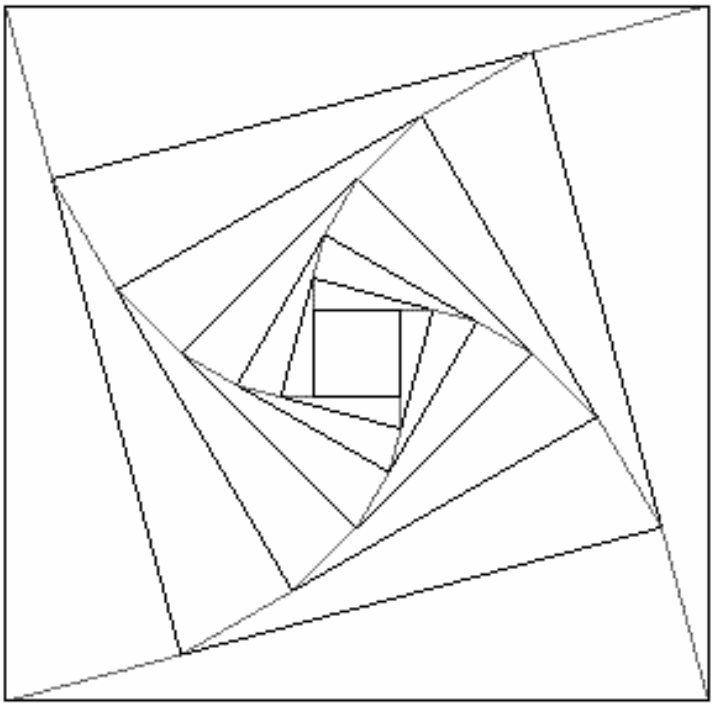
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 95
OCTUBRE DE 2013

Número especial dedicado al Profesor José Javier Etayo Miqueo

ÍNDICE

Págs.

XXXI Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas,
por *Joaquín Hernández* ……..... 4

Problemas propuestos en el XXXI Concurso …...……..……. 7

En memoria de Francisco José Cano Sevilla …….. … 13

Anuncio de número especial dedicado al Prof. Julio Fernández
Biarge: invitación a presentar artículos ……. ……... 14

A propósito de la envolvente de una familia de elipses,
por *Francisco Botana* y *Tomás Recio* ……... 15

Factorización en algunos subanillos de C,
por *José F. Fernando* y *José Manuel Gamboa* ……..... 31

Sobre una curva algebraica,
por *Ricardo Moreno Castillo* ……,……. 43

Estructuras de grupo topológico en (Z, +),
por *D. de la Barrera* y *E. Martín Peinador* ……,…….……. 54

En memoria del Profesor Etayo Miqueo,
por *María Paz Bujanda* ……..…… …….……..… 70

De Paramétricas a Implícita,
por *Julio Castiñeira Merino* ……..……..…. 82

Reseña de libros …… 90

Revista científica "Todo Ciencia" …… 93

XXVI Congreso "Enciga" ……...……. 93

Instrucciones para el envío de originales 94

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín 95

Boletín de inscripción 96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen ahora en "MathEduc", es decir, en lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre.

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad "Puig Adam":
`http://www.sociedadpuigadam.es`

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
F. JAVIER PERALTA CORONADO
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:
ENRIQUE RUBIALES CAMINO (Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ (Actividades y concursos)
JUAN JESÚS DONAIRE MORENO (Redacción de Publicaciones)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Tesorero Adjunto:
FERNANDO LISÓN MARTÍN

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

XXXI Concurso “Puig Adam” de Resolución de Problemas de Matemáticas

Muy pocos concursos de problemas en este país pueden mostrar un título como el de arriba. ¡Treinta y un años de concursos! Así es, y, aunque seamos pocos y mayores, los estudiantes siguen viniendo a resolver los problemas que les ponemos, aunque a algunos les cueste resolverlos, e incluso no los resuelvan.

El sábado 8 de junio nos volvimos a reunir en la Facultad de Matemáticas de la UCM con estudiantes no sólo de Madrid. Nuestro amigo Antonio Ledesma, de Requena, sigue viniendo cada año con sus chicos y estudiantes de Cantabria, de Burgos, de Segovia, empiezan a emularlos.

Como siempre, hubo tres niveles, con participación análoga a la del año pasado, manteniendo el “problema encadenado” en la segunda parte que, aquellos

que no tuvierais información del concurso del año pasado, podéis ver su estructura en el enunciado de los problemas que mostramos a continuación de esta crónica.

Por la tarde, en un acto familiar y siempre entrañable, nuestro Presidente resaltó el mérito que supone en un sábado caluroso de junio, con el curso prácticamente terminado, pasar la mañana resolviendo problemas después de haber hecho en algunos casos cuatrocientos kilómetros, y aquí no se cobran dietas.

A la vez que hizo entrega de diplomas y premios a los estudiantes ganadores, explicó a todos que estaban ahí, no sólo por su talento, sino por el trabajo y dedicación de sus profesores.

Y entre los ganadores, como no podía ser de otra manera, estaban estudiantes que pocos días más tarde representarían a España en la Olimpiada Matemática Internacional que se celebraría en Colombia.

Nuestro agradecimiento a todos los que hacen posible que llevemos desde el año 83 en esto y en particular a los profesores que dedican horas a trabajar con sus estudiantes en este tipo de actividades.

Finalmente, mostrar nuestro agradecimiento a la Profesora Almudena Mejías, esposa de nuestro Presidente, por tomar las fotos que aparecen en esta crónica.

Los estudiantes premiados fueron los siguientes:

NIVEL I: 3º ESO

- Daniel Puignau Chacón (IES Alameda de Osuna)
- Germán Alonso Devera (IES Cardenal López de Mendoza, Burgos)
- Berta García González (IES San Juan Bautista)
- Álex Didirka Díaz (IES Luis García Berlanga, Coslada)
- Alberto Alonso González (Colegio SEK El Castillo)

NIVEL II: 4º ESO

- Ismael Sierra del Río (Colegio San Juan Bautista)
- Alejandro Martos Berruezo (IES Tavernes Blanques)
- Gonzalo Gómez Abejón (IES Ramiro de Maeztu)
- Yu Ruizhe (IES Don Pelayo, Villalbilla)
- Álvaro Robledo Vega (Colegio Peñalar, Torrelodones)

NIVEL III: 1º Bachillerato

- Miguel Barrero Santamaría (IES Alameda de Osuna)
- Ángel Prieto Naslín (Liceo Francés)
- Sinuhé Perea Puente (IES Cardenal López de Mendoza, Burgos)
- Andrés Barrueco García (Colegio San Viator)
- Laura Peña Queralta (IES Jaume Vicens Vives, Girona)

Joaquín Hernández Gómez

Problemas propuestos en el XXXI Concurso

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Primera parte (1 hora 30 minutos)

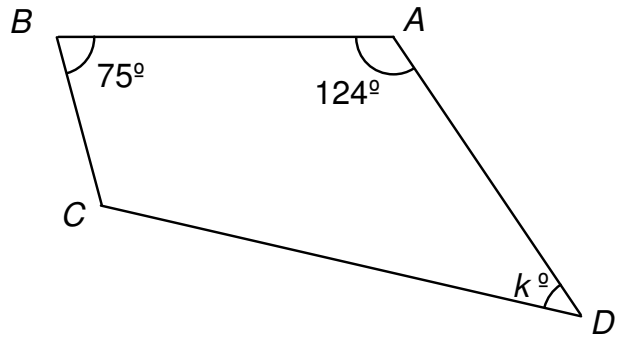
Problema 1
La suma de dos números naturales es 371 y el cociente entre su mínimo común múltiplo y su máximo común divisor es 430. ¿Cuáles son esos números?

