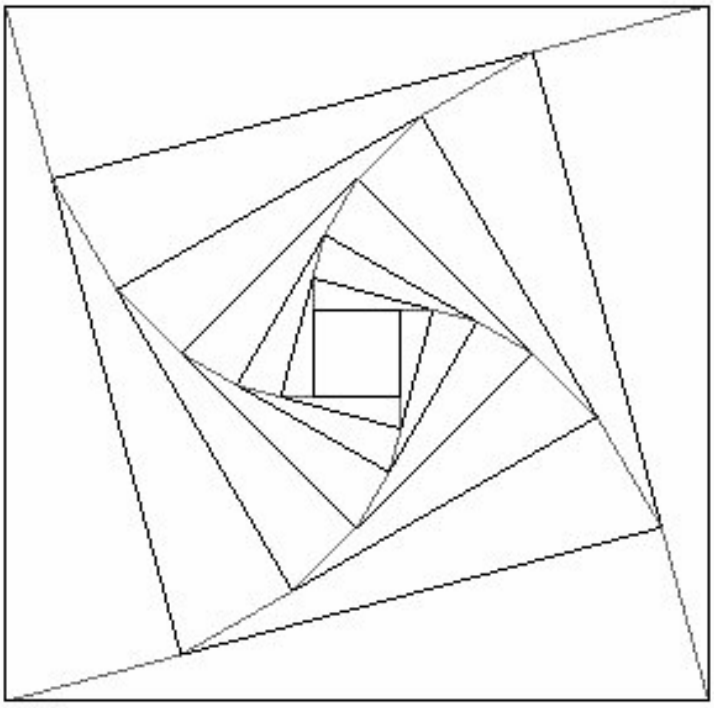
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 94
JUNIO DE 2013

Número especial dedicado al Profesor José Javier Etayo Miqueo

ÍNDICE

Págs.

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2013 ……..... 4

XVII Concurso de Primavera de Matemáticas,
por *Esteban Serrano Marugán* …….. 6

Fase Final de la XLIX Olimpíada Matemática Española (OME),
por *Joaquín Hernández* 8

Problemas propuestos en la Fase Final de la XLIX OME …..…… 10

Fallecimiento de Angel Martínez Losada 11

En torno a los números perfectos,
por *José María Montesinos Amilibia* 12

Cuadrangulando polígonos
por *Gregorio Hernández Peñalver* 29

Extending The Jagged-Boundary Edge Problem to Angles,
por *Antonio R. Quesada* 44

Dificultades encontradas al demostrar vía algebraica algunos teoremas de geometría euclídea,
por *E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano* 55

Cuadros con sabor matemático,
por *Javier Peralta* 70

Reseña de libros 92

Instrucciones para el envío de originales 94

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín 95

Boletín de inscripción 96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen ahora en "MathEduc", es decir, en lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre.

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad "Puig Adam":
`http://www.sociedadpuigadam.es`

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JAVIER PERALTA CORONADO
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)
JUAN JESÚS DONAIRE MORENO	(Redacción de Publicaciones)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2013 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 6 de abril de 2013, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil trece.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea de 14 de abril de 2012, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

El Presidente informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 91, 92 y 93 del Boletín. Uno de ellos dedicado a la memoria del Expresidente de la Sociedad José Javier Etayo Miqueo. También informa de los concursos "Puig Adam", Intercentros y de la fase regional de la Olimpíada Matemática, resaltando que algunos de los miembros de la Junta Directiva, no han podido asistir por estar en la fase final de la Olimpíada, que se celebra en Bilbao.

XXX Concurso "Puig Adam". Se celebró el 9 de junio de 2012, con buena participación, 108 estudiantes. Los resultados se publicaron en el Boletín 92. Este año el XXXI Concurso Puig Adam se celebrará el 8 junio.

XII Concurso Intercentros. Al igual que otros años se celebró el penúltimo sábado de noviembre en la Facultad de Matemáticas de la UCM, con una buena participación de 75 equipos y 440 estudiantes de nuestra Comunidad. En el Boletín nº 93 aparece una reseña de resultados del Concurso.

Fase Local de la XLIX OME. En el Boletín nº 93 aparecen la Reseña y los problemas propuestos en la Fase Local de la XLIX Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid.

Concurso de Primavera. El próximo sábado 20 de abril se celebrará el XVII Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, este año con una participación en la 1ª Fase, en los Centros, de 39134 alumnos, y más de 3930 alumnos en la 2ª Fase, celebrada en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Hay que destacar que algunos miembros del equipo organizador del Concurso son miembros de nuestra Sociedad.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, por enfermedad no puede asistir a la Asamblea General y es el Presidente el que reparte, entre los asistentes, la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Se someten a aprobación las cuentas desde el 15 de abril de 2012 hasta el 4 de abril de 2013. Pasando a la votación quedan aprobadas por unanimidad.

El presidente propone mantener la cuota y la nueva fecha de cobro. Pasando a la votación se decide mantenerlas por unanimidad.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

El Presidente manifiesta que procede nombrar a un nuevo Vicepresidente, en sustitución del fallecido Juan Bosco Romero Márquez, y un nuevo Vocal de Redacción de Publicaciones, en sustitución del fallecido Julio Fernández Biarge. Se pasa a la elección de estos cargos, con el siguiente resultado:

Vicepresidente: *Javier Peralta Coronado*

Vocal de Redacción de Publicaciones: *Juan Jesús Donaire Moreno*

5. Asuntos de trámite.

El presidente propone que se publique un número del Boletín en homenaje al profesor Julio Fernández Biarge, que fue Presidente de la sociedad. La Asamblea aprueba la propuesta por unanimidad.

6. Ruegos y preguntas: No hay

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce y treinta y cinco minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente El Secretario

XVII Concurso de Primavera de Matemáticas

La primavera ha venido.
Nadie sabe cómo ha sido.

Antonio Machado cantaba de esta manera a la Primavera... *Nubes, sol, prado verde y caserío en la loma*. Los jóvenes madrileños cuentan ya con otra señal inequívoca de que la primavera ha venido. Es su concurso de matemáticas.

Son ya diecisiete ediciones del Concurso de Primavera de Matemáticas, la gran fiesta de las matemáticas en la Comunidad de Madrid.

En la primera fase de esta edición participaron 39.134 estudiantes de 448 centros educativos de la Comunidad de Madrid. La segunda fase, celebrada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid el sábado 20 de Abril, congregó a 3495 alumnos. Hay que detenerse un momento y repasar este dato: 3500 adolescentes con sus padres, profesores y abuelos, llenando ¡un sábado por la mañana! la Facultad de Matemáticas. ¡Guirigay! ¡¡¡A resolver veinticinco problemas!!!

Como siempre, queremos agradecer a profesores, padres, y entidades colaboradoras, el esfuerzo que hacéis para que todo este follón siga adelante. Y a vosotros, "primaveros", chicos y chicas que participáis año tras año, ¿qué deciros?, pues que sois el viento que mueve las aspas del Concurso de Primavera y por eso ya estamos preparando nuevos problemas para el próximo año. No descansamos porque nos gusta y ya sentimos la brisa.

De regalo, un problema de esta edición:

-¡Julián, te he dicho mil veces que hagas tu cama! le dice su madre muy enfadada.
-¡Pero si solo llevo levantado ocho minutos! No te ha dado tiempo a decirlo tantas veces.
-¡Anda que no! Y voy a seguir a este ritmo hasta que la hagas.
Si Julián tardó una hora y media en ponerse a hacer la cama, ¿cuántas veces repitió su madre que la hiciera?

A) 250 B) 5600 C) 10500 D) 11250 E) 90000

Los tres primeros clasificados por niveles han sido:

PRIMER NIVEL (5º y 6º de Primaria)

1. Pablo Soto Martín. 6º, CEIP Miguel de Cervantes, Tres Cantos

1. Lucas Cuesta Araújo. 6º, CEIP La Latina, Madrid.

2. Víctor David Sánchez González.. 5º, CP Andrés Segovia, Ciempozuelos

SEGUNDO NIVEL (1º y 2º ESO)

1. Alejandro Epelde Blanco. 1º ESO, Montessori School, Alpedrete

2. Pablo del Olmo de Casas. 2º ESO, IES Las Canteras, Collado Villalba

3. Saúl Rodríguez Martín. 2º ESO, Colegio Villa de Griñón, Griñón

TERCER NIVEL (3º y 4º ESO)

1. Berta García González. 3º ESO, IES San Juan Bautista, Madrid

2. Ismael Sierra del Río. 4º ESO, Colegio San Juan Bautista, Madrid

3. Marc Isern Hacker. 4º ESO, Colegio Alemán, Madrid

CUARTO NIVEL (1º y 2º Bachillerato)

1. Raúl González Molina. 2º Bach, IES San Mateo, Madrid

1. Pablo Esteban de la Iglesia. 2º Bach, Colegio Fray Luis de León, Madrid

2. Miguel Barrero Santamaría. 2º Bach, IES Alameda de Osuna, Madrid

Las nubes iban pasando
sobre el campo juvenil...

Esteban Serrano Marugán
Miembro del Comité Organizador del
Concurso de Primavera de Matemáticas

XLIX Olimpíada Matemática Española
Fase Final

El Concurso Final de la XLIX Olimpiada Matemática Española se ha celebrado en Bilbao, entre los días 4 y 7 del pasado mes de abril. Fueron 77 los estudiantes que, previamente seleccionados en sus respectivas Comunidades Autónomas, se enfrentaron a los seis problemas de este año, en las dos tradicionales sesiones de tres horas y media cada una, al tiempo que disfrutaron de las actividades que para ellos habían preparado los organizadores de esta edición: Pedro Alegría, Jesús Gómez, Carlos Gorria y Josu Sangróniz.

Los nombres de los 36 estudiantes que recibieron medalla (6 de oro, 12 de plata y 18 de bronce) se dieron a conocer en el acto de entrega de premios, celebrado en la tarde del sábado 6 de abril en el Paraninfo de la UPV. Han sido los siguientes:

Medalla de Oro

Marc Felipe Alsina (Cataluña)
Pau Surrell Rafart (Cataluña)
Marcos García Fierro (Castilla y León)
Raúl González Molina (Madrid)
Félix A. Gimeno Gil (Andalucía)
Ismael Sierra del Río (Madrid)

Medalla de Plata

Miguel Barrero Santamaría (Madrid)
Gonzalo Cao Labora (Galicia)
Antonio Hidalgo Tomé (Andalucía)
Gerard orriols Giménez (Cataluña)
Pablo Esteban de la Iglesia (Madrid)
Daniel Lugosi Enes (Cataluña)
Esteban Gomezllata Marmolejo (País Vasco)
Raúl Alonso Rodríguez (Galicia)
Luis Crespo Ruiz (Cantabria)
Darío de la Fuente García (Asturias)
Fernando Javier Gómez-Rojí Cruzado (Murcia)
Damià Torres Latorre (Comunidad Valenciana)

Medalla de Bronce

Eduard Gonzalvo Gelabert (Cataluña)
Ignacio Mas Mesa (Asturias)
Juan Gabriel Alonso Guzmán (Canarias)
Marc Isern Hacker (Madrid)

Ismael Medina Suárez (Extremadura)
Daniel Nieves Roldán (Comunidad Valenciana)
Yuan Yuan Wang (País Vasco)
Saturio Carbonell Urturia (La Rioja)
Antonio Flórez Gutiérrez (Castilla y León)
Carlos García Ling (Galicia)
Pablo Gómez Nicolás (Cantabria)
Efrén Honrubia López (Castilla-La Mancha)
Juan Antonio Márquez León (Melilla)
Raúl Cabezas Rodríguez (Asturias)
Miguel Camarasa Buades (Comunidad Valenciana)
Miguel Benito Parejo (Castilla y León)
Pablo Gómez Pérez (Madrid)

Entre ellos, los seis ganadores de Medalla de Oro constituyen el equipo que representará a España en la 54 Olimpiada Internacional, que se celebrará en Santa Marta (Colombia) en la segunda quincena del próximo mes de julio. Como novedad, este año un equipo español, formado, según el reglamento, por dos chicos y dos chicas, participará en Roma en la primera edición de una competición mediterránea de nueva creación: la Mediterranean Youth Mathematical Competition.

Como se puede observar, nuestros estudiantes de Madrid han vuelto a obtener un magnífico resultado: de los 9 participantes, de un total de 77, ha habido 7 entre los 36 con medalla y 2 entre las 6 medallas de oro. Este resultado es consecuencia, fundamentalmente, de la labor totalmente desinteresada que los antiguos olímpicos llevan a cabo: todas las mañanas de los sábados desde el mes de noviembre acuden a la Facultad de Matemáticas de UCM para trabajar problemas con los estudiantes que lo deseen, que suelen ser los que luego ganan la Olimpiada en la Comunidad de Madrid. Desde aquí, nuestro infinito agradecimiento a Moisés Herradón, Lorenzo Esteban de la Iglesia, David Alfaya, Jaime Mendizábal y a todos los que otros años han llevado a cabo esta labor.

Joaquín Hernández Gómez
Delegado de Madrid en la Fase nacional de la OME

Problemas propuestos en la Fase Final de la XLIX Olimpiada Matemática Española

Concurso Final, 5 y 6 de abril de 2013. Bilbao

Problema 1

Sean *a, b* y *n* enteros positivos tales que $a > b$ y $ab - 1 = n^2$. Prueba que $a - b \geq \sqrt{4n-3}$. Indica justificadamente cuándo se alcanza la igualdad.

Problema 2

Determina todos los enteros positivos *n*, para los cuales $S_n = x^n + y^n + z^n$ es constante, cualesquiera que sean *x, y, z* reales tales que $xyz = 1$ y $x + y + z = 0$.

Problema 3

Sean *k* y *n* enteros, con $n \geq k \geq 3$. Se consideran $n + 1$ puntos en el plano, no alineados entre sí tres a tres. A cada segmento que une entre sí dos de estos puntos se le asigna un color de entre *k* colores dados.
Se dice que un ángulo es bicolor si tiene por vértice uno de los $n + 1$ puntos, y por lados, dos de los segmentos anteriores que sean de distinto color.
Demuestra que existe una coloración tal que el número de ángulos bicolores es estrictamente mayor que $n\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor^2 \binom{k}{2}$.

Nota: se denota por $\lfloor t \rfloor$ la parte entera del número real *t*, es decir, el mayor entero $n \leq t$.

Problema 4

¿Existen infinitos enteros positivos que no pueden representarse de la forma

$$a^3 + b^5 + c^7 + d^9 + e^{11},$$

donde *a, b, c, d, e* son enteros positivos? Razónese la respuesta.

Problema 5

Estudia si existe una sucesión estrictamente creciente de enteros $0 = a_0 < a_1 < a_2 < ....., $ que cumple las dos condiciones siguientes:

i) Todo número natural puede ser escrito como suma de dos términos, no necesariamente distintos, de la sucesión.

ii) Para cada entero positivo *n*, se cumple que $a_n > \frac{n^2}{16}$.

Problema 6

Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo tal que

$$|AB| + |CD| = \sqrt{2}|AC| \quad \textbf{y} \quad |BD| + |DA| = \sqrt{2}|BD.|$$

¿Qué forma tiene ese cuadrilátero?

Fallecimiento de Ángel Martínez Losada

Con profundo pesar, comunicamos a nuestros socios y lectores el fallecimiento el pasado mes de abril de nuestro querido compañero el Profesor Ángel Martínez Losada, uno de los socios fundadores de nuestra Sociedad, en la que colaboró activamente mientras su salud se lo permitió.

Fue catedrático de Instituto de Bachillerato y Profesor de la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Univ. Complutense, donde impartió varias asignaturas en los Departamentos de Análisis Matemático y de Algebra.

Descanse en paz.

La Junta Directiva

En torno a los números perfectos

José María Montesinos Amilibia
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense
montesin@mat.ucm.es

Abstract

Un programa como Mathematica7 de Wolfram, es como un telescopio para un astrónomo: cada vez que la potencia del telescopio aumenta, se ven más cosas. Con Mathematica pasa lo mismo, y, como con el firmamento, lo que vemos es cada vez más difícil de comprender.

En homenaje de agradecimiento
a Don José Javier Etayo Miqueo.

Introducción

Un programa como Mathematica7 de Wolfram, es como un telescopio para un astrónomo: cada vez que la potencia del telescopio aumenta, se ven más cosas. Con Mathematica pasa lo mismo, y, como con el firmamento, lo que vemos es cada vez más difícil de comprender.

Sirvan los siguientes juegos como homenaje de gratitud a mi maestro, colega y amigo Don José Javier Etayo Miqueo.

El libro de Guy sobre números y problemas es la referencia a este artículo, del que todo es bien conocido, salvo un par de preguntas, creo.

Al lector le recomiendo lo lea empleando Mathematica7. Si sigue las instrucciones que doy, podrá aprender Mathematica7 y a la vez quedarse mudo ante la potencia de los actuales ordenadores.

1 La singladura de un numero

Tomemos un número entero mayor que 1, que denominaremos N. Por ejemplo, $N = 2013$, el año en curso. La suma de los divisores propios de N es un nuevo número entero ≥ 1, que llamaremos *espectro* de N y denotaremos por $s(N)$. Como los divisores propios de $N = 2013$ son $1, 3, 11, 61, 33, 183, 671$, el espectro de $N = 2013$ es 963.

Hay un modo sencillo de calcular el espectro $s(N)$ de un número N. Para ello es mejor introducir la función $\sigma(N) = s(N) + N$ que es la suma de los divisores de N. Como

$$\sigma(p^m) = 1 + p + p^2 + ... + p^m = \frac{p^{m+1} - 1}{p - 1},$$

si p es primo, y $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ si $mcd(a, b) = 1$, tenemos una sencilla fórmula para el cálculo. En particular, si p es primo y no divide a b, tendremos

$$s(pb) = \sigma(pb) - pb = b + (1 + p)s(b)$$

La siguiente orden de Mathematica7 calcula $s(N)$. (Por razones prácticas se define $s(1) = 1$):

```
s[N_] := If[N == 1, 1, DivisorSigma[1, N] - N]
```

Unamos todo número entero $N > 1$ con su espectro $s(N)$, mediante una flecha cuya punta esté en $s(N)$. Diré que N *fluye* a $s(N)$. Los números primos, como el 2011, tienen todos el mismo espectro, 1, que no consideramos aquí. La reunión de todos los enteros mayores que 1 y sus flechas forman como un gran sistema fluvial (un grafo orientado especial) pues de cada número, exceptuados los primos, emana una sola flecha. Por ejemplo, si tomamos el número $N = 2013$, su *singladura* a lo largo de este sistema fluvial es

$$2013, 963, 441, 300, 568, 512, 511, 81, 40, 50, 43.$$

Aquí, cada número es el espectro del anterior. El número 43 es primo, y es ahí donde acaba la singladura de 2013. Diremos que 43 es un *sumidero.* Y, como exceptuados los primos, cada número es origen de una flecha, vemos que *los números primos son exactamente los sumideros del sistema fluvial.* Y como un número es suma de números de un número finito de maneras, vemos

que *a un número dado sólo llegan un número finito de flechas* (el grafo es localmente finito).

Puede ocurrir que a un número no llegue ninguna flecha (sería una *fuente*). El número 5 es una fuente (y un sumidero, por ser primo). Es muy posible que 5 sea la única fuente impar. Esto está relacionado con la famosa *conjetura de Goldbach*, todavía abierta, quien sospechó que *todo par mayor que* 2 *es suma de dos primos*. Notamos que 4 y 6 son suma de dos primos *iguales*. Supongamos que sea cierta la conjetura siguiente, más fuerte que la de Goldbach:

Conjetura. *Todo par mayor que* 6 *es suma de dos primos distintos.*

Entonces la única fuente impar es 5. En efecto, 3 no es fuente porque $s(4) = 3$, y 7 no es fuente porque $s(8) = 7$. Y si $N = 2m + 1 > 7$, entonces $2m = p+q$, donde p y q son primos distintos, y entonces $s(pq) = 1+p+q = N$. Luego tal N no es tampoco fuente.

Las primeras ocho fuentes son:

$$2, 5, 52, 88, 96, 120, 124, 146.$$

Más todavía, sea $2m + 1 > 7$ y $2m = p + q$, donde $p > q$ son primos. Sea $N = pq$. Entonces $s(N) = 2m + 1$, donde N es impar $> 2m + 1 > 7$. Luego N, cuyo espectro es $2m + 1$, fluye de otro impar mayor que él, y así sucesivamente. Hemos pues demostrado que, si la conjetura es cierta, todo impar $I > 7$ tiene una infinidad de antepasados impares que forman una singladura decreciente sin fuente. Diré que I *pertenece a una singladura sin fuente.*

Sabemos que 5 es sumidero y fuente. ¿Qué ocurre con 3 y 7? Observemos que si $n-1$ es primo, entonces $s((n-1)^2) = n$. Como $8-1$ es primo, 49 fluye a 8, el cual fluye a 7. Luego 7 es el sumidero de una singladura sin fuente. Lo mismo ocurre con 3, porque $4 - 1$ es primo.

Resumiendo: *si la conjetura es cierta, todo impar, salvo el* 5, *pertenece a una singladura sin fuente.*

¿Procede todo número de una fuente? ¿Qué números son fuentes? ¿Hay sucesiones arbitrariamente grandes de números pares consecutivos que son fuentes? El libro de Guy está lleno de preguntas como éstas de las que apenas sabemos nada.

2 Remolinos y singladuras eternas

Hemos investigado, hasta ahora, el "pasado" de los números impares y las singladuras de unos pocos números, entre ellos el 2013. Veamos las singladuras de unos pocos más que pueden calcularse con Mathematica7, como sigue:

```
singl[N_, l_] := FixedPointList[s, N, l]
```

Esta función se detiene automáticamente cuando encuentra un punto fijo. Por ejemplo, a la orden "`singl[6, 10]`" Mathematica responde "`{6, 6}`", porque la singladura de 6 es periódica.

Así, por ejemplo, pidiendo "`singl[2010, 10]`" obtenemos los 10 primeros términos de la singladura de 2010. El programa responde:

$$2886, 3498, 4278, 4938, 4950, 9558, 12222, 18354, 27726, 27738.$$

Y si calculamos más, veríamos que los números de la singladura de 2013 parecen crecer rápidamente.

Si tomamos $p = 828$ y pedimos "`singl[828, 14]`" obtendremos los primeros 14 términos de la singladura de 828:

$$828, 1356, 1836, 3204, 4986, 5856, 9768, 17592,$$
$$26448, 47952, 94586, 47296, 46684, 42524.$$

Se observa que todos los términos son pares y que los términos que ocupan los lugares 12, 13 y 14 tienen espectros menores. Los demás términos los tienen mayores.

El término 231 de la singladura de 828 es

$$884213363465017093729119344049881203488725062076923 20$$

y, entre el primer término y éste, los términos que ocupan los lugares

$$12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 70, 71, 72,$$
$$82, 83, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 102, 104,$$

tienen un espectro menor.

