el ingeniero del futuro, la necesidad de seguir estudiando Matemáticas toda su vida profesional parece insoslayable. Hoy ya nos encontramos con ingenieros que utilizan como instrumento habitual la Investigación Operativa, que no había hecho su aparición cuando ellos cursaban sus estudios; otros utilizan métodos de cálculo numérico diseñados especialmente para su uso mediante ordenadores electrónicos, que tampoco existían cuando hicieron su carrera. El cálculo con matrices se introdujo en los programas de Matemáticas de las Escuelas Técnicas entre 1940 y 1960 y hoy día lo emplean como lenguaje habitual, no sólo los libros de cálculo de estructuras y de electricidad, sino incluso los de economía y de psicología aplicada. Esta situación, que ahora se descubre, se dará cada vez con mayor frecuencia.

Así, ante la imposibilidad de suministrar al estudiante de hoy los instrumentos que ha de utilizar en su vida profesional debemos dedicar nuestros esfuerzos a ponerle en condiciones de adquiridos por sus propios medios a medida que los necesite, habituándole al lenguaje matemático y a la manipulación de entes abstractos, para poder leer con provecho los libros de Matemáticas que vaya necesitando.

Si hemos de cultivar la capacidad de enfrentarse con problemas totalmente nuevos, como hemos dicho antes, debemos esmerarnos en dar *multivalencia* a las construcciones matemáticas, lo cual nos llevará a cultivar en lo posible la capacidad de abstracción, pues es claro que cuanto más diversos aparecen problemas, *aquello que tienen en común se encuentra en niveles de abstracción más elevados*.

Para la formación de un ingeniero es esencial desarrollar en él la capacidad de abstracción o de reducir a "modelos" abstractos los aspectos interesantes de lo concreto, como hemos señalado en uno de los primeros objetivos. Esta capacidad de abstracción no debe confundirse con la capacidad de manipular los entes abstractos según las leyes de la lógica, que se ha señalado como otro objetivo, y que en unos ingenieros puede desarrollarse mucho más que en otros. Por ello, en la Enseñanza Técnica es muy importante cuidar de presentar las Matemáticas, que son abstractas por naturaleza, acompañadas siempre de las procesos de abstracción que conducen a ellas desde lo concreto, y de los procesos inversos que permiten devolver los resultados al ámbito de partida. Estas actividades no son propiamente matemáticas, pero ya que no disponemos de una asignatura especialmente dedicada a ellas debemos ejercitarlas en la asignatura de Matemáticas. Desde el primer curso debe practicarse constantemente la creación de nuevos entes abstractos a partir de objetos que el alumno tenga hábito de manejar como concretos.

La confusión de los resultados obtenidos por deducción lógica con los productos de la intuición aplicada a situaciones concretas acaba por hacer imposible el estudio de las Matemáticas, esterilizando al alumno para la manipulación de abstracciones, pero la pretensión de eliminar el uso de la intuición y de las relaciones entre las construcciones matemáticas y la interpretación humana de la realidad circundante es igualmente perniciosa para la formación del alumno.

El estudio de las Matemáticas ha de ser, para el futuro ingeniero, una ocasión de constante ejercicio para su intuición y un motivo para que se entrene ampliamente en el paso de unos niveles de abstracción a otros, tanto en sentido ascendente como descendente.

2.3 Estrategias

Podríamos seguir analizando los objetivos que hemos señalado, pero será preferible hacerlo a la vez que se proponen estrategias concretas encaminadas a alcanzarlos, y ello considerando por separado los siguientes aspectos de la Enseñanza:

1) Las motivaciones.
2) Los contenidos teóricos y el modo de presentarlos.
3) Los ejercicios y problemas.
4) El desarrollo de las clases.
5) Las evaluaciones.

2.3.1 Las motivaciones de la Enseñanza de las Matemáticas

Las motivaciones para la enseñanza de las Matemáticas no pueden ser otras que la presentación de los problemas de interés técnico que éstas pueden resolver. Aparentemente tropezamos con el inconveniente de que estos problemas aparecen a primera vista como excesivamente numerosos, casuísticos y especializados. La simple elección de algunos ejemplos proporciona una idea muy pobre de la potencia del instrumento matemático ofrecido y de ninguna manera justifica a los ojos del alumno el esfuerzo que se le exige para la adquisición de esos instrumentos.

Cuando se consigue elevar un poco el nivel de abstracción, muchos problemas que parecen independientes muestran su base común. Así, una gran parte de los problemas a los que tiene que enfrentarse un ingeniero entran dentro de la categoría de los problemas de *optimización*, en los que debe determinarse una incógnita, dentro de un conjunto dado, para que una variable real que depende de ella en forma conocida se haga máxima o mínima. Lo que da aspectos dispares a unos y otros problemas es, por una parte, la naturaleza de la incógnita, y, por otra, la naturaleza de la dependencia citada. Si la incógnita buscada es un número real o un punto de un espacio euclídeo n-dimensional, tenemos un problema de máximos y mínimos de una o varias variables reales; si la incógnita es una función de un espacio funcional determinado tenemos un problema de cálculo de variaciones. Es sabido que, además de numerosos problemas técnicos, todas las ecuaciones de la mecánica racional clásica, de la mecánica cuántica, de la electrostática, etcétera, pueden expresarse en forma de un problema de cálculo de variaciones, o sea, que desembocan en un problema de optimización.

Cuando la incógnita es un punto de un espacio n-dimensional, pero sometido a condiciones que se expresan analíticamente con desigualdades, se tiene un problema de *programación* (lineal o no lineal), de los que la ingeniería actual hace uso constante, y hay muchos problemas de optimización, estudiados en Investigación Operativa, en los que la incógnita debe buscarse en conjuntos muy diversos, tales como los caminos posibles dentro de una red de comunicaciones, los distintos modos de asignar unos recursos a unas necesidades, la adopción de cadenas de decisiones. cada una de las cuales puede expresarse con sólo dos valores (sí o no), etc.

La utilización de variables (o lo que es lo mismo, de conjuntos en los cuales se ha de escoger la incógnita) que no son numéricas ni siquiera puntuales (en espacios euclídeos) es imprescindible para el planteamiento de muchos problemas de optimización que hoy son ya habituales en ingeniería. y también para poder comprender los libros que tratan de técnicas de resolución de algunos de estos problemas.

De ahí la necesidad de la *construcción* de entes abstractos adecuados que sean fiel modelo del problema concreto que se ha de resolver; como instrumento para estos menesteres se hace imprescindible un estudio de las relaciones de orden, de las posibilidades de establecer "distancias" que conviertan las variables en espacios topológicos (métricos), etcétera.

El otro aspecto que hemos dicho antes que convenía destacar de los problemas de optimización era la naturaleza de la función real, cuyo valor se trataba de hacer máximo o mínimo. Por ejemplo, es muy importante el caso de que se trate de una función *lineal* respecto a la variable independiente. El concepto de linealidad, concebido en toda su generalidad, cobra así gran interés, puesto que tan apenas hay métodos eficaces de resolución de problemas que no sean lineales o que no permitan aproximaciones lineales utilizables en cada caso. El estudio de la linealidad, de los casos en que tiene sentido hablar de ella, y de sus propiedades, constituye en realidad el contenido del Algebra Lineal.

Otra gran categoría de problemas que se presentan continuamente al técnico es la de los problemas de *aproximación*, es decir, de aquellos que consisten en sustituir los entes matemáticos complicados, difíciles de estudiar, que representan un cierto aspecto de una realidad concreta, por otros tomados de familias prefijadas, más manejables, que se aproximan a ellos en un sentido que habrá que definir en cada caso, de modo que los efectos producidos por esa sustitución sean insignificantes, también en un sentido prefijado. La aproximación a una función, localmente, en el entorno de un punto, mediante una función lineal, da lugar precisamente al concepto de diferencial, origen del cálculo infinitesimal, Si se han de establecer normas generales para dar significado preciso a la idea de aproximación en casos más generales, será preciso introducirse en la *Topología*.

La aparición de resultados discontinuos o singulares en fenómenos de apariencia continua, como en el caso de las frecuencias de vibración propias de una cuerda o de una molécula, el de pandeo de una columna, de los ejes principales de inercia de un sólido, etc., a pesar de su dispar apariencia, tienen una base matemática común en la teoría de *valores propios* de un operador.

La tarea de proporcionar al alumno una visión general de los grandes grupos de problemas, cuya resolución persiguen las construcciones matemáticas modernas, es ardua y exige un profesorado bien formado, a la vez que unas ideas claras sobre la finalidad de la enseñanza en los planificadores. Esta visión general no puede ser presentada al alumno como una introducción, pues sólo puede ser comprendida cuando se ha alcanzado un cierto nivel de abstracción, en el cual se unifican los problemas particulares; por tanto, debe ser alcanzada gradualmente. Es el profesorado el que debe tener bien clara la meta que se desea alcanzar para ir conduciendo al alumno por el camino adecuado, a la vez que le va descubriendo el panorama que ha de alcanzarse al final del recorrido.

2.3.2 Los contenidos teóricos y el modo de presentarlos

Dada la imposibilidad de acertar cuál va a ser el instrumento matemático preciso que nuestros alumnos requerirán dentro de unos decenios (que posiblemente no estén desarrollados todavía), e incluso la variedad de los recursos especializados que necesitarán poco después de terminar sus carreras, se comprende que la elección de los contenidos teóricos de las asignaturas de Matemáticas sea prácticamente arbitrario, con tal de que cumpla el requisito de proporcionar al alumno, en el momento debido, el reducido aparato matemático necesario para la comprensión de las explicaciones de otras asignaturas. Cumplida esta condición, los contenidos han de escogerse de modo que permitan el mayor progreso posible hacia los objetivos formativos antes propuestos y, de hecho, encontraremos una gran libertad en esa elección. Dentro del conjunto de teorías que suelen designarse con el nombre poco afortunado de “Matemática Moderna”, podemos escoger algunas que resultan ideales para ejercitar al estudiante en los procesos de abstracción a que antes nos hemos referido. Pero en realidad la inclusión de estas materias de “Matemática Moderna” en los programas no garantiza de ningún modo el que se alcancen esos objetivos, pues el éxito depende mucho más de cómo se presentan las materias y del tipo de trabajo que se suscite sobre ellas que de su contenido propiamente dicho. Por el contrario, esas Matemáticas Modernas pueden ser peores que las clásicas para los fines que proponemos si en vez de ser tomados como medio para que el alumno se ejercite en los procesos de abstracción, cada vez a mayor nivel, y alternativamente de aplicación a lo concreto, se presentan como construcciones abstractas ya acabadas, totalmente desligadas del mundo de lo concreto, como simple juego lógico-deductivo.

Por otra parte, el dinamismo que exige el momento actual hace que el profesor no pueda ya mostrar un comportamiento dogmático ni aun en la elección de los axiomas de partida para la construcción de una teoría matemática; el profesor no puede creer seriamente que los sistemas de hipótesis que hoy se consideran como más convenientes lo seguirán siendo por muchos años; los alumnos merecen algunas consideraciones sobre lo que *justifica* la adopción de unas hipótesis de partida, o de unas definiciones, y no de otras distintas; el señalar sin justificación alguna la dirección en que se ha de dar cada uno de los pasos que no venga impuesto por la fuerza de la lógica deja al alumno la impresión de que las Matemáticas son las actividades que menos lugar dejan a la iniciativa personal. Ni en clase de Matemáticas ni en ninguna otra podemos enseñar *cómo son* las cosas, sino cómo se ha aceptado que sean, por qué se ha aceptado tal cosa, con qué garantías, con qué reservas, qué alcance cabe dar al modelo propuesto y cuál sería el camino de mejorarlo.

La modernización de la enseñanza de las Matemáticas no debe consistir en la sustitución de unos contenidos por otros en los programas, sino en sustituir la exposición de un repertorio de estructuras acabadas, dogmáticamente seleccionadas, por el ejercicio de una actividad que prepara al alumno para la manipulación de las estructuras abstractas que le ofrezca el futuro y para la creación de las que necesite en circunstancias que nuestra imaginación apenas puede sospechar hoy día.

2.3.3 Ejercicios y problemas

Si hemos tratado de señalar la escasa importancia del contenido de los programas para el éxito de la educación matemática, habremos de resaltar ahora que lo verdaderamente decisivo es la clase de actividad que los alumnos realicen sobre ese contenido. Así, por ejemplo, la simple retención memorística; de definiciones, demostraciones y fórmulas es prácticamente estéril, como también lo sería una enseñanza preocupada exclusivamente por el rigor lógico de cada uno de los pasos deductivos que se diesen.

La misión del profesor no es transmitir una información que posee sobre las Matemáticas, sino la de provocar una actividad en los alumnos que les lleve al dominio del instrumento matemático que necesitarán. Enseñar matemáticas a futuros ingenieros es enseñarles a usarlas, a aplicarlas en situaciones reales. Por otra parte, en el mundo en cambio acelerado en que vivimos, es insensato tratar de conseguir esto facilitando una "regla" para cada situación prevista; el repertorio de reglas se agotaría inmediatamente; la capacidad de tratamiento matemático de las nuevas situaciones debe surgir de un dominio de las matemáticas fundamentales obtenido de forma que constituya un instrumento lo más polivalente posible.

El conseguir que los alumnos practiquen la actividad matemática aconsejada se puede conseguir fundamentalmente combinando dos medios:

1) Mediante una manera de conducir la enseñanza que lleve a los alumnos a estudiar las teorías incluidas en el programa sin pretensiones memorísticas, ejercitando sobre ellas su propia crítica y procurando tomar modelo de los métodos empleados para la creación de nuevos conceptos, demostración de propiedades, etc.

2) Mediante la realización sistemática de ejercicios y problemas concebidos adecuadamente.

Ambos son imprescindibles y se complementan mutuamente; el primero de estos medios es difícil de poner en práctica y volveremos a ocuparnos de él al tratar de la manera de impartir las clases de Matemáticas; el segundo parece más fácil de aplicar correctamente, aunque su eficacia depende mucho del tipo de problemas que se escoja para guiar la actividad del alumno.

La primera cosa que hemos de señalar es que la explicación en la pizarra de la resolución de problemas, sobre los que el alumno no haya trabajado previamente, suele ser totalmente estéril. A fuerza de ver hacer problemas al profesor, el alumno puede llegar a adquirir algo semejante a ese conocimiento del fútbol que caracteriza al aficionado a ver partidos por la TV, que nada tiene que ver con la habilidad que mostraría con un balón en el terreno de juego. El trabajo personal del alumno al enfrentarse con los problemas es insustituible. Si se cuenta con la voluntad de éste para someterse al entrenamiento exigido, y se le concede el tiempo necesario para llevarlo a cabo, sólo falta ya que el profesor seleccione bien los ejercicios y oriente debidamente al alumno en su resolución.

El valor educativo de los problemas es muy distinto según sus características. Los *ejercicios de simple aplicación de reglas* establecidas en la teoría tienen un valor educativo muy limitado, pero son imprescindibles para que el alumno llegue a adquirir ciertos automatismos de gran valor instrumental o simplemente auxiliar para el estudio de otras partes de la asignatura. Esto se da especialmente en la enseñanza elemental, comenzando por la tabla de multiplicar y acabando por las mecánicas del cálculo algebraico o de la derivación. En la Enseñanza Superior sigue habiendo ocasiones en que es preciso enriquecer el repertorio de automatismos del alumno, pero en mucha menor medida.

Un segundo tipo de problemas es el encaminado a ejercitar la aplicación de las teorías estudiadas, no a casos abstractos proporcionados directamente por el enunciado, sino *a entes que previamente deberá crear el alumno*, por abstracción, a partir de lo concreto. El enunciado de un problema de este tipo tendrá dos partes: una expositiva, en la que se definen unos entes enteramente nuevos para el alumno, aunque muy simples tomando como punto de partida otros que tenga hábito de manejar como concretos; otra, constituida por una serie de preguntas en la que se pide la aplicación directa de la teoría que se está estudiando a esos entes recién creados; un problema de este tipo (del que pueden verse numerosos ejemplos en la colección. de enunciados publicada por esta Escuela para las asignaturas de primer curso) conduce a:

- Ejercitar la actividad de abstracción a partir de situaciones concretas.
- Ejercitar la creación de modelos matemáticos manipulables por las teorías estudiadas.
- Ejercitar la aplicación de lo estudiado a esos modelos.

Una variante de este tipo de enunciados consiste en que la parte expositiva se emplee para definir un nuevo concepto, muy parecido a otro estudiado en la teoría, señalando su similitud y sus diferencias, para pedir a continuación que se haga un desarrollo similar al que se siguió en esa teoría, para detectar las diferencias que aparezcan en los resultados.

Este tipo de problemas, en los que debe trabajarse consultando toda clase de libros, apuntes, etc., constituye, a mi juicio, el mayor valor educativo en la fase de elaboración de los fundamentos, que llena casi por completo el primer curso de las carreras superiores. No obstante, debe buscarse la variedad en las tareas, por lo que los enunciados de este tipo deben alternarse con los que exijan otra clase de actividades.

Cuando las materias estudiadas lo permitan es necesario introducir otro tipo de ejercicios que traten de simular en cierta medida las condiciones reales en que esas materias serán aplicadas en la vida profesional. Esta necesidad se ha reconocido siempre, en teoría, pero la práctica tradicional ha constituido casi siempre un engaño en este terreno. A lo largo de los años. los profesores de Matemáticas hemos estado deformando a los alumnos, tratando de crear un sucedáneo de la realidad, hecho a la medida de las recetas disponibles, con el fin de que éstas cobrasen apariencia de utilidad; una ficción de realidad donde las cosas eran circulares, continuas, lineales o finitas, a medida de nuestros deseos. Se explica así el desconcierto del joven cuando después se encontraba con los auténticos problemas reales.

La costumbre ha consagrado numerosas prácticas viciosas en los problemas destinados a la formación de los técnicos, como, por ejemplo, el abuso de las ecuaciones con coeficientes enteros (de -9 a 9), donde la realidad da valores experimentales, prodigando además métodos casuísticos que sólo tienen aplicación aprovechando esa simplicidad artificiosa.

Pero no nos referimos a vicios de ese tipo, fácilmente subsanables, sino a una verdadera confusión de fondo que afecta al mismo concepto que un técnico debe tener de problema y de solución del mismo.

Para mostrar esa confusión comenzaré con un ejemplo que ya he utilizado en otras ocasiones: se acepta generalmente sin discusión que la solución al problema de determinar la integral definida siguiente es la indicada:

$$\int^{a} \frac{dx}{x} = \log_e a$$

No obstante, cuando nos den un valor numérico de a, a menos que dispongamos de unas tablas de logaritmos, ese resultado nos será de poca utilidad; en realidad hemos reducido el cálculo de esa integral a la determinación del exponente a que debe ser elevado e para obtener a; probablemente hubiese sido más sensato decir que el valor de $ln\ a$, se puede calcular con suficiente aproximación para muchas aplicaciones, dibujando en papel milimetrado un arco de la hipérbola $y=1/x$ y estimando gráficamente el valor de la integral dada al principio. ¿Cuál era el problema y cuál la solución? Este ejemplo nos muestra hasta qué punto es imposible desligar el concepto de resolución de un problema de la consideración de los medios disponibles.

Para el técnico tampoco debe resultar indiferente que el método propuesto para la resolución de un problema implique más o menos trabajo de cálculo, aunque teóricamente conduzca a la misma solución.

Estas consideraciones cobran especial importancia cuando entra en juego la posibilidad de valernos de un ordenador electrónico para auxiliamos en los cálculos, que es la situación real en la totalidad de los problemas técnicos importantes en la actualidad.

