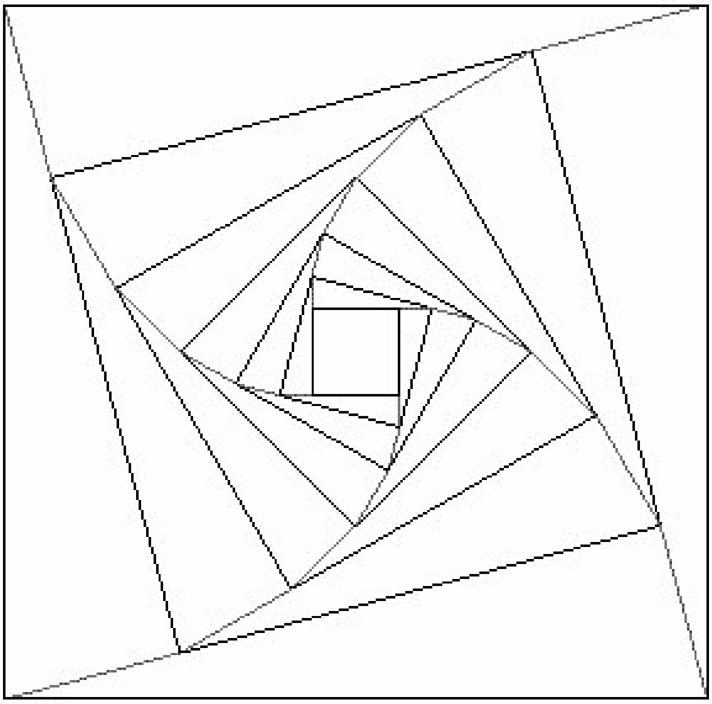
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 92
OCTUBRE DE 2012

ÍNDICE

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecían en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre, ahora "MathEduc"

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad "Puig Adam":
`http://www.sociedadpuigadam.es`

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

XXX Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

En la mañana del pasado sábado 9 de junio tuvo lugar en Madrid, en la Facultad de Matemáticas de la UCM, la trigésima edición del *Concurso de Resolución de Problemas* que desde el curso 1982 – 1983 viene organizando nuestra Sociedad en colaboración con el Colegio de Doctores y Licenciados de Madrid. El Concurso tiene ya una larga tradición, tanta como la participación de equipos españoles en la Olimpiada Internacional de Matemáticas, y son muchos los estudiantes que a lo largo de los años, antes de llegar a formar parte de éstos por razones de edad, obtuvieron sus primeros éxitos.

En esta ocasión han participado un total de 108 estudiantes – frente a los 91 del curso pasado – distribuidos como es habitual en tres niveles. Han sido cincuenta los concursantes del primer nivel, que corresponde a estudiantes de 3º de ESO, treinta y ocho los del segundo (4º de ESO) y veinte los del tercero, dirigido a estudiantes de 1º de Bachillerato. No faltaban entre ellos los de fuera de Madrid, entre los que destaca el grupo llegado desde la Comunidad Valenciana liderado, como cada año, por nuestro compañero y amigo Antonio Ledesma.

En cada uno de los niveles, se propusieron para empezar dos problemas, calificados cada uno de ellos sobre un máximo de siete puntos, a resolver en 90 minutos. La novedad de esta edición ha sido que, tras un pequeño descanso, los estudiantes se enfrentaron, durante otra tanda de 90 minutos, a un “problema encadenado”, en el que la resolución de seis pequeños problemas repartidos en dos grupos de tres proporcionaba los datos necesarios para resolver un problema central. Los enunciados se incluyen a continuación de esta crónica.

En la misma tarde del sábado tuvo lugar el siempre entrañable acto de entrega de diplomas y premios a los ganadores. Nuestro Presidente se dirigió a los presentes para felicitar no solamente a los premiados, sino a todos los participantes, agradeciendo a estos y a sus profesores su esfuerzo y entusiasmo. Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

NIVEL I (3º ESO)

1.- Marc Isern Hacker (Colegio Alemán de Madrid)
2.- Javier Ramos Gutiérrez (IES San Juan Bautista)
3.- Álex Didirka Díaz (IES Luis García Berlanga, Coslada)
3.- Elba Alonso Monsalve (IES Parque de Lisboa, Alcorcón)
5.- Ruizhe Yu (IES Don Pelayo, Villalbilla)
5.- Javier González Domínguez (IES San Juan Bautista)

NIVEL II (4º ESO)

1.- Miguel Barrero Santamaría (IES Alameda de Osuna)
1.- Andrés Barrueco García (Colegio San Viator)
3.- Javier Sánchez-Blanco Boyer (Colegio San José del Parque)
4.- Carlos Espa Torres (IES San Juan Bautista)
5.- Alejandro Martínez Sánchez (IES Requena I)

NIVEL III (1º Bachillerato)

1.- Paula Sardinero Meirás (IES Margarita Salas, Majadahonda)
2.- Pablo Esteban de la Iglesia (Colegio Fray Luis de León)
3.- Izar Alonso Lorenzo (IES Diego Velázquez, Torrelodones)
3.- Jorge Sevilla Lacruz (Colegio San Pedro Pascual, Valencia)

Queremos desde estas páginas transmitir nuestra enhorabuena a los participantes y especialmente a los premiados, así como a sus padres y profesores. Vaya también nuestro agradecimiento a cuantas personas e instituciones convierten en realidad, cada año, el Concurso Puig Adam de Resolución de Problemas de Matemáticas. Finalmente, mostrar nuestro agradecimiento a la Profesora Almudena Mejías, esposa de nuestro Presidente, por tomar las fotos que aparecen en esta crónica.

