Factorización en algunos subanillos de $\mathbb{C}$

José F. Fernando y José Manuel Gamboa
Departamento de Matemáticas, Facultad de Matemáticas, UCM
{josefer, jmgamboa}@mat.ucm.es

Resumen

We present a method to determine units and irreducible elements for a large class of subrings of the field $\mathbb{C}$ of complex numbers. We use it to solve a classical diophantine equation.

En recuerdo del profesor José Javier Etayo Miqueo

1. Una clase distinguida de subanillos de $\mathbb{C}$

A lo largo de esta nota A será siempre un subanillo (conmutativo y con elemento unidad) del cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Denotamos $\overline{z}$ el conjugado de cada número complejo z y suponemos que A cumple las siguientes dos propiedades:

i) A es *cerrado respecto de la conjugación,* es decir, $\overline{z} \in A$ para cada $z \in A$.

ii) Para cada $z \in A$, el producto $z \cdot \overline{z}$ es un número entero (no negativo).

Denotaremos $\mathsf{N} : A \to \mathbb{N}$, $z \mapsto z \cdot \overline{z}$, que es una función multiplicativa, es decir, $\mathsf{N}(x \cdot y) = \mathsf{N}(x) \cdot \mathsf{N}(y)$ para todo $x, y \in A$. Además, $\mathsf{N}^{-1}(0) = \{0\}$.

Esta función permite relacionar las propiedades de factorización en $\mathbb{Z}$ y A, porque si $x, z \in A$ cumplen que x divide a z en A entonces existe $y \in A$ tal que $z = x \cdot y$, y por ello $\mathsf{N}(z) = \mathsf{N}(x) \cdot \mathsf{N}(y)$, luego $\mathsf{N}(x)$ divide en $\mathbb{Z}$ a $\mathsf{N}(z)$.

Muchos subanillos de $\mathbb{C}$ satisfacen estas dos propiedades; en particular, para cada entero positivo n, las cumple

$$A_n := \{a + b\sqrt{-n} : \ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}.$$

Estos anillos presentan un comportamiento muy diferente, según los valores de n, respecto de la factorización; por ejemplo, se prueba en el Problema 4.6 en [2] que A_2 es un dominio euclídeo, y veremos en el Ejemplo (5) que A_3 ni siquiera es un dominio de factorización única.

Comenzaremos estudiando las unidades de A y caracterizando en qué casos A posee unidades no triviales, esto es, distintas de ± 1. Determinamos después los elementos irreducibles, lo que proporciona un método de factorización siempre que A sea un dominio de factorización única. Para terminar aplicamos algunos de los resultados anteriores para probar que 26 es el único entero cuyo anterior es un cuadrado y cuyo siguiente es un cubo.

2. El grupo de unidades de A

Recordemos que un elemenro $u \in A$ se dice *unidad* si existe otro $v \in A$ tal que $uv = 1$. Denotaremos $\mathcal{U}(A) \subset A$ el grupo multiplicativo formado por las unidades de A.

Proposición 2.1 (1) *Un elemento $x \in A$ es unidad si y sólo si* $\mathsf{N}(x) = 1$. *Sean $i := \sqrt{-1}$ y $\rho := e^{2\pi i/3}$. Entonces,*

(2) *El grupo de unidades de A es uno de los tres siguientes:*

$$\mathcal{U}(A) = \{-1, 1\}, \quad \mathcal{U}(A) = \{1, -1, i, -i\} \quad o \quad \mathcal{U}(A) = \{1, -1, \rho, -\rho, \overline{\rho}, -\overline{\rho}\}$$

En particular el anillo A tiene una cantidad finita de unidades. Además, A no contiene, simultáneamente, a i y ρ.

(3) *Si* $\mathcal{U}(A) = \{-1, 1, i, -i\}$ *entonces*

$$A = \mathbb{Z}[i] := \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

(4) *Si* $\mathcal{U}(A) = \{-1, 1, \rho, -\rho, \overline{\rho}, -\overline{\rho}\}$, *entonces*

$$A = \mathbb{Z}[\rho] := \{a + b\rho : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Demostración. (1) Si $x \in A$ y $1 = \mathsf{N}(x) = x \cdot \overline{x}$, entonces $x \in \mathcal{U}(A)$, pues $\overline{x} \in A$. Recíprocamente, supongamos que $x \in \mathcal{U}(A)$. Existe por tanto $y \in A$ tal que $x \cdot y = 1$. Se tiene,

$$1 = \mathsf{N}(1) = \mathsf{N}(x \cdot y) = \mathsf{N}(x) \cdot \mathsf{N}(y) \quad \Longrightarrow \quad \mathsf{N}(x) = 1.$$

(2) Como en todo anillo, 1 y -1 son unidades en A. Buscamos las restantes unidades $x = a + ib \in \mathcal{U}(A) \setminus \{-1, 1\}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces $a^2 + b^2 = 1$ y $a^2 \neq 1$, luego $a^2 < 1$, así que $|a| < 1$. Además

$$(a + 1) + bi = 1 + x := y \in A,$$

y por la hipótesis sobre el anillo A,

$$2(1 + a) = 2 + 2a = 1 + 2a + a^2 + b^2 = (1 + a)^2 + b^2 = y \cdot \overline{y} \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto, existe un número entero $n \geq 0$ tal que $2(1 + a) = n$. En consecuencia $a = (n - 2)/2$, lo que junto con la desigualdad $|a| < 1$ implica que $|n - 2| < 2$, así que $n = 1, 2, 3$. Además $b = \pm\sqrt{1 - a^2}$, luego

$$a \in \{0, \pm 1/2\} \quad \& \quad b \in \{\pm 1, \pm\sqrt{3}/2\}.$$

Hemos demostrado que las posibles unidades de A, aparte de ± 1, son los siguientes seis números:

$$i, -i, \rho, -\rho, \overline{\rho}, -\overline{\rho}.$$

Veamos ahora que A no contiene, simultáneamente, a i y ρ. En caso contrario $\zeta := \rho + i \in A$, esto es,

$$\zeta = \frac{-1 + (2 + \sqrt{3})i}{2} \in A \quad \Longrightarrow \quad 2 + \sqrt{3} = \zeta \cdot \overline{\zeta} \in \mathbb{Z},$$

y esto es falso. Por ello, si $i \in A$ entonces $\mathcal{U}(A) = \{\pm 1, \pm i\}$, y si $\rho \in A$ entonces también $\overline{\rho}, -\rho, -\overline{\rho} \in A$ y por tanto $\mathcal{U}(A) = \{\pm 1, \pm\rho, \pm\overline{\rho}\}$.

(3) Como A es subanillo de $\mathbb{C}$ tiene característica cero, luego contiene al anillo $\mathbb{Z}$ de los números enteros. Supongamos primero que $\mathcal{U}(A) = \{1, -1, i, -i\}$. Esto implica que $i \in A$ y, como $\mathbb{Z} \subset A$, también $\mathbb{Z}[i] \subset A$. Recíprocamente, sea $x := a + bi \in A$, donde $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces, $y := 1 + x = (1 + a) + bi \in A$, por lo que

$$a^2 + b^2 = x \cdot \overline{x} \in \mathbb{Z} \quad \& \quad 1 + 2a + a^2 + b^2 = y \cdot \overline{y} \in \mathbb{Z}.$$

Restando se deduce que $1 + 2a \in \mathbb{Z}$, luego $2a = m$ para cierto $m \in \mathbb{Z}$. Como estamos suponiendo que $i \in A$, entonces $z := -xi = b - ai \in A$ y, por lo que acabamos de probar, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $2b = n$. Todo consiste en comprobar que m y n son pares, pues entonces $a, b \in \mathbb{Z}$ y por tanto $x = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$. Ahora bien, como $a^2 + b^2 \in \mathbb{Z}$,

$$m^2 + n^2 = 4a^2 + 4b^2 = 4(a^2 + b^2) \in 4\mathbb{Z},$$

luego m y n tienen la misma paridad, y de hecho son ambos pares, pues si fuesen impares $m^2 + n^2 \in 2\mathbb{Z} \setminus 4\mathbb{Z}$.

(4) Supongamos ahora que $\mathcal{U}(A) = \{1, -1, \rho, -\rho, \overline{\rho}, -\overline{\rho}\}$, lo que en particular implica que $\mathbb{Z}[\rho] \subset A$. Veamos que $A \subset \mathbb{Z}[\rho]$. Como $A \subset \mathbb{C}$ y $\{1, \rho\}$ es una base de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, todo elemento $x \in A$ se escribe como $x = a + b\rho$ para ciertos números reales a, b, y se trata de demostrar que a y b son números enteros. Observamos que

$$\rho + \overline{\rho} = -1 \quad \& \quad \rho \cdot \overline{\rho} = \frac{(1 + \sqrt{3}i)(1 - \sqrt{3}i)}{4} = 1.$$

Por tanto,

$$x \cdot \overline{x} = (a + b\rho) \cdot (a + b\overline{\rho}) = a^2 + ab(\rho + \overline{\rho}) + b^2\rho\overline{\rho} = a^2 - ab + b^2.$$

También $y := (a - 1) + b\rho = -1 + x \in A$, y

$$y \cdot \overline{y} = (a - 1)^2 - (a - 1)b + b^2.$$

Por la hipótesis sobre el anillo A los productos $x\cdot\overline{x}$ e $y\cdot\overline{y}$ son números enteros y, restando, deducimos que

$$1-2a+b=y\cdot\overline{y}-x\cdot\overline{x}\in\mathbb{Z}\quad\Longrightarrow\quad b-2a\in\mathbb{Z}. \tag{1}$$

Por otro lado, como $\overline{x},\rho\in A$ también $z:=\overline{x}\rho\in A$. Pero

$$\overline{x}\rho=(a+b\overline{\rho})\cdot\rho=b+a\rho\in A,$$

y argumentando con z como antes lo hicimos con x se deduce que

$$a-2b\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

Multiplicando (1) por 2 y sumándole (2) se deduce que $u=3a\in\mathbb{Z}$, mientras que multiplicando (2) por 2 y sumándole (1) resulta que $v=3b\in\mathbb{Z}$, y todo se reduce a demostrar que u y v son múltiplos de 3. Sabemos que

$$u^2-uv+v^2=9(a^2-ab+b^2)=9x\cdot\overline{x}\in 9\mathbb{Z}. \tag{3}$$

Dividimos u y v entre 3 y queda $u=3\alpha+r$ y $v=3\beta+s$, donde $\alpha,\beta\in\mathbb{Z}$ y $r,s=0,1,2$, y hemos de probar que $r=s=0$. Sustituyendo en (3) estas expresiones de u y v se tiene

$$\begin{aligned}u^2-uv+v^2&=(3\alpha+r)^2-(3\alpha+r)\cdot(3\beta+s)+(3\beta+s)^2=9(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)\\&\quad+6(\alpha r+\beta s)-3(\alpha s+\beta r)+r^2-rs+s^2.\end{aligned}$$

Se deduce entonces de (3) que

$$6(\alpha r+\beta s)-3(\alpha s+\beta r)+r^2-rs+s^2\in 9\mathbb{Z}, \tag{4}$$

luego $r^2-rs+s^2\in 3\mathbb{Z}$. Esto implica que $r+s\in 3\mathbb{Z}$. En efecto, si $r=0$ entonces $s^2\in 3\mathbb{Z}$, por lo que $s=0$. Si $r=1$, entonces $s^2-s+1\in 3\mathbb{Z}$, luego $s=2$, y por último, si $r=2$ entonces $s^2-2s+1\in 3\mathbb{Z}$ y $s=1$. Sea $t\in\mathbb{Z}$ tal que $r+s=3t$. Sustituyendo $s=3t-r$ en (4) se obtiene

$$6\alpha r+6\beta\cdot(3t-r)-3\alpha\cdot(3t-r)-3\beta r+r^2-r\cdot(3t-r)+(3t-r)^2\in 9\mathbb{Z}.$$

Agrupando términos esto equivale a

$$9(\alpha r-\beta r-tr+t^2+2\beta t-\alpha t)+3r^2\in 9\mathbb{Z},$$

luego $3r^2\in 9\mathbb{Z}$, o sea, $r^2\in 3\mathbb{Z}$, así que $r=0$, y por tanto $s=0$. $\square$

3. Elementos irreducibles de A

Recordemos que un elemento $a \in A \setminus (\mathcal{U}(A) \cup \{0\})$ se dice *reducible* si es producto de dos elementos de A que no son unidades. Los elementos de A que no son reducibles se llaman *irreducibles.* Se dice que A es un *dominio de factorización única* si cada elemento de A es producto de una cantidad finita de elementos irreducibles y para cada elemento irreducible $x \in A$ el ideal $\mathfrak{p} := xA$ es *primo,* es decir, para cada par de elementos $y, z \in A \setminus \mathfrak{p}$ se cumple que $y \cdot z \in A \setminus \mathfrak{p}$.

En la siguiente proposición se muestra la relación entre la irreducibilidad de un elemento $x \in A$ y el valor de $\mathsf{N}(x)$.

Proposición 3.1 (1) *Si $x \in A$ y $\mathsf{N}(x)$ es un entero primo, entonces x es irreducible en A.*

(2) *Sean $p \in \mathbb{Z}^+$ un número primo que no pertenece a la imagen de la función N y $x \in A$ un elemento tal que $\mathsf{N}(x) = p^k$ con $k = 2$ o $k = 3$. Entonces x es irreducible en A.*

(3) *Si A es dominio de factorización única y $x \in A$ es irreducible, existe un entero primo p tal que $\mathsf{N}(x) = p$ o $\mathsf{N}(x) = p^2$. Además, en este segundo caso, existe $u \in \mathcal{U}(A)$ tal que $x = up$. En particular no existe $y \in A$ con $\mathsf{N}(y) = p$.*

Demostración. (1) Si x fuese reducible en A existirían $y, z \in A \setminus \mathcal{U}(A)$ tales que $x = y \cdot z$. Entonces $\mathsf{N}(y) \neq 1 \neq \mathsf{N}(z)$ y $\mathsf{N}(x) = \mathsf{N}(y \cdot z) = \mathsf{N}(y) \cdot \mathsf{N}(z)$, lo que contradice la primalidad de $\mathsf{N}(x)$.

(2) Si x fuese reducible en A existirían $y, z \in A \setminus \mathcal{U}(A)$ tales que $x = y \cdot z$. Como y y z no son unidades, $\mathsf{N}(y) > 1$ y $\mathsf{N}(z) > 1$ y, puesto que la función N es multiplicativa, $p^k = \mathsf{N}(x) = \mathsf{N}(y) \cdot \mathsf{N}(z)$. Como $k = 2, 3$, necesariamente $\mathsf{N}(y) = p$ o $\mathsf{N}(z) = p$, lo que contradice la hipótesis.

(3) Empezamos probando que $\mathsf{N}(x)$ es potencia de un entero primo. En caso contrario existen números primos $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{Z}$ y enteros positivos $k_1, \dots, k_r$ de modo que $r \geq 2$ y $\mathsf{N}(x) = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$. Los enteros $m := p_1^{k_1}$ y $n := p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ son primos entre sí, mayores que 1 y cumplen que $\mathsf{N}(x) = mn$. Como x es irreducible y divide en A, que es un dominio de factorización única, a $x \cdot \overline{x} = \mathsf{N}(x) = mn$ ha de dividir, pongamos, a m. Existe por tanto $y \in A$ tal

que $x \cdot y = m$. En consecuencia,

$$m^2 = \mathsf{N}(m) = \mathsf{N}(x \cdot y) = \mathsf{N}(x) \cdot \mathsf{N}(y) = mn \cdot \mathsf{N}(y)$$

y, simplificando, $m = n\mathsf{N}(y)$, lo que es falso porque $\operatorname{mcd}(m, n) = 1$.

Así, existen un primo $p \in \mathbb{Z}$ y un entero $k > 0$ tales que $\mathsf{N}(x) = p^k$. Si $k = 1$ nada hay que probar, así que suponemos que $k \geq 2$ y demostraremos que $k = 2$. Como x es irreducible en A, que es un dominio de factorización única, el ideal $\mathfrak{p} := xA$ es primo y contiene a $p^k = x \cdot \overline{x}$, luego $p \in \mathfrak{p}$. En consecuencia, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $a + bi \in A$ y $p = x \cdot (a + bi)$. Esto implica que

$$(a + bi) \cdot p^k = (a + bi) \cdot \mathsf{N}(x) = (a + bi) \cdot x \cdot \overline{x} = p \cdot \overline{x}.$$

Como A es un dominio simplificamos el factor p en ambos miembros de esta igualdad, lo que nos proporciona $(a + bi) \cdot p^{k-1} = \overline{x}$ y, conjugando,

$$x = (a - bi) \cdot p^{k-1}. \tag{5}$$

Se deduce del apartado (1) de la Proposición 2.1 que $p^{k-1} \notin \mathcal{U}(A)$, puesto que $\mathsf{N}(p^{k-1}) = p^{2k-2} > 1$. Así, la irreducibilidad de x y la igualdad (5) implican que $u = a - bi \in \mathcal{U}(A)$ y $k - 1 = 1$, es decir, $k = 2$ y $x = u \cdot p$.

Por último, si existe $y \in A$ tal que $y \cdot \overline{y} = \mathsf{N}(y) = p$, el elemento p es reducible en A, por lo que también lo sería $x = u \cdot p$, contra la hipótesis. □

4. Factorización en A

Se deduce de la Proposición 3.1 que todo subanillo $A \subset \mathbb{C}$ que es dominio de factorización única, es cerrado respecto de la conjugación, y cumple que $\mathsf{N}(x) = x \cdot \overline{x} \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in A$, genera una partición en el conjunto de los primos de $\mathbb{Z}$, de modo que dado $p \in \mathbb{Z}$ primo se cumple que, o bien p es irreducible en A (si no existe ningún elemento $x \in A$ tal que $\mathsf{N}(x) = p$), o bien p es reducible en A, y entonces existe $x \in A$ tal que $\mathsf{N}(x) = p$. En este segundo caso, $p = x \cdot \overline{x}$ es una factorización de p como producto de elementos irreducibles de A.