Vemos que los números de la singladura de 828 parecen crecer rápidamente, y bien puede suceder o que ningún número se repita nunca, y así es *eviterna* (no tiene fin), o bien puede suceder que algún número de la lista sea impar y primo y la singladura acabe en el acto, o que la singladura, por decirlo así, sea capturada por un remolino, una sucesión periódica de números, y permanezca allí dando vueltas y vueltas eternamente. Por ejemplo, la singladura de 2008 es esta:

$$2008, 1772, 1336, 1184, 1210, 1184, 1210, 1184, 1210, 1184, 1210, ...$$

que acaba en el remolino $1184, 1210$. Esto, pensando como en sistemas dinámicos, es un ciclo que consta de dos miembros llamados *amigos* desde antiguo.

Este par de amigos tiene una curiosa historia. Fueron descubiertos por Nicolás Paganini en 1866 cuando tenía 16 años, aunque no repararon en su existencia matemáticos tan ilustres como Fermat, Descartes, Euler y Legendre, quienes conocían amigos tan grandes como el par $9363584, 9437056$. Los amigos más pequeños son $220, 284$. Desconocemos si existen amigos de distinta paridad, o si existen amigos primos entre sí, y ni siquiera si existen infinitos amigos. La primera pareja de amigos impares, no múltiplos de 3, es m, n, donde

$$\begin{aligned} m &= a \times 140453 \times 85857199 \\ n &= a \times 56009 \times 214955207 \\ a &= 5^4 \times 7^3 \times 11^3 \times 13^2 \times 17^2 \times 19 \times 61^2 \times 97 \times 307. \end{aligned}$$

Si el remolino tiene más de dos números, como ocurre con la singladura de 9464 que es

$$9464, 12496, 14288, 15472, 14536, 14264, 12496, ...$$

y que acaba en un remolino de cinco números, decimos que éstos son números *asociados* (de período 5 en este caso). Desconocemos si hay remolinos de período 3, ni si hay remolinos de periodo mayor que un número fijado, ni siquiera si hay infinitos remolinos.

La singladura de 1998 parece eviterna, pero no sé cómo pueda probarse eso. Por cierto, como 1997 es primo, 1997^2 fluye a 1998 y, siendo 1997^2 impar, hay muchas probabilidades de que 1998 sea miembro de una singladura *eterna* (en su pasado y en su futuro).

3 Numeros perfectos

Hay un caso extremo, a saber, que el remolino conste de un sólo número, como con la singladura de 25 que es $\{25, 6, 6, ...\}$ que queda atrapada por el número 6, llamado *perfecto*, como todos los demás con idéntica propiedad.

Eu(clides + ler) demostraron que un par perfecto tiene necesariamente la forma $F_m = (-1 + 2^m)2^{m-1}$ donde $P_m = (-1 + 2^m)$ es primo, llamado *primo de Mersenne* en su honor, por haber probado que P_m es primo para los valores

$$m = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31.$$

Y son perfectos los correspondientes números que obtenemos con esta orden de Mathematica7:

"`DeleteCases[ Table[If[PrimeQ[(-1 + 2^m)],`
`{m, (-1 + 2^m) 2^(m - 1)}, {}], {m, 1, 31}], {}]`"

$$\{m,\ (-1\ +\ 2^m)\ 2^{(m\ -\ 1)}\} =$$

$$\{2, 6\}, \{3, 28\}, \{5, 496\},$$
$$\{7, 8128\}, \{13, 33550336\},$$
$$\{17, 8589869056\}, \{19, 137438691328\},$$
$$\{31, 2305843008139952128\}$$

En pocos segundos obtenemos estos dos más:

$$\{61, 2658455991569831744654692615953842176\}$$
$$\{89, 191561942608236107294793378084303638130997321548169216\}$$

y también podemos obtener, con un ordenador ordinario, los primos de Mersenne $(-1 + 2^m)$ para los valores

$$\begin{aligned} m \ = \ & 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, \\ & 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423. \end{aligned}$$

Las computadoras potentes de hoy día han avanzado esta lista hasta al menos 33 números perfectos. El número

$$F_{858433} = (-1 + 2^{858433})2^{858432}$$

es perfecto y el primo $P_{858433} = -1 + 2^{858433}$ es mayor que un 1 seguido de 250000 ceros.

Pero no sabemos si hay infinitos primos de Mersenne. Tampoco sabemos si hay un número perfecto impar. Desde luego, si lo hay, es mayor que el número formado del 1 seguido de 300 ceros.

4 Diferencias perfectas

Volvamos a la singladura de 1998. Se observa que hay parejas de números consecutivos muy cercanos en su singladura. Por ejemplo, los términos 7 y 8 son

$$17778, 17790.$$

Estos números difieren en $12 = 2 \times 6$, donde $6 = F_2$ es perfecto. Los términos 16 y 17 son

$$82254, 82266$$

que difieren también en $12 = 2 \times 6$. Más adelante, los términos 40 y 41 son

$$12676727924, 12676727980$$

que difieren en $56 = 2 \times 28$, donde $28 = F_3$ es perfecto. Este fenómeno ocurre cinco veces más en los 218 primeros términos de la singladura de 1998.

Mirando las singladuras de 2010, 1962, 1932, 1938, 1992 observamos siempre la aparición de parejas consecutivas, separadas siempre por los dobles de los números perfectos 6 y 28.

Este fenómeno tiene fácil explicación, como me enseñó Esteban Crespí de Valldaura. Cuando un número N de la singladura resulta ser el producto de un número primo p con un número perfecto b al que no divide (llamaré a N un b-Crespí), la formula (0.1) da

$$s(bp) = b(p + 2).$$

Entonces

$$s(N) - N = 2b,$$

y así un b-Crespí N tiene un espectro $s(N)$ que difiere de N en el doble del número perfecto b.

Así, por ejemplo, la singladura del 6-Crespí $30 = 6 \times 5$ es:

$$30, 42, 54, 66, 78, 90, 144, 259, 45, 33, 15, 9, 4, 3, 1.$$

De los cinco doces que aparecen en la sucesión de diferencias

$$12, 12, 12, 12, 54, 115, -214, -12, -18, -6, -5, -1, -2,$$

todos, salvo el tercero, se explican por la aparición de un 6-Crespí. En efecto:

$$30 = 6 \times 5, 42 = 6 \times 7, 54 = 6 \times 9, 66 = 6 \times 11, 78 = 6 \times 13.$$

Exceptuado $54 = 6 \times 9$*, que no es* 6*-Crespí, y que tiene como espectro el* 6*-Crespí* 66*, que difiere de* 54 *en* 12*, todos los demás casos en que* $s(N) - N$ *es el doble del número perfecto* $b = 6$*, que he observado, se explican por la aparición de un* b*-Crespí.*

El caso del número $54 = 6 \times 3^2$, que no es 6-Crespí, y que tiene como espectro el 6-Crespí 66, que difiere de 54 en 12, se explica de otra manera, como sigue.

Supongamos que $P_m = (-1 + 2^m)$ es un primo (de Mersenne). Sea

$$N = F_m P_m^2 = (-1 + 2^m)^3 2^{m-1} = P_m^3(P_m + 1).$$

Entonces

$$s(N) - N = 2F_m,$$

donde $F_m = (-1 + 2^m)2^{m-1}$ *es el número perfecto correspondiente a* m*.*

En efecto, $s(N) - N = \sigma(N) - 2N$. Usando la fórmula (0.1) tenemos

$$\sigma(N) - 2N = \frac{P_m^4 - 1}{P_m - 1}\frac{P_m}{2 - 1} - P_m^3(P_m + 1) = P_m + P_m^2 = 2F_m.$$

Por ejemplo, para $m = 3$ obtenemos $N = 7^3 \times 4 = 1372$, cuyo espectro es 1428, que difiere de N en 2×28. Sin embargo 1372 no es un 28-Crespí.

Diremos que el número especial $N = (-1 + 2^m)^3 2^{m-1} = F_m P_m^2$ es el número F_m*-anómalo.*

Todos los casos que he observado en que $s(N) - N$ *es el doble de un número perfecto se explican por la aparición de un* b*-Crespí o un* b*-anómalo.* ¿Puede demostrar el lector que esto es necesario?

Y ¿por qué en las largas singladuras observadas, se da esta fantástica recurrencia de b-Crespíes?

Resulta pues natural estudiar las singladuras de los números de la forma $6p$, $28p$, $496p$, ...para detectar en ellas las apariciones de b-Crespíes y b-anómalos.

5 Singladuras de N=6p

Comencemos con algunos ejemplos, para explicar la situación. Para $p < 59$ la singladura de $6p$ es siempre finita y siempre contiene algún 6-Crespí, además del primero.

Para $p = 59$ la singladura de $6p$ es finita y contiene 6-Crespíes y un 28-Crespí. Este último es $14252 = 28 \times 509$, y es el término 25^o de la singladura de 6×59.

Para cada número perfecto par F_m, construyamos ahora un nuevo grafo orientado G_m. Sus vértices son todos los números primos impares. Unimos el vértice p con el q si en la singladura de $F_m p$ (o de $F_m p^2$, si $p = P_m$) aparece el F_m-Crespí $F_m q$ o el F_m-anómalo $F_m q^2$ (si $q = P_m$). Este P_m^2 lo colocaremos entre llaves.

Para $b = 6$, el 6-anómalo es $6 \times 3^2 = 54$. Entonces 9 irá entre llaves. He aquí las primeras singladuras.

$\sin(\{3^2\}) = \{3^2\}, 11, 13$
$\sin(5) = 5, 7, \{3^2\}, 11, 13$
$\sin(17) = 17, 19, 31$
$\sin(23) = 23, 37, 4457$
$\sin(41) = 41, 43$
$\sin(47) = 47, 103, 1321$
$\sin(53) = 53, 89, 439, 1663, 46861$
$\sin(59) = 59, 61, 97, 229$
$\sin(67) = 67$
$\sin(71) = 71, 73$
$\sin(79) = 79, 101, 103, 1321$
$\sin(83) = 83, 131, 439, 1663, 46861$
$\sin(107) = 107, 109$
$\sin(113) = 113, 173, 557, 673$

$\sin(127) = 127, 157$
$\sin(137) = 137, 139, 229$
$\sin(149) = 149, 151, 1321$
$\sin(163) = 163$
$\sin(167) = 167, 197, 199, 241$
$\sin(173) = 179, 181, 48599934125359, 909262064006431, 32480528287816139$
$66016541285147821, ..., ?$
$\sin(191) = 191, 193$
$\sin(211) = 211$
$\sin(223) = 223, 2963, 5147, 13709, 13711, ...?$
$\sin(227) = 227, 229$
$\sin(233) = 233, 2963, 5147, 13709, 13711, ...?$
$\sin(239) = 239, 241$
$\sin(251) = 251, 397, 641, 643, 4457$
$\sin(257) = 257, 349$
$\sin(263) = 263, 383, 1103, 2161, 14621, 45953, 341521, 31302914609539, ...?$
$\sin(269) = 269, 271, 1321$
$\sin(277) = 277, 401, 587, 691, 7727, 8111, 15937, 102023, 1823903, 94188937,$
$370727509, ...?$
$\sin(281) = 281, 283, 889533303271$
$\sin(293) = 293, 691, 7727, 8111, 15937, 102023, 1823903, 94188937,$
$370727509, ..?$
$\sin(307) = 307, 367, 685579881803, 4076138067277, 70274348555009903,$
$224728798861373249371, 10898617194862825055061940718 39,$
$190055526309610757294405304464207,$
$706592367819297859239676112100489173,$
$338151907574469283505759828021533519577,$
$115772310145608088850803064690401638928163,$
$100006776712208835131879172706683726832230 67,$
$123218216885013533745589832689566380873549059533 29, ...?$

Algunas singladuras no se han calculado por ser demasiado largas. Pero *todas ellas son monótonas crecientes.*

6 Singladuras de N=28p

El 28-anómalo es 28×7^2. He aquí las primeras singladuras:

$\sin(\ 3) = 3, 5$
$\sin(\ \{7^2\}) = \{7^2\}, 163, 8891621, 12981377, 18590717{,}81533$
$\sin(11) = 11, 13$
$\sin(17) = 17, 19$
$\sin(23) = 23, 37, 73, 173$
$\sin(29) = 29, 31$
$\sin(43) = 43, 193, 1777, 6247$
$\sin(47) = 47, \{7^2\}, 163, 8891621, 12981377, 18590717{,}81533$
$\sin(53) = 53, 89$
$\sin(59) = 59, 61$
$\sin(67) = 67, 701, 1951, 16631, 16633, 176673589, 333716809, 978934003,$
$201478571759, 201478571761, 91317098785543, 492157144942334009,$
$509734193806477973, 19750243115818664093867, 5680341505768290611425$
$651802053571344185914373 39, ...?$
$\sin(71) = 71, 73, 173$
$\sin(79) = 79, 181, 313$
$\sin(83) = 83, 131$
$\sin(97) = 97, 701, ...$
$\sin(101) = 101, 103, 587, 691, 8891621, 12981377, 18590717{,}81533$
$\sin(107) = 107, 109, 193, 1777, 6247$
$\sin(113) = 113, 173$
$\sin(127) = 127, 223, 1093, 28723, 54774829423, 8838171667873,$
$251734140158439 41, 25173414015843943, 2105348385256861999393, ...?$
$\sin(137) = 137, 139, 691, 8891621, 12981377, 18590717{,}81533$
$\sin(149) = 149, 151$
$\sin(157) = 157, ...?$
$\sin(167) = 167, 197, 199$
$\sin(179) = 179, 181, 313$
$\sin(191) = 191, 193, 1777, 6247$
$\sin(211) = 211, 701, ...$
$\sin(227) = 227, 229$
$\sin(233) = 233$

$\sin(239) = 239, 241, 691, 8891621, 12981377, 18590717,81533$
$\sin(251) = 251, 397, 1499, 1699, ...?$
$\sin(257) = 257$
$\sin(263) = 263, 383, 641, 643, 2797, ...?$
$\sin(269) = 269, 271, ...?$
$\sin(277) = 277, 587, 691, 8891621, 12981377, 18590717,81533$
$\sin(281) = 281, 283, 2767, 406397, ...?$

Algunas singladuras no se han calculado por ser demasiado largas (acaban en $, ...?$). La singladura del 28-anómalo acaba en 81533. Si eliminamos este primo especial 81533, *todas las singladuras observadas son monótonas crecientes.*

7 Singladuras de N=496p

El 496-anómalo es 496×31^2. He aquí las primeras singladuras:

$\sin(3) = 3, 5, 7, 17, 19, 43, 193, 1777, 6397, 14983, ...?$
$\sin(11) = 11, 13, 313, 5003, 14869, 24793, 1152637, 9414403, 1253259803,$
$7722045013, 1853570462057, 3874413550116739237, ...?$
$\sin(23) = 23, 37, 73, 173, 1103, 2161, 4493, 39879354107, 134220547393,$
$7406578070267, 22006268758787, 145306882203611, 538150963836853771,$
$164796968741479479403, 165988259222178302050348397,$
$457027377867637543024822930 3, 14068366887347656645933043487 77,$
$14116803667896407783427763153110979060 7,$
$34442646112470583720934390281700687959 9, ...?$
$\sin(29) = 29, 266777964935785670083, 1681337488739248642490 9,$
$96833689886640558494972533418191,$
$10268517334878945705379063304501410927...?$
$\sin(\{31^2\}) = \{31^2\}, ...?$
$\sin(41) = 41, 43, 193, 1777, 6397, 14983, ...?$
$\sin(47) = 47, 103$
$\sin(53) = 53, 89, 439, 102503, 362353, 4030067609, 11133878843, 3936767681$
$121227708240857, 1219141532721803, 4862865917101763,$
$150407824504757411 03, 289997283466394023 21, 963112271905926447659,$
$131855888946771886417 9, 12724012939210559204566811,$
$12724012939210559204566813, ...?$

$\sin(59) = 59, 61, 313, 5003, 14869, 24793, 1152637, 9414403, 1253259803,$
$7722045013, 1853570462057, 3874413550116739237, ...?$
$\sin(281) = 281, 283, 2767, 2142072479, 2142072481, 11755295141$

Sólo las singladura de 47 y de 281 se ha calculado por completo. Las demás, no, por ser demasiado largas (acaban en $, ...?$). *Todas las singladuras observadas son monótonas crecientes.*

8 Perfectos que generan perfectos

Otro aspecto a mi parecer interesante que presentan algunas singladuras es que *parece como si cada número perfecto generara al siguiente*. Así, por ejemplo, el paso 63 de la singladura de 6×281 (281 es primo) es el Crespí 28×41611. Y el paso 60 de la singladura de 28×281 es el Crespí 496×313. Finalmente, la singladura de 496×281 acaba en el número perfecto 8128 después de 695 pasos.

Pregunta 1. *Sean P y Q dos números perfectos consecutivos. ¿Existe p, primo y coprimo con P, tal que la singladura de pP contiene un Q-Crespí?*

Pregunta 2. *Sean P y Q dos números perfectos consecutivos. ¿Existe p, primo y coprimo con P, tal que la singladura de pP acabe en Q?*

Hay muchas otras peculiaridades de las singladuras, no la menor que con frecuencia aparecen dobles de números primos. ¿Podrá algún lector entender algo de lo que pasa aquí?

9 Una inesperada sorpresa

Enviado ya el artículo al editor (9/3/13) decidí explorar la singladuras de los números enteros frente a una noción diferente de espectro, que se me ocurrió con motivo de mis investigaciones en formas cuadráticas enteras. Salen cosas sorprendentes, que casi seguro son bien conocidas, aunque no lo sé.

Diré que un número es *libre de cuadrados* ("square-free") si no es divisible por el cuadrado de ningún primo.

Dado un entero $N > 1$, su *espectro reducido* $sr(N)$ será la suma de sus divisores propios y libres de cuadrados.

Si N es libre de cuadrados, $sr(N) = s(N)$. Pero si no es así, entonces

$$sr(N) = \sigma(N_r) = s(N_r) + N_r$$

donde N_r es el producto de los primos distintos que dividen a N.

Esto explica la siguiente orden de Mathematica7 para hallar $sr(N)$. (Por razones prácticas se define $sr(1) = 1$):

```
sr[N_] := If[N==1,1,Module[{m1,m2},m1=FactorInteger[N];
m2 = Product[m1[[i, 1]], {i, 1, Length[m1]}];
If[m2 == N, DivisorSigma[1, m2] - m2, DivisorSigma[1, m2]]]]
```

Por ejemplo, a la orden "`sr[6]`", Mathematica responde "{6}", ya que $sr(6) = s(6) = 6$, por ser 6 libre de cuadrados. Y a la orden "`sr[12]`", Mathematica responde "{12}", ya que $sr(12) = \sigma(6) = 12$ por no ser 12 libre de cuadrados. Obviamente, si p es primo, a la orden "`sr[p]`", Mathematica responde "{1}".

La singladura de los l primeros términos de N empleando la función sr (que llamaré *singladura reducida*), viene dada por la función

```
singlr[N_, l_] := FixedPointList[sr, N, l].
```

Esta función se detiene automáticamente cuando encuentra un punto fijo. Por ejemplo, a la orden "`singlr[6, 10]`" Mathematica responde "{6, 6}", porque la singladura reducida de 6 es periódica.

La sorpresa es que la singladura reducida de los 100 000 primeros enteros acaba siempre en 1, 6 o 12!!!

Ya sabemos que la singladura reducida de los primos acaba en 1. Pero no son los únicos. Los primeros números no primos < 100, cuya singladura reducida acaba en 1 son:

$$\{1, 4, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 21, 22, 26, 27, 32, 33, 35, 38, 39, 46,$$
$$49, 51, 55, 57, 58, 63, 64, 65, 69, 77, 81, 85, 86, 87, 91, 93\}.$$

Los primeros números < 100, cuya singladura reducida acaba en 6 son:

$$\{6, 25, 95\}$$

A veces, tarda bastante en estabilizarse la singladura reducida. Por ejemplo, la singladura reducida del producto de los primeros 32 números primos es

esta:

$$\{525896479052627740771371797072411912900610967452630,$$
$$230699496144447669476980818548254157497233930454737 0,$$
$$649385098949519935221845268569155874115247803463983 0,$$
$$136975561795519964145818700733982481682703376282593 70,$$
$$247686964460421928266720801072466065047533766878402 14,$$
$$291759354614270978596565379747642400207352420841277 86,$$
$$329935067468833366881515914451813287864848980402779 74,$$
$$351749047041879535346172802054501420634657764941220 26,$$
$$533757411332477521224033841176390462295421946261288 54,$$
$$635133438763654394129713806955752219581676469343409 06,$$
$$635687414724198357841036137599338823714543794544395 74,$$
$$640112343906030793038498838507251734179016326863235 62,$$
$$426747333827295267620219524413099293557986534257187 84,$$
$$583914343590248899023581801012393279672549376000,$$
$$132521259279010491870232825036 80,$$
$$459446826065890590720 00, 5519181418039296,$$
$$168478801920, 10450944, 96, 12, 12\}$$

que, como se ve, crece durante un tiempo y luego decrece repentinamente.

La singladura reducida de los números perfectos pares > 6 acaba en 12, en dos pasos. En efecto, si $m > 2$, el perfecto $F_m = (-1 + 2^m)2^{m-1}$ no es libre de cuadrados. Entonces

$$sr(F_m) = \sigma((-1 + 2^m)2) = \sigma(2)\sigma(-1 + 2^m),$$

por ser $-1 + 2^m$ primo. Entonces $sr(F_m) = 3 \times 2^m$. Luego

$$sr(3 \times 2^m) = \sigma(3)\sigma(2) = 4 \times 3 = 12.$$

¿Termina la singladura reducida de todo número > 1 *en* 1, 6 *o* 12*?* La respuesta depende de la observación que hicimos más arriba: *si* N *es libre de cuadrados,* $sr(N) = s(N)$. Supongamos que dos números M y N son

amigos (es decir $s(M) = N$ y $s(N) = M$) y que cada uno de ellos es libre de cuadrados. Entonces tendremos $sr(M) = s(M) = N$ y $sr(N) = s(N) = M$.

Hay, en efecto, amigos con esa propiedad. Ellos son

$$142310 = 2 \times 5 \times 7 \times 19 \times 107 \; ; \; 168730 = 2 \times 5 \times 47 \times 359.$$

Por tanto, la singladura reducida de ambos acaba en el ciclo

$$142310, 168730.$$

La singladura reducida de 1430630 es

$$\{1430630, 1144522, 662678, 331342, 210890, 168730, 142310, ...\}.$$

Los números amigos con esa propiedad menores que 1 500 000 son

$$\begin{aligned} 1077890 &= 2 \times 5 \times 11 \times 41 \times 239, 1099390 = 2 \times 5 \times 17 \times 29 \times 223, \\ 1156870 &= 2 \times 5 \times 11 \times 13 \times 809, 1292570 = 2 \times 5 \times 19 \times 6803 \end{aligned}$$

¿Hay números asociados libres de cuadrados? No he explorado más esta singladura reducida.

10 Una modificacion de la singladura reducida: la singladura basica

Modificando la definición de espectro reducido obtenemos resultados más satisfactorios.

Llamaré espectro básico de N, $eb(N)$ a la suma de todos los divisores de N libres de cuadrados.

Recuérdese que dado el entero $N > 1$ hemos definido el número N_r como el producto de los primos distintos que dividen a N. Entonces $eb(N) = \sigma(N_r)$, la suma de todos los divisores de N_r.

