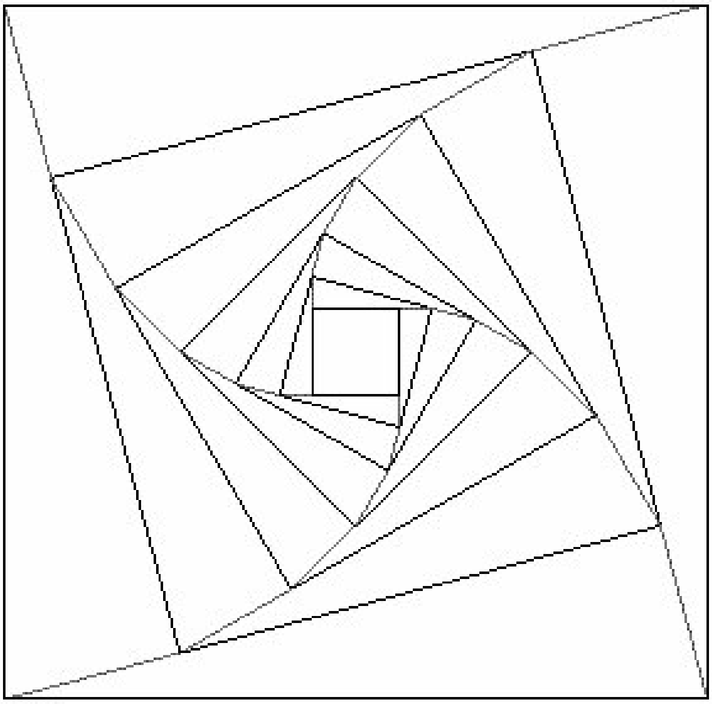
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 93
FEBRERO DE 2013

Número especial dedicado al Profesor José Javier Etayo Miqueo

ÍNDICE

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen ahora en “MathEduc”, es decir, en lo que antes era Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre.

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD “PUIG ADAM” DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
`http://www.sociedadpuigadam.es`

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

JUNTA DIRECTIVA

Convocatoria de la
Asamblea General Ordinaria de 2013

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2013 para el *sábado día 6 de abril de 2013*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

Cuotas del año 2013 y siguientes

Se recuerda a nuestros socios que en la Asamblea General Ordinaria de 2012 se aprobó que los recibos anuales se pasaran al cobro en el primer trimestre de cada año (véase Boletín nº 91). Por lo tanto, el cobro de la cuota anual del año 2013 se efectuará el próximo mes de marzo de este año.

XXXI Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas

(con la colaboración del Colegio de Doctores y
Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias)

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del *sábado 8 de junio del 2013* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 20 de Mayo del 2013, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid *Fax: 91 394 4662*
Correo electrónico : `jetayo@mat.ucm.es`

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2012-2013.

XII Concurso Intercentros

Seguimos creciendo

Como hemos comentado alguna vez, el penúltimo sábado de Noviembre es un día especial en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Más de 400 adolescentes, entre 12 y 18 años, dedican la mañana del sábado, desde las 9 hasta las 2, a pensar y disfrutar con las Matemáticas. Este año eran unos 440 correspondientes a 75 equipos. La mayor participación hasta ahora.

El desarrollo de la prueba fue modélico. Ninguna errata en los enunciados, horas de entrada y salida de cada prueba ajustadas a los horarios previstos, ninguna muestra de aburrimiento entre los participantes – eso ya se daba por supuesto – ningún indicio de cansancio, sensación de disfrutar haciendo Matemáticas pero, sobre todo, unas ganas de colaboración entre los profesores acompañantes que hay que resaltar aquí. Si no fuera por ellos no se podría celebrar este concurso porque no se podrían vigilar las aulas. La estructura del Concurso nos obliga a ocupar muchas aulas y nuestra Sociedad Puig Adam, organizadora del Concurso, no puede por sí sola cumplir ese objetivo.

La prueba resultó más complicada que en años precedentes. Así, en la prueba por equipos, los pequeños de 1º y 2º de ESO tuvieron dificultades con:

"En el segmento AB marcamos el punto C tal que AC = 3·CB. Con diámetros AC y CB dibujamos sendas circunferencias cuyas tangentes exteriores cortan a la prolongación de AB en el punto D. Demuestra que BD es igual al radio de la circunferencia pequeña."

En esa misma prueba los estudiantes de 3º y 4º de ESO en su mayoría no supieron… *"Encontrar el menor múltiplo de 84 entre cuyas cifras aparecen exclusivamente 6 y 7."*

Los estudiantes de Bachillerato, también en la prueba por equipos se liaron bastante con: *"En el lado AB del triángulo ABC marcamos el punto E de tal manera que* $\frac{AE}{EB}=\frac{1}{3}$ *y en el lado BC marcamos el punto D con* $\frac{CD}{DB}=\frac{1}{2}$*. Si F es el punto de intersección de AD y CE, calcula* $\frac{EF}{FC}+\frac{AF}{FD}$*."*

También hubo serios contratiempos en la prueba individual. Los pequeños se asustaron un poco con: *"En la siguiente expresión a, b y c representan tres cifras cualesquiera, no todas nulas. Calcula el valor de dicha expresión."*

$$\frac{0'\widehat{abc} + \widehat{acb} + 0'\widehat{bac} + 0'\widehat{bca} + 0'\widehat{cab} + 0'\widehat{cba}}{0'\hat{a} + 0'\hat{b} + 0'\hat{c}}$$

Sus compañeros de 3º y 4º intuyeron el número áureo, pero casi ninguno resolvió: *"En el triángulo equilátero ABC de la Figura 1, D y E son puntos medios de los correspondientes lados. Expresa el cociente* $\frac{DE}{EF}$ *como* $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$ *con a, b y c enteros."*

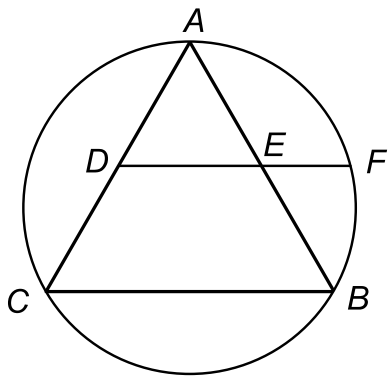


Figura 1

El último problema de Bachillerato causó estragos: *"Sea P(x) un polinomio de grado 2010. Si* $P(n) = \frac{1}{n}$ *para n = 1, 2, 3,..., 2011, calcula el valor de P(2012)."*

Pero ello no fue óbice para que todos atacaran con ganas e ilusión la prueba por relevos y así, aunque los problemas:

1C.- *Sea* $"T = \frac{a}{b}"$ *la respuesta del problema 2C, expresada en forma de fracción irreducible. "En la Figura 2, los segmentos AB y DC son paralelos y tangentes a la circunferencia, siendo A y D los puntos de tangencia. El segmento BC* *también es tangente a la circunferencia. Si AB = b y DC = a, calcula el área del trapecio ABCD.*

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

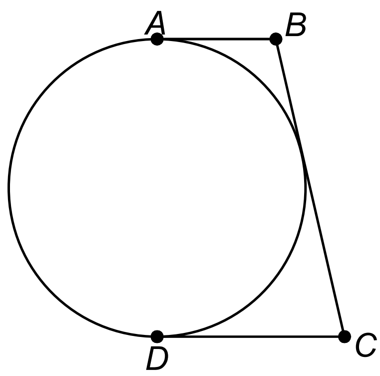


Figura 2

2A.- *Sea "T" la respuesta del problema 3A. El radio de la circunferencia de la Figura 3 es* $\frac{T}{5}$ *y el perímetro del triángulo ABC inscrito es T. Los segmentos DM, EN y FP pertenecen a las mediatrices de los lados del triángulo. Calcula el área del hexágono AFBDCE.*

(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

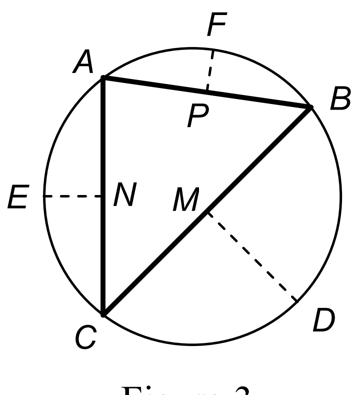


Figura 3

3B.- *Sea "T" la respuesta del problema 1B. En una circunferencia de radio T inscribimos un triángulo ABC en el que* $\hat{B} = 30^{\circ}$ *. Con centro en B se traza otra circunferencia tangente a la recta que pasa por A y C. Calcula el máximo valor para el área de la región exterior a la circunferencia de centro B pero interior al triángulo ABC.*
(Escribe la respuesta final en la tarjeta y entrégala junto con la resolución de este problema)

No eran, ciertamente, cuestiones triviales, la sensación con la que todos los participantes salieron del concurso era que, aunque este año ha sido más complicado, pronto llegarán más concursos y, en particular, el próximo Concurso Intercentros. Los resultados aquí están:

Centros ganadores

1. *Colegio Fray Luis de León A*
2. *IES San Juan Bautista B*
3. *IES Ramiro de Maeztu A*

Estudiantes ganadores

NIVEL I (1º, 2º ESO)

1. *Alejandro García Miguel* (IES Luis García Berlanga A)
2. *Jorge Elvira* (Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas)

NIVEL II (3º, 4º ESO)

1. *Gonzalo Gómez Abejón* (IES Ramiro de Maeztu)
2. *Álvaro Robledo Vega* (Colegio Peñalar)

NIVEL III (1º, 2º Bachillerato)

1. *Miguel Barrero Santamaría* (IES Alameda de Osuna)
2. *Izar Alonso Lorenzo* (IES Diego Velázquez)

Relación de los 10 centros con mayor puntuación

1.	*Colegio Fray Luis de León A*	*32’5*
2.	*IES San Juan Bautista B*	*30,8*
3.	*IES Ramiro de Maeztu A*	*24,4*
4.	*Colegio Alemán de Madrid B*	*23,93*
5.	*IES Cardenal Herrera Oria*	*20,2*
6.	*IES San Juan Bautista A*	*20,1*
7.	*Colegio Alemán de Madrid A*	*19,43*
8.	*IES Fortuny*	*17,6*
9.	*IES Alameda de Osuna A*	*17,4*
10.	*Colegio Brains A*	*16,93*

Y, como siempre, enhorabuena a todos y un agradecimiento especial a los profesores que se brindaron para ayudarnos a vigilar las pruebas. Con su ayuda hemos llegado hasta aquí y con su ayuda seguiremos muchos años.

Joaquín Hernández Gómez
Juan Jesús Donaire Moreno

Fase Local de la XLIX Olimpíada Matemática Española en los distritos de Madrid

por María Gaspar y Joaquín Hernández

El último viernes de noviembre comenzó en Madrid el proceso de selección de los estudiantes que participarán, como ganadores de la Fase Local, en el Concurso Final de la XLIX Olimpíada Matemática Española.

Fueron casi cuatrocientos estudiantes los que realizaron el día 23 de noviembre la *Fase Cero*: un record de participación. En la Fase Cero los estudiantes se enfrentaron a treinta cuestiones de opción múltiple, a resolver en un tiempo máximo de tres horas.

Las pruebas correspondientes a la *Fase Local*, dirigidas a los 78 estudiantes con mejor puntuación en la Fase Cero, tuvieron lugar en la tarde del viernes 15 de diciembre, y en la mañana del sábado 16.

Los problemas propuestos fueron los siguientes:

Problema 1

Tenemos dos cubos de agua de volúmenes respectivos 4 y 9 litros, inicialmente vacíos. Queremos conseguir que el cubo mayor contenga exactamente 6 litros de agua repitiendo, todas las veces que haga falta y en el orden que queramos, las operaciones siguientes:

(a) Llenar completamente uno de los dos cubos;
(b) Vaciar completamente uno de los cubos;
(c) Verter parte o el total del contenido de un cubo al otro cubo hasta que el primero quede vacío o el segundo lleno.

Indicar qué sucesión de estas operaciones tenemos que realizar para conseguir nuestro objetivo. (Se supone que disponemos de una fuente que mana constantemente y de un sitio donde tirar toda el agua sobrante).

Problema 2

Sea H el ortocentro de un triángulo acutángulo ABC de alturas h_a, h_b, h_c respectivamente. Demostrar que:

$$\frac{HA}{h_a}+\frac{HB}{h_b}+\frac{HC}{h_c}=2\,.$$

Problema 3

Determinar todas las soluciones enteras de la ecuación:

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

Problema 4

Los gráficos de las curvas

$$y = x^2 - a\,,\ \ x = y^2 - b\ \ (a > 0\,,\, b > 0)$$

se cortan en cuatro puntos de abscisas x_1, x_2, x_3 y x_4. Demostrar que:

$$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1\,.$$

Problema 5

Consideremos n puntos del plano ($n > 3$), tales que tres cualesquiera de ellos no están alineados, y sea k un entero con $\frac{n}{2} < k < n$. Dibujamos una colección de segmentos de manera que

- Cada uno de ellos tiene por extremos puntos de los inicialmente dados, y
- Cada uno de los n puntos es extremo, al menos, de k de los segmentos dibujados.

Demostrar que, como mínimo, tres de los segmentos dibujados son los lados de un triángulo.

Problema 6

Demostrar que existe un número natural que expresado en base diez contiene 2012 nueves consecutivos y que es el cuadrado de otro número natural.

Los ganadores de primero, segundo y tercer premio han sido los siguientes:

Primer Premio

1.- Pablo ESTEBAN DE LA IGLESIA (2º de Bto., Colegio Fray Luis de León)

2.- Raúl GONZÁLEZ MOLINA (2º de Bto., IES San Mateo)

3.- Miguel BARRERO SANTAMARÍA (1º Bto., IES Alameda de Osuna)

4.- Marc ISERN HACKER (4º ESO, Colegio Alemán de Madrid)

4.- Ismael SIERRA DEL RÍO (4º ESO, Colegio San Juan Bautista)

6.- Fernando VILLAR GÓMEZ (2º Bto., IES San Mateo)

Segundo Premio

7.- Víctor LÓPEZ PASTOR (2º Bto., IES Pedro de Tolosa)

7.- Javier-Chan PORRAS RHEE (2º Bto,. IES Ramiro de Maeztu)

7.- Thomas STEIMANN MARTÍNEZ MORA (2º Bto., Colegio Alemán)

10.- Guillermo GUTIÉRREZ CUENCA (2º Bto., IES Ramiro de Maeztu)

10.- Ángel PRIETO NASLIN (1º Bto., Liceo Francés)

10.- Daniel VIRSEDA GONZÁLEZ (2º Bto., Colegio Brains)

Tercer Premio

13.- Pablo GÓMEZ PÉREZ (2º Bto., IES San Mateo)

14.- Tomás RUIZ TÉLLEZ (2º Bto., Colegio Alemán de Madrid)

14.- Luis SÁNCHEZ IZQUIERDO (1º Bto., Colegio Retamar)

14.- Paula SARDINERO MEIRÁS (2º Bto., IES Margarita Salas)

17.- Alex DIDIRKA DÍAZ (3º ESO, IES Luis García Berlanga)

18.- Fabián LÓPEZ LUMBRERAS (2º Bto., Colegio Alemán de Madrid)

18.- Elena MÉNDEZ CANCELAS (2º Bto., IES San Mateo)

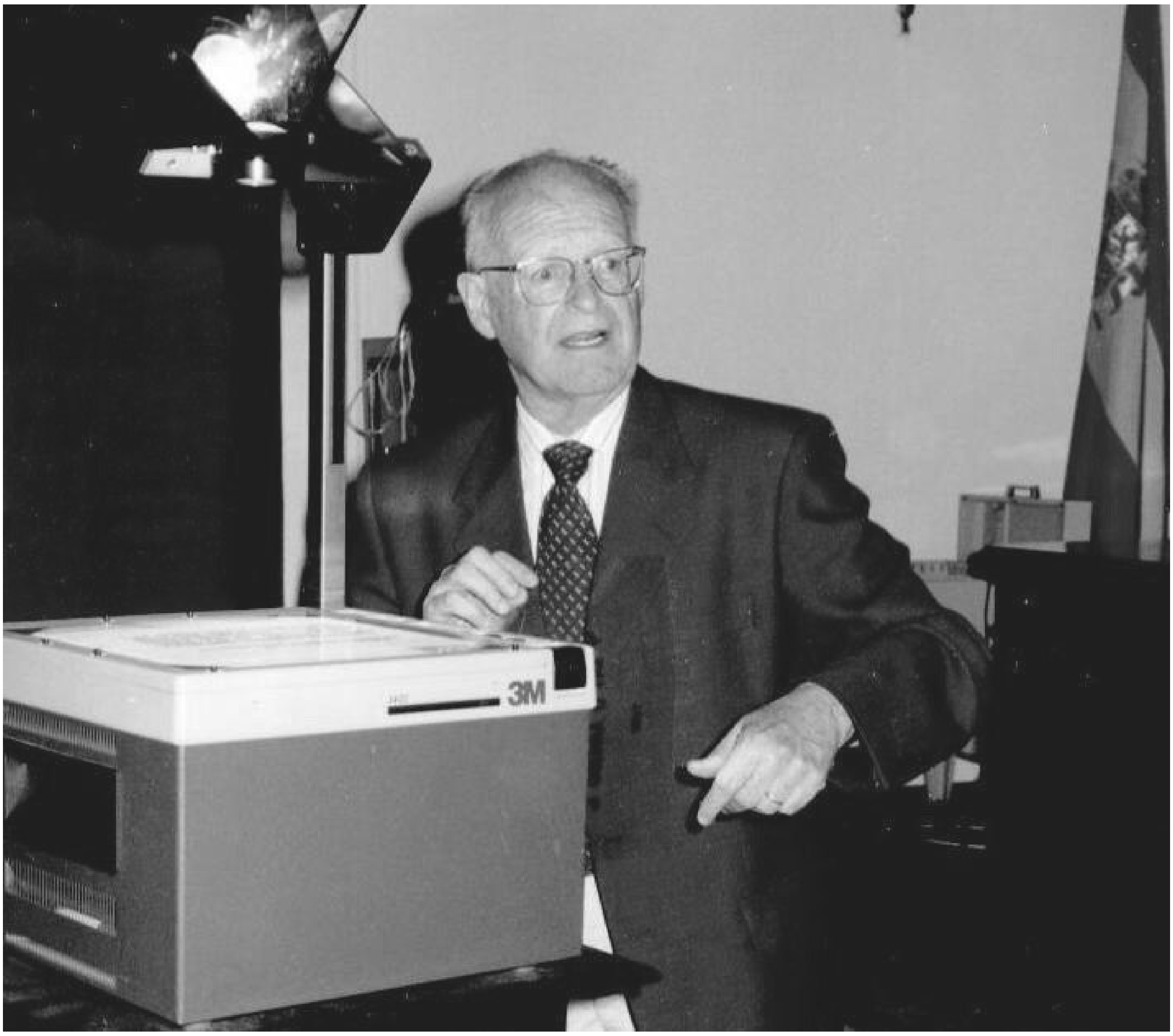
18.- Javier RAMOS GUTIÉRREZ (4º ESO, IES San Juan Bautista)

En la foto aparecen los seis estudiantes merecedores de Primer Premio, de derecha a izquierda: Pablo Esteban, Raúl González, Miguel Barrero, Ismael Sierra, Mark Isern y Fernando Villar.

En un pequeño acto celebrado el pasado 24 de enero en el Centro de Formación del Profesorado de Madrid capital y presidido por la Viceconsejera de Educación, Juventud y Deportes, Dña. Alicia Delibes, todos ellos recibieron el Diploma que les corresponde como ganadores de la fase Local en la Comunidad de Madrid. En este mismo acto, la Directora General de Mejora de la Calidad de la Enseñanza, Dña. Rocío Albert, presentó a los chicos el recién estrenado Club de Matemáticas *MadMat Club*, nacido con la voluntad de servir de punto de encuentro e intercambio para todos ellos.

A lo largo del mes de febrero los veinte ganadores recibirán varias sesiones de preparación para la última prueba de selección, que tendrá lugar en la Facultad de Matemáticas de la UCM el próximo sábado 2 de marzo, y que permitirá conocer los nombres de los nueve estudiantes madrileños que viajarán a Bilbao, entre los días 4 y 7 de abril de 2013, para participar en el Concurso Final de la XLIX OME.

Fallecimiento del Prof. Julio Fernández Biarge



Con profundo pesar, comunicamos a nuestros socios y lectores el fallecimiento el pasado mes de diciembre de nuestro querido compañero el Profesor Julio Fernández Biarge.