Este argumento es útil para factorizar los elementos de A como producto de elementos irreducibles. En efecto, dado $x \in A \setminus \{0\}$ que no es una unidad, calculamos $\mathsf{N}(x)$ y lo factorizamos como producto de primos en $\mathbb{Z}$, es decir, $\mathsf{N}(x) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ donde los p_i son primos de $\mathbb{Z}$ distintos dos a dos y cada $\alpha_i \geq 1$ es entero. Podemos suponer que los r primeros primos $p_1, \dots, p_r$ son irreducibles en A (esto es, no hay elementos $x_k \in A$ tales que $\mathsf{N}(x_k) = p_k$) y que los restantes primos $p_{r+1}, \dots, p_s$ son reducibles en A (o sea, existen elementos $x_k \in A$ tales que $x_k \cdot \overline{x}_k = \mathsf{N}(x_k) = p_k$) para $r+1 \leq k \leq s$. Se tiene entonces

$$x \cdot \overline{x} = \mathsf{N}(x) = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \cdot x_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \cdot \overline{x}_{r+1}^{\alpha_{r+1}} \cdots x_s^{\alpha_s} \cdot \overline{x}_s^{\alpha_s}. \tag{6}$$

Además, por la Proposición 3.1, x_k y $\overline{x}_k$ son irreducibles para $r+1 \leq k \leq s$, pues $\mathsf{N}(x_k) = \mathsf{N}(\overline{x}_k) = p_k$ es primo en $\mathbb{Z}$. Por tanto, el miembro de la derecha de la igualdad (6) es una factorización de $x \cdot \overline{x}$ en A como producto de factores irreducibles en A.

Para $1 \leq j \leq r$ sea $p_j^{\eta_j}$ la mayor potencia de p_j que divide a x_j. Entonces existen $u_j, v_j \in \mathbb{R}$ tales que $u_j + iv_j \in A$ y $x_j = p_j^{\eta_j}(u_j + iv_j)$. Por tanto,

$$\overline{x}_j = \overline{p_j^{\eta_j}}(u_j - iv_j) = p_j^{\eta_j}(u_j - iv_j) \quad \& \quad u_j - iv_j \in A,$$

así que $p_j^{\eta_j}$ divide en A a $\overline{x}_j$. Por tanto, la mayor potencia de p_j que divide a $\overline{x}_j$ es $p_j^{\rho_j}$ con $\rho_j \geq \eta_j$. Aplicando esto a $\overline{x}_j$ se deduce que la mayor potencia de p_j que divide a $x_j = \overline{\overline{x}}_j$ es $p_j^{\mu_j}$ con $\mu_j \geq \rho_j$. Como $\mu_j = \eta_j$ se tiene $\eta_j = \rho_j$, lo que sustituido en (6) implica que $\alpha_j = 2\eta_j$ es par, pues $p_j^{\alpha_j} = p_j^{2\eta_j}$, al ser ambas la mayor potencia de p_j que divide a $x \cdot \overline{x}$.

Por otro lado, todos los factores irreducibles en A de x lo son de $x \cdot \overline{x}$, luego, de nuevo por (6), existen, para $r+1 \leq k \leq s$, enteros no negativos β_k, γ_k tales que $x_k^{\beta_k}$ y $\overline{x}_k^{\gamma_k}$ son las mayores potencias de x_k y $\overline{x}_k$ que dividen a x. Existe por tanto $u \in \mathcal{U}(A)$ tal que

$$x = up_1^{\alpha_1/2} \cdots p_r^{\alpha_r/2} \cdot x_{r+1}^{\beta_{r+1}} \cdot \overline{x}_{r+1}^{\gamma_{r+1}} \cdots x_s^{\beta_s} \cdot \overline{x}_s^{\gamma_s},$$

es una factorización de x en A como producto de irreducibles. Al conjugar,

$$\overline{x} = \overline{u}p_1^{\alpha_1/2} \cdots p_r^{\alpha_r/2} \cdot x_{r+1}^{\gamma_{r+1}} \cdot \overline{x}_{r+1}^{\beta_{r+1}} \cdots x_s^{\gamma_s} \cdot \overline{x}_s^{\beta_s}.$$

Multiplicamos las factorizaciones de x y $\overline{x}$ y, empleando (6) de nuevo,

$$\prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j} \cdot \prod_{k=r+1}^{s} x_k^{\alpha_k} \cdot \overline{x}_k^{\alpha_k} = x \cdot \overline{x} = (u \cdot \overline{u}) \prod_{j=1}^{r} p_j^{\alpha_j} \cdot \prod_{k=r+1}^{s} x_k^{\beta_k+\gamma_k} \cdot \overline{x}_k^{\beta_k+\gamma_k}.$$

Por ser A un dominio de factorización única, $u \cdot \overline{u} = 1$ y $\alpha_k = \beta_k + \gamma_k$ para $r+1 \leq k \leq s$. Como. por la Proposición 2.1, conocemos las unidades de A, que constituyen un conjunto finito, lo anterior proporciona un procedimiento eficaz de factorización en A.

Ejemplos 4.1 (1) La finitud del conjunto de unidades del subanillo A probada en el apartado (2) de la Proposición 2.1 no se cumple en todos los subanillos de $\mathbb{C}$, incluso los que son dominio euclídeo. Recordemos que un dominio de integridad B es *dominio euclídeo* si existe una función $\varphi : B \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$, que se denomina *grado,* que cumple las dos condiciones siguientes:

(1.1) Para todo $a, b \in B$ tales que $ab \neq 0$ se tiene $\varphi(a) \leq \varphi(ab)$.

(1.2) Para cada par de elementos $a, b \in B$ de modo que $b \neq 0$, existen $q, r \in B$, llamados respectivamente *un cociente y un resto* de la división euclídea de a entre b, tales que $a = bq + r$ y $r = 0$ o $r \neq 0$ y $\varphi(r) < \varphi(b)$.

Se dice que φ *dota al dominio B de estructura de dominio euclídeo.*

Es bien conocido que los dominios euclídeos son dominios de factorización única. Se denota

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : \ a, b \in \mathbb{Z}\},$$

y se prueba, por ejemplo en [1, pg. 85], que la función

$$\varphi : \mathbb{Z}[\sqrt{2}] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}, \ a + b\sqrt{2} \mapsto |a^2 - 2b^2|$$

dota a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ de estructura de dominio euclídeo. En este anillo, $u := 1 + \sqrt{2}$ es unidad pues $u(\sqrt{2} - 1) = 1$. Por tanto, para cada entero positivo n se tiene

$$u^n \cdot (\sqrt{2} - 1)^n = 1^n = 1,$$

así que todas las potencias u^n con $n > 0$ son unidades en $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, y son todas distintas, pues si $m < n$,

$$|u^n/u^m| = |u^{n-m}| = |u|^{n-m} = (1 + \sqrt{2})^{n-m} > 1.$$

(2) En el anillo $\mathbb{Z}[\rho]$, donde $\rho = e^{2\pi i/3}$, consideramos la función

$$\mathsf{N} : \mathbb{Z}[\rho] \to \mathbb{N},\ z := a + b\rho \mapsto z \cdot \overline{z} = a^2 - ab + b^2,$$

cuya imagen no contiene al primo entero 2. En efecto, en caso contrario existiría $z = a + b\rho \in \mathbb{Z}[\rho]$ tal que

$$2 = \mathsf{N}(z) = a^2 - ab + b^2 = (a - b/2)^2 + 3b^2/4,$$

y en particular $3b^2 \leq 8$, lo que implica que $b = -1, 0, 1$. Si $b = -1$ entonces $1 = a(a+1)$, que es par, y si $b = 1$ entonces $1 = a(a-1)$, también par. Por último, si $b = 0$ entonces $a^2 = 2$, que es imposible. Se deduce del apartado (2) de la Proposición 3.1 que 2 es irreducible en $\mathbb{Z}[\rho]$.

(3) En este mismo anillo buscamos la factorización de 3 como producto de irreducibles. Observamos que $3 = \mathsf{N}(z)$ para $z = 1 - \rho$, y se deduce del apartado (1) en la Proposición 3.1 que z es irreducible en $\mathbb{Z}[\rho]$. Por ello, la factorización de 3 en $\mathbb{Z}[\rho]$ es $3 = (1-\rho)(1-\overline{\rho}) = (1-\rho)(2+\rho)$.

(4) Para factorizar 42 en $\mathbb{Z}[\rho]$ lo hacemos en $\mathbb{Z}$, esto es $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, lo que nos lleva a factorizar 7. Para ello buscamos $\omega = a + b\rho \in \mathbb{Z}[\rho]$ tal que

$$7 = \mathsf{N}(a + b\rho) = a^2 - ab + b^2.$$

Una solución de esta ecuación es $a = 3$, $b = 1$, por lo que $7 = (3+\rho)(3+\overline{\rho})$. Tanto $3 + \rho$ como $3 + \overline{\rho}$ son irreducibles en $\mathbb{Z}[\rho]$ porque 7 es primo en $\mathbb{Z}$, y como $3 + \overline{\rho} = 2 - \rho$, obtenemos finalmente que

$$42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot (1-\rho)(2+\rho)(3+\rho)(2-\rho)$$

es la factorización de 42 en $\mathbb{Z}[\rho]$ como producto de irreducibles.

(5) Empleamos a continuación la Proposición 3.1 para demostrar que el anillo

$$A = \mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{a + b\sqrt{-3} :\ a, b \in \mathbb{Z}\}$$

no es un dominio de factorización única. Consideramos la función

$$\mathsf{N} : A \to \mathbb{N},\ z := a + b\sqrt{-3} \mapsto z \cdot \overline{z} = a^2 + 3b^2,$$

cuya imagen no contiene a 2. Esto implica, por el apartado (2) de la Proposición 3.1, que los elementos $z \in A$ con $\mathsf{N}(z) = 2^2 = 4$ son irreducibles.

En particular 2 lo es, y si A fuese un dominio de factorización única, el ideal $\mathfrak{p} = 2A$ sería primo. Sin embargo esto es falso ya que

$$(1 + \sqrt{-3})(1 - \sqrt{-3}) = 4 \in \mathfrak{p},$$

pero ni $1+\sqrt{-3}$ ni $1-\sqrt{-3}$ pertenecen a $\mathfrak{p}$, pues sus partes reales son impares.

Terminamos presentando una aplicación de los resultados anteriores en la resolución de una ecuación diofántica clásica.

Ejemplo 4.2 El único entero cuyo anterior es un cuadrado y cuyo siguiente es un cubo es 26.

Se trata de demostrar que las únicas soluciones de la ecuación diofántica $\mathtt{x}^3 = \mathtt{y}^2 + 2$ son $\mathtt{x} = 3$ e $\mathtt{y} = \pm 5$. Sea (x, y) una solución. Una primera observación es la siguiente:

(i) Tanto x como y son impares y primos entre sí.

En efecto, si y fuese par también lo sería x, luego existirían $m, n \in \mathbb{Z}$ tales que $y = 2m$ y $x = 2n$, y por tanto,

$$2 + 4m^2 = 2 + y^2 = x^3 = 8n^3.$$

Esto es falso, pues el miembro de la derecha es múltiplo de 4 y el de la izquierda no lo es. Así y es impar, luego lo es x^3, y por ello también lo es x.

Además, si x e y no fuesen primos entre sí compartirían algún divisor primo, que dividiría a x^3, por lo que sería impar, y también a y^2, luego divide a $2 = x^3 - y^2$, que es una contradicción.

(ii) Denotamos $\zeta := \sqrt{-2}$ y consideramos el anillo

$$A = \mathbb{Z}[\zeta] := \{a + b\zeta :\ a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

Ya hemos señalado que es un dominio euclídeo, y por tanto un dominio de factorización única. Comprobemos que $\alpha := y + \zeta$ y $\overline{\alpha} = y - \zeta$ son primos entre sí en A. En caso contrario tendrían un factor irreducible común $\gamma \in A$, que por ello divide a $\alpha - \overline{\alpha} = 2\zeta$ en A. Sea

$$\mathsf{N} : A \to \mathbb{N},\ z := a + b\zeta \mapsto z \cdot \overline{z} = a^2 + 2b^2.$$

Como γ divide a α y a 2ζ, entonces $\mathsf{N}(\gamma)$ divide a $\mathsf{N}(\alpha) = y^2+2$ y a $\mathsf{N}(2\zeta) = 8$. Lo primero implica que $\mathsf{N}(\gamma)$ es impar y, como divide a 8, ha de ser $\mathsf{N}(\gamma) = 1$. Así, por la Proposición 2.1, γ es unidad en A, luego α y $\overline{\alpha}$ son primos entre sí. Esto, junto con la igualdad,

$$x^3 = y^2 + 2 = \mathsf{N}(\alpha) = \alpha \cdot \overline{\alpha}$$

y el hecho de que A es un dominio de factorización única implica que tanto α como $\overline{\alpha}$ son cubos, salvo producto por unidades. Pero, por la Proposición 2.1, las unidades de A son 1 y -1, que también son cubos. En consecuencia, existen $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que

$$y + \zeta = \alpha = (a + b\zeta)^3 \quad \& \quad y - \zeta = \overline{\alpha} = (a + b\overline{\zeta})^3.$$

Desarrollando el segundo miembro de la primera de estas igualdades resulta

$$y + \zeta = a^3 + 3a^2b\zeta + 3ab^2\zeta^2 + b^3\zeta^3 = a(a^2 - 6b^2) + b(3a^2 - 2b^2)\zeta,$$

y por tanto $1 = b(3a^2 - 2b^2)$.

En particular $|b| = 1$, y si fuese $b = -1$ sería $3a^2 - 2 = -1$, lo que es imposible. Por tanto $b = 1$, luego $3a^2 - 2 = 1$, es decir, $a = \pm 1$, así que

$$y = a(a^2 - 6b^2) = \pm 5.$$

Pero entonces $x^3 = y^2 + 2 = 27$, es decir, $x = 3$.

Referencias

[1] F. Delgado, C. Fuertes, S. Xambó. *Introducción al álgebra.* Anillos, Factorización y Teoría de cuerpos. Universidad de Valladolid. (1998).

[2] F. Delgado, C. Fuertes, S. Xambó. *Soluciones de los problemas.* Universidad de Valladolid. (2000).

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 95 (Octubre 2013)

Sobre una curva algebraica

Ricardo Moreno Castillo
Catedrático de instituto jubilado
moreno_castillo@hotmail.es

Abstract

This article studies the properties of a certain sixth degree algebraic curve.

Dedicado al Prof. José Javier Etayo Miqueo

1. La curva de Durán Loriga

En el año 1909 fue publicado, en la *Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, un artículo titulado "Sobre un problema de física", debido al matemático coruñés Juan Jacobo Durán Loriga. El problema físico propuesto es el siguiente: tenemos tres focos luminosos de idéntica intensidad situados en los vértices de un triángulo equilátero, y en su centro otro foco de intensidad triple. Se trata de encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano que reciben la misma luz de los tres primeros focos que del foco central. El mismo Durán Loriga, en el discurso que tenía preparado para su recepción en la Real Academia Gallega (y que nunca llegó a pronunciar, porque falleció repentinamente unos días antes de le fecha fijada para el acto), cuenta la gestación del trabajo:

> *"Hace aproximadamente un par de años y, una vez terminada la cena en familia, disponíase una de mis hijas, siguiendo una práctica consuetudinaria, a apagar uno de los focos de la lámpara del comedor, de intensidad de 16 bujías, para dejar solamente los tres de a cinco que formaban los vértices de un triángulo equilátero, del que era centro el primero; aunque, como llevo dicho, ésta era tarea diaria, por esta vez se le ocurrió a mi hija preguntarme si prefería apagase el del centro o los otros tres. Ella veía naturalmente que la intensidad del primero era aproximadamente la suma de las intensidades de los otros, pero dudaba respecto a la más conveniente elección, a causa de las diferentes situaciones. Yo comprendí que la respuesta no era inmediata, ni*

mucho menos, y me dispuse a resolver el problema aplicando las leyes de la óptica, y atacándolo (eso era indispensable), con los medios que proporciona la parte elevada de la Matemática. Llegué a estudiar por completo la forma que debía afectar la mesa para que fuera indiferente alumbrarse por el foco del centro o los tres de los vértices, obtuve una curva muy interesante, acogieron con beneplácito mi trabajo varios geómetras extranjeros, que se apresuraron a buscar nuevas propiedades, y yo lo consideré apropiado como Memoria reglamentaria a la Academia de Ciencias de Madrid. La curva tiene una forma parecida a un trébol, y la filiación que le da la ciencia en su tecnicismo es: Cuártica de clase 12 y género 3, bitangente a la recta del infinito en los puntos cíclicos, con 24 puntos de inflexión y 28 tangentes dobles"[1].

Si suponemos que el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo mide la unidad y que el foco central ocupa el origen de coordenadas, la ecuación de la curva es la siguiente:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x(x^2 - 3y^2) + x^2 + y^2 - 1 = 0$$

La curva descubierta por Durán Loriga despertó el interés de algunos matemáticos extranjeros, como M. Lerch, de Praga V. Retali, de Milán y F. Gomes Teixeira (quien la cita en su *Tratado de curvas especiales*[2]).