Las máquinas informáticas han hecho posible la resolución de multitud de problemas reales que antes eran sencillamente inabordables. Curiosamente, hasta hace poco, la enseñanza de las Matemáticas solía hacerse *eludiendo* la consideración de los problemas reales, en lugar de resaltar la imposibilidad de abordarlos. Se ignoraban todos aquellos problemas cuya dificultad estribaba principalmente en la complejidad de los datos. La mayor parte de los problemas que hoy aborda la Investigación Operativa no hubiesen sido considerados como verdaderos problemas matemáticos hace unos decenios; un ejemplo más claro: el problema de ordenar de menor a mayor una lista de números enteros (o de palabras por orden alfabético) difícilmente se hubiese calificado de matemático. Si lo preferimos así, podemos seguir diciendo que no lo es, pero el hecho es que si la lista es larga la cantidad de trabajo necesaria para la ordenación depende mucho, del sistema escogido para llevarla a cabo; la preparación de un organigrama o algoritmo que sistematice el proceso en forma eficiente no es trivial y constituye un problema, matemático o no, pero de indudable interés. A menos que encontremos un sitio para problemas de estos tipos en otras asignaturas, serán las asignaturas de Matemáticas las que tendrán que darles cabida.

Al alumno de una E.T.S. es inconsentible el ocultarle la complejidad de los problemas reales, haciéndole creer que éstos pueden abordarse por simple yuxtaposición de los problemas artificiosamente simplificados que se le proponen en clase. Le enseñamos a hallar volúmenes de figuras sencillas cuando después tendrá que hallar el volumen de un buque. Y le engañamos si le decimos que para ello "bastaría" con descomponerlo en figuras sencillas, pues le ocultamos que la parte clave del problema es precisamente la de sistematizar esa descomposición.

2.3.4 El desarrollo de las clases

La clase es el acto en el que se produce el contacto personal entre el profesor y los alumnos, necesario para el proceso educativo que se persigue. La manera de realizar este encuentro ha evolucionado relativamente poco en todo el siglo último, a pesar de que tanto las circunstancias como las necesidades han variado sustancialmente.

El escaso rendimiento obtenido está a la vista de cualquier observador y presumiblemente no es debido tan sólo a las deficiencias en medios y en calidad del profesorado que resultan del crecimiento desbordante de los últimos tiempos, unido a una contumaz imprevisión, sino que tiene causas más profundas.

Resulta muy fácil hacer una crítica, dura y negativa, del sistema docente empleado hoy, especialmente en la asignatura de Matemáticas, basado fundamentalmente en la "lección magistral", sólo que con escasez de maestros no es fácil, en cambio, proponer soluciones alternativas. Los ICE se preocupan de ello, pero la verdad es que por ahora, sólo la magia personal de algunos grandes maestros logra hacer realmente eficaz el trabajo en las clases.

En primer lugar destaca la actitud eminentemente pasiva o receptiva de los alumnos en la mayor parte de las clases, y el excesivo número de horas de clase de este tipo que tiene que soportar al día. Actualmente no parece razonable que la clase se dedique a "dictar" un texto, como en plena Edad Media. Las facilidades de adquisición de libros y de distribución de apuntes hacen innecesario el que el profesor gaste su tiempo y el de los alumnos en repetir minuciosamente lo que puede ser estudiado en un libro. La posibilidad de crítica y diálogo que justificaría una exposición oral queda reducida a casi nada en clases numerosas y con la obligación aceptada de desarrollar un largo programa en un número limitado de clases. Incluso las clases prácticas quedan reducidas a una actividad eminentemente receptiva por parte de los alumnos.

El elevado número de clases que un alumno soporta al día le deja ya poco margen para la actividad personal; luego ésta se reducirá casi siempre a "estudiar", es decir, a recibir un producto elaborado, sin ejercicio alguno de la crítica ni de la iniciativa propia. Resulta una sorpresa agradable, que justifica nuestra fe en la supervivencia humana, el que al final de una educación tan deformadora los jóvenes sean capaces de "hacer" algo personal.

Lo verdaderamente notable es que las víctimas de este modo vicioso de desarrollar la enseñanza, lejos de reclamar una rectificación del método, agravan el problema cargándose con clases particulares en las que mantienen actitudes todavía más pasivas que en la Escuela, y hacen que los profesores expliquen en la pizarra hasta el último detalle de lo que ellos han de aprender, no porque ello contribuya a su formación, sino por un pintoresco razonamiento de que "sólo puede exigírseles lo que previamente se les ha dado", y porque así limitan la cantidad de materias que el profesor les hará estudiar para los exámenes.

Los intentos de algunos profesores de mejorar esta situación, además de resultar vanos dentro de los fuertes condicionamientos de la enseñanza actual, son también generalmente mal acogidos por los alumnos.

Si reflexionamos sobre estos hechos de apariencia paradójica descubriremos que la verdadera causa de la mayor parte de los males que aquejan a la enseñanza es *la posición central que ocupan los exámenes en las motivaciones* de todos. Toda la actividad de los alumnos queda volcada hacia la superación de las pruebas, y además, no siempre en forma racional, sino angustiosa, mostrando a veces comportamientos que casi podríamos clasificar como de pánico colectivo. Hasta tal punto domina la situación el fantasma de los exámenes que los mismos profesores olvidan su misión educativa para dedicarse a ser meros preparadores, obsesionados con que sus alumnos lleguen a superar las pruebas que ellos mismos proponen.

Mientras ese fenómeno social no cambie, un profesor de matemáticas puede hacer muy poco para paliar las consecuencias: Tan sólo poner el máximo cuidado en la reglamentación y contenido de las pruebas que establezca, ya que ellas serán las que determinen la marcha de la enseñanza.

2.3.4 Las evaluaciones

El nombre de "evaluación", al igual que de "examen", es muy engañoso cuando se aplica a las pruebas a que sometemos a nuestros alumnos; sugiere una operación de medida o estimación de los conocimientos, de la madurez, o de las aptitudes que muestran. Pero así como una tormenta prosigue su evolución totalmente indiferente a que el meteorólogo efectúe o no en ella, sus medidas de presiones, temperaturas, etc., o una enfermedad continúa su curso con independencia de que el médico tome los datos precisos para elaborar su diagnóstico (esto sería más discutible si tomamos en consideración al subconsciente y a lo psicosomático), el comportamiento de un alumno variará por completo si sabe que va a ser sometido a una prueba de cuyo resultado se derivan consecuencias socialmente muy importantes. De aquí que las evaluaciones no sean simples mediciones, sino que determinan decisivamente el comportamiento de los alumnos sometidos a ellas, del mismo modo que una política fiscal no se limita a repartir los impuestos entre las distintas personas, sino que influye decisivamente en la actividad económica del país.

La planificación de un sistema de evaluaciones no es un problema de metrología, sino un problema de política educativa, ya que de ella dependerá la orientación de la enseñanza, al menos, mientras la sociedad conceda tan alto valor a los títulos o resultados de esas evaluaciones.

Si queremos educar la iniciativa personal, la capacidad de enfrentarse a nuevos problemas, el saber “hacer”, y no sólo decir, el dominio de los mecanismos de abstracción, la inventiva técnica, el espíritu crítico, las cualidades necesarias para el trabajo en equipo u otras cualidades deseables en un ingeniero, deberemos diseñar nuestros sistemas de evaluación de modo que fomenten las actividades que conducen a esa educación o, cuando menos, no obliguen a consagrarse de tal modo a otras actividades que hagan imposible cualquier progreso hacia esos objetivos educativos.

Restringiéndonos ahora al caso de las evaluaciones de las asignaturas de Matemáticas podemos aportar algunas recomendaciones que sin que el seguirlas garantice en absoluto el éxito educativo pueden contribuir, en mi opinión, a no agravar los defectos que hemos señalado antes.

-- Para evitar el abuso del aprendizaje memorístico, las evaluaciones han de hacerse casi en su totalidad permitiendo al alumno el uso de toda clase de libros y apuntes; se simulan así mejor las condiciones de trabajo de la realidad y se reduce casi todo el examen a "hacer" algo, en lugar de a "repetir" algo.

-- Para incitar al alumno a una asimilación completa de los conceptos fundamentales de la asignatura, las evaluaciones deben comprobar que sabe *aplicarlos* correctamente a casos propuestos.

-- Para que el alumno lleve a cabo conscientemente los procesos de abstracción y deducción que se incluyen en la asignatura, en lugar de limitarse a “aprenderlos”, las evaluaciones deben pedirle que lleve a cabo otros análogos.

-- Para que el alumno se habitúe al lenguaje propio de las Matemáticas, no sólo para su lectura, sino para su expresión, las evaluaciones deberán pedirle la expresión de los resultados en lenguaje matemático correcto.

-- Para que el alumno dedique el tiempo preciso a la adquisición de las habilidades y automatismos de cálculo que se consideren imprescindibles, las evaluaciones deberán comprobar los resultados de esa labor.

-- Para que el alumno no se aleje del contacto con el tipo de problemas que presenta la realidad, las evaluaciones habrán de fomentar ese enfoque realista de los problemas de que hablamos antes.

-- Por último, para aprovechar las oportunidades educativas que el mismo acto de la evaluación posee se procurará dar a las pruebas utilizadas el máximo valor didáctico. En efecto, ya que rara vez se consigue hacer trabajar a un alumno con tanta intensidad y con tanto interés como a lo largo de una evaluación, hemos de esforzamos en que ese trabajo le sea provechoso para su formación además de servimos a nuestra finalidad calificadora.

Las evaluaciones que se realizan en mi cátedra están pensadas teniendo en cuenta las recomendaciones anteriores; no estoy seguro, en cambio, de haber conseguido en gran medida el resultado buscado. La crítica constructiva de los demás puede, sin duda, contribuir a mejorar esas evaluaciones para el futuro. Y de lo que no me cabe ninguna duda es que el suscitar estos problemas y crear inquietudes acerca de ellos en todos nosotros contribuirá beneficiosamente a su solución.

Julio Fernández Biarge, mi padre

Pedro Fernández Liria
Doctor en Filosofía y Letras por la UAM
Prof. de Filosofía de Enseñanza Secundaria en Madrid
pedro.fernandezliria@educa.madrid.org

Son muchas las cosas que sus hijos tenemos que agradecerle a mi padre. Mi padre nos ha amado mucho más de lo que hemos sido capaces de amarle a él, nos ha regalado una vida feliz y llena de satisfacciones, se ha preocupado por nosotros en cada momento de nuestras vidas, hizo posible que pudiéramos estudiar y formarnos en lo que cada uno quisimos hacerlo, respetó en todo momento nuestras decisiones y nuestras convicciones, aunque alguna vez le dolieran o le contrariaran. Pero, para mí, lo más valioso y lo mejor que nos ha dejado mi padre es, sin lugar a dudas, su *sentido de la justicia.*

Mi padre nos dio muchas cosas, pero sobre todo nos dio *ejemplo.* Nos enseñó que la felicidad es un don que a veces tenemos la fortuna de disfrutar, pero que hacernos *dignos* de ella es fruto exclusivo de nuestro esfuerzo; y nos enseñó que es en esto, en hacernos dignos, en lo que debemos empeñar nuestra energía, sin anteponer la búsqueda de la felicidad a la de su merecimiento.

Mi padre nos enseñó a escuchar la voz de nuestra conciencia (que es la voz de la razón); a identificar como tales las maldades en las que incurrimos, a no ocultárnoslas a nosotros mismos, a no excusarlas ni proporcionarles falsas coartadas y a responsabilizarnos en todo momento de las mismas. A no actuar más que según aquellas máximas que de verdad pudiéramos querer que gobernasen la voluntad de cualquiera o que realmente nos gustase que determinaran la actuación de todos. Nos enseñó a examinarnos con severidad a nosotros mismos y a ser, no obstante, comprensivos con las faltas de los demás. Y creo que esto es lo más valioso que aprendimos de él.

Pero en esta ocasión, quiero reconocer especialmente el que no dejara nunca de hacernos partícipes de su ingente sabiduría. Puedo decir que mi padre es, sin duda alguna, el mejor profesor que he tenido. Con mi padre, he logrado entender multitud de cosas que, sin sus explicaciones, jamás habría entendido. Cuando mis actuales alumnos quieren saber algo que desconocen acuden a internet, de donde obtienen un amasijo de información fragmentaria y de fiabilidad a menudo muy cuestionable. Cuando yo quería saber algo le preguntaba sin más a mi padre. Daba igual si mis preguntas tenían que ver con las matemáticas, la lógica, la astronomía, la física, la química, la biología, la geología, la epistemología, la economía, la historia, el arte o la informática. Sus respuestas siempre superaban con creces mis expectativas. Siempre acababa obteniendo de sus explicaciones mucho más conocimiento del que creía que me faltaba.

Mi padre contagiaba sus ilimitadas ganas de saber, de saber acerca de todo; nos afectaba a todos de su inquietud incontenible por el conocimiento y por la verdad. Cualquier cosa, cualquier detalle, por trivial e insignificante que pareciese, se convertía fácilmente en objeto de su insaciable curiosidad. A su juicio, todo cuanto podía ser conocido, merecía ser conocido.

En su carácter, coexistían sin tensión la más sincera humildad y la más alta ambición, la más absoluta falta de vanidad, de arrogancia y de presunción y la más acentuada inquietud por saber más y mejor. Modesto hasta lo patológico, reconocía, no obstante, sin ambages, que a él, como a Albert Einstein, lo que le gustaría es «saber si Dios tuvo alguna opción al crear el mundo» [1]. No le asustaban las grandes preguntas, ni retrocedía ante ninguna dificultad sin haber intentado repetidamente superarla.

Todos conocen la famosa proclama de Einstein: «Quiero saber cómo creó Dios este mundo. No estoy interesado en éste o aquél fenómeno, ni en el espectro de tal o cual elemento. Quiero conocer los pensamientos de Dios; [en relación con esto,] todo lo demás son detalles» [2]. Pues, bien, yo creo que en lo más hondo del corazón de mi padre ardía ese mismo deseo.

Hasta un mes antes de su muerte, mi padre estuvo trabajando y escribiendo sobre los pequeños o grandes problemas que le inquietaban. Sobre lo último que le vimos escribir, apenas unos días antes de ingresar en el hospital, fue sobre la simetría en la naturaleza, un tema sobre el que casualmente yo mismo me hallaba investigando por mi cuenta. Me había interesado en él precisamente a raíz de unos comentarios que mi padre había hecho a unos textos que escribí durante el verano sobre la relación entre la física y las matemáticas. Como Einstein, Langevin, Wigner o Hamming, a mi padre siempre le había interesado profundamente la misteriosa efectividad de las matemáticas en el conocimiento de la naturaleza [3]. ¿Cómo es posible que las matemáticas, que parecen ser un producto puramente ideal del pensamiento, se adapten, no obstante, tan extraordinariamente bien a la realidad extramental? ¿Cómo es posible que algo que –según cierta opinión común– no es más que un juego entre objetos ideales ajenos al mundo en el que vivimos, sea capaz de incrementar el conocimiento que obtenemos de dicho mundo por medio de la experiencia?

En un libro que publiqué hace tres años, y que dediqué, como no podía ser de otra forma, a mi padre, explicaba que me parecía que el problema estaba mal planteado. En realidad, como dice Martin Gardner (uno de los escritores favoritos de mi padre), la «efectividad de las matemáticas» en la investigación de la naturaleza sólo parece «irrazonable» o sorprendente a quien niega a las matemáticas una realidad *independiente* [4], a quienes, como Wigner o Hamming [5], dan por sentado que las matemáticas son puras creaciones o invenciones de la mente. Para un «realista matemático», como era mi padre, que considera que las relaciones y estructuras matemáticas tienen una existencia independiente de la mente de los matemáticos que las descubren o las estudian, la efectividad de las matemáticas no debería ser tan misteriosa ni tan sorprendente.

Hablando sobre esto con mi padre, llegamos a la conclusión de que el problema planteado por Wigner, Langevin o Einstein reunía todas las características de un falso problema. La perplejidad manifestada por éstos surge, en realidad, de la resistencia a aceptar que es la propia naturaleza estudiada por el físico la que procede matemáticamente y que las investigaciones de los matemáticos no hacen sino encontrar, sin proponérselo ni saberlo de antemano, los procedimientos que la naturaleza misma utiliza por su cuenta. A mi padre, le parecía que Paul Dirac lo había expresado admirablemente. Según Dirac «la conexión entre las matemáticas y la física» no reside simplemente en que aquellas sean un *instrumento útil* para describir el universo.

> *"La matemática pura y la física –decía Dirac– están relacionadas cada vez más estrechamente, aunque sus métodos continúan siendo diferentes. Se puede describir la situación diciendo que el matemático practica un juego en que él mismo inventa las reglas, mientras que el físico practica un juego en el que la naturaleza proporciona las reglas, pero que según transcurre el tiempo se hace cada vez más evidente que las reglas que el matemático encuentra interesantes son las mismas que las que ha escogido la naturaleza. Es difícil predecir cuáles serán los resultados de todo esto. Posiblemente, las dos materias se unificarán en última instancia, teniendo entonces su aplicación física toda rama de la matemática pura, cuya importancia en la física será, por otra parte, proporcional al interés que tenga en la matemática. […] [Aunque] actualmente, nos encontramos todavía muy lejos de este nivel, incluso con relación a algunas de las cuestiones más elementales [6]".*

Si duplicamos un objeto no tiene sentido, después, sorprenderse de que duplicado y original coincidan. ¿Por qué pensar que las matemáticas a las que recurre el físico para formular sus leyes son *otras* que aquellas a las que recurre la propia naturaleza? ¿Qué obstáculo nos impide creer –después las conclusiones a las que nos ha llevado la física contemporánea– que la entraña misma de la naturaleza es matemática?

En mi opinión, y creo que en la de mi padre también, la confusión tiene su origen en la «filosofía» espontánea de los físicos de la primera mitad del siglo pasado, el «positivismo», obstinado en la identificación de lo real con lo observable. Contra la opinión de esta influyente «filosofía», la física en general y la física cuántica en particular no hablan de lo que podemos observar, sino de aquello oculto que *rige de antemano* en lo que observamos. Es a ello a lo que se refieren sus ecuaciones. Y ello es la «realidad» que las ciencias físicas se esfuerzan en desvelar. Se trata de un mundo que podemos *pensar,* pero que no siempre podemos *ver,* aunque no por ello es menos *real.* De hecho, es mucho más real que el engañoso mundo que percibimos. Y el destino ha querido que el pensamiento que lo puede pensar sea un pensamiento *matemático;* un pensamiento como ese que los matemáticos «juegan» a desarrollar sin preocuparse en absoluto de su aplicabilidad, pero que, inesperadamente, de cuando en cuando, viene a indicar la pauta que la naturaleza ha decidido seguir en su proceder.

Los matemáticos estudian estructuras y relaciones reales, aunque, obviamente, no todas ellas estructuran u ordenan la realidad física. Como sugiere Dirac, corresponde al físico determinar cuáles de dichas relaciones y estructuras son las que ha escogido la naturaleza para pautar su comportamiento o cuáles de las mismas se hallan *realizadas* en la naturaleza. Un punto de vista similar fue adoptado también, en ocasiones, por el propio Albert Einstein [7]. Si aceptamos que las relaciones y las estructuras matemáticas son *reales* y se encuentran de algún modo particular «ahí fuera», como la propia realidad física, no es tan «irrazonable» que ésta última exhiba la marca de las anteriores, que la realidad física se halle *ordenada* matemáticamente. Tanto los «objetos» matemáticos, como los planetas o las estrellas, forman parte de una realidad que no hemos inventado, que no nos necesita en modo alguno para existir y que no es como es a causa de que nosotros seamos como somos. De nuestro ingenio y talento matemáticos depende el que podamos conocerla mejor, porque, si algo hemos llegado a saber desde Galileo, es que las matemáticas no son en absoluto indiferentes a la naturaleza (como bien podría ocurrir si éstas fueran meras elucubraciones de nuestra mente). Y así, podemos concluir que las matemáticas son «efectivas» porque la propia naturaleza es matemática. Nos guste o no, así es como es la realidad.

De la discusión con mi padre de este problema, surgió precisamente mi interés por la *simetría* y su papel en las ciencias físicas, que, como decía antes, creo que fue el último tema sobre el que vi escribir algo a mi padre. Estando él ya bastante enfermo, me puse a seguir las pistas que él me había dado para el estudio de algunas simetrías encontradas por la física. Me interesaba sobre todo si el tratamiento algebraico de las simetrías (geométricas o no) observadas en la naturaleza podía, por sí sólo, proporcionar un conocimiento acerca del mundo físico, como parecen sugerir las recientes teorías del campo unificado o las teorías de cuerdas. O dicho de otra manera: me interesaba saber si las matemáticas forman parte de la *estructura de lo real* hasta el punto de permitir que podamos conocer ciertos aspectos de la realidad *a partir de consideraciones lógico-matemáticas puramente abstractas.* ¿Podemos realmente obtener algún conocimiento del mundo físico a partir de estructuras matemáticas como la teoría de grupos y el teorema de Noethere la teoría de grupos, según parecen dar por supuesto algunas teorías unificadas?