Procedente de la Univ. de Zaragoza fue discípulo del Prof. D. Pedro Abellanas, su director de tesis. Fue Investigador del Instituto "Jorge Juan" del CSIC, donde dirigió el primer centro de cálculo del Consejo. Fue Secretario de la RSME al final de los 50 y principio de los 60.

Fue catedrático de Instituto de Bachillerato en una época en que ello requería un alto nivel científico. Después fue catedrático de la E.T.S.I. Navales de Madrid, hasta su jubilación. Ha sido autor de numerosos artículos y libros.

Tras la jubilación, continuó como Profesor Emérito de la Universidad Politécnica de Madrid y fue Presidente de su Asociación de Profesores Jubilados, impartiendo muchas de las conferencias organizadas por dicha Asociación, celebradas en el Colegio de Ingenieros.

Fue uno de los más estrechos colaboradores de D. Pedro Puig Adam (ambos ocuparon durante un tiempo las dos cátedras del Instituto S. Isidro de Madrid). Al dejarse de publicar la Revista Matemática Hispano-Americana y Gaceta Matemática en los 80, fue uno de los principales impulsores para la fundación de nuestra Sociedad, ocupando su Presidencia en el periodo 1984-86, en la cual sucedió a José Ramón Pascual Ibarra y precedió al Profesor Etayo Miqueo.

Siempre fue uno de los miembros más activos de nuestra Sociedad, ocupándose personalmente durante muchos años de la redacción de nuestro Boletín y de su Sección de Problemas. En la actualidad continuaba siendo miembro de la Junta Directiva de nuestra Sociedad, en la que seguía colaborando activamente en nuestro Concurso anual de Problemas, en la selección y corrección de artículos y como autor de artículos (el último de estos, dedicado a su amigo el Profesor Etayo Miqueo y escrito cuando ya su salud se quebrantaba, aparece en este mismo número del Boletín).

Está previsto proponer en nuestra próxima Asamblea de 2013 la dedicación al Prof. J. F. Biarge de un número especial de nuestro Boletín, invitando a presentar artículos a cuantos compañeros, alumnos y amigos lo deseen.

La Junta Directiva

Juan Bosco Romero Márquez, *in memoriam*

Conocí a Juan Bosco a través de mi buen amigo Joaquín Hernández, quien me lo presentó hace unos quince o dieciséis años. Enseguida congeniamos, y descubrimos que habíamos sido compañeros de oposición de cátedras de instituto, allá por el año 75, cuando todos vivíamos con ilusión el fin de una dictadura y el alborear de una democracia. Él estaba prematuramente jubilado por causa de un corazón que no funcionaba como debía funcionar, y sabía que vivía permanentemente bajo una espada de Damocles. Lo sabía, pero eso no le impedía disfrutar alegremente de la compañía de los amigos y dedicarse con tesón a las matemáticas. Todo nuevo día era para él un regalo que no se podía desdeñar.

Ignoro si hay o no otra vida, que no ando muy al día en teología, pero sí sé que si la hay, es seguro que a estas horas Juan Bosco, con su entusiasmo tan contagioso por las matemáticas, ya ha puesto a todos los bienaventurados a hacer problemas. Y los bienaventurados, de eso también estoy seguro, están muy contentos con su nuevo huésped.

Le interesaron muy distintos temas, sobre todo las ecuaciones diofánticas, la geometría del triángulo y las desigualdades, y sobre ellos publicó numerosos artículos en diversas revistas, entre ellas la prestigiosa *College Mathematical Journal* (quizás fue uno de los pocos españoles cuyo nombre allí aparece). Con todo, era una de las personas más modestas y discretas que he conocido, muy poco dado a hablar de sus trabajos y siempre presto a celebrar los de los demás. Y también un amigo con el que siempre se podía contar. En cuanto tenía noticia de que estabas interesado en alguna cosa o estabas escribiendo sobre algo, te pasaba toda la bibliografía e información sobre el tema que tuviera a su alcance.

En más de una ocasión le animé a que agrupara todos los resultados que había descubierto sobre geometría del triángulo y lo presentara como tesis. "¿Para qué?", solía decir "si yo hago esto solo para divertirme". Un día se me ocurrió contestarle "¿Para qué? Pues para dar una alegría a todos tus amigos, que el día que leas la tesis haremos una fiesta". No sé si fue este argumento lo que hizo mella en él, pero lo cierto es que los últimos años empezó a tomarse en serio la idea de la tesis. Pero no ha podido ser. El 19 del pasado mes de enero el hilo que sostenía la espada cedió. Juan Bosco, buen amigo, buena persona y buen matemático, nos acompañarás siempre, a veces como una dolorosa ausencia, pero otras, las más, como un entrañable recuerdo. Que la tierra te sea leve.

Ricardo Moreno Castillo

Don Javier Etayo (recuerdos de un discípulo)

Me encuentro abrumado al tratar de dibujar una semblanza del profesor José Javier Etayo Miqueo. No solo por la magnitud y el talento de quien nos ha dejado, sino porque aún me siento afectado por su ausencia. Pero no puedo fallar. Y me pongo a recordar, sumido en la nostalgia, evocaciones y vivencias compartidas…

En el curso 1967-68 me matriculé en Selectivo de Ciencias, con la probable intención de pasar luego a segundo de Ingeniería, si bien, ciertamente, no tenía definida del todo mi vocación. El primer día de clase vimos aparecer a un hombre alto, delgado, con las manos cruzadas por detrás y la cabeza ligeramente ladeada: era el Prof. Etayo, que iba a impartirnos las asignaturas de Álgebra Lineal y Cálculo Infinitesimal.

Empezó su tarea, y enseguida comencé a percibir una visión de la matemática totalmente novedosa para mí, y pienso que para los demás compañeros. Por entonces me parece que acababa de implantarse la matemática moderna en el curso Preuniversitario, de la que naturalmente había estudiado unas nociones elementales el año anterior, pero que no llegué a comprender de verdad. Pues ahora sí que la entendía: aquellas dotes pedagógicas de Etayo para explicar a los alumnos de primero, por ejemplo, el concepto de conjunto cociente, las estructuras algebraicas, la introducción de las matrices a partir de las aplicaciones lineales y tantas otras ideas, dejaron una profunda huella en mí y, años más tarde, aunque fueran torpemente transmitidas, acaso también en mis alumnos. Pero su maestría en la explicación de los conceptos no solo se limitaba al Álgebra, sino que continuó del mismo modo con los fundamentales del Cálculo. Esa noción de diferencial que no he visto escrita en texto alguno o los problemas de aproximación local de una función, que se resuelven en un primer escalón con la recta tangente y que desembocan luego en el desarrollo de Taylor, me permitió empezar a contemplar la matemática de una manera muy diferente: elegante, majestuosa, sintética, pero además, soporte de otras ciencias y capaz de estructurar en cierta medida la realidad y de resolver algunos de sus problemas.

Ahora sí sabía lo que iba a estudiar: esta ciencia que se abría nueva para mí. Y ese cambio de rumbo tuvo un "culpable": D. Javier Etayo.

Pasaron años de carrera y volví a tenerle como profesor en la asignatura Geometría IV (Geometría Diferencial), de quinto, en donde nos sumergimos en las variedades diferenciables y los espacios fibrados. Aquí empecé a conocerlo de manera más cercana, pues además ocupaba el cargo de vicedecano de la Facultad y yo era el jefe de la Tuna de Ciencias, motivo por el cual mantuvimos conversaciones y relaciones de otra índole, menos matemáticas.

Una vez finalizada la licenciatura, en 1972, y teniendo en cuenta que en las tres materias que me dio había conseguido buenas calificaciones, me armé de valor, le abordé por un pasillo y le dije abiertamente que me gustaría trabajar con él. La verdad es que no tuvo que pensarlo mucho, porque enseguida me respondió que trataría de buscarme un hueco en su cátedra. Y así ocurrió; poco después me dirigió a Carolina Cuartero, que organizaba los grupos de prácticas, y comencé a dar clases de problemas.

Con Carolina y Etayo, pues, di mis primeros pasos como profesor, y también con Manolita y José Carrasco. Y hoy se me amontonan recuerdos de aquella época, correspondientes a mis cuatro años de profesor ayudante. Mis primeras clases, acompañado de Carolina, los exámenes conjuntos con los grupos de D. Pedro y sus colaboradores (Juan Luis, Nacho Luengo, Mary Asun…), pero también las cenas, que generalmente organizaba Carrasco. Nos reuníamos Etayo y Laura, Manolita y Balta, Carrasco y su esposa, Carolina y yo, y a veces alguien más. Me viene en particular a la memoria la noche que fuimos a *El Último Cuplé* a escuchar a Olga Ramos y terminamos cantando con ella, aunque con algún gesto de aparente desaprobación de Carolina, que en cambio no paraba de reír.

Etayo me enseñó igualmente a investigar. No metía prisas, pero de vez en cuando me traía artículos sobre conexiones y sus generalizaciones, para que los fuera leyendo e hiciera la tesina, cuya dirección continuó en la correspondencia epistolar que mantuvimos mientras hice el servicio militar en Melilla, y que finalmente presenté.

Había entonces, sin embargo, pocas perspectivas profesionales a corto plazo en la Facultad. Hubo otros compañeros que tuvieron más fe y paciencia, y esperaron, pero algunos, como yo (y María Gaspar, las hermanas Garbayo, Juan Luis…) opositamos a cátedra de Instituto y nos repartimos por la geografía nacional. Yo obtuve plaza en Linares y hube de abandonar la Facultad, pero la relación continuó; y se hizo aún más estrecha cuando regresé a la provincia de Madrid. Empecé a reunirme con Etayo generalmente los sábados por la mañana, que también iba a la Facultad, para poco a poco ir elaborando la tesis bajo su dirección.

Todavía guardo varios papelitos -hojas de calendario de mesa- con anotaciones suyas repletas de fórmulas, escritas casi siempre a lápiz, en ocasiones minúsculo, que prolongaba artificialmente con un suplemento o funda metálica de las que existían entonces, en las que se introducía la parte final del lápiz para poder sujetarlo con la mano. Alguna broma le hice sobre esas costumbres, que, me dijo, había adquirido por la escasez de papel y de útiles de escribir en los años de la posguerra.

Leí la tesis en 1983 y, aunque seguía fuera de la Facultad, me animó a continuar investigando. Corrigió mis primeros artículos y con él empecé a asistir a congresos. Recuerdo especialmente las Jornadas Hispano-Lusas de Murcia, a las que fuimos Etayo, Laura, su hijo Javier, Carolina y yo, en el coche de Carolina. Creo que era la primera vez que presentaba una comunicación y tenía ciertos nervios, pero ahí estaba Etayo presente en la sala para echarme una mano si hiciera falta. Tuve ocasión de percibir el aprecio y el respeto de que gozaba en todos los sitios; era un lujo acudir a su lado y escuchar sus intervenciones, como la conferencia de clausura en las Jornadas Hispano-Lusas de Badajoz: "75 años de vida matemática", que a alguno nos movería luego a seguir indagando sobre nuestro pasado matemático.

En 1987, cuando se creó la figura de profesor asociado, regresé a la Facultad, pero esta vez al Departamento de Álgebra. Se jubilaba Gonzalo Calero y le sustituí en las asignaturas que impartía: Metodología de la Matemática II y Prácticas de Enseñanza. Yo ya no estaba en el mismo departamento que D. Javier, pero cuánto contribuyeron, él y Carolina, a la preparación de esas materias, que yo no había cursado. Tras cuatro años en esa situación abandoné la Facultad y el Instituto, y me incorporé a una cátedra de Escuela Universitaria de la Universidad Autónoma de Madrid.

Pero volvamos con Etayo y otra importante faceta de su vida: su trabajo en la Real Academia de Ciencias. Lo primero que me viene a la memoria es su recepción en 1983, con su fino discurso "Pequeña historia de las conexiones geométricas", contestado por Linés. Allí estaban en primera fila Laura y sus hijos, su familia y, detrás, todos nosotros, orgullosos; con Laura especialmente emocionada ("¿habéis visto lo guapo que está con el frac?", comentó en voz baja).

Era la primera vez que yo asistía a la Academia, pero no fue ni mucho menos la última. Disfruté escuchando discursos de Guzmán, Montesinos, Jiménez Guerra, Bombal…, y cómo no, de Etayo. "El Álgebra del cinquecento" o "Los caminos de la Geometría", y particularmente su discurso inaugural del año académico 1990-91, "De cómo hablan los matemáticos y algunos otros", así como "El matemático loco de Cervantes", en el Instituto de España en sesión conmemorativa del Día del Libro, han dejado en mí un recuerdo imborrable.

Siempre que le pedía algo, y no fueron pocas veces, accedía a ello (aunque en ocasiones apostillaba: "¡pero en qué líos me mete usted, Peralta!", yo sé que lo decía con la boca chica); y su colaboración era garantía de éxito seguro. Una de tantas fue, por ejemplo, la conferencia de clausura "Una correspondencia difícil" -muy aplaudida por los asistentes- que pronunció en el curso de formación de profesores de secundaria que dirigí en la Universidad Menéndez Pelayo en 1997. Lo organicé conjuntamente con Vizmanos, e invitamos, además de a Etayo, a Emma Castelnuovo, junto a otros amigos de siempre: Eugenio Roanes, Alberto Pérez de Vargas, Tomás Recio… En el Palacio de la Magdalena alojaron a los dos pesos pesados: Emma y Etayo (en habitaciones con puerta de dos hojas, como decía José Ramón), y a los organizadores: Vizmanos y yo (pero en habitaciones con puerta de una hoja), mientras que a los demás los instalaron en un buen hotel, cercano. Recuerdo que Fernando estuvo también con nosotros, y me parece que alguna vez, asimismo, sus hijos visitaron "el castillo del abuelo".

Otra faceta suya que quería resaltar es lo bien que escribía, su buen uso del lenguaje. Dejó constancia de ello en innumerables publicaciones y como crítico científico en dos diarios, pero yo particularmente lo comprobé con ocasión de la elaboración del *Diccionario esencial de las Ciencias*, de la Real Academia de Ciencias, editado en 1999. De la parte de matemáticas, salvo estadística y probabilidad, se encargó Etayo, con quien colaboramos Carolina y yo. Tras hacer una lista, repartimos las palabras, y nos reuníamos los lunes en el despacho de Etayo para comunicarnos y pulir, si fuera necesario, lo que había redactado cada uno. Me quedé sorprendido de su precisión y claridad frente a nuestras torpes definiciones; por ejemplo, si yo llevaba escrito como definición de concavidad: "se dice que una curva es cóncava…", él me corregía ("tiene usted que comenzar por un sustantivo") y, así, resultaba: "posición de una curva plana…". Sin duda, él me enseñó a escribir mejor.

He de advertir que no conozco su biografía entera: ni acerca de los años transcurridos antes de ubicarse en Madrid ni de su actividad en el Consejo. De lo que sí fui testigo de algún modo es de la importancia de su esposa Laura en su vida. Con ella acudía a todos los sitios, y ¡qué bien se compenetraban!

Me es difícil olvidar el curso 1991-92 por varias circunstancias personales y porque Etayo se jubiló al cumplir los 65 años -esa era la normativa- y había sido nombrado profesor emérito. Además del libro en su honor, que coordinaron Montesinos y Tarrés, guardo en mi memoria dos homenajes que se le hicieron, uno de la Sociedad Puig Adam -organizado por Roanes- y otro del círculo más íntimo de la Facultad -a cargo de Carolina-, y a los que lógicamente asistió acompañado de

Laura. Pero también recuerdo que quizá el 14 de Septiembre de 1992, una de tantas veces que fui a ver a Etayo a la Facultad, nos comentó a Salinas y a mí, que acababa de estar con Laura en Segovia visitando la Academia de Artillería, verdadero museo científico, y que habían comido y los habían tratado estupendamente. Esa fue la última vez que le oí hablar de su esposa, pues falleció el día 15. Seguramente fue el golpe más duro de su vida -al menos de lo que yo conozco-, del que tardaría mucho tiempo en recuperarse, y me parece que nunca lo hizo del todo.

Dejemos de lado ese triste episodio para poner de relieve el papel jugado por Etayo en la matemática española, que comenzó de la mano de su maestro, D. Pedro Abellanas. Fue vicedecano de la Facultad; miembro de la Comisión Gestora de la Autónoma de Madrid; secretario del Patronato "Alfonso X el Sabio"; Consejero Nacional de Educación y del CSIC; secretario, vicepresidente y presidente de la Real Sociedad Matemática Española; secretario de la Academia; presidente de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas… O sea, un referente institucional de la matemática de nuestro país en el último medio siglo.

En cuanto a la repercusión de su obra matemática, es por todos conocido que fue esencialmente un geómetra, que abrió caminos en una etapa en que la investigación en España no era nada fácil. Es cierto que a partir de 1990, y no digamos del 2000, nuestra matemática ha sufrido un vuelco espectacular, pero fueron Etayo y otros matemáticos de su generación quienes pusieron las bases para ello. Sin embargo, me parece que su labor no ha sido suficientemente reconocida.

Hay también un aspecto suyo que dejó huella en muchos de nosotros; me refiero a su proyección didáctica.

D. Javier era un excelente profesor y ocupó la jefatura del Departamento de Matemáticas de la denominada Escuela de Formación de Profesorado de Grado Medio, de 1965 a 1969. Sus libros de texto de bachillerato y COU y su célebre *Conceptos y métodos de la matemática moderna*, creo que han sido fundamentales en la formación de muchos jóvenes españoles. Fue sin duda un maestro en esa didáctica de la matemática de la que me encuentro tan próximo (aunque no coincide exactamente con la consideración actual): la didáctica de Puig Adam, de Emma Castelnuovo, de Pascual Ibarra, de Miguel de Guzmán, de Eugenio Roanes…, de Javier Etayo.

Creo que también cabría decir de él que ha sido lo que podíamos denominar un matemático humanista, pues ha hecho mucho por resaltar la innegable componente cultural de las matemáticas y su interrelación con otras áreas del saber no exclusivamente científicas. La labor desarrollada en este campo se asemejaría a la función simbólica que me parece que juega el Puente de las Artes de París, que enlaza la Academia de Ciencias con el Museo del Louvre: las ciencias y las artes. Y acaso baste para confirmar mi opinión con leer su precioso capítulo del libro *Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria*, en donde contempla la matemática como pieza capital de las artes liberales. A mí al menos, a partir de ahí, se me presentó una visión suya antes desconocida; del mismo modo que el discurso de inauguración de curso en la Academia, ya citado, me hizo reflexionar acerca de la conexión de nuestra ciencia con el lenguaje.

Etayo era un amante de la buena mesa, y también le gustaba viajar y patear los lugares que visitaba; y solía hacerlo a grandes zancadas. No hace tanto que me costaba seguirle, paseando por Cambrils, en donde a veces nos vimos. Y, ¡con qué agilidad salía de la Academia si nadie lo esperaba!: en vez de cambiarse de ropa, se iba presto con la gabardina puesta encima del frac (por la que sobresalían levemente los faldones) a tomar el autobús.

Sentía mucho afecto por la Universidad de Zaragoza, en donde estudió y fue catedrático algunos años, y por Pamplona, su ciudad natal. En algún momento me habló de la jota navarra (y de la aragonesa, claro) e incluso del Osasuna; así como de sus fiestas (creo que le invitaban, como pamplonés ilustre, a la celebración de los sanfermines en Madrid) y de su gastronomía. Recuerdo, por ejemplo, que en el prólogo que le pedimos que hiciera del libro *Matemáticos madrileños*, escrito con motivo del Año Mundial de las Matemáticas, comentaba que una vez en la carta de un restaurante de Budapest encontró una "trucha a la navarra", que desde luego no pidió, y explicaba: "*no tanto porque de seguro no sería una trucha pescada en el Irati, sino porque vayan ustedes a saber qué clase de magra le habrían puesto y, sobre todo, cómo la habrían cocinado*".

Pero también tenía un gran cariño a la Complutense, la universidad a la que dedicó la mayor parte de su vida y a donde hasta hace muy poco aún acudía (en una ocasión me comentó que era más importante ser rector de la Complutense que consejero de Educación, sobre lo que, por cierto, opino lo mismo). Etayo fue esencialmente un universitario, de los pies a la cabeza y buen conocedor de sus tradiciones. Lo veo ahora con su traje académico acompañándome al acto de mi investidura de doctor en el Paraninfo de San Bernardo, explicándome el significado de la toga, el birrete, los guantes blancos, el anillo, el libro de la ciencia…; y se mezclan en mí sentimientos de nostalgia al recordar ese día con los de tristeza por su ausencia, pero igualmente con otros de orgullo y alegría por haber tenido el privilegio de recibir sus enseñanzas.