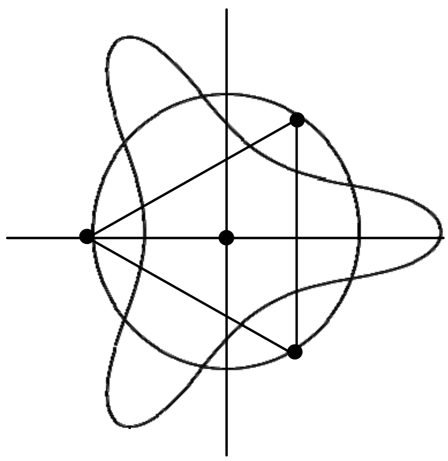

Figura 1

[1] Durán Loriga (1911), págs. 190-191.
[2] Gomes Teixeira (1907), tomo III, págs. 52-56.

El primero de ellos encontró una generación de la cuártica basada en dos haces proyectivos de circunferencias y cónicas, y los otros demostraron, por distintos caminos que los puntos de inflexión reales de la curva están en los puntos en los que ésta corta a la circunferencia circunscrita al triángulo. El aspecto de la curva puede verse en la Figura 1.

2. Sobre lo que sucede cuando hay un foco más

Se va a estudiar el mismo problema, pero con cuatro focos periféricos. Suponemos el central (cuya intensidad es ahora el cuádruple que la de cualquiera de los otros) en el origen de coordenadas y los demás ocupando los puntos $P_1=(1,0)$, $P_2=(0,1)$, $P_3=(-1,0)$ y $P_4=(0,-1)$. Si u_i es el cuadrado de la distancia entre P_i y un punto (x,y), y $u=x^2+y^2$, ha de suceder lo siguiente:

$$\frac{4}{u}=\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}$$

Eliminando denominadores:

$$4u_1u_2u_3u_4=u(u_2u_3u_4+u_1u_3u_4+u_1u_2u_4+u_1u_2u_3)$$

Calculamos cada u_i en función de u: $u_1=u-2x+1$, $u_2=u-2y+1$, $u_3=u+2x+1$ y $u_4=u+2y+1$. En consecuencia:

$$u_1u_2u_3u_4=(u+1)^4-4(u+1)^2u+16x^2y^2$$
$$u_2u_3u_4=(u+1)^3+2x(u+1)^2-4y^2(u+1)-8xy^2$$
$$u_1u_3u_4=(u+1)^3+2y(u+1)^2-4x^2(u+1)-8x^2y$$
$$u_1u_2u_4=(u+1)^3-2x(u+1)^2-4y^2(u+1)+8xy^2$$
$$u_1u_2u_3=(u+1)^3-2y(u+1)^2-4x^2(u+1)+8x^2y$$

Haciendo las cuentas pertinentes, se llega a lo siguiente:

$$u^3+3u^2+u-16x^2y^2-1=0 \quad (*)$$

Cambiando u por x^2+y^2, y tenemos la ecuación de la curva:

$$x^6+3x^4y^2+3x^2y^4+y^6+3x^4-10x^2y^2+3y^4+x^2+y^2-1=0 \quad (**)$$

3. Relación de la curva con las circunferencias concéntricas con el origen

Para cortar la curva con la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$ se trabaja mejor con la ecuación $(*)$, que da lugar a $R^6 + 3R^4 + R^2 - 16x^2(R^2 - x^2) - 1 = 0$, que reordenada quedaría $16x^4 - 16R^2x^2 + R^6 + 3R^4 + R^2 - 1 = 0$. Despejando la *x*:

$$x = \pm\sqrt{\frac{R^2}{2} \pm \frac{1}{4}\sqrt{(1-R^2)(R^4+1)}}$$

Si $R^2 > 1$ no hay solución, y la curva está en el interior de la circunferencia unidad, a la cual es tangente en los puntos $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ y $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$.

Para que *x* sea lo menor posible el radicando mayor ha de ser cero, lo cual lleva a la ecuación $R^6 + 3R^4 + R^2 - 1 = 0$, que a su vez equivale a $(R^4 + 2R^2 - 1)(R^2 + 1) = 0$, y que da lugar a los puntos $(\sqrt{\sqrt{2}-1}, 0)$, $(0, \sqrt{\sqrt{2}-1})$, $(-\sqrt{\sqrt{2}-1}, 0)$ y $(0, -\sqrt{\sqrt{2}-1})$, en los cuales la curva es tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = \sqrt{2} - 1$. Todo esto se puede ver en la figura 2.

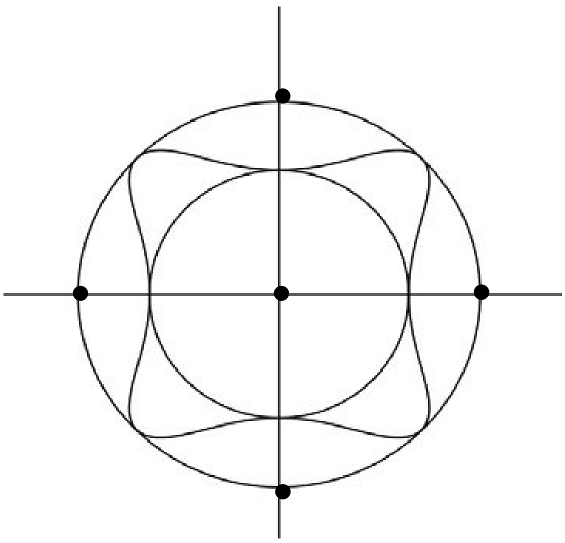

Figura 2

4. Puntos singulares

Distinguiremos entre la ecuación de la curva en coordenadas ordinarias o proyectivas según convenga en cada caso:

$$f(x,y) = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 + 3x^4 - 10x^2y^2 + 3y^4 + x^2 + y^2 - 1$$

$$F(x,y,z) = x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 + 3x^4z^2 - 10x^2y^2z^2 + 3y^4z^2 + x^2z^4 + y^2z^4 - z^6$$

Primero se buscarán los puntos singulares en el plano afín:

$$f_x(x,y) = 6x^5 + 12x^3y^2 + 6xy^4 + 12x^3 - 20xy^2 + 2x = 0$$

$$f_y(x,y) = 6x^4y + 12x^2y^3 + 6y^5 - 20x^2y + 12y^3 + 2y = 0$$

Si $x=0$ o $y=0$, las soluciones dan lugar a puntos fuera de la curva, luego podemos suponer $x \neq 0$ e $y \neq 0$, lo que posibilita simplificar las ecuaciones:

$$3x^4 + 6x^2y^2 + 3y^4 + 6x^2 - 10y^2 + 1 = 0$$

$$3x^4 + 6x^2y^2 + 3y^4 - 10x^2 + 6y^2 + 1 = 0$$

Restando ambas tenemos que $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, soluciones que no cumplen las ecuaciones anteriores, luego en el plano afín carece de singularidades. Para ver si las tiene en los puntos del infinito, derivamos en la ecuación $F = 0$:

$$F_x(x,y,z) = 6x^5 + 12x^3y^2 + 6xy^4 + 12x^3z^2 - 20xy^2z^2 + 2xz^4 = 0$$

$$F_y(x,y,z) = 6x^4y + 12x^2y^3 + 6y^5 - 20x^2yz^2 + 12y^3z^2 + 2yz^4 = 0$$

$$F_z(x,y,z) = 6x^4z - 20x^2y^2z + 6y^4z + 4x^2z^3 + 4y^2z^3 - 6z^5 = 0$$

Haciendo $z=0$, obtenemos los puntos cíclicos $I=(1,i,0)$ y $J=(1,-i,0)$, los únicos puntos singulares de la curva. Para saber qué clase de singularidad es, hacemos $x=1$, y después, mediante la traslación $y \to y+i$, fabricamos una curva en *y* y *z* que tiene en $\theta=(0,0)$ el mismo tipo de singularidad que nuestra curva en *I* (usaremos la ecuación en la forma $(*)$, así las cuentas son más fáciles):

$$F(1,y+i,z) = (y^2+2iy)^3 + 3(y^2+2iy)^2z^2 + (y^2+2iy)z^4 - 16(y+i)^2z^2 - z^6 = 0$$

El monomio de menor grado es $16z^2$, luego el punto singular es un punto doble con dos tangentes iguales, lo que se llama una *cúspide* (cierto que podría ser un *tacnodo*, pero como el orden de contacto de la curva con la recta del infinito en cada uno de los puntos cíclicos es 3, esta posibilidad queda excluida).

5. La clase de la curva

La clase m de la curva (el número de tangentes a ella que se pueden trazar desde un punto) se relaciona con el grado n de la curva, el número d de sus puntos dobles ordinarios y con el número r de sus cúspides mediante la siguiente relación (una de las cuatro fórmulas de Plücker):

$$m + 2d + 3r = n(n-1)$$

Puesto que $d = 0$, $r = 2$ y $n = 6$, la clase de la curva es 24.

Con todo, la clase se puede calcular a pelo, viendo cuántas tangentes posee paralelas al eje de ordenadas (este es: cuántas se pueden trazar desde el punto $(0,1,0)$). Para ello escribimos la ecuación de la curva como polinomio en x:

$$x^6 + (3y^2 + 3)x^4 + (3y^4 - 10y^2 + 1)x^2 + y^6 + 3y^4 + y^2 - 1 = 0$$

Aquellos valores de y para los cuales la ecuación en x tiene solución doble, proporciona una tangente de las buscadas. Si el término independiente es cero, tenemos puntos de tangencia en $x = 0$. La ecuación $y^6 + 3y^4 + y^2 - 1 = 0$ da lugar a los valores $y = \pm i$, $y = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ e $y = \pm i\sqrt{\sqrt{2} - 1}$, lo que proporciona seis rectas tangentes. Para buscar las demás hacemos $x^2 = z$ y tenemos la ecuación:

$$z^3 + (3y^2 + 3)z^2 + (3y^4 - 10y^2 + 1)z + y^6 + 3y^4 + y^2 - 1 = 0$$

El cambio $z = t - (y^2 + 1)$ la transforma en esta otra:

$$t^3 - (16y^2 + 2)t + 16y^4 + 16y^2 = t^3 + P(y)t + Q(y) = 0$$

El discriminante de esta ecuación es:

$$\left(\frac{P(y)}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q(y)}{2}\right)^2 = \frac{8}{27}(216y^8 - 80y^6 + 24y^4 - 24y^2 - 1)$$

La ecuación $216y^8 - 80y^6 + 24y^4 - 24y^2 - 1 = 0$ tiene ocho raíces distintas, cada una de las cuales proporciona un valor doble para la t, que da lugar a una solución doble para la z, que a su vez da lugar a dos soluciones dobles para la x (si la solución doble de la ecuación en z fuera $z = 0$, daría una sola solución doble para x, pero esta situación ya ha sido estudiada). En total 16 rectas tangentes, más las 6 ya encontradas hacen 22, y como dos de ellas se han de contar dos veces por ser bitangentes, ya tenemos las 24.

6. Puntos de inflexión

En la segunda fórmula de Plücker se da entrada al número i de inflexiones:

$$i + 6d + 8r = 3n(n-2)$$

Entonces nuestra curva tiene 56 inflexiones. Para encontrar las que son reales, ponemos la ecuación en forma polar. Para ello hacemos $x = \varphi \cos t$ e $y = \varphi\, sent$:

$$\varphi^6 + 3\varphi^4 + \varphi^2 - 1 = 16\varphi^4 \cos^2 t\, sen^2 t = 4\varphi^4 sen^2 2t$$

Despejamos $4sen^2 2t$ y derivamos en ambos miembros:

$$\frac{\varphi^6 - \varphi^2 + 2}{\varphi^5}\frac{d\varphi}{dt} = 4sen\,4t$$

Por razones que pronto veremos, interesa elevar esta expresión al cuadrado:

$$\frac{\varphi^{12} - 2\varphi^8 + 4\varphi^6 + \varphi^4 - 4\varphi^2 + 4}{\varphi^{10}}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 16sen^2 4t$$

Conviene ahora poner $16sen^2 4t$ en función de φ. Para ello elevamos al cuadrado la ecuación polar, y también la multiplicamos por $4\varphi^4$:

$$\varphi^{12} + 6\varphi^{10} + 11\varphi^8 + 4\varphi^6 - 5\varphi^4 - 2\varphi^2 + 1 = 16\varphi^8 sen^4 2t$$
$$4\varphi^{10} + 12\varphi^8 + 4\varphi^6 - 4\varphi^4 = 16\varphi^8 sen^2 2t$$

Restamos miembro a miembro:

$$16\varphi^8(sen^4 2t - sen^2 2t) = -4\varphi^8 sen^2 4t = \varphi^{12} + 2\varphi^{10} - \varphi^8 - \varphi^4 - 2\varphi^2 + 1$$

En consecuencia:

$$sen^2 4t = \frac{-1+2\varphi^2+\varphi^4+\varphi^8-2\varphi^{10}-\varphi^{12}}{4\varphi^8}$$

Esto proporciona una expresión para $(d\varphi/dt)^2$ sin elementos trigonométricos:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{4\varphi^2(-1+2\varphi^2+\varphi^4+\varphi^8-2\varphi^{10}-\varphi^{12})}{4-4\varphi^2+\varphi^4+4\varphi^6-2\varphi^8+\varphi^{12}}$$

En la expresión que da la primera derivada de φ derivamos una segunda vez:

$$\frac{\varphi^6+3\varphi^2-10}{\varphi^6}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \frac{\varphi^6-\varphi^2+2}{\varphi^5}\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 16\cos 4t$$

A continuación se ha de poner $\cos 4t$ en función de φ:

$$\cos 4t = 1-2sen^2 2t = 1-\frac{\varphi^6+3\varphi^4+\varphi^2-1}{2\varphi^4} = \frac{1-\varphi^2-\varphi^4-\varphi^6}{2\varphi^4}$$

Por otra parte, la ecuación diferencial de los puntos de inflexión es[3]:

$$\varphi^2-\varphi\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 0$$

Combinando ambos resultados, tenemos la expresión:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{\varphi^2(6-7\varphi^2-8\varphi^4-9\varphi^6)}{3\varphi^6+\varphi^2-6}$$

Comparando las dos expresiones para $(d\varphi/dt)^2$ se llega a la ecuación:

$$3\varphi^{18}+16\varphi^{16}+3\varphi^{14}-28\varphi^{12}-91\varphi^{10}-12\varphi^8+21\varphi^6+18\varphi^4 = 0$$

Cambiando φ^2 por z y deshaciéndonos de z^2 se transforma en esta otra:

$$\phi(z) = 3z^7+16z^6+3z^5-28z^4-91z^3-12z^2+21z+18 = 0$$

[3] Marcos Lanuza (1963), pág. 428.

El mayor valor que alcanza φ^2 en la corona circular que contiene a la curva es 1, y el menor $\sqrt{2}-1$. Como $\phi(1)<0$ y $\phi(\sqrt{2}-1)=866-600\sqrt{2}>0$, la última ecuación tiene una solución entre esos dos valores. Además, ϕ es decreciente en ese intervalo, la solución es única, lo cual proporciona un valor para φ que da lugar a ocho puntos de inflexión reales.

7. Las bitangentes de la curva

La tercera y cuarta fórmulas de Plücker relacionan el número *t* de bitangentes con los otros elementos de la curva:

$$n+2t+3i=m(m-1)$$
$$r+6t+8i=3m(m-2)$$

Cualquiera de ellas nos dice que la curva posee 189 bitangentes. Cinco de ellas, las cuatro que claramente se pueden trazar y la recta del infinito, son reales.

8. La fórmula de Klein

Existe una relación, llamada fórmula de Klein, semejante a las de Plücker pero que solo tiene en cuenta los elementos reales de la curva:

$$n+i+2t=m+r+2d$$

Ahora $i=8$, $t=5$, $r=d=0$, y por supuesto $n=6$ y $m=24$. Es fácil comprobar que la fórmula se cumple.

9. El género de la curva

El género de una curva C de grado *n* cuyos puntos múltiples sean todos ordinarios viene dado por la siguiente fórmula[4] (m_P significa la multiplicidad del punto *P*):

$$g(C)=\frac{(n-1)(n-2)}{2}-\sum_{P\in C}\frac{m_P(m_P-1)}{2}$$

[4] Ver Fulton (1971), pág. 124.

Los puntos múltiples de la curva que nos ocupa son cúspides, entonces esta fórmula no es de momento aplicable. Ahora bien, como el género es invariante mediante morfismos birracionales, vamos a fabricar otra curva birracionalmente equivalente a la séxtica y cuyos puntos múltiples sí sean ordinarios.

Vamos a obtener la curva C^*, inversa de nuestra curva respecto de la circunferencia unidad (y por ello birracionalmente equivalente). Para ello, en la ecuación polar cambiamos φ por $1/\varphi$ y multiplicamos todo por φ^2:

$$\varphi^2 + 3\varphi^4 + \varphi^6 - \varphi^8 = 16(\varphi^2 \cos^2 t)(\varphi^2 sen^2 t)$$

Pasamos a coordenadas cartesianas, primero afines y después proyectivas:

$$f^*(x,y) = (x^2+y^2)^4 - (x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2)^2 - (x^2+y^2) - 16x^2y^2 = 0$$

$$F^*(x,y,z) = (x^2+y^2)^4 - (x^2+y^2)^3 z^2 - 3(x^2+y^2)^2 z^4 - (x^2+y^2)z^6 - 16x^2y^2z^4 = 0$$

Los puntos singulares son el origen y los puntos cíclicos. El monomio de menor grado en la ecuación afín es x^2+y^2, entonces el origen es un punto doble ordinario cuyas tangentes son las rectas isótropas $x+iy=0$ e $x-iy=0$.