A mi padre le seducía enormemente esta posibilidad, aunque no se atreviera a apostar por ella. Él pensaba, como Roger Penrose, que de ciertas estructuras matemáticas, como el sistema de los números complejos o el conjunto de Mandelbrot, se obtiene más de lo que en primer término se puso en ellas [8]. «Uno no puede escapar a la sensación –había dicho en el mismo sentido Heinrich Hertz– de que ciertas fórmulas matemáticas tienen una existencia independiente por sí mismas, y que son más sabias aún que sus descubridores, ya que obtenemos más que lo que pusimos en ellas» [9].

Cuando los matemáticos encuentran estructuras como éstas, es como si hubieran tropezado con «obras de Dios» [10], con algo que efectivamente está *ahí fuera* y que es *independiente* de la mente de los matemáticos que las han concebido.

De hecho, algunas de estas estructuras matemáticas parecen formar parte de la estructura de la realidad física. Si no fuera así, difícilmente podrían explicarse su eficacia *heurística* y su sorprendente poder *predictivo.* Recuerdo haber repasado con mi padre algunos ejemplos de este rendimiento heurístico de las matemáticas y la teoría pura en el ámbito de la ciencias físicas, a raíz de una lectura que hicimos juntos [11]. Hablamos del descubrimiento del *neutrino,* después de haber sido postulado teóricamente por Wolfgang Pauli en 1931, o el del descubrimiento mucho más reciente del *bosón de Higgs,* postulado casi cincuenta años antes de su detección en el laboratorio con el fin de *dar consistencia lógica y matemática* a la teoría unificada de las fuerzas débil y electromagnética (el llamado «modelo electrodébil», desarrollado en la década de los sesenta por S. Glashow, A. Salam y S. Weinberg).

Pero, como me hizo ver mi padre, resultaba aún más ilustrativo a este respecto el modo en que Paul Dirac, Premio Nobel de Física en 1933, llegó a la ecuación que representa *relativistamente* el comportamiento de un electrón. Como es sabido, las ecuaciones básicas de la mecánica cuántica encontradas por Heisenberg-Born-Jordan (por un lado) y Schrödinger (por otro) a mediados de los años veinte del siglo pasado no satisfacían los requisitos establecidos por la teoría de la relatividad especial presentada por Einstein en el *annus mirabilis* 1905. En 1927, inquietado por este problema, Dirac se puso a trabajar en la formulación de una teoría que diese cuenta del comportamiento de los electrones y que, al mismo tiempo, fuera consistente con los principios de la relatividad especial. Tras unos meses de duro trabajo, cuenta Dirac, «la solución llegó como llovida del cielo». ¿Cómo? Según sus propias palabras, Dirac dio con la famosa ecuación que lleva su nombre «jugando con las matemáticas». Dirac buscaba una descripción del comportamiento de una entidad *física,* pero dejó que fuesen las abstractas matemáticas las que le *instruyeran* acerca de ello. Buscó entre las estructuras matemáticas que conocía y, tras algunos tanteos, encontró en las matrices la pista que le permitiría formular la ecuación a la que se ajustaba o a la que respondía la entidad física en cuestión. Como explica José Manuel Sánchez Ron:

> *"Se trataba de una ecuación –relativista, por supuesto– poco habitual, que utilizaba matrices 4 x 4; esto es, objetos matemáticos formados por cuatro filas y cuatro columnas de números. Esto significaba que la función incógnita, el objeto matemático que describía la ecuación y que debía representar al electrón, tenía cuatro componentes. Dirac se dio cuenta de que esos cuatro componentes correspondían a, por un lado, dos posibles orientaciones del espín, uno de los atributos básicos de las partículas cuánticas, y, que hasta entonces no había podido ser explicado (se había introducido porque era necesario para explicar resultados experimentales), y, por otro, a valores positivos y negativos de la energía. La predicción relativa al espín, en particular, fue entendida inmediatamente como un gran éxito: se tenía una ecuación relativista de una partícula elemental, el electrón, que «producía» su espín (en este sentido, era razonable concluir que el espín era un atributo eminentemente relativista) [12]".*

Así, pues, las abstractas estructuras matemáticas estudiadas por Dirac parecían saber más sobre la naturaleza y el comportamiento de algunas entidades físicas que los propios físicos. A muchos de éstos –sobre todo a los que se hallaban convencidos de las tesis positivistas y empiristas dominantes en aquella época–, les resultaría sorprendente que «jugando con las matemáticas puras» se pudiera adquirir una información tan valiosa acerca del mundo físico como la que proporcionaba la ecuación de Dirac. Pues lo que el trabajo de Dirac venía a poner de manifiesto es, en efecto, que las matemáticas resultan ser capaces de *instruir* acerca de la realidad física tanto o más que la observación directa de la misma.

Porque, además, la ecuación relativista de Dirac, esa soberbia ecuación que el galardonado físico británico declaraba haber encontrado «jugando con las matemáticas», tendría otros inesperados rendimientos en la investigación del mundo físico cuántico. Resulta que, para disgusto del propio Dirac, la recién hallada ecuación predecía estados negativos de energía. En un intento de explicar este desagradable resultado, Dirac propuso una sorprendente teoría conocida como «teoría de los agujeros» o «de los huecos». Según ésta, el vacío constituiría un «mar» uniforme de estados de energía negativa, todos ellos ocupados por electrones («mar de Dirac»). Los electrones de energía positiva se mantendrían «por encima» del mar invisible, formando los estados «excitados». Cualquier electrón de energía negativa podría, a su vez, ser «excitado», pasando a tener energía positiva y dejando un «agujero» que podría ser ocupado por otro electrón de energía positiva. Según Dirac, los agujeros vacantes de ese mar de estados de energía negativa se comportarían como partículas cargadas positivamente. En un primer momento, Dirac pensó que el hueco correspondería a un protón, pero su colega Hermann Weyl descartaría convincentemente esta posibilidad al señalar que el hueco habría de comportarse como si tuviera la misma masa que el electrón, siendo así que el protón es unas dos mil veces más masivo que el electrón. Por motivos de los que ahora no puedo ocuparme, Dirac no llegó a identificar los huecos con una nueva clase de partícula elemental, una especie de «antielectrón» de carga positiva e idéntica masa que los electrones. Pero, en 1932, experimentando con rayos cósmicos, el físico Carl Anderson descubriría una partícula de tales características que inmediatamente sería identificada con los «huecos» de Dirac. La partícula recibió el nombre de «positrón».

Pero, aunque, en este caso, fuese el propio Dirac el que dudara del poder predictivo de las matemáticas y de la «irrazonable efectividad» de las mismas en la investigación de la naturaleza [13], de nuevo habían sido las matemáticas las que habían señalado el camino a seguir para alcanzar una descripción más completa del mundo físico. Pues resulta evidente que, aunque el positrón fue detectado en el laboratorio, es hijo de las matemáticas y de la teoría pura. La manera en que

Dirac afrontó el problema de los estados negativos de energía se convirtió en una pauta de actuación que daba sus frutos en el campo de las ciencias físicas: «la matemática rendía frutos, guiaba a la física» en su progreso [14]. Y los físicos posteriores ya nunca dejarían de tenerlo presente.

Me entusiasmé con estas reflexiones y con otras realizadas sobre temas adyacentes como la simetría de las leyes de la naturaleza, las simetrías *gauge* y la unificación de las fuerzas de la naturaleza, la posible existencia de un grupo de simetría de la naturaleza y el proyecto de una teoría final… Pero, desgraciadamente, no tuve tiempo de discutir estas reflexiones pausadamente con mi padre. Me hallaba yo ocupado en encontrar la forma de formularlas por escrito cuando mi padre cayó fatalmente enfermo. El 14 de noviembre de 2012 hubimos de ingresarlo en el Hospital, y, pasados diez días, supe que ya no tendría oportunidad ni de escuchar su opinión sobre tales temas ni de plantearle las numerosas preguntas que el estudio de los mismos me suscitaba. El desamparo intelectual que entonces sentí sólo es comparable en alcance y profundidad al desamparo en que, días más tarde, me sumió su desaparición definitiva.

En la actualidad, acabo de terminar un libro –acerca de algunos aspectos ontológicos y epistemológicos de la física contemporánea– que me habría encantado poder comentar con mi padre. He escrito cada página del mismo pensando en él, como si él mismo estuviera a mi espalda, mirando por encima de mi hombro la pantalla del ordenador donde tecleaba. No sé si el libro valdrá finalmente la pena, pero estoy seguro de que habría aprendido mucho discutiéndolo con él. Mucho más de lo que he aprendido escribiéndolo.

Como he dicho antes, hace tres años publiqué otro libro: una introducción a la filosofía que incluía numerosas reflexiones acerca de la naturaleza y el proceder de la ciencia, en general, y de la física, en particular. Desde luego, no se trata de un libro importante ni especialmente valioso, pero quise, pese a todo, dedicárselo a mi padre, porque, aunque contiene notables errores que son sólo responsabilidad mía, la mayor parte de sus aciertos se deben en última instancia a él. Supongo que el libro habrá pasado sin pena ni gloria por los círculos académicos a los que iba dirigido, y, seguramente, no se merecía otra cosa. Pero, en lo que a mí respecta, el libro ha recibido el mayor galardón que podía soñar que recibiera: la aprobación y el reconocimiento de mi padre. Porque, antes de irse, mi padre me dijo que yo «había escrito justamente el libro que a él le hubiera gustado escribir», y esas palabras fueron para mí como haber recibido el Premio Nóbel. Mientras paladeaba con fruición ese inesperado regalo, dejé engordar mi orgullo y mi vanidad tanto que casi llegué a olvidar que, exceptuando algunos partes bastante desafortunadas, es como si efectivamente lo hubiese escrito mi padre. Mi mérito se reducía a haber puesto el menor número de trabas posible a su influencia intelectual.

Por eso, quizá lo mejor que puse de mi parte en aquellas páginas fue la dedicatoria, en cuyo contenido me reafirmo ahora más que entonces, si cabe. Pues, sin duda alguna, mi padre ha sido «el hombre más sabio que he conocido». Me siento inmensamente afortunado de haber podido disfrutar no sólo de su amor y de su atención permanente, sino también de su sabiduría. Y nunca agradeceré esto lo suficiente.

Referencias

[1] A. Einstein citado por Gerald Holton en *The Advancemente of Science, and Its Burdens,* Cambridge University Press, Cambridge, 1986, p. 91

[2] E. Salaman, *A Talk with Einstein,* The Listener, 54, 1955, pp. 370-371; cf. M. Jammer, *Einstein and Religion,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999, p. 123

[3] E.P. Wigner, «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences», en *Communications on Pure and Applied Mathematics,* XIII, febrero de 1960, pp. 1-14

[4] M. Gardner, *Orden y sorpresa,* Alianza Editorial, Madrid, 1987, p. 208; cf. p. 29

[5] R.W. Hamming «The Unreasonable Effectiveness of Mathematics», en *American Mathematical Monthly,* vol. 87, febrero de 1980, pp. 81-90

[6] P.A.M. Dirac, «The relation between mathematics and physics», Lecture delivered on presentation of the James Scott prize, 6 de febrero de 1939, texto publicado en *Proceedings of the Royal Society (Edinburgh),* vol. 59, 1938-39, Parte II, pp. 122-129

[7] De Dirac, véase P.A.M. Dirac, «The relation between mathematics and physics», Lecture delivered on presentation of the James Scott prize, 6 de febrero de 1939; texto publicado en *Proceedings of the Royal Society (Edinburgh),* vol. 59, 1938-39, Parte II, pp. 122-129. En el mismo sentido que el legendario Paul Dirac, se ha expresado mucho más recientemente el físico estadounidense Murray Gell-Mann, Premio Nobel en 1969 por sus descubrimientos en el campo de las partículas elementales; cf. M. Gell-Mann, *El quark y el jaguar. Aventuras en lo simple y lo complejo,* Tusquets Editores, Barcelona, 2003, pp. 126-127. De Eisntein, véase,

por ejemplo, «Geometría y experiencia», en *Mis ideas y opiniones,* Antoni Bosch, Barcelona, 1985, pp. 208-219

[8] Cf. R. Penrose, *La mente nueva del emperador,* Mondadori, Madrid, 1991, pp. 131-134

[9] H.R. Herz, citado por M. Kline en *Quoted in Mathematics,* Oxford University Press, Oxford, 1988, p. 338; cf. R. Penrose, *La mente nueva del emperador,* Mondadori, Madrid, 1991, pp. 131-132; e I. Stewart y M. Golubitsky: *¿Es Dios un geómetra? Las simetrías de la naturaleza,* Crítica, Barcelona, 1995, p. 293

[10] R. Penrose, *La mente nueva del emperador,* Mondadori, Madrid, 1991, p. 134

[11] La lectura del libro de Gino Segrè *Fausto en Copenhague. Una lucha por el alma de la física moderna,* Ariel, Barcelona, 2010, 1ª edic.

[12] J.M. Sánchez Ron, *Diccionario de la ciencia,* Planeta, Barcelona, 1996, p. 113

[13] Según la citada expresión de Eugene P. Wigner.

[14] J.M. Sánchez Ron, *Diccionario de la ciencia,* Planeta, Barcelona, 1996, p. 113

Apunte biográfico de Julio Fernández Biarge

por José Luis Cabanes Torrente
Profesor Titular de Universidad excdte.
jlcabanes34@hotmail.com

Julio Fernandez Biarge en 1968 en Santander

1. Formación

Julio Fernández Biarge nació en Zaragoza el 7 de agosto de 1924. Se *licenció en Ciencias* (Sección Exactas) en la Facultad de Ciencias de esa ciudad en enero de 1946 con Premio Extraordinario. Fue Premio Nacional Fin de Carrera. De sus años de Facultad guardó siempre especial recuerdo del privilegio de haber tenido a *Pedro Abellanas* como maestro y así lo expresó en un artículo publicado en este Boletín: "*Los que tuvimos la suerte de seguir sus cursos, le debemos la parte más importante de nuestra formación matemática"*. Al terminar la licenciatura, Don Pedro le ofreció trabajar bajo su dirección en Geometría Algebraica, lo que aceptó con entusiasmo. Julio contaba como anécdota que tuvo que empezar por aprender el alemán necesario para traducir un ejemplar del libro de Van der Waerden (sin retenerlo mucho tiempo), y hacer cuatro copias manuscritas a lápiz y papel carbón, en una época en que no había ni fotocopiadoras ni bolígrafos. En el curso 1946/47 y en parte del siguiente, estuvo ejerciendo la docencia en la Facultad de Zaragoza, como Encargado de la Auxiliaría de Análisis Matemático, como Ayudante de Clases Prácticas de Geometría y Trigonometría y como Encargado de la plaza de Profesor Adjunto de Geometría.

En 1948 Julio obtuvo por concurso-oposición el puesto de *Profesor Adjunto* de *Geometría Analítica y Topología* de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid, que ocupó hasta finalizar el curso 1959-60, ejerciendo además como Profesor Encargado de Cátedra en los cursos 48/49 y 49/50. Ese mismo año, 1948, el Prof. Abellanas obtenía por oposición la cátedra de Geometría Proyectiva de dicha Facultad, lo que permitió a Julio continuar trabajando en el campo de la Geometría Algebraica bajo la dirección del Prof. Abellanas, como becario del Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas del CSIC. Fruto de este trabajo fueron varios artículos publicados en la "Revista Hispano-Americana de Matemáticas" y en "Gaceta Matemática" y la tesis doctoral de título "Estudio aritmético de los sistemas lineales de divisores de un variedad algebraica", nº 11 de las Memorias del Instituto "Jorge Juan". En abril de 1949 recibió el grado de *Doctor en Ciencias* (sección de Matemáticas) por la Universidad de Madrid, con Premio Extraordinario. Era el primer doctorando de la larga lista de doctores dirigidos a lo largo de los años por el Profesor Abellanas.

2. Investigador del CSIC

El año 1953 fue crucial en la vida de Julio por el giro insospechado de su actividad investigadora en el CSIC, iniciada cinco años antes bajo la dirección de Pedro Abellanas. Según me dice Maruja, esposa de Julio, fue el propio Abellanas quien propuso a Julio que fuese a ayudar a los investigadores del Instituto Rocasolano para mejorar los aspectos matemáticos de sus publicaciones de las que él tenía responsabilidad de supervisar. Debió ser tan apreciada la ayuda que les prestó que lo retuvieron.

En efecto, en 1953 fue nombrado *Profesor Agregado* del citado Instituto y *Jefe del Laboratorio Matemático* (él era "el laboratorio"), integrándose en los equipos que llevaban a cabo las investigaciones en el campo de la Química Física. Colaboró en 32 trabajos publicados en los "Anales de la Real Sociedad Española de Física y Química", en "Spectrochimica Acta", "Electrochimica Acta", "Journal of the Chemical Society", "Journal of Chromatografic Science" , entre otras. Recuerdo que, con ocasión de un pequeño homenaje por su jubilación, me mostró la lista de esos artículos y me dijo que se sentía orgulloso de su participación en ellos. Uno de sus colaboradores, el Dr. Rico Sarompas, compañero mío de Colegio Mayor en los últimos 50, me expresaba hace poco su admiración y gratitud a Julio por su contribución a elevar el nivel de los trabajos del Instituto con sus conocimientos y acertadas observaciones.

En paralelo con su aportación a las investigaciones en Química Física, durante los cursos 1953/54 y 1954/55 fue encargado del curso monográfico de Doctorado "El instrumento matemático de la Química Física" y desde el curso 1955/56 hasta el 1959/60 impartió la asignatura "Físico-Química matemática", en la sección de Químicas. Y la de "Ampliación de Matemáticas" a los alumnos de 2º curso de la Sección de Geológicas, en el curso académico 1958/59.

Durante esos años prestó decisivo auxilio a la introducción de las técnicas de cálculo numérico, primero mecánico y mediante ordenadores, cuando estos hicieron su aparición, lo que supuso su inicio en el campo de la Informática. Ello le llevó a ser nombrado Vocal de la Comisión Gestora del Centro de Cálculo Electrónico en julio de 1961, y a participar muy activamente en la creación del *Centro de Cálculo Electrónico del CSIC.* Un año después, 1962, fue nombrado *Director*, con el encargo de ponerlo en marcha, de coordinar su instalación en un nuevo edificio y de dirigir la formación del personal contratado. Como Titulado Superior de 1ª en la plantilla del CSIC y como Director del Centro, entre 1962 y 1970, realizó una ingente labor en la introducción del uso del ordenador en las tareas de investigación científica de los distintos Institutos del CSIC, organizando e impartiendo personalmente cursillos de introducción al uso de los ordenadores, de lenguajes de programación y de aplicaciones informáticas. Supervisó todos los trabajos que se hicieron en el Centro para los Institutos de investigación del Consejo y realizó la labor de análisis y programación para la resolución de muchos problemas de investigación. Pasó a la situación de supernumerario el 31 de enero de 1971.