María Gaspar

Problemas propuestos en el XXX Concurso

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1
Hay enteros consecutivos, como 14 y 15 por ejemplo, en los que la suma de sus divisores es la misma. En efecto: $1 + 2 + 7 + 14 = 1 + 3 + 5 + 15 = 24$. Encuentra todas las parejas de enteros consecutivos m y n con $m = 2p$, $n = 9q$, p y q primos mayores que 3, tales que coincida la suma de sus divisores. (Considera los casos $m > n$ o $m < n$)

Problema 2
Un gimnasio dispone de tres bicicletas estáticas (roja, verde y azul) para uso de sus clientes. Durante la semana pasada solamente cuatro de ellos y en días diferentes han practicado con una bicicleta estática. Cada uno de ellos ha elegido una bicicleta al azar y todas ellas tienen la misma probabilidad de ser elegida. Determina:

a) La probabilidad de que los cuatro hayan elegido la misma bicicleta.
b) La probabilidad de que ninguno haya elegido la bicicleta verde.
c) La probabilidad de que alguna de las bicicletas haya quedado sin utilizar por ninguno de los cuatro.

Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A *(1 punto)*
Si m y n son enteros positivos, ninguno de ellos múltiplo de 10, $m \cdot n = 40\,000$ y $m > n$, ¿cuál es el resto de la división entera de m entre n?
Solución: $T_1 =$

Problema 2A *(1,5 puntos)*
Sea T_1 la respuesta del problema anterior (1A) y $v = \sqrt{T_1}$.

Ángel y Beatriz corren alrededor de una pista circular de 400 m de longitud. Ángel corre con una velocidad de v m/s y Beatriz con $(v - 1)$ m/s. Los dos parten a

la vez y desde el mismo punto. ¿Cuántos metros ha recorrido Beatriz cuando, al cabo de cierto tiempo, Ángel le saca de ventaja una vuelta completa?
Solución: $T_2 =$

Problema 3A *(2 puntos)*
Sea T_2 la respuesta del problema anterior (2A). Si x e y son números reales con $x + y = 1$ y $(x^2 + y^2)\cdot(x^3 + y^3) = \frac{T_2}{200}$, ¿cuál es el valor de $(x^2 + y^2)$?
(Sugerencia: desarrolla $(x+y)^2$ y $(x+y)^3$ y despeja en cada caso x^2+y^2 y x^3+y^3)
Solución: $p =$

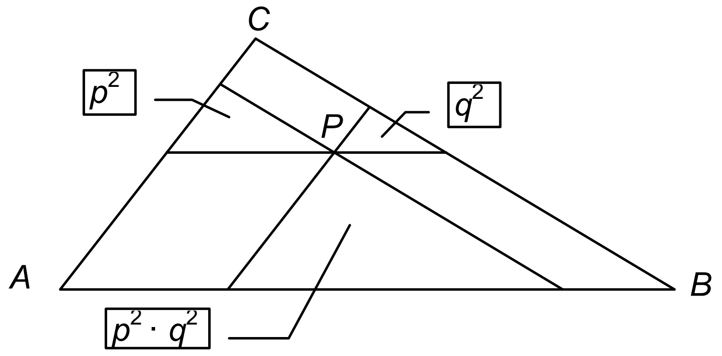
Problema 1B *(1 punto)*
Lanzamos al aire tres dados de diferentes colores: azul, rojo y verde, Los dados tienen seis caras numeradas con: 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
Observamos el número obtenido en el dado azul, lo multiplicamos por 2 y le sumamos 5. Multiplicamos este resultado por 5 y le sumamos el número obtenido en el dado rojo. Al resultado obtenido lo multiplicamos por 10 y le sumamos el número obtenido en el dado verde. Después de este proceso el resultado obtenido fue 816. Calcula la suma de los tres números que se obtuvieron en los dados.
Solución: $S_1 =$

Problema 2B *(1,5 puntos)*
Sea S_1 la respuesta del problema anterior (1B).
Como sabes, la uva es una fruta que contiene mucha agua. Recién cogida el 80 % de su peso es agua. Si las tenemos una semana al sol este porcentaje baja al 15 %. Si cogemos S_1 kg de uvas, ¿cuántos kg pesarán después de una semana al sol?
Solución: $S_2 =$

Problema 3B *(2 puntos)*
Sea S_2 la respuesta del problema anterior (2B).
La suma de $2S_2 + 1$ enteros consecutivos es 450. Cuántos de ellos son primos?
Solución: $q =$

Problema 4 *(5 puntos)*
Sean p y q las respuestas de los problemas 3A y 3B. En el triángulo ABC de la figura los tres segmentos que pasan por P son paralelos a los lados del triángulo y

dividen a éste en seis regiones. Si el área de tres de ellas es la que se muestra, ¿cuál es el área del triángulo *ABC*?



Nota. Si se obtiene la expresión correcta del área del triángulo *ABC* en términos de *p* y *q*, aunque no se explicite el resultado porque no se conocen los valores de *p o q*, también se podrán obtener los 5 puntos del problema.

NIVEL II (4º de E.S.O.)

Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1
En la parábola $y = x^2$ inscribimos el triángulo rectángulo *PQR*, con ángulo recto en *Q*. Las coordenadas de sus vértices $P(p_1, p_2)$, $Q(q_1, q_2)$ y $R(r_1, r_2)$ son todas números enteros. Demuestra que $2q_1 + p_1 + r_1 = 0$.

Problema 2
Formamos una sucesión de la siguiente manera:
- Los dos primeros términos son *0, 1.*
- A continuación los dos números siguientes a los dos primeros términos de la sucesión, es decir, *1, 2.*
- A continuación los cuatro números siguientes a los cuatro primeros términos de la sucesión que serán: *1, 2, 2, 3.*

- A continuación los ocho números siguientes a los ocho primeros términos de la sucesión, que serán: *1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4.*
- A continuación los dieciséis números siguientes a los dieciséis primeros términos de la sucesión, que serán: *1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5.*
- Y así sucesivamente con los treinta y dos siguientes, etc.

Como has visto, los treinta y dos primeros términos son:
0, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 1, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 3, 4, 4, 5
Determina:
a) ¿Cuántas veces aparece el *4* en los *64* primeros términos?
b) ¿Cuál es el término a_{210} de la sucesión?
c) ¿En qué puesto aparece el número *9* por tercera vez?
d) ¿Cuánto suman los *128* primeros términos de la sucesión?

Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A *(1 punto)*
Un ortoedro (caja rectangular) tiene de dimensiones 8×10×12. ¿Qué fracción de su volumen ocupa la región del espacio formada por los puntos interiores al ortoedro y que distan más de 1 de cualquiera de sus caras?
Solución: T_1 =

Problema 2A *(1,5 puntos)*
Sea T_1 la respuesta del problema anterior (1A)
Calcula la mayor de las soluciones reales de la ecuación $(\log x)^2 - \log\sqrt{x} = T_1$, donde log significa logaritmo decimal.
Solución: T_2 =

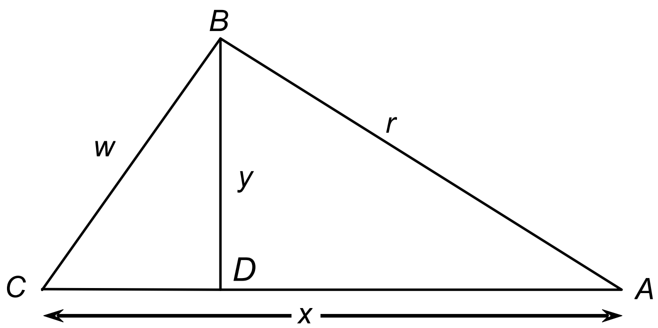
Problema 3ª *(2 puntos)*
Sea T_2 la respuesta del problema anterior (2A) y $N = T_2 - 7$.
¿Cuántos enteros positivos de N cifras no tienen entre sus dígitos ni el 1 ni el 9?
Solución: p =

Problema 1B *(1 punto)*
Ninguno de estos dos números M = [4 A 6] y N = [1 B 7] de tres cifras es divisible por 9, pero en cambio el producto M·N sí es divisible por 9. Calcula el mayor valor posible para A + B.
Solución: S_1 =

Problema 2B *(1,5 puntos)*
Sea S_1 la respuesta del problema anterior (1B)
¿Cuántos grados mide cada uno de los ángulos interiores de un polígono regular de S_1 lados?
Solución: $S_2 =$

Problema 3B *(2 puntos)*
Sea S_2 la respuesta del problema anterior (2B) y n la suma de los tres factores primos de S_2.
Si r y s son las soluciones de la ecuación $F_n x^2 + F_{n+1} x + F_{n+2} = 0$, en la que F_n representa el n-ésimo número de Fibonacci, calcula el producto $(r + 1)\cdot(s + 1)$.
(En la sucesión de Fibonacci $F_1 = F_2 = 1$ y cada término, a partir de F_3 es igual a la suma de los dos anteriores)
Solución: $q =$

Problema 4 *(5 puntos)*
Sean p y q las respuestas de los problemas 3A y 3B. En los triángulos rectángulos ABC y BDA de la figura se verifica que $r + w = \frac{p}{q^4}$ y que $x + y = q^5$. Calcula el valor de y.



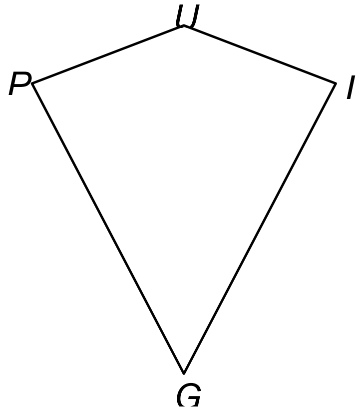
Nota. Si se obtiene la expresión correcta de y en términos de p y q, aunque no se explicite el resultado porque no se conocen los valores de p o q, también se podrán obtener los 5 puntos del problema.

NIVEL III (1º de Bachillerato)

Primera parte (1 hora 30 minutos)

Problema 1
El pentágono *ABCDE*, inscrito en una circunferencia, verifica que las longitudes de tres de sus lados son: $AB = 12$, $BC = 32$ y $CD = 8$. Si la diagonal *BD* pasa por el punto medio de la diagonal *AC*, calcula todas las posibles longitudes enteras que puede tomar el lado *EA*.

Problema 2
El cuadrilátero *PUIG* tiene forma de cometa, es decir, $PU = IU$, $PG = IG$. Si el ángulo en *U* es doble que el ángulo en *G* y
[Área triángulo *PIG*] = 2013·[Área triángulo *PUI*],
calcula el coseno del ángulo en *G*.



Segunda parte: problema encadenado (1 hora 30 minutos)

Problema 1A *(1 punto)*
¿Cuántos pares ordenados de números enteros (*x,* y) verifican la ecuación $x^2 - 8x + y^2 + 4y = 5$?
Solución: $T_1 =$

Problema 2A *(1,5 puntos)*
Sea T_1 la respuesta del problema anterior (1A) y $k = 5 + 2T_1$
Calcula el mayor entero *n* para el cual el valor numérico de la expresión $2n^2 - kn + 77$ es un número primo.
Solución: $T_2 =$

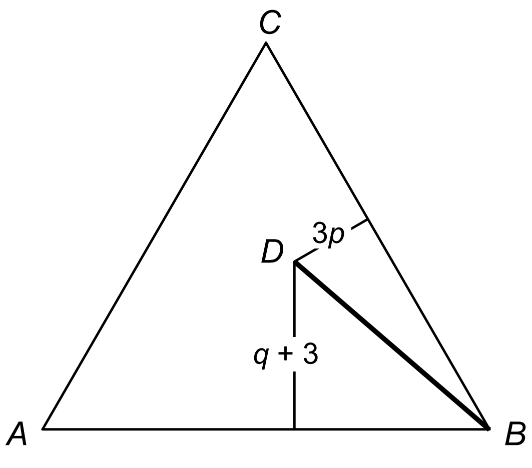
Problema 3A *(2 puntos)*
Sea T_2 la respuesta del problema anterior (2A). En el triángulo *ABC,* con $BC = T_2$, el ángulo en *B* es de 30º. Calcula el número de valores enteros de *AC* para los que hay dos posibles valores para la longitud de *AB*.
Solución: $p =$