Es obligado que destaque asimismo algo que para él era fundamental: sus firmes convicciones religiosas. Como también su carácter amable y conciliador, su erudición, su discreción, su fina ironía, su bonhomía… Todo un caballero.

En marzo estuvo en Santander, en donde el rector de la Universidad de Cantabria le impuso la insignia de la Olimpiada Matemática Española, que él había impulsado, y se encontraba bien. Pero a mediados de mayo aparecieron problemas serios de salud. Yo lo vi por última vez el 9 de septiembre, acompañado como siempre por su familia: sus hijos, su hermana, Almudena…; estaba en sus últimos momentos, su desenlace era inminente. El día 11 me llamó Javier con una voz que intentaba no quebrarse para comunicarme el fallecimiento.

Al final nos dejaba el patriarca de una gran familia, y posiblemente el último superviviente de la generación que sentó los cimientos para el buen estado actual de nuestra matemática. No solo a sus hijos ha dejado huérfanos, sino también en cierta medida a alguno de nosotros. Tengo presente ahora mismo los gestos de dolor en el cementerio, además de los de su familia, de Conchita Romo, de Montesinos…, las lágrimas que Manolita apenas pudo reprimir, y que ahora yo trato de controlar al evocar tantos recuerdos.

Muchas gracias, maestro, por el ejemplo de su vida, por su compañía y guía a lo largo de tantos años; un abrazo, querido amigo. Ya no está entre nosotros, pero veo su rostro en el horizonte; se encuentra en el lugar en donde descansan los hombres buenos. Que Dios le bendiga.

Javier Peralta

Regreso a 1979: Comparación entre algunas conexiones lineales sobre una variedad casi-compleja

José Javier Etayo Gordejuela
Universidad Complutense de Madrid
jetayo@mat.ucm.es

A la memoria de mi padre

Prólogo

Al comenzar 1979, los que nacimos en el año 1957 estábamos cursando el 5º curso de la Licenciatura. El mundo era joven, nosotros teníamos veintiún años, la Constitución Española llevaba exactamente tres días de vigencia. También era un mundo convulso. El 3 de enero la ETA asesinó al General Gobernador Militar de Madrid. La noticia internacional de aquellos días era que el Sha de Persia abandonaba temporalmente Irán. A los pocos días la Francia de Giscard enviaba al ayatolá Jomeini, con honores de Estado, de vuelta a Teherán.

En nuestra Facultad de Matemáticas la plantilla de profesores numerarios era muy escueta. Había nueve Catedráticos, Pedro Abellanas en Álgebra y Fundamentos, Germán Ancochea, Francisco Botella, Joaquín Arregui y José Javier Etayo en Topología y Geometría, Enrique Linés y Baltasar Rodríguez-Salinas en Teoría de Funciones, Sixto Ríos en Estadística Matemática e Investigación Operativa, y José María Torroja en Astronomía y Geodesia. Luego, cinco Profesores Agregados, Fernando Bombal, Miguel de Guzmán, Enrique Outerelo, Baldomero Rubio e Ildefonso Yáñez, y cinco Profesores Adjuntos, Alfonso Casal, Carlos Fernández Pérez, Antonia Ferrín, José María Montesinos y Andrés Soilán.

El plan de estudios que cursamos constaba de dos partes. Los tres primeros cursos fueron los establecidos por Resolución de 10 de diciembre de 1973, a cuatro asignaturas por curso, comunes para todos. En 1 de octubre de 1976 se aprobó un nuevo plan para el segundo ciclo, que a nosotros nos afectó en 4º y 5º cursos.

En la sección de Matemática Fundamental había en 4º tres asignaturas comunes y otra a elegir entre tres; mientras que en 5º había diez asignaturas, de las que elegíamos tres. En mi caso elegí Geometría Diferencial, Álgebra III y Geometría Algebraica. Aquel curso tuvimos la complicación de que la profesora de Álgebra III, Concha Romo, estaba de oposiciones, por lo que durante el primer trimestre la asignatura no se impartió, y alguien decidió que los alumnos matriculados en ella debíamos incorporarnos a otra de las diez, Geometría Analítica. (No sé qué ocurrió con los que ya estaban cursando ésta). El caso es que con la osadía de la juventud decidí que yo de eso no estaba matriculado, y además que la clase era de 1 y media a 2 y media, y yo tenía cosas mucho mejores que hacer a esa hora del aperitivo. Y por lo tanto no fui a una sola de las clases de Geometría Analítica. Lógicamente purgué esa rebeldía estudiando desesperadamente durante las Navidades los apuntes que había tomado uno de nuestros compañeros.

Completados los cinco cursos de la Licenciatura, era requisito para incorporarse a los estudios de Doctorado, y a la carrera docente universitaria, obtener el grado, mediante la superación de la Reválida o la elaboración y defensa de una Tesina. A diferencia de la mayoría de mis compañeros, yo opté por la Tesina. Me la dirigió mi padre, lógicamente sobre un tema de Geometría Diferencial. Me ha parecido adecuado para esta ocasión recuperar, siquiera sea en extracto, aquel trabajo, porque creo que es significativo de su manera de abordar los problemas. En efecto, como es bien sabido, su inicio en las Matemáticas fue en el terreno de la Geometría Algebraica, desde su Tesis Doctoral dirigida por el Prof. Abellanas. La preparación de las oposiciones a Catedrático le llevó a encaminarse hacia la Geometría Diferencial, pero siempre mantuvo un enfoque algebraico sobre muchos de los problemas en los que trabajó. A continuación, como núcleo matemático de esta nota, una versión resumida del que fue mi primer trabajo mínimamente original, la Tesina de Licenciatura.

Comparación entre algunas conexiones lineales sobre una variedad casi-compleja

El presente trabajo parte de un artículo de Sinha y Chaubey [3], en el cual, a partir de una conexión lineal en una variedad casi-compleja, D, se define otra conexión B, dada por $B_X Y = - D_X Y + [X,Y]$.

Los autores consideran distintos tipos de conexiones Δ, que son los que satisfacen las siguientes condiciones:

J-conexión, si $(\Delta_X J)Y = 0$
M-conexión, si $(\Delta_X J)Y + (\Delta_Y J)X = 0$
Q-conexión, si $(\Delta_X J)Y + (\Delta_{JX} J)JY = 0$,

donde J es el tensor de la estructura casi-compleja; y estudian cuándo estos tipos se conservan al pasar de la conexión D a la B. Por último, definen las funciones C' y M, y el tensor de Nijenhuis N, como sigue:

$$C'(X,Y) = B_X Y - B_Y X$$
$$M(X,Y) = \Delta_{JX}(JY) + \Delta_X Y - J(\Delta_{JX} Y) - J(\Delta_X(JY))$$
$$N(X,Y) = \Delta_{JX}(JY) - \Delta_{JY}(JX) - \Delta_X Y + \Delta_Y X + J(\Delta_{JY} X) - J(\Delta_{JX} Y) - J(\Delta_X(JY)) + J(\Delta_Y(JX)),$$

y obtienen los valores de C', M y N según a qué tipos de conexiones respondan D y B.

Pero, en realidad, la conexión B así definida no es una conexión lineal. En efecto, para que lo fuese habría de cumplir

$$B_{fX} Y = f B_X Y$$
$$B_X(fY) = XfY + f B_X Y,$$

siendo f una función diferenciable sobre la variedad, y no cumple ninguna de las dos condiciones. Veamos una:

$$B_{fX} Y = -D_{fX} Y + [fX,Y] = -f D_X Y + f[X,Y] - YfX = f B_X Y - YfX \neq f B_X Y.$$

Del mismo modo, tampoco cumple la otra condición. Luego todo el estudio hecho en el artículo queda viciado de origen.

Nuestra intención ha sido pues reconstruir este trabajo pero considerando conexiones lineales que realmente lo sean. Para ello hemos escogido cuatro de especial interés, que son, supuesta una conexión lineal dada Δ, las siguientes:

$\Delta_1 = \Delta - T$, siendo T el tensor de torsión de Δ
$\Delta_2 = ½ (\Delta + \Delta_1)$
$\Delta_{3\,X} Y = \Delta_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X$
$\Delta_{4\,X} Y = \Delta_X Y - ½ J((\Delta_X J)Y)$.

Más aún, para dar una generalidad total al trabajo, y como la diferencia de dos conexiones lineales es un tensor (1,2), estudiamos qué condiciones ha de cumplir el tensor $P = \Delta_1 - \Delta$ para que se den las relaciones estudiadas.

Estudiaremos las J-, M- y Q-conexiones ya indicadas, y además las

F-conexión, si $\Delta_{JX}Y = J(\Delta_X Y)$
N-conexión, si $(\Delta_X J)X = 0$
H-conexión, si $(\Delta_X J)Y - (\Delta_{JX}J)JY = 0$
G-conexión si $(\Delta_X J)X - (\Delta_{JX}J)JX = 0$.

Estos siete tipos de conexiones, como se demuestra en el trabajo, se relacionan entre sí del modo siguiente: toda J-conexión es M-, Q-, N-, H- y G-conexión; toda N- ó H-conexión es G-conexión; y toda Q-conexión que sea además H- ó F-conexión, es J-conexión.

En el texto se hallan en primer lugar las condiciones que ha de cumplir el tensor P para que la pertenencia de Δ a estos tipos de conexiones implique la de $\Delta_1 = \Delta + P$. A modo de ejemplo, detallaremos dos de ellos:

Proposición. Si Δ es J-conexión, Δ_1 es J-conexión si y sólo si
$JP(X,Y) = P(X,JY)$.

Demostración. $(\Delta_{1\,X}J)Y = \Delta_{1\,X}(JY) - J(\Delta_{1\,X}Y) = \Delta_X(JY) + P(X,JY) - J(\Delta_X Y) - JP(X,Y) = (\Delta_X J)Y + P(X,JY) - JP(X,Y)$.

Proposición. Si Δ es Q-conexión, Δ_1 es Q-conexión si y sólo si
$P(X,JY) - JP(X,Y) - P(JX,Y) - JP(JX,JY) = 0$.

Demostración. $(\Delta_{1\,X}J)Y + (\Delta_{1\,JX}J)JY = \Delta_{1\,X}(JY) - J(\Delta_{1\,X}Y) - \Delta_{1\,JX}Y - J((\Delta_{1\,JX})JY) = (\Delta_X J)Y + P(X,JY) - J(\Delta_X Y) - JP(X,Y) - \Delta_{JX}Y - P(JX,Y) - J((\Delta_{JX})JY) - JP(JX,JY) = (\Delta_X J)Y + (\Delta_{JX}J)JY + P(X,JY) - JP(X,Y) - P(JX,Y) - JP(JX,JY)$.

Del mismo modo se obtienen resultados análogos para los otros tipos de conexiones. A continuación se estudian determinados valores que alcanza la función C' según qué tipos de conexiones sean Δ y Δ_1. Como ejemplo de estos resultados,

Proposición. Si Δ y Δ_1 son F- y N-conexiones, $C'(X,JX) = 0$.

Demostración. $C'(X,JX) = \Delta_{1\,X}(JX) - \Delta_{1\,JX}X = J(\Delta_{1\,X}X) - J(\Delta_{1\,X}X) = 0$.

En cuanto al tensor de Nijenhuis se obtiene

Proposición. Si Δ es J-conexión, el tensor de Nijenhuis se anula.

Terminando esta sección del estudio, se hallan los valores de la función M cuando Δ y Δ_1 son conexiones de los tipos que hemos definido. Por ejemplo,

Proposición. Si Δ es J-conexión, $M(X,Y) = 2\Delta_X Y$.

Demostración. $(\Delta_X J)Y = J(\Delta_X Y)$, luego $M(X,Y) = \Delta_{JX}(JY) + \Delta_X Y - J(\Delta_{JX} Y) - J(\Delta_X(JY)) = 2\Delta_X Y$.

Una vez realizado este estudio general, procedemos a estudios análogos para las cuatro conexiones lineales particulares que hemos escogido por su interés.

i) $\Delta_1 = \Delta - T$. El tensor de torsión de la conexión Δ_1 es el opuesto del de Δ. En el texto se obtienen las condiciones para que se conserve el tipo de conexión de Δ y Δ_1, y en particular

Proposición. Si Δ es G-conexión, Δ_1 también.

Demostración. $(\Delta_{1\,X}J)X - (\Delta_{1\,JX}J)JX = (\Delta_{1\,X})JX - J(\Delta_{1\,X}X) + \Delta_{1\,JX}X + J(\Delta_{1\,JX}(JX)) = \Delta_{JX}X + [X,JX] - J(\Delta_X X) - J[X,X] + \Delta_X JX + [JX,X] + J(\Delta_{JX}(JX)) + J[JX,JX] = (\Delta_X J)X - (\Delta_{JX}J)JX = 0$.

A continuación se estudian los valores que alcanzan C', M y N, por ejemplo

Proposición. Si Δ es J-conexión, $N_1(X,Y)$ coincide con el tensor de Nijenhuis de la estructura.

Demostración. Operando, se obtiene $N_1(X,Y) = 2([JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y])$.

ii) $\Delta_2 = ½\,(\Delta + \Delta_1)$. El tensor de Nijenhuis de Δ_2 es nulo. Haciendo el estudio de los valores de C', M y N para Δ_2 se obtiene, por ejemplo

Proposición. $C'_2(X,Y) = [X,Y]$.

Demostración. $C'_2(X,Y) = \Delta_{2\,X}Y - \Delta_{2\,Y}X = ½\,(\Delta_X Y + \Delta_Y X + [X,Y] - \Delta_Y X - \Delta_X Y - [Y,X]) = [X,Y]$.

iii) $\Delta_{3\,X}Y = \Delta_X Y + \alpha(X)Y + \alpha(Y)X$, siendo α una 1-forma. En el texto se detallan los resultados que se obtienen, por ejemplo

Proposición. Si Δ es J-conexión, $N_3(X,Y) = 0$. El tensor de torsión de Δ_3 es el mismo de Δ.

iv) $\Delta_{4\,X}Y = \Delta_X Y - ½\,J((\Delta_X J)Y)$. La conexión Δ_4 es siempre J-conexión, luego también M-, Q-, N-, H- y G-conexión. Y si Δ es F-conexión, también lo es Δ_4. Como Δ_4 es J-conexión, el tensor de Nijenhuis de la conexión es nulo.

Todos los resultados mencionados se encuentran en el texto, así como muchos más que no detallaremos aquí.

Para terminar, hemos realizado un estudio análogo al aquí reseñado, con el tensor T de una estructura casi-contacto, en lugar de emplear el tensor J de la estructura casi-compleja. Una estructura casi-contacto es una terna (T,U,ω) donde T es un tensor (1,1) sobre la variedad V, U es un campo vectorial y ω es una forma lineal, que verifican

$$T^2(X) = -X + \omega(X)U$$
$$T(U) = 0$$
$$\omega(T(X)) = 0$$
$$\omega(U) = 1$$

para todo campo vectorial X sobre V.

Debido a la diferencia entre T^2 y J^2, que es el producto tensorial de ω por U, definimos de otro modo la función M y el tensor N, como sigue:

$$M(X,Y) = \Delta_{TX}(TY) + T^2(\Delta_X Y) - T(\Delta_X(TY)) - T(\Delta_{TX}Y),$$
$$N(X,Y) = \Delta_{TX}(TY) - \Delta_{TY}(TX) + T^2(\Delta_X Y) - T^2(\Delta_Y X) - T(\Delta_X(TY)) + T(\Delta_Y(TX)) + T(\Delta_{TY}X) - T(\Delta_{TX}Y).$$

Definimos de un modo similar al anterior

T-conexión si $\Delta_X(TY) = T(\Delta_X Y)$
Conexión fuerte si $\Delta_{TX}Y = T(\Delta_X Y)$

Proposición. M y N se anulan para T-conexiones y conexiones fuertes.

Demostración. Veamos que M se anula para T-conexiones: $M(X,Y) = \Delta_{TX}(TY) + T^2(\Delta_X Y) - T(\Delta_{TX}Y) - T(\Delta_X(TY)) = T(\Delta_{TX}Y) + T^2(\Delta_X Y) - T(\Delta_{TX}Y) - T^2(\Delta_X Y) = 0$.

Dada una T-conexión, diremos que es compatible con la estructura casi-contacto cuando $\omega(Y)\Delta_X U + (\Delta_X\omega)Y\cdot U = 0$.

Proposición. Si Δ es compatible con la estructura casi-contacto, $\Delta_X(\omega(Y)U) = \omega(\Delta_X Y)U$.

Demostración. $\Delta_X(\omega(Y)U) = \Delta_X(\omega(Y))U + \omega(Y)\Delta_X U = \Delta_X(\omega(Y))U - (\Delta_X\omega)Y\cdot U = (\Delta_X(\omega(Y)) - (\Delta_X\omega)Y)U = \omega(\Delta_X Y)U$.

Hasta aquí el resumen de la Tesina. Todos los detalles que faltan, se encontrarán en [1].

Epílogo

Leí la Tesina el día 26 de septiembre de 1979. El Tribunal, presidido por el profesor Outerelo, la calificó con Sobresaliente. Mi padre no asistió a la lectura, igual que hizo en 1983 cuando leí la Tesis Doctoral. Su estricto sentido de la justicia le vedaba absolutamente, no ya presionar, sino interesarse, comentar, ni siquiera asistir, a las innumerables oposiciones y pruebas similares que sus hijos matemáticos hicimos a partir de 1985. Como efecto secundario, eso nos ha permitido siempre ir con la cabeza alta y el corazón tranquilo por este pequeño mundo académico. Ahora ya tiene cuatro nietos universitarios, y a los matemáticos, en universidades a las que nunca perteneció mi padre, les dicen: “Tiene usted un apellido ilustre”. A nosotros nos corresponde velar por que siga siendo siempre así.

El día 1 de octubre, los de 1957 nos incorporamos a nuestros primeros contratos en la Universidad. En mi caso, a uno de “Profesor Ayudante de clases prácticas con dedicación plena” en el Departamento de Topología y Geometría, con una retribución que por el conjunto del trimestre más la paga extra supuso la cantidad de 91.202 pesetas. Mis primeras obligaciones fueron las clases de problemas del grupo de Geometría I que impartía Javier Lafuente. El año terminó tan complicado como había comenzado. El día de Navidad la Unión Soviética invadió Afganistán, abriendo la caja de Pandora. Visto desde hoy, estremecen las consecuencias que todavía sufrimos. Terminadas las vacaciones navideñas, el martes 8 de enero fui a la Facultad a despedirme. Aquel día hubo una gran manifestación contra el proyecto de Ley de Autonomía Universitaria, proyecto que no llegó a materializarse. Al día siguiente me incorporé al servicio militar. Mientras lo estaba cumpliendo, Emilio Bujalance, recién leída su Tesis Doctoral, me propuso dirigir la mía, y así lo hicimos. Más de treinta años después seguimos trabajando juntos.

Todos nuestros Catedráticos de los años setenta han fallecido. El último fue mi padre, el pasado 11 de septiembre de 2012. En sus últimos meses fue perdiendo amigos fraternales: Juan Sancho Guimerá, Catedrático de las Universidades de Barcelona y Salamanca; Joaquín Arregui, que lo fue en la que había de ser Universidad Politécnica, y en la Complutense; Antonio Valle, Catedrático de Santiago, Sevilla y Málaga. Justo tres meses después de morir él, ha fallecido Julio Fernández Biarge, Catedrático de la Politécnica. Desaparecen así los últimos representantes de una generación que desde los años cincuenta formó a muchos miles de alumnos, y a cientos de discípulos, por toda España. Ahora algunos de aquellos muchachos de 1957 son catedráticos, y otros estamos cerca (o no) de serlo. Cuando ahora lamentamos las dificultades que encontramos en nuestra labor, causa sonrojo recordar en qué condiciones trabajaron ellos, y cómo nos sacaron adelante a nosotros. El mínimo homenaje que les debemos es procurar seguir su ejemplo, imitar su esfuerzo, y entregar el relevo mejor que como lo recibimos.

Referencias

[1] Etayo Gordejuela, J.J. *Comparación entre algunas conexiones lineales sobre una variedad casi-compleja.* Tesina de Licenciatura. Universidad Complutense de Madrid. 1979.

[2] Etayo Miqueo, J.J. MR0487832 (58 #7431), recensión al artículo [3].

[3] Sinha, B.B., Chaubey, D.N. "On affine connexions in almost complex manifold". Indian J. Pure Appl. Math. 6 (1975) 247-252. Véase también [2].

Los conceptos en Geometría Diferencial. Memorias de un estudiante.