Para estudiar la singularidad en $(1,i,0)$ construimos la curva $F^*(1, y+i, z)$:

$$(y^2+2iy)^4 - (y^2+2iy)^3 z^2 - 3(y^2+2iy)^2 z^4 - (y^2+2iy)z^6 - 16(y+i)^2 z^4 = 0$$

El monomio de menor grado es $(2iy)^4 - 16i^2z^4$, o bien $16y^4 + 16z^4$, que se desdobla en cuatro rectas distintas, luego es un punto cuádruple ordinario. Entonces $m_\theta = 2$, $m_I = 4$ y $m_J = 4$. Como los tres son ordinarios, es aplicable la fórmula del género es aplicable para C^*:

$$g(C) = g(C^*) = \frac{7\times 6}{2} - \frac{2\times 1}{2} - \frac{4\times 3}{2} - \frac{4\times 3}{2} = 8$$

10. Algunas propuestas

Al hilo de los resultados de este artículo, planteo los siguientes problemas:

1. ¿Se podría tratar este problema para *n* focos en general? ¿Cabría una teoría general de curvas algebraicas asociadas a polígonos regulares?

2. El problema de los tres focos planteado y resuelto por Durán Loriga ¿se podría resolver si los focos ocupan los vértices de un triángulo no equilátero? ¿Qué pasaría si dejamos dos focos quietos y el otro lo movemos sobre la circunferencia circunscrita? ¿Cómo sería la familia de cuárticas así generada?

3. Idénticas reflexiones pueden hacerse sobre el cuadrilátero. ¿Cambiarían mucho las cosas si el cuadrilátero, además de irregular, fuera no-cíclico?

Aquí tiene el desocupado lector materia para un muy honesto esparcimiento.

Agradecimiento

Este artículo fue revisado por mi amigo Enrique Arrondo Esteban, quien dedicó parte de su valioso tiempo a leerlo, y a continuación me hizo sugerencias muy interesantes. Dejo constancia de mi mas profundo agradecimiento.

Bibliografía

Durán Loriga, J. J. (1911), "Discurso que el señor Don Juan Jacobo Durán Loriga tenía escrito y dispuesto para su recepción como académico de número", en *Boletín de la Real Academia Gallega* , año VI, nº 56, págs. 184-200.

Fulton, W. (1971), *Curvas algebraicas*, Editorial Reverté, Barcelona.

Gomes Teixeira, F. (1907), *Traité des courbes spéciales remarquables*, Coimbra.

Marcos Lanuza, F. (1963), *Introdución a la geometría analítica*, Editorial Gredos, Madrid.

Moreno Castillo, R. (2005), *Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría*, Editorial Nivola, Madrid.

De la Puente Muñoz, Mª. J. (2007), *Curvas algebraicas planas*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz.

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 95 (Octubre 2013)

Estructuras de grupo topológico en $(\mathbb{Z}, +)$[1]

D. de la Barrera y E. Martín Peinador
Departamento de Geometría y Topología.
Universidad Complutense de Madrid.
{dbarrera, peinador}@mat.ucm.es

Resumen

We consider in this paper how diverse topological group structures there can be on the group of integers numbers. We survey some results from us and from other mathematatitians as well, in order to present in $\mathbb{Z}$*:*

1. *A family of* $2^{\mathfrak{c}}$ *group topologies which are Hausdorff precompact (noncompact).*
2. *A family of metrizable noncomplete nor precompact group topologies.*
3. *A family of complete nonmetrizable topologies.*

We leave some open questions -for instance, the cardinality of the families described in 2. and 3.- which we are studying as a part of the Doctoral Dissertation of the first author.

En homenaje al Profesor J.J. Etayo con afecto y admiración.

Introducción

La proverbial frase de Kronecker "los enteros los hizo Dios, los demás números son cosa del hombre"[2] quiere resaltar la belleza y la sencillez de los números enteros. Sin embargo, dotar a su conjunto $\mathbb{Z}$ de una estructura de grupo topológico es una operación de enorme complejidad. Describimos a lo largo de este artículo diversos modos de topologizar $\mathbb{Z}$ de forma que las operaciones

[1]Parcialmente financiado por el MICINN. Proyecto: MTM2009-14409-C02-01.

[2]Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk, Kronecker (1823-1891)

suma ordinaria y "tomar inverso" sean aplicaciones continuas, dando lugar así a grupos topológicos con conjunto soporte los números enteros.

Los grupos topológicos fueron introducidos por Schreier en 1926, en un contexto en el que ya se conocían los grupos de Lie (grupos continuos de transformaciones). Hacia los años 30 del siglo pasado hubo una actividad muy fructífera en grupos topológicos: de esa época datan los trabajos de Weyl, la introducción de la medida de Haar y los trabajos de Pontryagin estableciendo el Teorema de la dualidad de grupos topológicos localmente compactos abelianos, que es la piedra angular para el análisis armónico. Un grupo importante en este contexto es el toro $\mathbb{T}$, grupo de los complejos módulo uno, con la topología inducida por la usual de $\mathbb{C}$. En efecto, $\mathbb{T}$ es el objeto dualizante en la teoría de dualidad de Pontryagin. Los homomorfismos de un grupo abeliano cualquiera G en $\mathbb{T}$ se denominan caracteres, y su conjunto $Hom(G, \mathbb{T})$ constituye un grupo respecto de la operación definida puntualmente.

Damos en primer lugar la definición formal y propiedades elementales de los grupos topológicos que nos permitan cómodamente hilvanar nuestros argumentos sobre $\mathbb{Z}$.

Definición 0.1 *Un grupo topológico es una terna $(G, *, \tau)$ dónde G designa un conjunto, $* : G \times G \to G$ una operación binaria que da a G estructura de grupo y τ una topología en G que hace continua la operación $*$ -considerando en $G \times G$ la topología producto-, así como la inversión $G \to G$ definida por $x \in G \mapsto x^{-1}$.*

De la propia definición surge el corolario de que las traslaciones a derecha e izquierda:

$$r_a, l_a : G \to G \text{ definidas por } r_a(x) = x * a \text{ y } l_a(x) = a * x$$

son homeomorfismos, para cada $a \in G$. En consecuencia los entornos de un punto cualquiern $a \in G$ están perfectamente determinados por los entornos del elemento neutro e, mediante la correspondiente traslación.

La topología τ de la definición 0.1 se dirá que es una topología de grupo para G, o también que la topología τ es compatible con la estructura de grupo de G. La estructura algebraica de grupo interacciona con la estructura topológica, y algunas propiedades topológicas son automáticas, mientras que otras se ven notablemente reforzadas. Por ejemplo, todo grupo topológico es un espacio topológico homogéneo, completamente regular (y por tanto uniformizable [13, (VII.7.22)]). Las proposiciones siguientes son también muestra de éllo.

Proposición 0.2 *Todo grupo topológico T_1 es también T_2 (es decir, Hausdorff).*

Proposición 0.3 *Todo grupo topológico I-numerable y Hausdorff es metrizable (Teorema de Birkhoff-Kakutani).*

En un conjunto cualquiera X pueden definirse topologías sencillas relacionadas con su álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$, cómo la topología discreta τ_d ó la cofinita τ_c. Si en el lugar del conjunto X tomamos un grupo algebraico $(G, *)$ cabe plantearse si dichas topologías son compatibles con la estructura de grupo.

Proposición 0.4 *Sea G un grupo infinito y sean τ_d y τ_c las topologías en G discreta y cofinita respectivamente. Entonces (G, τ_d) es un grupo topológico, mientras que (G, τ_c) no lo es.*

Demostración: La primera afirmación es evidente, mientras que la segunda es consecuencia de la Proposición 0.2, puesto que G dotado de τ_c es un espacio T_1, pero no es T_2. QED

En lo que sigue denominamos simplemente G a un grupo algebraico o topológico, la operación y -en su caso- la topología se sobreentienden, y en lugar de $x * y$ escribimos xy.

Basándonos en la Proposición 0.2, sólo nos van a interesar los grupos topológicos de Hausdorff, puesto que una mínima propiedad de separación (incluso T_0) en un grupo topológico ya implica que se cumple el axioma T_2. A partir de ahora los grupos considerados en este trabajo son **abelianos y Hausdorff**.

Sistema de entornos del elemento neutro $e \in G$.

Describimos las propiedades esenciales de una subfamilia $\mathcal{N}(e)$ de partes de G, para poder asegurar que constituyen un sistema de entornos del elemento neutro para una topología de grupo en G.

(G1) $e \in V, \forall V \in \mathcal{N}(e)$

(G2) $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{N}(e)$, siempre que $V_1, V_2 \in \mathcal{N}(e)$

(G3) Si para $W \subset G$ existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $V \subseteq W$, entonces $W \in \mathcal{N}(e)$

(G4) $\forall W \in \mathcal{N}(e)$, existe $V \in \mathcal{N}(e)$ tal que $VV := \{xy : x, y \in V\} \subset W$

(G5) $W \in \mathcal{N}(e) \Rightarrow W^{-1} := \{x^{-1} : x \in W\} \in \mathcal{N}(e)$

1 Topologías p-ádicas

Sea p un número primo. La familia

$$\mathcal{B} = \{p^n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$$

es base de entornos de 0 para una topología de grupo en $\mathbb{Z}$, que se denomina la topología p-ádica, y que denotaremos por λ_p. Fácilmente se comprueba que $\mathcal{B}$ cumple las propiedades $G1, G2, G4, G5$, y además los conjuntos de $\mathcal{B}$ son subgrupos de $\mathbb{Z}$. En general, una topología de grupo que admite una base de entornos de cero formada por subgrupos se denomina una *topología lineal.*

La simple observación de que el conjunto de los números primos $\mathbb{P}$ tiene cardinal $\aleph_0$ nos permite afirmar que las topologías p-ádicas constituyen una familia infinita de topologías en $\mathbb{Z}$. En efecto, si p, q son primos distintos $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$ y $(\mathbb{Z}, \lambda_q)$ no son topológicamente isomorfos. Los únicos automorfismos de $\mathbb{Z}$ son la identidad y la inversión, que **no** transforman entornos de cero en λ_p en entornos de cero en λ_q.

Podemos pensar qué otras topologías lineales existen en $\mathbb{Z}$. Cómo los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son de la forma $m\mathbb{Z}$, para un entero m, las topologías lineales en $\mathbb{Z}$ se caracterizan fácilmente a través de las llamadas D-sucesiones, que juegan el mismo papel que la sucesión $p, p^2, \dots p^n, \dots$ en la topología p-ádica.

Definición 1.1 *Una sucesión $b_1, b_2, \dots$ de números naturales se dirá que es una D-sucesión si:*

- $b_1 = 1$.

- $b_n \neq b_{n+1}$ *para todo número natural* n.
- b_{n+1} *es múltiplo de* b_n *para todo número natural* n.

Una D-sucesión $\mathbf{b} = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ define una topología lineal en $\mathbb{Z}$, que denominaremos topología b-ádica λ_b, mediante la siguiente base de entornos de cero:

$$\mathcal{B} = \{b_n\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N}\}$$

Todas las topologías lineales no discretas de Hausdorff en $\mathbb{Z}$ se definen mediante una D-sucesión (v. [2, (2,1)]) . Destacamos el siguiente hecho fácil de demostrar:

Proposición 1.2 *Sea* $\mathbf{b} = \{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ *una* D*-sucesión. En* $(\mathbb{Z}, \lambda_b)$ *la sucesión* $\mathbf{b}$ *converge a* 0. *En particular,* $p^n \to 0$ *en la topología* p*-ádica*

Teniendo en cuenta que un subgrupo abierto de un grupo topológico es también cerrado obtenemos la siguiente propiedad:

Proposición 1.3 *Un grupo lineal* G *es cero-dimensional y por tanto es totalmente inconexo. En particular* $(\mathbb{Z}, \lambda_b)$ *es cero dimensional, para cualquier* D*-sucesión* $\mathbf{b}$.

2 Topologías precompactas

Las topologías b-ádicas en $\mathbb{Z}$ descritas en la anterior sección son precompactas, en el siguiente sentido:

Definición 2.1 *Se dirá que un grupo topológico* (G, τ) *es precompacto si para todo* V *entorno de cero existe un subconjunto finito* F *tal que* $G = F + V$, *es decir* G *se obtiene como unión finita de trasladados de* V.

Es una consecuencia directa de la definición anterior que todo grupo compacto es también precompacto. Por el teorema de categoría de Baire, un grupo infinito compacto y T_2, o metrizable y completo no puede ser **numerable**. Por tanto el grupo $\mathbb{Z}$ no admite ninguna topología de Hausdorff compacta. Sin embargo veremos que admite $2^{\mathfrak{c}}$ topologías precompactas y T_2.

Por otro lado, no puede haber una topología de grupo metrizable y completa en $\mathbb{Z}$. En la sección 4 daremos una amplia familia de topologías de grupo completas en $\mathbb{Z}$ (no metrizables).

Las topologías precompactas en un grupo abeliano G están relacionadas con el grupo de los caracteres $Hom(G, \mathbb{T})$. Destacamos la definición de grupo dual que usaremos en lo sucesivo.

Definición 2.2 *Sea (G, τ) un grupo topológico. El grupo dual de G que designaremos por $G^\wedge$ es el grupo de los caracteres continuos, es decir $G^\wedge \leq Hom(G, \mathbb{T})$. Si τ es la topología discreta $G^\wedge = Hom(G, \mathbb{T})$.*

Si G es el grupo de los enteros $\mathbb{Z}$, cualquier homomorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{T}$ viene definido por la imagen de su generador 1, y su conjunto $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{T})$, puede identificarse con $\mathbb{T}$. La correspondencia $\varphi \mapsto \varphi(1)$ es de hecho un isomorfismo entre los grupos $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{T})$ y $\mathbb{T}$. Más aún, es un isomorfismo topológico si $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{T})$ está dotado de la topología de la convergencia puntal y $\mathbb{T}$ tiene la topología euclídea ordinaria. Por tanto el dual de $\mathbb{Z}$ con cualquier topología de grupo es un subgrupo de $\mathbb{T}$.

Se demuestra fácilmente que el grupo dual de $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$ es precisamente el grupo de Prüfer $\mathbb{Z}(\mathbf{p}^\infty)$, formado por todas las raices p^n-simas de la unidad de $\mathbb{T}$, para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

El siguiente resultado, consecuencia del teorema de Peter-Weyl permite entender que los grupos precompactos tienen la topología débil correspondiente a la familia de sus caracteres continuos.

Teorema 2.3 *[11, 22.14] Si (G, τ) es un grupo compacto y T_2, existen suficientes caracteres continuos para separar puntos de G. Esto es, para cada par $g_1, g_2 \in G$ con $g_1 \neq g_2$ existe $\varphi \in G^\wedge$ tal que $\varphi(g_1) \neq \varphi(g_2)$.*

Este teorema precisamente implica que todo grupo compacto y Hausdorff G se encaja en el producto $\mathbb{T}^{G^\wedge}$ mediante un isomorfismo topológico (no suprayectivo en general). Además la topología original de G es la débil correspondiente a su familia de caracteres continuos.

Es inmediato probar que un subgrupo de un grupo compacto es precompacto, y por otra parte un grupo precompacto se sumerge de forma estándar en su "completado" que es compacto. Por tanto, la clase formada por todos los grupos precompactos se pueden identificar a la clase formada por los subgrupos de los grupos compactos. Los siguientes teoremas, extraidos de [7, (1.2)], nos proporcionarán un método para construir todas las topologías precompactas de un grupo G y en particular de $\mathbb{Z}$:

Teorema 2.4 *Sea (G, τ) un grupo topológico y $G^\wedge$ su grupo dual. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
a) (G, τ) es precompacto.
b) La topología τ coincide con la topología débil en G correspondiente a la familia de homomorfismos $G^\wedge$.

Teorema 2.5 *Si G es un grupo abeliano, H un subgrupo de $Hom(G, \mathbb{T})$ que separa puntos de G, y τ_H la topología débil en G correspondiente a la familia H, el grupo dual $(G, \tau_H)^\wedge$ es precisamente H.*

Proposición 2.6 *Si H es un subgrupo infinito de $\mathbb{T}$, entonces H separa puntos de $\mathbb{Z}$*

Demostración: En efecto, si m es entero no nulo, existe algún $\alpha \in H$ con $\alpha^m \neq 1$, ya que sólo hay m raíces m-simas de 1 y H es infinito.

QED

Ahora estamos en condiciones de construir todas las topologías precompactas de Hausdorff en $\mathbb{Z}$. Por los Teoremas 2.4 y 2.5, se justifica el siguiente procedimiento. Sea H un subgrupo infinito del círculo unidad del plano complejo. Definimos la topología τ_H cómo la topología débil asociada a H; es decir, la que tiene como subbase de entornos de cero la familia $\mathcal{B} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{N}_0(\mathbb{T}) \text{ y } f \in H\}$. Se comprueba directamente que τ_H es una topología de grupo.

Dependiendo del subgrupo H que se tome, se pueden obtener diferentes propiedades de la topología τ_H. Por ejemplo:

- Si $H_1 < H_2$, entonces $\tau_{H_1} < \tau_{H_2}$.
- El conjunto de subgrupos de $\mathbb{T}$ y el conjunto de topologías precompactas en $\mathbb{Z}$ están en correspondencia biyectiva.
- El subgrupo H es numerable si y sólo si τ_H es metrizable.

Denotamos por $\mathfrak{P}$ al conjunto de topologías precompactas en $\mathbb{Z}$.

Proposición 2.7 *Existen $2^{\mathfrak{c}}$ topologías precompactas y Hausdorff en $\mathbb{Z}$.*

Demostración: Sea $\mathfrak{B}$ una base de Hamel de $\mathbb{R}$, tal que $1 \in \mathfrak{B}$. Designamos por $\alpha_b = e^{2\pi ib}$, con $b \in \mathfrak{B}$. Para cada $b \neq 1$, el grupo $\langle\alpha_b\rangle$ generado por α_b es un subgrupo infinito de $\mathbb{T}$ y por la proposición 2.6 separa puntos de $\mathbb{Z}$. Para cualquier $M \subseteq \mathfrak{B}$, el grupo H_M engendrado por $\{\alpha_m : m \in M\}$ da lugar a una topología precompacta y Hausdorff en $\mathbb{Z}$. Teniendo en cuenta que $card(\mathcal{P}(\mathfrak{B})) = 2^{\mathfrak{c}}$ y que si $M \neq M'$, las topologías τ_{H_M} y $\tau_{H_{M'}}$ son distintas, obtenemos que $card(\mathfrak{P}) \geq 2^{\mathfrak{c}}$. Por otra parte en $\mathbb{Z}$ no puede haber más de $2^{\mathfrak{c}}$ topologías.