Problema 1B *(1 punto)*
Calcula el número de dos cifras [AB] que verifica 3·[BA] + [AB] = 300
Solución: S_1 =

Problema 2B *(1,5 puntos)*
Sea S_1 la respuesta del problema anterior (1B).
Hay un valor de a para el que la suma de las soluciones de la ecuación, con incógnita x, $(x-2a+3)^{x+a}=1$ es S_1. Hállalo.
Solución: S_2 =

Problema 3B *(2 puntos)*
Sea S_2 la respuesta del problema anterior (2B).
Calcula el mayor valor de n para el que 5^n divide a $1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot\ldots\cdot S_2!$
Solución: q =

Problema 4 *(5 puntos)*
Sean p y q las respuestas de los problemas 3A y 3B.
En el interior del triángulo equilátero ABC señalamos un punto D cuyas distancias a dos de los lados del triángulo son $3p$ y $q+3$. Calcula la distancia desde D al vértice común a esos dos lados.



Nota. Si se obtiene la expresión correcta de dicha distancia en términos de p y q, aunque no se explicite el resultado porque no se conocen los valores de p o q, también se podrán obtener los 5 puntos del problema.

Fallecimiento del Prof. José Javier Etayo Miqueo

Con profundo pesar, comunicamos a nuestros socios y lectores el fallecimiento del Profesor José Javier Etayo Miqueo, padre del actual Presidente de nuestra Sociedad.

Ha sido Catedrático del Departamento de Geometría y Topología de la Universidad Complutense de Madrid durante varias décadas, por lo que, sin duda, muchos de nuestros socios hemos sido alumnos suyos y siempre le recordaremos como un magnífico profesor y por su excepcional calidad humana.

También fue Presidente de nuestra Sociedad entre 1986 y 1990, y continuaba siendo uno de nuestros consocios. Anteriormente había sido Presidente de la RSME en el periodo 1976-1982. Después de su jubilación continuó su labor como Académico Numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, de la que fue Secretario General.

En el anterior número de nuestro Boletín dábamos noticia de la concesión a D. Javier de la *insignia de oro* de la Olimpíada Matemática Española.

En el próximo número de nuestro Boletín está previsto que aparecerá una amplia semblanza de D. Javier. Descanse en Paz.

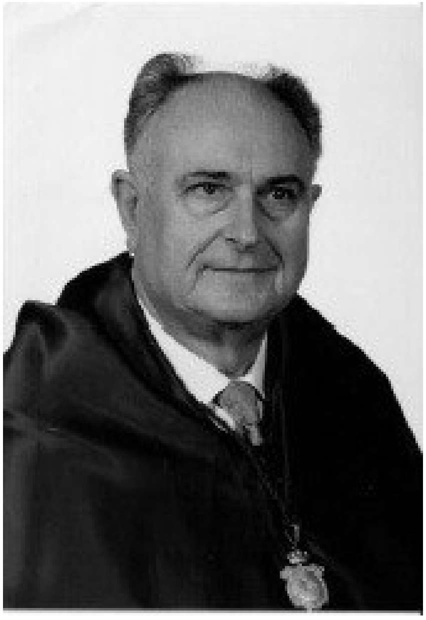
Anuncio de número especial dedicado al Prof. José Javier Etayo Miqueo: invitación a presentar artículos

A petición de numerosos socios y amigos, la Junta Directiva de la Sociedad ha aprobado dedicar un número del Boletín en homenaje al Profesor Etayo Miqueo. En principio, dicho número será el 93, correspondiente a febrero 2013.

Se invita a presentar artículos a cuantos compañeros, alumnos y amigos del Profesor José Javier Etayo Miqueo lo deseen. Las normas de presentación serán las habituales del Boletín, que aparecen al final de este número. Los artículos serán revisados, como es norma en este Boletín. La fecha límite de envío de trabajos será el 10 de enero de 2013.

La Junta Directiva

In Memoriam Antonio Valle Sánchez



El Profesor Antonio Valle Sánchez nació en Málaga en diciembre de 1930. Cursó estudios de la licenciatura en Matemáticas en la Universidad Complutense de Madrid, y en el año 1965 obtuvo el doctorado en Ciencias (Matemáticas) bajo la dirección de Jacques-Louis Lions, considerado como el fundador de la Matemática Aplicada francesa y del que fue su primer doctorando español.

Entre 1960 y 1966, Antonio Valle fue becario y agregado de investigación del Instituto Jorge Juan del Consejo Superior de Investigaciones Científicas y, de manera simultánea, profesor adjunto en la Universidad Complutense de Madrid. A partir de 1967 fue catedrático en la Universidad de Santiago de Compostela, puesto que ocupó hasta 1973, fecha en la que se incorporó como catedrático en la Universidad de Sevilla. En esta universidad permaneció hasta 1984, año a partir del cual, pasó a ser catedrático de la de Málaga hasta que se jubiló.

Entre los cargos académicos que ocupó caben destacar los de Director de Departamento en las Universidades de Santiago, Sevilla y Málaga; Presidente del Centro de Cálculo de la Universidad de Santiago; Vicedecano y Decano de la

Facultad de Ciencias de Santiago; Vicerrector de Investigación de la Universidad de Málaga y Representante de la Universidad de Málaga en el Consejo del Centro Informático Científico de Andalucía C.I.C.A.

Su labor investigadora estuvo centrada en el control óptimo de los sistemas de evolución. Su importantísima labor docente contribuyó de manera decisiva al estudio teórico y numérico de las ecuaciones diferenciales en nuestro país.

El Prof. A. Valle Sánchez impulsó con entusiasmo el estudio y desarrollo de la matemática aplicada, habiendo participado en numerosos comités científicos y organizadores de congresos, seminarios, escuelas, etc., entre los que cabe destacar los C.E.D.Y.A. - Congresos de Matemática Aplicada y las Escuelas Jacques-Louis Lions Hispano-Francesas sobre Simulación Numérica en Física e Ingeniería. Fue uno de los promotores y el primer Presidente de la Sociedad Española de Matemática Aplicada, y miembro del comité ejecutivo de la Sociedad Española de Métodos Numéricos en Ingeniería. En septiembre de 1997 fue distinguido por el gobierno francés como Caballero de l'Ordre Nationale du Mérite.