Problema 2
En un triángulo rectángulo el radio de la circunferencia inscrita es de 2,8 cm y el radio de la circunferencia circunscrita es de 9,1 cm. Calcula el perímetro del triángulo.

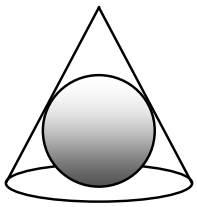
Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A *(1 punto)*
¿Cuál es el mayor número de seis cifras, representado por *ELEVEN*, en el que letras distintas representan cifras distintas y letras iguales cifras iguales, que verifica que es múltiplo de 11?

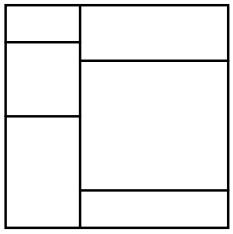
Problema 2A *(1,5 puntos)*
Sea T la respuesta del problema anterior y k la suma de las cifras de T. En el cuadrilátero $ABCD$ de la figura, que no está a escala, $AB = AC$, $\hat{A} = 124º$, $\hat{B} = 75º$ y $\hat{D} = k º$. ¿Cuánto mide el ángulo $B\hat{D}C$?



Problema 3A *(2 puntos)*
Sea T la respuesta del problema anterior. Una esfera de T cm de radio está inscrita (perfectamente ajustada) en un cono cuya generatriz es igual al diámetro de su base. ¿Cuál es, en cm, la altura del cono?



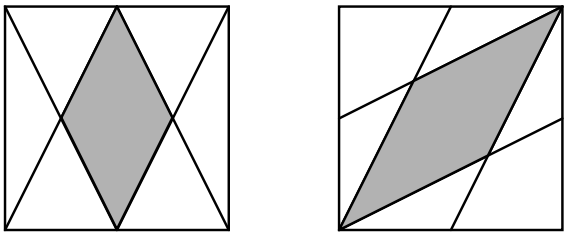
Problema 1B *(1 punto)*
Dividimos un cuadrado en seis rectángulos como se indica en la figura. Si la suma de los perímetros de los seis rectángulos es 120 cm, ¿cuál es, en cm^2, el área del cuadrado?



Problema 2B *(1,5 puntos)*
Sea T la respuesta del problema anterior y n la suma de las cifras de T. El número de cinco cifras 24X8Y es divisible por 4, 5 y n. ¿Cuál es la suma de las cifras X e Y?

Problema 3B *(2 puntos)*
Sea T la respuesta del problema anterior. El cuadrilátero $PQRS$ está inscrito en una circunferencia de tal manera que PR es un diámetro. Si las longitudes de PQ, QR y RS son 60, 25 y $13 \cdot T$, ¿cuál es la longitud del lado SP?

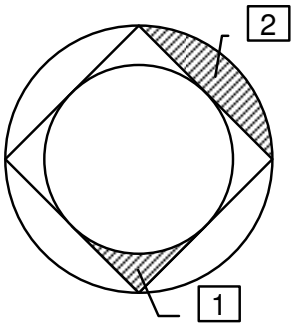
Problema 4 *(5 puntos)*
Sean a y b las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente. La figura siguiente muestra dos rombos sombreados inscritos en cuadrados iguales de lado $a - b$. Cada uno de ellos se han formado mediante segmentos de extremos un vértice del cuadrado y el punto medio de uno de los lados. ¿Cuál es la diferencia entre las áreas de dichos rombos?



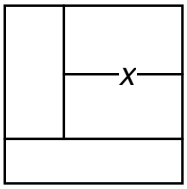
NIVEL II (4º de E.S.O.)

Primera parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A *(1 punto)*
Calcula el cociente entre el área de la región $\boxed{1}$ y el área de la región $\boxed{2}$.



Problema 2A *(1,5 puntos)*
Sea T la respuesta del problema anterior, que en la forma más simplificada es $T = \dfrac{a-\pi}{2\pi - b}$ con a y b enteros. La figura siguiente, que no está a escala, muestra un cuadrado de lado $\dfrac{a}{b}$ dividido en cuatro rectángulos de igual área. Calcula la longitud del segmento marcado con x.



Problema 3A *(2 puntos)*

Sea $T = \frac{c}{d}$ la respuesta del problema anterior expresada en forma de fracción irreducible y $n = 2(c+d)$. En una clase de 4º de ESO hay n chicas. Si seleccionamos al azar dos estudiantes de esa clase la probabilidad de que ambos sean chicas es 0,15. ¿Cuántos chicos hay en esa clase?

Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1B *(1 punto)*

¿Cuántas soluciones enteras tiene la inecuación $\left||x| - 2013\right| < 5$?

Problema 2B *(1,5 puntos)*

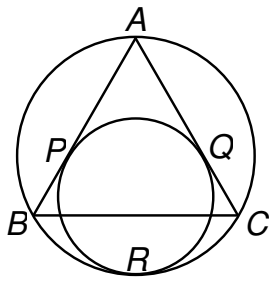
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula cuántos números de cuatro cifras verifican que la suma de los cuadrados de sus cifras es T.

Problema 3B *(2 puntos)*

La respuesta del problema anterior es un número T de dos dígitos, p y q. En el triángulo ABC la mediana que parte de A es perpendicular a la mediana que parte de B. Si las longitudes de los lados AC y BC son $p+q$ y $p \cdot q$, respectivamente, ¿cuál es la longitud del lado AB?

Problema 4 *(5 puntos)*

Sean a y b las respuestas de los problemas **3A** y **3B**, respectivamente y sea $x = a \cdot b^2$. En una circunferencia hay inscrito un triángulo equilátero ABC. Una segunda circunferencia es tangente interior a la primera en R y tangente a AB y AC en P y Q respectivamente. Si $BC = x$ calcula PQ

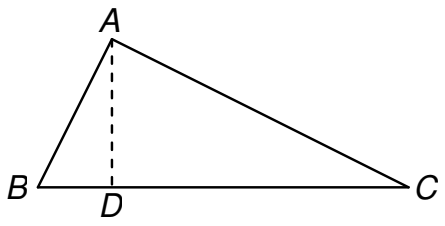


NIVEL III (1º de Bachillerato)

Primera parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A *(1 punto)*
Calcula el menor primo p tal que $(p - 1)$ es la diferencia de los cuadrados de dos múltiplos de 4, ambos positivos.

Problema 2A *(1,5 puntos)*
Sea T la respuesta del problema anterior y k la suma de los dígitos de T. En el triángulo rectángulo ABC de la figura siguiente, AD es perpendicular a BC. Si el área del triángulo ABD es 1 y el área del triángulo ADC es k, calcula $tg^2\hat{B}$.



Problema 3A *(2 puntos)*
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el mayor entero positivo n para el que $n^2 - Tn + 6$ resulta ser un número primo.

Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

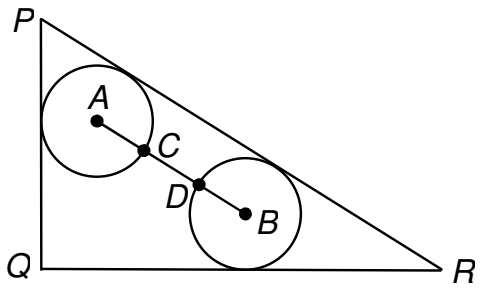
Problema 1B *(1 punto)*
Calcula el valor de T si $\lg_2 4,\ \lg_{\sqrt{2}} 8,\ \lg_3 9^{T-1}$ están en progresión geométrica.

Problema 2B *(1,5 puntos)*
Sea T la respuesta del problema anterior. Calcula el número de valores enteros de x que verifican el sistema de inecuaciones $x^2 > x + 6,\ |x| < T^2$.