QED

Observación 2.8 Aunque hemos dado una demostración directa de la Proposición 2.7, el resultado ya era conocido. De hecho en [16] se prueba que hay dos familias $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ de $2^{\mathfrak{c}}$ topologías precompactas en $\mathbb{Z}$ -no homeomorfas dos a dos-, tales que las topologías de $\mathcal{A}_1$ no tienen sucesiones convergentes no triviales, mientras que las de $\mathcal{A}_2$ si las tienen. Teniendo en cuenta que toda topología metrizable en cualquier conjunto infinito tiene sucesiones convergentes no triviales, las topologías de $\mathcal{A}_1$ no son metrizables.

La familia $\mathfrak{P}$ tiene como máximo la topología $\tau_{\mathbb{T}}$ o topología débil inducida por todos los caracteres de $\mathbb{Z}$. Siguiendo a Van Douwen en su magnífico trabajo [9], un grupo abeliano discreto dotado de la topología débil asociada a $Hom(G, \mathbb{T})$ se denota por $G^{\#}$. En dicho trabajo, se da una prueba de que para cualquier grupo abeliano infinito G, $G^{\#}$ no tiene sucesiones convergentes no triviales. En [3, lema 1], se da -con otros fines- una prueba directa de este hecho para $\mathbb{Z}^{\#}$.

El clásico Teorema de Pontryagin-Van Kampen sugiere que la topología natural en un grupo dual debe ser la compacto-abierta. La noción de reflexividad también se cimienta en dicho teorema: se dirá que un grupo topológico G es *reflexivo* si la evaluación canónica α_G de G en $G^{\wedge\wedge}$ es isomorfismo topológico, donde ambos $G^{\wedge}$ y $G^{\wedge\wedge}$ están dotados de la correspondiente topología compacto abierta. La clase de los grupos reflexivos abarca los localmente compactos y Hausdorff, precisamente ésta es la afirmación del famoso

Teorema mencionado. Ya en los 50 del siglo pasado se obtuvieron otros grupos reflexivos no localmente compactos. Recientemente, Gabriyelyan ha encontrado una topología reflexiva no discreta en el grupo de los enteros, [10]. Esto es un hecho asombroso, sin embargo pensamos que la siguiente pregunta -por ser aún más exigente- tendrá una solución negativa:

Cuestión abierta 2.9 *(Tkachenko, 2009) ¿Existe alguna topología precompacta* ν *en* $\mathbb{Z}$ *tal que* $(\mathbb{Z}, \nu)$ *sea reflexivo?*

3 Topologías de convergencia uniforme

En [4] (página 24, ejercicio 2), Bourbaki afirma que las topologías no discretas en el grupo de los enteros son precompactas. Sin embargo, esta afirmación es errónea, como veremos al final de esta sección.

Vamos a definir mediante una pseudométrica en $\mathbb{Z}$ una topología de convergencia uniforme en un subconjunto $S \subseteq \mathbb{T}$.

Definición 3.1 *Fijamos un subconjunto* $S \subset \mathbb{T}$. *La aplicacion* $d_S : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}_+$ *definida de la siguiente manera:* $d_S(m,n) = \sup\limits_{\alpha \in S} |\alpha^m - \alpha^n|$ *es una seudométrica en* $\mathbb{Z}$ *acotada por* 2.

Proposición 3.2 *La pseudométrica* d_S *define una topología de grupo en* $\mathbb{Z}$ *que denotaremos por* ρ_S. *Si* S *separa puntos de* $\mathbb{Z}$, *entonces* d_S *es una métrica.*

Demostración: Toda pseudométrica invariante por traslaciones da lugar a una topología de grupo [12] (tomando como entornos de cero las bolas $B_n = \{z \in \mathbb{Z} : d_S(z, 0) < \frac{1}{n}\}$). Es claro que d_S es invariante por traslaciones ya que $d_S(m+k, n+k) = \sup |\alpha^{m+k} - \alpha^{n+k}| = \sup |\alpha^k||\alpha^m - \alpha^n| = \sup |\alpha^m - \alpha^n| = d_S(m,n)$.

QED

Observación 3.3 *La topología* ρ_S, *es la topología de convergencia uniforme en el conjunto* S. *Con notación aditiva para* $\mathbb{T}$, *es decir considerado* $\mathbb{T}$ *cómo el grupo cociente* $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, *se comprueba en [2] que los conjuntos* $V_{S,n} := \{k \in$

$\mathbb{Z} : kx + \mathbb{Z} \in [-\frac{1}{4n}, \frac{1}{4n}] + \mathbb{Z}$ *para todo* $x \in S\}$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *constituyen una base de entornos de* 0 *para* ρ_S.

Observación 3.4 *Sean* $A \subseteq B \subseteq \mathbb{T}$, *entonces* $\rho_A \leq \rho_B$.

Proposición 3.5 *Si* S *es denso, entonces* d_S *da lugar a la topología discreta.*

Demostración: Vamos a ver que fijados $m, n \in \mathbb{Z}$, tenemos que $d_S(m,n) = d_{\mathbb{T}}(m,n)$. Para ello tomamos $\alpha \in \mathbb{T}$. Sea $\epsilon > 0$. Por ser S denso, existe $s \in S$ tal que $|s - \alpha| < \frac{\epsilon}{|m|+|n|}$. Ahora bien, $s^m - \alpha^m = (s-\alpha)(s^{m-1} + s^{m-2}\alpha + \cdots + \alpha^{m-1})$.

Tomando módulos, tenemos que $|s^m - \alpha^m| = |s-\alpha||s^{m-1} + s^{m-2}\alpha + \cdots + \alpha^{m-1}| < \frac{\epsilon|m|}{|m|+|n|}$.

Por otro lado $\alpha^m - \alpha^n = \alpha^m - s^m + s^m - s^n + s^n - \alpha^n$. Es decir, $|\alpha^m - \alpha^n| \leq |\alpha^m - s^m| + |s^m - s^n| + |s^n - \alpha^n| < \frac{\epsilon|m|}{|m|+|n|} + d_S(m,n) + \frac{\epsilon|n|}{|m|+|n|} = d_S(m,n) + \epsilon$. Tomando supremos tenemos que $d_S(m,n) \leq d_{\mathbb{T}}(m,n) < d_S(m,n) + \epsilon$. Al ser la desigualdad cierta para todo $\epsilon > 0$, se deduce que $d_A(m,n) = d_{\mathbb{T}}(m,n)$.

QED

La densidad de S **no** es necesaria para que la topología ρ_S sea discreta. Sin embargo, hay "muchos" subconjuntos $S \subseteq \mathbb{T}$ que dan lugar a topologías uniformes no discretas. En [2] se da una familia de sucesiones $S \subseteq \mathbb{T}$ que verifican:

1) $(\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge = \langle S \rangle$ y

2) la topología precompacta asociada a $\langle S \rangle$, $\tau_{\langle S \rangle}$ no coincide con ρ_S.

Claramente 1) implica que ρ_S no es discreta. Además, el dual de $(\mathbb{Z}, \tau_{\langle S \rangle})$ es $\langle S \rangle$ (por 2.5), y así los duales de $(\mathbb{Z}, \tau_{\langle S \rangle})$ y de $(\mathbb{Z}, \rho_S)$ coinciden. Teniendo en cuenta el Teorema 2.4, sólo puede haber una topología precompacta en el grupo $\mathbb{Z}$ entre todas aquéllas que dan lugar al mismo dual. Por 2) obtenemos que ρ_S no es precompacta.

Cada ρ_S definida con el criterio anterior, es una topología de grupo **no precompacta** en $\mathbb{Z}$, lo que contradice la afirmación de Bourbaki arriba mencionada.

La siguiente proposición se demuestra directamente:

Proposición 3.6 *Para $S \subseteq \mathbb{T}$ se obtiene $S \subseteq (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge$.*

Proposición 3.7 *La topología ρ_S no es precompacta para ningún subconjunto infinito $S \subseteq \mathbb{T}$.*

Demostración: Procedemos por reducción al absurdo. Por el teorema 2.4, tenemos que en el caso de que ρ_S fuera precompacta, en particular, sería la topología débil asociada al subgrupo $H = (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge \leq \mathbb{T}$; es decir, τ_H. Es claro que $\tau_H \leq \rho_S$. Ahora bien, supongamos que $\rho_S \leq \tau_H$; para cada entorno de 0 U_ρ de ρ_S, deberíamos tener otro entorno de 0 U_τ de τ_H de tal manera que $U_\tau \subseteq U_\rho$.

Los entornos de τ_H son de la forma $U_F := \{k \in \mathbb{Z} | \varphi(k) \in \mathbb{T}_+$ para todo $\varphi \in F$ con $F \subseteq (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge$ finito$\}$. Por otra parte, $U_S := \{k \in \mathbb{Z} | \varphi(k) \in \mathbb{T}_+$ para todo $\varphi \in S\}$ es un entorno de ρ_S. Supongamos que existe $F \subset H$ tal que $U_F \subseteq U_S$. Ahora consideramos $V_F := \{\varphi \in (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge | \varphi(x) \in \mathbb{T}_+$ para todo $x \in U_F\}$ y análogamente, $V_S := \{\varphi \in (\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge | \varphi(x) \in \mathbb{T}_+$ para todo $x \in U_S\}$. Por las propias definiciones y la hipótesis de que $\rho_S = \tau_H$, tenemos que $V_S \subseteq V_F$ y además $S \subseteq V_S$. De acuerdo con [1, 7.11] V_F es finito, por lo cuál es imposible que $V_S \subseteq V_F$. Consecuentemente, $\rho_S \neq \tau_H$.

QED

Cuestión abierta 3.8

1. *Computar $(\mathbb{Z}, \rho_S)^\wedge$ para $S \subseteq \mathbb{T}$ cualquiera.*
2. *Dar condiciones necesarias y suficientes para que $\rho_S \neq \rho_R$ con $S, R \subseteq \mathbb{T}$.*
3. *Calcular la cardinalidad de la familia $\{\rho_S : S \subseteq \mathbb{T}\}$*

4 Topologías completas en $\mathbb{Z}$

Hasta ahora hemos mostrado ejemplos de topologías en $\mathbb{Z}$ -metrizables o no-, que en ningún caso son completas. En esta sección presentamos una familia de topologías completas no discretas, que debido al teorema de categoría de Baire no son metrizables (ni localmente compactas).

En [14] Protasov y Zelenyuk se cuestionan lo siguiente: dada una sucesión $a = (a_n)$ en un grupo G, ¿existe una topología de grupo en G que sea de

Hausdorff y tal que la sucesion a sea convergente a cero en dicha topología? La respuesta depende de la sucesión. Por ejemplo la sucesion $(a_n) = (n^2) \subseteq \mathbb{Z}$ no converge a 0 para ninguna topología de grupo y Hausdorff en $\mathbb{Z}$. Así surge la siguiente noción.

Definición 4.1 *Sea G un grupo y $a = (a_n) \subset G$, una sucesión. Diremos que a es una T- sucesión si existe una topología de grupo y de Hausdorff τ en G tal que $a_n \to 0_G$ en τ, siendo 0_G el elemento neutro de G.*

Mediante una sencilla aplicación del lema de Zorn se prueba que si $a \subset G$ es una T-sucesión, entonces existe una topología en G de grupo más fina entre todas aquéllas que hacen nula la sucesión $a = (a_n)$. Protasov y Zelenyuk usan el término *topología determinada por la sucesión* a para designarla y hacen una construcción de la misma que informalmente consiste en: definir primero unos subconjuntos de G que incluyen las colas de la sucesión $a = (a_n)$, y tomar después todas las sumas finitas de elementos de los subconjuntos anteriores. El proceso da lugar a una base de entornos del neutro para una topología de grupo en G que es la más fina entre todas las que hacen nula la sucesión a. Lo escribimos formalmente como sigue:

Definición 4.2 ([14]) *Sea G un grupo, sea $a = (a_n)$ una T-sucesión en G y $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión de naturales. Definimos*

- $A^*_m := \{\pm a_n | n \geq m\} \cup \{0_G\}$.
- $A(k, m) := \{g_0 + \cdots + g_k | g_i \in A^*_m \, i \in \{0, \ldots, k\}\}$.
- $[n_1, \ldots, n_k] := \{g_1 + \cdots + g_k : g_i \in A^*_{n_i}, i = 1, \ldots, k\}$.
- $V_{(n_i)} = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} [n_1, \ldots, n_k]$.

Proposición 4.3 *La familia $\{V_{(n_i)} : (n_i) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}\}$ es una base de entornos de 0_G para una topología de grupo $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ en G, que es la más fina de todas aquéllas en las que convege a. El símbolo $G_{\{a_n\}}$ designará al grupo G dotado de $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$.*

La topología $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ es necesariamente de Hausdorff, por la definición de T-sucesión. El siguiente teorema, cuya demostración no incluimos por ser muy técnica, es el resultado más importante de la sección:

Teorema 4.4 *[14, Theorem 8]*
Sea G un grupo y sea $a = (a_n)$ una T-sucesión. Entonces la topología $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ es completa.

Para una D-sucesión a en $\mathbb{Z}$ es claro que se puede construir la topología $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ en $\mathbb{Z}$, que de acuerdo con el teorema anterior, es completa y no metrizable. Las siguientes propiedades de $\mathbb{Z}_{\{a_n\}}$ tienen especial interés: la primera porque resuelve un problema de Malykhin de varios años de antigüedad y la segunda nos permite obtener que el grupo dual es metrizable y k-espacio.

Observación 4.5 *(1) $\mathbb{Z}_{\{a_n\}}$ es un grupo secuencial, pero no es Frechet-Urysohn (ver [14, Theorem 7 y Theorem 6]).*

(2) $\mathbb{Z}_{\{a_n\}}$ es un k_ω-grupo (ver [15, 4.1.5]).

Proposición 4.6 *El grupo dual de $\mathbb{Z}_{\{p^n\}}$ coincide algebráica y topológicamente con el dual de $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$; es decir, se identifica con $\mathbb{Z}(\mathbf{p}^\infty)$ dotado de la topología discreta.*

Demostración: En [8, 4.6] se obtiene que el dual de $\mathbb{Z}_{\{p^n\}}$ coincide algebráicamente con el dual de $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$ y por tanto se identifica a $\mathbb{Z}(\mathbf{p}^\infty)$. La observación (2) de 4.5 implica que $\mathbb{Z}^\wedge_{\{p^n\}}$ es metrizable y completo. Por el Teorema de Categoría de Baire, teniendo en cuenta que $\mathbb{Z}^\wedge_{\{p^n\}}$ es numerable, obtenemos que es discreto y por tanto coincide también topológicamente con el dual de $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$.

QED

La proposición 4.6 nos permite resolver negativamente un problema planteado en [8], que indicamos a continuación, aunque para ello tenemos que aludir a una clase de grupos topológicos abelianos que en particular contiene a la clase de los grupos reflexivos. Se trata de los grupos localmente cuasi-convexos, que constituyen una clase de grupos que de algún modo refleja y extiende las propiedades de los espacios vectoriales localmente convexos.

De hecho todo espacio localmente convexo considerado como un grupo respecto de la adición (es decir, olvidando la estructura lineal), es un grupo localmente cuasi-convexo. Estudiar a fondo esta clase de grupos implicaría ampliar demasiado este trabajo, por tanto remitimos al lector interesado a [5] para formarse una idea clara y precisa de la misma. En [8] se prueba - mediante cálculo directo de algunas envolturas cuasi-convexas - que los grupos $\mathbb{Z}_{\{2^n\}}$ y $\mathbb{Z}_{\{3^n\}}$ no son localmente cuasi-convexos y se pregunta qué ocurre para $\mathcal{T}_{\{p^n\}}$ con $p > 5$. De modo directo hemos obtenido lo siguiente:

Proposición 4.7 *Sea p un primo cualquiera. El grupo $\mathbb{Z}_{\{p^n\}}$ no es localmente cuasi-convexo y, por tanto, no es reflexivo.*

Demostración: Para abreviar, llamemos $G := \mathbb{Z}_{\{p^n\}}$. Si G fuera localmente cuasi-convexo, la aplicación canónica α_G sería inyectiva y abierta ([1, 6.10]). De nuevo por (2) de la observación 4.5, G es k-grupo, lo que implica que α_G es continua. Por tanto α_G es un encaje topológico de G en $G^{\wedge\wedge}$. Por la proposición 4.6, $G^{\wedge}$ es discreto y en consecuencia $G^{\wedge\wedge}$ es compacto. El mencionado encaje permite afirmar que G es precompacto. Ahora el Teorema 2.4 nos indica que sólo hay una topología precompacta en $\mathbb{Z}$ con dual $\mathbb{Z}(\mathbf{p}^\infty)$, concretamente la p-ádica λ_p. Así obtenemos la igualdad $G = (\mathbb{Z}, \lambda_p)$, que contradice el hecho de que $(\mathbb{Z}, \lambda_p)$ es metrizable pero $G = \mathbb{Z}_{\{p^n\}}$ no lo es.

QED

Cuestión abierta 4.8 *(1) ¿ Bajo qué condiciones un par de D-sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dan lugar a grupos distintos $\mathbb{Z}_{\{a_n\}}$ y $\mathbb{Z}_{\{b_n\}}$?.*

(2) Estudiar si la modificación localmente cuasi-convexa de la topología $\mathcal{T}_{\{a_n\}}$ es de Mackey en el sentido definido en [6].