Fernando Etayo Gordejuela
Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria
fernando.etayo@unican.es

Recuerde el alma dormida,
avive el seso e despierte
contemplando
cómo se passa la vida,
cómo se viene la muerte
tan callando;
cuán presto se va el plazer,
cómo, después de acordado,
da dolor;
cómo, a nuestro parescer,
cualquiere tiempo passado
fue mejor.

Mostraré con ejemplos algunas de las enseñanzas recibidas de mi padre, en cuanto que fui alumno suyo de las Geometrías I y V y fue Director de mi Tesina de Licenciatura (todo esto, al igual que mi hermano José Javier) y, además, Director de mi Tesis Doctoral, precisamente la última que dirigió. En ésta última me dejó mucha iniciativa y pude seguir una línea de trabajo por él cultivada en los años anteriores: la teoría de conexiones y sus diferentes generalizaciones, en particular, las pseudo-conexiones. Antes de adentrarme en materia comentaré que en mi Tesis tratábamos también las casi-conexiones y una nueva generalización, las fere-conexiones, desoyendo el mandato claro del gran geómetra estadounidense Michael Spivak [1] que prescribió que quien propusiera una nueva definición de conexión debería ser ejecutado de modo sumario, como le gustaba recordar al Profesor Etayo Miqueo. A pesar de eso, me dejó introducirlas.

Pues bien, el tema del que quiero hablar es precisamente el de las definiciones en Geometría Diferencial. "Las matemáticas son la ciencia de las definiciones, no de los teoremas", aseguraba el profesor Etayo en una frase que a sus alumnos nos dejaba perplejos, y que con el paso del tiempo he hecho mía y repito a los que ahora son mis alumnos. Los teoremas llevan muchas veces el nombre de la primera persona que los demostró, o llevan varios nombres que se corresponden a la evolución de las ideas, que el primer autor probó en un cierto contexto y los restantes extendieron a veces hasta ámbitos que no podía soñar el primero. Pero de las definiciones no se suele recordar en primera instancia su autoría. Si acaso, se cita quién introdujo las ideas: el cálculo infintesimal Newton y Leibniz, Cauchy definió la continuidad de las funciones y Dedekind los números reales, mediante las cortaduras. Este ejemplo me permite hacer una primera reflexión: históricamente los hombres conocimos antes la diferenciabilidad y la integrabilidad de las funciones, después la continuidad y finalmente los números reales. Y, justamente, los enseñamos al revés, empezando por los números, luego la continuidad y a continuación el cálculo diferencial e integral. ¿Por qué? ¿Se imagina alguien que en la enseñanza de la Física se comience por la Relatividad y la Cuántica, y que después se estudie la Mecánica Clásica? La razón está en la esencia de las matemáticas: las definiciones. Newton y Leibniz sabían operar maravillosamente con el cálculo infinitesimal, aunque estaba basado sobre definiciones poco precisas, que tardaron un par de siglos en darse con rigor. Una vez que se supo bien qué eran los números reales, se pudo "dar la vuelta al calcetín", y comenzar a enseñar el Análisis Matemático desde las definiciones. Porque aquello que decían los libros clásicos de que "la recta tangente a una curva es la que pasa por dos puntos consecutivos de ésta" es una idea intuitiva, pero falta de rigor.

Las matemáticas se han de asentar sobre definiciones bien precisas, que, como en el ejemplo precedente, a veces tardan siglos en aparecer. Ello no impide obtener bellísimos y profundos resultados, pero al final hemos de llegar a las definiciones, porque de lo contrario nos encontraremos en un terreno resbaladizo y peligroso. Otro ejemplo que el Profesor Etayo solía citar era el de un importante libro de Geometría Diferencial francés, escrito en los años diez del siglo pasado. La definición de variedad diferenciable, aunque apuntada en la Tesis de Habilitación de Riemann de 1854 no se había expresado de modo riguroso todavía, y habría que esperar hasta los años veinte a que se formulara. Pues bien, el libro citado comenzaba un capítulo con algo que traducido sonaría así: "El concepto de variedad diferenciable es muy difícil. Sea V una variedad diferenciable…." ¡Y seguía tan ricamente, sin definición precisa, obteniendo bellos y verdaderos resultados! Por cierto, que hace cinco años me compré una reedición de un libro clásico de Russell [2], escrito en 1897, en el que encontré esta frase que comenté con mi padre: "there is, if I am not mistaken, considerable obscurity in the definition of a manifold". El libro es un tratado sobre los fundamentos de la Geometría, en el que el autor demuestra ser perfectamente conocedor de las contribuciones hechas a lo largo del siglo XIX en geometrías no euclídeas y de la visión del programa de Erlangen de Klein. ¡Qué difíciles son las definiciones, si a un hombre de la talla intelectual de Bertrand Russell no se le alcanza la noción de variedad diferenciable, cuyo conocimiento exigimos a todos nuestros estudiantes de carrera!

El rigor en las definiciones es lo que caracteriza esencialmente el lenguaje matemático. Cuando definimos un objeto, la definición ha de describir el objeto y solamente el objeto. En "De cómo hablan los matemáticos y algunos otros" [3] el Profesor Etayo se extiende en estas consideraciones, que no procede aquí glosar más.

Avancemos hacia la geometría diferencial. Omitiremos el, visto lo visto, doloroso paso por la definición de variedad diferenciable y lleguemos a la noción de campo vectorial. En la asignatura de Geometría V el profesor Etayo daba tres definiciones diferentes de este concepto:

1. Como asignación diferenciable a cada punto de la variedad M de un vector tangente a la misma. Un vector tangente en un punto p es la velocidad $\gamma'(0)$ de una curva γ contenida en la variedad y que para valor cero del parámetro pasa por el punto, $\gamma(0) = p$.
2. Como sección diferenciable del fibrado tangente de la variedad $\pi:TM\rightarrow M$. El fibrado tangente es la unión disjunta de todos los espacios tangentes y una sección X es una aplicación $X:M\rightarrow TM$ tal que la composición $\pi\circ X$ es la identidad.
3. Como operador X sobre el anillo de funciones de la variedad, de modo que a cada función $f:M\rightarrow R$, le asigna una nueva función $X(f):M\rightarrow R$, sujeta a las condiciones de ser R-lineal y de verificar la regla de Leinbiz: $X(f\cdot g)=X(f)\cdot g + f\cdot X(g)$.

Si ya es complicado dar una definición, ¿por qué dar tres definiciones diferentes de un mismo objeto? Pues porque cada definición nos permite atisbar una parte del objeto matemático que queremos describir, y aunque cada una de ellas es completa desde el punto de vista del rigor, no lo es respecto de la comprensión del objeto. En este caso, la primera es la más intuitiva: en cada punto un vector. Lo de que varíe diferenciablemente esta asignación se obtiene al expresar el campo en coordenadas locales, viendo que los coeficientes del campo son funciones diferenciables. O, mejor aún, mediante la diferenciabilidad de una cierta función. Eso es lo que hace la segunda definición al expresar el campo como sección diferenciable del fibrado tangente. Y la tercera nos hace ver los campos vectoriales como derivaciones. Un campo vectorial define un conjunto de curvas integrales al campo (aquéllas cuyas derivadas son los vectores del campo). Por cada punto de la variedad pasa una única curva integral. Una función tiene derivada nula respecto del campo, $X(f)=0$, si es constante en cada curva integral. Esta noción generaliza la de derivada parcial de una función de dos variables $f:R^2 \to R$: tiene derivada parcial nula respecto de x si f depende sólo de y, es decir, si es constante en cada recta horizontal, esto es, en cada curva integral del campo horizontal $\partial/\partial x$.

Sigamos sacando conclusiones: la tercera definición nos ha permitido dar una nueva interpretación de un concepto que se supone previamente conocido: el de derivada parcial. Las derivadas parciales miden cómo varía la función a lo largo de las rectas horizontales o verticales. Mediante el concepto de campo vectorial en R^2 podemos derivar respecto de cualquier familia de curvas en que descompongamos el plano. La derivada $X(f)$ en el punto p no es sino la derivada de una función real de una variable real: la de la función f restringida a los puntos de la curva integral del campo X que pasa por p. Así hemos llegado a la base de la formación matemática: para entender qué es un campo vectorial basta que se entienda qué es una derivada de una función real de variable real, lo cual, aunque dado por elemental, tampoco es trivial, pues tuvimos que esperar a que vinieran Newton y Leibniz a explicárnoslo.

Ésta era también una gran afición del profesor Etayo: hacer suyo el título y el espíritu del libro [4] de Klein: "Matemática elemental desde un punto de vista superior". Volver a ver los conceptos más elementales desde un punto de vista superior, que nos permita comprenderlos mejor. Así pasa también con la segunda definición, que expresa de modo intrínseco el concepto. Hay que saber qué es un fibrado, lo cual no es nada sencillo, pero una vez que lo sabemos, entendemos mejor la definición de campo vectorial. Así, de las tres definiciones vistas en conjunto podemos aprehender el concepto. Realmente, cuando se entiende un concepto matemático es cuando se tiene que hacer el esfuerzo de contárselo a otra persona. Por eso los profesores tienen que ser "estudiantes".

Escribió el gran matemático húngaro Paul Erdös que Dios tenía un LIBRO en que había escrito las demostraciones perfectas de todos los teoremas, que los hombres a veces logramos vislumbrar. Recientemente se ha publicado un libro [5] con algunas de estas demostraciones que seguro estarán también en el LIBRO. Sin duda Dios tendrá también un libro dedicado a las definiciones, en que los objetos quedarán completamente descritos de modo totalmente preciso y claro. Porque una cosa y otra no son sinónimas. Ocurre a menudo, en Geometría Diferencial, que objetos quedan definidos de un modo totalmente preciso, pero que "no vemos" lo que significan. La tercera definición de campo vectorial es un ejemplo cuando se explica sin más extensión: un campo vectorial aparece como un operador sobre las funciones y no vemos lo que eso significa. Y lo que he comentado es aún poco: un campo vectorial tiene asociada una estructura algebraica, un grupo uniparamétrico, que es el que permite "ver" la definición de derivada de Lie de un campo respecto de otro. Nuevamente, en este caso, existe una definición formal y precisa, como operador, y demasiadas veces se omite explicar la geométrica. En las clases de Geometría V veíamos siempre la definición algebraica, como operador, de los campos, las conexiones, la curvatura, la torsión, etc., junto con las definiciones geométricas que nos indicaban qué medían esos operadores y cómo se transportaban los vectores de modo paralelo.

Pero sigamos con los campos vectoriales. La asignación del grupo uniparamétrico permite asociar a la idea de campo vectorial la de partículas en movimiento. Las trayectorias de las partículas son precisamente las curvas integrales del campo vectorial, recorridas con parametrización tal que su derivada en cada punto, su velocidad, coincida con el vector del campo en el punto. Ésta es la idea del campo gravitatorio, eléctrico o magnético de la Física. El Profesor Etayo que durante muchos años impartió docencia no sólo a matemáticos sino también a físicos, lamentaba la falta de formación física de los primeros, que se agudizaba a cada reforma del plan de estudios de la carrera. Durante los últimos años he impartido yo una asignatura de Topología Diferencial en la que los alumnos han tenido que realizar un trabajo sobre los campos en la Física, pues pienso yo que el rigor matemático no está reñido con el conocimiento de la utilización de las matemáticas en otros ámbitos. A este respecto, les solía comentar yo cómo la información meteorológica que brindaba Mariano Medina en su pizarra, en la televisión en blanco y negro, era mucho más didáctica que la actual, pues al dibujar las isobaras y los gradientes hacía entender lo que significaba un mapa del tiempo y comprender cuál iba a ser la evolución del mismo. Era un esfuerzo por hacer llegar la cultura científica mucho más serio que pintar un mapa lleno de solecitos o de nubecitas. Por cierto, permítaseme la digresión, voy a comentar una extraña relación entre Mariano Medina, Locomotoro y mi padre. Los dos primeros eran caras asiduas de la televisión de los años sesenta y setenta, a diferencia de mi padre, y los tres compartían el que sus hijos estudiaran en el mismo colegio, el Calasancio de Madrid. En alguna de las fiestas interminables de fin de curso a los padres escolapios no se les ocurrió mejor idea que formar una mesa de honor en que como padres distinguidos de los alumnos estaban los tres: Mariano Medina, Paquito Cano Locomotoro, y José Javier Etayo. Dos de ellos científicos y los tres personas entrañables.

Volvamos a nuestro camino. Llegamos a las conexiones, de las que no se debe asustar el lector, porque si de las variedades no hemos dado la definición, menos aún de las conexiones. Baste decir que el Profesor Etayo les dedicó su discurso de ingreso [6] como Académico de número de la Real Academia de Ciencias. Un discurso dedicado a una noción, a un concepto, que se fue destilando a lo largo de los años, que se ha abordado desde numerosos puntos de vista, con diferentes definiciones, y que es capital en la Geometría Diferencial, en otras ramas de la Matemática y en muchos aspectos de la Física Teórica.

Termino. Quiero recordar algunas frases que dijeron otros profesores de los que tuve la suerte de ser alumno, hoy todos ya fallecidos, que dejaron profunda huella en mi formación y que expresaban ideas similares a las aquí expuestas. Así, el profesor Abellanas nos decía a los alumnos de Geometría III: "ustedes no son estudiantes, estudiante soy yo, ustedes son aprendices de estudiante" y nos explicaba a continuación que la vida del profesor era una vida dedicada al estudio. El profesor Gaeta en la Geometría IV nos indicaba que "las Matemáticas se estudian en espiral, y volvemos a pasar una y otra vez por el mismo concepto, pero cada vez lo entendemos mejor". El Padre Dou nos enseñó en primero de carrera a buscar las definiciones: "¿cómo puedo expresar la continuidad de una familia de funciones de modo que no dependa de la función escogida?", y así nos construía la definición de familia equicontinua. El Profesor Rodríguez-Salinas, del que no fui alumno, pero al que mi padre llevaba en coche, lo que me permitía escuchar sus conversaciones, comentaba que "a menudo, los teoremas clásicos tenían demostraciones incorrectas vistas con el rigor de hoy, pero eran ciertos", y explicaba que el concepto de rigor matemático ha ido evolucionando. Del profesor Arregui aprendí aquello de que "en el primer ciclo se han de estudiar los modelos matemáticos: por ejemplo, el espacio R^n, como objeto del Análisis Matemático, como espacio vectorial y como espacio afín; en el segundo ciclo se han de realizar las abstracciones". Así es como históricamente se ha desarrollado la Matemática y quizá nos hayamos excedido al presentar las definiciones más abstractas como punto de partida y al explicar las situaciones concretas que las idearon como meros ejemplos de una teoría general.

Sirvan estas letras de sincero homenaje a todos ellos, personas que se creían su misión como profesores de universidad, que enseñaron a muchas generaciones tanto de las Matemáticas, de cómo verlas y entenderlas, de admirarlas y deleitarse en ellas con el espíritu contemplativo de quien se sabe inmerso en un maravilloso paisaje. Y, en particular, a quien además, yo podía llamar padre, al que espero Dios tenga en su misericordia y le permita echar una ojeada al LIBRO. Empecé con la primera estrofa de las coplas de Jorge Manrique a la muerte de su padre, que el mío recitaba de memoria, y terminaré con la última, en la que sólo hay una diferencia en el caso presente, y es que mi madre le precedió.

Assí, con tal entender,
todos sentidos humanos
conservados,
cercado de su mujer
y de sus hijos e hermanos
e criados,
dio el alma a quien gela dio
(el cual la ponga en el cielo
en su gloria),
que aunque la vida perdió,
dexónos harto consuelo
su memoria.

Referencias

[1] Michael Spivak: *A comprehensive introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish 1970.

[2] Bertrand Russell: *An Essay on the Foundations of Modern Geometry*. Dover, 2003. Original: Cambridge Univ. Press, 1897.

[3] José Javier Etayo Miqueo: *De cómo hablan los matemáticos y algunos otros*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, lección inaugural del curso 1990-1991. Madrid, 1990.

[4] Felix Klein: *Matemática elemental desde un punto de vista superior*. Reeditado por Nivola, Madrid, 2006, (Original de 1908, traducida al español en 1927).

[5] Matin Aigner, Günter M. Ziegler: *El LIBRO de las demostraciones.* Nivola, Madrid, 2005. (Original de Springer, 2003).

[6] José Javier Etayo Miqueo. *Pequeña historia de las conexiones geométricas*. Discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, Madrid, 1983.

José Javier Etayo Miqueo era el abuelo

Ujué Etayo Rodríguez
Alumna de Tercer de Grado de Matemáticas.
Universidad de Valladolid
ujue.etayo@gmail.com

Fernando Etayo Rodríguez
Alumno de Segundo de doble Grado de Matemáticas y Física.
Universidad Autónoma de Barcelona.
f.e.r.nandoetayo@gmail.com

José Javier Etayo Miqueo era el abuelo. Si teníamos que detallar un poco más entonces era "el papá de papá", y así lo fue siempre hasta que iniciamos nuestras andaduras universitarias en el curso 2010 y 2011, Valladolid y Barcelona respectivamente; eso sí, en el grado en Matemáticas.

Fue entonces cuando nos dimos cuenta de que la moneda tenía dos caras: resulta que el simpático abuelo que siempre nos traía regalos en Navidad era alguien conocido, al menos en el pequeño mundo de la matemática en España. Un nuevo panorama se abría ante nosotros; claro que sabíamos que el abuelo era matemático, igual que papá, que mamá, que el tío Jose,… en el fondo para nosotros era una profesión de lo más común. Sin embargo, todas las matemáticas que podíamos apreciar hasta ese momento eran, si pueden llamarse matemáticas, aquellas tardes tanto en Navidad como en las vacaciones de verano en las que alguno de los dos se sentaba bajo su brazo en el sofá y se dedicaba a resolver el sudoku del periódico con el abuelo. Era entonces cuando él, pudiendo resolverlo solo y de una forma mucho más rápida, esperaba a que diéramos con uno de los números para soltar una admiración "Muy bien, mi chico, tienes mucha razón".

Comenzar la carrera y que la gente nos preguntara por nuestro apellido fue todo uno, había gente a la que simplemente le sonaba de algo... otros eran grandes amigos o discípulos del abuelo, muchos habían sido sus alumnos. Entre otras anécdotas podemos rescatar la de una conferencia el año pasado a cargo de un Catedrático de Física ya retirado de la Complutense: Ujué formaba parte de la asociación que organizaba el ciclo de conferencias, así que al final fue a saludarle y darle las gracias por su conferencia. Al presentarse, al profesor se le iluminó la cara: "Etayo, no tendrá usted nada que ver con... - Efectivamente, soy de la tercera generación." Le faltó tiempo para hablarle de lo mucho que había hecho el abuelo por él y todo el aprecio que le tenía. Esta escena se ha repetido varias veces, tanto en Valladolid como en Barcelona.

Todos estos rasgos del abuelo que íbamos descubriendo a través de la gente que lo conocía se confirmaron el 24 de marzo de 2012 cuando en la entrega de los premios de la Olimpiada Matemática Española (cuya final se celebró en Santander) le rindieron el debido homenaje por todos sus años de dedicación al desarrollo de la matemática en España y en particular del célebre concurso matemático. Sólo nos queda darle gracias por todo lo que hizo, por toda la gente y en especial por nosotros.

El pensamiento matemático escondido en una sonata: La sonata para dos pianos y percusión de Béla Bartók y la sucesión de Fibonacci

María Bejarano Gordejuela
Institución "Fernando El Católico" (C.S.I.C.)
Sección de Música. Zaragoza

Abstract

The sonata for two pianos and percussion is structured fundamentally according to the beginning of the golden section. Along three movements, the mathematical proportion can be discovered which so much importance acquired in the aesthetics of the Renaissance Europe. As an immediate consequence of the systematic utilization of this beginning, the series of Fibonacci will acquire a special relevancy in the whole work. All those numbers that belong to the series will have their importance in the structure, in the melody, harmony, dynamics etc. Another structural significant element is the construction of periods of bars that repeat themselves a number of times equivalent to a power of 2.

In memoriam José Javier Etayo Miqueo

La música se halla muy cerca de las matemáticas,
ciertamente,
de algo muy parecido al pensamiento matemático
y a las relaciones que establece.
Conversaciones (1958) **Igor Stravinsky**

La cita del músico ruso ilustra parcialmente el objetivo del breve estudio que dedico a la memoria del ilustre matemático y amante de la música D. José Javier Etayo Miqueo.