Problema 3B *(2 puntos)*
Sea T la respuesta del problema anterior. Una enorme cesta de frutas tiene un gran número de naranjas, peras, manzanas y limones, más de 10000 de cualquiera de ellas. Calcula el menor valor de k para que cualquier elección de k de piezas de frutas tenga al menos una de las siguientes características:

- Que haya al menos 1001 naranjas
- Que haya al menos 2013 peras
- Que haya al menos 219 manzanas
- Que haya al menos T limones.

Problema 4 *(5 puntos)*
Sea a la respuesta del problema **3A** y b la suma de los dígitos del problema **3B**.
En el triángulo rectángulo PQR de la figura, en el que $PQ = \frac{b}{2}$ y $QR = 2a$, dibujamos dos circunferencias iguales, de centros A y B, cada una de ellas tangente a un cateto y a la hipotenusa. Si las intersecciones de las circunferencias con el segmento AB dividen a éste en tres partes iguales, $AC = CD = DB$, calcula el radio de las circunferencias.



En Memoria de Francisco José Cano Sevilla

(Miembro de la Sociedad "Puig Adam", desde su fundación)

Francisco José Cano Sevilla, catedrático de Estadística e Investigación Operativa en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM, falleció el 1 de agosto de 2013, a los 68 años de edad, como consecuencia de un fulminante e inesperado infarto.

Catedrático desde 1971, durante la década de los 70 ejerció con la dedicación y esmero que siempre le distinguió, los cargos de Director de Departamento, Director del Centro de Cálculo y Decano de la Facultad de Ciencias en la Universidad de Zaragoza y fue uno de los creadores de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Ya en Madrid fue Vicerrector de Investigación y Director del Departamento de Estadística e Investigación Operativa en la Facultad de Matemáticas.

Todos lo conocíamos y llamábamos *Paco*, lo que a todas luces denota que era una persona sumamente cercana y entrañable. Son, por ello, muchas las cosas que se agolpan en nuestra memoria tras su muerte lo que dificulta poder resumirlas en tan pocas líneas. Era una completa biblioteca de información y conocimientos que ponía a disposición de todos aquellos con quienes hablaba o se encontraba, sin pretender con ello, en modo alguno, establecer una posición de superioridad o jerarquía. Su voz, llena siempre de sabiduría, todavía resuena agradablemente en nuestros oídos.

Paco era, además, una persona de carácter cordial, afable, muy entrañable y muy humano, con un espíritu alegre y jovial, extrovertido, con infinita paciencia, desenfadado, inalterable, elegantemente austero, generoso, preocupado por el bienestar de los que le rodeaban. Nos atreveríamos a decir que era un auténtico solucionador de conflictos. No le gustaba dar órdenes sino sabios consejos, que surgían de su dilatada experiencia y de la amplia visión que tenía de las personas y de las cosas. Y todo ello lo hacía sin el más ligero atisbo de presunción. Por si todo ello fuera poco, hay que añadir que Paco, en estos tiempos actuales tan convulsos, supo trasmitir valores de compañerismo, respeto, esfuerzo e ilusión por el trabajo bien hecho.

Paco Cano tenía la excelente, precisamente por rara, cualidad de saber escuchar. Tal vez por ello pasó tanto tiempo, en medio de los consabidos cambios, como asesor dentro del máximo órgano universitario: el Consejo de Universidades. La paciencia que atesoran los que de verdad cultivan el don de saber escuchar le permitió ser un magnífico colaborador y, si se nos permite la

expresión, un aplicado y buen "confesor" de un gran número de Rectores y de otros miembros del citado Consejo. La información recabada a lo largo de tan ardua y difícil tarea le sirvió para ilustrar a todos sus compañeros profesores sobre las más diversas normativas universitarias. En definitiva, podemos afirmar que él dedicó gran parte de su vida al servicio de la Universidad, dando consejos y proporcionando ayuda a todos aquellos universitarios (profesores o alumnos) que lo solicitaban.

Aunque podía haberse jubilado hacía ya tiempo, sin embargo quiso seguir trabajando con una enorme entereza, sin rehusar ningún tipo de tarea, aunque ésta no le aportara especial valoración académica o laboral. Así, continuó realizando recensiones de libros, dirigiendo trabajos y prácticas de los alumnos, participando en diversos tribunales, en comisiones, o en los actos académicos más diversos.

Él, en fin, como buen científico, realizaba acertadas predicciones hasta el punto de "predecir" su propio fallecimiento, como lo atestigua el hecho de que en cierta ocasión reciente, en la que le sobrevino una carga adicional de trabajo para el departamento, dijo que moriría sumergido en sus queridas labores universitarias. Su recuerdo durará para siempre en nuestra memoria y en nuestros corazones entre la interminable lista de discípulos, amigos y personas que tuvieron la suerte de conocerlo. Hasta siempre, querido Paco.

Angel Felipe, Miguel Sánchez, Emilio Rubio, Antonio Pérez y Pedro Cuesta

Anuncio de número especial dedicado al Prof. Julio Fernández Biarge: invitación a presentar artículos

Ya se anunció en el nº 93 de nuestro Boletín, y se aprobó en la Asamblea del presente año 2013, dedicar un número del Boletín en homenaje al profesor Julio Fernández Biarge, que fue Presidente de la sociedad. Dicho número está previsto que sea el 96, correspondiente a febrero 2014. Se invita a presentar artículos dedicados a cuantos compañeros, alumnos y amigos del Profesor Julio Fernández Biarge lo deseen. Las normas de presentación serán las habituales del Boletín, que aparecen al final de este número. Los artículos serán revisados, como es norma en este Boletín. La fecha límite de envío de trabajos será el 10 de diciembre de 2014.

La Junta Directiva

A propósito de la envolvente de una familia de elipses

Francisco Botana†, Tomás Recio‡
† Depto. de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo
‡ Depto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Universidad de Cantabria
fbotana@uvigo.es ; tomas.recio@unican.es

Resumen

En esta nota se estudia la envolvente de una familia de curvas constituída por las elipses con un foco fijo en el punto $A(4,0)$, otro foco variable $B(0,\alpha)$ y longitud de eje mayor igual a 5. El cálculo de esta envolvente sirve como motivación para reflexionar sobre diversas dificultades ligadas a la incorporación del cálculo automático de envolventes en programas de geometría dinámica, como parte del objetivo, más general, de dotar a tales programas de capacidades de razonamiento geométrico (demostración, derivación, descubrimiento, cálculo de lugares, etc.) automático.

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a la memoria del profesor José Javier Etayo Miqueo. Don Javier fue profesor de geometría diferencial, durante la licenciatura en matemáticas, cursada en la Universidad Complutense, de uno de los autores de este trabajo, quien guarda gratísimos recuerdos suyos, tanto en lo que atañe al ámbito académico como al humano. Por otra parte el profesor Etayo y el profesor Recio han tenido, académicamente hablando, orígenes comunes, relacionados con la geometría algebraica. Por eso nos ha parecido oportuno presentar en homenaje a Don Javier este artículo, sobre un tema que conjuga aspectos y conceptos de ambas geometrías.