Esta evolución de su actividad dentro del CSIC le llevaron a hacer esta reflexión, con motivo del fallecimiento de su maestro, el Prof. Abellanas: *"Fui su primer discípulo, ... le debo lo más importante de mi formación matemática, aunque esta formación la he empleado en menesteres muy distintos de los que él hubiese deseado ... Le defraudé, dedicándome a aplicar los conocimientos que él me había proporcionado al auxilio de los investigadores en Química Física primero y a las aplicaciones informáticas después. Sé que le dolió, pero nunca me lo recriminó".*

3. Catedrático

Circunstancias administrativas impidieron a Julio opositar a la Cátedra de Geometría Analítica y Topología de la Facultad de Ciencias de Madrid de la que era Encargado de Cátedra en el curso 1949/50. Ello le llevaría a cambiar sus planes y así, en abril de 1951 obtenía por oposición el nombramiento de *Catedrático de Matemáticas* del Instituto de Enseñanza Media de San Isidro, en Madrid, donde coincidió con quien iba a ser su segundo maestro, *Pedro Puig Adam*. Así lo dejó escrito en el artículo que le dedicó en el año 2000, centenario de su nacimiento, publicado en otro número de este Boletín: *"Siendo un joven inexperto, tuve la inmensa suerte de encontrar allí al insigne maestro Puig Adam. Él me trató siempre como compañero y amigo, pero en realidad fui su discípulo durante los nueve años que compartimos la enseñanza de las matemáticas en el Instituto"* y añade, "*él me descubrió el apasionante panorama de la Didáctica Matemática, ... , fue para mí un ejemplo de sensibilidad, de honestidad profesional, de vida entregada al servicio de los demás y de entusiasmo en la labor cotidiana, que he procurado seguir desde entonces"*. De él aprendió, según cuenta, que "*cuando se concibe la vida como servicio, el tiempo ya no es caudal propio sino ajeno"* y vio que hacía de su vida el ejercicio de lo que decía. Y yo puedo afirmar que Julio puso en práctica a lo largo de su vida todo lo que de su maestro aprendió.

En junio de 1960 obtenía Julio, por oposición, la *Cátedra de Matemáticas* de la Escuela de Ingenieros Navales de la UPM, pasando a la situación de excedencia activa en el Instituto San Isidro. En la Escuela comenzó por diseñar la estructura de la enseñanza de las matemáticas definiendo y elaborando los cuestionarios de seis asignaturas. Tomó a su cargo las del primer curso, *Algebra Lineal y Cálculo Infinitesimal,* porque, como escribió en la introducción a los apuntes que redactó para ambas asignaturas, "*ambas constituyen la primera y última oportunidad de que dispone el futuro ingeniero para adquirir una formación básica en el campo de las Matemáticas, que le permitirá, más adelante, abordar el estudio de aquellas ramas de la Matemática Aplicada que necesite en su labor profesional.* A lo largo de los años Julio fue perfeccionando y ampliando los apuntes de Cálculo Infinitesimal y se convirtieron en un libro, editado por Dossat mediada la década de los 80, que destaca por la originalidad, el rigor y la elegancia de su planteamiento, como el Prof. Moreno Torres, pone de relieve en el prólogo. Los apuntes de Álgebra siguieron otro proceso. Los temas relativos a álgebra lineal, propiamente dicha, se fueron estudiando a partir de 1971, por los textos de M. Queysanne y más tarde por los de Juan de Burgos. En cambio los temas de Geometría Analítica se siguieron explicando según los textos redactados por Julio, editados ya bajo el título “Temas de Geometría”. Al final de la década de los 70 Julio introdujo, a costa de una hora semanal de Algebra, unas lecciones de Informática, redactadas por él y editadas por la Sección de Publicaciones de la Escuela con el título “Temas de Informática”.

Las evaluaciones se hacían según las ideas de Julio expuestas en los números 7 y 8 de este Boletín, mediante exámenes escritos consistentes en la resolución de ejercicios cuyos enunciados, preparados cuidadosamente por los profesores, constaban de unos cinco apartados relacionados entre sí, procurando combinar cuestiones teóricas que obligaban a redactar los razonamientos, con ejercicios de destreza de cálculo. El alumno se podía servir de toda clase de apuntes, textos, libros de problemas o de colecciones de estos. Al término del examen recibían las soluciones de los ejercicios propuestos. Con los problemas de las evaluaciones trimestrales y exámenes finales, unos veinte por asignatura y curso, se confeccionaron sendas publicaciones: tituladas “Problemas de Calculo Infinitesimal. Enunciados” y “Problemas de Algebra Lineal y Geometría. Enunciados”, puestas al día periódicamente.

Establecida la organización departamental en la UPM, en 1988 el Prof. Fernández Biarge fue nombrado *Jefe del Departamento* de Enseñanzas Básicas de la Ingeniería Naval, función que desempeñó hasta su jubilación en el año 1989. Tras ser nombrado *Profesor Emérito* de la Universidad Politécnica de Madrid, fue contratado por la ETS de Ingenieros Navales, en febrero de 1990, por un año, contrato que fue prorrogado sucesivamente hasta el año 2000. De la labor desarrollada durante esos años, el Prof. Juan Miguel Sánchez, Jefe del Centro de Cálculo de la Escuela en esos años, puede dar cumplida razón.

Ligadas a su condición de Catedrático de Instituto y de Catedrático de Universidad, llevó a cabo otras muchas actividades entre las que se pueden citar: su colaboración con la D.G. de Enseñanzas Medias en la redacción de temas de exámenes de Grado Elemental y Superior y en los tribunales de las pruebas correspondientes, así como en los de las Pruebas de Madurez del Preuniversitario; haber sido Presidente de tribunales de las Pruebas de Acceso (Selectividad) a la UPM desde 1976 hasta 1989; haber sido miembro de tribunales de oposiciones a cátedras. Y también las numerosas ponencias presentadas a seminarios organizados por el ICE de la UPM, participaciones en cursos organizados por la UIMP, por la Real Academia de Ciencias, por la Universidad Complutense,…,y los artículos publicados en diversas revistas, relativos principalmente al perfeccionamiento de la docencia y a la didáctica de las matemáticas.

Julio se ha ocupado durante toda su vida de la docencia de forma ininterrumpida. Era su vocación, la amaba y tenía abundantes cualidades para desempeñarla: conocimientos profundos y claridad de ideas, lo que se manifestaba en sus explicaciones, plenas de rigor sin perjuicio de su claridad, y en sus escritos, de redacción impecable y fluida. Es notable también la originalidad y variedad del ingente número de problemas que ha propuesto en todo tipo de exámenes, concursos y Olimpiadas Matemáticas.

4. Informático

Sólo su inteligencia y su total disposición a atender cualquier necesidad de forma generosa, con entrega total y sin reserva, pueden explicar su trayectoria en el CSIC que la inicia (1948) en el ambiente matemático de la Geometría Algebraica, la prolonga (1953) con su colaboración en investigaciones en Química Física al tiempo que se ve forzado por las circunstancias a subirse, él solo, al veloz tren de la Informática y que finaliza (1962) organizando e instalando el Centro de Cálculo Electrónico del CSIC y en el puesto de Director.

Como destacada autoridad en la materia, en 1966 recibió el encargo de dirigir la creación de un Centro de Servicios Informáticos y la instalación de un ordenador para el Data System Group de I.T.T., en las dependencias de Standard Eléctrica, S.A.

Por la misma razón y por su relación con la Ingeniería Naval a través de la Escuela, en febrero de 1971 ingresó en el Departamento de Informática de Astilleros Españoles S.A. quedando integrado en un reducido grupo con la misión de investigar en los métodos de producción asistida por ordenador en los astilleros. Participó sustancialmente en el desarrollo del sistema de programas A.N.A. *(Arquitectura Naval Automatizada)* y desarrolló sistemas para la definición matemática de las formas de un buque y dibujo de sus planos por control numérico; para desarrollo plano de las planchas alabeadas, incluidos comandos de control numérico para el oxi-corte… Dirigió el equipo que llevó a cabo un Plan Concertado de Investigación entre la Administración y la empresa A.E.S.A. para la elaboración de nuevos métodos de diseño, elaboración, verificación y montaje de tuberías a bordo de buques mediante ordenadores, tema este que dio lugar a una tesis doctoral. Desarrolló algoritmos y programas para la determinación de caminos óptimos de conductores eléctricos a través de una red de conductos, … En pleno periodo productivo causó baja por imperativo de los Planes de Reconversión del Sector Naval (1984).

Nombrado Vocal de la Comisión Gestora de la *Facultad de Informática de la UPM,* participó activamente en la elaboración de sus planes de estudio y en su puesta en marcha. Tras la creación de la nueva facultad en julio de 1977, fue designado miembro de su Comisión Asesora y se le encomendó la dirección y tutoría de las asignaturas de Algebra y Cálculo en el curso 1977/78. Posteriormente quedó incorporado al Claustro de esta Facultad y a la de la *E.U. de Informática*.

5. La persona

Quien le haya tratado de cerca en cualquiera de las actividades que ha desarrollado en su vida habrá apreciado sus muchas cualidades. Desde el primer contacto se percibía su sencillez y discreción, su amabilidad expresada en su rostro sonriente. Conversando se advertía su inteligencia, claridad de ideas y sus profundos conocimientos en muchos campos, en los científicos, especialmente. Cuando se planteaba un problema escuchaba los pareceres de los demás y, si se le preguntaba, hacía ver que sabía *"juzgar correctamente para obrar correctamente"* (que, según Descartes, en eso consiste la sabiduría). Si era necesario hacer algo para resolver el problema planteado, aparecía su disposición a emprender las acciones pertinentes de forma generosa, con entrega total y desinteresada. En la tarea demostraba su capacidad de trabajo, para hacerlo bien y con diligencia. Si alguien, alumno o compañero, necesitaba de su ayuda, la prestaba generosamente,… Además de estas cualidades tenía las que le transmitieron sus maestros, Abellanas y Puig Adam: una formación matemática excelente, el primero; la entrega apasionada a la formación de los alumnos, el segundo, y de ambos el ejemplo de sus conductas, que asimiló. Por todo ello Julio ha sido querido, respetado y admirado por quienes lo hemos conocido.

Añadiré que fue un lector infatigable y curioso de todo lo nuevo que se publicara en el campo de la Ciencia, la Tecnología, la Filosofía, la Sociedad, … Viajero, observador, dispuesto siempre a aprender… Cristiano profundo, se interesó mucho por la Teología, sobre la que siguió varios cursos, dejó escritos algunos artículos y dado alguna conferencia. Y consecuente con su fe, colaboró asiduamente, junto con Maruja, en labores de atención a los necesitados dirigidas por su Parroquia, ... Aficionado al cine (los domingos, primera sesión de la tarde), a las exposiciones de arte, a la fotografía, … De excelente memoria, recordaba con mucho detalle los lugares que había visitado en sus viajes.

En sus últimos años se interesó por temas filosóficos y trató de ellos con su hijo Pedro. A propósito del libro que este publicó hacia 2010 de título "*¿Qué es la filosofía? Prólogo a veintiséis siglos de historia",* en más de una ocasión oí hablar a Julio con entusiasmo de él y confesar que era *"el libro que me gustaría haber escrito"*. No creo que fuera por corresponderle, sino porque así lo había vivido, que Pedro se lo dedicase en estos términos: "*A mi padre, el hombre más sabio que he conocido*".

6. Maestro, compañero, amigo

En septiembre de 1965 regresábamos Marisa y yo a Madrid, tras dos años de ausencia, con dos hijos y un tercero en camino. Se hizo evidente la necesidad de encontrar una ocupación para las tardes libres con la que ayudar a nuestra economía. Por mi amigo y compañero Germán Flórez supe de la existencia de un puesto de encargado de curso en la cátedra de Julio Fernández Biarge, Director entonces del CCE del CSIC. Hacia allí me dirigí una tarde de ese mes de septiembre para manifestar a mi antiguo profesor de Prácticas de Geometría Analítica (1952/53) mi interés en formar parte del grupo de profesores de su cátedra. Le expuse brevemente mi historial académico y mi experiencia como profesor de Matemáticas y él, sin pedirme más datos, me aceptó y me dio a elegir asignatura. Algo sorprendido por el rápido desarrollo de los acontecimientos, elegí Algebra sin pensarlo mucho y sin conocer en detalle su programa, acaso recordando lo que en mi época de Facultad me interesé por los *grupos*, *anillos, cuerpos y espacios vectoriales* que descubrí y estudié en los artículos de Ricardo San Juan sobre Teoría de Magnitudes, publicados en la Revista de la Real Academia de Ciencias.

Así fue como me incorporé en el curso 1965/66 al grupo de profesores encargados de auxiliar a Julio en la docencia de las asignaturas de Matemáticas del primer curso de la Escuela de Ingenieros Navales cuyos alumnos, distribuidos en tres o cuatro grupos, recibían cinco o seis horas lectivas semanales por asignatura. Durante los dos primeros cursos escolares me encargué de las clases de Algebra ("Álgebra Lineal y Geometría Analítica") de uno o dos grupos y, con ánimo de renovar mis conocimientos, pasé a dar Cálculo Infinitesimal durante los tres cursos siguientes. En el curso 1970/71 volví al Álgebra y, quizás a partir del curso siguiente, me pareció que Julio dejaba tácitamente que me responsabilizara de esta asignatura, y más aún al ingresar en el cuerpo de Profesores Adjuntos. Jubilado Julio en 1989, continué con la asignatura hasta que dejé la Escuela al término del curso 1995/96. De los 31 años que he permanecido en la Escuela, los 23 primeros he estado con Julio, aprendiendo de él en el contacto diario, en las conversaciones de todo tipo que teníamos los profesores en su despacho sobre las asignaturas, los problemas, los alumnos, la enseñanza, sobre cualquier cosa …. Coincidí desde el principio y durante muchos años con quienes fueron mis amigos íntimos, *Germán* Flórez y *Martín* Sánchez Marcos, ya fallecidos. Ambos excelentes profesores, son recordados con afecto por sus alumnos.

En el año 1984 me habló Julio de la recién fundada Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas de la que él era uno de los principales impulsores. Me hice socio. Siento un gran aprecio por el Boletín de la Sociedad. Algunos de sus artículos me han servido para celebrar seminarios y dar conferencias informales. Por él he tenido noticia de dos compañeros muy queridos de la Facultad, Fidel Oliveros y Juan Ochoa y he sabido algo más sobre mis profesores Pedro Abellanas, José Barinaga, Pedro Pineda, Germán Ancochea, Joaquín Arregui, **....**

Más tarde, jubilado en 1999, me inscribí en la Asociación de Profesores Jubilados de la UPM y Julio, que ya era Vocal de la Junta Directiva, me animó a que formara parte de ella. Durante varios años colaboré con él en la preparación de la documentación de las visitas, excursiones y viajes. Así hasta 2005, año en que Julio, siendo Vicepresidente, cumplía los años de mandato previstos por el Reglamento y cesaba como miembro de la Junta, mientras yo continuaba hasta 2008. No obstante siguió dando sus apreciadas conferencias y ocupándose de la edición de las suyas y de las de otros.

A lo largo de todos estos años se fue fraguando una entrañable amistad entre las familias de Julio, de Martín y mía, compartiendo excursiones, celebraciones familiares, paseos, sesiones de cine, … , amistad que, desaparecidos los dos primeros, mantienen viva las esposas Maruja, Conchi y Marisa, y yo mismo.

De Julio puedo decir, copiándole, que "*me trató siempre como compañero y amigo, pero en realidad fui su discípulo durante los años que compartimos la enseñanza de las matemáticas en la Escuela y luego los trabajos en la Asociación de Jubilados".* Confieso mi admiración y mi afecto hacia él pese a que por mi carácter algo reservado y acaso por la diferencia de edad y exceso de respeto por mi parte, nunca me atreví a profundizar suficientemente nuestra amistad. Lo he lamentado cuando ya era tarde, como lamento no haberle frecuentado con más asiduidad en los dos últimos años de su vida, cuando sus facultades físicas le fallaban y se hacía difícil conversar con él. Intenté compensarlo en sus últimos días y lo quiero hacer ahora con esta nota que no llega a decir todo lo que de bueno merece ser dicho en su honor.

Publicaciones, artículos y conferencias

A) Como Becario del Instituto "Jorge Juan" del CSIC

1.- *Estudio aritmético de los sistemas lineales de divisores de una variedad algebraica*. Memorias del Instituto "Jorge Juan" de Matemática del CSIC, Nº11, año 1950.
2.- *Proyectividades staudtianas cíclicas finitas*. Revista Matemática Hispano-Americana del Instituto "Jorge Juan" de Matemática (C.S.I.C.), Vol. VIII, 1948.
3.- *Sobre las variedades de coincidencia de una correspondencia birracional entre variedades algebraicas superpuestas*, Revista Matemática Hispano-Americana, Vol. X, 1950.
4.- *Coincidencias de una correspondencia algebraica*, Revista Matemática Hispano-Americana, Vol. X, 1950.
5.- *Ecuaciones de recurrencia*. Gaceta Matemática del Instituto "Jorge Juan" de Matemática (C.S.I.C.) y la R.S.M.E., Vol II, 1950.
6.- *Invariantes de las secciones planas de las cuádricas*. Gaceta Matemática, Vol III, 1951.
7.- *Cúbicas circulares*. Gaceta Matemática, Vol. IV, 1952.

B) Como Profesor Agregado del "Instituto Rocasolano" del CSIC.

En colaboración (de entre los siguientes artículos los numerados 8 al 27 fueron publicados en los Anales de la Real Sociedad Española de Física y Química)

8.- *Físico-Química de la destilación molecular: X. Destilación molecular de mezclas*, 52 B, p 13, 1956.
9.- *Físico-Química de la destilación molecular: XII. Aplicación del tratamiento matemático que tiene en cuenta el agotamiento de la interfase*, LII B, p 77, 1956.
10.- *Cinética de la oxidación anódica del ión oxálico: II. Discusión teórica*, LII B, p 601, 1956.
11.- *Teoría de las intensidades en infrarrojo de las bandas fundamentales de vibración-rotación*, LII A, p 181. 1956.
12.- *Intensidades en infrarrojo. Nota sobre la teoría del método experimental de medida*, LII A, p 193. 1956.
13.- *Función potencial y coordenadas normales del fluoroformo*, LIII A, p 235, 1957.
14.- *Estudio de las concentraciones óptimas en la determinación de las constantes de equilibrio*, LIV B, p 325, 1958.

15.- *Acerca de la determinación experimental de la intensidad de Crawford de bandas de vibración-rotación*, LIV A, p 281, 1958.
16.- *Intensidades en infrarrojo y polarización atómica*, LIV B, p 623, 1958.
17.- *Momentos de enlace y sus derivadas en metanos fluorados y clorados*, LV A, p 77, 1959.
18.- *Acerca de la sobretensión de los halógenos: II. Estudio de polarizaciones de concentración*, LV B, p 13, 1959.
19.- *Impedancia faradaica con electrodos de platino: II. Estudio teórico de su actuación en presencia de sistemas de oxi-reducción*, LV A, p 93, 1959.
20.- *Impedancia faradaica con electrodos de platino: III. Estudio del sistema Fe^{3} /Fe^{2}* . LV A, p 103, 1959.
21.- *Impedancia faradaica con elctrodos de platino: IV. Estudio del sistema I / I^{-}*, LV A, p 137, 1959.
22.- *Aportación al estudio de las propiedades de enlace*, LV A, p 267, 1959.
23.- *On the interpretation of infra-red intensities in gases*, LVII A, p 81, 1961.
24.- *Matrices F y G en moléculas heterocíclicas pentagonales . Elementos de G para el pirrol, furano y tiofeno*, LVII A, p 117, 1961.
25.- *Intensidades absolutas en infrarrojo de tetracloruros de carbono y silicio*, LVII A, p 117, 1961.
26.- *Equilibrio líquido-vapor en sistemas binarios formados por el ácido acético y los alcoholes propílico, isopropílico, butílico secundarioy butílico terciarioa 760 mm*, LXIX B, p 587, 1973.
27.- *Comportamiento termodinámico de algunos sistemas binarios ácido acético-alcohol en equilibrio líquido-vapor*, LXIX B, p 569, 1973.
28.- *The experimental determination of infra-red intensities. Bond polar properties in CHF and CHCl*, Spectrochimica Acta, pp 110-121, 1959.
29.- *Study of the impedance of a platinum electrode in a redox system*, Spectrochimica Acta, Vol 1, pp 130-145, 1959
30.- *Intensities infrarubie. Theoria de bandas vibrational-rotational moléculas polyatómicas*, Spectroscopia Molecular, 5, p 59, 1956.
31.- *Nota super la theoria del método experimental*, Spectroscopia Molecular 6, p 8, 1957.
32.- *Faradaic impedance in the electrolysis of Halogens*, Yaeger, Transactions Of The Symposium On Electrode Processes, 1961.
33.- *Kinetics of the thermal decomposition of acetals*. II. The Mrthyal Chain, . Journal Of The Chemical Society, 429, pp 2311-2320, 1963.
34.- *Complete quadratic potential function for out-of-plane vibrations of tiophene*, Journal Of Molecular Spectroscopy 19, 2, pp 188-202, 1968.