La siguiente orden de Mathematica7 calcula $sb(N)$. (Por razones prácticas se define $sb(1) = 1$):

```
sb[N_] := If[N == 1, 1, Module[{m1, m2}, m1 = FactorInteger[N]
m2 = Product[m1[[i, 1]], {i, 1, Length[m1]}];
DivisorSigma[1, m2]]]
```

Por ejemplo, a la orden "`sb[4]",` Mathematica responde "{3}", ya que $sb(4) = \sigma(2) = 3$. Y a la orden "`sb[3]",` Mathematica responde "{4}". Hay un ciclo $3, 4$. A la orden "`sb[12]",` Mathematica responde "{12}" porque $sb(12) = \sigma(6) = 12$. Hay pues un punto fijo, 12, de la función sb.

La singladura de los l primeros términos de N empleando la función sb (que llamaré *singladura básica*), viene dada por la función

```
singlb[N_, l_] := FixedPointList[sb, N, l].
```

Esta función se detiene automáticamente cuando encuentra un punto fijo. Por ejemplo, a la orden "`singlb[(-1 + 2^17) 2^16, 10]`" Mathematica responde: "{`8589869056, 393216, 12, 12`}". Y es que la singladura básica de todos los números perfectos pares acaba en 12, en dos pasos. La demostración es la misma de la sección anterior.

La sorpresa es que *la singladura básica de los 20 000 000 primeros enteros acaba siempre en* 12 *o en el ciclo* $\{3, 4\}$.

La singladura básica del producto de los primeros 32 números primos es:

$$\{52589647905262774077137179707241191290061096745263 0,$$
$$28328914404971044355411799825549534878729502720000 00,$$
$$42361159680, 11520, 72, 12, 12\}$$

Los primeros números < 101 cuya singladura básica acaba en el ciclo $\{3, 4\}$ son:

$$\{2, 3, 4, 7, 8, 9, 16, 21, 27, 31, 32, 49, 63, 64, 81, 93\}$$

y los primeros números < 101 cuya singladura básica acaba en 12 son:

$$\{5, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26,$$
$$28, 29, 30, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46,$$
$$47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 65, 66,$$
$$67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 82, 83, 84,$$
$$85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100\}$$

Referencias

[1] R.K. Guy (2004), *Unsolved problems in number theory* (3^{rd} ed.), Springer.

Cuadrangulando polígonos

Gregorio Hernández Peñalver
Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
gregorio@fi.upm.es

Abstract

In this paper we present some results about cuadrangulations of polygons and their applications to problems of guarding.

Dedicado a la memoria de D. José Javier Etayo Miqueo,
que me enseñó nuevos caminos y nuevas metas en el campo geométrico.

1. Introducción

Las aproximaciones discretas de superficies o volúmenes son necesarias para su tratamiento computacional. Los modelos de terrenos en un SIG, o modelos industriales en un sistema CAD/CAM, requieren que el dominio geométrico se divida en pequeñas piezas, los elementos finitos, que formen una malla (mesh). Trabajando sobre ella se obtienen buenas aproximaciones a los problemas planteados sobre las superficies o volúmenes originales.

Los elementos utilizados para las mallas son, generalmente, triángulos que dan lugar a triangulaciones de los objetos estudiados. Las triangulaciones de conjuntos (conjuntos de puntos, polígonos, familias de segmentos, etc.) han sido muy bien estudiadas en los últimos tiempos. Sin embargo, en algunas aplicaciones como por ejemplo en interpolación de datos dispersos o en problemas de análisis de elasticidad, los cuadriláteros (o cuadrángulos) constituyen una mejor elección como elementos finitos que los triángulos ([1], [6], [9]). Utilizaremos la terminología de "cuadrángulo" y "cuadrangulación" en lugar de sus equivalentes, "cuadrilátero" y "cuadrilaterización", para extender los términos de triángulo y triangulación.

Hay una diferencia fundamental entre triangulación y cuadrangulación. Cualquier conjunto de puntos o cualquier polígono se pueden triangular, pero existen conjuntos de puntos y polígonos que no son cuadrangulables, no admiten descomposición en cuadrángulos. En ese caso se deben añadir puntos adicionales, puntos de Steiner, para conseguir la cuadrangulación.

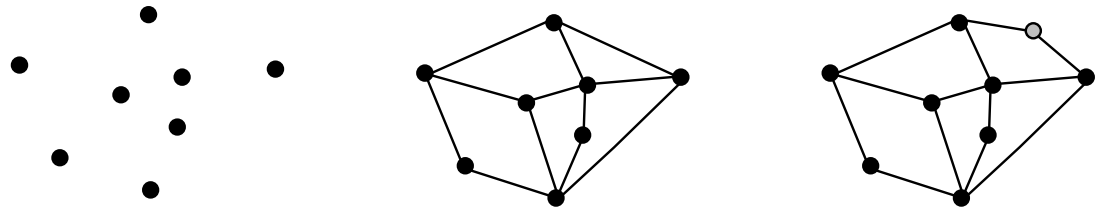


Figura 1. *Un conjunto no cuadrangulable que lo es agregando un punto*

Todo conjunto de puntos en el plano puede cuadrangularse con a lo sumo un único punto de Steiner (como en la figura 1), que es necesario sólo si el número de puntos en el cierre convexo es impar. Sin embargo, un polígono de n vértices, puede necesitar hasta $\lfloor n/3 \rfloor$ puntos de Steiner exteriores para obtener una cuadrangulación, (véase [3], [11]). En ambos casos los cuadrángulos resultantes no son convexos, en general. Ahora bien, para muchas aplicaciones se requiere que todos los cuadrángulos sean estrictamente convexos, es decir que todos sus ángulos sean menores de 180º, lo que requiere un estudio más profundo de la situación ([4])

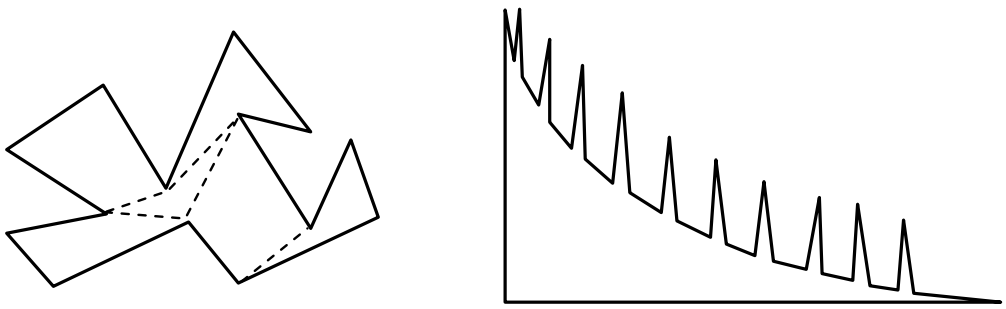


Figura 2. *Un polígono cuadrangulable y otro no cuadrangulable que necesita $\lfloor n/3 \rfloor$ puntos de Steiner.*

Las cuadrangulaciones de polígonos se han estudiado en Geometría Computacional en el contexto de los problemas de iluminación o vigilancia que se enmarcan en el campo del Problema de las Galerías de Arte, propuesto por Klee en 1973: *Determinar el mínimo número de puntos de un polígono suficientes para ver (iluminar) a todos los restantes*. Problema que se puede interpretar también en términos de vigilancia de una sala poligonal: ¿Cuántos guardias (o cámaras de vigilancia que cubran 360º) son suficientes para vigilar el interior de un polígono de n lados?

La respuesta a este problema fue obtenida por Chvátal en 1975, quien demostró que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes. En 1978, Fisk [5] dio una demostración concisa y elegante: *Triangúlese el polígono, coloréese con 3 colores el grafo de la triangulación y pónganse los guardias en los vértices coloreados con el color que menos veces aparezca.*

Se han estudiado muchas variantes de este problema de Galerías de Arte, según se puede comprobar en [10] y [12]. Una de las primeras concierne a los polígonos ortogonales, esto es, polígonos cuyos lados son paralelos a dos ejes ortogonales. En ellos la cuadrangulación convexa juega el papel de la triangulación en la demostración anterior.

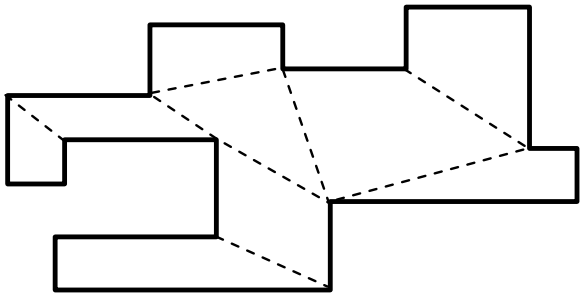


Figura 3. *Una cuadrangulación convexa de un polígono ortogonal*

En este artículo presentaremos algunos resultados sobre Galerías de Arte ortogonales, uno en que la cuadrangulación convexa resuelve el problema y otro en que esta estrategia es insuficiente en su resolución.

2. Galerías de Arte ortogonales

Para vigilar una galería de arte ortogonal con n lados, $\lfloor n/4 \rfloor$ *guardias situados en los vértices son siempre suficientes. Existen salas que necesitan ese número de guardias*.

Demostración. (Kahn, Klawe y Kleitman, [7])
Consideremos un polígono ortogonal P de n vértices y observemos gráficamente los siguientes pasos:

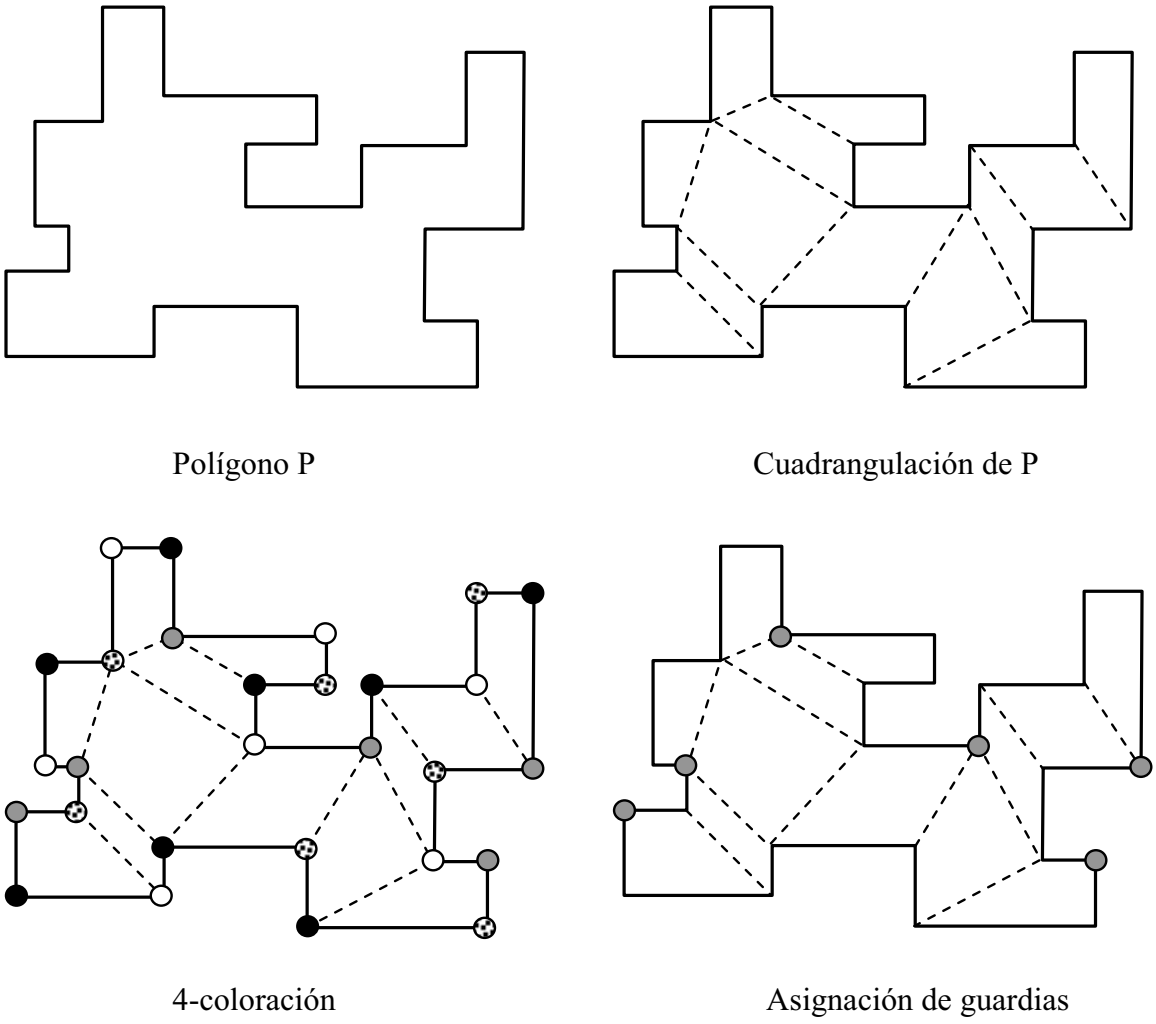


Figura 4. *La demostración en cuatro imágenes*

Y ahora pasemos a la explicación.

Primer paso. (Cuadrangulación)
Cuadrangulamos convexamente P, es decir, descomponemos P en cuadriláteros convexos cuya unión es P, con interiores disjuntos y cuyos vértices son vértices de P. Observamos que un guardia situado en cualquier vértice de un cuadrilátero convexo vigila completamente dicho cuadrilátero.

Segundo paso. (Coloración)
La cuadrangulación anterior Q es un grafo plano. El Teorema de los cuatro colores, probado en 1976 por Appel y Haken, asegura que todo grafo planar puede colorearse utilizando sólo cuatro colores. (Una coloración de un grafo es una asignación de colores a los vértices del grafo de modo que dos vértices adyacentes reciben diferente color). Pero ahora necesitamos además que en cada uno de los cuadriláteros aparezcan los cuatro colores. Añadimos al grafo Q las diagonales de cada uno de los cuadriláteros. Así construimos un grafo Q_2 que sigue siendo planar y, por tanto, se puede colorear con 4 colores. En esta 4-coloración de Q_2 (y de Q) ya tenemos un vértice de cada color en cada cuadrilátero.

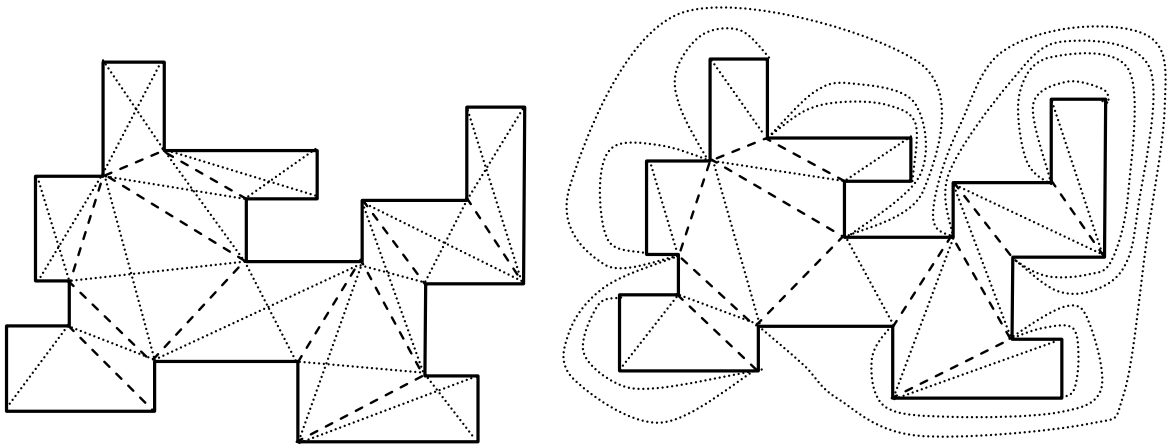


Figura 5. *El grafo Q_2*

Tercer paso. (Colocación de guardias)
Cada cuadrángulo de Q tiene un vértice de cada uno de los colores negro, rojo blanco y verde. Si colocamos un guardia en cada vértice negro, vigilarán todos los cuadrángulos y, por tanto, todo el polígono ortogonal. Lo mismo sucederá si colocamos guardias en todos los vértices rojos o en los blancos o en los verdes.
El polígono tiene n vértices y disponemos de cuatro colores. Por tanto, alguno de los cuatro colores, negro, rojo, blanco o verde se utiliza en, a lo más, $\lfloor n/4 \rfloor$ vértices. (Esto es una aplicación inmediata del Principio del palomar o de Dirichlet: Si cada color se utilizara en más de $\lfloor n/4 \rfloor$ vértices, sumando los vértices de cada color tendríamos más de n vértices). Basta pues, colocar los guardias en los vértices con el color menos utilizado para garantizar que $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono ortogonal de n vértices.

Cuarto paso (Necesidad de los $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias)
Para comprobar que este número de guardias es a veces necesario, basta considerar el polígono *muralla* con **n=4k** vértices de la Figura 4. Es fácil observar que para vigilar este polígono se necesitan al menos k guardias, uno por cada almena de la *muralla*.

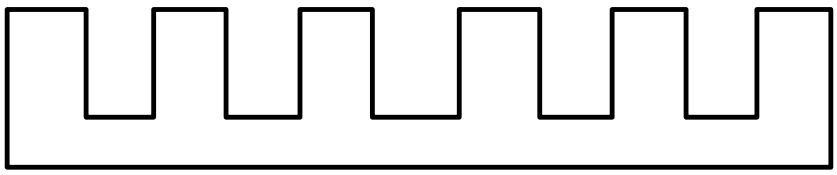


Figura 6. *El polígono muralla necesita un guardia por cada almena*.

¿Hemos terminado la demostración? En el primer paso comenzamos cuadrangulando convexamente el polígono ortogonal pero, ¿todo polígono ortogonal admite una cuadrangulación convexa? En el segundo paso decimos que el grafo Q_2 obtenido al agregar las diagonales a la cuadrangulación es un grafo 4-coloreable por ser planar. Justifiquemos ambas afirmaciones en las secciones siguientes.

3. Cuadrangulación convexa de un polígono ortogonal

Triangular un polígono cualquiera es muy fácil, basta trazar diagonales hasta que todas las piezas de la descomposición sean triángulos. Y no importa la elección de diagonal que se trace en cada momento que no corte a las anteriores, siempre se podrá completar la triangulación. Esta facilidad y simplicidad de la triangulación no se extiende a la cuadrangulación. En la figura 3 ya se han mostrado polígonos no cuadrangulables que, obviamente, tampoco admiten una cuadrangulación convexa.

Ahora consideremos polígonos ortogonales. En primer lugar un par de observaciones:

1. Como dos triángulos que comparten un lado forman un cuadrilátero podría pensarse que agrupando los triángulos de dos en dos se puede conseguir la cuadrangulación convexa. Pero este procedimiento no sirve según se muestra en la Figura 7.

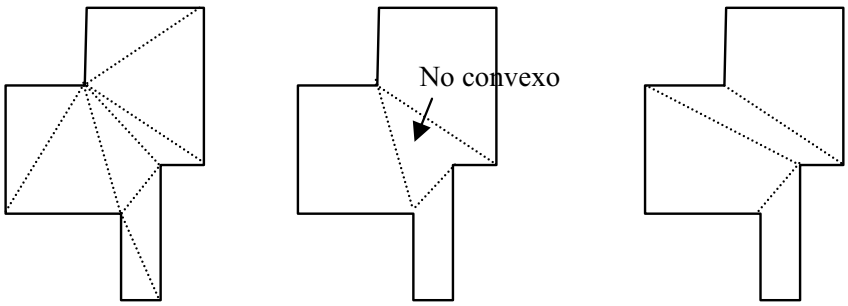


Figura 7. *Triangulación y cuadrangulaciones (no convexa y convexa)*

2. Debemos admitir cuadriláteros "degenerados", bien con lados consecutivos alineados o con área cero, cuando el polígono inicial presente lados colineales (Figura 8).

Figura 8. *Cuadriláteros degenerados*

Kahn, Klawe y Kleitman demostraron en 1983 que todo polígono ortogonal admite una cuadrangulación convexa, pero su demostración es existencial. La primera demostración constructiva se debe a Sack en 1984. Su algoritmo parte el polígono ortogonal en piezas monótonas que cuadrangula convexamente. Aquí vamos a presentar una demostración posterior de Lubiw en [8], también constructiva, que consigue una cuadrangulación convexa para polígonos ortogonales incluso aunque tengan agujeros.

El proceso de Lubiw consiste en ir extrayendo cuadriláteros convexos del polígono inicial. El problema es que así el polígono deja de ser ortogonal. La solución estriba en ampliar la clase de polígonos sobre la que actuamos.

3.1 Polígonos pseudoortogonales

Un polígono P es *pseudoortogonal* si cumple las siguientes condiciones:
1) Los lados son alternadamente horizontales y oblicuos (o verticales).
2) Todos los ángulos son menores o iguales a 270º
3) La *sombra* de cualquier lado oblicuo no contiene ningún vértice de P. (La sombra de un lado es su proyección vertical)

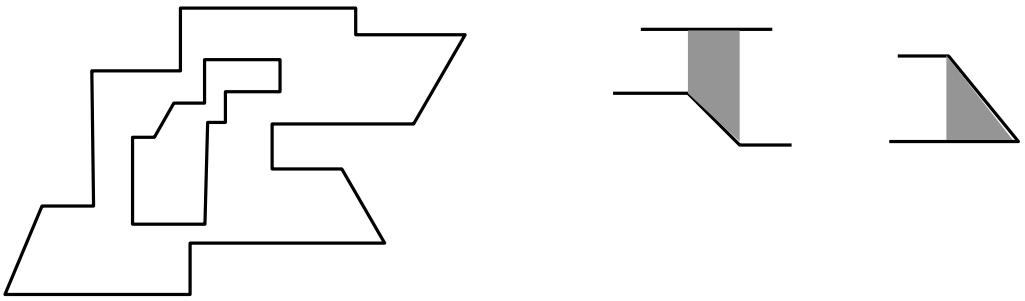


Figura 9. *Polígono pseudoortogonal y sombra de un lado*

Teorema (Lubiw, [8])
Todo polígono pseudoortogonal admite una cuadrangulación convexa.

Demostración: La demostración es por inducción. Si el polígono tiene cuatro vértices, dos de los lados serán horizontales y el cuadrilátero es convexo.
Si el polígono P tiene más de cuatro se buscará un cuadrilátero convexo C, tal que P – C siga siendo polígono pseudoortogonal, al que se pueda aplicar la hipótesis de inducción y obtener así la cuadrangulación convexa de P.

Designemos por $<_x$ el orden de los vértices de P por su abscisa (y cuando son iguales por su ordenada). Los lados oblicuos (o verticales) pueden ser izquierdos (si el polígono P se encuentra a la derecha de la arista) o derechos (si P se encuentra a la izquierda). Llamamos *vecino derecho* de un vértice x al vértice z de P (si existe) tal que el segmento xz está contenido en P y z es el vértice de mínima abscisa mayor que la de x.
Es fácil comprobar que si ab es una arista izquierda con a $<_x$ b, entonces b siempre tiene un vecino derecho. Ahora ordenamos las aristas izquierdas por el orden $<_x$ de sus extremos derechos y elegimos la arista uv que sea la mayor en este orden. Si u $<_x$ v, y llamamos r al vecino derecho de v, la arista rs será una arista oblicua (o vertical) derecha. El cuadrilátero C buscado es "uvrs" (o uvsr si r $<_y$ s como en la Figura 10)
Se debe comprobar que, efectivamente, C es convexo y que P – C sigue siendo un polígono pseudoortogonal, lo que puede verse en [8].