El Prof. A. Valle Sánchez tuvo una visión adelantada de su tiempo, impulsando con pasión el desarrollo de la Matemática Aplicada en todas las universidades donde fue profesor. Preocupado por asegurar al mismo tiempo la calidad de la labor investigadora y el interés de la misma, estableció relaciones con diversas universidades y centros de investigación internacionales de prestigio, trabajando sin descanso para que sus distintos alumnos pudieran desplazarse. Gracias a él, hoy en día podemos contar con un gran número de especialistas en análisis teórico y numérico de las ecuaciones diferenciales, en el control de los sistemas que gobiernan y en sus aplicaciones a problemas de la Física, Ingeniería, etc.

Sirvan estas líneas como homenaje desde el grupo EDANYA tras su fallecimiento el pasado 24 de junio de 2012. D.E.P.

Carlos Parés Madroñal
Responsable del grupo EDANYA
(Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico Y Aplicaciones)

Dos matemáticos navarros y unos recuerdos míos

José Javier Etayo Miqueo

Recogemos el texto íntegro de la última conferencia preparada por el Prof. Etayo Miqueo. Escribió todo el texto, pero la enfermedad le impidió acudir a Pamplona, lugar de la celebración de la conferencia, con la que se clausuraba el ciclo "La Matemática entre nosotros", impartido por Académicos de la Real Academia de Ciencias, celebrado en el Planetario de Pamplona y auspiciado por diversas entidades y entre ellas, la Universidad Pública de Navarra.

El texto de la conferencia fue leído en la fecha anunciada, 19 de junio, por Fernando, hijo menor del Prof. Etayo y profesor de Geometría y Topología en la

Universidad de Cantabria. La Vicerrectora de Profesorado de la UPNA, María José Asiáin, matemática también, presidió el acto.

El texto de la conferencia estaba preparado específicamente para la audiencia a la que iba destinado, compuesta por personas de variada formación, pero vinculadas a Pamplona y Navarra. Por ello, el Profesor Etayo aprovechó la ocasión para trufar el contenido de la charla con anécdotas y recuerdos de su vida, tanto en el ámbito matemático como en el de su propia existencia, ligada a la ciudad de Pamplona en la que había nacido. Aun pensando que para el lector del Boletín habrá pasajes que le resulten más lejanos, hemos querido mantener el texto íntegro, con la seguridad, además, de que ése hubiera sido el deseo de su autor.

Incluimos un apéndice final en el que extendemos algunos datos matemáticos citados en la conferencia.

"Cuando las ideas disminuyen, los recuerdos aumentan", decía en una de sus últimas intervenciones Luis Antonio Santaló, uno de nuestros más insignes matemáticos, catalán pero que desarrolló en Argentina casi toda su actividad profesional. Yo no sé si mis recuerdos aumentan o se van también disipando pero en cuanto a las ideas es que se me escapan a chorros. Por eso he dudado mucho en cómo responder con cierto decoro a la honrosa invitación de clausurar este ciclo sobre la Matemática celebrado en el "Pamplonetario". (Por cierto, me gusta mucho el nombre porque me "suena" a aquellos juegos de palabras que tanto prodigábamos aquí en tiempos ya lejanos.) Y he pensado que, puesto que mis jóvenes colegas de la Real Academia que me han precedido en él han suministrado a ustedes abundante alimento espiritual, bien podía yo suavizar mi exposición librándoles de formulismos científicos y de tecnicismos y convirtiendo este final casi en un acto social o, si quieren, en una charla familiar.

En ella debía dar cabida –y de ahí el título y el contenido- a las dos cualidades por las que seguramente he sido convocado por la Universidad Pública de Navarra: la de ser universitario, matemático en mi caso, y la de ser navarro. Y si de la primera no puedo presumir porque como científico no paso de ser del montón, dejadme que me sienta orgulloso de mi condición de navarro. Bien sé que solo llego a ser "navarro ausente", como llamamos en Madrid –y no sé si también en otros sitios- a los que hemos nacido en Navarra pero la vida nos ha llevado a residir en otros lugares. Cierto también que sin romper el cordón umbilical, puesto que raro será, que yo recuerde, el año que no haya venido a pasar unos días a Pamplona.

De todas las demás ciudades que me han acogido voy a fijarme ahora en una de ellas, Zaragoza: es la ciudad de mis estudios universitarios, la ciudad de mi juventud y, por tanto, ciudad añorada –lo mismo que Pamplona es la ciudad que yo amo. Haber estado en Zaragoza en aquellos años y con las personas con las que conviví es una de las cosas buenas de las que he disfrutado en mi vida. Ya mi Facultad, a la que tanto quise, dejó de serlo hace 50 años, cuando pasó a la ciudad universitaria. A mí me tocó ese traslado, recién llegado de catedrático: un curso en la antigua sede y otro en la nueva. Pero para mí, cuando voy a Zaragoza, mi Facultad es el viejo caserón de la Plaza de Paraíso. (Por cierto, y entre paréntesis, no piensen ustedes que el Paraíso que da nombre a la plaza es el Cielo, ni siquiera el Paraíso Terrenal: está dedicada a D. Basilio Paraíso, el arquitecto que levantó el edificio.) Pues bien, penetremos en él.

Los que en mis tiempos lo hicieron –no sé si hay alguno aquí– recordarán aquel local de la primera planta, dos salitas bastante reducidas, que servían de cuarto de estudio en las horas intermedias entre las clases. En el dintel se anunciaba su verdadera función: "Biblioteca García de Galdeano". ¡Ya tenemos aquí al primer protagonista de mi historia!: Don Zoel García de Galdeano. Sí, era de Pamplona, pero yo creo que también navarro ausente. No llegué a conocerlo por cuestiones de calendario: él había muerto justamente dos años antes de nacer yo, el mismo día de los respectivos años. Toda su vida estuvo dedicado a la enseñanza, recorriendo distintos institutos hasta recalar durante sus últimos 30 años en la cátedra de la Universidad de Zaragoza. Pero, para comprender su significado, echemos un vistazo a cómo estaba entonces la Matemática en España.