1. Introducción

1.1. Elemental, pero no simple

La idea de envolvente de una familia de curvas es una noción de geometría diferencial elemental. A pesar de ese carácter elemental es un concepto sobre el que no

Figura 1: El profesor Etayo durante la comida tras la tesis doctoral, dirigida por él, de F. Javier Peralta Coronado (con traje de tuno), acompañado por el correspondiente tribunal y colaboradores de la cátedra. De izquierda a derecha, T. Recio, J. Arregui, Sra. de Etayo, C. Cuartero, A. Martínez Naveira, C. Romo, J. Etayo y F. J. Peralta (Madrid, alrededores de la Plaza Mayor, 1983).

parece haber un consenso unánime. Así, en la Wikipedia [1], tras empezar el artículo relativo a la noción de envolvente con la conocida descripción de la envolvente de una familia de curvas $\{C_\alpha\}$ como una curva tangente a cada miembro de la misma, se consideran y discuten hasta cuatro definiciones para ese mismo concepto:

1. la envolvente como el conjunto de puntos (x, y) para los que existe un valor de α de modo que $\{F(x, y, \alpha) = 0, \frac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = 0\}$, entendiendo que, para cada valor del parámetro α, la curva C_α viene descrita por la ecuación $F(x, y, \alpha) = 0$,

2. la envolvente como el conjunto de puntos límite de intersecciones de curvas próximas C_α,

3. la envolvente como una curva tangente a todas las de la familia dada,

4. la envolvente como la frontera de la región del plano formada por los puntos que pertenecen a alguna de las curvas de la familia dada.

La *Wikipedia* menciona que, si llamamos E_i a la curva resultante de aplicar la definición i-ésima de la lista precedente, entonces $E_i \subseteq E_1$, para $i = 2, 3, 4$; además la *Wikipedia* señala que las cuatro definiciones pueden dar lugar a conjuntos diferentes. Es interesante remarcar que, tras haber introducido, en el arranque del artículo de la *Wikipedia*, el concepto de envolvente a través de la definición E_3 y tras insinuar,

también al principio del mismo, la definición E_2 como una alternativa "equivalente", la página de la *Wikipedia* considera E_1 como la definición formal y luego hace hincapié en el contenido estricto $E_i \subset E_1$, para $i = 2, 3, 4$, mediante unos ejemplos. Para abundar aún más en esta confusión la *Wikipedia* habla de la envolvente, cuando $F(x, y, \alpha)$ es un polinomio, como la curva definida por el *discriminante* del sistema $\{F(x, y, \alpha) = 0, \frac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = 0\}$, lo que no es, estrictamente hablando, lo que se indica en la definición E_1: el discriminante sería, en todo caso, el cierre de Zariski del objeto geométrico definido por E_1.

Llegado a este punto algún lector pensará que esta caótica situación se debe a que la *Wikipedia* no es, en particular, una referencia de autoridad en este tema. Ciertamente. Pero en el caso de la noción de envolvente, la *Wikipedia* no hace sino reflejar un estado de cosas que es fácilmente constatable acudiendo a trabajos y monografías de respetados autores clásicos o actuales.

Leibnitz y Taylor, a finales del s. XVII y principios del XVIII, respectivamente, fueron los primeros en encontrar soluciones singulares de ecuaciones diferenciales, a las que Lagrange dio posteriormente una interpretación geométrica (ver [2]) como el conjunto de puntos límite de intersecciones de curvas integrales infinitamente próximas (en el sentido de la definición 2 de la *Wikipedia*). Ésta parece ser, históricamente, la aproximación más usada al concepto de envolvente. También G. Julia [3] define la envolvente de una familia de curvas $\{C_\alpha\}$ como *el lugar de los puntos característicos aislados*, donde los puntos característicos de C_α son los puntos regulares de esta curva cuya distancia a $C_{\alpha+d\alpha}$ es un infinitésimo de orden superior al de $d\alpha$. El autor hace notar que estos puntos han de satisfacer las ecuaciones $F(x, y, \alpha) = 0$ y $\frac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = 0$ y, también, que algunos puntos característicos reales pueden ser obtenidos como límite de puntos imaginarios de intersección de curvas infinitamente próximas[1]. Por ejemplo, puede pensarse toda curva plana como la envolvente de la familia de sus círculos osculadores, y, mientras que estos no tienen intersección real en dos puntos de la curva infinitamente próximos –al ser interiores el uno al otro–, el límite de estas intersecciones define un único punto de la curva, que es punto característico de los círculos osculadores.

En el muy citado folleto divulgativo de la soviética Editorial Mir [4] acerca de la envolvente se describe esta, a partir de ejemplos de la mecánica, como la curva que limita la zona del plano rellenada por las curvas de una familia dada y que contacta, en cada uno de sus puntos, con una línea de la familia. El autor solo considera ejemplos elementales de familias de curvas cuyas envolventes se obtienen sencillamente eliminando α en las ecuaciones a las que hemos hecho referencia antes, pero no olvida mencionar que tal sistema define, en realidad, algo más amplio, la

[1] Una observación que nos parece particularmente relevante en nuestro contexto. Véase la sección 2, donde se incluyen diversas reflexiones sobre el papel de las coordenadas reales vs. complejas en el cálculo de la envolvente.

línea discriminante, formada por la envolvente y el lugar geométrico de los puntos singulares de todas las curvas de la familia.

Desde una perspectiva más moderna, y con un claro sesgo computacional, el conocido libro [5] trata la determinación analítica de envolventes de familias de curvas planas, como aplicación de técnicas de geometría algebraica efectiva. Los autores, que advierten explícitamente que su aproximación no es rigurosa, definen la envolvente como el conjunto de soluciones del sistema reiteradamente citado, y remiten a [6, cap. 5] como la referencia más autorizada en el tema. Y es precisamente en este texto al que nos remiten donde encontramos justificaciones rigurosas de las antecitadas afirmaciones de la *Wikipedia* (que presumimos proceden de esta misma fuente), así como un completo estudio de las singularidades presentes en las envolventes. Y es también aquí donde se apunta hacia la ocurrencia de estos *puntos de regresión* como una posible razón para la progresiva desaparición de las envolventes en los textos de geometría diferencial. Así Bruce y Giblin afirman que

> ...the very name of 'points of regression' suggests something bad, degeneracy if not decadence, and indeed envelopes have quietly dropped from texts on differential geometry just because of their embarrassingly regressive tendencies. From the point of view of singularity theory points of regression are of great interest: often they are calling our attention...

Pero el presunto desinterés de esta noción en el campo diferencial puede verse compensado por el interés despertado en el ámbito del diseño asistido por ordenador, donde se desarrollan, en la actualidad, diversas investigaciones sobre el cálculo de envolventes ([7], [8]).

Para cerrar este breve repaso por el concepto de envolvente desde distintas perspectivas, quisiéramos mencionar que la pluralidad de aproximaciones a dicho concepto se refleja –como no puede ser de otra forma– en su tratamiento por los programas de geometría dinámica, un software matemático que va a ocupar parte de nuestra atención en los epígrafes siguientes.

Así, por ejemplo, el programa denominado The Geometer's Sketchpad describe –en la documentación técnica anexa, ver [9]– la envolvente como el contorno determinado por la familia de curvas y, pocas líneas después, como el lugar geométrico de los puntos característicos. Esta primera estrategia de The Geometer's Sketchpad –la envolvente como contorno– es compartida por la mayoría de programas de geometría dinámica, en los que puede obtenerse una imagen –puramente gráfica– de la envolvente de una familia de curvas trazando, simplemente, un elemento genérico de la familia. Algunos de estos sistemas (Cabri, Cinderella) son capaces, incluso, de construir la envolvente como un objeto reconocible por el propio sistema[2], pero

[2]Sobre el que se podría continuar realizando otras construcciones, como la intersección de la envolvente con otro objeto construido con el programa de geometría dinámica, etc.

solo en el caso de familias compuestas por curvas sencillas (rectas, circunferencias, etc.). En cualquier caso, ningún sistema estándar es capaz de obtener, actualmente, una ecuación precisa para la envolvente. Solo cabe citar a este respecto a Cabri que, aplicando un método aproximado, conjetura –de manera frecuentemente errónea– dicha ecuación. Hay que señalar, sin embargo, que es previsible una próxima versión de GeoGebra [10] con tal capacidad, de manera similar al cálculo (casi) correcto de lugares geométricos que ofrece en su versión más reciente.