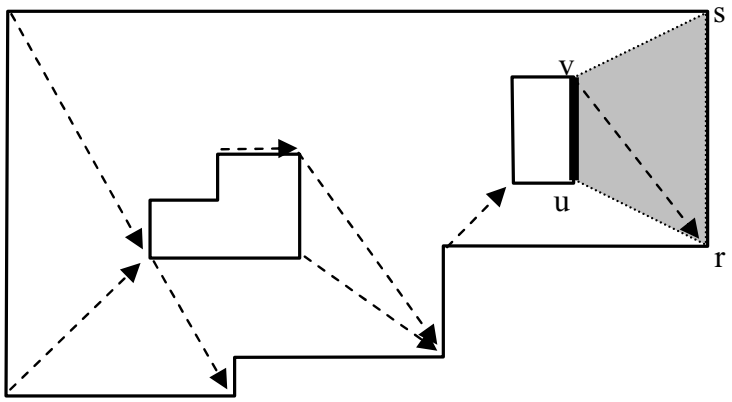


Figura 10. *En trazo discontinuo la relación vecino derecho para algunos vértices. En negrita la arista izquierda que define el cuadrilátero C en gris.*

Esta demostración de Lubiw permite construir efectivamente una cuadrangulación convexa de un polígono pseudoortogonal, eliminando los sucesivos cuadriláteros C a los polígonos pseudoortogonales que se van obteniendo en el proceso. En la Figura 11, presentamos un ejemplo.

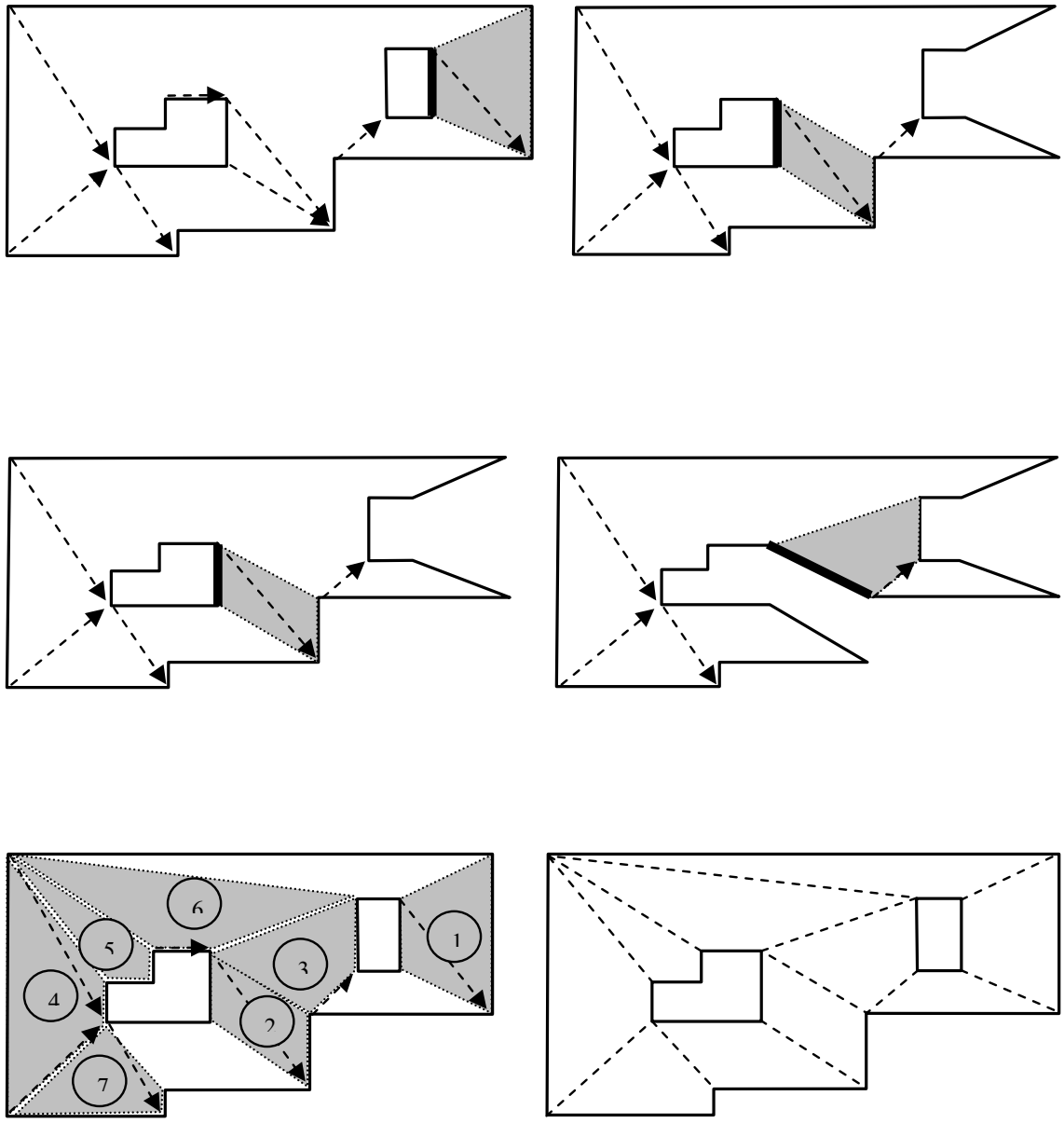


Figura 11. El *proceso de eliminación de cuadriláteros y la cuadrangulación final*

4. Coloración de la cuadrangulación convexa

El grafo de cualquier cuadrangulación convexa de un polígono al que se añaden las dos diagonales de cada uno de sus cuadriláteros es un grafo 4-coloreable.

Demostración:
Sea P un polígono y Q una cuadrangulación de P. Llamamos Q_2 al grafo que resulta al añadir a Q las diagonales de los cuadriláteros. Demostraremos que Q_2 es 4-coloreable sin recurrir al Teorema de los cuatro colores. Probaremos el resultado por inducción sobre q, el número de cuadriláteros de Q.
Si q=1, la cuadrangulación Q coincide con P y la 4-coloración es obvia.
Si q>1, se considera el árbol Q* dual del grafo plano Q. Una hoja de este árbol corresponde a un cuadrilátero de Q. Eliminamos de Q este cuadrilátero cortando por la diagonal d correspondiente. Por hipótesis de inducción el grafo Q' obtenido es 4-coloreable, y añadiendo de nuevo el cuadrilátero eliminado coloreamos los dos vértices que faltan con los dos colores no utilizados en los extremos de la diagonal d. Así tenemos una 4-coloración en el grafo Q_2.

5. La cuadrangulación en otros problemas de vigilancia

La cuadrangulación de polígonos ortogonales no es la herramienta adecuada para resolver otros problemas de vigilancia. Por ejemplo la vigilancia con guardias móviles abiertos. Ahora los guardias patrullan por segmentos que unen vértices del polígono, es decir, por lados o diagonales del polígono pero sin alcanzar los extremos.

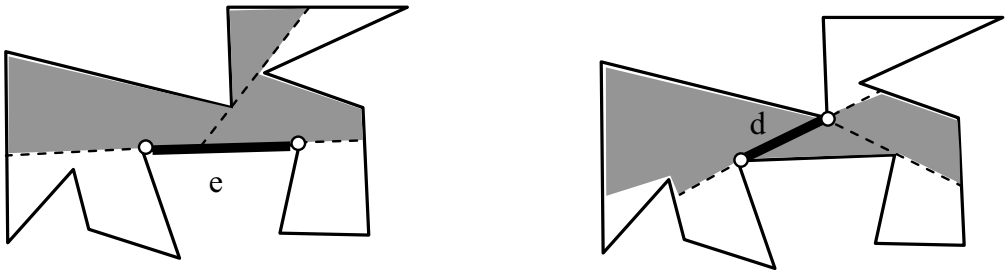


Figura 12. *Zona visible desde un guardia-lado y un guardia-diagonal (abiertos)*

Esta variante de vigilancia se ha empezado a estudiar en 2011 con relación a problemas de iluminación en poliedros. ([13])
Si atacamos este problema con las mismas ideas que la vigilancia desde vértices, necesitamos cuadrangular y vigilar cada uno de los cuadriláteros resultantes. Hay que observar que, con el nuevo tipo de vigilancia, un guardia móvil abierto sólo cubre los cuadriláteros de los que forma parte como lado, del mismo modo que en la sección 2 un guardia situado en un vértice sólo vigilaba los cuadriláteros incidentes en dicho vértice.
Para la vigilancia desde vértices el problema combinatorio sobre polígonos ortogonales, vigilar los cuadriláteros de cualquier cuadrangulación, tiene la misma solución que el problema geométrico, vigilar el polígono ortogonal.
Llamamos *g(n)* al mínimo número de guardias que vigilan cualquier polígono ortogonal de n vértices. Y $g^c(n)$ mínimo número de guardias que vigilan todos los cuadriláteros de cualquier cuadrangulación de un polígono ortogonal de n vértices
En la sección 2 probamos que:

$$\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor \leq g(n) \leq g^c(n) \leq \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$$

donde la primera desigualdad se debe al ejemplo del polígono muralla, la segunda es obvia y la última es la demostración efectuada. Por tanto,

$$g(n) = g^c(n)$$

Sin embargo, la vigilancia con guardias móviles abiertos presenta distintas soluciones desde los puntos de vista geométrico y combinatorio. Desde el punto de vista combinatorio y utilizando un argumento sobre coloración de grafos, se demuestra en [2] que $\left\lfloor \frac{3n-4}{8} \right\rfloor$ guardias-móviles abiertos son suficientes, y a veces necesarios, para vigilar todos los cuadriláteros de cualquier cuadrangulación convexa de un polígono ortogonal de n lados. En la Figura 13 se presenta un ejemplo de cuadrangulación de un polígono ortogonal que necesita tan elevado número de guardias-móviles abiertos (combinatorios), aunque basta un único guardia situado en una diagonal que una los dos extremos del polígono para vigilarlo.

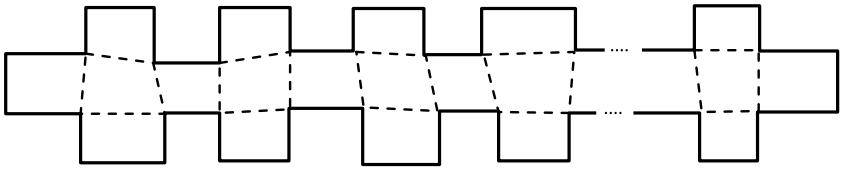


Figura 13. *Una cuadrangulación de un polígono ortogonal que necesita* $\lfloor (3n-4)/8 \rfloor$ *guardias-móviles abiertos (combinatorios)*

La solución desde el punto de vista geométrico requiere menor número de guardias, que además se pueden ubicar sólo en lados del polígono.

Teorema (Bajuelos et al., [2])

Todo polígono ortogonal se vigila con $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ *guardias-lado abiertos y existen polígonos ortogonales que necesitan dicho número de guardias*.

Demostración:

En un polígono ortogonal hay cuatro tipos de lados, N, S, E y O, según la posición relativa del interior del polígono (debajo, arriba, izquierda o derecha).

Los lados (abiertos) de cualquiera de los tipos, por ejemplo N, cubren todos los puntos del polígono, porque dado un punto x de P, trazando una vertical hacia arriba encontraremos siempre una arista tipo N. Eligiendo el tipo menos frecuente tenemos que $\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$ guardias siempre son suficientes.

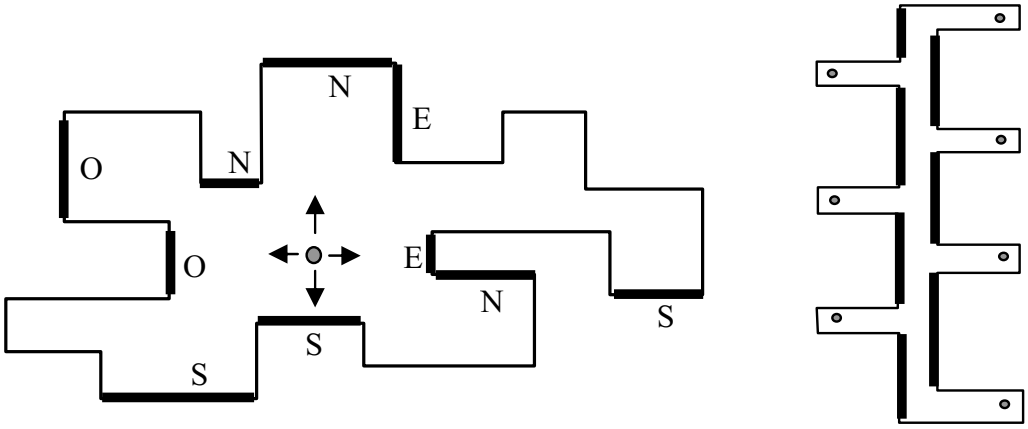


Figura 14. *Guardias-lado abiertos. Cotas superior (izda.) e inferior (dcha.)*

La necesidad de $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias viene dada por el ejemplo de la figura 14 (derecha). Cada uno de los puntos grises necesita un guardia-lado (abierto) diferente para quedar vigilado. Así se necesitan al menos $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado (abiertos) para cubrir el polígono. Por ejemplo, los lados marcados en negrita.

Referencias

[1] D. Allman: "A quadrilateral finite element including vertex rotations for plane elasticity analysis", Int. J. Num. Methods Eng., 26, pp.717-730, 1988.

[2] A. Bajuelos, S. Canales, G. Hernández, A. Martins, I. Matos: "Some results about open edge guarding of simple polygons", preprint, 2012.

[3] P. Bose, G. Toussaint: "Characterizing and efficiently computing quadrangulations of planar point sets", Comp. Aided Geometric Design, 14, pp. 763-785, 1997

[4] D. Bremner, F. Hurtado, S. Ramaswami, V. Sacristán: "Small strictly convex quadrilateral meshes of point sets", Algorítmica, 38, pp. 317-339, 2004.

[5] F. Fisk: "A Short Proof of Chvátal Watchman Theorem", Journal of Combinatorial Theory, serie B, 24, pp. 374, (1978)

[6] B. Johnston, J. Sullivan, A. Kwasnik: "Automatic conversion of triangular meshes to quadrilateral elements", Int. J. Num. Methods Eng., 31 (1), pp.67-84, 1991

[7] J. Kahn, M. Klawe, D. Kleitman: "Traditional galleries require fewer watchmen", SIAM J. Algebraic Discrete Methods, 4, pp. 194-206, 1983

[8] A. Lubiw: "Descomposing polygonal regions into convex quadrilaterals", Proc. 1st ACM Symp. Computational Geometry, pp. 97-106, 1985

[9] M. Müller-Hannemann, K. Weihe: "Quadrangular refinements of polygons with an application to finite-element meshes", Proc. of the 13th ACM Symp. Comput. Geom., pp. 193-202, 1997.

[10] J. O'Rourke: "Art Gallery: Theorems and Algorithms", Oxford Univ. Press, 1987.

[11] G. Toussaint: "Quadrangulations of planar sets", Proc. of WADS, pp. 218-227, LNCS 1272, Springer, 1995.

[12] J. Urrutia: “Art Gallery and Illumination Problems”, en “Handbook on Computational Geometry”, Elsevier (J.R. Sack and J. Urrutia eds.) 1999.

[13] G. Viglietta: “Searching polyhedra by rotating half-planes”, arXiv e-prints 1104.4137, 2011.

Extending The Jagged-Boundary Edge Problem to Angles

Antonio R. Quesada
Department of Mathematics, The University of Akron
aquesada@uakron.edu

Abstract

Given an area of land between boundaries that consist of two rays with the same origin and separated into two regions by a jagged-edge of arbitrary length, we answer the following questions: can we find a straight segment from one ray to the other that maintains the original areas of each region? Is there a solution segment of minimal length? In this paper, we also find the locus of the existing infinite solutions and determine the optimal one.

Dedicated to Prof. José Javier Etayo Miqueo

Introduction

In a previous article (Quesada et al. 2011) we solved a generalization of a problem studied in a Japanese eighth grade class lesson described by Siegel (2004), as part of The Third Trends in International Mathematics and Science Study[1](TIMMS) from 1995. The problem that we termed The jagged-edge boundary can be stated as follows: Given a finite area of land bounded by two parallel lines and separated by a jagged-edge of arbitrary length into two regions (Figure 1), we showed the existence of a point, which was determined geometrically and algebraically via recursion, so that any segment between the boundaries that passes through this point, is a solution. In addition, we determined

[1] The study conducted in 1995 was called the Third International Mathematics and Science Study while subsequent studies were called the Trends in International Mathematics and Science Studies.

the solution of minimal length. At the end of the article we raised the question of whether the solution can be extended to the general case of a jagged-edge between boundary lines that meet.

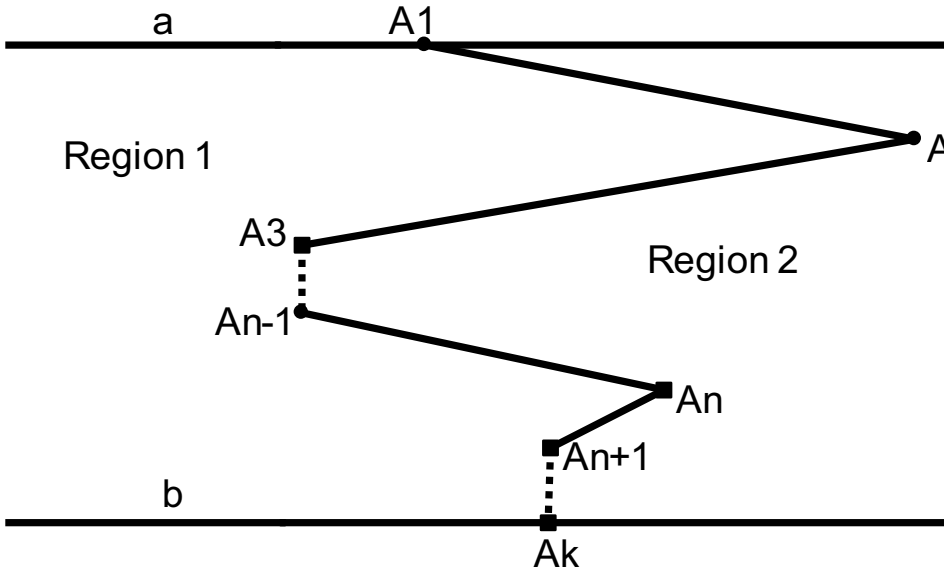


Figure 1. *Jagged-edge parallel boundaries*

1. The Jagged-Edge Boundary Problem Between Meeting Boundary Lines

Now we consider a region between two rays with the same origin, with a jagged edge separating them, and show that the jagged edge can be replaced by infinitely many segments that preserve the area of the region. We will use a modification of the method previously used. For a region R bounded by two rays with the same initial point, we can assume without loss of generality, that the initial point and one ray coincide with the origin and positive x-axis and the other ray is above it, or can be made so by a simple rotation and translation.

Definition 1. Given the region R bounded by two straight lines, a *jagged edge* is a connected finite sequence, of at least two segments, extending from one boundary to the other. We require that the points determining each segment must be arranged in order of non increasing y-values.

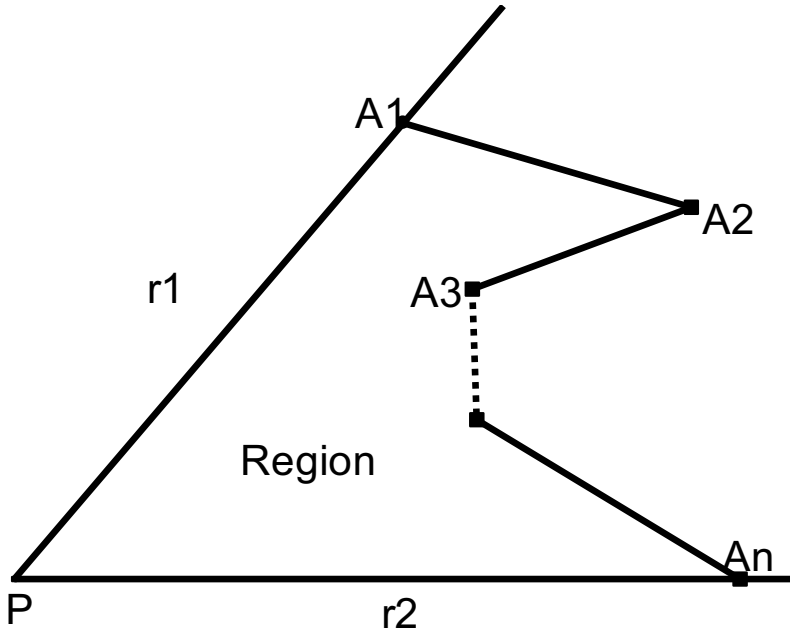


Figure 2. *Jagged edge of n points*

We denote a jagged edge by listing the sequence of points determining the consecutive segments that compose it, $A_1A_2 \ldots A_n$ (Figure 2), where $A_i = (x_i, y_i)$ and $y_i \geq y_{i+1}$ for $1 \leq i < n$, $n \geq 3$, and $y_n = 0$.

Definition 2. Given a region R bounded by two rays with the same initial point and a jagged edge between them, any single segment that can replace the jagged edge while maintaining the same area R is called a *solution segment*, and the triangle formed by the solution segment between the rays the *solution triangle*.

Theorem 3. Given a finite quasi triangular region bounded by two rays with the same origin and a jagged edge consisting of a finite number of segments from one ray to the other, we can replace the jagged edge with a solution segment that preserves the area of the region.

Proof. We proceed by induction on $k \geq 3$, the number of points defining the jagged edge. That is, the smallest jagged edge under consideration must contain at

least two segments. Let l_1 and l_2 be two rays with the same origin P. Let $A_1A_2A_3$ be a jagged edge composed of $n = 3$ points with A_1 on l_1 and A_3 on l_2 (Figure 3).