Bibliografía

[1] L. Außenhofer, *Contributions to the duality theory of abelian topological groups and to the theory of nuclear groups*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.),(1999) 384.

[2] L. Außenhofer, D. de la Barrera, *Linear topologies on $\mathbb{Z}$ are not Mackey topologies*, Journal of Pure and Applied Algebra, Volume 216, Issue 6 (2012) 1340–1347.

[3] W. Banaszczyk, E. Martín-Peinador, *The Glicksberg Theorem on Weakly Compact Sets for Nuclear Groups*, Annals of the New York Academy of Sciences, General Topology and Applications, Vol. 788, no 1 (1996) 34–39.

[4] N. Bourbaki, *General topology I*, Herrmann, Paris, 1966.

[5] M. Bruguera, *Grupos topológicos y grupos de convergencia: estudio de la dualidad de Pontryagin*, Doctoral Dissertation. Barcelona, 1999.

[6] M.J. Chasco, E. Martín-Peinador and V. Tarieladze, *On Mackey Topology for groups*, Stud. Math. **132**, no.3 (1999) 257-284.

[7] W.W. Comfort, K.A. Ross, *Topologies induced by groups of characters*, Fund. Math. 55 (1964) 283-291.

[8] D. Dikranjan, *Application of Graev's topology towards the construction of non-precompact compatible topologies*, preprint (Diciembre de 2010).

[9] E.K. van Douwen, *The maximal totally bounded group topology on G and the biggest minimal G-space, for abelian groups G*, Topology and Appl. 34 (1990) 69–91.

[10] S.S. Gabriyelyan, *Groups of quasi-invariance and the Pontryagin duality.* Topology Appl. 157, no. 18 (2010) 2786-2802.

[11] E. Hewitt, K.A. Ross, *Abstract harmonic analysis*, Vol. I: Structure of topological groups. Integration theory, group representations, Die Grundlehren der math. Wissenschaften, Bd. 115 (1963) Academic Press, New York and Springer-Verlag, Berlin.

[12] V.L.Jr. Klee, *Invariant metrics in groups (solution of a problem of Banach)* Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1953) 483-487.

[13] J. Margalef, E. Outerelo, J. Pinilla, *Topología* Alhambra, 1979.

[14] I. Protasov, E. Zelenyuk, *Topologies on abelian groups* Math. USSR Izvestiya, Vol. 37 (1991) No. 2.

[15] I. Protasov, E. Zelenyuk, *Topologies on groups determined by sequences*, Mathematical Studies, Monograph Series Vol. 4 (1999) Lviv.

[16] S.U. Raczkowski, *Totally bounded topological group topologies on the integers.* Proceedings of the First Joint Japan-Mexico Meeting in Topology (Morelia, 1999). Topology Appl. 121, no. 1-2 (2002), 63-74.

[17] M. Tkachenko, L.M. Villegas, C. Hernández, O. J. Rendón, *Grupos Topológicos*, Universidad Autónoma Metropolitana, 1997.

En memoria del Profesor Etayo Miqueo

María Paz Bujanda
Profesora de la Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

This brief study of Professor Etayo's Book "Mathematics teaching in secondary education" is presented as a reminder of his interest in mathematics teaching.

En afectuosa memoria de don Javier Etayo Miqueo, matemático,
preocupado por los problemas de la enseñanza de las matemáticas,
catedrático de la Facultad de Matemáticas, profundamente religioso, amigo…

Le vi y le escuché por primera vez en una conferencia que impartía en la Facultad (que entonces era Facultad de Ciencias) a un grupo de profesores de matemáticas de secundaria, en los momentos de mayor auge de "la matemática moderna". Desde entonces, por lo menos, data su interés por la educación matemática en todos sus niveles.

Recuerdo con una especial admiración y ternura, algunas breves charlas que tuve con él, en sus largos años de jubilado, en las visitas que, nunca dejó de hacer casi a diario, a nuestra Facultad de Matemáticas. Admiré especialmente, además de su talla como matemático, su condición profundamente humana, abierta, cordial y conciliadora, dispuesto a dedicar su interés a temas tan dispares como la propia matemática, la historia, la grande y la menuda (la de su querida Navarra natal), las anécdotas, el agudo y amable sentido del humor y quiero destacar su interés real por los problemas de la educación matemática.

Hay muchas pruebas de este interés por la enseñanza de las matemáticas. Durante los años en que fui "Coordinadora de la Especialidad de Didáctica de las matemáticas". Este título, que no creo que figure ni que haya figurado nunca en el organigrama de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense, me fue concedido por el profesor don Pedro Abellanas, creador de la especialidad, por la vía de los hechos y yo actué como tal durante muchos años. Yo estaba preocupada por el escaso interés con que se consideraban en dicha Especialidad los problemas reales de la práctica de la enseñanza y, por ello, me pareció oportuno organizar cada año una "Semana de Metodología de las Matemáticas". En ellas (creo que pasaron de diez) se trataba de suplir con conferencias esta falta de contacto con la vida real de la enseñanza.

Los conferenciantes, eran de lo más dispares, siempre dentro de una gran competencia y un deseo de responder a las inquietudes de los alumnos. Tengo el honor y la gratitud de constatar que en todas las Semanas que organicé pude contar con la conferencia del Profesor Etayo, preparada cuidadosamente y muy valorada por todos los alumnos.

Por ello, en su recuerdo, me ha parecido oportuno recordar la colaboración desde su preocupación por la enseñanza, con el Profesor don Víctor García Hoz.

Da una idea de la amplitud de experiencias en todos los niveles de enseñanza y de investigación del profesor García Hoz, un breve resumen de su currículum; empezó ejerciendo la docencia de maestro rural, luego sería Director de la Escuela Aneja a la Normal de Maestros de Madrid, primer doctor en Filosofía y Letras, sección de Pedagogía, de la Universidad Complutense de Madrid, catedrático de Pedagogía Experimental y Diferencial, Fundador y Presidente de honor de la Sociedad Española de Pedagogía … Tuvo un papel esencial en la concepción y desarrollo de la "educación personalizada", tema al que dedicó gran parte de su vida.

Da fe de que la educación personalizada sigue vigente, la publicación por la Editorial Síntesis en el año 2011 del libro "Educación personalizada: principios, técnicas y recursos" [3].

En el prólogo de la obra, los autores dan testimonio de la magnífica y atractiva creación del Profesor García Hoz y presentan en unas pinceladas el atractivo concepto de "educación personalizada":

"La Educación Personalizada es una concepción educativa cuya arquitectura más completa se debe a Víctor García Hoz, que fuera catedrático de Pedagogía Experimental en la Universidad Complutense de Madrid y fundador de la Sociedad Española de Pedagogía. Como él mismo afirmó reiteradamente, no se trata de un modo de entender la educación enmarcado en alguna corriente filosófica, psicológica o pedagógica concreta, sino que está abierta a todas las corrientes razonables de pensamiento. Y serán razonables todas las aportaciones que ayuden a la perfección de la persona en todo lo que es, sin reduccionismos de ningún tipo.

La educación personalizada atiende a lo que las personas tienen en común, y lo que tienen de propio; aúna las exigencias de la individualización y socialización educativas, y constituye el tipo de educación más acorde con las *profundas necesidades humanas y las condiciones del hombre en la sociedad tecnificada en que vivimos; estimula a cada sujeto para que vaya perfeccionando libre y responsablemente la capacidad de dirigir su propia vida; proporciona una formación integral, capaz de poner unidad en todos los aspectos de la vida de cada ser humano; propugna la participación de profesores, alumnos y padres en todo lo que es y supone la vida de la institución educativa….*

El profesor García Hoz, trabajó con entusiasmo y eficacia en la profundización de "la enseñanza personalizada" hasta el final de su vida.

En el artículo que en su memoria escribió el Profesor López Quintás, miembro de la Real Academia de las Ciencias Morales y Políticas, cuenta la preocupación que sentía García Hoz, por concretar sus ideas a las diferentes materias:

"Un buen día, hace unos doce años, D. Víctor nos convocó a diversos profesores en un seminario de la universidad. Llevaba cinco años jubilado. Pero su júbilo no consistía en dejar de lado el trabajo realizado durante tantos años sino en incrementarlo. Por eso a los bien cumplidos setenta y tantos años, nos reunía para proponernos una tarea gigantesca: preparar un tratado de la educación personalizada en más de diecisiete volúmenes. Parecía empresa imposible, pero su energía espiritual hizo posible culminarla hace poco de modo brillantísimo, pues no sólo se publicaron diecisiete volúmenes, sino treinta y tres, que abarcan 13.000 páginas densas. Para ello tuvo que movilizar a un equipo de 215 especialistas, que abordaron el tema desde muy diversas perspectivas. Hoy tenemos en español, escrita por españoles, una obra de gran envergadura acerca del modo óptimo de orientar de forma personalizada la formación de las gentes en las diversas áreas del saber: ciencias, literatura, filosofía, historia, etc".

Uno de los especialistas, de los que con razón se enorgullecía y con el que pudo contar el profesor García Hoz, fue el Profesor Etayo y su colaboración de plasmó en el libro "*Las Matemáticas en el enseñanza media*". Y contó con él precisamente para la ardua y personal tarea de presentar unas matemáticas atractivas, capaces de motivar a su estudio al mayor número posible de estudiantes de secundaria. Los autores de capítulos del libro son: *José Javier Etayo Miqueo* (Introducción), *Luis A Santaló* (Las probabilidades en la Educación Secundaria), *Sixto Ríos García y Sixto Ríos Insua* (La enseñanza de la Estadística en la Educación Secundaria) , *José Luis García de las Heras* (Una programación de Matemáticas en Educación Secundaria) y *Ángel Chica Blas* (Proyectos).

Me ha parecido importante para subrayar el interés por los problemas de la educación matemática del Profesor Etayo, dar una breve síntesis de su aportación. Debo decir que he leído las más de cien páginas con detenimiento y verdadero placer y que me ha supuesto un trabajo seleccionar las citas; en realidad lo hubiera citado entero.

Su esencial contribución al libro, lleva el mismo título que éste y consta de una introducción y tres grandes capítulos. La ciencia, el arte y el discurso.

En la *Introducción* expone su declaración de intenciones y en algunos momentos tiene todo el sabor de ideas basadas en su experiencia de profesor jubilado. Se trata de una reflexión profunda, hecha desde los largos años dedicado con entusiasmo a la enseñanza de las matemáticas en la Universidad y abierto a los problemas planteados por su enseñanza en todos sus estadios, en particular el de secundaria. En ella, aparece casi como hilo conductor, la consideración de la triple vertiente del término "matemático" señalada por Dieudonné; profesor, usuario y creador de la matemática; la conveniencia de atender a las "matemáticas del profesor", sin perder de vista las otras dos vertientes; el acercamiento de estas matemáticas a otras formas del saber y de la vida; la doble intencionalidad; informativa (proporcionar al estudiante los conocimientos necesarios para su inserción adecuada en la sociedad que le ha tocado vivir) y la formativa (contribuir a la formación integral del alumno utilizando las peculiaridades de las matemáticas). En una lúcida reflexión, confiesa a sus colegas:

"*Tenemos seguramente todos la experiencia de que ese material que hemos ido aprendiendo y contrastando y que nos hace versados en estos temas, no es suficiente para que tengamos de ellos una visión global y sepamos encajarlos en el contexto de una cultura más universal. Hasta en el sentir popular parece dominar la idea de que el matemático entiende solamente de unas cosas muy complicadas y abstrusas y casi siempre cerradas en sí mismas… Y a veces echamos también nosotros en falta esta apertura al exterior que pensamos sería de gran utilidad a la hora de plantear a nuestros alumnos no tanto los saberes exclusivos de nuestra ciencia particular sino los más importantes de una total formación y educación* ".

Presenta tres apartados: 1) La Ciencia; 2) El arte; 3) El discurso.

Me permito detenerme brevemente en cada uno de ellos.

1 La Ciencia

Se trata de un profundo y detallado estudio de los diferentes problemas que, a lo largo de la historia, han ido condicionando y conformando la matemática. Sería imposible, en la extensión de este artículo, detenerse en cada apartado.

Partiendo de las diferentes definiciones del término “matemática”: “Ciencia que trata de la cantidad”, “Ciencia que a partir de determinadas nociones básicas desarrolla sus teorías sin más apoyo que el razonamiento lógico”, “Estudio lógico de la forma, disposición, cantidad y muchos otros conceptos relacionados teóricamente, la ciencia axiomática en la que se extraen consecuencias necesarias de premisas específicas”. James y J James (1976) expone una cuidadosa evolución de nuestra ciencia a lo largo de la historia. Desde “la ciencia que trata de la cantidad”, que resuelve los problemas experimentales que se plantean, hasta el teorema de la indecidibilidad de Kurt Gödel, que sorprendió absolutamente al mundo matemático, que vio hundirse la reconocida condición de “exacta” de su ciencia, al establecer que en un sistema axiomático, perfectamente válido, existen proposiciones formuladas en términos de los axiomas, de las que no se puede demostrar ni su certeza ni su falsedad. Indico los apartados en que divide su exposición y cito algunos de los párrafos que me han parecido más significativos.

<u>*Hacia las abstracciones*</u>
“El primer paso hacia una matemática más organizada, más cercana a lo científico, lo protagonizan los griegos”. “El matemático trabajará desde entonces en un universo de puras ideas que él va creando por sucesivas abstracciones, cada vez de mayor nivel y que comenzaron por la abstracción primera y próxima de objetos del mundo físico”.

<u>*La demostración*</u>
El “certificado” de validez de una proposición matemática viene dado por la demostración.

“La geometría primitiva no pasaba de ser una ciencia natural, puesto que consistía en simples generalizaciones de la experiencia misma: si cada vez que medimos los ángulos de un triángulo, obtenemos el mismo resultado, dos rectos, ¿cómo va a ser ello fruto de la casualidad? Admitamos pues que esto ocurre siempre. Un niño opera de ese modo, pero una mente madura ha de preguntarse por qué las cosas tienen que ser siempre así. En este momento nace la demostración: empezamos a hacer ciencia verdadera”

Y aquí hace una reflexión educativa:

“Muchas veces, la demostración de una propiedad resulta harto más difícil y, en conjunto menos intuitiva y evidente que la propiedad misma y a muchos se les ocurre que a qué viene esa manía de querer siempre demostrar complicadamente lo que es tan fácil de ver… Tema este sobre el que hay que meditar: no pocas veces, seguramente, pretendemos que nuestros alumnos se embarquen en

farragosas demostraciones en un momento y en una edad en que ni comprenden esa necesidad ni se la hemos hecho entender".

Lo mismo que en el desarrollo histórico llega el momento de establecer la demostración, ocurre igual en el desarrollo del hombre, dado su paralelismo entre sus edades y las de la ciencia. La demostración es el último peldaño, el que nos asegura que lo que hemos discurrido y construido está bien. Pero los avances de la matemática no se han producido multiplicando demostraciones, sino contemplando grandes ideas e intuiciones fecundas.

Los axiomas

Al considerar las demostraciones, surge casi inmediatamente la necesidad de considerar la existencia sin necesidad de demostración de unas cuestiones básicas. Estos elementos de partida que se admiten sin demostración son los axiomas. *Y, ¿qué es la verdad?* La pregunta del millón, es de suficiente envergadura como para dedicarle dos apartados.

Indecidibilidad

Las matemáticas han constituido durante siglos el paradigma de lo verdadero. Ante el enfoque axiomático, surge la consideración de las condiciones a cumplir en el conjunto de los axiomas de base; puede subsanarse la independencia de los axiomas, su completitud, pero el tema más duro es el de la compatibilidad. Esto es, la certeza de que nunca se llegará desde ellos mediante un proceso lógico, a dos resultados contradictorios. Este problema se iba llevando de un modo más modesto estableciendo la solidaridad lógica entre los axiomas de la geometría euclídea y la geometría considerada con base en los números reales. (Identificando, en la geometría espacial, un punto con una terna de números reales, un plano con el conjunto de puntos que satisfacen una ecuación lineal con coeficientes reales, etc) de modo que la geometría euclídea, en el sistema de Hilbert, era "tan compatible" como los números reales. Y los números reales eran algo que no admitía discusión.

Pero en el año 1931, el matemático alemán Kurt Gödel sorprende al mundo matemático al demostrar que en el sistema formado por los números reales, existen proposiciones indecidibles, esto es, proposiciones de las cuales no puede afirmarse ni su verdad ni su falsedad.

El profesor Etayo, se detiene en este tema y acaba llegando gradualmente a considerar que la certeza absoluta propia hasta entonces de nuestra ciencia, pasa a un plano más modesto: al de la "fe en la razón". La matemática ha perdido ya su carácter de "verdad absoluta", pero sigue su camino sobre otro tipo de certeza:

la fe en la razón. Aquí el profesor Etayo, hace una interesante comparación entre la fe religiosa y la del matemático en su ciencia.

"Ya se entiende que esta fe es de índole distinta de la fe religiosa. Esta última se aplica a verdades sobrenaturales que, por serlo, no son alcanzables por la razón. La fe matemática no: cree en aquellas cosas que la razón e incluso la experimentación le presenta como buenas, aunque, a pesar de caer dentro de su ámbito, no puede llegar a demostrarlas. Le basta con que aparezcan como razonablemente ciertas; y esto sí que puede tener en común con la fe religiosa.

Localmente la razón es suficiente para nuestra ciencia; es al considerarla en su globalidad cuando surgen estos problemas. Ante ellos, el matemático semeja al agnóstico de su propia razón. Con la diferencia de que el agnóstico religioso, al no poder demostrar racionalmente una proposición sobrenatural - lo que llamamos un misterio- obra en general como si fuera falsa, aunque tampoco pueda demostrar su falsedad; mientras que el matemático agnóstico, que igualmente no puede decidir entre la verdad o falsedad de una proposición, opta por creerla, dado el buen comportamiento con que, siempre, sin excepción, se ha conducido".