Muchos han sido los filósofos, científicos y escuelas que entrevieron estrechas relaciones entre música y matemáticas. Desde Pitágoras y las proporciones matemáticas de la música, Arístides Quintiliano y la expresión de los tetracordos, Boecio, la inclusión de la música en el Cuadrivium del Medievo, Galileo y la música de las esferas… hasta el dodecafonismo de Arnold Schönberg o las propuestas matemáticas de Stockhausen, Boulez o Messiaen.

Es difícil expresar en breves líneas una sincera loa a mi tío y padrino. Su vida y obra fueron un ejemplo de coherencia personal y pasión por el conocimiento. Supo, desde su Cátedra generar entusiasmo por la ciencia tanto a sus alumnos como a las personas que le rodearon. Lejos de enclaustrarse en una única disciplina amplió sus horizontes con extensos saberes humanistas. Javier fue un hombre del Renacimiento, un hombre Ilustrado, su curiosidad carecía de límites, su fino humor y elegante ironía generaban una corriente de cordialidad.

En mis recuerdos infantiles ocupan un lugar privilegiado las conversaciones con Javier junto al Mediterráneo, sus relatos y sus juicios, su capacidad para expresar lo abstracto en concreto, su conocimiento sirvió en parte para despertar en mí inquietudes matemáticas. Desde mi época más temprana de estudiante pude disfrutar de la faceta didáctica del profesor Etayo plasmada en los numerosos manuales que generosamente me regalaba y dedicaba.

Desde aquí mi gratitud y admiración hacia su persona.

Análisis de la sonata para dos pianos y percusión

La sonata para dos pianos y percusión está estructurada fundamentalmente según el principio de la sección áurea. A lo largo de los tres movimientos e incluso de las partes que conforman cada uno de ellos se puede ir descubriendo la proporción matemática que tanta importancia adquirió en la estética de la Europa renacentista. Como consecuencia inmediata de la utilización sistemática de este principio, en toda la obra adquirirá una especial relevancia la serie de Fibonacci, colección de números cuya particularidad es que cada elemento se obtiene de la suma de los dos términos precedentes. Así pues, fijados los dos primeros elementos se obtiene el resto de la serie. De todo este repertorio de series así construidas, la que está unívocamente relacionada con la proporción áurea a través del cociente de los términos sucesivos, es la que comienza con los valores *2* y *3*. Por lo tanto todos aquellos números que pertenezcan a la serie *2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,.....* tendrán su importancia en la estructura, en la melodía, armonía, dinámica etc. de la sonata.

Otro elemento estructural significativo es la construcción de periodos de compases que se repiten un número de veces equivalente a una potencia de 2, es decir: 2^1, 2^2, 2^3, 2^4,..... Se encuentra fácilmente estructuras cuyo patrón está compuesto de *2, 4, 8* compases.

Bèla Bartók va a marcar de forma muy inteligente el número 2 como inicio, en lugar del natural 1 temas melódicos comenzarán en el segundo compás, en la segunda nota del compás etc., en claro paralelismo al 2 como primer término de la serie.

El ritmo de la sonata también está simétricamente determinado, el primer movimiento está desarrollado en ternario y el último en binario, en la parte central se alternan los compases binarios y ternarios salvo una inclusión determinada de un 5/8 en un momento estratégicamente decido.

La armonía creada por el compositor húngaro la explica Ernö Lendvai en su estudio *Bèla Bartok.Un análisis de su música*. En síntesis se puede hablar de funciones "tonales" o más bien, de familias de sonidos que se encuentran dentro de una misma esfera. Así, si se establece un círculo de quintas con los doce sonidos, una misma familia es aquella cuyos sonidos están geométricamente distribuidos de acuerdo a los dos ejes ortogonales, los que se encuentran situados sobre el mismo eje se denominan contrapolos.

De esta manera quedan distribuidas las agrupaciones:

- tónica: *do – fa#   mib – la*
- dominante: *sol – reb   la# - mi*
- subdominante: *re – lab   fa - si*

Primer movimiento

La introducción al primer movimiento llega hasta el compás *18* donde comienza a cambiar la dinámica.

El tema comienza en el compás *2* en tónica y se mantiene claramente en esta esfera sonora hasta el compás *5* donde empiezan a aparecer nuevos sonidos hasta llegar al compás *8* en el que toman el protagonismo las notas de dominante. La sonoridad de la familia se mantiene intacta en los dos compases *8* y *9* hasta el momento en el que el tema se encuentra invertido, en el compás *12*, y dentro de la armonía de la subdominante.

En toda esta distribución armónica ya se empiezan a descubrir las primeras señales de la aparición de series de Fibonacci:

2: comienzo de la melodía en el compás *2*
la armonía dominante se mantiene durante *2* compases
el segundo piano comienza a sonar *2* compases después de haber empezado el primero.

3 : el tema en tónica se mantiene durante *3* compases
en el tercer compás aparece la percusión
también en el tercer compás cambia el ritmo por primera vez a un *6/8*

5 : una última incursión en el ritmo de 6/8 se incluye en el compás *5*
entra una segunda percusión, el platillo, en el compás *5*

8 : el tema adquiere una armonía dominante en el compás *8*

Si se observa cuidadosamente la distribución melódica del tema principal de la introducción:

Fa# - mi# - la – sol# - re# - mi - sol

se llega a la conclusión de que se trata de una forma simétrica perfectamente distribuida en el círculo de quintas (Fig.1), donde las notas se repartirían por la circunferencia (en sentido horario y empezando por las 12) de la siguiente manera

fa#, sol#, re#, mi#, sol, la, mi.

La figura 1 tiene varias formas simétricas biunívocamente asociadas:

- la correspondencia geométrica de acuerdo a la forma

2 – 1 – 2 – 2 – 2 – 1 –2

- la correspondencia musical en semitonos (obtenida linealizando la circunferencia)

mi# - re# - sol# - fa# - mi – la – sol

o lo que es lo mismo

2 - 4 - 1 - 1 - 4 - 2

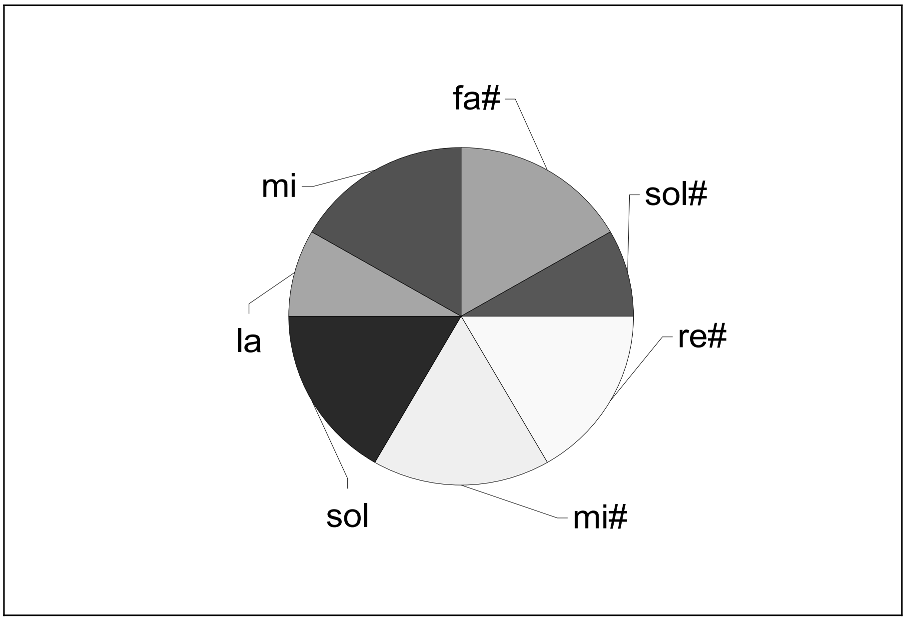


Figura 1

Ambos casos corresponden a formas reflexivas de centro fa# y cuyas parejas reflexivas son

mi# - sol, re# - la, sol# - mi.

Se trata de una escala de siete notas con una distribución de semitonos complementaria a la de la escala tonal. Es decir, en términos de tonos :

Re# - mi – mi# - fa# - sol – sol# - la

½ ½ 1 ½ ½ ½

frente a la escala tonal

do – re – mi – fa – sol – la – si

1 1 ½ 1 1 1

Las formas asociadas a la distribución están siempre en relación a una potencia de *2*.

Ya desde un principio se establece una importante unión que se mantendrá a lo largo de toda la sonata, la fusión entre lo cíclico y lo lineal determinado por las potencias de *2*.

Si se ordenan musicalmente los sonidos, encontramos una escala de siete notas en la que no se establece ninguna diferencia de intervalos entre ellos, empezando por re# la distancia entre cada uno de ellos es de un semitono:

Re#, mi, mi#, fa#, sol, sol#, la

También encontraremos una distribución serial para las funciones tonales :

Tónica – dominante – subdominante – tónica –
dominante – subdominante – tónica

que enlaza de nuevo con la dominante del tema en la dominante.

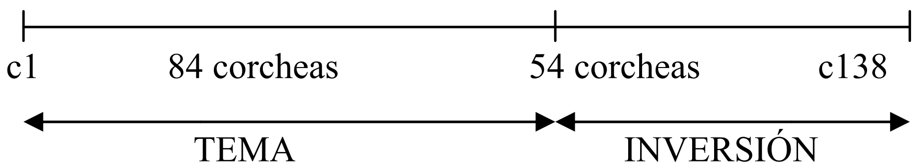
El mismo esquema de las notas se repite a mayor escala en la sucesión temática:

Tónica – (compás 2) – Dominante – (compás 5) – Subdominante – (compás 12)

Desde el punto de vista estructural la introducción consta de *138* corcheas (distribuidas en distintos ritmos). Calculando la sección áurea de *138* se obtiene:

*138 * 0.618 = 85*

pues bien, es precisamente en la corchea número *85* donde se produce la inversión del tema. Hemos encontrado una primera subdivisión del intervalo correspondiente a la introducción (siempre referido a la corchea como unidad)



Dentro de la sección temática se puede encontrar otro nivel de clasificación: la parte correspondiente a la tónica y a la dominante. Nuevamente la relación de los intervalos correspondiente a una y a otra está en relación a la misma proporción matemática:

84 * 0.618 = 52

TEMA

c1 52 corcheas 32 corcheas c84

TÓNICA DOMINANTE

Las distintas entradas de la percusión marcarán un tercer nivel de particiones de los intervalos siempre siguiendo proporciones áureas:

La entrada del tam-tam divide la sección correspondiente a la inversión en dos partes.

*54 * 0.618 = 33*

INVERSIÓN

c85 21 corcheas 33 corcheas c138

Del mismo modo, las sucesivas entradas de los platillos fraccionan los intervalos obtenidos anteriormente y que hemos denominado sección tónica y sección dominante. Así:

*52 * 0.618 = 32 y 32 * 0.618 = 20*

TÓNICA

c1 32 corcheas 20 corcheas c52

entrada del platillo

DOMINANTE

c53 12 corcheas 20 corcheas c84

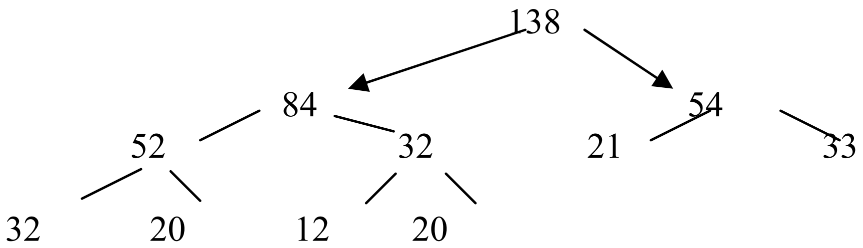
entrada del platillo

El proceso de divisiones sucesivas se ha construido a partir de dos series de Fibonacci, de una de ellas se ha elegido los cinco primeros términos y de la otra los tres primeros:

$S_1 = 12, 20, 32, 52, 84$ --- división del tema

$S_2 = 21, 33, 54$ --- división de la inversión del tema

En esquema:



Es interesante observar que la serie que se ha denotado como S_1 se autoreproduce (sería equivalente a un fractal), cada nivel de subdivisión aportaría tan sólo un término nuevo a la serie.

El esquema musical de la sonata es el clásico, el que responde a la premisa: exposición, desarrollo y reexposición. La exposición comienza en el compás 32, el desarrollo en el compás 161 y la reexposición en el compás 274. La exposición se presenta en do como función tónica, el desarrollo en mi como función dominante, con un paso por sol# en función subdominante, para volver a do tónica en la reexposición.

La distribución temporal de las tres partes también responden a la proporción áurea, en esta ocasión tomando como unidad el compás. Los 443 compases que conforman en primer movimiento quedan fragmentados en dos partes de esta manera:

$$443 * 0.618 = 274$$

donde se inicia la recapitulación.

La melodía principal del movimiento es la que se articula en torno al Allegro que está indicado sobre el compás *32*. Al igual que en la introducción, el primer compás se reserva para la percusión, es en el segundo compás donde se comienza a escuchar propiamente la melodía, es decir, en el compás *33.* Esta melodía se va a desarrollar a lo largo de los siguientes ocho compases, hasta el compás *40.*

Si se estudian los intervalos armónicos que forman la estructura, se observan también simetrías intencionadas:

En el compás *35* (el tercero respecto al Allegro) se escuchan los siguientes sonidos: *mib – reb – sib – lab*, la diferencia de semitonos entre ellos es la correspondiente a *2 – 3 – 2.*

El ámbito de la melodía está delimitado por *sol – lab*, por tanto el número de semitonos que abarca es de *13*.

La nota por la que comienza es do, nota que hace que el intervalo se divida en dos partes de forma que una de ellas es *5* = número de semitonos entre *sol* y *do*, y la otra es *8* = número de semitonos entre *do* y *lab*.

Sol - do – lab

8 5

Siguiendo adelante en la obra se aprecia una segunda melodía donde el tempo está marcado como *piú* tranquilo. En la partitura aparece entre los compases *84* y *100.* Si se calcula la proporción áurea de un intervalo de *17* compases se obtiene dividido en dos partes, una de ellas formada por *10.5* compases y la otra por *6.5*, en el caso de la partitura el intervalo de la melodía secundaria quedaría formado por:

c. 84 ←——→ c.94 c.95 ←——→ c.100

Pues bien, si se estudia el ámbito melódico de cada una de las partes y las armonías de sus compases iniciales se concluye:

Armonía del compás *84*

sol# - mi – si – mi

construida sobre dos bloques compuestos de *8* y de *5* semitonos .

Armonía del compás *95*

do – lab – mib - lab

exactamente la misma formación que la anterior.

El ámbito de la primera parte está delimitado por los sonidos *fa#* y *sol* cuya diferencia de semitonos es de *13.*

En cuanto a la segunda parte oscila entre re y si en dos octavas distintas lo que totaliza 21 semitonos.

Todo ello lleva a pensar que Bartók está señalando de nuevo claramente los primeros términos de la sucesión de Fibonacci que ya ha aparecido en la introducción:

2 como primer número de la serie, la melodía comienza en el segundo compás es parte integrante de la primera simetría armónica de la melodía principal

3 en el tercer compás aparece la primera simetría el intervalo armónico de tres semitonos en la m. principal

5 bloque constructivo de la melodía principal y de las dos partes de la melodía secundaria

8 duración del desarrollo de la melodía principal y base armónica fundamental tanto en la melodía principal como en la secundaria.

13 ámbito de la primera parte de la melodía secundaria y ámbito de la melodía principal ámbito de la segunda parte de la melodía secundaria.

Si se extrapolan estos intervalos, a la unión de las dos melodías se le puede asociar un gráfico orientado que va a delimitar su desarrollo.

Ámbito de la melodía principal. Ámbito de los c. 84-95. Ámbito de c.95-100

La*b*	Sol	Si
↓	↓	↓
Do	mi	re
↓	↓	
sol	fa#	

Si se recorren los tres caminos de forma continuada se obtiene:

Lab ⟶ *do* ⟶ *sol* ⟶ *mi* ⟶ *fa#* ⟶ *si* ⟶ *re*

A partir del círculo de quintas se puede conseguir una serie asociada al recorrido anterior del siguiente modo: calculando el mínimo número de sectores circulares que separan los sonidos, por ejemplo:

De *Lab* a *do* en sentido horario se recorren 4 sectores
De *do* a *sol* – 1 sector
De *sol* a *mi* – 3 sectores
De *mi* a *fa#* - 2 sectores
De *fa#* a *si* – 1 sector (teniendo en cuenta que en este momento se invierte de forma natural el sentido de giro)

De *si* a *re* – 3 sectores (continuando el mismo sentido de giro antihorario)

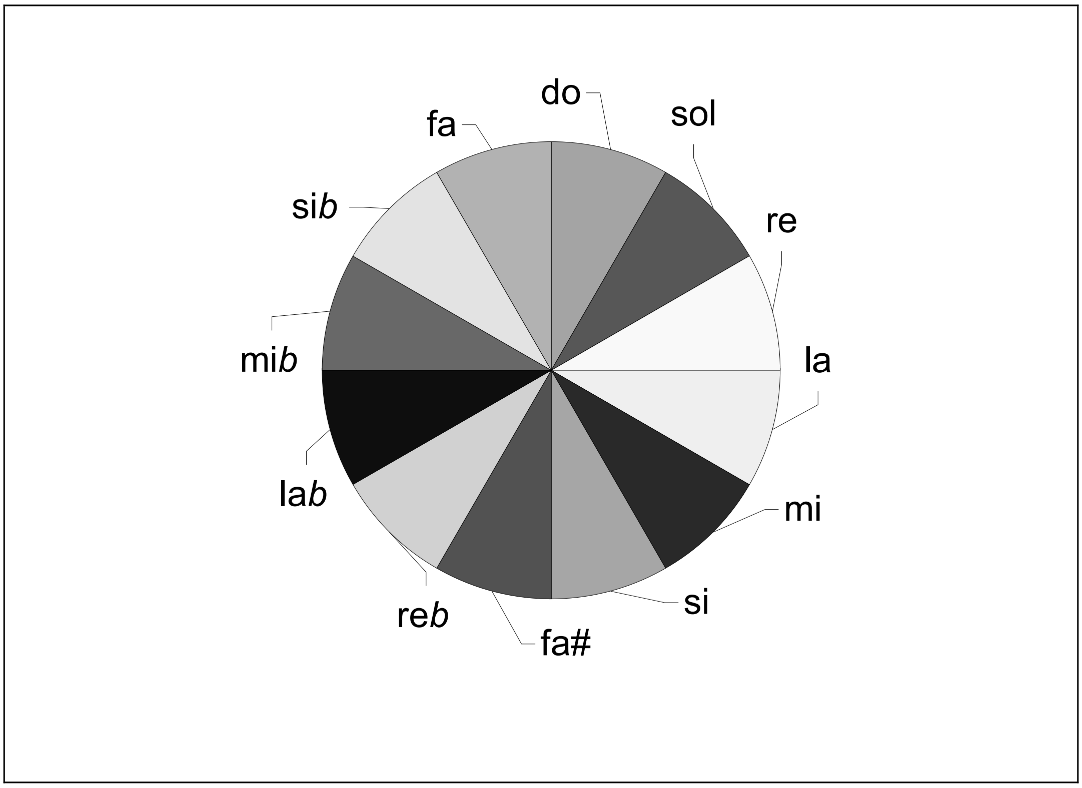


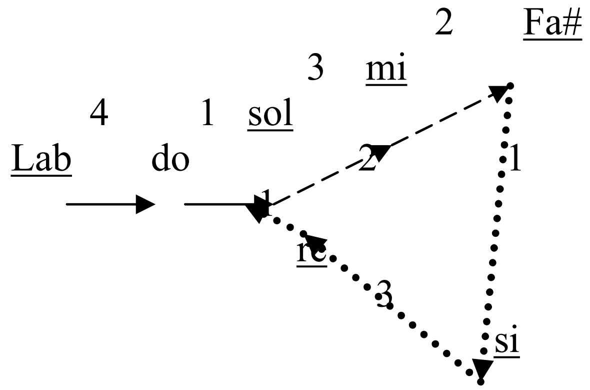
Figura 2

Por tanto, la serie obtenida es:

4 – 1 – 3 – 2 – 1 – 3 – 1

inversión de giro

La serie tiene a su vez un gráfico orientado asociado:



Las ramas que tienen el mismo trazo son las que se corresponden a la misma melodía, la rama de trazo continuo corresponde a los límites de la melodía principal, la rama de trazo discontinuo al ámbito de la primera parte de la melodía secundaria y la de puntos es la que corresponde a la segunda parte. Sumando el peso de cada uno de los arcos que forman la rama se observa que el gráfico es doblemente simétrico:

- cada rama tiene un mismo peso = 5
- si se unen los nodos interiores (los que corresponden a *mi* y a *re*, el arco no está coloreado porque no forma parte directa de las melodías) se sigue manteniendo una doble simetría :

sol -- 3 – mi -- 2 – re – 1 – sol ➔ *3 = 2 + 1*

mi – 2 -- fa# - 1 - si - 3 – re – 2 – mi ➔ *2 + 2 = 1 + 3*

Curiosamente el centro del gráfico es la quinta nota de la escala.