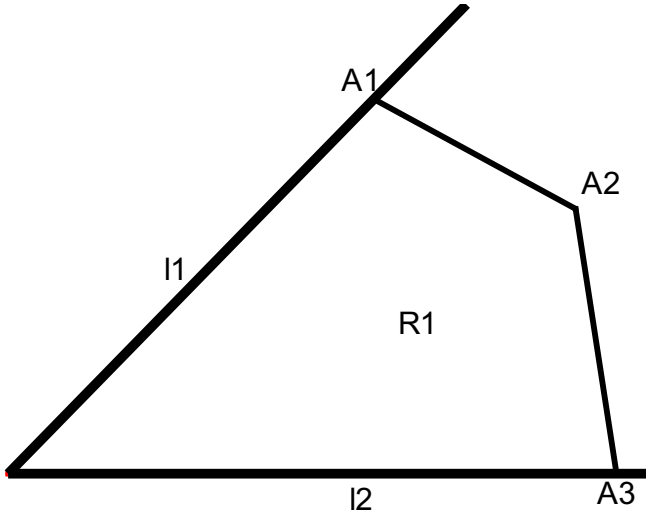


Figure 3. *Jagged edge composed of 3 points*

Let a be a line parallel to ray l_2 through A_1. Note that we now have the jagged edge $A_1A_2A_3$ between two parallel lines, a and l_2. We can find the solution in the

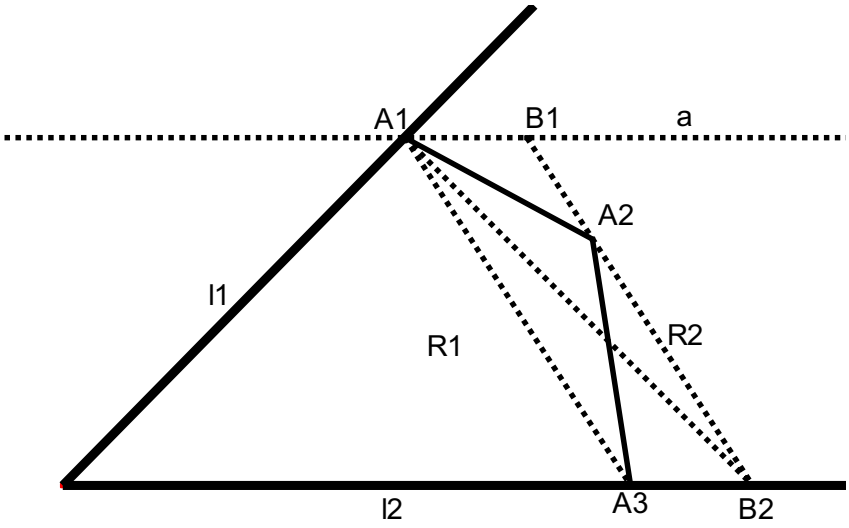


Figure 4. *Solution segment, from parallel boundaries case*

same way as we did before. However, in this case, in order to replace the jagged edge and connect the original rays l_1 and l_2 we must choose the solution segment that passes through A_1 and the point B_2 (Figure 4).

Proceeding by induction, let the region be bounded by two rays l_1 and l_2 with the same origin and separated by a jagged edge $A_1A_2...A_nA_{n+1}...A_k$ as in Figure 5 below. We assume that we can replace the jagged edge $A_1A_2...A_n$ with a solution segment, and show that we can then replace a jagged edge $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ composed of the first $n + 1$ points with a solution segment.

We draw ray r_3 with origin P that passes through point A_n. Note that we have a jagged edge from ray r_1 to ray r_3 composed of n points. By assumption we know we can find a solution triangle and by the first case we know that we can choose the triangle that has vertices at points P, A_n, and some point Q_1 on r_1 (Figure 5). We draw ray r_4 with origin P that passes through A_{n+1}.

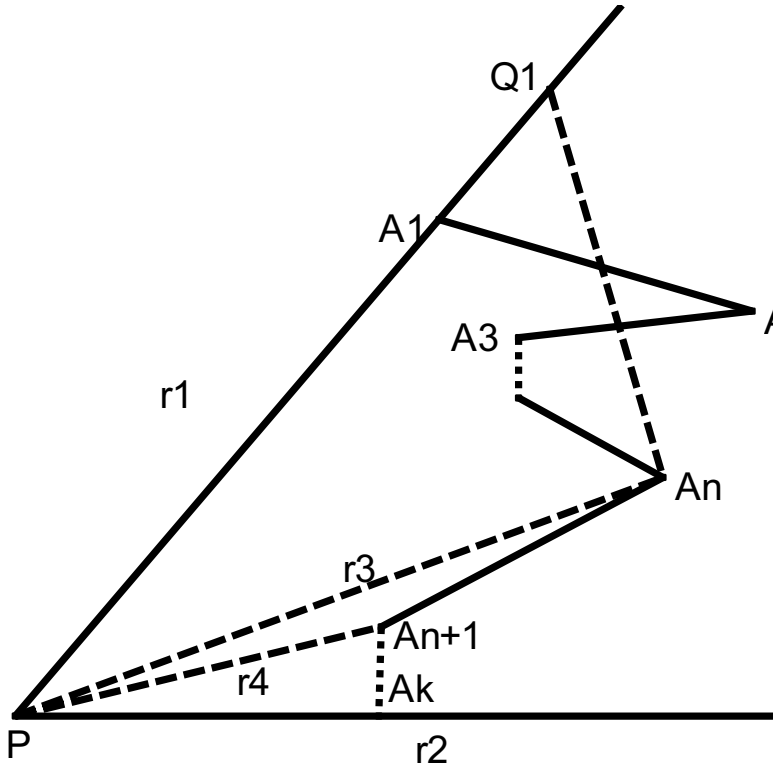


Figure 5. *Solution for first n + 1 points*

Now we have the jagged edge $Q_1A_nA_{n+1}$ from r_1 to r_4 consisting of $n = 3$ points. By the first step of induction we can find a solution triangle. Hence by the PMI the result holds for any jagged edge composed of k points, where k is some positive integer.

Theorem 4. Given a solution triangle to a jagged edge between two rays with the same origin, we can produce infinitely solution triangles for the jagged edge.

Proof. Let rays r_1 and r_2 have the same origin P and let some jagged edge connect the two. Let segment $\overline{A_1A_2}$ with point A_1 on r_1 to point A_2 on r_2 be a solution segment such that ΔPA_1A_2 is a solution triangle for the jagged edge. Let Q_1 be some point on r_2 as seen in Figure 6. We will show that we can find a solution triangle for any such point on r_2. A similar result holds for points on r_1.

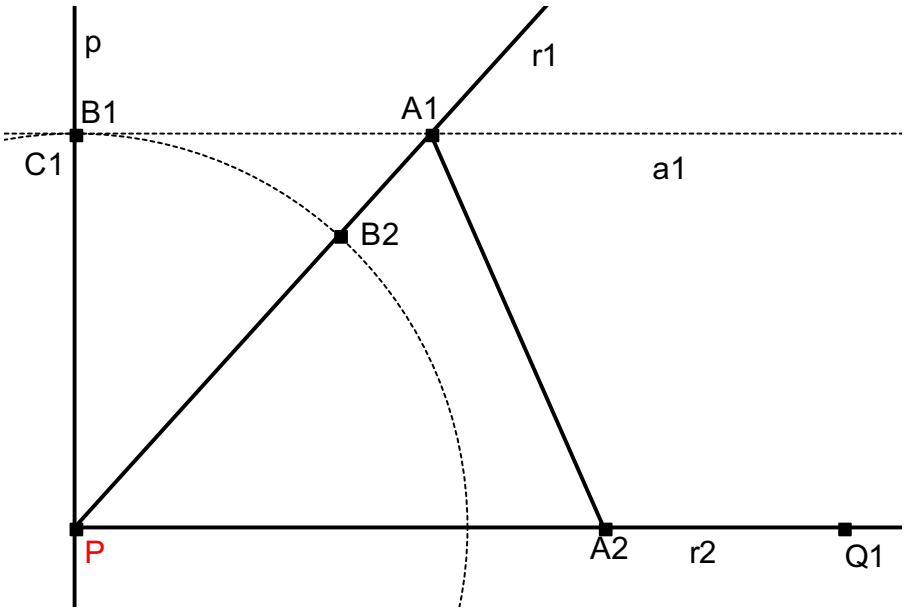


Figure 6. *Given ΔPA_1A_2 find new solution triangle with endpoint Q_1.*

We draw a line p perpendicular to r_2 through P. Let line a_1 be parallel to r_2 through A_1. Let $B_1 = p \cap a_1$. Thus $\overline{PB_1}$ is the height of triangle ΔPA_1A_2. Let C_1 be the circle centered at P with radius $\overline{PB_1}$ and let $B_2 = C_1 \cap r_1$ (Figure 6). Now we

draw $\overline{Q_1B_2}$ and a parallel segment $\overline{A_2B_3}$ where B_3 lies on r_1. Note that $\frac{PB_3}{PB_2}=\frac{PA_2}{PQ_1}$ because nonparallel lines cut by two parallels produce segments whose lengths have equal ratios, by the side splitting theorem. Let circle C_2 be centered at P with radius $\overline{PB_3}$ and let point B_4 be the intersection of circle C_2 with p. Now we draw a line parallel to r_2 through B_4 and let Q_2 be the intersection of this line with r_1. Next we draw segment $\overline{Q_1Q_2}$ (Figure 7).

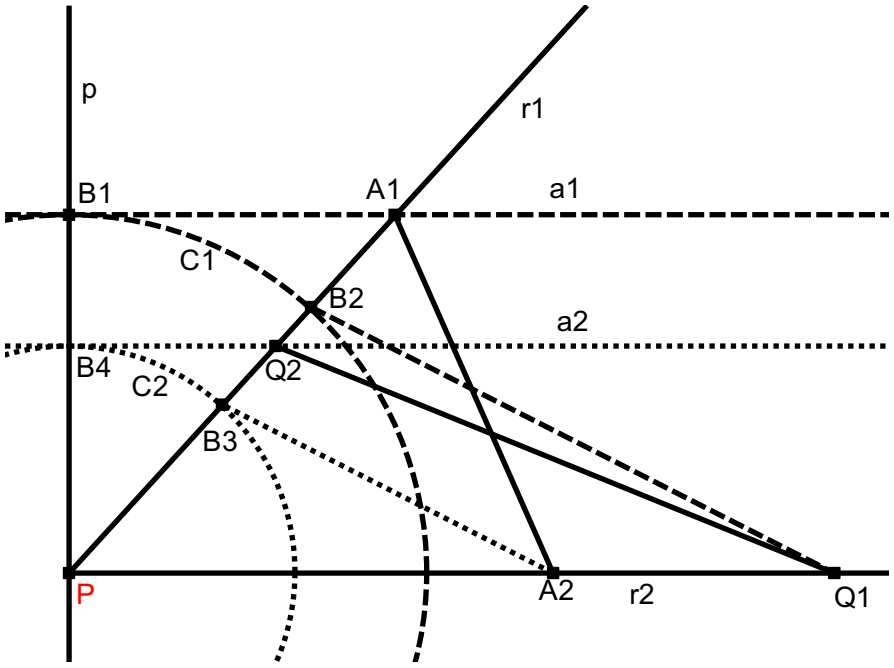


Figure 7. *PQ_2Q_1 is the solution triangle sought.*

Note that $\frac{PB_3}{PB_2}=\frac{PB_4}{PB_1}$ since $PB_3 = PB_4$ is the radius of circle C_2, and $PB_2 = PB_1$ is the radius of circle C_1. Since we already have that $\frac{PB_3}{PB_2}=\frac{PA_2}{PQ_1}$ it follows that

$$\frac{PB_4}{PB_1}=\frac{PA_2}{PQ_1} \quad \text{or} \quad (PB_4)(PQ_1) = (PB_1)(PA_2).$$

Now $(PA_2)(PB_1)$ is the product of the base and height of triangle ΔPA_1A_2 and $(PQ_1)(PB_4)$ is the product of the base and height for triangle ΔPQ_2Q_1. Hence, these two triangles have the same area. Thus ΔPQ_2Q_1 is a solution triangle constructed from an arbitrary point Q_1 on r_2, and the result follows.

Theorem 5. Given a triangular solution ΔPAB for a jagged edge between two rays with origin at P, and defined by the segment $\overline{AB}$ between the rays, there is another segment $\overline{CD}$ of minimum length that creates a solution triangle ΔPCD.

Proof. Without loss of generality let the concurrent lines be $y = kx$ and $y = 0,$ and let P be the origin. Let the coordinates of the endpoints of the segments be $A(a, ka), B(b, 0), C(c, 0),$ and $D(d, kd)$ where $c > 0$ (Figure 8).

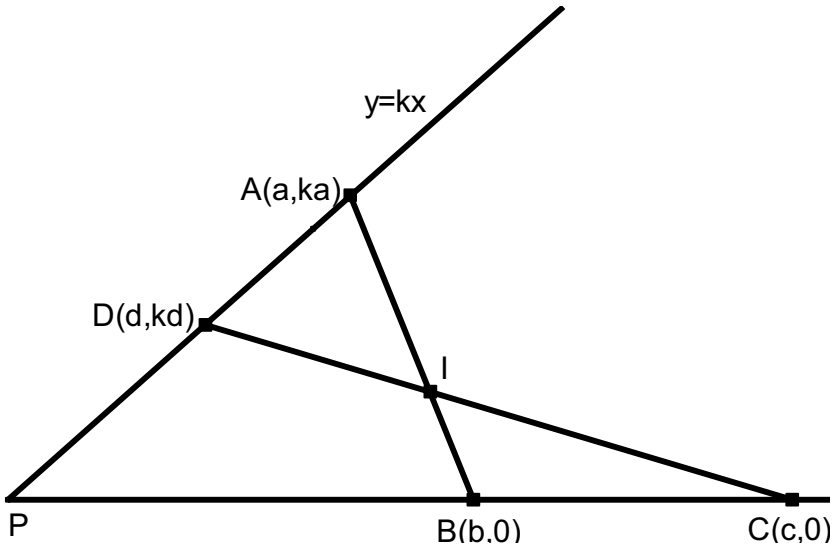


Figure 8. *Segment by C producing a solution triangle.*

By definition, solution triangles have the same area, that is, $\frac{1}{2}kab = \frac{1}{2}kdc,$ hence $d = \frac{ab}{c}.$ The length of $\overline{CD}$ is given by the function

$$L(c) = \sqrt{(c-d)^2 + k^2d^2},$$

substituting *d* we get the radicand

$$R(c) = \frac{a^2b^2(k^2+1)}{c^2} - 2ab + c^2,$$

and since both functions have the same local extrema it follows that

$$\frac{\partial R(c)}{\partial c} = \frac{2[c^4 - a^2b^2(k^2+1)]}{c^3} \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 R(c)}{\partial c^2} = \frac{2(c^4 + 3a^2b^2(k^2+1))}{c^4}$$

yielding the minimum sought at $c = \sqrt[4]{k^2+1}\sqrt{ab}$.

2. The Envelop of Triangular Solutions

We remark that while the point I is always on $\overline{AB}$ the locus of all the segments $\overline{CD}$ that produce a solution triangle is the envelope depicted in Figure 9. Using the endpoints *(c, 0)* and *(d, kd)* we get that the parametric equations of $\overline{CD}$ are

$$x = d + (c-d)t \text{ and } y = kd(1-t).$$

Hence, we can write

$$\frac{x}{d(1-t)+ct} + \frac{y}{kd(1-t)} = 1.$$

Therefore

$$k(cd-d^2)t^2 + ((c-d)y - kdx + 2kd^2 - kcd)t + kdx + dy - kd^2 = 0.$$

Hence, setting the discriminant of the quadratic equal to zero, we obtain that the equation of the envelop is

$$((c-d)y - kdx + 2kd^2 - kcd)^2 - 4(kcd - kd^2)(kdx + dy - kd^2) = 0.$$

Finally, replacing $d = \frac{ab}{c}$, we get:

$$\frac{1}{c^8}(-4a^2(ab-c^2)b^2k(ckx+cy-abk)(abckx+(ab-c^2)cy-a(2ab-c^2)bk)^2) = 0.$$

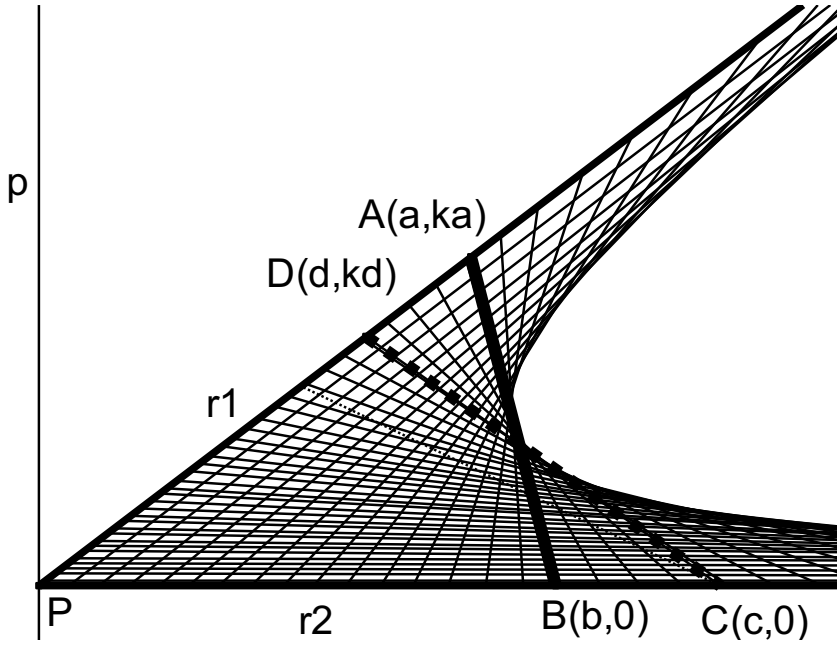


Figure 9. *Envelop of segments producing a solution triangle.*

3. Conclusion

Through the years, as the content of the curriculum grew, the teaching of mathematics at times seems to have focused more on mastering algorithms than on exploration and discovery. However, as one of the greatest math educators of the 20th century said (G. Polya, 1954):

"... mathematics in the making resembles any other human knowledge in the making. You have to guess a mathematical theorem before you prove it; you have to guess the idea of the proof before you carry through the details. You have to combine observations and follow analogies; you have to try and try again. The result of the mathematician's creative work is demonstrative reasoning, a proof; but the proof is discovered by plausible reasoning, by guessing. If the learning of mathematics reflects to any degree the invention of mathematics, it must have a place for guessing, for plausible inference."

In a time when the advances on mathematical software and on affordable tools such as the TI-Nspire CAS calculator, raise serious questions about the need for the emphasis that some algorithms still receive, and even for teaching some traditional algorithms; and when secondary students themselves are showing

(Quesada, 2009) that they can do mathematics when taught to ask the "what if?" question, we need to make inquiry and discovery an integral part of the mathematics classroom at every level.

Both of these articles on the jagged-boundary edge problem are extensions of a problem originally proposed for middle school students, and the solutions found (the first article with one of our undergraduate students) involved only the use of elementary mathematics, yet they answer interesting questions that may have practical applications. One may easily think of different additional extensions simply by asking: what if one of the straight boundaries is part of a circle, or of any graph of other known continuous curves?

References

1. International Study Center at Boston College (2009, March 11). Third international mathematics and science study - 1995. Retrieved from http://timss.bc.edu/timss1995.html

2. Polya, George (1954). *Mathematics and Plausible Reasoning.* Princeton, NJ: Princeton University Press, p. *vi.*

3. Quesada, A (2009). "Theorems Discovered by Students Inspire Teachers' Development," *Understanding Geometry for a Changing World*, NCTM Seventy-first Yearbook, pp. 277-282.

4. Quesada, A., Cooper, A., & Dunlap, L. (2011) . The Jagged Boundary-Edge Problem. Bul. Of the Puig Adam Math. Soc., vol. 89, pp. 14-33, Madrid, Spain, ISSN 1135-0261.

5. Siegel, A., (2004). Telling lessons from the TIMSS Videotape. In W. M. Evers & H. J. Wahlberg (Eds.), *Testing student learning, evaluating teaching effectiveness* (pp. 161-194). Stanford, CA; Hoover Press.

Dificultades encontradas al demostrar vía algebraica algunos teoremas de geometría euclídea *

E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano
Dept. de Algebra, Univ. Complutense de Madrid
{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

Abstract

The article focuses on the prove of Euclidean geometry theorems using algebraic methods. In most of these theorems, the ideal generated by the hypothesis polynomials is a radical ideal, but an example in which this ideal is not radical has been found in dimension greater than 2. In this article, we show that some classical theorems in the Euclidean plane such that the mentioned ideal is not a radical one may be found. The difficulties that appear in such case and how they can be overcome are detailed using an appropriate example.

Dedicado a D. Javier Etayo Miqueo,
profesor de ambos autores,
con nuestro agradecimiento, cariño y admiración,
por la originalidad y sencillez de sus explicaciones,
por su bondad, tantas veces manifestada,
y por su elegante sentido del humor.

Introducción

Las relaciones geométricas usuales en geometría euclídea (paralelismo, perpendicularidad, igualdad de segmentos y de ángulos,...) se traducen algebraicamente en expresiones polinómicas, tras lo cual, operando apropiadamente con los correspondientes polinomios se puede llegar a probar teoremas geométricos, haciendo uso de operaciones algebraicas elementales.

*Parcialmente subvencionado por el proyecto *TIN2012-32482* (Gobierno de España).

Una vez planteado el teorema en términos algebraicos, el proceso de demostración se basa esencialmente en comprobar que el polinomio que traduce la condición de tesis pertenece al ideal que generan los polinomios que traducen las condiciones de hipótesis, todo ello en un cierto anillo de polinomios. Una vez comprobado, la anulación de los polinomios de hipótesis (condiciones de hipótesis) implican la anulación del polinomio de tesis (condición de tesis). La cuestión es que, en ciertos casos raros, aún siendo cierto el aserto geométrico, el ideal que generan los polinomios de hipótesis no contiene al polinomio de tesis, pero si a una potencia entera del mismo (dicho ideal no es radical). Tal es el caso aquí considerado.

De hecho, en el magnífico libro [1], basado en la tesis doctoral de *Shang-Ching Chou*, su autor menciona (pág. 78) que en los 512 teoremas que en él se tratan el ideal generado por los polinomios de hipótesis resultó ser radical en todos ellos. Ahora bien, el Prof. Pavel Pech ha encontrado un bello ejemplo [5, 6] en que tal ideal no es radical, demostrando que todo pentágono equilátero y equiángulo de E^3 es necesariamente plano.

Las técnicas algebraicas usuales para automatizar el proceso son dos. Una basada en calcular "bases estándar" de los ideales que generan dichos polinomios (que los caracterizan), llamadas *Bases de Groebner* (abreviadamente GB). La otra se basa en efectuar sucesivas operaciones de una variante de la división polinómica euclídea, denominada seudodivisión (método de Wu). Versiones elementales de ambas técnicas son descritas en nuestro libro [2].

Ejemplos totalmente desarrollados de aplicación de un método basado en comparar Bases de Groebner pueden encontrarse en nuestro artículo [8], publicado en el n^o 88 de este Boletín. Y ejemplos también totalmente desarrollados de aplicación del método de Wu en [7].

En ambas técnicas, los cálculos a realizar son simples, pero laboriosos y tediosos, por lo que, en la práctica, se ejecutan automáticamente sobre un sistema computacional de cálculo algebraico (CAS), como Maple, Mathematica, Axiom, Singular, Maxima, Derive, CoCoA, ...

El propósito de este artículo es mostrar que en el plano euclídeo real existen teoremas clásicos que pueden ser planteados de modo que el ideal que generan los polinomios de hipótesis no sea radical. Y además sugerir modos de superar las dificultades que entonces surgen. Lo haremos a la luz de un ejemplo apropiado.

1 Pertenencia al ideal radical

Un ideal del anillo $\boldsymbol{A}$ es un subconjunto, I, que sea subanillo y tal que el producto de cualquier elemento de $\boldsymbol{A}$ por otro de I pertenezca a I.