Desde hace años, en nuestro trabajo (ver, por ejemplo, [11, 12, 13, 14]), perseguimos la incorporación de capacidades de razonamiento geométrico automático a los programas de geometía dinámica. Capacidades relativas a la demostración, derivación y descubrimiento automático de teoremas o al cálculo de lugares, offsets, curvas bisectoras, etc. Y es en este contexto en el que queremos, ahora, prestar nuestra atención al cálculo de envolventes, a través de un primer ejemplo, aparentemente sencillo, *ma non troppo*.

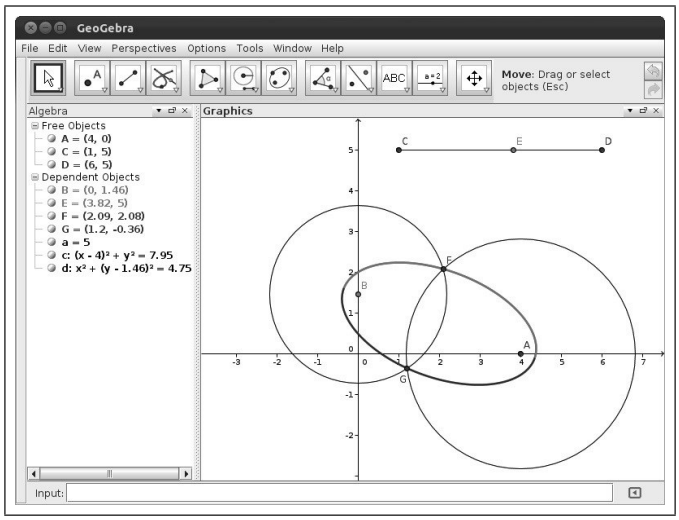


Figura 2: Una elipse de la familia sugerida en GeoGebra mediante dos semielipses obtenidas como lugares geométricos.

1.2. Nuestra aportación

En esta nota tratamos de calcular la envolvente de una familia de curvas $\{C_\alpha : F(x, y, \alpha) = 0\}$, constituida por aquellas elipses con un foco en el punto $A(4, 0)$, con el eje mayor de longitud 5 y con el otro foco variable, descrito por el punto $B(0, \alpha)$, situado en el eje Y (Figura 2). Desde la perspectiva de la incorporación de herramientas de razonamiento geométrico automático en los programas de geometría

dinámica, el enfoque natural para el cálculo de dicha envolvente es la eliminación de α en el sistema

$$\begin{aligned} F(x,y,\alpha) &= 0 \\ \frac{\partial F(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

mediante técnicas de geometría algebraica computacional, bien incorporando directamente cálculo simbólico al programa de geometría dinámica (como ocurre ya con GeoGebra, véase [15]) o bien interconectando el programa de geometría dinámica considerado con otro de cálculo simbólico [16, 17].

Pero, como el lector sospechará, tras la lectura de la sección anterior, nada es tan simple como parece, en lo que concierne al cálculo de envolventes. En primer lugar, la idea de envolvente como contorno de una familia de curvas –típica de la geometría dinámica– nos obligó a reflexionar sobre la representación algebraica más idónea de esa familia de elipses que hemos definido, inicialmente, de modo geométrico. Dado que, en nuestro caso, la construcción de la envolvente va a emplear técnicas de algebra computacional, es obvio que el resultado de estas técnicas puede verse influido por la elección de una u otra representación algebraica de la familia dada.

Para empezar, ¿qué es una familia de curvas? Cuando representamos una colección de curvas mediante los ceros de una función $\{F(x,y,\alpha) = 0\}$, asociamos mentalmente, a cada valor α_0 del parámetro, una curva $F(x,y,\alpha_0) = 0$ de la familia, y recíprocamente. Si trabajamos con una familia de curvas reales, parece natural considerar solo puntos (x,y) reales y valores reales del parámetro α. Si se trata de curvas algebraicas reales, también parece natural suponer que $F(x,y,\alpha)$ es un polinomio real en esas tres variables x, y, α.

Así pues, debemos comenzar preguntándonos (como efectivamente haremos en la Sección 2) si la familia descrita geométricamente como la formada por las "elipses con focos en $A(4,0)$ y $B(0,\alpha)$ y eje mayor de longitud 5", y cuyo contorno queremos determinar con un programa de geometría dinámica dotado de razonamiento automático, es o no una familia de curvas algebraicas reales en el sentido antes señalado. La conclusión a la que se llega es que dicha familia de curvas no es real, salvo que se introduzcan desigualdades en su descripción implícita. Es, por tanto, una familia semialgebraica [18], pero no algebraica. Este hecho, bastante fácil de apreciar en este caso en particular, es importante en cuanto conlleva –cuando se trabaja en la automatización de este tipo de cálculos– la necesidad de realizar un planteamiento general de dichos cálculos bien en el marco semialgebraico, bien en el algebraico, pero –en este último caso– asumiendo que se trabaja sobre los números complejos y que tal vez esto no refleje exactamente la idea geométrica recogida en la pantalla del programa de geometría dinámica.

Una alternativa para salvaguardar el carácter algebraico real en algunos casos elementales, como el de la familia que estamos considerando, podría ser el plantear si dicha familia podría ser representada de manera puramente real, pero a través de una parametrización. Es decir, como la imagen mediante una aplicación, digamos, polinómica o regular del plano real, puesto que esta familia de elipses es un objeto geométrico bidimensional. Este problema es, en general, muy difícil y objeto de investigación en la actualidad (véase la reciente tesis doctoral [19] a la que remitimos al lector para más información sobre este tema); en este caso conocemos la respuesta afirmativa (ver [20], usando resultados de [21]) al problema particular formado por la familia de elipses, pero la complejidad de la parametrización no permite, por el momento, aprovechar esta información para el cálculo de envolventes[3].

Una segunda aportación de este trabajo tiene que ver, más directamente, con el cálculo de la envolvente de esa familia de elipses, asumiendo su representación precisa como una familia semialgebraica. Aunque la aplicación mecánica de la eliminación en el sistema que define la envolvente conduce a un resultado coherente con el obtenido usando programas de geometría dinámica, surgen, inevitablemente, diversos problemas asociados a la existencia de "componentes extrañas", tan comunes cuando se emplean técnicas de eliminación.

Por ello, en la última sección de este trabajo estudiamos tales componentes espúreas en el caso de la familia de elipses, tratando de avanzar hacia la determinación algorítmica (y eventual supresión automática en la descripción de la "verdadera" envolvente) de las mismas, lo que se revela como una tarea no demasiado sencilla, al estar, como señalábamos anteriormente en referencia a una observación de G. Julia sobre los puntos reales que son límite de puntos complejos, íntimamente imbricados los aspectos reales y complejos en la geometría de la familia considerada.

2. Una familia de elipses y su realidad

Consideremos la familia $\{C_\alpha\}$ de elipses de eje mayor de longitud 5, con focos en $A(4,0)$ y $B(0,\alpha)$, punto variable en el eje Y. El procedimiento más común para hacer una construcción en geometría dinámica que responda a esta descripción es usar el método del jardinero: trazando circunferencias, cuyos radios sumen 5, centradas en A y B, calculamos los lugares geométricos de sus dos puntos de intersección, que muestran una elipse, sugerida por dos semielipses (Figura 2).

Así pues, mediante esta construcción, la familia $\{C_\alpha\}$ es, exactamente, la proyección[4] sobre $(x_5, x_6, x_2) \in \mathbb{R}^3$ de un conjunto algebraico real en $\mathbb{R}^9$, descrito como

[3]En la próxima sección veremos, gracias a [22], que la superficie algebraica que genera dicha familia es "tubular" y que puede parametrizarse sobre los reales, pero no de manera polinomial o regular.