2. El arte

En este capítulo, el profesor Etayo asume la difícil tarea de considerar la matemática como arte. Va haciéndolo de modo detenido y fundamentado. La distinción entre matemática pura y matemática aplicada, le da pie para considerar el problema tantas veces planteado de la utilidad de las matemáticas.

La línea de separación entre los dos tipos, no es clara. La matemática aplicada no se limita a responder las preguntas que se plantean desde otras ciencias: hoy tenemos muchos modelos formales, obtenidos desde la matemática pura, sin pensar en su posible aplicación y que han demostrado su eficacia en las distintas ciencias. Resume así su punto de vista, con una interesante proyección al campo educativo.

"Me gustaría sin embargo… recabar para las matemáticas una visión global unitaria, pese a las muchas facetas que pueda presentar. Una es la matemática, aunque compuesta como la Galia, de partes distintas. Una es también por más que consideramos clasificaciones que evidentemente, tienen anchas zonas de solapamiento: matemática pura y aplicada, matemática clásica y moderna, etc. Bien que las humanas limitaciones nos obliguen a cada uno a centrarnos en algunas de las subdivisiones de aquellas facetas, pero sin perder de vista la unidad fundamental. Unidad que podría ser el primer peldaño de aquella que

para Stone "debería de ser una de las más altas tareas educativas de nuestro tiempo: mostrar la unidad esencial del pensamiento humano".

Pasa a considerar las "artes matemáticas". A propósito de la anécdota de la búsqueda en una biblioteca del "Ars Magna" de Cardano, donde la bibliotecaria se afanaba en los campos de humanidades, se refiere al hecho de que ya desde Luca Paccioli, se llamaba "Arte mayor" ó "regla de la cosa", a las técnicas de resolución de ecuaciones de primer y segundo grado (ya conocidas desde antiguo) y a la de tercero. En este sentido "arte" tendría la acepción que hoy se mantiene de habilidad para hacer algo.

"Todas las definiciones medievales de arte se reducen al mismo tipo. El arte es un saber hacer. Así la arquitectura es el arte gracias al cual el arquitecto sabe cómo debe construir; la poesía el arte por el cual el poeta sabe lo que debe hacer cuando quiere hacer un bello poema, aritmética, el arte cuya posesión permite al matemático saber cómo ha de resolver tal o cual problema". (Bruyne, 1958) (Citado por J.Etayo).

"En honor del espíritu humano" es el vehemente título de un importante libro de Dieudonné y el título del apartado del libro del profesor Etayo. El origen de la frase "En honor del espíritu humano" está en una en una carta que Jacobi escribe a Legendre a propósito de unas declaraciones de Fourier. Vale la pena considerar la cita:

"Es verdad que M. Fourier opinaba que la finalidad primordial de las matemáticas era la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales, pero un filósofo como él debería haber sabido que la "finalidad única de la ciencia es el honor del espíritu humano" y que, por ello, una cuestión sobre números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo".

La matemática aplicada, cabría considerarla dentro del "arte de hacer". El profesor Etayo, dedica a la matemática pura unas consideraciones para asociarla al valor estético, al que se ve movida por la hermosa inutilidad de las cosas bellas. Estudia el insustituible papel de las matemáticas en la perspectiva, en el Renacimiento, hermoso ejemplo de de colaboración entre la pintura y las matemática, que dio lugar a que los deseos de los pintores de representar en un plano la imagen tridimensional de la realidad promovieron las bases de la geometría proyectiva.

Considera igualmente la situación en el Barroco, y hace dos fundamentados análisis y consideraciones sobre la "Utilidad de lo inútil" y "Las dos bellezas". Hace este lúcido y realista análisis de sus resultados en la consideración de la matemática como arte:

"Los matemáticos no nos atreveremos nunca a pretender convencer a nadie de que la matemática es bella; entre otras cosas porque una belleza que necesita ser explicada, flaca belleza será. Se puede, sí, comprender que posee una cierta belleza conceptual pero que no habla a los sentidos como hablan las bellas artes. Independientemente de que en algunas manifestaciones de éstas, puedan aparecer también estas notas".

No obstante, cita a verdaderos maestros que buscan este acercamiento. Como ejemplo especialmente llamativo, está el discurso de ingreso en la Academia de la Lengua de Salvador de Madariaga, que se titula así: "*De la belleza en la ciencia*". En ese discurso, afirma que el goce que a sus veinte años sentía ante las lecciones de análisis algebraico de Humbert era el mismo que el que sentía al escuchar a Bach y a Beethoven.

El profesor Etayo distingue dos tipos de belleza, que pueden convivir y entremezclarse, dominando una u otra en cada caso: una la goza la mente y otra el corazón y los sentidos; una es científica y la otra artística ó cerebral o intuitiva y temperamental.

Continúa con una colección de citas en torno a la belleza en sus distintas formas; termina con la del toreo. Termina, a la vista de los tipos de belleza expuesta, con espíritu animoso:

"Entonces, ¿por qué no permitirnos después de todo, ocupar un pequeño lugar en el mundo de las artes? ".

3 El discurso

En este último capítulo, concreta ya las preocupaciones inmediatas del profesor.
"Arte, ciencia ó ambas cosas, lo que ahora nos importa de la matemática es qué y cómo debemos enseñarla. No olvidemos que enseñar requiere como primera medida seleccionar: no se puede enseñar todo, ni siquiera todo lo que sabe el profesor"

Y en esta selección, ha de tener en cuenta la doble finalidad de la enseñanza de las matemáticas: la de contribuir a la formación del alumno y la de proporcionarle conocimientos adecuados para resolver los problemas que la vida le irá presentado. Parece natural que para lograr esta doble finalidad, se deba elegir entre aquellas ideas fundamentales que constituyen el método de las matemáticas y que, a la vez, posean el carácter de permanencia a lo largo de su historia. Precisamente, esta segunda condición será la que permita adecuar los conocimientos a los diversos problemas que el paso del tiempo vaya planteando.

Para conseguir estos dos puntos, el profesor Etayo, toma las ideas del magnífico discurso del profesor Abellanas, en la inauguración en la Universidad Complutense de Madrid del curso 1979-80, que lleva el título: "Unas reflexiones sobre la biografía de la Matemática".

En este trabajo (don Pedro me confesó en una ocasión la cantidad de tiempo que había dedicado a realizarlo), se viene a demostrar que prácticamente toda la Matemática de hoy está ya reflejada en los "Elementos de Euclides". Me permito citar su planteamiento básico:

"La Geometría, como todos los seres vivos, tiene una dimensión temporal, depende de la variable tiempo, pero no al modo de los hechos históricos, sino exactamente con las características del auténtico ser vivo con su propio código genético. Su nacimiento son los Elementos de Euclides. La cantidad y calidad de los conocimientos matemáticos a principios del siglo III (a.C.) exigían una ordenación para su utilización por una memoria limitada. Esta ordenación son los Elementos. El lenguaje de esta obra es geométrico, pero se exponen también ideas y problemas aritméticos, algebraicos y de lo que hoy se llama análisis matemático. La Matemática griega era Geometría. En los Elementos aparecen todos los problemas fundamentales de la Matemática. En esa primera fotografía del nuevo ser se reconocen de un modo preciso todos los rasgos del ser adulto".

En el discurso va analizando los libros de los Elementos, hace una revisión de los mismos a la largo de la historia y concluye relacionándolos con los temas fundamentales de la matemática de hoy. La matemática de hoy sigue reproduciendo el código genético que ya aparecía en el momento de su nacimiento.

El profesor Etayo toma como base este estudio para justificar su elección de "*aquellas ideas fundamentales que constituyen el método de las matemáticas y que, a la vez, posean el carácter de permanencia a lo largo de su historia*" y elige pues los tres problemas fundamentales que ha presentado la matemática a lo largo de su historia: el de la dependencia lineal, el de la medida y el de la aproximación local. A cada uno de ellos dedica unos párrafos, como señalo a continuación.

Problema de la dependencia lineal:

Linealidad. Las proporciones. Las aplicaciones lineales.

Problema de la medida:

La métrica. Las magnitudes compuestas. La invasión de los polinomios.

Problema de la aproximación local:

Aproximación local. Pero hay un límite.

Son estudios detallados, que se leen con interés y también con una sonrisa en los labios, por el buen sentido del humor que salpica sus páginas. Por la necesaria brevedad, que debiera tener este artículo, me limito a señalar unas cuantas citas, no sin señalar a los lectores el interés que supone dedicar un tiempo a una lectura conjunta del discurso del profesor Abellanas, junto con el desarrollo del profesor Etayo.

Sobre la permanencia de las ideas a lo largo de la historia de la Matemática
"Solo en el siglo XIX se supo ver que la noción de número real fundamentada por Dedekind está – y lo dice él mismo – contenida en forma clarísima en la definición de igualdad de razones establecida en el libro V (*de los Elementos*). Realmente sobrecoge contemplar no solo la clarividencia sublime de quienes en aquellos primeros balbuceos supieron contemplar las más altas concepciones, sino también en la persistencia a través del tiempo, y oculta muchas veces durante su transcurso, de unos mismos esquemas descubiertos por las estructuras actuales y de los que, de algún modo, había tenido ya una nítida visión el genio de un Euclides o un Eudoxo".

Un poco de humor en torno al tema de la métrica
"Bien que para desajuste, nada mejor que el exhibido en más de una ocasión por ciertos redactores periodísticos que se pintan solos en esto de hallarnos medidas. Y siempre para dar malas noticias, que, según dicen, son las que más venden. Hace unos años, a finales del 79, el diario Ya publicaba un artículo en el que se demostraba que los madrileños apenas cabían en las calles si salían todos a la vez. La demostración consistía en haber calculado que por cada hectárea había 55 habitantes, lo que hacía corresponder a cada habitante 1,8 metros cuadrados. O sea que, para el comentarista, cada hectárea ó hectómetro cuadrado contiene cien metros cuadrado en lugar de diez mil". (Espero que esté recogida, como merece, la formidable colección de gazapos matemáticos que tenía don Javier)

En cuanto a la aproximación
"Ciertamente cuando medimos algo sobre la superficie de la Tierra lo hacemos de una pequeña extensión que no difiere apreciablemente de un trozo de plano. ¿Qué ocurriría si ese trozo lo prolongásemos indefinidamente? Parece claro que el plano que así resultase, salvo casos anómalos, artificialmente buscados, sería precisamente el plano tangente a la superficie de la tierra en el punto desde el que hacemos las mediciones. El procedimiento ha consistido pues en sustituir un trozo de superficie alrededor de un punto por un trozo del plano tangente en ese punto. Luego estamos ante un problema de aproximación local, lineal en este

caso. Así puede explicarse la idea de tangencia que iba a llegar, tras un riguroso estudio en este orden de cosas, a la creación de Newton y Leibniz, anticipada por Fermat, del cálculo diferencial. Los problemas diferenciales no son pues más que un problema de aproximación en los entornos de un punto".

Y ¿cómo concretar?

"He ahí la labor y la alta misión del profesor. Algo le ayudarán, junto a su imprescindible preparación científica, las recomendaciones y consejos didácticos que a continuación encontrará. Pero todavía necesitará sin duda un componente fuerte de ilusión por saber, de entusiasmo por enseñar y de gusto por la ciencia que aprende y enseña: es lo que, con modestia, habría deseado transmitir en las páginas anteriores. Y que con ello conviertan la labor muchas veces ingrata e incomprendida de la enseñanza, también en un arte."

Y termina con una despedida cordial, sincera y bien documentada.

"… acepté y comencé mi trabajo con la natural preocupación por las dificultades que en él preveía y la escasa seguridad que tenía de acertar, la cual, por supuesto, sigo teniendo. Pero, al menos para mí – y ojala que también para alguno de ustedes-, esta meditación, en que durante tantos días he estado sumergido, sobre el espíritu de la ciencia que he venido cultivando, ha sido tan esclarecedora, ilustrativa y grata que no puedo por menos de alegrarme de haberla emprendido. Como en Las Moradas, terminaré con Santa Teresa: "Aun cuando comencé a escribir esto que aquí va, fue con la contradicción que al principio digo, después de acabado, me ha dado mucho contento, y doy por bien empleado el trabajo, aunque confieso que ha sido harto poco".

Referencias bibliográficas

[1] P. Abellanas Cebollero (1979). *Unas reflexiones sobre la biografía de la Matemática*. Gráficas Feijó, Madrid.

[2] J.J. Etayo Miqueo, J.L. García de las Heras, S. Ríos García, S. Ríos Insua, L. A. Santaló y A. Chica (1995). *Enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria.* Ediciones Rialp, Madrid.

[3] J.F. Javalobes Sotot, J.J. Castallanos Sánchez, A. Muñoz Garrosa y M.M. García J.J.; coordinador Bernardo Carrasco (2011). *Educación personalizada: principios, técnicas y recursos*. Editorial Síntesis, Madrid.

De paramétricas a implícita

Julio Castiñeira Merino
juliocmrr@gmail.com

Abstract

This article shows some procedures and formulae for getting the implicit equation of a plane curve if we know theirs parametric equations or its polar equation, using the Eliminant of Sylvester and the Chebyshev polynomials. The implicit equations of the Tchirhausen cubic, Folium Cartesii, Bean Curve, Windmill, Biquartic of Carlos Sacré, Torpedo Curve, Cayley's Sextic, Rhodonea, Brocard's and Habenicht's Clovers, Spiders, Lisssajous's Curves, Epitrochoids, Hypotrochoids, and Basins 2D are obtained.

A la memoria del Profesor
Dr. Javier Etayo Miqueo.

1 Introducción

Una curva plana puede venir dada por sus ecuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \alpha(t) \\ y = \beta(t) \end{array} \right. ,$$

su ecuación polar $\rho = \Phi(\theta)$ o por su ecuación implícita $f(x, y) = 0$. El presente artículo muestra algunos trucos y técnicas para hallar la ecuación implícita de una curva conociendo sus ecuaciones paramétricas o su ecuación polar.

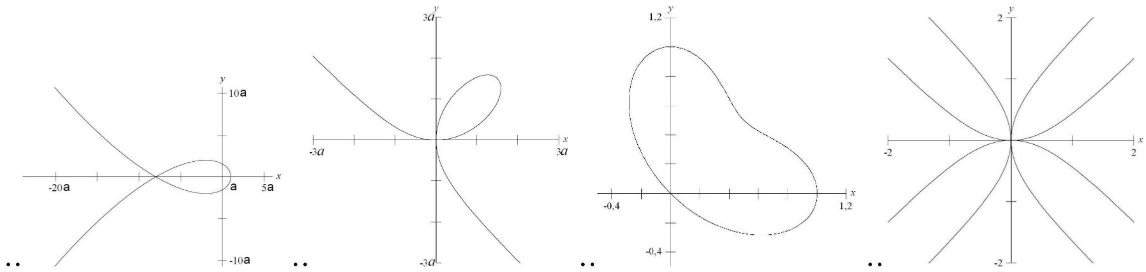

Figura 1: Cúbica de Tschirhausen, Folio de Descartes, Alubia y Molino de Viento.

2 Casos sencillos

A veces podemos despejar el parámetro t en alguna de las ecuaciones paramétricas y expresarlo en función de las variables x e y. La ecuación implícita de la curva se obtiene entonces sustituyendo el parámetro t en la otra ecuación.
Ejemplo Despejando t^2 en la primera ecuación de la *cúbica de Tschirhausen* de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a(1-3t^2) \\ y = at(3-t^2) \end{cases}$$

tenemos $t^2 = \frac{a-x}{3a}$. Sustituyendo en la segunda ecuación y despejando $t = \frac{3y}{x+8a}$. Sustituyendo este valor en la igualdad anterior y operando obtenemos:

$$(x+8a)^2(a-x) = 27ay^2.$$

En algunas curvas es fácil observar la relación $\frac{y}{x} = t$ y la ecuación implícita se obtiene fácilmente por sustitución. En otros casos es conveniente hacer previamente un cambio de variable.

Ejemplos 1-El *Folio de Descartes* de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} \text{ tiene por ecuación implícita } x^3 + y^3 = 3axy$$

2-La *curva alubia* de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = \frac{1+t^3}{(1+t^2)^2} \\ y = \frac{t+t^4}{(1+t^2)^2} \end{cases} \text{ tiene por ecuación implícita } \left(x^2+y^2\right)^2 = x^3 + y^3$$

3-La *curva molino de viento* de ecuación polar $\rho = \tan 2\theta$.

Observando que $\tan\theta = \frac{y}{x}$ y $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ y usando la fórmula de la tangente del ángulo doble tenemos que:

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2-y^2} \Rightarrow (x^2+y^2)\left(x^2-y^2\right)^2 = 4x^2y^2$$

4-La *bicuártica de Carlos Sacré*, de ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \sin 3\theta \cos\theta \\ y = \sin^2 3\theta \sin^2\theta \end{cases}$$

Haciendo el cambio

$$\tan\theta = t, \sin\theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

obtenemos

$$x = \frac{3t-t^3}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Observando que $\frac{y}{x^2} = t^2$ y sustituyendo obtenemos la ecuación implícita

$$\left(x^2+y\right)^4 = y\left(3x^2-y\right)^2.$$

Algunas veces podemos eliminar el ángulo polar usando las relaciones

$$\cos\theta = \tfrac{x}{\rho} \text{ y } \sin\theta = \tfrac{y}{\rho}$$

y después sustituir el radio polar en función de x e y por la relación: $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$.

Ejemplos

1-La *cisoide* $\rho = \frac{2\sin^2\theta}{\cos\theta} \Rightarrow x\rho^2 = 2y^2 \Rightarrow x^3 = y^2(2-x)$.