Pues empezaba a despertarse. Porque llevaba años –acaso siglos– alejada de cualquier corriente. La que se enseñaba era la establecida en libros ya tradicionales; la que se aplicaba estaba en manos de ingenieros, militares y marinos que no eran creativos, ni tenían por qué serlo, sino que utilizaban resultados ya conocidos y en sus problemas. Y que, sobre todo, fueron los que mantuvieron el interés por las matemáticas y su conocimiento. Esto, mientras en Europa existían focos de investigación y proliferaban nuevas teorías que apenas llegaban aquí. Hasta que por aquel entonces, paso del XIX al XX, surgen iniciativas de algunos profesores que, si ellos no estaban ya en condiciones de crear novedades, intentaban traer aquí las que hacían fuera. Digamos Echegaray –sí, el dramaturgo y Premio Nobel pero también ingeniero y físico matemático- con la matemática francesa, que llegó a explicarla incluso como divulgación al gran público; o Eduardo Torroja con la alemana, trayendo la geometría de Staudt, más estudiado aquí que en su propio país, y apoyando los estudios de Rey Pastor, el primer matemático español de la generación siguiente ya de algún renombre internacional.

Galdeano fue el tercero de aquellos hombres. Había sido profesor de Rey Pastor en Zaragoza y fue quien le empujó a salir a Alemania y traernos nuevas ideas. De él se llegó a decir lo del viejo romance: "si no vencí reyes moros / engendré quien los venciera". Como es lógico, pese a aquellos esfuerzos, las cosas tenían que llegarnos con retraso pero al menos nos llegaban. Aquella primera generación se llamó de los "sembradores": ellos sembraban y más tarde otros recogerían la cosecha. Su labor puede parecer poco brillante pero era lo que se podía hacer. Es lo que decía Galdeano: "Es mejor importar ideas poderosas que inventar estupideces". Pero hizo mucho más.

Se multiplica en su labor de hacer presente la matemática española: elabora cerca de 200 trabajos entre libros, artículos, conferencias y asistencias a reuniones científicas; participa con comunicaciones en los dos primeros Congresos Internacionales de Matemáticos en Zurich y París, respectivamente, en los años 1897 y 1900; se le nombra miembro del Comité del Patronato de la nueva revista *L'Enseignement Mathématique*, que comparte con primeros espadas europeos, Poincaré, Klein, Mittag-Leffler, ... Es uno de los fundadores de la Academia de Ciencias de Zaragoza, de la que fue presidente, y correspondiente, desde 1884, de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Fundador también de la Real Sociedad Matemática Española, en cuya presidencia sucedió a Echegaray, y a la que contribuyó además sufragando la edición de un "Suplemento" de su *Revista* dedicado a la crítica de publicaciones matemáticas; poco tiempo logró hacerlo, porque le llegó la jubilación en 1917 y con ella la caída de sus ingresos. Pero tenía un precedente asombroso: la publicación en Zaragoza, a sus expensas, de la primera revista matemática española, *El progreso matemático*, que solo pudo durar nueve años, de los que hay que restar cuatro en los que se interrumpió porque su magro sueldo no daba para más. Y eso gracias a que vivía solo, era solterón, y todo lo que tenía lo volcaba en su vocación.

Y, ¿cómo era D. Zoel? Parece que tenía también gran afición a la música y eso me lleva a una faceta de su personalidad que la expongo con la máxima timidez porque no quiero faltar a su memoria y menos sin poder acreditarlo. Así lo hace también Mariano Tomeo en su biografía de la Facultad de Ciencias zaragozana cuando dice escuetamente de él que era uno de esos hombres que tienen "cosas": ya saben, de los que se dice "cosas de fulano", aludiendo a sus manías y costumbres más o menos extravagantes. Lo malo de los que adquieren esa consideración es que después les cuelgan cualesquiera otras simplezas ajenas inventadas por otros, como pasaba con *La Codorniz* o con el mismo Guerrita. Se decía, por ejemplo, que D. Zoel tenía a gala poder dar el "do de pecho" y que los alumnos le provocaban: "Sí, don Zoel, muy bien la demostración del teorema, pero el do de pecho...". "¿Que no? Ahora mismo lo doy, si quieren ustedes; y hasta tumbado encima de la mesa". Como también que a las 12 del mediodía los alumnos se ponían a cantar, con su aquiescencia, el "Bendita y alabada sea la hora..." que desgranaba el carillón del Pilar. Y más cosas así. Quizá lo que me resulta más verosímil, sobre todo por la persona que me lo contó, es que cuando D. Zoel terminaba en sus clases la demostración de un teorema con el consabido "que es lo que queríamos demostrar", los estudiantes se ponían a aplaudir. Hasta que enterado el rector, quizá el profesor Calamita, les llamó al orden, molesto por aquella falta de respeto. Con lo cual, al día siguiente, terminada su explicación, se encontró D. Zoel con un absoluto silencio. Volvió a repetir: "como queríamos demostrar", y nada. Extrañado preguntó: "Pero, ¿qué pasa? ¿Es que no han entendido la demostración?" Y un alumno tuvo que confesarle la intervención del rector, lo que provocó la ira de Galdeano: "¡Claro, pura envidia! Como a él no le aplauden porque no hay quien lo entienda, no soporta que les gusten mis lecciones". ¿Verdad? Cualquiera sabe: tómenlo como un paréntesis distendido que no menoscabe el aprecio que nos merece nuestro ínclito maestro, colega y paisano.