Por ejemplo, en el anillo $\mathbb{Z}$ de los enteros, el subconjunto $9\mathbb{Z}$ de los múltiplos de 9 es un ideal de $\mathbb{Z}$. El entero 3 no pertenece al ideal $9\mathbb{Z}$, pero una potencia entera de 3, su cuadrado, si pertenece a $9\mathbb{Z}$. El entero 3 es raíz de un elemento de $9\mathbb{Z}$, aunque no pertenece a $9\mathbb{Z}$. Los enteros, como 3 y -3, tales que alguna de sus potencias enteras pertenece a $9\mathbb{Z}$, son elementos de lo que se llama el *radical* de $9\mathbb{Z}$.

De modo análogo, en el anillo $\mathbb{R}[x, y]$ de polinomios con coeficientes reales en las indeterminadas o variables independientes x, y, el subconjunto $\langle x^3, y\rangle$ de los polinomios de forma $x^3 \cdot f + y \cdot g$ donde $f, g \in \mathbb{R}[x, y]$ es un ideal de $\mathbb{R}[x, y]$. Los elementos x y x^2 no pertenecen a ese ideal, pero tanto el cubo x como el cuadrado de x^2 si pertenecen. Por ello, x y x^2 pertenecen al *radical* de ese ideal.

El radical del ideal I se denota $\sqrt{I}$. Obviamente, $I \subseteq \sqrt{I}$ y fácilmente se prueba que $\sqrt{I}$ es un ideal del mismo anillo. El radical de $9\mathbb{Z}$ es el ideal $3\mathbb{Z}$ del anillo $\mathbb{Z}$. Análogamente, el radical del ideal $\langle x^3, y\rangle$ del anillo $\mathbb{R}[x, y]$ es el ideal $\langle x, y\rangle$.

Un ideal coincidente con su radical se dice que es un *ideal radical*. Por ejemplo, $3\mathbb{Z}$ es un ideal radical del anillo $\mathbb{Z}$. Análogamente, $\langle x, y\rangle$ es un ideal radical del anillo $\mathbb{R}[x, y]$.

En lo que sigue, se va a considerar un anillo de polinomios sobre un cuerpo con un número finito de variables o indeterminadas. En tales anillos sus ideales admiten bases finitas y existe un criterio muy simple para decidir si un elemento del anillo pertenece al radical de un ideal:

Criterio de pertenencia al radical. Sea $\boldsymbol{A} = k[x_1, ..., x_n]$ *un anillo de polinomios sobre un cuerpo* k*, sea* $I = \langle f_1, ..., f_m\rangle$ *un ideal de* $\boldsymbol{A}$ *y sea* $f \in \boldsymbol{A}$*. Entonces* $f \in \sqrt{I}$ *si y solo si el ideal* $\langle f_1, ..., f_m, 1 - y \cdot f\rangle$ *del anillo de polinomios* $\boldsymbol{A}^* = k[x_1, ..., x_n, y]$ *es el ideal* $\langle 1\rangle$*, es decir, todo el anillo de polinomios* $\boldsymbol{A}^*$ *(donde* y *es una variable independiente de* $x_1, ..., x_n$*).*

(Su demostración sigue del teorema de los ceros de Hilbert y puede verse, por ejemplo, en [4], pág. 176. La omitimos, por no aportar ninguna luz sobre su aplicación, que es lo que se va a utilizar aquí).

2 Planteando en términos algebraicos un teorema clásico del plano euclídeo real

Al expresar en términos algebraicos el siguiente teorema clásico del plano euclídeo, el ideal que generan los polinomios de hipótesis va a resultar ser no radical.

Enunciado: *Dado un triángulo ABC, sea T el punto de tangencia de su circunferencia inscrita con el lado $\overline{AB}$ y sea X el punto de tangencia con el mismo lado $\overline{AB}$ de la circunferencia excrita contenida en la region angular $\widehat{ACB}$. Entonces los segmentos orientados $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{TB}$ son iguales.*

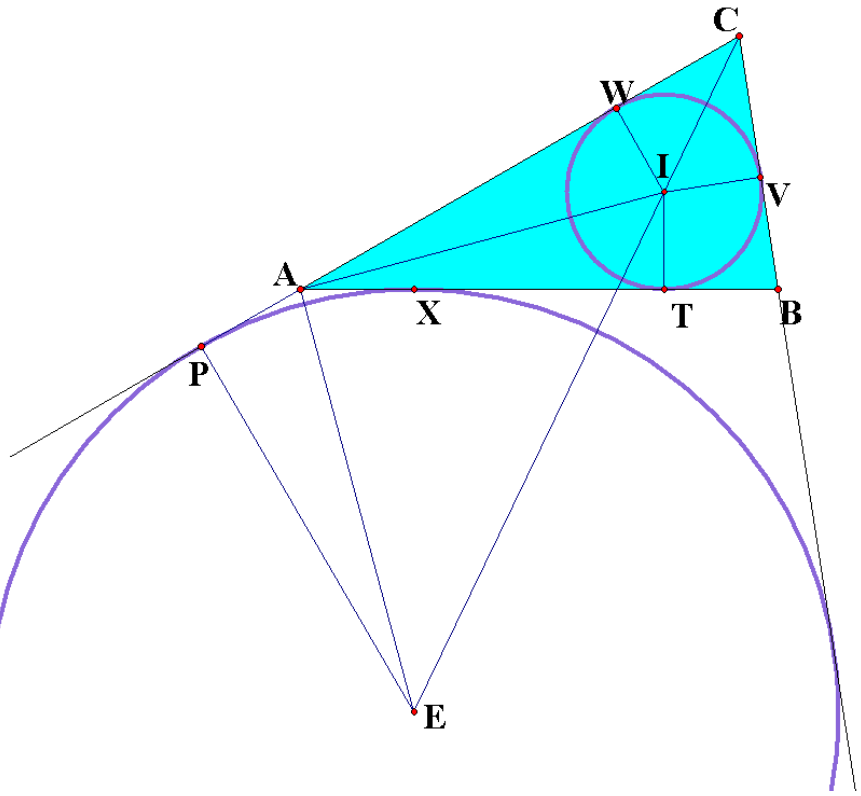


Fig. 1: *Equidistancia de los puntos de tangencia de incentro y excentro*

(Para evitar prefijos contradictorios, hemos preferido la terminología circunferencia *excrita* y *excentros*, mejor que circunferencia exinscrita y exincentros)

Puntos considerados en la configuración

Vértices A, B, C del triángulo. Incentro I del triángulo. Puntos de tangencia T, V, W de la circunferencia inscrita con los respectivos lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ del triángulo. Excentro E de la circunferencia excrita mencionada en el enunciado. Proyección ortogonal P del excentro E sobre la recta-lado CA del triángulo. Punto de tangencia X de la citada circunferencia excrita con el lado $\overline{AB}$ del triángulo.

Sistema de referencia y coordenadas

Se consideran coordenadas cartesianas rectangulares en el plano euclídeo. La elección de un vértice como origen de coordenadas y otro en el eje de abscisas no supone pérdida de generalidad. De este modo, las coordenadas de los puntos considerados, pueden denotarse como se indica a continuación:

$$A = (0,0),\ B = (b,0),\ C = (c_1,c_2),\ I = (t,r),\ T = (t,0),$$

$$V = (v_1,v_2),\ W = (w_1,w_2),\ E = (e_1,e_2),\ P = (p_1,p_2),\ X = (x,0)$$

Supondremos el triángulo ABC no degenerado, es decir, no colineales los puntos A, B, C, lo que implica las desigualdades $b \neq 0 \neq c_2$ en las coordenadas de los vértices B, C del triángulo. Por otra parte, suponiendo no rectos los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$, se verifican las siguientes desigualdades entre las coordenadas de los puntos considerados:

$$0 \neq t \neq b\ ;\ b - t \neq r \neq t\ ;\ v_1 \neq b\ ;\ 0 \neq w_1 \qquad (1)$$

(en otro caso, los cálculos que siguen son mas simples, con leves alteraciones).

Condiciones de hipótesis y sus correspondientes polinomios de hipótesis

Denotaremos por $H_1, H_2, H_3, ...$ a las condiciones de hipótesis y por $h_1, h_2, h_3, ...$ a los correspondientes polinomios, cuyas anulaciones definen dichas condiciones. (Los polinomios de hipótesis y tesis pueden ser generados automáticamente, aplicando los procedimientos descritos en [8]).

Para simplicidad de cálculo, consideraremos como puntos iniciales de la configuración a los tres puntos A, B, I (la sustitución de C por I como punto inicial, permite simplificar la determinación de los siguientes puntos de la configuración, como se comprenderá mas adelante).

Las dos siguientes condiciones de hipótesis, H_1 y H_2, van a permitir determinar el punto de tangencia W.

Condición de hipótesis H_1. Por definición de bisectriz, la condición de estar I en la bisectriz del ángulo interior $\widehat{A}$ del triángulo ABC viene dada por la igualdad de ángulos convexos orientados $\widehat{BAI} = \widehat{IAC}$. Esta igualdad de ángulos equivale a igualdad de sus tangentes (por ser impar la función *tangente*), es decir, a la igualdad $tan(\widehat{BAI}) = tan(\widehat{IAC})$. Pero, para expresar esta igualdad en función de las coordenadas de los puntos considerados, conviene tener en cuenta que $\widehat{BAW} = 2 \cdot \widehat{BAI}$ y por tanto

$$tan(\widehat{BAW}) = tan(2 \cdot \widehat{BAI}) = \frac{2 \cdot tan(\widehat{BAI})}{1 - tan^2(\widehat{BAI})}$$

Se tiene pues

$$tan(\widehat{BAW}) = \frac{w_2}{w_1} \quad ; \quad tan(\widehat{BAI}) = \frac{r}{t} \quad ; \quad \frac{w_2}{w_1} = \frac{2rt}{t^2 - r^2}$$

donde los denominadores son no nulos, según sigue de las desigualdades (1). De la última igualdad resulta el polinomio de hipótesis

$$h_1 = 2rtw_1 - (t^2 - r^2)w_2$$

Condición de hipótesis H_2. Por ser los puntos de tangencia W y T simétricos respecto de la bisectriz del ángulo interior $\widehat{A}$ del triángulo ABC, las rectas TW y AI son ortogonales, de donde resulta el polinomio de hipótesis

$$h_2 = t(w_1 - t) + rw_2$$

Las dos siguientes condiciones de hipótesis, H_3 y H_4 , van a permitir determinar el punto de tangencia V.

Condición de hipótesis H_3. Por definición de bisectriz, la condición de estar I en la bisectriz del ángulo interior $\widehat{B}$ del triángulo ABC viene dada por la igualdad de ángulos convexos orientados $\widehat{VBI} = \widehat{IBA}$. Esta igualdad de ángulos equivale a igualdad de sus tangentes, es decir, a la igualdad $tan(\widehat{VBI}) = tan(\widehat{IBA})$. Pero, para expresar esta igualdad en función de las coordenadas de los puntos considerados, conviene tener en cuenta que $\widehat{VBA} = 2 \cdot \widehat{IBA}$ y por tanto

$$tan(\widehat{VBA}) = tan(2 \cdot \widehat{IBA}) = \frac{2 \cdot tan(\widehat{IBA})}{1 - tan^2(\widehat{IBA})}$$

Se tiene pues

$$tan(\widehat{VBA}) = \frac{v_2}{b - v_1} \quad ; \quad tan(\widehat{IBA}) = \frac{r}{b - t} \quad ; \quad \frac{v_2}{b - v_1} = \frac{2r(b - t)}{(b - t)^2 - r^2}$$

donde los denominadores son no nulos, según sigue de las desigualdades (1). De la última igualdad resulta el polinomio de hipótesis

$$h_3 = 2(b - v_1)(b - t)r - ((b - t)^2 - r^2)v_2$$

Condición de hipótesis H_4. Por ser los puntos de tangencia V y T simétricos respecto de la bisectriz del ángulo interior $\widehat{B}$ del triángulo ABC, las rectas TV y BI son ortogonales, de donde resulta el polinomio de hipótesis

$$h_4 = (t - b)(v_1 - t) + rv_2$$

Las dos siguientes condiciones de hipótesis, H_5 y H_6 , van a permitir determinar el vértice C del triángulo ABC.

Condición de hipótesis H_5. Los tres puntos A, W, C son colineales, de donde resulta el polinomio de hipótesis

$$h_5 = w_1c_2 - w_2c_1$$

Condición de hipótesis H_6. Los tres puntos B, V, C son colineales, de donde resulta el polinomio de hipótesis

$$h_6 = (v_1 - b)c_2 - v_2(c_1 - b)$$

Las dos siguientes condiciones de hipótesis, H_7 y H_8 , van a permitir determinar el excentro E del triángulo ABC.

Condición de hipótesis H_7. El excentro E equidista de los lados del ángulo convexo $\widehat{C}$ del triángulo ABC, luego está en la bisectriz de dicho ángulo $\widehat{C}$, y por tanto son colineales los tres puntos C, I, E, de donde resulta el polinomio de hipótesis

$$h_7 = (t - c_1)(e_2 - c_2) - (r - c_2)(e_1 - c_1)$$

Condición de hipótesis H_8. Al estar E en la bisectriz del ángulo externo $\widehat{PAB}$ de vértice A del triángulo ABC y estar B en la bisectriz del ángulo

$\widehat{A}$ del triángulo ABC, se tiene $2 \cdot \widehat{EAI} = 2 \cdot \widehat{EAB} + 2 \cdot \widehat{BAI} = 2$ Rectos, luego el ángulo convexo $\widehat{EAI}$ es recto, y por tanto las rectas AE y AI son ortogonales, de donde resulta el polinomio de hipótesis

$$h_8 = e_1 t + e_2 r$$

Las dos siguientes condiciones de hipótesis, H_9 y H_{10} , van a permitir determinar el punto P de tangencia de la circunferencia excrita de centro E con la recta-lado CA del triángulo ABC.

Condición de hipótesis H_9. Los tres puntos P, A, C son colineales, de donde resulta el polinomio de hipótesis

$$h_9 = -p_1(c_2 - p_2) + p_2(c_1 - p_1)$$

Condición de hipótesis H_{10}. El punto P es proyección ortogonal del excentro E sobre la recta-lado CA del triángulo ABC, de donde resulta el polinomio de hipótesis

$$h_{10} = c_1(e_1 - p_1) + c_2(e_2 - p_2)$$

La siguiente condición de hipótesis, H_{11} , va a permitir determinar el punto X de tangencia de la circunferencia excrita de centro E con la recta-lado AB del triángulo ABC.

Condición de hipótesis H_{11}. La condición de que X esté en la circunferencia excrita de centro E que pasa por P puede expresarse mediante la igualdad $dist^2(X, E) = dist^2(P, E)$, de donde resulta el polinomio de hipótesis

$$h_{11} = 2e_1 x - x^2 - 2e_1 p_1 + p_1^2 - 2e_2 p_2 + p_2^2$$

Condición de tesis y su correspondiente polinomio de tesis

La condición de tesis viene dada por la igualdad de segmentos orientados, $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{TB}$, mencionada en el enunciado. De ella resulta el siguiente polinomio de tesis, denotado th (cuya anulación define la condición de tesis):

$$th = t - b + x$$

Se trata ahora de comprobar si la condición de tesis es consecuencia de las de hipótesis, aplicando métodos algebraicos de demostración.

3 Aplicando el método de las GB iguales

En el problema planteado en la Sección 2, distinguimos dos tipos de coordenadas de los puntos considerados. Por haber elegido A, B, I como puntos iniciales de la configuración, las coordenadas de estos tres puntos van a ser consideradas como parámetros y las coordenadas de los demás como variables, es decir:

Parámetros (constantes libremente elegibles): b, t, r

Variables (coordenadas ligadas, condicionadas a los valores de los parámetros): $w_1, w_2, v_1, v_2, c_1, c_2, e_1, e_2, p_1, p_2, x$

Ello conduce a considerar el anillo de polinomios cuyas indeterminadas son las 11 variables anteriormente citadas, sobre el cuerpo que sobre los reales generan los 3 parámetros, es decir, sobre el cuerpo $\mathbb{R}(b, t, r)$. Tal anillo de polinomios se denomina *anillo de coordenadas de la configuración*.

En el problema de la Sección 2, se trata de comprobar si la condición de tesis es consecuencia, o no, de las de hipótesis. Para ello se va a comprobar si el polinomio de tesis pertenece, o no, al ideal generado por los polinomios de hipótesis. Para asegurar tal relación de pertenencia, bastaría comprobar la igualdad de los dos ideales siguientes del mencionado anillo de polinomios:

$$H = \langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11} \rangle \tag{2}$$

$$HT = \langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, th \rangle \tag{3}$$

Para comprobar la igualdad de esos dos ideales calculamos sus Bases de Groebner en orden lexicográfico puro respecto de la mencionada sucesión de variables, obteniéndose (con la ayuda de un CAS):

$GB(H) = [t^2 - 2bt + b^2 + 2xt - 2bx + x^2, p_2r^2 + 2rbt - 2rt^2 + p_2t^2, -r^2b + r^2t + p_1r^2 + bt^2 - t^3 + p_1t^2, e_2r - t^2 + bt, t + e_1 - b, c_2r^2 + 2rbt - 2rt^2 - tc_2b + c_2t^2, r^2t + r^2c_1 - r^2b - t^3 + t^2c_1 + bt^2 - bc_1t, -2rt^2 + 4rbt + v_2r^2 + v_2b^2 - 2v_2bt + v_2t^2 - 2rb^2, -2r^2b + r^2v_1 + r^2t + b^2v_1 - b^2t + 2bt^2 - 2btv_1 + t^2v_1 - t^3, -2rt^2 + w_2r^2 + w_2t^2, r^2t + r^2w_1 - t^3 + t^2w_1]$

$GB(HT) = [t - b + x, p_2r^2 + 2rbt - 2rt^2 + p_2t^2, -r^2b + r^2t + p_1r^2 + bt^2 - t^3 + p_1t^2, e_2r - t^2 + bt, t + e_1 - b, c_2r^2 + 2rbt - 2rt^2 - tc_2b + c_2t^2, r^2t + r^2c_1 - r^2b - t^3 + t^2c_1 + bt^2 - bc_1t, -2rt^2 + 4rbt + v_2r^2 + v_2b^2 - 2v_2bt + v_2t^2 - 2rb^2, -2r^2b + r^2v_1 + r^2t + b^2v_1 - b^2t + 2bt^2 - 2btv_1 + t^2v_1 - t^3, -2rt^2 + w_2r^2 + w_2t^2, r^2t + r^2w_1 - t^3 + t^2w_1]$

Comparando ambas bases de Groebner se comprueba que $GB(HT) \neq GB(H)$. Ahora bien, es sabido que, una vez fijado un modo de ordenar las variables (orden lexicográfico, por ejemplo) y elegido un orden de estas, la base de Groebner es única para cada ideal. Por tanto, $HT \neq H$ y, en consecuencia, el polinomio de tesis no pertenece al ideal H.

En resumen, en el problema geométrico planteado en la Sección 2, este primer intento de demostrar que la condición de tesis se sigue de las de hipótesis ha fracasado. Vamos pues a tratar de probar de otro modo que dicha condición de tesis sigue de las condiciones de hipótesis.

4 Aplicando el criterio de pertenencia al radical

Ya se ha visto que el polinomio de tesis no pertenece al ideal H, que generan los polinomios de hipótesis. Vamos ahora a averiguar si alguna potencia entera del polinomio de tesis pertenece al ideal H, es decir, si el polinomio de tesis pertenece al radical del ideal H. Para ello, vamos a aplicar a nuestro problema el criterio enunciado en la Sección 1.

Aplicando dicho criterio al caso particular de nuestro problema geométrico, en que las variables son $w_1, w_2, v_1, v_2, c_1, c_2, e_1, e_2, p_1, p_2, x$ y el cuerpo de coeficientes es $\mathbb{R}(b, t, r)$, al calcular la correspondiente base de Groebner en orden lexicográfico y respecto del mencionado orden de variables, se obtiene el resultado siguiente

$$GB(\langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, 1 - y \cdot th\rangle) = \langle 1\rangle$$

Según el mencionado criterio, ello implica que el polinomio de tesis pertenece al ideal $\sqrt{H}$, esto es, que alguna potencia entera del polinomio de tesis debe pertenecer al ideal H.

Y, en efecto, el cuadrado del polinomio de tesis es

$$th^2 = (t - b + x)^2 = t^2 - 2bt + b^2 + 2xt - 2bx + x^2$$

que es precisamente el primer polinomio de la lista $GB(H)$ obtenida en la Sección 3. Por tanto, la condición de tesis es consecuencia de las 11 condiciones de hipótesis consideradas en la Sección 2.

5 Probando con una potencia del polinomio de tesis

En nuestro problema planteado en la Sección 2 ocurre que una potencia entera del polinomio de tesis pertenece al ideal H, lo que sugiere otro modo de encaminar la demostración. Se trata de comparar el ideal H con el ideal que generan los polinomios de hipótesis junto a la mencionada potencia del polinomio de tesis, es decir, el ideal suma

$$H + \langle th^2 \rangle = \langle h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, th^2 \rangle$$

Para ello, como anteriormente se ha hecho, comparamos sus respectivas Bases de Groebner y, como era de esperar, calculándolas resultan ser iguales

$$GB(H + \langle th^2 \rangle) = GB(H)$$

lo que implica que $th^2 \in H$. Luego en el anillo de coordenadas existen $f_1, f_2, ..., f_n$, tales que $f_1 \cdot h_1 + f_2 \cdot h_2 + f_{11} \cdot h_{11} = th^2$. En consecuencia

$$h_1 = 0,\ h_2 = 0, ...,\ h_{11} = 0 \implies th^2 = 0$$

luego la condición de tesis se sigue de las de hipótesis.

Lo que se acaba de hacer, nos sugiere la posibilidad de aplicar este modo de operar a otros problemas geométricos en que $th \notin H$, pero se prevea que $th^n \in H$, para algún valor entero de $n > 1$. Es decir, se trata de ir comprobando si se verifica la igualdad

$$GB(H + \langle th^n \rangle) = GB(H)$$

al ir dando al exponente n valores crecientes, $n = 2, 3, ...$, hasta llegar a obtener la igualdad (suponiendo que la proposición a probar sea cierta).

Una vez calculadas dichas bases de Groebner, estas pueden resultar de longitud considerable, por lo que, para compararlas con comodidad, para decidir si son, o no, iguales, es aconsejable hacer uso del comando de evaluación booleana de igualdad de listas de que disponen algunos de estos CAS.

(Notemos que este método que acabamos de describir puede ser mas rápido de ejecutar que el de la Sección 4, teniendo en cuenta que la complejidad algorítmica del cálculo de GB es doble exponencial, en el peor caso).

6 Buscando la causa de no ser radical el ideal H

Notemos que en el planteamiento del problema geométrico hecho en la Sección 2, la condición de tesis $\overrightarrow{AX}=\overrightarrow{TB}$ ha conducido al polinomio de tesis $th = t - b + x$, que es un polinomio de grado uno en la variable x (abscisa del punto X).