A través del gráfico se obtiene que los límites de la melodía secundaria están intrínsecamente determinados por los de la melodía principal para que el movimiento encuentre un equilibrio melódico.

Exactamente lo mismo se encuentra si se recorren los acordes en sentido inverso. Ahora la serie de sonidos será:

Sol → *lab = sol#* → *fa#* → *mi* → *sol* → *re* → *si*

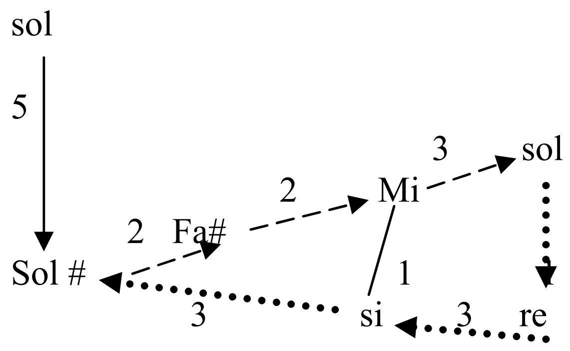
De la misma forma que en el caso anterior se puede obtener una serie numérica asociada a los sonidos, a partir del círculo de quintas. Así:

5 - 2 – 2 – 3 – 1 – 3 – 3

inversión de giro

También en este caso se produce un obligado cambio de giro relacionado con las dos últimas notas. Ahora lógicamente, los recorridos tienen el sentido inverso a los anteriores, primero se recorre la circunferencia en sentido antihorario, para al llegar de sol a re invertirlo a sentido horario.

De la misma forma se construye el gráfico asociado a la serie numérica



Los distintos trazos tienen el mismo significado que en el gráfico anterior.
El gráfico es de la misma naturaleza que el anterior en cuanto a las simetrías:

- las ramas tienen el mismo peso: *2 + 2 + 3 = 3 + 3 + 1 = 7* (que sería el recorrido más largo entre *sol* y *sol#*, es decir, es el inverso módulo *12* del *5*)

- si se unen los nodos interiores (los que corresponden a *mi* y a *si*, el arco no está coloreado porque no forma parte directa de las melodías) se sigue manteniendo una doble simetría interior y exterior:

sol# -- 2 – fa# -- 2 – mi – 1 – si – 3 –sol# ➔ *2 + 2 = 1 + 3*

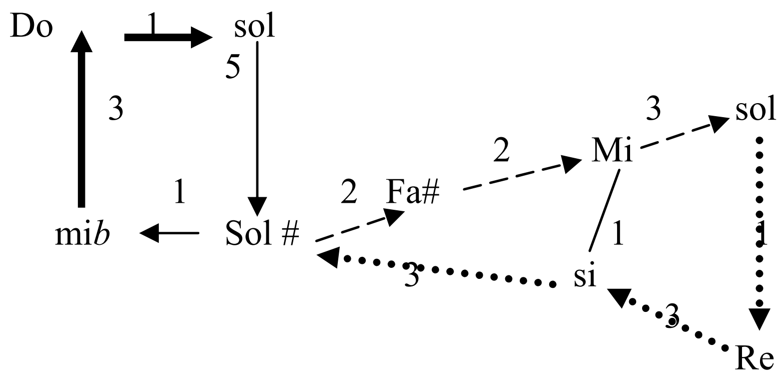
mi – 3 -- sol - 1 - re - 3 – si – 1 – mi ➔ *3 + 1 = 3 + 1*

Se observa que el gráfico interior es precisamente la armonía del compás 84, el comienzo de la melodía secundaria.

Si se añadiera al gráfico otra rama con la armonía de la segunda parte de la melodía secundaria, que aparece en el compás *95*

lab = sol# -- 1 –mib – 3 – do –1 – sol

seguiría manteniendo las mismas propiedades:



Así se cierra el círculo temático propuesto por Bartók en el primer movimiento. Tampoco es casual la colocación temporal de las dos melodías:

*(100 – 33) * 0.618 = 41*,

en el compás *40* se termina la exposición de la melodía principal.

Referencias

[1] Lendvai, Ernö *Béla Bartók.* Idea Books. Barcelona, 2003.

[2] Lester, Joel *Enfoques analíticos de la música del siglo XX* Trad. Alfredo Brotons. Akal. Madrid, 2005.

[3] Salner, Peter, *Ethnic polarisation in an Ethnically Homogeneous Town*, Czech Sociological Rewiew, 2001.

Nota sobre asimetrías heredadas en Biología

Julio Fernández Biarge
Profesor emérito de la Universidad Politécnica de Madrid
jfbiarge@telefonica.net

Abstract

Any genetic code or one of another class can specify an asymmetry by distinguishing it from a mirror image, but only by referring it to a certain example. Therefore, hereditary asymmetries are not originated in the genetic code.

Dedicado a la memoria de mi querido amigo
recientemente fallecido Javier Etayo Miqueo.

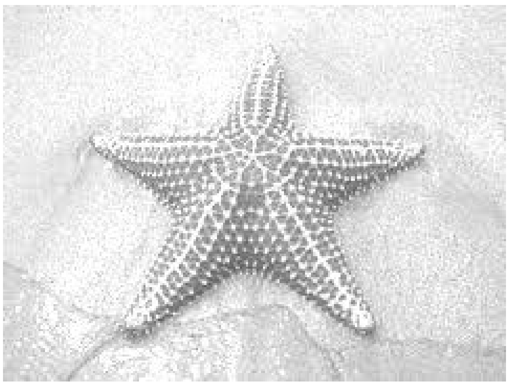
Suele decirse que todas las características heredadas por los seres vivos están, de una u otra manera expresadas en código genético. Esto, no puede ser exacto, pues se heredan ciertas asimetrías, que dado el isomorfismo existente entre el espacio y su imagen especular, no pueden ser descritas en el código genético, ni en ningún otro código, si no es con referencia a un objeto asimétrico dado: "Como éste" o "como su imagen especular".

Todos nosotros, como muchos de los animales superiores, tenemos una aparente simetría bilateral, es decir, la mayoría de nuestras partes son simétricas respecto a un plano. No obstante, esta simetría sólo es aparente a groso modo. En detalle, todos distinguimos nuestros lados izquierdo y derecho y sabemos que nuestro corazón se inclina hacia el izquierdo y nuestro hígado está situado en el derecho y otro tanto ocurre con muchos de los órganos. En el hombre y en todos los animales de la misma especie en los que ocurre otro tanto, los órganos están colocados en el mismo lado y no al azar, según los individuos, como podría esperarse. Se trata, por tanto, de propiedades hereditarias.

Hay especies animales en las que esa asimetría hereditaria afecta claramente al aspecto exterior, como en el llamado cangrejo violinista , cuyo aparente violín aparece en el mismo lado en todos los individuos de la especie.

Para que el desarrollo embrionario pueda transmitir esas asimetrías hereditarias, hacen falta dos cosas: A) Un objeto asimétrico al que referirse y B) Un mecanismo que aproveche esa asimetría para dirigir el desarrollo embrionario.

El problema para A no es encontrar uno, sino seleccionar cual puede servir para el propósito hereditario, entre los innumerables candidatos: En efecto, la misma hélice en que viene enrollado el ADN del código genético podría suministrar la suficiente asimetría, pero es difícil encontrar un mecanismo B capaz de aprovecharla. Los mismos aminoácidos que acaban formando las proteínas sintetizadas, y no digamos estas mismas, suelen ser claramente asimétricos. Incluso los líquidos originados, suelen ser asimétricos, como muestra su actividad óptica, que normalmente es levógira. El problema no es, por tanto, encontrar un objeto A, sino uno capaz de servir para un mecanismo B. No parecen estar muy claros los conocimientos sobre este asunto.



Aún se complica el problema con la existencia de los equinodermos, con aparente simetría pentagonal, especialmente en el caso de alguna especie de estrellas de mar cuya adaptación a la simetría pentagonal se hace tan extrema que todos sus miembros carecen de cerebro, que viene sustituido por cinco formaciones neurológicas alojadas en cada uno de sus “brazos”. Los problemas de posibles asimetrías hereditarias se complican en estos casos.

In memoriam de un querido amigo y colega[1]

José Luis Viviente Mateu.
jlvmrm@gmail.com

Permítanme que este recuerdo a la amistad que nos unía con el Prof. Dr. José Javier Etayo Miqueo, se centre en la breve cita de alguna de las "aventuras" que convivimos. Nos conocimos en octubre de 1953, al admitir el Profesor D. Pedro Abellanas dirigir mis estudios de Doctorado y nombrarme becario del Instituto Jorge Juan de Matemáticas del CSIC . Ello nos exigía estudiar en el seminario y biblioteca del citado Instituto. En el grupo de estudiosos guiados por D. Pedro hicimos amistad principalmente con J. J. Etayo Miqueo, con J. Arregui, A. Martínez Losada y J. B. Sancho Guimerá (este último el de mayor formación). Aproximadamente de la misma edad (tanto J. J. Etayo, Sancho G. como yo nacimos el mismo año: 1926, en el que también nació J. P Serre y un año después A. Grothendieck). Todos éramos atraídos por el mismo deseo de búsqueda de la verdad, pese a ser muy distintas las circunstancias vividas por cada uno. Nuestras relaciones, que fueron extraordinariamente enriquecedoras, establecieron una sana amistad al ser matizadas por el sentido de entrega y ayuda mutua más allá del medio intelectual. Es en este contexto en el que se situó mi relación con José Javier Etayo Miqueo. Discutíamos sobre cuestiones matemáticas, pero siempre buscábamos cómo podíamos ayudarnos. Desde este punto de vista le estaré siempre agradecido. Al principio nuestra independencia fue enorme. El se apoyó en la docencia y su formación investigadora, mientras que yo, inicialmente, por las mañanas atendía mi trabajo como funcionario de la Escala Técnica de Telecomunicación en la Sección de Radio de la Dirección General de Correos y Telégrafos, y el resto del día a mi formación matemática.

Laura y José Javier se casaron pocos meses después que Montserrat y yo. Mientras esperaban se terminase de construir su vivienda en el edificio de la calle

[1] El título quiere evidenciar la cordial amistad personal que nos unía, bien que fortalecida por la académica, como dicen en Francia, fue un "Cher collègue et néanmoins ami", pero sobre todo un buen amigo y excelente persona con unos rectos principios.

Reina Victoria, les buscamos y encontramos una vivienda a unos a pocos metros de la nuestra en el madrileño barrio de "La Fuente del Berro", cerca de la plaza de Manuel Becerra en donde permanecieron unos dos años. Tal proximidad al facilitar la convivencia , entre otras cosas, nos ayudó a desarrollar nuestra amistad. Siempre recordamos con cariño estos años. Fue José Javier quien, a su vez, me orientó en el deber de inscribirme en el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y Ciencias de Madrid, al que ya pertenecían él y Angel Martinez Losada, y en el que fuimos los dos homenajeados y nombrados Socios de Honor con motivo de nuestra jubilación.

Casi todos los miembros del grupo cuyos estudios dirigía D. Pedro en el Instituto Jorge Juan seguimos (y discutimos) durante el curso 1955/56 el desarrollado por el Dr. Abellanas dedicado al estudio de las "Transformaciones Algebraicas"; y el expuesto por el Dr . Rodriguez Bachiller sobre "Teoría de la Homotopía". En el curso 1956/57, uno sobre "Superficies Algebraicas" por el Dr. Abellanas (del que surgió mi tema de tesis) y el desarrollado por el Dr. Ancoechea sobre "Sistemas diferenciales exteriores" que nos introdujo en la obra de Eli Cartan.

A partir de Septiembre de 1957 me dediqué exclusivamente a la Universidad y la investigación. Mi tema de tesis exigía un trabajo en el orden de ideas de la algebraización de la Geometría Algebraica clásica o italiana iniciada por Zariski y en aquellas fechas proseguida principalmente por Munford. También empezaban a abrirse paso los métodos cohomológico-analíticos y transcendentes que, apoyándose en los trabajos de Leray y H. Cartan, iniciaban sobre todo en Paris: J. P. Serre (GaGa), A. Grothendieck (Sur quelque points d'algèbre topologique), R. Godement (Thèorie des Faisceaux), ... (Casualmente, en España en 1957, se crearon las becas de estudio de la Fundación Juan March, mientras que en el CSIC en febrero de 1958 se anunciaban las primeras becas de intercambio entre investigadores del CSIC y del CNRS -Centre National de la Recherche Scientifique-). Aunque aparentemente este párrafo parece ajeno al motivo de esta Nota, es preciso recordarlo pues presenta la causa de un mayor desarrollo de las relaciones entre José Javier y yo.

Efectivamente, problemas surgidos en el desarrollo de mi tesis me llevaron a solicitar, en febrero de 1958, una de las becas de intercambio antes citadas para trabajar bajo la dirección del Prof. H. Cartan. Al concedérseme una de las becas de intercambio entre el CSIC y el CNRS, pude incorporarme al Seminario del curso 1958/59 que dirigía el Prof. H. Cartan en la "École Normale Supérieure" en Paris. El poder evitar los peligros de alejarnos de Madrid, evitar ese "quien va a

Sevilla pierde su silla", junto a mi hermano Angel fue, principalmente, a José Javier Etayo Miqueo a quien se lo deberé siempre. Fueron múltiples las cartas comentando la marcha de los estudios y del trabajo en Madrid o anunciándome convocatorias de oposiciones a cátedras. Viajes míos a Madrid con agradables encuentros con José Javier y su familia, encuentro en Paris con Laura y José Javier, asistencia con J. J. Etayo junto al Prof. Plans y su Adjunto Prof. Frontera al Congreso Internacional de Matemáticas de 1962 en Estocolmo, etc.

Para no hacer demasiado larga esta Nota, me limitaré a describir algún aspecto gratamente sorprendente que originó la última carta que recibí en Francia de José Javier. Ésta vez en forma de telegrama (muy usada en los 1960 y hoy desconocida). Como José Javier era ya catedrático fue a petición suya que otro compañero más joven "Chiqui" firmó el telegrama. En Diciembre de 1964 viajaba a Madrid en tren, desde París, y salí de casa a las siete de la mañana. Estábamos parados en la estación de Burdeos, yo lejos de mi departamento, mirando el andén desde una de las plataformas del coche restaurante, de entre la muchedumbre se destacan tres empleados del Ferrocarril con sus quepís que se dirigen hacia la puerta en que yo estaba asomado, cuando voy a cederles el paso me dicen: Mr. Êtes vous français? Les respondí naturalmente: No, y entonces el señor que iba en el centro pregunta, Mr. Êtes vous Mr. Viviente? (¡ . . .!) sorprendido les dije que sí, que era Mr. Viviente y, ante ello el que había preguntado me entrega un telegrama a mi nombre puesto en ruta por el jefe de la estación de Austerlitz en Paris al Jefe de Estación de Burdeos. Encantado elevó el brazo derecho y exclamó: "J'ai trouvé! J'ai trouvé!, . . .", luego me dijeron se dirigían al vagón restaurante esperando entregar el telegrama al revisor para que éste, entre Burdeos e Irún, me buscase. El telegrama decía que había sido aplazada la presentación de los opositores y firmaba Chiqui. Ante ello pido al Jefe de Estación si podría telefonear a Madrid, me respondió Chiqui que llegaba a su casa en aquel momento. Me confirmó que por enfermedad del presidente del tribunal se aplazaba la presentación de los opositores a fecha posterior, que se comunicaría. El Jefe de la Estación me aconsejó y ayudó con lo que a las 23 horas estaba en mi domicilio. José Javier Etayo Miqueo supo inteligentemente evitarnos un viaje innecesario.

Nuestra relación, los dos catedráticos de análoga asignatura, fue mutuamente enriquecedora a nivel docente, a nivel investigador trabajábamos en distintos campos. José Javier Etayo Miqueo, que hizo su licenciatura en la Universidad de Zaragoza, alojándose en el C.M.U. Pedro Cerbuna, era uno de los miembros fundadores de la Asociación de Antiguos Colegiales del C.M.U. Pedro Cerbuna, siempre fue muy bien considerado y recibido en este Centro Universitario y en él también desarrollamos una enriquecedora colaboración.

"*Nuestras vidas son los ríos que van a parar a la mar que es el morir*" dijo el poeta, pero cuando nuestro "*río*" discurre como discurrió la vida de José Javier Etayo Miqueo, los que aún debemos seguir nuestro "*curso en esta vida*" podemos dar gracias a Dios de seguir cursos más o menos paralelos al suyo o haber sido afluentes del mismo río que encauzó la vida de José Javier Etayo Miqueo. Gracias Javier por tu ejemplo y trabajo.

El maravilloso mundo de los números

María Concepción Romo Santos
Departamento de Álgebra. Facultad de Matemáticas.
Universidad Complutense de Madrid.
romosan@mat.ucm.es

Abstract

Los números son un invento prodigioso. Y también las operaciones que se pueden hacer con ellos. En este trabajo descubriremos una serie de adivinanzas y problemas recreativos enmarcados en el mundo de las matemáticas y en particular en el de los números.

Cuando la pena nos alcanza
por un hermano perdido.
Cuando el adiós dolorido
busca en la Fe su Esperanza.
En Tu Palabra confiamos.
Con la certeza que Tú
ya le has devuelto la Vida,
ya le has llevado a la Luz

Se nos ha ido un gran profesor, se nos ha ido D. Javier Etayo Miqueo. Hombre sencillo, como sabio, con la sencillez hija del conocimiento, excelente profesional, gran padre de familia y amigo de todos. Incansable trabajador, tal era su amor al oficio que siguió trabajando hasta su muerte. D. Javier tuvo una larga carrera científica que terminó con su paso a la vida eterna. Todos los que tuvimos la suerte de conocerle queremos seguir unidos a él a través de nuestro recuerdo cariñoso. Descanse en paz.

Introducción

Los números son un invento prodigioso. Y también las operaciones que se pueden hacer con ellos. En este trabajo descubriremos una serie de adivinanzas y problemas recreativos enmarcados en el mundo de las matemáticas y en particular en el de los números

1. Números amigos cuadráticos

Ya desde los pitagóricos los números fueron estudiados con cariño y se hablaba incluso de amistades entre ellos. Vamos a ver algunas de estas amistades.

El número 17 le dice al 19: Fíjate si soy amigo tuyo, que cuando me elevo al cuadrado la suma de mis cifras es igual a ti. ¿ Tiene razón el número 17?. La amistad del 17 al 19. ¿Es correspondida?. (Esto es 19, al elevarlo al cuadrado ¿da un número cuyas cifras sumen 17?. ¿De qué número sería amigo el 19?. El número 16 es un número muy bien relacionado porque tiene una amistad cuadrática correspondida con un número tan temido como el 13. Comprobarlo.

Solución

Tiene razón el 17; 17 al cuadrado es 289 y 2+8+9=19. La amistad no es correspondida: 19 al cuadrado es 361 y 3+6+1=10. El 19 es amigo del 10.

De otra parte, 16 al cuadrado es 256 y 2+5+6=13; 13 al cuadrado es 169 y 1+6+9=16. Luego 13 y 16 son números con amistad cuadrática correspondida.

2. Números amigos

Desde la antigua Grecia se habló de un tipo de amistad entre números unida a sus divisores. Se cuenta que a Pitágoras le preguntaron en una ocasión: ¿Qué es un amigo? Y Pitágoras respondió: Un amigo es otro yo.

Después le puso el ejemplo de 220 y 284 que eran números amigos porque "la suma de los divisores de cada uno (excluido el propio número) era igual a la suma de los divisores del otro".

Un matemático árabe Tabit ben Qurra dio una fórmula para hallar números amigos. De todos modos, la amistad no es cosa fácil, ni aún entre los números y se conocen muy pocos pares de números amigos:

Divisores de 220= 1,2,4,5,10,11,20,22,44,55,110,220.

Divisores de 284= 1,2,4,71,142,284

1+2+4+5+10+11+20+22+44+55+110=284

1+2+4+71+142=220.