Del que finalmente quiero destacar su acendrado amor por aquella Facultad de Zaragoza a la que legó sus pertenencias, sus propias publicaciones, otras obras pignorables y hasta la disposición por la biblioteca de las rentas que pudieran devengar sus recursos económicos. Porque ésta, su espléndida biblioteca particular –y enlazamos con el principio-, fue el verdadero tesoro de D. Zoel. Unos 3.000 libros que dejó en herencia a la Facultad y que representan el estado de nuestra ciencia en aquel momento y en la que invirtió la mayor parte de sus emolumentos (el salario de un catedrático debía de ser entonces de unos 1.000 duros anuales). Con patética desnudez lo confirma D. Zoel: "Me he gastado próximamente 7.000 duros en mi biblioteca matemática. Me he gastado próximamente 7.000 duros en mis publicaciones de propaganda. Y vivo con privaciones que otros no tienen". La Universidad supo reconocerle su dedicación poniendo a su disposición un piso en el que vivió hasta que la enfermedad impuso su internamiento en el Hospital de la Facultad de Medicina en el que falleció en 1924. José Mª Íñiguez me contó que él había formado parte de la comisión que recogió sus pertenencias y que encontró el piso abarrotado por todas partes de papeles y libros. Aquellos libros –y los que les siguieron- de la biblioteca que aún le recuerda, como seguramente lo hace toda la Facultad, pues desde hace algún tiempo da a la luz escritos y ensayos sobre la vida y la obra de don Zoel García de Galdeano.

Y también la ciudad de Zaragoza le recuerda dedicándole una calle. Cosa que no ha hecho Pamplona; al menos no encontré su nombre en el callejero que he consultado. El suyo no, pero sí el de su tío. Me explico: los apellidos de D. Zoel son García de Galdeano y Yanguas y era sobrino del humanista navarro Yanguas y Miranda que sí que tiene una calle en Pamplona. Y una calle que tenía yo bien pateada en mis años mozos cuando venía a pasar los sanfermines. A esa calle, después de haber vivido en Zapatería, se trasladó la familia de uno de mis tíos, a una casa que se hizo frente a la antigua estación de autobuses y cuya trasera servía de terminal a las vías del Plazaola y del Irati. Creo que esto duró poco pero seguro que los más ancianos del lugar lo recuerdan. Pues allí me reunía con mis primos que desde unos años antes, desde 1942, me habían agregado a su pequeña cuadrilla sanferminera. O sea, ¡desde hace 70 años! Setenta años que hemos mantenido vivos, tanto que los pocos que vamos quedando nos reunimos todos los años y es ésa una de las fechas predilectas de mi agenda. Yo, en aquellos primeros años, podía no ser más que un intruso incorporado por mis primos a aquel grupo; pero el grupo me acogió desde el principio tan sin reservas, como si de siempre me hubieran conocido y aun teniendo conmigo especiales atenciones, que lo que más me duele es no haber sabido hacerles llegar de qué modo habían hipotecado para siempre mi agradecimiento, mi afecto y mi amistad. Pero los navarros tenemos el pudor de nuestros sentimientos.

Yo, por entonces, vivía con mi familia en Vitoria y solía venir en fiestas, unas veces en tren que, por las horas que había que echarle, incluido un trasbordo en Alsasua, más parecía un viaje en el Transiberiano; otras, en autobús, que también empleaba, en tan corto recorrido, toda la santa mañana o toda la santa tarde, según el horario elegido. El autobús era "La Burundesa" y hacía en Urdiain parada y fonda; lo digo porque al conductor le sacaban el gran bocadillo y hasta que lo terminaba no seguía la marcha. Allí salía de tertulia la familia Ochoa, que regentaba la línea, presidida por el patriarca, Javier Ochoa, que había sido campeón de lucha, no sé si libre o greco-romana. Y sus hijos, también luchadores, Javier y sobre todo Victorio, que entonces estaba muy en alza. Victorio que, infortunadamente, murió poco después en las fiestas del pueblo, creo que de una cuchillada, en circunstancias que no llegué a conocer. Su hermano Javier, o algún otro de la casa, solían venir cobrando el viaje a base de hacer malabarismos: subían a la baca, donde también había asientos, bajaban luego por un lateral y entraban en el interior por una ventana, con no sé qué torsiones corporales, y todo eso en marcha. Menos mal que entonces no había Guardia Civil de Tráfico, que si no, los fríen a multas. En cambio, en cuanto se veía a una señora apresurándose por entre unas piezas, con una cesta y una gallina dentro, se paraba el autobús hasta que llegara a la carretera y pudiera montar. O aquella otra que estaba haciendo los Primeros Viernes y logró que esperase el autobús al pasar por un pueblo donde se celebraba la misa, bajó, comulgó y volvió a subir (aunque esto me parece que fue en "La Roncalesa"). En cualquier caso, seguro que hubo caravanas en el Oeste, incluso bajo la guía de Kit Carson o de Buffalo Bill, bastante más sosas y con menos incidentes que aquellos viajes en "La Burundesa".

Y dirán ustedes, ¿a qué viene todo esto? ¡Pues viene! Y viene trayendo al segundo personaje de que me había propuesto hablar. Era, sí, doctor en matemáticas, catedrático de Enseñanza Media, porque nunca quiso pasar de ahí, y, naturalmente, navarro. Y de Urdiain: se llamaba Juan Ochoa Mélida, de la familia Ochoa, primo de Victorio, con el que mantenía una fuerte relación familiar. Puede comprenderse la conmoción que le produjo su asesinato, precisamente cuando él estaba haciendo las oposiciones a la cátedra. Incapaz de continuar en aquellas condiciones, en un estado de ánimo que le impedía centrarse en las pruebas, para las que ya ni siquiera encontraba sentido, anunció su retirada al presidente del tribunal, el profesor Botella, que conocía de sobra su valía, pues que había sido profesor suyo. Grandes debieron de ser las artes de persuasión que éste desplegó hasta que consiguió que volviese sobre sí y continuara, seguramente más por complacerle que por convicción propia. A pesar de ello consiguió salir con el número 2.