Por otra parte, en dicho planteamiento, el punto de tangencia X de la circunferencia excrita de centro E con la recta AB viene dado por dos condiciones:

1) la de colineación de los puntos X, A, B, que ya está implícita al haber tomado como nula la segunda coordenada del punto X, y, de otra parte,

2) la condición de estar X en la circunferencia de centro E, que pasa por P, que conduce al polinomio de hipótesis $h_{11} = 2e_1x - x^2 - 2e_1p_1 + p_1^2 - 2e_2p_2 + p_2^2$ que es un polinomio de grado 2 en la variable x.

Pero la variable x únicamente aparece en este polinomio de hipótesis h_{11} y en ningún otro, lo que, al ser $w_1, w_2, v_1, v_2, c_1, c_2, e_1, e_2, p_1, p_2, x$ variables independientes, implica que cualquier elemento del ideal H, es decir, de la forma

$$f_1 \cdot w_1 + f_2 \cdot w_2 + f_3 \cdot v_1 + f_4 \cdot v_2 + f_5 \cdot c_1 + f_6 \cdot c_2 + f_7 \cdot e_1 + f_8 \cdot e_2 + f_9 \cdot p_1 + + f_{10} \cdot p_2 + f_{11} \cdot x$$

donde los elementos f_i ; $i = 1, 2, ..., 11$ pertenecen al anillo de coordenadas de la configuración, sea de grado un número par en la variable x.

Por tanto, el polinomio de tesis, $th = t - b + x$, que es de grado uno en la variable x, no puede pertenecer al ideal H, cuyos elementos son todos de grado par en la variable x.

Pero, ¿por qué ocurre este hecho? Siendo X punto de tangencia de una circunferencia (la excrita de centro E) con una recta (la recta AB), el orden de contacto de ambas curvas algebraicas es mayor que uno. Ello implica que el ideal de la variedad intersección de ambas, es decir, el ideal suma de sendos ideales, no es el ideal de un punto, sino un ideal primario cuyo radical es el ideal de un punto. En resumen, este hecho es consecuencia de ser X *punto de tangencia* de las dos curvas algebraicas de las que es intersección.

La misma circunstancia se repite en otros problemas geométricos en que un punto de la configuración implicado en la condición de tesis queda deter-

minado como intersección de dos curvas algebraicas cuyo orden de contacto es mayor que uno.

(De modo mas general, este hecho corresponde a que X sea punto singular de la variedad algebraica que definen los polinomios de hipótesis y, por el contrario, sea punto simple de la variedad que define el polinomio de tesis).

7 Planteando el problema de otro modo

Volviendo a nuestro problema de la Sección 2, cabe preguntarse si podría hacerse otro planteamiento tal que el ideal generado por los polinomios de hipótesis fuera un ideal radical.

De acuerdo con lo indicado al comienzo de esta sección, se trata de evitar que X sea determinado como punto de tangencia. Pero, ¿puede ser X determinado de tal modo? En efecto, de acuerdo con la definición de la condición de hipótesis H_8, la semirrecta A_E (de origen A y que pasa por E) es bisectriz del ángulo externo $\widehat{PAB}$ de vértice A del triángulo ABC. En consecuencia, los puntos de tangencia, P y X, de la circunferencia excrita de centro E son simétricos respecto de la recta AE, que contiene a la bisectriz A_E de dicho ángulo externo, lo que implica la perpendicularidad de las rectas PX y AE. Ello permite determinar el punto X por intersección de las rectas secantes PX y AB.

Esto sugiere sustituir la condición de hipótesis H_{11} de la Sección 2 por otra nueva condición, que denotamos H'_{11}, consistente en la perpendicularidad de las rectas PX y AE, que conduce al nuevo polinomio de hipótesis

$$h'_{11} = e_1 \cdot (x - p_1) - e_2 \cdot p_2$$

Denotemos ahora por H' y HT' a los respectivos ideales resultantes de sustituir h_{11} por h'_{11} en las bases de los ideales H y HT que aparecen en (2) y (3). Al calcular sus respectivas Bases de Groebner se comprueba que

$$GB(HT') = GB(H')$$

Por tanto, $HT' = H'$ y, en consecuencia, el polinomio de tesis pertenece al ideal H', luego la condición de tesis sigue de las de hipótesis.

Conclusiones

Hemos mostrado un ejemplo de teorema clásico del plano euclídeo real planteado de modo que el ideal que generan los polinomios de hipótesis resulta ser no radical. En dicho ejemplo, esta anomalía proviene del hecho de que un punto implicado en la condición de tesis viene determinado como intersección de dos curvas cuyo orden de contacto es mayor que uno.

También se ha mostrado cómo las dificultades surgidas en tal caso pueden ser superadas de varios modos: 1) aplicando el criterio de pertenencia a radical; 2) sustituyendo el polinomio de tesis por una potencia entera del mismo; 3) planteando, si es posible, el problema geométrico de modo que se evite que puntos implicados en la condición de tesis sean puntos de tangencia entre curvas algebraicas definidas por los polinomios de hipótesis.

En el plano euclídeo hemos encontrado otros ejemplos en los que el ideal que generan los polinomios de hipótesis resulta ser no radical y en todos ellos la causa de tal anomalía fue la misma anteriormente descrita (lo que no quiere decir que no exista otra causa).

Finalmente, cabe plantearse si, en vista de las dificultades que pueden surgir, vale la pena aplicar métodos algebraicos para probar teoremas de geometría euclídea. Pero es que hay problemas de geometría euclídea abordables únicamente vía métodos algebraicos, como ocurre con el problema tratado en [3] y [9]. Por otra parte, al aplicar métodos algebraicos se utilizan técnicas estándar, al contrario que al aplicar métodos de geometría sintética, que con frecuencia requieren buenas dosis de ingenio.

Nota: Los autores ofrecen a los lectores interesados el código Maple de los cálculos desarrollados en este artículo.

Referencias

[1] S.-C. Chou (1988), *Mechanical Geometry Theorem Proving*. Reidel.

[2] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (1994), *Nuevas tecnologías en Geometría*. Editorial Complutense, págs. 173-220.

[3] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (2001), Automatic determination of geometric loci. $3D$-Extension of Simson-Steiner Theorem. (En: J.A.

Campbell, E. Roanes Lozano editores: *Artificial Intelligence and Symbolic Computation. Procs. Intl. Conf. AISC 2000*). Springer LNCS 1930, págs. 157–173.

[4] D. Cox, J. Little, D. O'Shea (2005), *Ideals, Varieties and Algorithms.* Second Editon. Springer.

[5] P. Pech (2007), On the Need of Radical Ideals in Automatic Proving: A Theorem About Regular Polygons. (En: F. Botana, T. Recio editores: *Proceedings of the 6th international conference on Automated deduction in geometry*). Springer-Verlag, LNAI 4869, págs. 157-170.

[6] P. Pech (2007), *Selected topics in geometry with classical vs. computer proving*, Barnes & Noble.

[7] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (2010), Una invitación a analizar problemas geométricos ejecutando seudodivisiones (En: L. Lambán, A. Romero, J. Rubio editores: *Contribuciones Científicas en honor de Mirian Andrés*). Editorial Universidad de la Rioja, págs 439-449.

[8] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (2011), Un método algebraico-computacional para demostración automática en geometría euclídea. *Boletín de la Soc. Puig Adam* **88**, págs. 31-63.

[9] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (2012), Un unexpected 3D geometric locus (En: M. Castrillón, M.A. Garrido, J.A. Jaramillo, J.M. Martínez, J. Rojo editores: *Contribuciones matemáticas en homenaje a Juan Tarrés*). Univ. Complutense de Madrid, págs 317-326.

Cuadros con sabor matemático

Javier Peralta
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid
javier.peralta@uam.es

Abstract

The aim of this paper is to show the existing connections between mathematics and painting. To that end we present some pictures with mathematical motives or representing a mathematical allegory, and their corresponding comments.

A la memoria de José Javier Etayo Miqueo,
maestro afable, querido amigo.

Introducción

En España, cuando hablamos de cultura parece que nos referimos a arte, literatura, música…; y no es inusual que personas ilustradas confiesen su ignorancia con respecto a la ciencia y, especialmente, a la matemática. Si bien este fenómeno, acaso con menor intensidad, también afecte a otros países; y en ese sentido se ha expresado Murray Gell-Mann, Premio Nobel de Física, al afirmar que había conocido personas que presumían de saber muy poco de ciencia o de matemáticas, pero en cambio, aunque se encontró con algún científico que no había leído a Shakespeare, nunca advirtió que se vanagloriara de ello.

Mas no es necesario buscar opiniones de científicos ilustres para ser conscientes de esa situación. ¿Quién de nosotros, cuando por ejemplo ha compartido mesa en un restaurante con varios compañeros, una vez que se conoce el total a pagar no ha sido requerido para que hiciera la división? (aunque el número de comensales fuera, por ejemplo cuatro o cinco). A nadie se le ocurriría, por ejemplo, preguntar en la sala de profesores de un centro: “Tú que eres de

Geografía, ¿dónde se encuentra Túnez?", o "Tú que eres de Lengua, corrígeme esta carta" o incluso "Fulano se ha roto el fémur; tú que eres de Ciencias, ¿dónde está el fémur?" Sin duda, habría sido tachado de inculto. No obstante, no hay recato en requerir de un profesor de matemáticas que calcule el precio de un determinado producto con IVA, la media o la desviación típica de las notas de una asignatura, o cosas parecidas.

En fin, alguno de los hechos o argumentos que he esgrimido, junto a otras muchas experiencias que probablemente tenga el lector, no harían más que confirmar esa apreciación que indicaba al principio: que las matemáticas parece como si no formaran parte de la cultura.

Sin embargo, esa idea no puede tenerse en pie, a poco que reflexionemos sobre el lugar que ha ocupado la matemática a lo largo de la historia. Baste para ello con recordar cómo era considerada en la civilización griega, a tenor por lo menos de la conocida inscripción: "Nadie entre aquí que no sepa geometría", que, como es sabido, se encontraba a la entrada de la Academia de Platón, o con traer a colación que las matemáticas -la aritmética y la geometría en concreto- han estado invariablemente incluidas en las *artes liberales*, etc.

Hay que decir, no obstante, que especialmente en las últimas décadas empieza a reconocerse a las matemáticas el valor que tienen: cada vez son más frecuentes las conferencias divulgativas de matemáticas, en ocasiones aparece un artículo sobre esta materia en algún diario, comienzan a verse colecciones de libros de divulgación matemática en puestos de periódicos, etc. Y también en el mundo académico se escriben cada vez más artículos sobre cultura matemática, presencia de las matemáticas en el arte, etc.

Posiblemente los trabajos más comunes sobre ese último aspecto versen sobre relaciones de las matemáticas con la arquitectura o bien con la música (véanse por ejemplo [4] y [5]). Pero me parece que son menos habituales los que refieren a matemáticas y pintura, y ello a pesar de que han existido algunos momentos a lo largo de la historia en los que se aprecian vínculos evidentes entre ambas.

El más conocido, sin duda, tiene lugar en el Renacimiento. Si bien durante el milenio anterior la geometría apenas había evolucionado, del Medievo al Renacimiento despierta de nuevo al ser investigadas por los pintores las reglas de la perspectiva (esto es, la manera de representar en un lienzo -de dos dimensiones- lo que vemos en el espacio tridimensional). Y de esa perspectiva surgirían después dos ramas de la geometría como ciencia matemática: la geometría proyectiva (*la geometría que nació del arte*) y la geometría descriptiva. Aunque hay también al menos otros dos periodos históricos en que, de nuevo, la matemática y la pintura establecen ciertas conexiones. Uno es en el Barroco (véase [1], pp. 61-64), cuando

los pintores representan la vida mediante el movimiento y en la matemática surge el cálculo infinitesimal y, con él, el estudio de la geometría del punto en movimiento. La otra ocasión se presenta en el siglo XIX, en donde se advierte un paralelismo entre cierta liberalización del arte de la realidad visual y el descubrimiento de las geometrías no euclídeas, cuyas interpretaciones físicas son independientes del mundo real apreciado por los sentidos.

Bien; hechas esas reflexiones, ya tenemos justificación para presentar esta pequeña contribución. Sin embargo, no vamos a incidir expresamente en ninguno de los tres nexos de unión que acabamos de describir (el primero de ellos ya fue objeto de atención en [4]). Nuestra intención es más modesta: tan solo la de exponer de un modo muy general ese vínculo entre matemáticas y pintura, mostrando para ello una colección de cuadros -por supuesto, no exhaustiva- "con sabor matemático", aunque varios de ellos -pensamos- probablemente ya sean conocidos por el lector. Como se verá, hay algunos en los que están presentes problemas u objetos matemáticos o es la matemática quien define la propia estructura del lienzo, mientras que otros reflejan una simbología o alegoría de la matemática o de una de sus ramas, que a veces se extiende a la ciencia en su conjunto. Todos son pinturas, aunque en un caso corresponde a un grabado, en un par de ellos se trata de ilustraciones e incluso en una ocasión se refiere a distintas esculturas, pero con las cuales, en su conjunto, se puede componer un cuadro.

Pues comienza ya esta pequeña exposición.

1. Escuela de Atenas (*Rafael, 1509-1510*)

En una de las estancias del Vaticano, la cámara denominada La Signatura, se encuentran pintadas en sus dos plafones medianeros las dos grandes alegorías *Disputa del Santísimo Sacramento* y la *Escuela de Atenas* y, sobre las ventanas, el *Parnaso* y la *Jurisprudencia*. La intención de esa disposición era integrar en un mismo marco la filosofía natural y la teología revelada, las ciencias y las artes, bajo la protección de la Iglesia.

La *Escuela de Atenas* ([2], pp. 28-29; [6], pp. 183-185), pintada en los años 1509-1510 por Rafael Sanzio (1483-1520), pretende reflejar la investigación racional de la verdad en la civilización griega, incluyendo a los principales filósofos y científicos de la época. En el centro del cuadro, queriendo mostrar su jerarquía, están Platón y Aristóteles. El primero (con la cara de Leonardo) sostiene en una mano un volumen del *Timeo* (en donde se expone su cosmología), mientras eleva hacia el cielo el dedo índice de la otra, indicando las ideas, lo sublime. Aristóteles, con su arrogante figura y cubierto con un manto azul tiene en una

mano su *Ética*, y muestra el otro brazo con la palma de la mano vuelta hacia el suelo, queriendo sugerir lo concreto, lo terrenal.

Las personas situadas en la parte superior del cuadro se distribuyen en varios grupos. En el de la izquierda figura Sócrates a la cabeza, junto a algunos discípulos, como Alcibíades. A la derecha de Aristóteles, en medio de otro corro, está Teofrasto, su sucesor como director de El Liceo, y más a la derecha aún, se reconoce a Protágoras, Parménides (iniciador de la ontología) y Zenón (conocido por argumentos tales como el de Arquímedes y la tortuga, que encierran paradojas críticas a las concepciones pitagóricas).

En la parte inferior del cuadro, a su izquierda, están reunidos varios personajes capitaneados por Pitágoras, quien expone su teoría musical, escrita en una tabla, a Anaximandro (uno de los sucesores de Thales en la Escuela de Mileto) y a Averroes. Junto a ellos se encuentra Rafael, Arquímedes y Heráclito y, un poco más allá, echado sobre las escaleras, Diógenes. Por último, en el grupo más a la derecha destaca la figura de Euclides (con el rostro de Bramante) con un

compás en la mano sobre una pizarra con dibujos geométricos, que está rodeado de sus discípulos, y al lado de estos se hallan Zoroastro y el astrónomo Ptolomeo.

2. Las Virtudes y las Artes (*Nicolo de Bologna, 1355*)

Pitágoras establece una relación entre la aritmética y la geometría con la música, basándose en la concordancia de sus proporciones, y ese vínculo también lo extenderá al cosmos. De *la música de las esferas* y su cosmología se deducirá entonces la inclusión de la música y la astronomía (astrología) en el dominio matemático. De este modo quedan completadas las cuatro artes del *quadrivium* pitagórico: aritmética ("estudio de los números en reposo"), geometría ("estudio de las magnitudes en reposo"), música ("números en movimiento") y astronomía ("magnitudes en movimiento").

El *quadrivium*, junto a las tres artes del *trivium* (gramática, retórica y dialéctica) constituirán las siete *artes liberales*, base de la enseñanza durante más de dos mil años. De las *artes liberales*, y en particular del *quadrivium*, se han realizado numerosas representaciones a lo largo de la historia; como por ejemplo, la que se encuentra en el Museo de Arte Románico de Barcelona, en donde la aritmética y la geometría van acompañadas por Euclides y Pitágoras, respectivamente; o la que puede contemplarse en la Biblioteca del Monasterio de

El Escorial, con Arquitas y Boecio encarnando a la aritmética y Arquímedes y Aristarco a la geometría.

La imagen en concreto corresponde a un fragmento del códice *La Virtudes y las Artes*, de Nicolo da Bologna (1355), que se encuentra en la Biblioteca Ambrosiana de Milán. Pueden observarse en él las cuatro artes del *quadrivium* representadas por cuatro mujeres que llevan instrumentos o materiales alusivos a cada una de aquellas y van acompañadas de ilustres personajes representativos: una hoja en la que están escritos números, junto a Pitágoras (aritmética); una escuadra y un compás y la figura de Euclides (geometría); un laúd con la presencia de Jubal (música) y una porción de globo terráqueo, con Ptolomeo (astronomía).

3. Luca Pacioli y un joven (*Jacopo de Barbari, 1494*)

En el cuadro hay dos personajes: un fraile y un joven. El fraile, franciscano, es Luca Pacioli (1445-1517), ilustre figura matemática del Renacimiento italiano y autor de dos importantes obras: *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalità* (1494) y *De Divina proportione* (1509). Mientras que el joven probablemente sea el noble Guidobaldo de Montefieltro, que se encuentra recibiendo de Pacioli una clase de geometría.

Suele considerarse que es obra de Jacopo de Barbari (1440-1515), aunque la inscripción que aparece en la pequeña tarjeta situada a la izquierda del libro grueso cerrado: "IACO.BAR.VIGENNIS.P. 1495", que se interpretaría como la firma del pintor, siembra alguna duda sobre su autoría ("vigennis" significa "de veinte", mientras que el lienzo fue pintado en 1494, cuando Barbari tendría 54 años). Se baraja la posibilidad (remota) que tanto el autor como el joven fueran Leonardo da Vinci, pero tampoco encajaría el "vigennis", ya que cuando conoció a Pacioli, Leonardo tenía 44 años.

El lienzo está repleto de simbología matemática. Pacioli señala una figura dibujada con una tiza (que aparece al lado) en una pequeña pizarra, en cuyo canto está escrito "Euclides". Su mano izquierda se posa sobre un libro abierto: el libro XIII de los *Elementos* de Euclides. Próximo a él se encuentra otro libro cerrado, con las iniciales de Luca Pacioli, que con toda probabilidad sería su *Summa*. Encima de este tomo se apoya un dodecaedro regular (el quinto sólido platónico) de madera. También se observan un medidor de ángulos (transportador) y un compás. Por último, en la esquina superior izquierda, pendiente de un hilo, cuelga un rombocuboctaedro de cristal transparente (poliedro convexo formado por 18 cuadrados y 8 triángulos equiláteros), uno de los trece sólidos arquimedianos.

En todo caso, la mirada del joven hacia el espectador, además de algunos otros detalles del cuadro, parecen conferirle un cierto aire de misterio, como si quisiera contar algo más de lo que aparenta.

4. Margarita Philosophica (*Gregor Reish, 1504*)

Nuestro actual sistema de numeración posicional de base diez, así como la introducción del cero como símbolo, y de algún modo los números negativos, provienen de la matemática hindú, en el siglo VII (aunque su primera aparición documental data del siglo IX). Y ese saber llegó a Occidente a través de los árabes. Concretamente, el Imperio Islámico y su religión, fundada por Mahoma (ca 570-632), se extendió por la India, Persia, Oriente Medio, norte de África y sur de España e Italia, y en su periplo los científicos islámicos asimilaron ávidamente

los conocimientos de las civilizaciones con los que entraron en contacto; en particular, el sistema de numeración y la aritmética hindú.

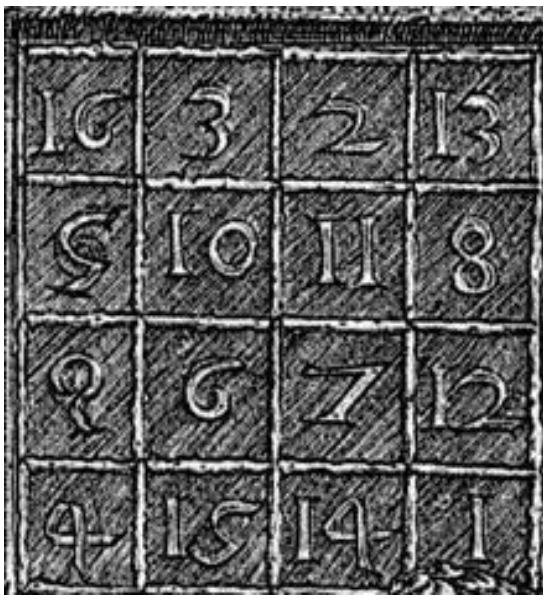
Por otro lado, quien llegaría a ser acaso el mejor matemático medieval, Leonardo de Pisa o Fibonacci (ca 1175-1250), cuando era adolescente se trasladó con su familia al puerto argelino de Bugia (su padre había sido nombrado director de una oficina comercial ubicada allí), y en ese lugar y en sus viajes por el Mediterráneo conocería el sistema de numeración indo-arábigo. A su regreso a Pisa, en su obra *Liber abaci* lo divulgó por Occidente con sus cifras, y el cero y los números negativos (en un problema de deudas), mostrando sus ventajas sobre los viejos números romanos, entonces vigentes en Europa. Sin embargo, a pesar de la facilidad que suponía para el cálculo la numeración decimal, encontraría grandes resistencias a su implantación por el gremio de los comerciantes y calculistas, que durante siglos estuvo dominado por los partidarios del ábaco y la vieja numeración, en detrimento de los seguidores de los números indo-arábigos.

En la imagen se observa cómo tres siglos después continúa la polémica. Se trata de una ilustración del libro del escritor alemán Gregor Reish (1467-1525) llamado *Margarita Philosophica* (1504), que es una enciclopedia de doce tomos (gramática, dialéctica, retórica, aritmética, música, geometría, astronomía, física,

historia natural, filosofía, psicología y ética). En concreto, la ilustración corresponde a la portada del capítulo "Typus Arithmeticae", que muestra la diferencia entre los que hacían las operaciones con el antiguo ábaco (abacistas) y aquellos que los realizaban con el nuevo sistema de numeración decimal (algoristas). El representante de los primeros es Pitágoras, cuyo rostro está triste, y quien encarna a los segundos (Boecio) está sonriente, mientras la musa de la Aritmética observa a ambos.