35.- *IR intensities in CHCl and CDCl*, Journal Of Molecular Structure, Vol. 8, pp 77-87, 1969.

36.- *Mixed columns made to order in Gass Chromatography. I. Isothermal analysis*, Journal Of Chromatografic Science, Vol. 7, pp 305-312, 1969.

37.- *Mixed columns made to order in Gass Chromatography.II. Programmed temperature. Analysis at constant pressure drop*, Journal Of Chromatografic Science, Vol. II, pp 538-546, 1973.

38.- *Mixed columns made to order in Gass Chromatography. III. Programmed temperature. Analysis at constant flow rate*, Journal Of Chromatografic Science, Vol. II, pp 538-546, 1973.

39.- *Mixed columns made to order in Gass Chromatography. IV. Isothermal selective separation of alcoholic and acetic fermentation products*, Journal Of Chromatografic Science, Vol. 16, pp 61-67, 1978.

C) Artículos varios

40.- *Cumulantes integrales,* Actas de la 1ª R.A.M.E. (Reunión de Matemáticos Españoles), Madrid, 1961.

41.- *Calculadoras en la investigación científica* (coautor J. Barcala Herreros), Revista de Automática II, nº6, 1969.

42.- *¿Debemos explicar Matemáticas en clase de Matemáticas?,* Actas de la 9ª R.A.M.E., Granada, 1969.

43.- *Breves ideas sobre los cerebros electrónicos*, Monografías del Centro de Orientación Didáctica, 464, "Cuadernos Didácticos", 1964.

44.- *Medida de magnitudes geométricas*, Cursillos sobre Didáctica Matemática, Tomo III, 1970.

45.- *Nuevos derroteros en la Enseñanza Científica y Técnica*, Atlántida y Boletín del Centro de Documentación, 1968.

46.- *Así nace un buque*, Informática IBM, nº 2, pp 3-8, 1972.

47.- *Suavización y ajuste de funciones empíricas*, Actas de las I Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas, pp 609-617, Lisboa 1972.

48.- *Enseñanzas Técnicas para el futuro*, Edutec (ICE de la UPM), Ingeniería Naval, 1975.

49.- *Las Matemáticas en las Enseñanzas Técnicas*, (ICE de la UPM), Ingeniería Naval, 1975.

50.- *La informática como ayuda a la producción*, Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales: Curso de Conferencias sobre Informática. Madrid, 1987.

D) Artículos publicados en nuestro Boletín de la Sociedad "Puig Adam"

51.- *Educación e Informática*, nº 4, pp 27-36, 1985.
52.- *Ejercicios críticos sobre algoritmos*, nº 6, pp 23-36, 1986.
53.- *Evaluación*, nº 7, pp 13-23, 1986.
54.- *Evaluaciones en Matemáticas*, nº 8, pp 25-41, 1986.
55.- *Tender a infinito*, nº 11, pp 17-31, 1986.
56.- *¿Fracaso escolar? ¿Fracaso docente?,* nº 12, pp 49-58, 1987.
57.- *Inteligencia Artificial*, nº 15, pp 27-42, 1987.
58.- *¿Geometría del Espacio",* nº 21, pp 17-39,1989.
59.- *En torno al logotipo de la XXVIII OME*, nº 30, p 23, 1992.
60.- *Algunas propiedades de las cúbicas*, nº 33, pp 21-35, 1993.
61.- *Algunas propiedades de las cúbicas circulares*, nº 34, pp 21-38, 1993.
62.- *Triangulación de la superficie esférica*, nº 44, pp 15-23, 1996.
63.- *Recuerdo de Don Pedro Abellanas*, nº 54, pp 8-14, 2000.
64.- *Puig Adam*, nº 56, pp 27-34, 2000.
65.- *Funciones periódicas*, nº 57, pp 41-51, 2001.
66.- *El Goniocentro*, nº 60, pp 38-45, 2002.
67.- *Sobre el logotipo de nuestra Sociedad*, nº 61, pp 22-27, 2002.
68.- *Estudio de las secciones planas de las cuádricas mediante sus invariantes métricos*, nº63, pp 32-44, 2003.
69.- *Problemas y Soluciones*, nº 65, pp 11-16, 2003.
70.- *Sobre la descripción de un sólido convexo mediante su alzado, planta y vista lateral*, nº 68, pp 17-21, 2004.
71.- *Redes de Steiner de esferas*, nº 72, pp 14-26, 2006.
72.- *Los matemáticos y el SUDOKU*, nº 73, pp 18-24, 2006.
73.- *Nota sobre problemas desconcertantes*, nº 74, pp 28-32, 2006.
74.- *Los distintos usos de la palabra "espacio",* nº76, pp 21-31, 2007.
75.- *Cuárticas bicirculares*, nº 77, pp 34-43, 2007.
76.- *Una generalización del teorema de Pascal al espacio de tres dimensiones*, nº 79, pp 21-25, 2008.
77.- *Acerca de los diámetros de Newton de una curva algebraica*, nº 83, pp 15-23, 2009.
78.- *Nota sobre asimetrías heredadas en Biología*, nº 93, pp 59-61, 2012.

E) Conferencias pronunciadas y editadas para la Asociación de Personal Docente Jubilado de la UPM

M.C. Escher consiguió dibujar lo imposible, pero ¿sabía matemáticas? (año 1992).
Religión y Ciencia ¿Guerra o paz? (año 1997).
La soledad del hombre en el Universo (año 1998).
La universidad de W. Heisenberg (año 1999).
Un turista en Machu Pichu (año 2000).
2000, entre otras cosas, Año Mundial de las matemáticas (año 2000).
Libertad (año 2001).
Globalización (año 2002).
Un viaje de 25 años (año 2002).
Un paseo por el mudéjar aragonés (año 2003).
Los estudiantes de ayer y de hoy y los docentes jubilados (año 2004).
Johannes Kepler y la armonía del Universo (año 2004).
¿Por qué funcionan los ordenadores? (año 2005).
Arbitristas (año 2007).
Impactos de meteoritos (año 2008).

La labor del Prof. D. Julio Fernández Biarge en el Instituto de Química Física y en el Centro de Cálculo Electrónico del CSIC

Prof. Manuel Rico Sarompas
ex-Director del Departamento de Espectroscopía y
Estructura Molecular del Instituto de Química Física (CSIC)
mrico@iqfr.csic.es

Abstract

This is a survey of the scientific accomplishments of Prof. Julio Fernández Biarge in his stage at the Institute of Physical Chemistry and the CSIC's Computing Center in the 50's and 60's of last century. His contributions to different areas in Physical Chemistry, as well as in Computing Science, were highly outstanding, as it was his underlying mathematical support to all scientific research carried out at the Institute at that time.

Es para mí un placer contribuir con esta pequeña nota al homenaje que este Boletín rinde a la figura del Prof. Julio Fernández Biarge, tristemente desaparecida a finales del pasado año. Cuando se me invitó, no dudé un solo momento en aceptar, por la oportunidad que se me brindaba de rendir un merecido tributo a su figura y por poder expresar a la vez mi gran admiración por su persona. Sirva esta nota también como contribución a la gran deuda, que desde el punto de vista académico y científico, tengo contraída con él.

Conocí y colaboré con Julio en una estrecha época de su carrera, la que va desde 1957 a 1963 del pasado siglo, época en la que realicé mi Tesis Doctoral en el Departamento de Espectroscopía y Estructura Molecular del Instituto de Química Física del CSIC.

La historia de la relación de Julio con el Instituto de Química Física del CSIC es la siguiente: a principios de los 50 del pasado siglo, el Catedrático de Química Física de la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid y Vicedirector del Instituto D. Octavio Foz Gazulla, de formación alemana, consideró que la formación matemática de los investigadores del Instituto no alcanzaba los niveles que serían de desear. Un grupo de investigadores del mismo organizó de forma entusiasta un estudio conjunto del libro de Margenau & Murphy "The Mathematics of Physics and Chemistry", traduciéndolo además al español para facilitar su uso a becarios e investigadores jóvenes del centro. El libro contenía las materias clásicas de esa disciplina: las matemáticas de la termodinámica, ecuaciones diferenciales, análisis vectorial, cálculo de variaciones, ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, matrices, valores y funciones propias, teoría de grupos y simetría y mecánica cuántica. Era evidente que todo ello superaba con mucho los recursos autodidactas de los implicados, por lo que se decidió contactar con un experto. Y aquí entró en juego Julio, a la sazón Catedrático del Instituto de Segunda Enseñanza "San Isidro" y Profesor Adjunto de Geometría Analítica en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Complutense de Madrid. Julio se encargó de dirigir los seminarios matemáticos, que cristalizaron en un curso denominado "El Instrumento Matemático en Química Física", que fue aceptado como curso de Doctorado en la Complutense e iba dirigido a investigadores y becarios del CSIC. Al mismo tiempo, se le encargó la asignatura del mismo nombre en 4º curso de la especialidad de Química Física de la Licenciatura en Ciencias Químicas. Poco después, se creó en el Instituto, ya con reconocida categoría administrativa, el llamado Laboratorio Matemático que permaneció activo desde 1953 a 1963, fecha esta última en la que se le nombró Director del recién creado Centro de Cálculo Electrónico del CSIC.

La labor que desarrolló Julio en el Laboratorio Matemático fue de una gran relevancia y contribuyó, sin duda, a elevar el nivel científico del mismo. Es importante destacar que la labor de Julio en el Instituto no se limitó a dar apoyo matemático a las investigaciones propias de la Química Física, sino que su contribución fue mucho más allá, participando con muy buen criterio en las discusiones relativas a problemas puramente físicos. No hubo en Julio divorcio entre el matemático y el físico.

Julio colaboró con investigadores del Instituto en muy diversas áreas, tales como espectroscopía molecular, electroquímica, termodinámica, cinética química y destilación molecular. Fruto de esas colaboraciones fue la publicación de 34 trabajos científicos en distintas revistas nacionales e internacionales. Su colaboración más estrecha fue con los investigadores del Departamento de Espectroscopía y Estructura Molecular, en dos direcciones principales de trabajo: intensidades de absorción en el infrarrojo (IR) y vibraciones normales de moléculas heterocíclicas pentagonales.

Quiero dedicar una especial atención a su trabajo en la primera de estas líneas, que realizó en colaboración con los Prof. J. Morcillo y J. Herranz, en el que desarrollaron la denominada “Teoría de los tensores de enlace” para la interpretación de las intensidades de absorción en Espectroscopía Infrarroja. Previo al desarrollo de la teoría, habían dedicado un gran esfuerzo a la optimización de la medida experimental de las intensidades de absorción y a la obtención de un gran número de medidas experimentales de una serie de moléculas relacionadas: metano y sus derivados halogenados.

Hasta ese momento (finales de los 50), la atención en la espectroscopía infrarroja había estado centrada en la medida e interpretación de las frecuencias de las bandas de absorción. Para la interpretación de intensidades, existía la teoría de los momentos dipolares de enlace, que resultaba insuficiente para explicar satisfactoriamente los resultados experimentales. La teoría desarrollada por Fernández Biarge y colaboradores asignaba a cada vibración un tensor con componentes cartesianas, es decir, con componentes no necesariamente dirigidas a lo largo de los enlaces.

La conclusión general era que la vibración de un enlace tenía una componente significativa en la dirección del átomo más polarizable de la molécula, siendo ésta tanto mayor cuanto mayor era la polarizabilidad del átomo en cuestión. Esta teoría, publicada en revistas españolas hacia finales de los 50 y que mostraba un acuerdo sustancial con los datos experimentales, permaneció sumergida en la bibliografía, hasta que, con ocasión de un congreso internacional sobre Espectroscopía Molecular celebrado en Madrid en 1967, fue redescubierta, constituyéndose hasta la fecha como la teoría de referencia internacional para interpretar las medidas de intensidades en espectroscopía vibracional.

En la segunda dirección de trabajo que he mencionado, dentro de la Espectroscopia Molecular, participé más directamente, pues en ella se encuadraba el tema de mi Tesis Doctoral. Sin entrar en detalles, planteamos el problema vibracional de una serie de moléculas heterocíclicas pentagonales (4 átomos de carbono y un heteroátomo, que podría ser nitrógeno, oxígeno o azufre), asignamos sus frecuencias fundamentales de vibración, realizamos un análisis de modos normales de vibración aplicando Teoría de Grupos y determinamos un conjunto de constantes de fuerza, que vienen a ser como la mayor o menor resistencia de los enlaces a sufrir desplazamientos respecto a su estado de equilibrio, datos de gran utilidad para poder calcular los espectros IR de moléculas análogas.

Siendo ya doctor, marché en 1963 al Imperial College de Londres a realizar una estancia post-doctoral en Espectroscopía de Resonancia Magnética Nuclear (RMN). En esa misma época, Julio fue nombrado Director del Centro de Cálculo Electrónico del CSIC. En 1964 se puso en marcha el primer gran ordenador en el CSIC, un IBM-7070 que, pese a ser uno de los más potentes del momento, pronto se mostró insuficiente para satisfacer las demandas de procesamiento de datos de todos los investigadores del organismo. En la primera época del Centro, Julio desarrolló una formidable labor, poniendo a punto programas y rutinas de cálculo científico y paquetes para la aplicación de ajustes lineales y no lineales para el recién instalado IBM 7070 y el posterior 7090 del CSIC. Paulatinamente, el Centro fue aumentando su potencia de cálculo y el número de servicios asociados. Con el tiempo, se planteó la necesidad de automatizar diferentes procesos de gestión. Ante la inexistencia de una unidad informática que diera cobertura a estas demandas, se encomendó al Centro de Cálculo la realización de estas funciones, entre otras, la elaboración de las nóminas y, posteriormente, el mantenimiento de una primigenia base de datos corporativa. Es en ese momento, una vez que el cálculo deja de ser el objetivo más importante del Centro, cuando Julio pierde la motivación de continuar al frente del Centro, que había compatibilizado hasta entonces con su Cátedra en la Escuela Superior de Ingenieros Navales, obtenida en 1960. A finales de 1966 Julio es relevado de la dirección del Centro por el Catedrático de Óptica e investigador del CSIC José Barcala.

Julio fue para mí un modelo de dedicación, rigor e inteligencia. Siempre dispuesto a echar una mano de forma desprendida. Recuerdo que, encontrándome yo trabajando sobre algún problema de mi Tesis Doctoral, si tenía un momento libre en sus ocupaciones, se sentaba espontáneamente a mi lado, interesándose por lo que hiciera en ese momento. Tras explicarle mis vacilaciones, se hacía inmediatamente cargo del problema y me proponía el camino a seguir, siempre acertado, siempre lúcido. No transigía con dejar las cosas inacabadas y proseguía con la tarea hasta ver cerrado el problema, sin importarle la hora. Cada una de estas sesiones con Julio suponía un avance considerable en mi Tesis Doctoral. Su inestimable ayuda es parte de la deuda que tengo contraída con él. Lo más importante, sin embargo, fue el cómo me transmitió la forma de enfocar los problemas, emanada de su magisterio.

Su mente era realmente privilegiada. Recuerdo, como anécdota, que nos contaba que cuando él y un hermano suyo eran niños, su madre les obligaba a echar la siesta o a acostarse antes, sin sueño. Entonces comenzaban una partida de ajedrez a oscuras, sin tablero y a ciegas. Cuando le preguntábamos quien solía ganar, Julio, con la humildad y honestidad que le caracterizaba respondía que en realidad nunca acababan una partida, sino que después de 10 o 12 movimientos, la discusión transcurría sobre la posición real de las fichas en el tablero.

Su curiosidad era inmensa. Cualquier fenómeno cotidiano, del día a día lo planteaba en términos físicos. Tras un leve tartamudeo, de carácter meditativo, proponía rotundo su interpretación, siempre acertada. Cuando volví de mi Post-

Doc en Londres, charlando sobre las diferencias entre la espectroscopia IR y la de RMN, debidas principalmente al rango de las frecuencias, infrarroja-visible en un caso y radiofrecuencias en el otro, cuestionó muy certeramente las diferencias en los procesos de absorción y relajación y el papel que en este último proceso jugaban la emisión espontánea y la emisión estimulada. Nueva muestra de la amplitud de su conocimiento en Física y de sus acertados criterios.

La labor que Fernández Biarge realizó en el Instituto de Química Física y en el CSIC, en un limitado espacio de tiempo, fue de una enorme importancia, cuestión no del todo reconocida por el Organismo. A partir de 1970, el CSIC perdió toda conexión con él. La Escuela Superior de Ingenieros Navales y otras instituciones fueron, a partir de entonces, las afortunadas receptoras de su fecundo trabajo. A los privilegiados que tuvimos la fortuna de ser sus alumnos, nos dejó su incuestionable magisterio y todo un ejemplo de humildad, rigor, dedicación y extraordinaria inteligencia.

Julio Fernández Biarge "Emérito"

Juan Miguel Sánchez Sánchez
Departamento de Enseñanzas Básicas ETSIN, UPM
juanmiguel.sanchez@upm.es

Abstract

This is a brief Summary of my close collaborations with Julio Fernández Biarge during the two years prior to his retirement (1988-1989) and his ten years as Emeritus Professor of the Technical University of Madrid (1990-2000), when he was the "de facto" Director of the Naval Engineering School Computer Centre.

Mis colaboraciones con Julio Fernández Biarge comenzaron en sus últimos años en activo, poco después de mi nombramiento como Subdirector de la Escuela, y se prolongaron con continuidad los diez años posteriores a su jubilación, a lo largo de los que yo seguí siendo cargo académico y responsable de su centro de Cálculo. Anteriormente nuestra relación, primero como profesor-alumno y después como compañeros, había sido excelente, pero enseñando asignaturas diferentes, el trato no fue diario. El siempre me consideró su heredero matemático en la Escuela, lo que me llenaba de orgullo.

1 Proyecto Halios

Mi primera colaboración directa con Julio se desarrolló en sus dos últimos años en activo, 1988 y 1989.

La empresa SOERMAR SA (Sociedad para el Estudio de Recursos Marinos) solicitó a la ETSIN soporte técnico en la evaluación y control del proyecto "Halios". Un estudio europeo de futuro, cuyo objetivo era definir cómo debía de ser un barco pesquero de finales del siglo XX. De hecho, el proyecto Halios se conocía informalmente como el "proyecto del pesquero del año 2000". Alejandro Mira Monerris, a la sazón Director de la Escuela, se encargó de formar los diferentes comités así como de su posterior coordinación. La labor de los comités consistía en el señalamiento de objetivos, evaluación de los proyectos presentados y en la toma de decisiones correspondiente dentro de sus campos de competencia.

A partir de otoño de 1988, Julio y yo integramos el comité técnico nº 1, cuyo campo de competencia era los sistemas informáticos que un pesquero de última generación debería llevar a bordo, lo que en muchos de los proyectos implicaba la existencia de sistemas relacionados en estaciones en tierra.

Guardo las notas escritas de las evaluaciones y recomendaciones que hicimos a lo largo de año y medio, de las propuestas presentadas, fundamentalmente por empresas extranjeras, y en ellas se transluce la finura de razonamiento y la agudeza del análisis que Julio hacía de ellas. Me sorprendían especialmente sus profundos conocimientos de los temas más dispares y su claridad a la hora de enjuiciar los proyectos. Era el compañero ideal para integrar un comité de estas características.

2 Julio emérito

Tan pronto Julio se jubiló, fue nombrado profesor emérito e inmediatamente le propuse que se hiciera cargo del Centro de Cálculo de la Escuela, que entonces ocupaba la antigua aula de Proyectos del tercer piso de nuestro edificio principal y que tenía un tamaño suficientemente grande para tener una persona encargada a dedicación completa. Le asigné un despacho y la base informática adecuada y comenzó allí su trabajo, sin que a priori hubiera un plan definido sobre cuáles deberían ser sus funciones.