[4]En lo que sigue se usará la notación empleada en la hoja de cálculo Maple desarrollada para

el conjunto de ceros reales del siguiente ideal

$$\begin{aligned} FF: &= \langle -r^2 + (x_2 - x_6)^2 + (x_1 - x_5)^2, r + s - 5, -s^2 + (x_5 - 4)^2 + {x_6}^2, \\ &\quad {x_2}^2 + c^2 - 9, x_1, s - b^2, r - a^2 \rangle \end{aligned}$$

en $R[x_1, x_2, x_5, x_6, r, s, a, b, c]$, entendiendo que

- la construcción se desarrolla en el plano (x_1, x_2), de manera que el foco A tiene coordenadas $(4, 0)$ y el foco B tiene como coordenadas (x_1, x_2), con $x_1 = 0$ y x_2 variable.
- las ecuaciones de las circunferencias con centro en A, B, respectivamente, y radios r, s (cuya suma sea 5), se representan mediante las ecuaciones

  $$\left\{0 = -r^2 + (x_2 - x_6)^2 + (x_1 - x_5)^2, 0 = -s^2 + (x_5 - 4)^2 + {x_6}^2, 0 = r + s - 5\right\}$$

  a las que se añaden las condiciones $r = a^2, s = b^2$, para que los radios sean positivos (cuando todas las variables son reales, como estamos requiriendo en este caso), y también la condición ${x_2}^2 + c^2 - 9 = 0$ para que el cuadrado de la distancia entre los centros de las circunferencias, ${x_2}^2 + 4^2$, más una cantidad positiva c^2, sea 25, garantizando así que esa distancia es menor que 5 (de nuevo, en un contexto puramente real para todos los valores) y, por tanto, que hay intersección real entre las circunferencias.
- el punto de intersección de los pares de circunferencias es (x_5, x_6), siendo estas las variables libres que intervienen en la descripción de la familia de circunferencias y, por tanto, las que describen cada elipse, en función del valor de x_2 correspondiente.

Ahora bien, para calcular la proyección real de los ceros del ideal FF es preciso, primero, proceder a la eliminación de todas las variables en FF excepto (x_5, x_6, x_2) y, luego, estudiar detenidamente qué puntos de los ceros del ideal de eliminación pueden levantarse a valores reales de los ceros de FF.

La eliminación es particularmente simple en este caso: se puede hacer incluso a mano y resulta un ideal generado por un único polinomio

$$\begin{aligned} F: &= \langle 81 + 144\, x_5 - 82\, {x_2}^2 + 164\, x_2\, x_6 - 100\, {x_6}^2 - 36\, {x_5}^2 + 16\, {x_2}^2 x_5 \\ &\quad -32\, x_2\, x_6\, x_5 + {x_2}^4 - 4\, {x_2}^3 x_6 + 4\, {x_2}^2 {x_6}^2 \rangle \end{aligned}$$

Se trata, desde la perspectiva de la geometría algebraica compleja, de un familia de cónicas en x_5, x_6 que, mediante una transformación lineal en $\mathbb{Q}[x_2]$, se convierte

este trabajo. En particular, por abuso de notación, se identificarán polinomios $p(\bar{x})$ y ecuaciones $p(\bar{x}) = 0$.

en una superficie tubular, i.e. de la forma $M(x_2)x_5^2 + N(x_2)x_6^2 + S(x_2) = 0$, donde M, N, S son polinomios [22].
Una observación: puede comprobarse, realizando el cálculo algebraico correspondiente, que la eliminación resulta ser la misma si consideramos, en vez del ideal FF, el que resulta de suprimir en FF las ecuaciones $\{r = a^2, s = b^2, {x_2}^2 + c^2 - 9 = 0\}$. Esto anuncia ya que, en cierto sentido, la familia que estamos estudiando tiene pocas posibilidades de ser "real", puesto que la única ecuación que, en principio, engloba esa familia, es la misma que si ampliamos la construcción del jardinero al caso de circunferencias de radios negativos o con intersecciones no reales de las circunferencias involucradas.

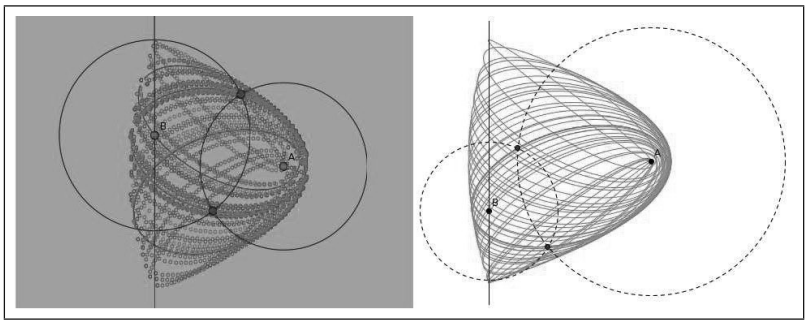


Figura 3: Traza en Cinderella (izq.) y GeoGebra (dcha.) de las elipses estudiadas.

En todo caso, la conclusión precisa obtenida hasta ahora es que la familia de elipses que estamos considerando (ver Figura 3) es el conjunto descrito por los ceros reales de este polinomio F, cuando tales ceros (x_5, x_6, x_2) puedan extenderse a un cero real $(x_1, x_2, x_5, x_6, r, s, a, b, c)$ de FF, puesto que es este el caso en el que la construcción realizada tiene sentido. Ahora bien, es fácil observar que

- todos los ceros (reales o complejos) de F pueden levantarse a un cero (real o complejo) de FF.

  En efecto, dado (x_5, x_6, x_2) verificando F, podemos determinar r^2, s^2 mediante los polinomios de FF, $-r^2 + (x_2 - x_6)^2 + (x_1 - x_5)^2$ y $-s^2 + (x_5 - 4)^2 + {x_6}^2$, respectivamente. Pero F es el resultado de sustituir $x_1 = 0$ y los valores de r^2, s^2 determinados por los polinomios de FF antes indicados, en la expresión $4r^2s^2 - (25 - r^2 - s^2)^2$. Por tanto, tras una elección adecuada de los valores de r, s, se tiene $r + s = 5$. Los valores de c, b y a, si no es necesario que sean reales, siempre pueden obtenerse a partir de x_2, r y s de modo que verifiquen las restantes ecuaciones de FF.

- si (x_5, x_6, x_2) son reales, verificando F, entonces r^2, s^2 son también reales, luego r, s son bien reales o bien imaginarios puros. Pero solo puede darse el

caso de r, s reales, puesto que si uno es real y el otro imaginario, o ambos son imaginarios, su suma no puede ser 5.

- si (x_5, x_6, x_2) son reales, a, b no pueden ser ambos imaginarios puros a la vez, porque entonces r, s serían negativos y su suma no podría ser 5.
- si (x_5, x_6, x_2) son reales, x_2 es real, luego c^2 es real. Por tanto c solo puede ser real o imaginario puro.

Por tanto, las coordenadas (r, s, a, b, c) de puntos $(x_1, x_2, x_5, x_6, r, s, a, b, c)$ en la variedad definida por FF, que se levantan sobre ceros reales de F, tienen que ser de alguno de estos tipos:

- todas las coordenadas (r, s, a, b, c) reales. Se sigue que (x_5, x_6) está en una elipse.
- a ó b imaginarios puros, c imaginario puro. Se sigue que (x_5, x_6) está en una hipérbola, pues uno de los valores de r, s es negativo.

Nótese que estas dos situaciones se reflejan en los valores de x_2. Puesto que ${x_2}^2 + c^2 - 9$, si x_2 está dentro del intervalo $[-3, 3]$ se trata de una elipse; y de una hipérbola en otro caso.