2-La *curva Torpedo*

$\rho = 2\cos^3\theta - \cos\theta \Rightarrow \rho^4 = x(2x^2-\rho^2) \Rightarrow (x^2+y^2)^2 = x(x^2-y^2)$.

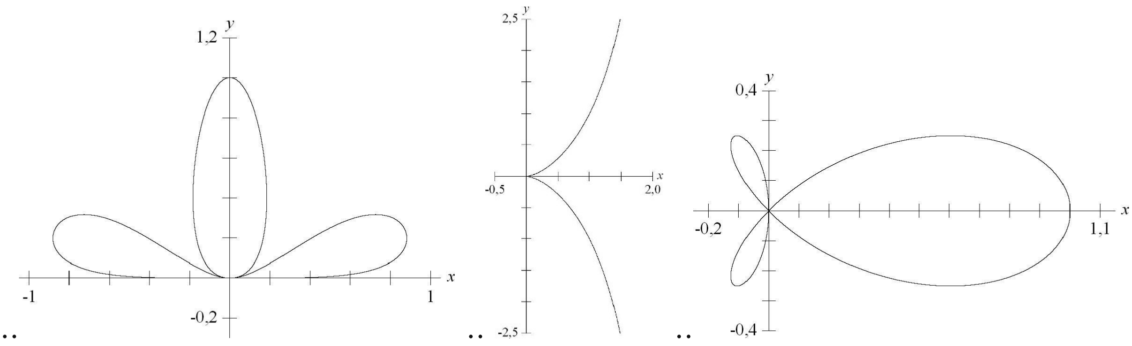

Figura 2: Bicuártica de Carlos Sacré, Cisoide y Curva Torpedo

3 La Resultante de Sylvester

La resultante de dos polinomios $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0$ es el determinante de orden $n+m$ cuya expresión es

$$R_x(p,q) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & ... & ... & a_1 & a_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & ... & ... & a_1 & a_0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-1} & ... & ... & a_1 & a_0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_n & a_{n-1} & ... & ... & a_1 & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & ... & ... & b_1 & b_0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & ... & ... & b_1 & b_0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & b_m & b_{m-1} & ... & ... & b_1 & b_0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & b_m & b_{m-1} & ... & ... & b_1 & b_0 \end{vmatrix}$$

Recordemos, [**?**, pág 23], que dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tienen una raíz común si, y solo si, su resultante $R_x(p,q)$ es nula. Esta propiedad se puede utilizar para eliminar variables como veremos en el siguiente ejemplo. Por esta razón algunos autores llaman eliminante a la resultante [**?**] y [**?**].
Ejemplo Sea la curva

$$\begin{cases} x = 8t^5 - 10t^3 + 3t \\ y = 4t^4 - 4t^2 + 1 \end{cases}$$

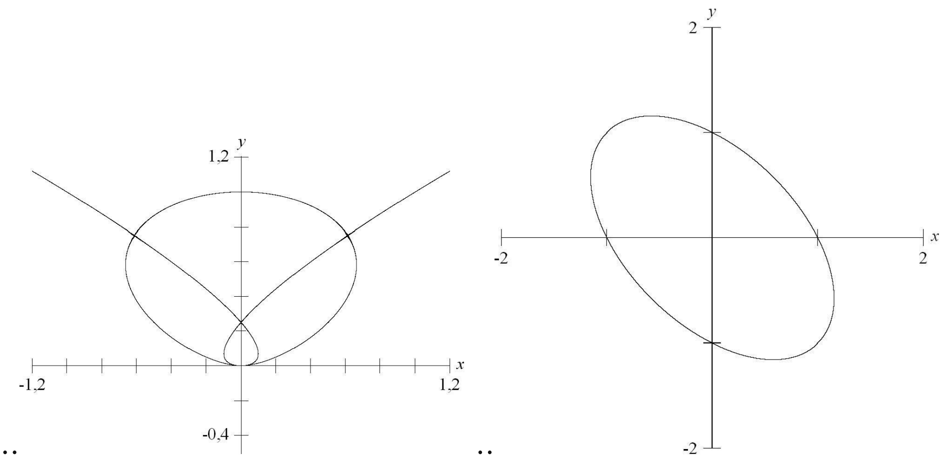

Figura 3: Quíntica de ecuación $4x^4 - 4x^2y = 16y^5 - 24y^4 + 9y^3 - y^2$ y Elipse

La ecuación implícita es

$$R_t(8t^5 - 10t^3 + 3t - x, 4t^4 - 4t^2 + 1 - y) = 0$$

es decir

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & -10 & 0 & 3 & -x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & -10 & 0 & 3 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & -10 & 0 & 3 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & -10 & 0 & 3 & -x \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 1-y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 1-y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 1-y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 1-y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0 & 1-y \end{vmatrix} = 0$$

Operando

$$4x^4 - 4x^2y = 16y^5 - 24y^4 + 9y^3 - y^2.$$

4 Curvas Unicursales

Una curva es *unicursal* [**?**, págs 221-222] si admite una representación paramétrica racional. Por esta razón algunos autores llaman a estas curvas

con el nombre de curvas racionales [?, págs 66-69]. Una curva unicursal es algebraica, es decir, su ecuación implícita es $f(x, y) = 0$ donde f es un polinomio con dos variables. Si conocemos las ecuaciones paramétricas de la curva unicursal, su ecuación implícita puede obtenerse usando la resultante como se muestra en el siguiente ejemplo:
Sea la curva

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1-t^2}{1+t+t^2} \\ y = \frac{t^2+2t}{1+t+t^2} \end{array} \right.$$

Operando

$$\left\{ \begin{array}{l} (x+1)t^2 + xt + x - 1 = 0 \\ (y-1)t^2 + (y-2)t + y = 0 \end{array} \right.$$

Eliminamos el parametro t

$$R_t\left((x+1)t^2 + xt + x - 1, (y-1)t^2 + (y-2)t + y\right) = 0$$

Es decir

$$\left| \begin{array}{cccc} x+1 & x & x-1 & 0 \\ 0 & x+1 & x & x-1 \\ y-1 & y-2 & y & 0 \\ 0 & y-1 & y-2 & y \end{array} \right| = 0$$

Operando y simplificando obtenemos

$$x^2 + y^2 + xy - 1 = 0$$

que es la ecuación implícita de la *elipse* de centro el origen de coordenadas, focos los puntos de coordenadas $\left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ y semieje mayor $a = \sqrt{2}$.

5 Deltoide

La curva de cuaciones paramétricas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 2a\cos^2\theta + 2a\cos\theta - a \\ y = 2a\sin\theta - 2a\sin\theta cos\theta \end{array} \right.$$

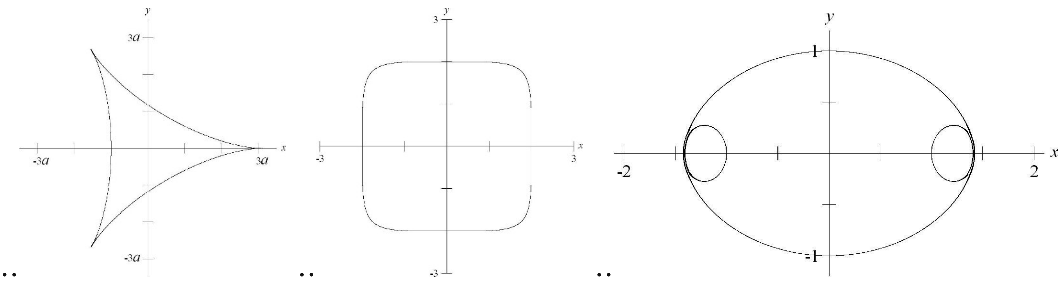

Figura 4: Deltoide, Curva Cuadrado y Cornoide

se llama *deltoide* porque su forma es la de la letra griega mayúscula llamada delta. El cambio de variable $t = \tan \frac{\theta}{2}$, junto a las fórmulas

$$\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2} \text{ y } \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Nos permiten expresar la deltoide como una curva unicursal

$$\begin{cases} x = \frac{-a(t^4+6t^2-3)}{(t^2+1)^2} \\ y = \frac{8at^3}{(t^2+1)^2} \end{cases}$$

Expresando este sistema como polinomios de la indeterminada t

$$\begin{cases} (x+a)t^4 + (2x+6a)t^2 + x - 3a = 0 \\ yt^4 - 8at^3 + 2yt^2 + y = 0 \end{cases}$$

La ecuación implícita es:

$$R_t\left((x+a)t^4 + (2x+6a)t^2 + x - 3a, yt^4 - 8at^3 + 2yt^2 + y\right) = 0$$

Simplificando

$$\left(x^2 + y^2 + 9a^2\right)^2 - 108a^4 = 8ax\left(x^2 - 3y^2\right).$$

6 Curva Cuadrado y Cornoide

La curva de cuaciones paramétricas

$$x = 3\sin t - \sin^3 t\ ,\ \ y = 3\cos t - \cos^3 t$$

se llama *curva cuadrado* por su forma. El cambio realizado en el apartado anterior nos permite después de calcular un determinante de orden 12 hallar su ecuación implícita. El siguiente truco nos permite reducir el orden del determinante. Calculemos el cuadrado del radio vector

$$\rho^2 = x^2 + y^2 = 4 + 9\cos^2 t - 9\cos^4 t$$

Haciendo el cambio $z = \cos t$ tenemos el sistema

$$\begin{cases} z^3 - 3z + y = 0 \\ 9z^4 - 9z^2 + x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

Cuya resultante es el determinante de orden 7:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & y \\ 9 & 0 & -9 & 0 & x^2+y^2-4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -9 & 0 & x^2+y^2-4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -9 & 0 & x^2+y^2-4 \end{vmatrix} = 0$$

Operando y simplificando tenemos

$$\left(x^2 + y^2\right)^3 + 96\left(x^2 + y^2\right)^2 + 2100\left(x^2 + y^2\right) - 10000 = 729x^2y^2$$

Un proceso análogo podemos hacer con la *cornoide* de ecuaciones paramétricas

$$x = (2\cos^2 t + 1)\sin t\ ,\ \ y = 2\cos^3 t - \cos t$$

cuya ecuación implícita es:

$$(x^2 + y^2 - 1)^3 = 2x^4 - 6y^4 - 5x^2 + 3y^2 + 3$$

(continuará en el siguiente número del Boletín)

Reseña de libros

BALDOMERO RUBIO*: Actividades Matemáticas y Juegos con Miguel y Lucía.*
ISBN: 978-84-934918-5-7. Depósito Legal: M-39505-2012. Páginas: 171. Vnet Distribuciones. C/. Magnolias, 35 bis 28029 Madrid. Telf 91 311 96 06. Pedidos: pedidos@visionnet.es

El autor, conocido y estimado por muchas generaciones de matemáticos formados en la Univ. Complutense de Madrid, fue Decano y posteriormente Catedrático Emérito de Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias Matemáticas de dicha Universidad.

Este nuevo libro suyo ofrece una introducción a la aritmética para chicos a partir de los ocho años. Para hacer este aprendizaje agradable y sencillo se apoya en juegos, experimentos, problemas estimulantes, escenas de aprendizaje… Las operaciones aritméticas son convertidas en actividades con material que puede construirse en casa.

Hace uso simultáneamente de las representaciones decimal y binaria de los números naturales (la aritmética binaria puede ser mas sencilla para dividir, por ejemplo). Después se tratan los números racionales positivos y finalmente los enteros y su aritmética.

Los enteros y el papel cuadriculado son utilizados para introducir las coordenadas en el plano. Y dichas coordenadas son usadas como referencia y aproximación al continuo en Geometría y Física.

Se avanzan contenidos tales como Combinatoria, Probabilidad, Magnitudes y Proporcionalidad, pensando en la adolescencia e incluso en personas mayores que deseen alcanzar un cierto nivel matemático, para el que no tuvieron ocasión anteriormente.

El libro está dedicado a su entrañable amigo Miguel de Guzmán (coautor suyo de varios textos universitarios) y al también profesor universitario de matemáticas y periodista argentino Adrián Paeza, apasionado de la educación matemática y autor de libros de éxito para extender la cultura matemática.

También está dedicado a Miguel y Lucía, dos de los chicos del grupo de personas con los que experimentó contenidos del libro.

E. Roanes Macías

RICARDO MORENO CASTILLO: *Historia de la teoría elemental de números.*
ISBN: 978-84-92493-98-2. Depósito Legal: M-10087-2013. Páginas: 192. Editorial Nivola, Madrid.

El autor es catedrático de instituto desde 1975 y en la actualidad está jubilado. Durante los últimos dieciocho años de su vida profesional fue también profesor asociado en la Universidad Complutense de Madrid, donde impartió, entre otras asignaturas, la de Historia de la Matemática.

Este nuevo libro suyo es un intento de explicar la teoría de números, la reina de las matemáticas según Gauss, presentando su desarrollo histórico, quizá la manera más atractiva de acercarse a la ciencia.

El orden de exposición de los temas es el cronológico, como corresponde en un libro de historia, pero ha sido alterado cuando ha parecido conveniente: si un descubrimiento de Euler, por ejemplo, mejora uno de Diofanto, no se ha esperado al capítulo dedicado al siglo XVIII para contarlo. Y la notación, por supuesto, es la actual.

El primer capítulo trata de la tablilla Plimton y las ternas pitagóricas, y los cuatro siguientes de la teoría de números en Grecia: desde Pitágoras hasta Diofanto. A continuación vienen otros cuatro que tratan de las aportaciones hechas durante la Edad Media: las debidas a los chinos, los hindúes y los árabes. A las pruebas del nueve, once y siete, a caballo entre la cultura hindú y la árabe, se les dedica un capítulo aparte.

Los tres últimos capítulos tratan de los descubrimientos que tuvieron lugar en los siglos XVII, XVIII y XIX, centrados en las figuras de Fermat, Euler y Gauss respectivamente.

Algunos teoremas se demuestran y otros, más complejos, tan solo se enuncian y se aclaran mediante ejemplos. Se ha hecho así porque este libro no pretende sustituir a ninguno de los buenos tratados que sobre teoría de números circulan hoy día por las facultades de matemáticas, pero sí ser una introducción a cualquiera de ellos.

La teoría elemental de números tiene la enorme ventaja de que no requiere una gran erudición previa y cualquiera puede acercarse a ella sin más bagaje que las matemáticas del bachillerato e incluso, sin necesidad de pasar del nivel de aficionado, se pueden hacer aportaciones.

E. Roanes Macías

DEBORAH J. RUMSEY: *Estadística para dummies.* Traducción de Alfredo García Espada. ISBN: 978-84-329-0157-7. Depósito Legal: B-17060-2013. Páginas: 420. Centro Libros PAPF. Grupo Planeta, Barcelona.

La autora es profesora del Departamento de Estadística de la Universidad de Ohio State y miembro de la Sociedad de Estadística estadounidense. Ha sido premiada con el Presidencial Teaching Award de la Universidad de Kansas State, por su excelente trabajo pedagógico y divulgativo en el ámbito de la Estadística. Además, su nombre figura en el muro de la inspiración del centro de enseñanza secundaria donde estudió, en Wisconsin.

Es autora de otros libros de Estadística y Probabilidad (para "dummies") y de numerosos artículos y ponencias en congresos sobre enseñanza de la Estadística. Y miembro del comité organizador del Congreso bienal estadounidense sobre enseñanza de la Estadística.

El libro se divide en cinco partes, que tratan sobre las principales áreas indispensables para entender la estadística básica:

1) Introducción al diseño de experimentos, recopilación de datos y extracción de conclusiones fiables;
2) Nociones de cálculo numérico: medias, medianas, desviaciones,… y su representación gráfica;
3) Distribuciones binomial, normal, t de Student,.. y el teorema central del límite;
4) Estimaciones aproximadas y formulación de hipótesis fiables;
5) Encuestas, experimentos, regresión, correlación y tablas de contingencia.

Está orientado a lectores con una formación matemática mínima, que deseen o necesiten manejar en la práctica los conceptos estadísticos esenciales, mediante explicaciones sencillas y claras. Está repleto de ejemplos reales tomados de la vida cotidiana, muchos de ellos expuestos con mucho sentido del humor.

Se evita toda demostración, en sentido matemático, propia de un tratado de estadística matemática y se plantea como una enciclopedia de estadística práctica, tratando de que el lector pueda entender y llegar a manejar los cálculos estadísticos esenciales.

La autora pretende, y consigue magistralmente, enseñar a manejar las herramientas estadísticas esenciales, de modo similar a cómo en una academia de conducción se puede enseñar a manejar un automóvil de turismo, sin tener idea de cómo funciona lo que hay dentro del capó del motor.

E. Roanes Macías

Nuevo número de la revista científica "Todo Ciencia"

En el número 83 de nuestro Boletín anunciábamos la aparición del primer número del periódico científico "Todo Ciencia", que coordina nuestro consocio el profesor Miguel Ángel Queiruga y aborda distintos temas de actualidad científica y tecnológica, siendo sus alumnos quienes hacen de reporteros, redactores, etc.

Aunque se trata de una revista de divulgación de ciencias en general, el número 5 de junio 2013 incluye un capítulo titulado Gaceta Matemática, conteniendo varios apartados, presentado de modo asequible a alumnos de ESO, como: Simetrías, Fotografía matemática, Criptografía, Historia de un círculo, Importancia de las matemáticas,….

Los profesores interesados en dicha publicación pueden conseguirla gratuitamente a través de Miguel Angel Queiruga, cuyo correo electrónico es queiruga@inicia.es

XXVI Congreso ENCIGA

Nuestros colegas de la Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia organizan su congreso anual a celebrar en Ourense los días 21 al 23 de noviembre de 2013. Para mas información e inscripción en el Congreso, véase la página web: www.enciga.org

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm (exactamente como este archivo). El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` ,o bien en un disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pediráa los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94 y 95

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número

3025-0006-24-1400002948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia.*