Con la devoción y entrega que siempre ponía en todo lo que emprendía, pronto se convirtió en el "alma mater" del Centro de Cálculo. Atendía todas las preguntas de los alumnos, en principio de cualquier tema que se planteara, y de los no alumnos. Un día nos daba una clase de trigonometría esférica necesaria para la construcción de una malla computacional sobre una esfera, al siguiente, me sugería aplicar mi investigación en micro fracturas en materiales frágiles a la cavitación. Su despacho era visita obligada, siempre interesante en todos los aspectos.

Pasado un tiempo, se centró en la enseñanza de aplicaciones de software para el diseño gráfico con ordenador, algo necesario en la Escuela que carecía en sus programas de estos conocimientos básicos para un ingeniero naval. Durante diez años, de 1990 al año 2000 se dedicó en un horario de mañana completo no sólo a enseñar Autocad, la aplicación CAD de mayor utilización mundial a partir de 1986, y Microstation, otra aplicación CAD muy usada también en los años 90, sino que aplicó los códigos al dibujo del plano de formas del barco, vital para su conocimiento geométrico.

Era emocionante ver con qué cariño y paciencia atendía las consultas de los alumnos que le adoraban. En esos años, todos los conocimientos informáticos de los alumnos de la Escuela fueron consecuencia de sus clases y tutorías no regladas.

Un detalle del compromiso de Julio y de sus inacabables ganas de aprender me lo recordaba mi compañero Leonardo Fernández Jambrina. Julio, fue alumno suyo en 1998 en un curso que dio en la Escuela de las aplicaciones informáticas MAPLE y LATEX. Lo estudiaba para facilitárselo después a sus alumnos del Centro de Cálculo. Precioso ¿no?

Tuvo además tiempo para colaborar conmigo y con Emilio Garbayo, catedrático entonces de Matemática Aplicada de la ETSII, en varios proyectos.

En el primero, impartimos en mayo de 1990, un curso a los ingenieros de la empresa REESA, en el que analizamos los métodos de optimización aplicados a la producción de energía eléctrica.

REESA había adquirido el código MINOS, un sistema complejo diseñado para resolver problemas de optimización de gran porte y que ellos deseaban utilizar para planificar y controlar la explotación de la red nacional de producción de energía eléctrica, para satisfacer la demanda existente de modo óptimo, en algún sentido previamente establecido, relacionado en general con la obtención del máximo beneficio.

Ante los problemas que estaba planteando la aplicación del código por su complejidad, tanto informática como matemática, decidieron encargarnos el curso en el que se estudiaran los fundamentos matemáticos y la estructura del código MINOS. Nos repartimos entre los tres el asunto de modo que Julio se hizo cargo de la Coordinación Hidrotérmica, yo de los métodos matemáticos de optimización, que lógicamente debían cubrir todos los aspectos técnicos utilizados en el código MINOS y Emilio hurgaría los entresijos del código, analizando la estructura del mundo de subrutinas que lo integraban.

De los tres, el que menos conocimientos e información de su tema tenía a priori era Julio, que de cualquier modo lo aceptó encantado. Teníamos un plazo de tres meses para diseñar el curso y preparar las notas correspondientes. Cumplimos nuestro compromiso y fue sorprendente comprobar la minuciosidad y calidad del trabajo de Julio. Con una claridad, marca de la casa, desbrozó un tema sin literatura existente y lo estructuró con su lógica habitual, de modo que era imposible no entender el problema que estaba tratando y sus componentes.

La segunda colaboración entre los tres, el proyecto FORMAS, fue un encargo a Emilio Garbayo del Instituto J. Artigas. Se trataba de diseñar un programa informático de formación matemática asistida. La idea era suministrar al alumno una herramienta informática que diera información teórica sucinta, junto a un motor de inferencia que le permitiera comprobar sus conocimientos e ir superando diversos niveles hasta llegar al óptimo, a nuestro juicio.

Utilizamos el software GUPTA para estructurar el programa y decidimos construir un prototipo. El tema matemático elegido fue la Aritmética compleja y las funciones elementales complejas.

Teníamos reuniones periódicas interesantísimas donde de nuevo se ponían de manifiesto la exquisita calidad de razonamiento de Julio, su creatividad y su enorme capacidad de trabajo. Se avanzó mucho en la construcción del prototipo, pero el prematuro fallecimiento de Emilio dejó el proyecto FORMAS inacabado.

Como se deduce de todo lo anterior, Julio engrandeció y dio sentido al término emérito, bastante debilitado por el mal uso. En cualquier discusión sobre este tema en mi Escuela, Emérito y Julio Fernández Biarge son sinónimos.

La calidad personal y profesional de Julio, fueron un ejemplo magnífico para varias generaciones de ingenieros navales, entre ellas la mía.

La labor de Julio Fernández Biarge en la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y en su Boletín

Eugenio Roanes Macías
Departamento de Algebra UCM
`roanes@mat.ucm.es`

Es para mí un honor y un placer relatar la extraordinaria y fecunda labor desarrollada por el Prof. Julio Fernández Biarge en torno a la Sociedad "Puig Adam", soporte de nuestro Boletín. Comenzaré justificando las razones que me han motivado a erigirme en portavoz de la labor de Julio en la Sociedad y en su Boletín.

Conocí a Julio en la Reunión Anual de Matemáticos Españoles celebrada en Granada en 1968, en que impartió una conferencia plenaria titulada *¿Debemos enseñar matemáticas en la clase de matemáticas?* Me sorprendió el título, pero me sorprendió aun más la originalidad y claridad de ideas del conferenciante.

Al año siguiente formé parte como miembro de un Tribunal de Oposiciones, que presidía él y me volvió a sorprender el modo original y eficaz con que organizó el desarrollo de los ejercicios. En la típica tanda de problemas que se propusieron, se limitó a proponer uno, permitiéndonos que propusiéramos otros los restantes miembros del Tribunal (siempre eludió el afán de protagonismo, que hubiera sido natural, teniendo en cuenta su talla intelectual).

Tuvimos el mismo Director de Tesis, D. Pedro Abellanas. La de Julio fue la primera tesis dirigida por D. Pedro. Comentándole yo a D. Pedro la admiración que me producía la originalidad de Julio, me decía que a él también y me contó que siendo alumno suyo en la Univ. de Zaragoza, le calificó con matrícula la asignatura de Geometría Proyectiva, pero al curso siguiente Julio le pidió permiso para volver a asistir a las clases de la misma asignatura, aludiendo que no le había quedado claro el concepto subyacente implícito en la teoría explicada en una de las clases de la asignatura en el curso académico anterior.

Después coincidí repetidamente con Julio formando parte ambos del Tribunal de la Olimpíada Matemática Española, tanto en su Fase Regional Madrileña como en la Fase Final Nacional.

A mi me ha pasado como a Julio, salvando las distancias, que comenzamos trabajando en Geometría Algebraica y luego nos orientamos hacia la entonces naciente matemática computacional. Y ha sido en esta especialidad en la que he sido coautor con Julio y mi hijo de varios artículos aparecidos en nuestro Boletín y hasta en la Revista de Matemática (RACSAM) de la Real Academia de Ciencias. Recuerdo que, en todos ellos, Julio nos decía: "pero a mi no me pongáis, que yo ya estoy jubilado".

Mi admiración por su originalidad me llevó a asistir a la mayoría de las conferencias con que nos deleitó en la Asociación de Profesores Jubilados de la UPM (sin ser yo profesor de la UPM, ni jubilado), celebradas en el Instituto de la Ingeniería de España y enumeradas detalladamente en la biografía de Julio que publica nuestro consocio José Luis Cabanes en este mismo número del Boletín (no se me puede olvidar el entusiasmo con que nos contaba su ascensión al Machu-Pichu, siendo el único del grupo familiar que no sufrió el "mal de altura", o la previsión de las consecuencias de la globalización económica mundial).

Desaparecido en los años 80 el Instituto "Jorge Juan" de Matemática del CSIC y con él las revistas que soportaba, Revista Matemática Hispano-Americana y Gaceta Matemática (Segunda Época), un grupo de matemáticos de las provincias del centro peninsular (mesetarios), liderados por José Ramón Pascual Ibarra y por Julio, fundaron nuestra Sociedad, con el sobrenombre de "Puig Adam", lo que era natural, teniendo en cuenta que Julio consideraba a D. Pedro Puig Adam como su otro maestro, como comenta Cabanes en la biografía antes mencionada. Ambos, José Ramón y Julio, presidieron sucesivamente la Sociedad en esa etapa inicial (de la Junta Directiva inicial ya no subsiste más que nuestro querido compañero Enrique Rubiales).

En esta primera época de nuestra Sociedad, Julio se encarga directamente de la redacción del Boletín, que gestiona directamente en su despacho de la ETSI Navales, imprimiéndose después en el Servicio de Reprografía de la Escuela de Ingeniería Técnica Industrial de la UPM, bajo la supervisión de nuestra compañera Carmen García Miguel. Así se publicaron los 38 primeros números de nuestro Boletín.

A partir del número 39, Julio me pide que me encargue yo de la redacción del Boletín, con la aquiescencia de los restantes miembros de la Junta Directiva. Desde entonces, la impresión de nuestro Boletín se encargó con acierto a Gráficas Loureiro.

Esto no significa que, a partir de entonces, Julio cesara en su labor apoyo a nuestra Sociedad. Muy al contrario, continuó colaborando activamente, escribiendo nuevos artículos para nuestro Boletín y revisando artículos de otros autores. De hecho, desde que me hice cargo de la redacción del Boletín, él fue revisor de numerosos artículos de temática variada y siempre me sorprendía la rapidez con que me enviaba los informes revisores, que debíamos enviarle a los autores (a veces, en un solo día).

Los errores detectados los hacía notar de modo que no molestaran al autor. Siempre que sugería cambios en un artículo revisado por él, su crítica era decididamente constructiva, hasta el punto de que algunas veces llegó a reescribir los artículos de algunos autores, que siempre agradecieron esa ayuda de Julio (¡siempre huyendo del protagonismo, pero no del trabajo en pro de la Sociedad!)

Durante los 18 años que colaboramos, él en la revisión de artículos y yo en la composición-redacción del Boletín, tuvimos una comunicación muy frecuente, que no se limitaba al Boletín, pues siempre que él leía un nuevo libro interesante, me lo hacía saber para que yo pudiera también disfrutar con su lectura (¡me sorprendía cómo podía asimilar tanta nueva información a esa velocidad!). Y otro tanto ocurría con los enlaces de Internet que consideraba de interés.

El último de sus artículos, aparecido en el nº 93 de nuestro Boletín, dedicado a su amigo el Prof. Javier Etayo Miqueo, fue un artículo póstumo (cuando le comuniqué la triste noticia del fallecimiento de D. Javier, me dijo que él había previsto que fuera D. Javier quien redactara su necrológica).

El prestigio de Julio fue determinante para que nuestro Boletín incluyera artículos de varios de los mas prestigiosos matemáticos españoles. En fin, el representaba el "alma mater" de la Sociedad. Le echamos mucho de menos, … , mucho.

De paramétricas a implícita

por Julio Castiñeira Merino
juliocmrr@gmail.com

(Continuación del artículo iniciado en el Boletín nº 95)

7 Polinomios de Chebyshev

Los polinomios de Chebyshev de grado n se definen por la relación:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$$

Estos polinomios [9] proporcionan una fórmula explícita para la función de ángulo múltiple: $\cos(nt) = T_n(\cos t)$ y satisfacen la relación de recurrencia:

$$T_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ x & \text{si } n = 1 \\ 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

que nos permiten calcular eficientemente los polinomios de grado pequeño Una tabla con los polinomios hasta el grado 5 es la siguiente:

n	$T_n(x)$	n	$T_n(x)$
0	1	3	$4x^3 - 3x$
1	x	4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
2	$2x^2 - 1$	5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$

En lo que sigue usaremos algunas veces la identidad [3, pág 124]:

$$T_n(\sin a) = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \sin na, & n \text{ impar} \\ (-1)^{n/2} \cos na, & n \text{ par} \end{cases}.$$

Ejemplo: Partiendo de la curva de ecuación polar

$$\rho = \sin \tfrac{2\theta}{3}$$

y teniendo en cuenta que

$$T_3(\rho) = T_3\left(\sin \tfrac{2\theta}{3}\right) \Rightarrow T_3(\rho) = -\sin 2\theta \Rightarrow 4\rho^5 - 3\rho^3 = 2xy$$

obtenemos la ecuación implícita de una curva de décimo grado:

$$(x^2 + y^2)^3(4x^2 + 4y^2 - 3)^2 = 4x^2y^2$$

8 Séxtica de Cayley

Es la curva de ecuación polar $\rho = \cos^3 \frac{\theta}{3}$. Haciendo el cambio de variable $\theta = 3z$ y expresándolo en paramétricas obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = \cos^3 z T_3(\cos z) & = 4\cos^6 z - 3\cos^4 z \\ y = \cos^3 z T_3(\sin z) & = (4\cos^5 z - \cos^3 z)\sin z \end{array} \right.$$

Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \cos^6 z \\ x = 4\cos^6 z - 3\cos^4 z \end{array} \right. \Rightarrow \cos^4 z = \frac{4x^2+4y^2-x}{3}$$

Elevando al cubo ambos miembros de esta igualdad, sustituyendo $\cos^{12} z$ y operando obtenemos

$$\left(4x^2 + 4y^2 - x\right)^3 = 27\left(x^2 + y^2\right)^2$$

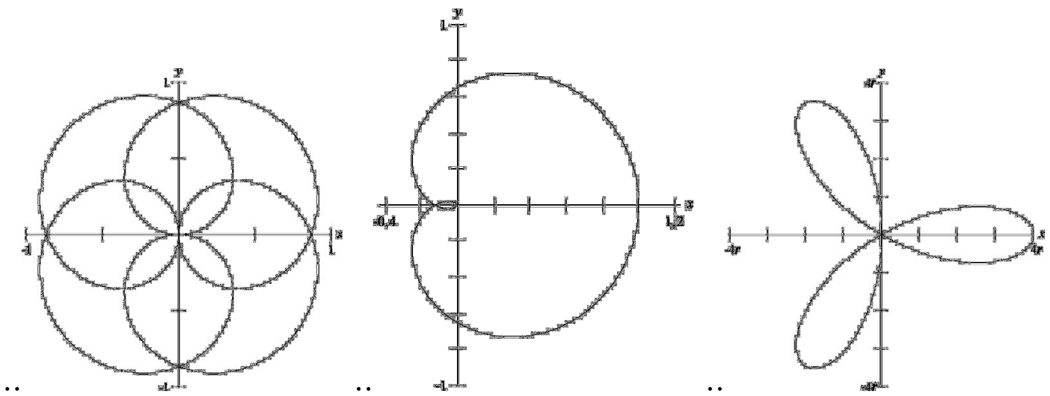


Figura 5: Décima, Séxtica de Cayley y Margarita de Melibea

9 Rosáceas

Las *curvas rosáceas o rhodoneas* tienen por ecuación polar $\rho = \cos n\theta$. Su ecuación implícita puede hallarse fácilmente usando los polinomios de Chebyshev.

En efecto $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$ luego, si k es entero, su ecuación implícita es $\pm\sqrt{x^2 + y^2} = T_n\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ o bien las expresiones polinómicas

$$(x^2+y^2)^{\frac{n+1}{2}} = (x^2+y^2)^{\frac{n}{2}}\, T_n\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \text{ si } n \text{ es impar, ó}$$

$$x^2+y^2 = T_n^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ si } n \text{ es par.}$$

Ejemplos:

1-*Trifolium o Margarita de Melibea*

$r = \cos 3\theta \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^2 = x^3 - 3xy^2$

2-*Rosa de 8 pétalos*

$r = \cos 4\theta \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^5 = \left(x^4 - 6x^2y^2 + y^4\right)^2$

Si $k = \frac{p}{q}$ fracción irreducible no es entero, la ecuación implícita es

$$T_q\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = T_p\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ si } p \text{ y } q \text{ son ambos impares ó}$$

$$T_q^2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = T_p^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \text{ si } p \text{ es par y } q \text{ impar o viceversa}$$

3-*Folio de Durero*

$r = \cos\frac{\theta}{2} \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)\left(2x^2+2y^2-1\right)^2 = x^2$

4-*Rosa de cinco pétalos*

$r = \cos\frac{5\theta}{3} \Leftrightarrow \left(x^2+y^2\right)^3\left(4x^2+4y^2-3\right) = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$

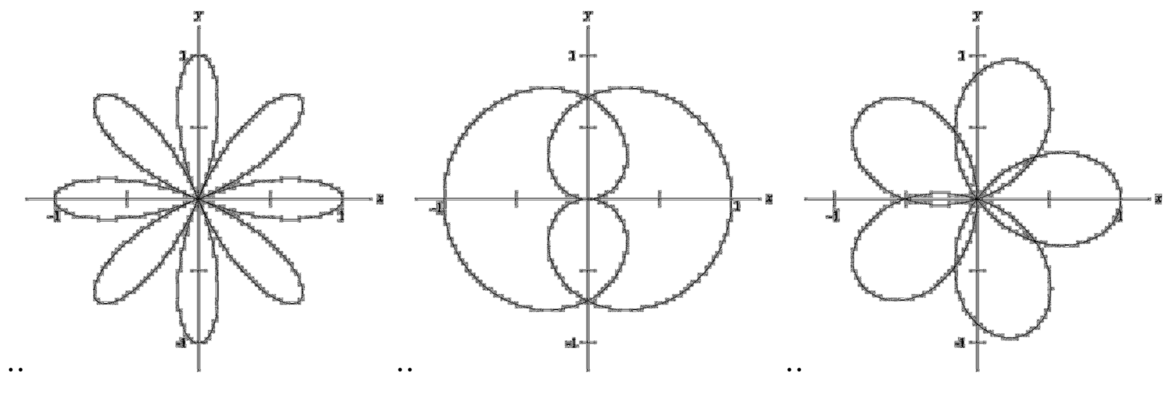


Figura 6: Rosa de 8 pétalos, Folio de Durero y Rosa de 5 pétalos

10 Tréboles de Brocard

Para resolver el problema [10, pág 308] de encontrar la curva que describe los tres foliolos del *trifolium pratense*, Brocard [8, pág 344, Vol I] generalizó la ecuación implícita de la cardioide a la familia de curvas de ecuación polar:

$$(\rho^2 + 3\rho\cos n\theta + 2)^2 = \rho^2 + 4\rho\cos n\theta + 4$$

la cual incluye la cardioide para $n = 1$, los tréboles de n-hojas para n impar y de $2n$ hojas para n par. Podemos obtener la ecuación implícita de estos tréboles con el proceso siguiente: Primero simplificamos la expresión

$$\left(\rho^2 + 3\rho T_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + 2\right)^2 = \rho^2 + 4\rho T_n\left(\frac{x}{\rho}\right) + 4,$$

después sustituimos ρ por su valor $\sqrt{x^2+y^2}$ y, si n es par racionalizamos. Así para $n = 2$ obtenemos la ecuación de grado 12:

$$\left((x^2+y^2)^3 + 12(x^4 - x^2y^2 + y^4)\right)^2 = 4(x^2+y^2)(x^2-y^2)^2(3x^2+3y^2+4)^2$$

y para $n = 3$ la ecuación del trébol de tres hojas:

$$\left((x^2+y^2)^2 + (x^2+y^2)(2-9x) + 12x^3\right)^2 =$$

$$(x^2+y^2)((x^2+y^2)^2 + 4(x^2+y^2)(1-3x) + 16x^3)$$

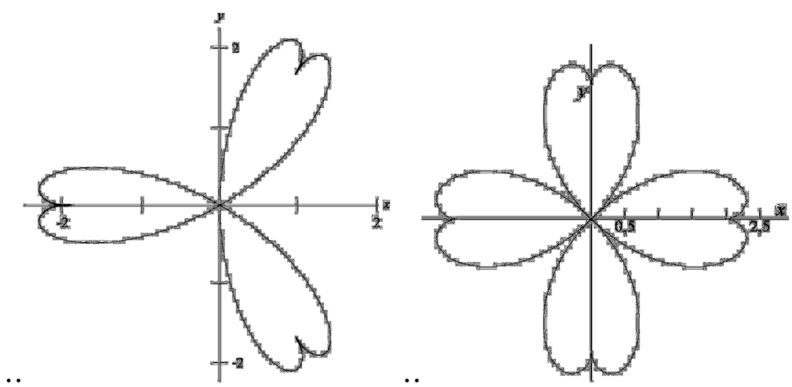


Figura 7: Tréboles de Brocard de 3 y 4 hojas

11 Tréboles de Habenicht

La curva de ecuación polar

$$\rho = 2 + \cos n\theta - \cos^2 n\theta$$

se llama *trébol de Habenicht de n-hojas* ($n > 2$).
su ecuación implícita es:

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2 + T_n\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - T_n^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Las ecuaciones de algunos tréboles se muestran en la tabla.

n	Ecuación implícita del trébol de Habenicht de n hojas
2	$2x^4 + 6x^2y^2 = (x^2+y^2)^{5/2}$
3	$(x^2+y^2)^3 + y^2(3x^2-y^2)^2 = ((x^2+y^2)^2 - x^3 + 3xy^2)(x^2+y^2)^{3/2}$
4	$2(x^2+y^2)^4 + 8x^2y^2(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) = (x^2+y^2)^{9/2}$

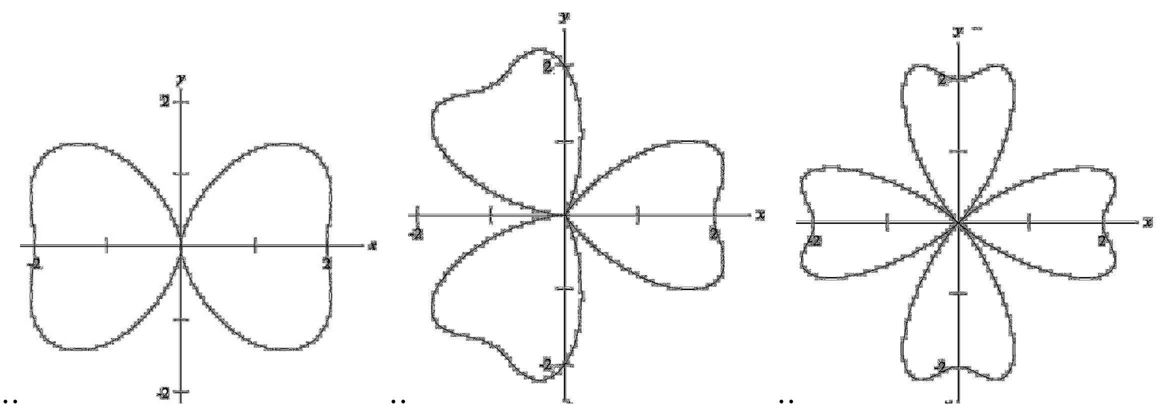


Figura 8: Tréboles de Habenicht de 2, 3 y 4 hojas

12 Arañas

Las curvas de ecuación polar

$$r = \frac{a \cdot \sin n\theta}{\sin(n-1)\theta} \quad \text{ó} \quad r = \frac{a \cdot \sin n\theta}{\sin(n+1)\theta}$$

se llaman *arañas envueltas y desenvueltas* respectivamente. Fácilmente se comprueba que sus ecuaciones implícitas son:

$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-T_{n+1}^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}=a\sqrt{1-T_n^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}$$

ó

$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1-T_{n-1}^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}=a\sqrt{1-T_n^2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}$$

Ejemplos:

1-*Araña envuelta*, con $a=2$ y $n=4$,$(x^2+y^2)(3x^2-y^2)=8x(x^2-y^2)$.
2-*Araña desenvuelta*, con $a=2$ y $n=4$, $5x^4-10x^2y^2+y^4=8x(x^2-y^2)$.
3-*Trisectriz de Maclaurin*, con $a=2$ y $n=3$, $(x^2+y^2)(x+1)=4x^2$.

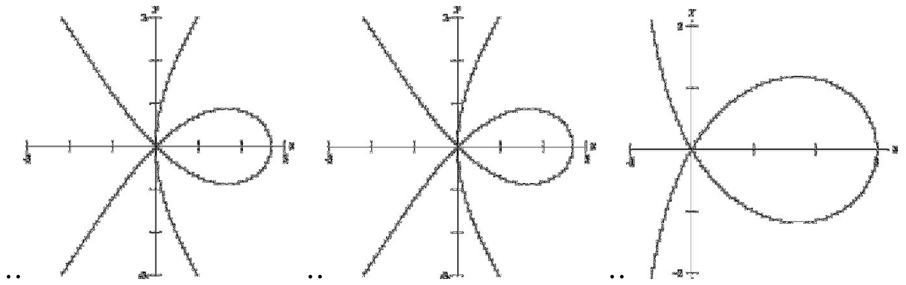


Figura 9: Araña Envuelta, Araña Desenvuelta y Trisectriz de McLaurin

13 Curvas de Lissajous

Las ecuaciones paramétricas de las *curvas de Lissajous* son

$$\begin{cases} x=\cos(mt+p) \\ y=\sin(nt+q) \end{cases}$$

Donde $0\leq t\leq 2\pi$, p y q son números reales y m y n números enteros primos entre sí. El determinante

$$\delta=\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}$$

y la paridad de m nos determinan un tipo de fórmula u otro de la ecuación implícita. En efecto, si m es par tenemos

$$\begin{cases} T_n(x) = T_n(\cos(mt+p)) = \cos(mnt+mq) \\ T_m(y) = T_m(\sin(nt+q)) = (-1)^{\frac{m}{2}}\cos(mnt+np) \end{cases}$$

Aplicando la fórmula del coseno de la suma tenemos el sistema lineal en $\cos mnt$ y $\sin mnt$

$$\begin{cases} \cos np \cos mnt - \sin np \sin mnt = T_n(x) \\ \cos mq \cos mnt - \sin mq \sin mnt = (-1)^{\frac{m}{2}} T_m(y) \end{cases}$$

cuyo determinante es $\Delta = -\sin(mq - np) = -\sin\delta$. Si este determinante es distinto de cero podemos resolver el sistema y tenemos:

$$\begin{cases} \cos mnt = \frac{\sin mq}{\sin\delta} T_n(x) - (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{\sin np}{\sin\delta} T_m(y) \\ \sin mnt = \frac{\cos mq}{\sin\delta} T_n(x) - (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{\cos np}{\sin\delta} T_m(y) \end{cases}.$$

Sustituyendo estos valores en la identidad $\cos^2 mnt + \sin^2 mnt = 1$ y operando obtenemos la ecuación

$$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2(-1)^{\frac{m}{2}}\cos(\delta) T_n(x) T_m(y) = \sin^2\delta.$$

Ejemplo 1

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin\left(3t + \frac{11\pi}{24}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(4x^3-3x)^2 - (2y^2-1)^2 - \tfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}(4x^3-3x)(2y^2-1) = \tfrac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Si $\sin\delta = 0$, el sistema tiene solución si, y sólo si,

$$\frac{\cos np}{\cos mq} = \frac{-\sin np}{-\sin mq} = \frac{T_n(x)}{(-1)^{\frac{m}{2}} T_m(y)} =$$

y por tanto

$$\begin{cases} \cos mq T_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}} \cos np T_m(y) \\ \sin mq T_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}} \sin np T_m(y) \end{cases}.$$

Sumando las ecuaciones después de multiplicar la primera por $\cos np$ y la segunda por $\sin np$ y simplificando obtenemos

$$\cos(\delta) T_n(x) = (-1)^{\frac{m}{2}} T_m(y)$$

Ejemplo 2

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos 4t \\ y = \sin 3t \end{array}\right. \Rightarrow T_3(x) = T_4(y) \Rightarrow 4x^3 - 3x = 8y^4 - 8y^2 + 1.$$

Parecidos cálculos nos permiten afirmar que si m es impar y $\sin\delta = 0$ la ecuación implícita es

$$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2(-1)^{\frac{m-1}{2}} \sin(\delta) T_n(x) T_m(y) = \cos^2\delta.$$

Ejemplo 3

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos t \\ y = \sin\left(2t + \frac{5\pi}{4}\right) \end{array}\right. \Rightarrow (2x^2 - 1)^2 + y^2 + \sqrt{2}(2x^2 - 1)y = \tfrac{1}{2}.$$

y si m es impar y $\sin\delta \neq 0$

$$\sin(\delta) T_n(x) - (-1)^{\frac{m-1}{2}} T_m(y) = 0.$$

Ejemplo 4

$$\left\{\begin{array}{l} x = \cos 5t \\ y = \sin\left(4t + \frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right. \Rightarrow 8x^4 - 8x^2 + 1 = 16y^5 - 20y^3 + 5y.$$

Más información sobre estas curvas puede encontrarse en [3] y [2].

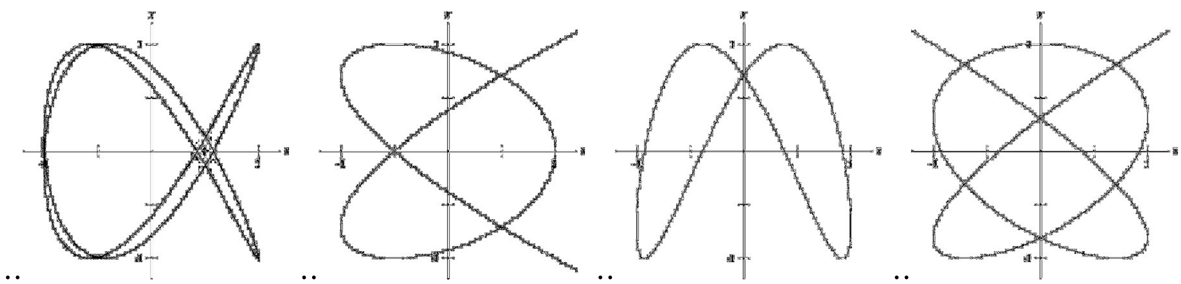


Figura 10: Curvas de Lissajous; ejemplos 1 a 4

14 Epitrocoides e hipotrocoides

Una *Epitrocoide* (respectivamente una *hipotrocoide*) es la curva descrita por un punto enlazado a un circunferencia de radio r, llamado circunferencia generatriz, que rueda exteriormente (respectivamente interiormente) alrededor de otra circunferencia de radio R. Si la distancia del punto al centro de la circunferencia generatriz es d y el cociente $\frac{R}{r}$ es racional, las ecuaciones parametricas de la epitrocoide son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (R+r)\cos qt - d\cos pt \\ y = (R+r)\sin qt - d\sin pt \end{array} \right., \text{ donde } \tfrac{p}{q} = \tfrac{R}{r} + 1.$$

y las de la hipotrocoide:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = (R-r)\cos qt + d\cos pt \\ y = (R-r)\sin qt - d\sin pt \end{array} \right., \text{ donde } \tfrac{p}{q} = \tfrac{R}{r} - 1.$$

Si $d = r$ la curva se llaman epicicloide e hipocicloide respectivamente. Las *Rosáceas* son a la vez epitrocoides e hipotrocoides para las cuales $d = R+r$ o $d = R-r$ y cuya ecuación polar es $\rho = 2d\cos\left(\frac{p+q}{p-q}\theta\right)$. Otro ejemplo de hipotrocoide es la elipse. En efecto, si $R = 2r$ y d cualquiera obtenemos la ecuación reducida de la elipse de ejes $d+r$ y $d-r$.

$$\tfrac{x^2}{(d+r)^2} + \tfrac{y^2}{(d-r)^2} = 1$$

15 Epitrocoides

El radio polar al cuadrado de la epitrocoide es

$$x^2 + y^2 = -2d(R+r)\cos[(p-q)t] + (R+r)^2 + d^2$$

y la ecuación de la variable x determinan el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2d(R+r)T_{p-q}(z) + x^2 + y^2 - (R+r)^2 - d^2 = 0 \\ dT_p(z) - (R+r)T_q(z) + x = 0 \end{array} \right., \text{ donde } z = \cos t.$$

Eliminando z, obtenemos la ecuación de la epitrocoide. Veamos algunos ejemplos.

1) Cardioide: $d = r$, $R = r$, luego $p = 2$ y $q = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4r^2z - 5r^2 + x^2 + y^2 = 0 \\ 2rz^2 - 2rz + x - r = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left(x^2+y^2\right)^2 - 6r^2(x^2+y^2) = 3r^4 - 8r^3x.$$

2) Nefroide: $d = r$ y $R = 2r$, luego $p = 3$ y $q = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 12r^2z^2 - 16r^2 + x^2 + y^2 = 0 \\ 4rz^3 - 6rz + x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow (x^2+y^2-4r^2)^3 = 108r^4y^2.$$

3) Ranunculoide $d = r$ y $R = 5r$, luego $p = 6$ y $q = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 192r^2z^5 - 240r^2z^3 + 60r^2z - 37r^2 + x^2 + y^2 = 0 \\ 32rz^6 - 48rz^4 + 18rz^2 - 6rz - r + x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$P\left(x^2 + y^2 - r^2\right) = -93312r^7(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 - 577r^5)$$

donde $P(w) = w^6 - 36r^2w^5 - 216w^4 - 1296r^6w^3 - 34992r^8w^2 - 1353024r^{10}w$.

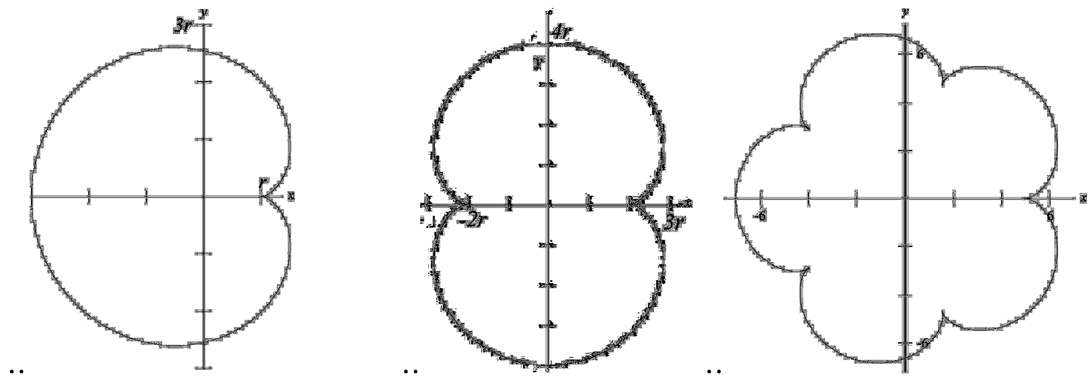


Figura 11: Cardioide, Nefroide y Ranunculoide

4-Caracol de Pascal: $R = r$, luego $p = 2$ y $q = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} 4drz + x^2 + y^2 - d^2 - r^2 = 0 \\ 2dz^2 - 2rz - d + x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left(x^2 + y^2 + d^2\right)^2 = 4\left(d^2 + r^2\right)\left(x^2 + y^2\right) - 8dr^2x + 4d^2r^2.$$

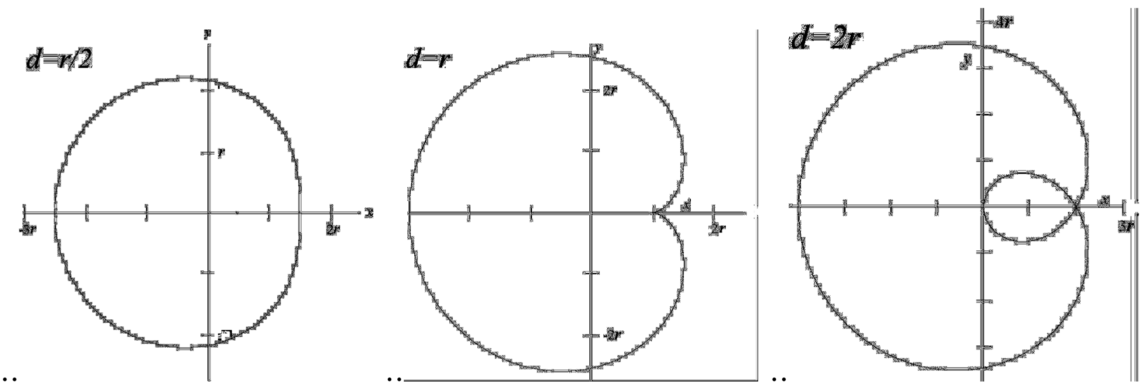


Figura 12: Caracoles de Pascal

Caracoles interesantes se obtienen para los siguientes valores de d:

$$\pm\frac{r}{4}, \pm\frac{r}{2}, \pm\frac{3r}{4}, \pm r, \text{y } \pm 2r.$$

16 Hipotrocoides

Analogamente para la hipotrocoide se cumple:

$$\begin{cases} dT_p(z) + (R-r)T_q(z) - x = 0 \\ 2d(R-r)T_{p+q}(z) - x^2 - y^2 + (R-r)^2 + d^2 = 0 \end{cases}, \text{ donde } z = \cos t.$$

Eliminando z, obtenemos la ecuación de la hipotrocoide. Veamos algunos casos.

Caso I: $R = 3r$

$$\begin{cases} 2dz^2 + 2rz - d - x = 0 \\ 16drz^3 - 12drz^2 + d^2 + 4r^2 - x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

Eliminando z resulta

$$d^2(x^2+y^2)^2 - 2(d^2-4r^2)(d^2+2r^2)(x^2+y^2) + (d^2-4r^2)^3 =$$

$$8dr^2(x^3 - 3xy^2)$$

Subcasos interesantes son los siguientes:

a) Trifolium, $d = 2r$

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = 4r(x^3 - 3xy^2)$$

b) $d = 3r/2$,

$$18(x^2+y^2)^2 + 119r^2(x^2+y^2) - 96(x^3-3xy^2) = \frac{343r^4}{8}$$

c) Deltoide $d = r$,

$$(x^2+y^2+9r^2)^2 = 108r^4 + 8r(x^3 - 3xy^2)$$

d) Curva Triangular $d = r/2$,

$$(4x^2+4y^2+135r^2)^2 = 32r(8x^3 - 24xy^2 + 675r^3)$$

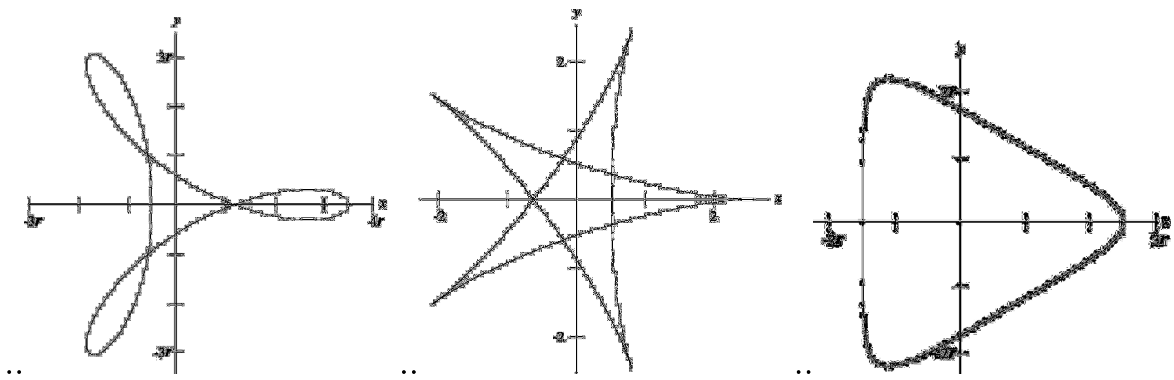


Figura 13: Hipotrocoide R=3r, 2d=3r; Hipocicloide 2R=5r; C. Triangular

Caso II: $2R = 5r, d = r$

$$6912r(x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4) =$$
$$16(4x^2 + 4y^2)^3 + 825r^2(4x^2 + 4y^2)^2 - 3750r^4(4x^2 + 4y^2) + 31256r^6$$

Caso III: $R = 4r$

$$\begin{cases} 48dz^3 + 3(r - d)z - x = 0 \\ 48drz^4 - 48drz^2 + d^2 + 6dr + 9r^2 - x^{-}y^2 = 0 \end{cases}$$

Eliminando z y simplificando, resulta:

$$(d + 3r^2)\left((d^2 - 9r^2)(d - 3r)^2 - 432dr^3x^2y^2\right) =$$
$$d^2(x^2 + y^2)^3 - 3d\left((d + 3r)(d^2 - 3dr + 6r^2)\right)(x^2 + y^2)^2 +$$
$$+3(d^2 - 9r^2)(d^2 + 3r^2)(x^2 + y^2)$$

Subcasos interesantes son:

a) Trébol de cuatro hojas: $d = -3r$, de ecuación

$$(x^2 + y^2)^3 = 144r^2x^2y^2$$

b) Cruz: $d = 2r$, de ecuación

$$(x^2 + y^2)\left((2x^2 + 2y^2 - 30r^2)^2 - 375r^4\right) = 625r^6 - 864r^4$$

c) Astroide: $d = r$, de ecuación

$$(x^2 + y^2)\left((2x^2 + 2y^2 + 24r^2)^2 - 51r^4\right) = 864r^2(x^2y^2 + 625r^4)$$

d) Curva Cuadrado: $d = r/3$ (vista anteriormente).