El caso con a ó b imaginarios puros y c real es imposible, puesto que se trataría de la intersección de dos circunferencias cuyos radios tienen una diferencia de longitudes de 5 unidades, pero sus centros distan más de 5 unidades. No hay intersección real.

Concluimos que la familia de curvas "elipses de eje mayor 5, foco A fijo en $(4, 0)$, foco B variable sobre el eje Y" es la proyección sobre $(x_5, x_6, x_2) \in \mathbb{R}^3$ del conjunto algebraico real definido por los ceros del ideal $FF(x_1, x_2, x_5, x_6, r, s, a, b, c)$, porque si solo consideramos puntos reales en dicha variedad, la proyección es exactamente esa familia de curvas.

Además, se sigue del razonamiento empleado, que la proyección en $\mathbb{R}^3$ de los puntos (reales o complejos) de los ceros de FF es esa familia más la familia de hipérbolas que hemos señalado y que la diferencia estriba exclusivamente en constreñir x_2 en el intervalo $[-3, 3]$.

Por último, es fácil constatar (ver Figura 4) que la superficie $F(x_5, x_6, x_2) = 0$ es irreducible y que sus puntos singulares son los puntos con (x_5, x_6) ubicados en el foco A y con $x_2 = \pm 3$, así como los puntos con (x_5, x_6) en los valores extremos del foco B, ie. $(x_5, x_6) = (0, 3)$, con $x_2 = 3$; y $(x_5, x_6) = (0, -3)$ con $x_2 = -3$. Por tanto existen muchos puntos regulares de $F = 0$ con x_2 en el intervalo $[-3, 3]$, que corresponden a elipses de la familia. Se sigue que el cierre de Zariski de la familia de elipses es, precisamente $F = 0$. Por tanto, como habíamos anticipado en la sección anterior, vemos que no hay forma de eliminar las hipérbolas en la descripción algebraica de

la familia considerada, sin introducir signos, es decir, sin trabajar en un contexto semialgebraico.

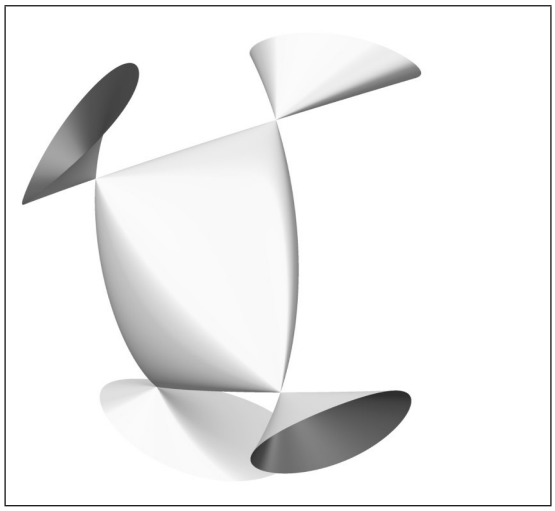


Figura 4: La superficie $F(x_5, x_6, x_2) = 0$ completa. La parte sin las "trompetas" es la que corresponde a la familia de elipses.

3. Cálculo de la envolvente

Para obtener la envolvente real, y siguiendo el enfoque natural mencionado en la Sección 1.2, la eliminación de x_2 en el sistema

$$\begin{aligned} F(x_5, x_6, x_2) &= 0 \\ \frac{\partial F(x_5, x_6, x_2)}{\partial x_2} &= 0, \end{aligned}$$

devuelve el cierre de Zariski de la proyección del conjunto de todos los puntos de F que i) son singulares, o ii) tienen plano tangente paralelo al eje x_2, a saber, los ceros de G

$$\begin{aligned} G = {} & x_5^2 x_6^4 + x_6^6 - 16x_5^3 x_6^2 - 24x_5 x_6^4 - 36x_5^4 + 74x_5^2 x_6^2 - 2x_6^4 + 432x_5^3 \\ & +32x_5 x_6^2 - 1647x_5^2 - 207x_6^2 + 1656x_5 + 1296. \end{aligned}$$

Una representación gráfica de los ceros de este polinomio G (Figura 5) parece devolver, en una primera ojeada, un resultado acorde con la intuición y con lo sugerido en la Figura 3. Pero una mirada más atenta muestra que tal representación es incompleta. El polinomio factoriza como sigue

$$G = (x_6^2 - 18x_5 - 9)(x_6^2 + 2x_5 - 9)(x_5^2 + x_6^2 - 8x_5 + 16),$$

donde los dos primeros factores describen las parábolas que aparecen en dicha Figura 5, mientras que el último factor es, precisamente, el punto real $A(4,0)$, que de ninguna manera puede admitirse, sin más explicación, como un elemento

- del conjunto de puntos límite de intersecciones de curvas próximas C_α,
- de una curva tangente a todas las de la familia dada,
- de la frontera de la región del plano formada por los puntos que pertenecen a alguna de las curvas de la familia dada.

Nótese que dicho punto no pertenece a ninguna de las parábolas de la Figura 5, sino que es interior a la región convexa definida por ambas. Además, dado que la eliminación puede incluir elementos que no están en la proyección –sino en la clausura de esta– de la figura cuyas ecuaciones son objeto de eliminación, podría ocurrir que el punto $(4,0)$ fuese, precisamente, uno de estos puntos añadidos de manera artificial, por mor del método algebraico y ajenos a la geometría del problema.

Para dilucidar estas cuestiones, obsérvese (Figura 4) que la superficie $F(x_5, x_6, x_2)$ presenta cuatro puntos singulares en $(x_5 = 0, x_6 = 3, x_2 = 3)$,$(0, -3, -3)$ y $(4, 0, \pm 3)$, donde se conectan cuatro alas formadas por las familias de hipérbolas. Además, la superficie contiene a las rectas que pasan por $(x_5 = 4, x_6 = 0)$ y $(x_5 = 0, x_6 = \pm 3)$ con $x_2 = \pm 3$, respectivamente. Mientras que los dos primeros puntos singulares ya aparecen proyectados en las dos parábolas de la Figura 5, los dos restantes $(4, 0, \pm 3)$ no lo hacen en ninguna de ellas.

Si enfatizamos el carácter "real" de la familia de curvas, y buscamos puntos reales de F y $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, para $-3 \leq x_2 \leq 3$, y de su proyección real (lo que no se garantiza por simple eliminación sin un estudio posterior), podemos proceder examinando las raíces dobles (al menos) de x_2 en F. En general, las raíces de x_2 se expresan como:

$$x_6 \pm \sqrt{x_6^2 \pm 10\sqrt{16 - 8x_5 + x_6^2 + x_5^2} + 41 - 8x_5},$$

y, para que sean múltiples, es necesario que se anule

$$\sqrt{16 - 8x_5 + x_6^2 + x_5^2},$$

que es el punto $(4,0)$, o bien que lo haga una de las expresiones

$$x_6^2 \pm 10\sqrt{16 - 8x_5 + x_6^2 + x_5^2} + 41 - 8x_5,$$

lo que ocurre cuando (x_5, x_6) está en alguna de las consabidas dos parábolas

$$(x_6^2 - 18x_5 - 9)(x_6^2 + 2x_5 - 9).$$

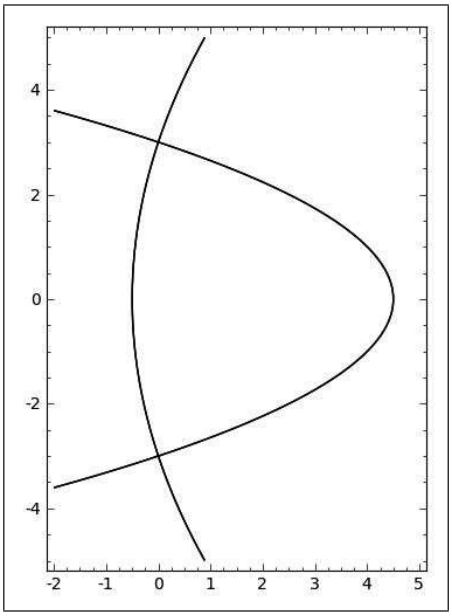


Figura 5: Las parábolas que envuelven a la familia.