5. Melancolía (*Albert Durero, 1514*)

El alemán Albert Durero (1471-1528) fue un humanista integral, que se ocupó tanto de las matemáticas como de la naturaleza, las letras o la pintura. Entre sus obras se encuentra el libro *Institutionem geometricarum*, en donde figuran numerosas construcciones geométricas, instrucciones para dibujar elegantes letras y el análisis de diferentes curvas, superficies y sólidos, algunos de ellos no conocidos antes. Fue asimismo uno de los artistas del Renacimiento creadores de las bases del estudio de la perspectiva (junto a Brunelleschi, Leon Battista Alberti, Piero della Francesca, Leonardo…), de la que más tarde surgiría la geometría proyectiva ([4], pp. 105-109), e iniciaría el uso de las proyecciones horizontal y vertical, que casi tres siglos después sistematizaría Monge al crear la geometría descriptiva.



En la ilustración se representa su grabado en cobre, *Melancolía*, en el que aparecen diversas referencias matemáticas, como una esfera, un poliedro cuyas caras son pentágonos irregulares y triángulos, un compás, una balanza y un cuadrado mágico. Parece indicar la imagen que Durero tiene de sí mismo (su carácter melancólico) o la esfera intelectual dominada por el planeta Saturno (según la tradición astrológica ligado al sentimiento de melancolía), y simboliza la conexión entre el mundo racional de las ciencias y el imaginativo de las artes.

Los primeros cuadrados mágicos proceden de China, algunos siglos antes de nuestra era, aunque en Occidente el primer tratado sobre cuadrados mágicos data del siglo XIV; concretamente, el que aparece en este grabado de Durero es uno de los primeros que se conocen en Europa. Puede comprobarse que efectivamente es un cuadrado mágico de orden 4 y de suma mágica 34, cuyos números de las casillas centrales de la cuarta fila indican en año de su realización (1514). Pero cumple además otras propiedades, como las siguientes:

a) Las sumas correspondientes a los cuadrados de los términos de la primera y última fila son coincidentes, y lo mismo ocurre con la segunda y la tercera:

$$16^2+3^2+2^2+13^2 = 4^2+15^2+14^2+1^2$$
$$5^2+10^2+11^2+8^2 = 9^2+6^2+7^2+12^2$$

Y análoga propiedad sucede con las columnas:

$$16^2+5^2+9^2+4^2 = 13^2+8^2+12^2+1^2$$
$$3^2+10^2+6^2+15^2 = 2^2+11^2+7^2+14^2$$

b) Así como en todo cuadrado mágico de orden 4 la suma de los números situados en las diagonales es igual a la suma de los números que no están en las diagonales, en este cuadrado mágico eso mismo ocurre con los cuadrados de dichos números:

$$(16^2+10^2+7^2+1^2) + (13^2+11^2+6^2+4^2) =$$
$$(3^2+2^2+5^2+8^2) + (9^2+12^2+15^2+14^2)$$

¿Sucede lo mismo con los cubos?

6. Los embajadores (*Hans Holbein, 1533*)

De las dos personas del cuadro, la de la izquierda simboliza un hombre de acción: se trata de Jean de Dinteville (embajador de Francia en Inglaterra), mientras que la de la derecha quiere significar un personaje dedicado a la vida contemplativa, y está encarnado por Georges de Selve (obispo de Lavaur y ocasionalmente embajador ante el Imperio romano germánico, la república de Venecia y la Santa Sede). Entre ellos hay un mueble con dos estantes, en los que están dispuestos diversos objetos relacionados con el *quadrivium*. En la estantería superior se observan una esfera celeste, varios objetos de medición del tiempo y un libro, que se encuentran sobre una alfombra roja con complicados objetos geométricos; en el estante inferior hay un globo terráqueo, dos libros, un laúd y varias flautas en un estuche, En el suelo, además, se destacan círculos y cuadrados. Por otra parte, se perciben en su conjunto símbolos y sugerencias ocultas, lo que resulta bastante

común en el arte renacentista. Digamos a continuación algo más sobre los objetos y su significado.

Empecemos por el estante superior. En el libro puede leerse: "AESTATIS SVAE 25", que indica que la edad de Georges de Selve es 25 años. La esfera celeste muestra las constelaciones, con sus seres mitológicos correspondientes. El globo terráqueo no está dispuesto para representar el cielo a la latitud de 51º 30' de Londres, que es donde se encuentran, sino para una latitud entre 42º y 43º, más propia de España (imperio de Carlos V) o de Italia (residencia del Papa). También hay varios relojes de sol y, cerca del codo de Selve, un instrumento descrito por Ptolomeo, un "torquetum".

En la estantería inferior hay diversos objetos relativos a geografía, música o matemáticas. Entre ellos se encuentra un globo terráqueo, con ciertas connotaciones geopolíticas, como la línea divisoria entre España y Portugal establecida por el papa Alejandro VI, el Nuevo Mundo, etc. Sobre música se aprecian un libro de himnos luteranos y varios instrumentos: cuatro flautas y un laúd que tiene una inscripción en alemán de Durero que muestra un dispositivo de trazado de objetos en perspectiva (probablemente como reconocimiento a su importante aportación a la pintura). Por último, se encuentra un libro escrito en alemán, abierto por una escuadra, cuyo título traducido es: *Un libro nuevo y fiable para aprender el cálculo destinado a los comerciantes* (1527), y su autor es el

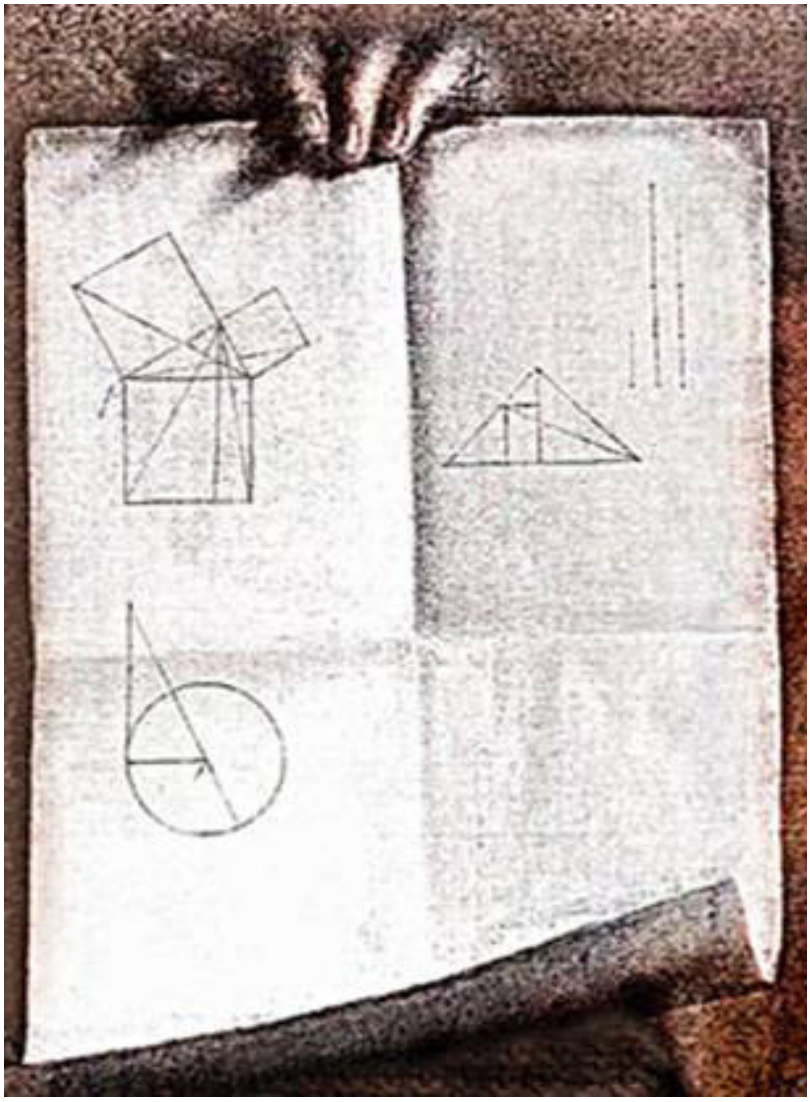
matemático, astrónomo y geógrafo Pedro Alpiano (1495-1552). Su página legible comienza por la palabra *Dividirt*, en su doble sentido de división aritmética y de división o discordia, tanto en el terreno político como religioso. Hay que decir además, en relación con un objeto antes mencionado, que precisamente Alpiano volvería a fabricar en esa época instrumentos como el "troquetum".

El cuadro se encuentra en la National Gallery (Londres).

7. Alegoría de la geometría (*Laurent de La Hire, 1649*)

El artista barroco francés Laurent de La Hire (1606-1656) pintó varias obras dedicadas a representar las artes liberales, entre las que se incluye el cuadro de la ilustración. En el cuadro, que se encuentra en el Museo de Arte de Toledo de Ohio (EEUU), está una joven que quiere simbolizar la geometría, junto a un globo terráqueo y, al fondo, una esfinge (¿estará en Egipto?).

La joven lleva en la mano izquierda las herramientas del geómetra: la regla (una escuadra) y el compás, y en la mano derecha sujeta un papel en el que están dibujadas figuras geométricas. Dos de los dibujos corresponden a una demostración del teorema de Pitágoras y al teorema de Arquímedes, que establece que el área del círculo es igual al área del triángulo rectángulo cuyos catetos son el radio del círculo y la circunferencia (rectificada).



Mostramos también la representación de otra de las artes liberales: *Alegoría de la aritmética*. La joven que aparece simbolizando la aritmética sostiene un libro de Pitágoras y una hoja de papel en la que están escritos números pares e impares, separados, y dos operaciones aritméticas efectuadas: una suma y una multiplicación (hay una tercera, que no se ve bien). El dedo de la Aritmética se apoya sobre lo que podría ser una prueba de la multiplicación.

Laurent, uno de los fundadores de la Real Academia de Pintura y Escultura de París, fue padre del matemático Philippe de La Hire (1640-1718), compañero de Blaise Pascal y discípulos ambos de Girard Desargues, iniciador de la geometría proyectiva.

8. Las ciencias y las artes (*Adriaen Stalbent, ca 1650*)

El cuadro que aparece en la página siguiente, que se encuentra en el Museo del Prado (Madrid) y contiene la mayor colección de instrumentos musicales del museo, fue pintado hacia 1650 por el flamenco Adriaen Stalbent (1580-1662), pintor barroco que colaboró con Pieter Brueghel "el Joven" en fondos de paisajes.

Desde el Renacimiento italiano se percibe una reivindicación (que será muy duradera) hacia la pintura (y la arquitectura) como arte liberal, y en esa corriente se sitúa este lienzo (la pintura se encuentra junto al resto de las artes). Se muestra en él una idea del desarrollo científico en la era de su revolución y la época de las

academias de ciencia, aunque todavía no se habían fundado la Royal Society de Londres (lo sería en 1662) ni la Académie Royale des Sciences de París (1666).

Se aprecian varios personajes que están hablando en dos mesas cubiertas de utensilios y objetos alusivos a las ciencias, además de otras dos personas que conversan sobre un cuadro que están contemplando. Sobre la cornisa de la puerta hay tres estatuas: de Minerva (Atenea de la mitología griega), diosa de la sabiduría, las artes y las técnicas de la guerra; Mercurio (Hermes de los griegos), dios del comercio; y una alegoría fluvial. Además, junto a la chimenea del fondo están colgadas de la pared dos violas de gamba, y en la mesa próxima se encuentran un laúd, una corneta curva, una bombarda y varios libros de música.

En la mesa situada a la derecha del cuadro hay geógrafos y naturalistas. Se observan en ella un globo terráqueo, multitud de objetos raros de las ciencias naturaleza y relojes, dos libros de cartografía, una regla y un compás de puntas para tomar medidas.

9. Ejercicio complicado (*Bogdanov Belsky, 1895*)

El autor del siguiente cuadro es el pintor ruso Nicolay Petrovich Bogdanov Belsky (1868-1945), pintor de retratos, paisajes impresionistas y, especialmente, escuelas rurales de su país. Se encuentra en la Galería Tretyakov (Moscú).

El cuadro representa el aula de una escuela rural en la que destacan las figuras del maestro, los alumnos y una pizarra. El maestro es Serguei Rachinski (1832-1902), catedrático universitario de Ciencias Naturales, quien influido por las ideas

de Tolstoi, abandonó su cátedra para dedicarse a la enseñanza de niños campesinos. En la pizarra está escrita la expresión:

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

que los alumnos (niños de 12-13 años) deben calcular mentalmente, lo que no resulta nada fácil, como revelan sus rostros en estado de concentración. Sin embargo, no es tan difícil comprobar mentalmente que:

$$10^2+11^2+12^2 = 13^2+14^2 = 365$$

a partir de lo cual se deduce que el resultado final es 2.

¿Hay más números que verifiquen que la suma de los cuadrados de tres consecutivos sea igual a la suma de los cuadrados de los dos siguientes al mayor de ellos? Planteada la ecuación

$$(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2$$

y una vez resuelta, se llega a que sus soluciones son $n = 0$ y $n = 12$. Esto es, además de la relación anterior, existe también la siguiente:

$$(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 = 1^2 + 2^2$$

10. Variaciones de cubos abiertos incompletos (*Sol LeWitt, 1974*)

Esta ilustración no es un cuadro, sino una de las esculturas de la colección *Variations of Incomplete Open Cubes*, integrada por más de un centenar de obras y realizada por el artista minimalista norteamericano Sol LeWitt (1928-2007) en 1974.

Cada escultura se genera a partir de las aristas de un cubo del que se eliminan n aristas ($1 \leq n \leq 9$), de modo que la composición resultante no esté contenida en un plano. Cabe plantear entonces la siguiente cuestión:

¿De cuántas esculturas consta la colección?

Su resolución habría de abordarse de forma empírica:

¿Cuántos cubos abiertos distintos tienen 3 aristas?,

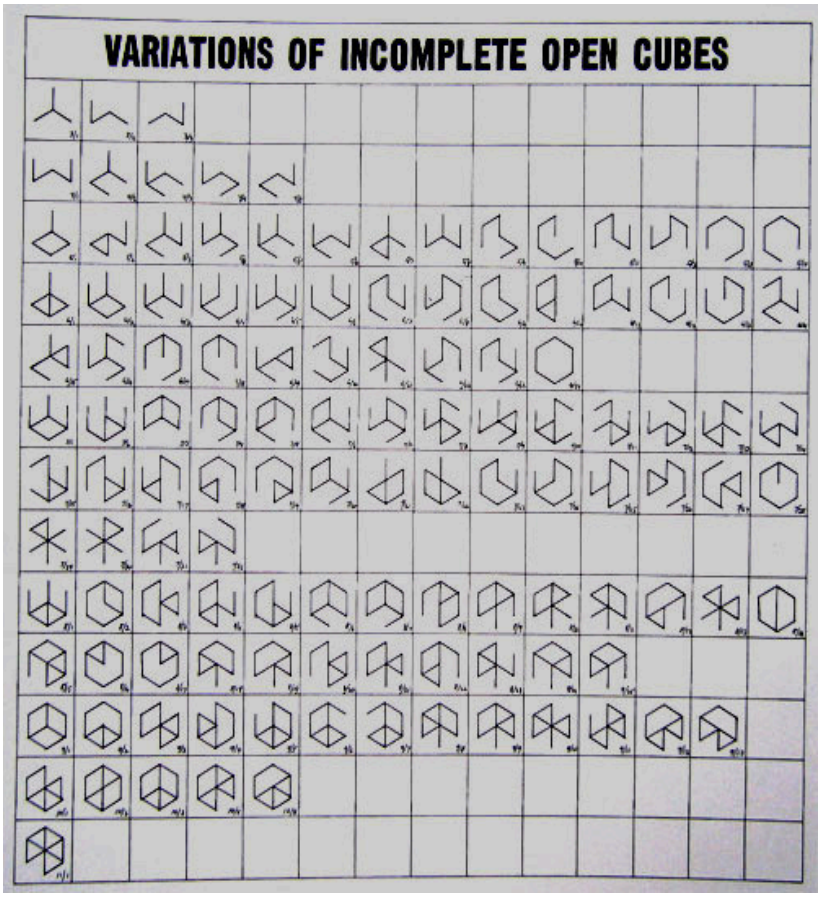
¿cuántos tienen 4 aristas?,…,

¿cuántos tienen 11 aristas?

Se puede llegar a la solución mediante un proceso heurístico con ayuda de material didáctico ([3]), y se obtiene el siguiente resultado:

Nº de aristas	Nº de cubos incompletos
3	3
4	5
5	14
6	24
7	32
8	25
9	13
10	5
11	1
Total	122

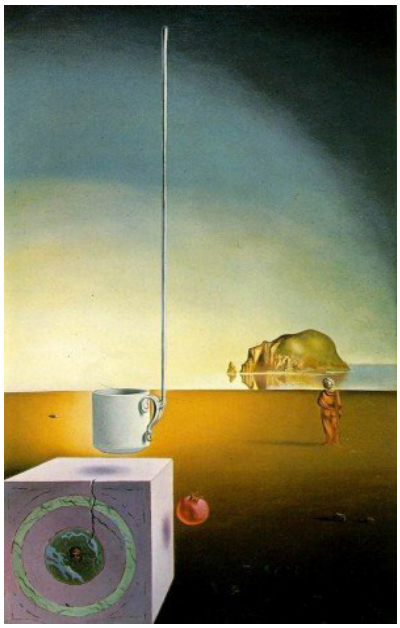
La representación de todas las soluciones puede verse en la siguiente ilustración:



11. Algunas obras de Salvador Dalí (1904-1989)

El irrepetible artista Salvador Dalí era además un enamorado de la ciencia y especialmente de las matemáticas, que tuvo muy presente en diversos cuadros, como los cuatro que hemos considerado.

El primero es *Semitaza gigante volante, con anexo inexplicable de cinco metros de longitud* (1944-1945). El cuadro es un rectángulo áureo; además, los motivos principales del lienzo van apareciendo inscritos en la sucesión decreciente de rectángulos áureos que resultan de eliminar del rectángulo anterior un cuadrado cuyo lado es el lado menor del rectángulo. Esos rectángulos conducen a la espiral de Durero (véase por ejemplo ([4], p. 15)), parte de cuyo contorno se percibe en el contraste con la sombra negra del cuadro.



A continuación se muestra *Leda atómica* (1949), que parece ser que fue pintado por Dalí con la ayuda del matemático rumano Matila Ghyka, tratando de realizar su composición de acuerdo con la estructura del pentágono pitagórico, tal

como se advierte, en el boceto previo dibujado en 1947. Como es sabido, el pentágono estrellado está en el origen del descubrimiento de la razón áurea por los pitagóricos (*ibíd.*, pp. 94-95).

Otro de los elementos matemáticos presente en la obra de Dalí es la figura del dodecaedro, que es el escenario que envuelve la escena del tercer cuadro: *La última cena* (1955), y que alude a los doce apóstoles. El lienzo es además un rectángulo áureo.

La cuarta dimensión geométrica fue también un foco de interés del pintor de Figueras, y a ella se refiere en el último cuadro, *Corpus hypercubus* (1954). Un hipercubo es un cuerpo geométrico en una hipotética cuarta dimensión, que consta de 16 vértices, 32 aristas, 24 caras y 8 células. Estas células se corresponden con 8 cubos tridimensionales, que son los que forman la cruz en la crucifixión de Jesucristo. Aunque para formar el hipercubo habría que unir las caras de la figura, retorciéndola, algo difícil de imaginar. En el lienzo, el hipercubo desdoblado es la cruz, y su sombra en el suelo forma una cuadrícula bidimensional en forma de cruz latina.

Referencias

[1] Etayo, J.J. *et al*. (1995). *Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria*. Madrid. Rialp.

[2] González, P.M. (2001). *Pitágoras, el filósofo del número*. Madrid. Nivola.

[3] Meavilla, V. (2007). "Las variaciones de Sol LeWitt sobre cubos abiertos incompletos". *Sigma*, nº 30, págs. 195-202.

[4] Peralta, J. (2008). "Las matemáticas y las artes liberales". En *Dibujo Técnico y Matemáticas: una consideración interdisciplinar*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Secretaría General Técnica (colección Aulas de Verano), págs. 91-118.

[5] Peralta, J. (2011). "Modelos matemáticos del sistema de afinación pitagórico y algunos de sus derivados: propuesta para el aula". *Educación Matemática*, vol. 23, nº 3, págs. 67-90.

[6] Pijoan, J. (1964). *Historia del Arte*, Vol. 3. Barcelona. Salvat.

Reseña de libros

SOUTO IGLESIAS, A., BRAVO TRINIDAD, J. L., CANTÓN PIRE, A., GONZÁLEZ GUTIÉRREZ, L., 2013, *Curso básico de programación en MATLAB*. Ed. Tébar. ISBN: 978-84-7360-505-2. Páginas: 230. url(caps. 1-3): `http://canal.etsin.upm.es/PAPERS/2013/MATLAB.pdf`
Correo electrónico: `antonio.souto@upm.es`

Dice Elliot Soloway en su artículo *"Learning to program = learning to construct mechanisms and explanations",* de referencia en la literatura de la enseñanza de la programación, que programar debería estar incluido en los planes de estudio desde edades tempranas ya que proporciona una formación muy interesante no solo para utilizar los ordenadores sino también sobre cómo resolver problemas de un modo estructurado.

El libro que aquí revisamos explora esas conexiones y lo hace con MATLAB como lenguaje de referencia. En realidad MATLAB en el título tiene un poco de reclamo comercial ya que su relevancia real en los contenidos no es tal y el libro podría servir de base a montar cursos introductorios en Python, C o cualquier otro lenguaje estructurado. Así, el objetivo del texto es poner a disposición de estudiantes y profesores materiales que permitan articular en torno a él un curso introductorio de programación estructurada para titulaciones no informáticas, en particular el Grado en Matemáticas. La elección de MATLAB se fundamenta en el amplio ámbito de aplicación del programa, en que es interpretable y en su facilidad de uso.

El libro consta de 7 capítulos. En cada uno de ellos se trabajan uno o dos conceptos de programación, (bucles, arrays, condicionales, etc.) los cuales se introducen primero formalmente y después mediante ejemplos sobre los que se proponen una serie de ejercicios que permitan asimilar y madurar las ideas explicadas. El primero de los capítulos es un tutorial en el que se usa MATLAB como una potente calculadora. En el capítulo 2 se trabaja sobre el concepto de función, introduciendo inmediatamente la estructura de control condicional, la cual permite

construir funciones más complejas e interesantes. En el capítulo 3 se trabaja con bucles, posibilitando la repetición de operaciones. Aquí están los ejemplos más interesantes del libro, como el de comprobar si un número natural es primo. En el capítulo 4 se introducen los vectores, pues ya se tienen las herramientas para manejarlos. El capítulo 5 está dedicado a entrada y salida con formato y a ficheros de datos, el 6 a matrices, y el 7 a algoritmos elementales de búsqueda, ordenación y geométricos.

El libro no es un compendio exhaustivo ni de programación ni de MATLAB. Debido a ello la selección de temas abordados no es inocente sino que subyace la idea de mostrar únicamente los aspectos considerados esenciales para aprender a programar. El que esto escribe piensa el libro es una aportación interesante ya que apenas hay en la literatura cursos de introducción a la programación que se apoyen en MATLAB como lenguaje de referencia.

A. Campos

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm (exactamente como este archivo). El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` ,o bien en un disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pediráa los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93 y 94

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número

3025-0006-24-1400002948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.