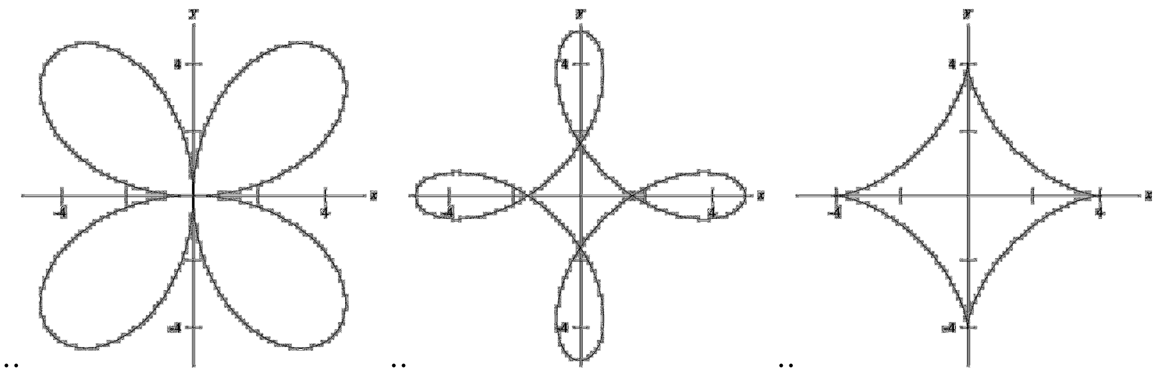


Figura 14: Trébol de 4 hojas, Cruz y Astroide

17 Vasos o Cuencos bidimensionales

Así se llaman a las curvas de ecuaciones paramétricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a\cos(t+\phi)\cos nt \\ y = b\cos^2 nt \end{array} \right., \text{ siendo } n \text{ racional.}$$

Si $n = \frac{p}{q}$ fracción irreducible y $\phi = 0$ se puede eliminar el parámetro t, obteniéndose las fórmulas

$$T_p\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{b}{y}}\right) = T_q\left(\sqrt{\frac{b}{y}}\right), \text{ si } p \text{ y } q \text{ son ambos impares,}$$

y

$$T_p^2\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{b}{y}}\right) = T_q^2\left(\sqrt{\frac{b}{y}}\right), \text{ si } p \text{ o } q \text{ es par.}$$

Ejemplos:

I) Para $a = 4, b = 3, p = 5, q = 3$, resulta

$$81x^5 - 540x^3y + 720xy^2 = 256y^4 - 576y^3$$

II) Para $a = 4, b = 3, p = 3, q = 2$, resulta

$$243x^2\left(x^2 - 4y\right)^2 = 256y^3(2y-3)^2$$

Análogamente si $n = \frac{p}{q}$ fracción irreducible y $\phi = \frac{\pi}{2}$, obtenemos las fórmulas:

$$T_p^2\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{b}{y}}\right) = T_q^2\left(\sqrt{\frac{y}{b}}\right), \text{ si } p \text{ es par}$$

y

$$T_p^2\left(\frac{x}{a}\sqrt{\frac{b}{y}}\right) + T_q^2\left(\sqrt{\frac{y}{b}}\right) = 1, \text{ si } p \text{ es impar.}$$

III) Para $a = 5, b = 3, p = 4, q = 3$, resulta

$$27\left(72x^4 - 600x^2y + 625y^2\right)^2 = 390625y^5(4y-9)^2$$

IV) Para $a = 5, b = 3, p = 3, q = 2$, resulta

$$243x^2(4x^2 - 25y)^2 + 15625y^3(2y-3)^2 = 140625y^3$$

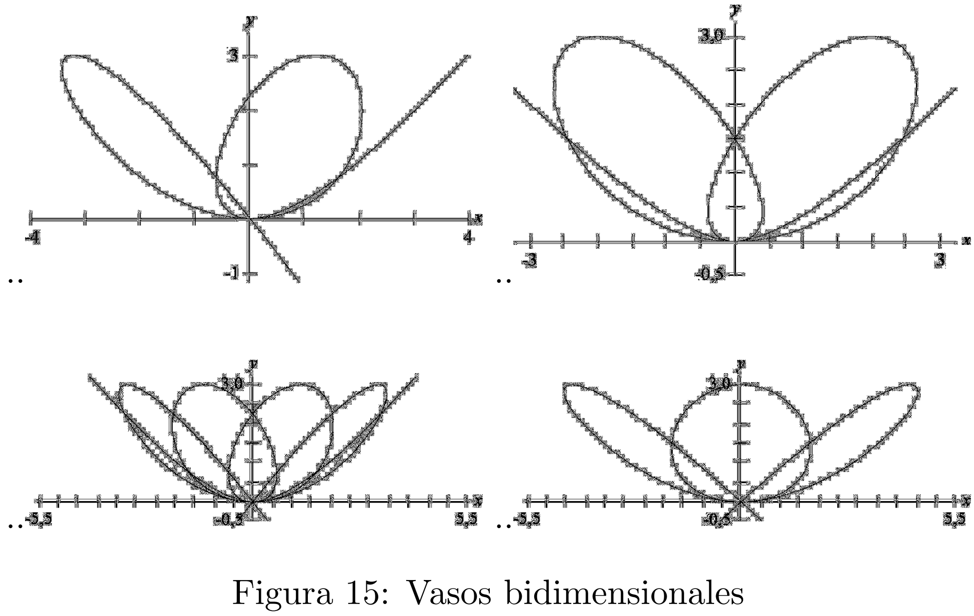


Figura 15: Vasos bidimensionales

En el caso general se puede proceder de la siguiente forma: primero sustituimos las funciones trigonométricas por funciones racionales del ángulo mitad y a continuación eliminamos el nuevo parametro usando la resultante.

18 Conclusión

Fórmulas para otras curvas o familias de curvas pueden obtenerse fácilmente utilizando estas técnicas. Tambien pueden usarse la funciones de ángulos múltiples de la tangente o los polinomios de Chebyshev de segunda clase. Los catálogos clásicos de curvas son las obras de Brocard [1], Gomez Texeira [5] y Gino Loria [8].

Referencias

[1] Brocard, y Lemoyne, T. *Courbes Géométriques Remarquables Planes et Gauches*, Tomos I-III Paris, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchar, Tomo I, II : 1967; III: 1970

[2] Castiñeira Merino, Julio, *Funciones de Ángulo Múltiples*, Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática, No 19, Mayo-Junio 2005, págs. 1-32.

[3] Castiñeira Merino, Julio, *Lissajous Figures and Chebyshev Polynomials*, The College Mathematical Journal, Vol 34, No 2, March 2003, págs. 122-127.

[4] Gamboa, José M. y Ruiz, Jesús M., *Anillos y Cuerpos Conmutativos*, págs. 214-230, Cuadernos de La UNED, 1987

[5] Gomez Texeira, F., *Traité des Courbes Speciales Remarquables Planes et Gauches*, 3 Tomos, Coimbra, Imprenta de la Universidad, 1908, 1909 y 1915.

[6] Goursart, Edouard, *A Course in Mathematical Analysis*,Vol I, Gin & Company, Boston, 1904

[7] Kurosch, A.G, *Curso de Algebra superior*, págs. 343–354, Editorial Mir, Moscú, 1975.

[8] Loria, Gino., *Curve Piani Speciali Algebrichi e Trascendenti*, 2 Volúmenes, Ulrico Hoepli,Milán, 1930.

[9] Mason, J.C. y Handscomb, D.C., *Chebyshev Polynomials*, Champman & Hall, Boca Raton, 2002.

[10] Terquem, *Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux les ecoles polytechnique et normale*, Paris, Mallet-Bachelier, 1860

[11] Walker, R., *Algebraic Curves*, Dover, New York, 1962.

Reseña de libros

BRAULIO DE DIEGO, AGUSTÍN LLERENA, FRANCISCO BAENA. Mª BELÉN RODRÍGUEZ, JOSÉ MANUEL GAMBOA, JOSÉ Mª LORENZO y BRUNO SALGUEIRO: *Problemas de Oposiciones. Matemáticas. Tomo 5.* Editorial Deimos. ISBN: 978-84-86379-85-8.

Con el título de ''Problemas de Oposiciones. Matemáticas. Tomo 5'', la Editorial Deimos ha publicado un volumen que recoge las soluciones que los siete autores han dado a los problemas propuestos en las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaría celebradas entre los años 2006 y 2012, además de algunos del año 2002 que no tuvieron cabida en el Tomo 4 publicado el año 2005.

Este es el quinto volumen de una colección que en los cuatro anteriores dio cuenta de los problemas propuestos en estas pruebas desde el año 1969, y está escrito con la intención de ayudar al que se presenta a las mismas a encontrar las ''líneas maestras'' en la resolución de problemas de esta naturaleza.

En muchos casos se dan varias soluciones de un mismo problema cuando éstas son sustancialmente distintas, y la exposición suele venir acompañada, si el problema así lo requiere, de la fundamentación teórica en la que se apoya.

La exposición es clara, y en la misma se emplean numerosas y muy cuidadas figuras que resultan útiles para una mejor comprensión.

José Javier Etayo Gordejuela

RAMÓN RODRÍGUEZ VALLEJO*: Conjuntos numéricos, Estructuras algebraicas y Fundamentos de Álgebra Lineal.* Volumen I : Conjuntos numéricos y complementos (697 págs). Volumen II : Estructuras algebraicas y fundamentos de Álgebra Lineal (854 págs). Editorial Tebar. Madrid 2013. ISBN: 978-84-7360-492-5.

Se trata de un texto muy completo y detallado, que pretende cubrir el gran vacío existente entre el final de los estudios secundarios y el comienzo de los estudios universitarios, en lo que se refiere al dominio de los conceptos algebraicos básicos. Más concretamente, en lo que se refiere a las sucesivas ampliaciones del concepto de número, desde los naturales a los complejos, a las estructuras algebraicas básicas y la iniciación al álgebra lineal. Se presenta dividido en dos volúmenes.

El Volumen I contiene diez capítulos, dedicados sucesivamente a los temas siguientes: Lógica proposicional; Números naturales y sistemas de numeración; Combinatoria; Números enteros y divisibilidad; Números racionales con expresiones fraccionarias y decimales; Sucesiones y progresiones; Números reales y topología de la recta real; Aproximaciones numéricas; Números complejos y sus aplicaciones geométricas; Evolución histórica de la sucesivas ampliaciones del concepto de número.

El Volumen II contiene once capítulos, dedicados sucesivamente a: Operaciones conjuntistas, relaciones binarias y leyes de composición; Estructuras algebraicas de semigrupo, grupo, anillos e ideales, cuerpos, espacios vectoriales y retículos de la matemática elemental; Espacios vectoriales reales y aplicaciones lineales; Polinomios y fracciones algebraicas; Álgebra de matrices y sus aplicaciones a las ciencias sociales y de la naturaleza; Determinantes de matrices cuadradas; Resolución de ecuaciones algebraicas y aproximación de raíces; Ecuaciones diofánticas lineales y no lineales; Sistemas de ecuaciones lineales; Introducción a la programación lineal y sus aplicaciones; Evolución histórica del lenguaje algebraico.

Los conceptos y resultados son detallados minuciosamente con precisión y rigor, siendo aplicados a numerosos ejemplos y ejercicios, cuidadosamente desarrollados en su totalidad, de modo que puedan ser entendidos sin necesidad de ayuda.

Esto hace que la obra pueda ser especialmente útil para aquellos estudiantes que han de prepararse ellos solos, individualmente, por no poder asistir a clases presenciales.

De modo más general, puede ser útil a estudiantes de Primer Curso de Grados en Ciencias e Ingenierías, a los del Curso de Acceso a la Universidad de mayores de 25 años e incluso para la preparación parcial del temario de oposiciones de Secundaria en la especialidad de Matemáticas.

El autor es un docente con gran experiencia en un centro de Secundaria, que un día fue un brillante alumno del firmante de esta reseña y, mas tarde coautor suyo en una serie de libros de matemática elemental, lo que justifica que le haya dedicado esta obra.

Eugenio Roanes Macías

PIEDAD YUSTE LECIÑENA: *Matemáticas en Mesopotamia: álgebra, geometría y cálculo* (248 págs). Editorial DYKINSON, S. L. Madrid, 2013. ISBN: 978-84-9031-408-1.

Piedad Yuste es profesora de la UNED y es quien más sabe en nuestro país sobre la matemática en Mesopotamia. El libro que aquí se reseña es el fruto de años y años de estudio, y el más completo y exhaustivo de todos los que sobre este tema se han publicado hasta hoy en España.

Las fuentes que hoy poseemos para conocer la matemática mesopotámica son colecciones de problemas escolares, con sus enunciados, cálculos y soluciones. Pero los matemáticos mesopotámicos no fabricaron ecuaciones ni utilizaron lenguaje simbólico, y los caminos para llegar a las soluciones no parecen aplicaciones concretas de una teoría general. Tan es así que algunos estudiosos llegaron a pensar que los resultados eran fruto del azar o estaban en cierta medida amañados.

Pero si se usa notación algebraica, aunque pueda parecer anacrónico, se descubre que, más allá de las apariencias, las instrucciones que se proporcionan en cada problema sí pueden extenderse a casos semejantes. Y esto es lo que se ofrece en este libro: un estudio de los problemas matemáticos más significativos que se encuentran en las tablillas datadas entre los años 2000 y 1600 a. de C., el período matemáticamente más fecundo de todas las civilizaciones que tuvieron lugar en el creciente fértil. Problemas que abarcan desde la extracción de raíces cuadradas, el cálculo de superficies y volúmenes, partición de figuras y el álgebra geométrica (problemas algebraicos resueltos mediante construcciones geométricas), hasta la utilización de las reglas de sustitución y falsa posición.

En este libro vamos a encontrar por primera vez los textos de los problemas traducidos directamente al castellano, con su transliteración original, lo cual nos aproxima aún más al tipo de enseñanza que se impartía en las escuelas de escribas y a la naturaleza de sus métodos de resolución y cálculo. La obra comienza con un breve recorrido a través de las civilizaciones asentadas en Mesopotamia, examinando sus avances culturales y tecnológicos, como la invención de la escritura cuneiforme y la creación de las primeras unidades métricas, pasando después a estudiar cómo y por qué surgió la matemática en ese preciso momento histórico y a qué tipo de cuestiones tuvo que enfrentarse y hallar solución. También se alude al trabajo de todos los investigadores que han logrado sacar a la luz y descifrar la ingente cantidad de documentos escritos procedentes de Mesopotamia y recogidos en pequeños bloques de arcilla. Antes de entrar en el análisis de los problemas concretos, el libro proporciona las herramientas de cálculo básicas con las que poder abordarlos: especificidad del lenguaje matemático, sistema y notación numérica, tablas métricas y de computación, y registros de constantes. Después, estudia las técnicas aplicadas para determinar números inversos, cuadrados, cubos, extracción de raíces y conversión de unidades. A esta parte introductoria le sigue otra más teórica y abstracta, relacionada con lo que podríamos denominar álgebra geométrica, o resolución de ecuaciones de segundo, cuarto y octavo grado, partiendo de esquemas y composiciones geométricas. Pero los matemáticos babilonios no sólo se dedicaron a idear procedimientos teóricos con los que poder atender a la demanda de un estado eminentemente organizado y burocrático, sino que fueron capaces de concebir otro tipo de planteamientos cuya belleza y carácter enigmático nos sorprende y cautiva, como es el de la partición de trapecios según proporciones establecidas, o el cálculo de las líneas transversales que los dividen ajustándose a secuencias ordenadas y fijas.

Y lo que es muy importante, está redactado en un estilo claro fluido. Y es interesante, no solo porque se facilita la lectura, sino también porque pone la matemática mesopotámica al alcance de cualquiera, aunque no tenga más cultura matemática que la que recuerde del bachillerato, siempre que esté dispuesto a hacer un pequeño esfuerzo. No es infrecuente que un profesor de historia antigua, así sea especialista en el creciente fértil, ignore todo lo que allí se hizo de matemáticas. Y no tanto por falta de interés como por la ausencia de libros asequibles. La obra *Matemáticas en Mesopotamia* es un trabajo que ha de contribuir a tender puentes entre dos mundos que, lamentablemente, están cada vez más distantes.

Ricardo Moreno Castillo

JOSE F. FERNANDO, JOSE MANUEL GAMBOA. *Estructuras Algebraicas: Teoría Elemental de Grupos.* Ed. Sanz y Torres. Madrid, 2013, 290 págs. ISBN: 978-84-15550-35-8.

En los diversos planes de estudios universitarios, tanto del sistema anterior como del actual, que conducen a la obtención del título, sea de Licenciado o de Graduado, en Matemáticas, existe siempre una primera asignatura de álgebra abstracta, que tiene frecuentemente el nombre de Estructuras Algebraicas. Su contenido suele organizarse en tres partes, dedicadas a los grupos, los anillos, y la teoría de Galois: esto es, la introducción a las tres fundamentales estructuras algebraicas, grupos, anillos y cuerpos.

Por ello es muy importante disponer de textos adaptados a esta necesidad docente, esto es, que construyan estas estructuras desde el inicio, pues es la primera vez que sus destinatarios naturales tienen contacto con ellas. Pero, por otra parte, deben aportar una amplia información que permita posteriormente continuar profundizando. Existen ya, sin duda, libros que cumplen estos requisitos, y a ellos ha venido a unirse el que aquí comentamos. Se centra exclusivamente en la primera de las estructuras a estudiar, los grupos, aunque prefigurando lo que probablemente sea un segundo volumen.

Por ello tiene una doble vertiente. En primer lugar, y como su propio título pone de manifiesto, se presentan al estudiante los resultados básicos en teoría de grupos, con especial atención a los finitos. El concepto nuclear de esta introducción a los grupos es el de acción de un grupo sobre un conjunto, que permite obtener resultados como los teoremas de Sylow, y éstos estudiar problemas como la no existencia de grupos simples de determinados órdenes. En este mismo ámbito, se estudian las familias más importantes de grupos: sean los abelianos finitamente generados, sean entre los no abelianos los grupos diedrales, simétricos o alternados.

Pero hay un segundo objetivo. El lector habrá de llegar al estudio de la teoría de Galois, y ello le exigirá el conocimiento de determinados aspectos de la teoría de grupos finitos. Por ello, y utilizando las construcciones que antes se indicaban, se estudian las condiciones de resolubilidad de grupos, así como otros resultados que serán necesarios.

Incluye también el libro un par de apéndices llamativos, uno dedicado a los subgrupos afines (o de Frobenius) del grupo simétrico, y el otro a un detallado estudio del grupo simple de orden 168, con distintas construcciones del mismo. Se trata de unas profundizaciones que permiten al estudiante atisbar que más allá de los resultados introductorios que se le han presentado, hay una amplia y hermosa teoría en la que poder trabajar con fruto.

No podemos por menos que señalar que al objetivo pedagógico del libro contribuye que se han incluido abundantes ejemplos, y hasta 166 ejercicios, todos ellos resueltos, que permiten comprobar la adquisición de los conceptos y las técnicas que se presentan en el texto.

José Javier Etayo Gordejuela

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm (exactamente como este archivo). El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` ,o bien en un disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pediráa los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76,

77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95 y 96

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número

ES13 3025-0006-24-1400002948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia.*