En este caso el valor de x_2 es precisamente $x_2 = x_6$, luego es real si x_6 (y por tanto x_5) también lo es. Por tanto, para tener la certeza de que x_2 está en F y en $[-3, 3]$ es necesario acotar x_6 en la proyección, exigiendo que esté en ese mismo intervalo. Además, la anulación de $16 - 8x_5 + x_6^2 + x_5^2$ conlleva que el valor de x_2 ha de ser ± 3.

En resumen, la proyección real de la superficie $F = 0$, limitada a la banda $-3 \leq x_2 \leq 3$, sobre el plano $\{x_5, x_6\}$, es la región convexa entre las dos parábolas que se muestran en la Figura 5, más el punto $(4, 0)$. Es decir, ese punto no surge de manera artificial, como subproducto del proceso de eliminación, ni siquiera es posible dejarlo de lado argumentando algún defecto de "realidad", puesto que $(4, 0, \pm 3)$ forma parte de la familia "real"de curvas con todos los derechos, aunque esté en el límite.

Entonces, ¿qué tipo de argumentos (automatizables) podríamos usar para decidir si $(4, 0)$ debe o no considerarse como parte de la envolvente? En este caso resulta que tampoco se elimina dicho punto usando el criterio de proyectar sólo los puntos de $F = 0$ que anulan a $\frac{\partial F}{\partial x_2}$, pero que tienen plano tangente, es decir, tales que alguna de las otras dos derivadas parciales es no nula sobre los mismos. Esto se puede comprobar algebraicamente, eliminando $\{x_2, t\}$ en el ideal intersección de los ideales $< F, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_5} * t - 1 >$ y $< F, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_6} * t - 1 >$. Sigue apareciendo $(4, 0)$. ¿Por qué?

El quid de la cuestión reside no en el punto (4,0), sino en todos los puntos de

las dos rectas complejas $x_5^2 + x_5x_6^2 - 8x_5 + 16 = 0$ que se cortan en él y que forman parte de la envolvente $G = 0$. Tales puntos no son proyección de puntos singulares de $F = 0$, sino de puntos regulares complejos en los que $\frac{\partial F}{\partial x_2} = 0$, por lo que al proyectar ambas rectas imaginarias van a aparecer completas y, aunque uno se interese sólo por los puntos reales de la proyección, su intersección $(4, 0)$ va a seguir presente. La única forma de suprimir dicho punto consiste en factorizar la envolvente sobre $\mathbb{C}$ y eliminar los puntos reales que proceden sólo de factores complejos. En el caso estudiado, la envolvente presenta cuatro factores

$$(x_6^2-18x_5-9)(x_6^2+2x_5-9)(x_5-4+x_6 RootOf(_Z^2+1))(x_5-4-x_6 RootOf(_Z^2+1)),$$

donde, tras eliminar los dos últimos por su carácter espúreo, al ser complejos, restan finalmente las dos parábolas de la Figura 5 como candidatas a ser la envolvente real de la familia de elipses.

4. Conclusiones

En nuestro afán de dotar de capacidades de razonamiento automático a programas de geometría dinámica, la derivación mecánica de envolventes de familias de curvas planas presenta problemas específicos debidos a la inexistencia de una única definición de envolvente. Además de ello, la aplicación irreflexiva de métodos algebraicos a situaciones no algebraicas puede conducir a cuellos de botella. En esta nota discutimos un problema elemental relativo a la envolvente de una familia de elipses. Mostramos que tal familia es semialgebraica y, consecuentemente, la aplicación de métodos algebraicos ha de ser complementada con un estudio *ad hoc*. Concretamente, mientras que la eliminación estándar introduce en la envolvente buscada un factor que repugna la intuición, explicamos que éste no puede ser descrito de otra forma que a través de la consideración de rectas imaginarias, que finalmente dan razón del resultado inicialmente esperado. Otras aproximaciones, a través de la representación de la familia dada, o de la superficie que forma su cierrre de Zariski, como una imagen paramétrica del plano real, deberán ser objeto de análisis en el futuro.

5. Agradecimientos

Los autores quieren hacer constar su agradecimiento al “Ministerio de Economía y Competitividad” y al “European Regional Development Fund” (FEDER), por el proyecto MTM2011-25816-C02-02, en el seno del cual se ha realizado este trabajo.

Referencias

[1] http://en.wikipedia.org/wiki/Envelope_(mathematics)

[2] R.C. Yates, A Handbook on Curves and Their Properties. Ann Arbor, MI: J. W. Edwards, 1952.

[3] G. Julia, Éléments de de Géométrie Infinitesimale. París: Gauthier–Villars, 1936.

[4] V.G. Boltiansky, La Envolvente. Moscú: Mir, 1977.

[5] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, Ideals, Varieties and Algorithms. Springer-Verlag: Berlin, 1992.

[6] J.W. Bruce, P.J. Giblin, Curves and Singularities. Cambridge: Cambridge University Press, 1984.

[7] T. Schulz, B. Jütler, Envelope Computation in the Plane by Approximate Implicitization. Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, 22(4), pp. 265–288, 2011.

[8] H. Pottmann, M. Peternell, Envelopes – Computational Theory and Applications. En: Spring Conference on Computer Graphics, pp. 3–23. Bratislava: Comenius University, 2000.

[9] http://www.dynamicgeometry.com/Technical_Support/FAQ/Constructions_and_Use/Envelope_Constructions.html

[10] http://www.geogebra.org

[11] T. Recio, M.P. Vélez, Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry. Journal of Automated Reasoning 23, pp. 63–82, 1999.

[12] F. Botana, J.L. Valcarce, A Software Tool for the Investigation of Plane Loci, Mathematics and Computers in Simulation 61(2) pp. 139–152, 2003.

[13] F. Botana, T. Recio, Towards Solving the Dynamic Geometry Bottleneck Via a Symbolic Approach. En: H. Hong, D. Wang (Eds.), Automated Deduction in Geometry, 5th International Workshop, ADG 2004, volumen 3763 de Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2006, pp. 92–110.

[14] A. Montes, T. Recio, Automatic Discovery of Geometry Theorems Using Minimal Canonical Comprehensive Gröbner Systems. En: F. Botana, T. Recio (Eds.), Automated Deduction in Geometry, 6th International Workshop, ADG 2006, volumen 4689 de Lecture Notes in Artificial Intelligence, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2007, pp. 113– 139.

[15] http://dev.geogebra.org/trac/wiki/GeoGebraCAS

[16] http://code.google.com/p/singularws/source/browse/doc/README

[17] J. Escribano, F. Botana, M.A. Abánades, Adding Remote Computational Capabilities to Dynamic Geometry Systems. Mathematics and Computers in Simulation 80, pp. 1177-1184, 2010.

[18] http://en.wikipedia.org/wiki/Semialgebraic_set

[19] C. Ueno, Imágenes Polinómicas y Regulares en Espacios Euclídeos. Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense, 2012. http://eprints.ucm.es/20063/1/T34329pdf

[20] C. Ueno, Comunicación personal.

[21] J. F. Fernando, On the one dimensional polynomial and regular images of $\mathbb{R}^n$, http://arxiv.org/abs/1212.1812

[22] J. R. Sendra, Comunicación personal.