3. Números curiosos

El 5 es un gran número, un número notable. Platón habla de cinco clases de sólidos. Se necesitan 5 puntos para determinar una cónica. La ecuación de quinto grado es la menor que no se puede resolver en términos de radicales. El número de divisiones necesarias para obtener el máximo común divisor de dos números nunca supera el número de dígitos del menor multiplicado por cinco. Todos los grupos de uno a quinto orden son conmutativos. Hay cinco dedos en cada mano y en cada pie. La estrella de mar tiene cinco brazos. La mayoría de las flores tienen cinco pétalos.

4. Veamos una curiosa propiedad del número 13

Elevado al cuadrado da 169. Escrito al revés 961, cuya raíz cuadrada es 31, es decir 13 al revés. El producto de 169 por 961 es 162.409, que también es un cuadrado. La suma de los dígitos de 169 es 16. La suma de los dígitos de 13 es 4, la raíz cuadrada de 16.

5. El 19 es un número primo de propiedades curiosas

Por ejemplo es la suma de las primeras potencias de 10 y 9 y la diferencia entre los cuadrados de 10 y 9. Además si se invierte, el 91 también es primo.

6. Las potencias de 2

Las potencias cuadradas de 2, aumentadas en la unidad, son siempre números primos. El cuadrado de 2, aumentado en la unidad, hace 5 que es un número primo. El cuadrado del cuadrado hace 16, que aumentado con la unidad, hace 17 que es un número primo. El cuadrado de 16 es 256, que aumentado en una unidad es el 257 que es un número primo. El cuadrado de 256 es 65.536 que aumentado en una unidad es 65.537 que es un número primo. Y así hasta el infinito.

7. Los cuatro cuatros

Una de las maravillas del cálculo es que empleando cuatro cuatros podemos formar un número cualquiera. ¿Quieres formar un cero? Pues nada más sencillo, basta escribir 44-44. Pasando al 1, la forma más cómoda es 44/44. ¿Quieres ahora ver el número 2?. Se puede utilizar fácilmente los cuatro cuatros y escribir: 4/4 + 4/4. El tres es más fácil. Basta escribir la expresión (4+4+4) /4. El cuatro se puede formar de la siguiente manera 4+(4-4)/4. Para formar el cinco escribiremos

(4×4+4)/4. El 6 se presenta de una forma muy elegante, (4+4)/4 +4. El 7 se obtiene así (44/4)-4. Es muy sencilla la forma que puede adoptarse para el número 8, así 4+4+4-4. El número 9 también es interesante, 4+4+(4/4). Y ahora te mostraré una expresión muy bella igual a 10 formada por cuatro cuatros (44-4)/4. Seguiremos escribiendo números con cuatro cuatros y los símbolos tradicionales:

$11 = \dfrac{44}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}$; $12= \dfrac{44+4}{4}$; $13 = \dfrac{44}{4} + \sqrt{4}$; $14=4+4+4+\sqrt{4}$; $\mathbf{15} = \dfrac{44}{4} + \mathbf{4}$

$16=4+4+4+4$; $17 = (4\times4)+\dfrac{4}{4}$; $18=(4\times4)+4-\sqrt{4}$; $20=(4\times4)+ \sqrt{4} +\sqrt{4}$;

1776 = 4×444

8. La hostería de las 7 penas

El 7 fue siempre para todos los pueblos: musulmanes, cristianos, judíos, idólatras o paganos, un número sagrado, por ser la suma del número tres-que es divino- y el número cuatro- que simboliza el número material-. Y de esta relación resultan numerosas vinculaciones entre elementos cuyo total es siete:

Siete las puertas del infierno.
Siete los días de la semana.
Siete los sabios de Grecia.
Siete los cielos que cubren el mundo.
Siete los planetas.
Siete las maravillas del mundo.

9. Problema recreativo

Calcular un número de cinco dígitos, tal que, si colocamos un 4 delante de él obtenemos un número que es el cuádruple exacto del que obtendríamos si colocáramos un 4 al final.

Solución
El número 102.564 se cuadruplica si se traslada el 4 del final al comienzo para obtener 410.256.

10. El número mágico 153

No es casual que según se relata en el versículo 11 del último capítulo del evangelio según San Juan, la red arrojada por Simón Pedro al mar de Tiberiades contuviera 153 peces. Es un número que posee importantes propiedades místicas. San Agustín hace un complejo análisis numerológico para demostrar por qué había 153 peces. San Agustín parte del 10, el número de los mandamientos y símbolo del antiguo designio divino según la ley mosaica. Le suma 7, el número de los dones del espíritu y símbolo del nuevo designio. El 17 simboliza pues, la unión de lo antiguo con lo nuevo. Luego suma los enteros de 1 a 17 y obtiene 153.

11. El primer número perfecto

Dios creó el mundo en 6 días. San Agustín dice que Dios eligió ese número porque es el primer número perfecto: 6 = 1+2+3.

12. Restas curiosas

Observar las siguientes restas:

```
  987654321
- 123456789
----------------
   864197532

  9876543210
- 0123456789
------------------
  9753086421

  98754210
- 01245789
 ---------------
  97508421
```

Hemos hallado conjuntos de n dígitos, tales que, dispuestos en orden descendente, cuando se les resta los mismos en orden ascendente, en el resultado aparecen los mismos n dígitos.

13. Una división curiosa

Si se divide el número 987.654.321 por 123.456.789, el resultado es 8,00000007 , es decir, 7 ceros decimales seguidos de un 7.

14. ¿Hay número natural cuya raíz cuadrada y raíz cúbica difieren en 18?

El número, *a*, buscado debe verificar

$$\sqrt{a} - \sqrt[3]{a} = 18$$

y si a la raíz cúbica de *a* la llamamos α , tenemos

$$\alpha\sqrt{\alpha} - \alpha = 18 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 3$$

luego α divide a 18, que tiene por divisores 1,2,3,6,9,18. Por otro lado, α debe ser un cuadrado, luego su raíz cuadrada será entera. Es claro que α=1 no conviene, pero para α=9 tenemos:

$$a = \alpha^3 = 9^3 = 729 = (\alpha\sqrt{\alpha})^2 = 27^2$$

y, en efecto, 27 - 9 =18.

15. ¿Cuál es la raíz cuarta de 7.890.481?

Denotémosla *x*. Tratando de situar *x* en un intervalo, observemos que:

10 elevado a la cuarta es 10.000
100 elevado a la cuarta es 100.000.000
50 elevado a la cuarta es 6.250.000

luego *x* está comprendido entre 50 y 100 y está cerca de 50. Sea $X = x \cdot x$ .Si *x* elevado a la cuarta termina en 1, entonces *x* al cuadrado termina en 1 ó en 9. Si *x* al cuadrado termina en uno, entonces *x* termina en 1 ó en 9. Veamos si termina en 1: *x* puede ser 51 (sin duda demasiado pequeño) ó 59, demasiado grande. Veamos si termina en 9: si *x* al cuadrado termina en 9, entonces *x* terminará en 3 ó en 7, luego *x* puede ser 53 ó 57, este último sin duda demasiado grande. La solución es 53.

16. La ecuación del solitario

Sin efectuar operaciones, hallar el valor de *x*, tal que 83.875.683.470 al cuadrado menos 83.875.683.469 por 83.875.683.471 sea igual a *x*. Denotando por *a* al primer número citado, se tiene $a^2 - (a-1)(a+1) = x$, luego $x = 1$.

17. El problema de los tres marineros

Un navío romano se vio sorprendido por una tempestad, el esfuerzo de tres marineros evitó la tragedia. El capitán les dio cierto número de monedas, este número superior a 200 es menor de 300. Las monedas fueron colocadas en una caja para que al día siguiente al desembarcar se repartieran entre los tres marineros.

Durante la noche, uno de los marineros pensó " Será mejor que quite mi parte, así no tendré que discutir". Dividió las monedas en tres partes y sobraba una que la tiró, se llevó su parte.

El segundo marinero tuvo la misma idea, también sobraba una que tiró al mar y se llevó su parte.

El tercer marinero hizo lo mismo, también sobraba una moneda y la tiró. Y retiró su parte. Al llegar a puerto el capitán repartió las monedas entre los tres y como sobraba una se quedó con ella.

¿Cuántas monedas había?

<u>*Solución*</u>
Las monedas en principio eran 241.
El primer marinero, 241:3=80 y resto 1.En la caja quedaron 241-(80+1) = 160.
El segundo marinero, 160:3=53 y resto 1. En la caja quedaron 160-(53+1)=106.
El tercer marinero, 106:3=35 y resto 1. En la caja quedaron 106-(35+1)=70, luego 70:3 =23 y resto 1.
El reparto se efectuó de la manera siguiente:

Primer marinero	80+23=103
Segundo marinero	53+23= 76
Tercer marinero	35+23= 58
Capitán	1
Arrojadas al mar	3

Total	241

18. La herencia del centurión

Un centurión romano dejó a sus hijas cierto número de perlas y determinó que la división se hiciera del siguiente modo, la hija mayor se quedaría con una perla y un séptimo de lo que quedara. La segunda recibiría dos perlas y un séptimo de lo restante, la tercera recibiría tres perlas y un séptimo de lo que quedara y así sucesivamente. Aunque parezca mentira el reparto era justo. Las perlas eran 36 y las hijas 6.

Solución
La primera recibió una perla y un séptimo de 35, es decir 6 perlas y quedaban 30.
La segunda 2 y un séptimo de 28 es decir 6 perlas y quedaban 24.
La tercera 3 y un séptimo de 21, es decir 6 y quedan 18.
La cuarta 4 y un séptimo de 14 es decir 6 y quedan 12
La quinta 5 y un séptimo de 7 es decir 6.
La sexta las seis perlas que quedaban.

Bibliografía

Albaiges Olivart, José M.: *¿Se atreve Vd con ellos?*. Marcombo. Boixareu Editores. Barcelona-México, 1981.

Perelman, Y.: *Problemas y experimentos recreativos*. Editorial Mir. Moscú, 1975.

Romo M.C., Bujanda P.: *Historia de Madrid a través de las Matemáticas*. Servicio de Educación. Ayuntamiento de Madrid, 1991.

Romo Santos, M.C.: *La aritmética árabe durante la Edad Media. Antiguos problemas aritméticos árabes*. Tarbiya, nº 15, págs. 57-64.

Tahan, Malba: *El hombre que calculaba*. Editores Veron. Barcelona, 2000.

Una bagatela matemática: divagaciones sobre el cálculo de la raíz cuadrada

Juan Tarrés Freixenet
Universidad Complutense de Madrid
jtarres@ucm.es

Abstract

We analyze different ways for the calculus of square roots along the history, especially in the ancient Mesopotamy. Also, we generalize the ancient methods in order to calculate roots of arbitrary index.

Con un emocionado recuerdo
al Prof. Dr. D. José Javier Etayo Miqueo,
amigo, profesor y maestro.

Introducción

El algoritmo que se utiliza habitualmente para el cálculo de la raíz cuadrada de un número es bastante complicado y resulta difícilmente comprensible para quien accede a él por primera vez.

El uso generalizado de calculadoras ha simplificado enormemente el cálculo en general y el de la determinación de raíces cuadradas en particular. No obstante, el conocimiento de métodos que permitan la realización de las diferentes operaciones aritméticas sigue siendo de utilidad, no sólo por el cálculo en sí sino también porque dicho conocimiento puede facilitar la programación de algoritmos adaptables al funcionamiento de una calculadora.

En la antigua Mesopotamia, entre los años 1900 y 1600 a.C. se utilizaban ya procedimientos eficaces para el cálculo de raíces cuadradas. Hacían uso del método de aproximaciones sucesivas y su ejecución permite determinar con gran precisión la raíz cuadrada de un número de una manera sencilla y rápida.

El objetivo de este trabajo es el de analizar y justificar tales métodos y mostrar que son aplicables a una metodología actual.

1. Una prueba del algoritmo actual

Al parecer, el algoritmo que se utiliza en la actualidad para el cálculo de raíces cuadradas era conocido ya en China en el siglo III a.C. (ver [3]). Aparece en el libro de autor anónimo titulado *Chin Chan Suan Shi* (nueve capítulos sobre las artes matemáticas) escrito alrededor del año 200 a.C.

Veamos una justificación del mismo para un número N cuya raíz cuadrada sea un número de tres cifras *abc* (para otra cantidad de cifras, el razonamiento es análogo). Será:

$$N = (100a + 10b + c)^2$$

Llamemos $\alpha = 100a$, $\beta = 10b$, $\gamma = c$; se tiene:

$$N = (\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + (2\alpha + \beta).\beta + [2(\alpha + \beta) + \gamma].\gamma$$

Expresión que justifica la mecánica del algoritmo que estamos analizando, como se puede ver en el ejemplo siguiente:

Si se trata de calcular la raíz cuadrada de N = 189225, al ser un número de seis cifras, su raíz cuadrada tiene tres dígitos. Puesto que se busca la raíz cuadrada de N por defecto se comienza eligiendo un número a de una cifra de manera que el cuadrado de $\alpha=100a$ sea menor que N mientras que $\alpha'=100(a+1)$ supere esta cantidad. Así:

$$\begin{array}{lll} a = 4 & \alpha = 400 & \alpha^2 = 160000 \\ a+1 = 5 & \alpha' = 500 & \alpha'^2 = 250000 \end{array}$$

por lo que se toma a= 4 ó lo que es lo mismo, α = 400

La diferencia entre el número dado α^2 es $N - \alpha^2 =$ 29225; además

$$N - \alpha^2 = (2\alpha + \beta).\beta + [2(\alpha + \beta) + \gamma].\gamma$$

Buscamos un valor de β = 10b de manera que $(2\alpha + \beta).\beta$ sea menor que 29225 a la vez que para β' = 10(b+1) la expresión $(2\alpha + \beta').\beta'$ sea mayor que esta última cantidad:

$$\begin{array}{lll} b = 3 & \beta = 30 & (2\alpha + \beta).\beta = (800 + 30).30 = 24900 \\ b+1 = 4 & \beta' = 40 & (2\alpha + \beta').\beta' = (800 + 40).40 = 33600 \end{array}$$

lo que indica que se debe tomar $\beta = 30$; es decir, $b = 3$. Ahora,

$$N - [\alpha^2 + (2\alpha + \beta).\beta] = [2(\alpha + \beta) + \gamma].\gamma = 29225 - 24900 = 4325$$

Finalmente, tomando $c = \gamma = 5$ es:

$$[2(\alpha + \beta) + \gamma].\gamma = (2\ .\ 430 + 5)\ .\ 5 = 4325$$

que, en este caso, es exactamente el valor buscado. En consecuencia, será $c = \gamma = 5$ con lo que

$$\sqrt{189225} = 435$$

2. Una tablilla mesopotámica inquietante

En la tablilla YBC7289 de la *Yale Babilonian Collection* se representa un cuadrado con sus dos diagonales con los números (en caracteres cuneiformes), 30, en uno de los lados, y 1.24.51.10 y 42.25.35 junto a una de las dos diagonales, números expresados en el sistema sexagesimal de numeración (Figura 1).

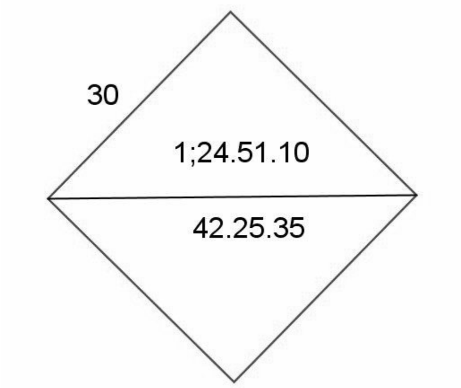


Figura 1

En [4], O. Neugebauer da la siguiente interpretación de la tablilla: Se trata de la representación de un cuadrado de lado 30 cuya diagonal es 42; 25, 35, resultado de multiplicar 30 por $\sqrt{2}$. Este último número viene expresado en la última cantidad que aparece en la tablilla. Es decir,

$$\sqrt{2} = 1;\ 24,\ 51,\ 10$$

Este valor aproximado de $\sqrt{2}$ .es sumamente preciso, pues su cuadrado es:

$$(1;\,24,\,51,\,10)^2 = 1;\,59,\,59,\,59,\,38,\,01,\,40$$

que es una cantidad muy próxima a 2 escrita en el sistema sexagesimal de numeración. En el sistema de numeración decimal es:

$$1;\,24,\,51,\,10_{(60} = 1;\,414212_{(10}$$

Teniendo en cuenta que las primeras cifras decimales de $\sqrt{2}$ son 1,41421356… podemos observar, no sin sorpresa, la excelente precisión de un cálculo realizado en el primer tercio del segundo milenio a.C.

La pregunta inmediata que surge tras comprobar este último resultado es: ¿cómo realizaron dicho cálculo los habitantes de la antigua Mesopotamia? En [2] se hace un análisis muy completo de la tablilla así como una interpretación de los cálculos que pudo haber efectuado el autor de la misma.

A grandes trazos, la conclusión a la que se llega en [2] se basa en una visión geométrica de la situación: Calcular $\sqrt{N}$, donde N es un número entero mayor que 1, consiste en determinar el lado de un cuadrado de área N. Si es $N = a^2 + B$ se toma como primera aproximación de $\sqrt{N}$ el valor a; evidentemente, el cuadrado de lado a tiene un área menor que N. Al añadir a ese cuadrado dos rectángulos de lados a y $\dfrac{B}{2a}$ y completar un cuadrado, se obtiene una figura igual a la que se observa en la Figura 2.

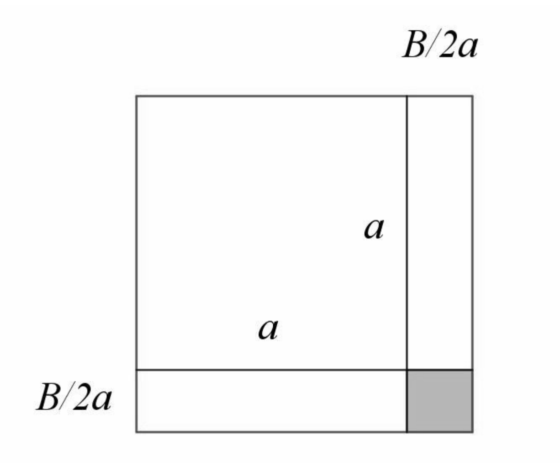


Figura 2

En ella, la parte no sombreada tiene un área igual a *N*. El área del cuadrado mayor de la figura 2 excede a *N* en el valor del área del cuadrado sombreado, que es $\frac{B^2}{4a^2}$. De manera análoga, si es $N = a^2 - B$, habrá que restar al cuadrado de lado *a* los dos rectángulos de lados *a* y $\frac{B}{2a}$ y proceder de forma parecida al caso anterior.

En cualquier caso, se obtiene una nueva aproximación de $\sqrt{N}$ que es

$$\sqrt{N} \cong a_1 = a \pm \frac{B}{2a}$$

que da un error igual a $\frac{B}{2a} < B$, ya que $B \geq 1$.

Procediendo de la misma manera para ese nuevo valor a_1 se obtiene una mejor aproximación de $\sqrt{N}$ y así sucesivamente.

En [2] se obtienen los cálculos correspondientes haciendo $2 = 1^2 + 1$, con lo que es $a = 1$ y $B = 1$. Así

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Ahora,

$$\sqrt{2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{12} = \frac{17}{12} = 1;25_{(60}$$

Un valor aproximado del recíproco de $1;\,25_{(60}$ es $0;\,42,\,21,\,10,\,35,\ldots_{(60}$ por lo que:

$$\sqrt{2} = \sqrt{(1;\,25)^2 - 0;\,00,\,25} = 1;\,25 - \frac{0;\,00,\,25}{2\ x\ 1;\,25} =$$

$$1;\,25 - \frac{0;\,00,\,25\ x\ 0;\,42,\,21,\,10,\,35,\ldots}{2} = 1;\,24,\,51,\,10,\,35,\,17,\ldots_{(60}$$

resultado que concuerda con el que se muestra en la tablilla.

A efectos prácticos, con nuestro sistema de numeración decimal, el cálculo de $\sqrt{2}$ tomando, igual que antes $2 = 1^2 + 1$ y $a = 1$. siguiendo el proceso indicado más arriba, es:

$$a_1 = 1 + \frac{1}{2} = 1{,}5$$

Como $2 = 1{,}5^2 - 0{,}25$ se obtiene:

$$a_2 = 1{,}5 - \frac{0{,}25}{3} = 1{,}41666...$$

Ahora, $2 = 1{,}41666...^2 - 0{,}0069444...$ por lo que:

$$a_3 = 1{,}41666... - \frac{0{,}25 + +0069444...}{2\,.\,1{,}41666...} = 1{,}41421568...$$

que es un valor aproximado de $\sqrt{2}$ con 5 cifras decimales exactas. Continuando con el mismo proceso, se obtiene $a_4 = 1{,}414213562...$ que es el valor que se obtiene en una calculadora científica normal.

3. Otra interpretación de los resultados

Se puede dar una nueva interpretación geométrica de los cálculos conducentes a la obtención de la raíz cuadrada de un número entero *N*. Se trata también de hallar la longitud del lado de un cuadrado ABCD, de área *N* (ver Figura. 3).

Si *a* es una aproximación por defecto de tal longitud, representada por el segmento AB' de la figura 3. Construimos el rectángulo AB'M'P de área *N*; el lado AP mide pues $b = \frac{N}{a}$.

El cuadrado ABCD está comprendido entre los dos cuadrados AB'C'D', de lado *a*, y AQMP, de lado *b*. Construimos ahora un nuevo cuadrado AB''C''D'' de lado:

$$a_1 = \frac{a+b}{2}$$

que es una nueva aproximación de $\sqrt{N}$.

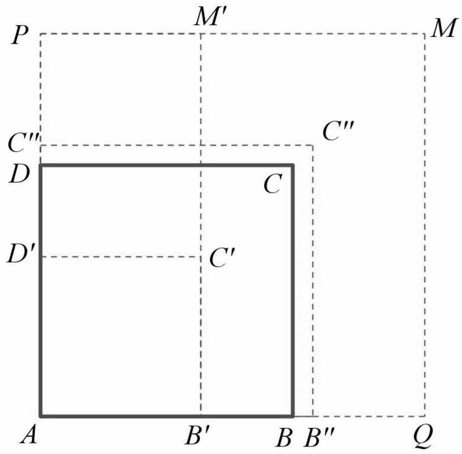


Figura 3

Teniendo en cuenta que a_1 es la media aritmética de a y b mientras que, al ser $N = a.b,$ $\sqrt{N}$ .es la media geométrica de dichas cantidades se cumple $\sqrt{N} < a_1$ mientras que

$$b_1 = \frac{N}{a_1} < \sqrt{N} < a_1$$

Repitiendo el proceso de nuevo para a_1 y b_1 se obtienen nueva aproximaciones de $\sqrt{N}$:

$$a_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} \qquad b_2 = \frac{N}{a_2}$$

$$b_1 < b_2 < \sqrt{\mathrm{N}} < a_2 < a_1$$

Reiterando este procedimiento las veces que sea necesario aparece un par de sucesiones monótonas:

$$b_1 < b_2 < \ldots < b_k < \ldots < \sqrt{\mathrm{N}} < \ldots < a_k < \ldots < a_2 < a_1$$

que convergen a $\sqrt{N}$, pues:

$$a_2 - b_2 = \frac{a_1 + b_1}{2} - \frac{N}{a_1} = \frac{a_1^{\ 2} + a_1 b_1 - 2a_1 b_1}{2a_1} = \frac{a_1 - b_1}{2}$$

es decir:

$$a_k - b_k = \frac{a_1 - b_1}{2^{k-1}}$$

Como consecuencia de todo esto, los valores a_k son aproximaciones por exceso de $\sqrt{N}$. Las correspondientes aproximaciones por defecto viene dadas por los valores b_k.

Por ejemplo, para calcular $\sqrt{2}$ tomamos $a = 1$, $b = \frac{2}{1} = 2$ con lo que:

$$a_1 = \frac{1+2}{2} = 1{,}5 \qquad\qquad b_1 = \frac{2}{1{,}5} = 1{,}333...$$

$$a_2 = \frac{1{,}5 + 1{,}333...}{2} = 1{,}41666... \qquad\qquad b_2 = \frac{2}{1{,}41666...} = 1{,}4117647...$$

$$a_3 = \frac{1{,}41666... + 1{,}4117647......}{2} = 1{,}41421568...$$

Esta aproximación es la misma que se ha obtenido en el apartado anterior. Si se sigue con el proceso, en el paso siguiente es también a_4 = 1,414213562…

Las coincidencias con las del apartado anterior no son casuales, ya que si es $N = a^2 \pm B$ se tiene, partiendo del valor a para $\sqrt{N}$. Resulta:

$$a_1 = \frac{a + \frac{a^2 \pm B}{a}}{2} = a \pm \frac{B}{2a}$$

Señalemos que el método indicado en este apartado se utilizaba también en la Grecia antigua, en la época de Herón de Alejandría mediante el llamado *método de Herón*, consistente en la aplicación sucesiva de la fórmula:

$$\sqrt{N}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{N}{2a}\right)$$

4. Generalización a raíces de índice cualquiera

El método de Newton-Fourier da un procedimiento para la aproximación de raíces de una ecuación del tipo $f(x)=0$ donde $f(x)$ es una función continua y derivable. El método consiste en determinar un intervalo (α,β) en el cual la ecuación dada tiene una única raíz real y de manera que la función tenga signos distintos en los dos extremos y la derivada $f'(x)$ tenga signo constante en todo el intervalo (α,β), o lo que es lo mismo, que la función $y=f(x)$ sea creciente o decreciente en todos los puntos de dicho intervalo.

El método de Newton-Fourier consiste en sustituir la curva $y=f(x)$ por la tangente en uno de los extremos del intervalo, que designaremos por *a*. Dicha tangente tiene ecuación:

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

Para $y=0$ se obtiene:

$$x=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$$

que es un valor aproximado $x=a_1$ del cero $x=r$ de $f(x)$ en el intervalo (α,β).

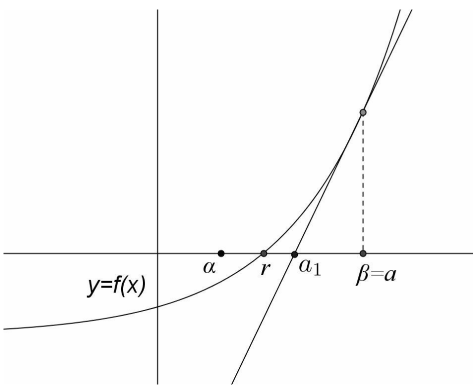


Figura 4

Para determinar la cota del error cometido con este procedimiento, si $f(x)$ tiene derivada segunda en (α,β), la fórmula de Taylor de $f(x)$ permite escribir:

$$f(r) = f(a) + f'(a)\,(r-a) + \frac{f''(\xi)}{2!}(r-a)^2$$

Si es $f(r) = 0$ entonces:

$$r = a - \frac{f(a)}{f'(a)} - \frac{f''(a)}{2f'(a)}(r-a)^2$$

Llamando, como antes, $a_1 = a - \dfrac{f(a)}{f'(a)}$ el error cometido al aproximar la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ con el valor $x = a_1$ verifica:

$$|r - a_1| = \left|\frac{f''(\xi)}{2f'(a)}(r-a)^2\right| < \frac{M(\beta-\alpha)^2}{2|f'(a)|}$$

donde $M > 0$ es una cota superior de $f''(x)$ en (α,β).

Si $f''(a)$ tiene signo constante en (α,β) y además $\dfrac{f(a)}{f'(a)}$ y $\dfrac{f''(\xi)}{f'(a)}$ son positivas se verifica que $a > a_1 > r$. Reiterando el método para el valor a_1 se obtiene un valor a_2 tal que $a > a_1 > a_2 > r$. Así sucesivamente se forma una sucesión $\{a_n\}$ definida de manera que:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

y además $a > a_1 > ... > a_n > a_{n+1} > ... > r$. Así pues, esta sucesión es monótona y acotada, por lo que es convergente.

Por otra parte, si L es el límite de esta sucesión se cumple:

$$0 = lím_{n\to\infty}(a_n - a_{n+1}) = lím_{n\to\infty}\frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = \frac{f(L)}{f'(L)}$$

Si es $f'(x) \neq 0$ en el intervalo (α,β) será $f(L) = 0$, es decir $L = r$, ya que la función $y = f(x)$ tiene un único cero en el intervalo (α,β).

La función $f(x) = x^2 - N$, con $N > 0$ cumple todas las condiciones enumeradas anteriormente en el intervalo (α,β) tal que $\alpha^2 < N$ y $\beta = \alpha + 1, \quad (\alpha+1)^2 > N$. Aplicando el método de Newton-Fourier para $a = \beta$ obtenemos una sucesión monótona decreciente:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2 - N}{2a_n} = \frac{a_n^2 + N}{2a_n} = \frac{a_n + \dfrac{N}{a_n}}{2}$$

cuyo límite es $\sqrt{N}$.

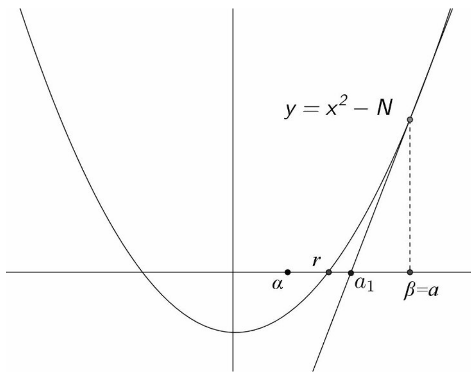


Figura 5

Para el cálculo de la raíz cúbica de $N > 0$ consideramos la función $f(x) = x^3 - N$. Sea $a \geq 0$ un valor de x tal que $\alpha^3 < N, (\alpha+1)^3 > N$; como $f(\alpha) < 0$ y $f(\alpha+1) > 0$ y la función $f(x) = x^3 - N$ es creciente y convexa en el intervalo (α,α+1) para a = α+1 se obtiene:

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} = a - \frac{a^3 - N}{3a^2} = \frac{2a + \dfrac{N}{a^2}}{3}$$

y de manera sucesiva, para $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + \dfrac{N}{a_n^2}}{3}$$

Igual que antes, esta sucesión es monótona decreciente y acotada y su límite es $\sqrt[3]{N}$

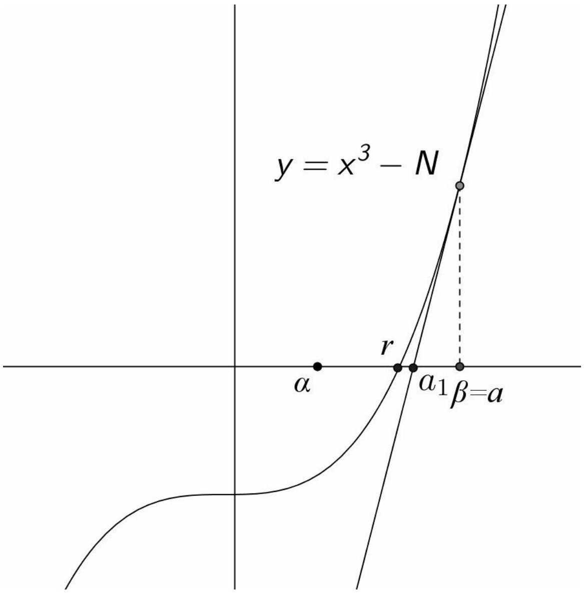


Figura 6

Esta manera de calcular la raíz cúbica de un número positivo N tiene una interpretación geométrica semejante a la que hemos dado en el apartado 4 para la determinación de la raíz cuadrada.

Desde un punto de vista geométrico, calcular la raíz cúbica de $N > 0$ equivale a hallar la arista de un cubo de volumen N.

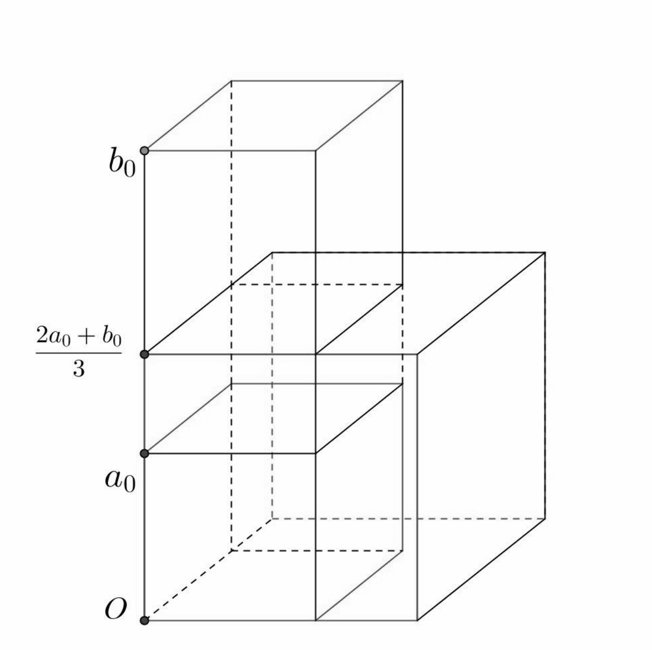


Figura 7

Tomando una primera aproximación $\sqrt[3]{N} = a_0$ de manera que sea $a_0^3 > N$ construimos un paralelepípedo de base cuadrada de lado a_0 y volumen N. Su altura será $b_1 = \dfrac{N}{a_0^2}$ y el cubo inicial de volumen N está comprendido entre los cubos de aristas a_1 y b_1, de manera que es $a_1^3 < N < b_1^3$.

Debido a que la distancia entre los cubos de dos números puede ser muy grande, en lugar de tomar el punto medio del segmento *AB* de la figura 7 dividimos éste en tres partes iguales y elegimos el punto *A*' tal que *AB* = 3 *AA*', con lo que la longitud del segmento *OA'* es:

$$a_2 = \frac{2a_1 + b_1}{3} = \frac{2a_1 + \dfrac{N}{a_1^2}}{3}$$

De acuerdo con los argumentos expuestos anteriormente, a_2 es un aproximación mejor que a_1 de $\sqrt[3]{N}$. Igual que antes, realizando esta operación de manera repetida se obtienen valores de $\sqrt[3]{N}$ cada vez más aproximados.

Por ejemplo, para calcular $\sqrt[3]{18}$ sea $a_0 = 2$. Ahora:

$$a_1 = \frac{4 + \dfrac{18}{4}}{3} = 2{,}833333333$$

$$a_2 = 2{,}636293733$$

$$a_3 = 2{,}620832962$$

$$a_4 = 2{,}620741397$$

este último valor da una aproximación de $\sqrt[3]{18}$ con 8 cifras decimales exactas.

Este método se puede generalizar para raíces de índice arbitrario *k,* para lo cual podemos usar la fórmula recurrente:

$$a_{n+1} = \frac{(k-1)\,a_n + \dfrac{N}{a_n^{k-1}}}{k}$$

para el cálculo de aproximaciones sucesivas de $\sqrt[k]{N}$.

Por ejemplo, para hallar $\sqrt[5]{80}$ tomamos $a_0 = 2$ con lo que:

$$a_1 = \frac{4.2 + \dfrac{80}{2^4}}{5} = 2{,}600000000$$

$$a_2 = 2{,}431277970$$
$$a_3 = 2{,}402881238$$
$$a_4 = 2{,}402249201$$
$$a_5 = 2{,}402248868$$

valor, este último, que coincide con el obtenido al calcular esta raíz con una calculadora científica escolar.

Bibliografía

1. Boyer, Carl B. *Historia de la Matemática.* Alianza Universidad Textos, nº 94. Alianza Editorial. Madrid. 1994.
2. Fowler, D. and Robson, E. *Square root approximations in old Babylonian Mathematics:* YBC 7289 *in context.* Historia Mathematica **25**(1998) 366-378.
3. Ghevernese Joseph, G. *La cresta del pavo real. Las Matemáticas y sus raíces no europeas.* Ed. Pirámide, Madrid, 1996
4. Neugebauer, O. *The Exact Sciences in Antiquity.* 2nd edition. Dover Publ. New York, 1969.

Búsqueda de Recensiones del Boletín en *Math Educ*

Como ya se ha anunciado en anteriores números, nuestro Boletín vuelve a aparecer recensionado en la base de datos *MathEduc*:

`http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/journals/`

Recordemos que en 1969 se creó la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM), que incluía reseñas de artículos.

En los años 80 la base de datos de reseñas se independizó y posteriormente pasó a llamarse *MATHDI*.

Más recientemente esta base de datos pasó a denominarse *MathEduc*. Un resumen de la historia de ZDM puede encontrarse en:

`http://subs.emis.de/journals/ZDM/zdm061i1.pdf).`

Se puede acceder a las reseñas de los artículos del Boletín en su buscador:

`http://www.zentralblatt-math.org/matheduc/`

escribiendo en “`Source`”: `Puig Adam`

Si no se tiene una cuenta en MathEduc, se obtiene un máximo de 3 resultados por búsqueda. No obstante, desde muchas instituciones educativas se tiene acceso a toda la información en MathEduc.

En la siguiente página puede verse una pantalla que visualiza un ejemplo de búsqueda de tres de las reseñas aparecidas de artículos publicados en el número 91 de nuestro Boletín.

■ Start ■ Classification ■ Journals ■ Subscription ■ FIZ Karlsruhe ■ Zentralblatt MATH

FIZ Karlsruhe
MathEduc Database

published by FIZ Karlsruhe GmbH

MathEduc — Contact | Print

Anywhere: | Author: | Title: | Source: Puig Adam | Year: 2012 | Go

General Help
Advanced Search

Query form:
py:2012 so:Puig Adam — Go
Help on query formulation

Result **1** to **3** of **8** total

1 ME 2012f.01034 **Muntean, Aurel**
Solving optimization problems based on trigonometric techniques. (Resolución de problemas de optimización basada en procedimientos trigonométricos.) (Spanish)
Bol. - Soc. "Puig Adam" Profr. Mat., No. 91, 42-55 (2012).
Classification: N60 I20

PDF | XML | AMS-TeX | TEXT | BIBTeX

2 ME 2012f.00972 **Fernández Cristóbal, Jose**
The perturbation of hypersurfaces $S=\{r=r_0\}$ inside the Schwarzschild metric under its own extension curvature. (Perturbación de las hipersuperficies $S=\{r=r_0\}$ en la métrica de Schwarzchild debida a su curvatura extrínseca.) (Spanish)
Bol. - Soc. "Puig Adam" Profr. Mat., No. 91, 65-70 (2012).
Classification: M50 I90

PDF | XML | AMS-TeX | TEXT | BIBTeX

3 ME 2012f.00763 **Moreno Castillo, Ricardo**
The equation $x^m+y^n=z^p$. (La ecuación $x^m+y^n=z^p$.) (Spanish)
Bol. - Soc. "Puig Adam" Profr. Mat., No. 91, 18-25 (2012).
Classification: H30

PDF | XML | AMS-TeX | TEXT | BIBTeX

Result **1** to **3** of **8** total

Login
Username: | Password:
forgotten password | Login

Subscription

Product	Price 2013
MathEduc Web	€ 455
MathEduc Print	€ 295

more...

Contact | Copyright | Site Map | Webmaster

W3C XHTML 1.0 W3C CSS

Congreso ACA'2013

Los congresos "Applications of Computer Algebra (ACA)" vienen celebrándose todos los años ininterrumpidamente desde 1995, aproximadamente alternando su celebración entre Norteamérica y Europa. Para mas detalle, puede verse:

`http://math.unm.edu/aca.html`

Son el referente internacional sobre las aplicaciones del álgebra computacional y un punto de encuentro para matemáticos e informáticos que realizan desarrollos de este tipo de software o utilizan el álgebra computacional de una forma esencial en sus trabajos. Incluyen una sesión sobre aplicaciones en educación.

En 2013 el congreso tendrá lugar de nuevo en España, del 2 al 6 de julio, organizado por José Luis Galán García, Pedro Rodríguez Cielos y Gabriel Aguilera Venegas, en la Universidad de Málaga:

`http://www.aca2013.uma.es/1st%20Announcement_ACA2013.pdf`

El congreso se organiza de forma distribuida en sesiones especiales. Estas se pueden proponer hasta el 28 de febrero. La fecha límite para la propuesta de ponencias es el 30 de abril.

Eugenio Roanes Lozano
Universidad Complutense de Madrid
ACA-Working Group Chair
`http://math.unm.edu/ACA/Organizing/WG.html`

Sobre el número especial dedicado al Prof. Etayo Miqueo

Como ya se anunció en el número anterior de nuestro Boletín, a petición de muchos socios y amigos, la Junta Directiva de la Sociedad aprobó dedicar este número del Boletín en homenaje al Profesor José Javier Etayo Miqueo.

Por ello, en este y en el próximo número –las colaboraciones recibidas exceden la capacidad de un solo número del Boletín– se encontrarán los trabajos dedicados que hemos ido recibiendo.

La Junta Directiva

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm (exactamente como este archivo). El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` ,o bien en un disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pediráa los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92 y 93

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número

3025-0006-24-1400002948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.