Fue pasando por los institutos de Calatayud, Albacete y, finalmente, uno de Madrid, en el que hizo una larga y fructífera labor. Disfrutaba entregándose a los alumnos, proponiendo y resolviendo problemas y preparándoles para participar en las Olimpiadas Matemáticas. Los alumnos le correspondían y sé de quienes hablaban siempre de él con devoción. Bueno, quizá no todos, a juzgar por una anécdota que él mismo me contó. Recibió un día la visita de un señor cuya cara le resultaba conocida, aunque sin acabar de localizarla; después de aquello recordó que le sonaba por haber visto su fotografía en los periódicos: era un político local que entonces bullía bastante. Venía a quejarse de que Ochoa había suspendido a un chico, no sé si hijo suyo o simplemente amigo. Ochoa buscó el examen de aquel alumno y se lo enseñó con todas las anotaciones y correcciones que justificaban la calificación. Pero el otro no atendía: "No hay derecho a que le haya suspendido, es un chico estupendo", y no sé si como amenaza o provocación, le soltó a la cara: “Además he de decirle que seguramente sé de esto más que usted”. Era no conocer a Ochoa: con toda tranquilidad le contestó que era muy posible que supiera más que él pero que, desgraciadamente, era él quien tenía que calificarle. “Fíjate –me decía- lo que puede importarme que sepa más o menos que yo”. Y como en aquel tórrido verano madrileño el cuarto se había recalentado, quiso abrir la ventana para poner un poco de corriente. Pero era aquel un viejo instituto, bastante deteriorado, y la ventana no cedía; hizo más fuerza y tal vez porque el marco estuviera algo desvencijado, el caso es que arrancó la ventana. Cuando se volvió para seguir hablando con el visitante, le vio escapándose a todo correr por el pasillo: debió de pensar que Ochoa era un forzudo y que más le valía no seguir discutiendo con él. Así me lo contaba con su pizca de socarronería.

Porque nada hay más opuesto al carácter de Ochoa que ese retrato: ni emprenderla a tortas ni apelar siquiera a una discusión: él se formaba una opinión y la mantenía tranquilamente, sin discutirla ni intentar imponerla o dejarse convencer. Pudo decirme tan fresco: “Ese último artículo que has publicado no me ha gustado nada”; y uno sabía que sus razones tendría. Y de ningún modo se pone desagradable ni elude un comentario elogioso cuando así lo entiende: hay que ver el cariño con que escribe de los compañeros de “la quinta del 45”. Esa imparcialidad suya gozaba de la estima de todos, que le profesaban una fiel amistad. No era dicharachero pero gustaba de la compañía e incluso formaba con unos cuantos compañeros una tertulia que se reunía todas las semanas. Qué, si hasta con mi suegro pegó la hebra una vez que coincidimos en algún acto: no se conocían ni se parecían en nada, ni en edad, formación, aficiones, pasado, solo en que eran paisanos; pues, ante mi perplejidad, allí estaban los dos navarrazos charlando como descosidos, cual si fueran amigos de toda la vida.

Bien, cuento un poco por encima la visión que yo tengo de Ochoa, que no sé si coincidirá con la de otros que lo conocieron. Quiero todavía aludir a otra característica suya: no he conocido a nadie tan poco dado a figurar ni a buscar reconocimiento a su trabajo, nada ganoso de brillos, pequeñas vanidades y aún mejoras profesionales, él solo quería seguir haciendo a gusto, casi horacianamente, la labor que se marcaba. Un día vino a verme, como siempre que se acercaba a la Facultad, y entre sus novedades me contó que Ancochea, el profesor con el que había trabajado y del que había sido ayudante, estaba empeñado en que presentase su tesis doctoral. Me apresuré a felicitarle y a manifestarle mi alegría por ello pero él se revolvía: “Y yo, ¿para qué quiero el doctorado si no voy a usarlo nunca?” No se planteaba presentarse a cátedras de universidad porque estaba suficientemente satisfecho con su labor en el instituto. Y me completó la noticia: “Lo malo es que estás tú propuesto para formar parte del tribunal". "¡Hombre, Ochoa, honradísimo! Cuenta con que leeré y estudiaré con el mayor gusto tu trabajo". "Pero, ¿para qué vas a leer? ¡Ni se te ocurra molestarte! Si en realidad todo esto no me importa nada". Bueno, como era de esperar, se doctoró con la más alta calificación pero eso no cambió en absoluto la vida de Ochoa, como él había avisado.

Y ¿qué problemas ocupaban su investigación? Aquí también, como en otras de mis afirmaciones anteriores, he de fiarme un poco de mi memoria, que cada vez anda más floja. Les aseguro que he pretendido en vano encontrar la documentación de algunas cosas que voy a decir. Esto era posible cuando estaba en activo y tenía una amplia librería que me permitía clasificar mis papeles y saber dónde estaba el dato que buscaba, pero dado que tuve que llevarlos todos a casa y meterlos con calzador por todos los rincones, sin saber dónde ha ido cada uno, no soy capaz de encontrar casi nada. No diré que parezca la casa de D. Zoel pero la imita y no tengo ya fuerzas para ordenar ese caos. No obstante creo poder decir que el campo de trabajo de Ochoa era la teoría de números. Incluso publicó sobre ella algunas notas divulgativas que él llamaba "Anecdotarios" y firmaba con el pseudónimo "J. Lobo", castellanizando el vascuence Ochoa de su apellido. Sé de su intercambio de ideas y resultados con Olga Tausky, una especialista en el tema bien conocida internacionalmente, y no creo equivocarme si digo que en su investigación mordisqueaba atrevidamente la entonces aún no resuelta "conjetura de Fermat". Muchos de ustedes seguramente recordarán, porque tuvo repercusión en la prensa, que en 1994 se había demostrado por fin el "último teorema de Fermat", así que hablaremos un poco de él, siquiera para mencionar algo de matemáticas, que seguramente es lo que ustedes esperaban y deseaban. (¿O no?)

Su demostración tardó en darse más de tres siglos y medio y ocupó a las mentes más privilegiadas sin lograr cazarla. Su enunciado es muy sencillo: "La ecuación $x^n + y^n = z^n$ no tiene solución en números enteros para cualquier n mayor que 2" (en el caso n=2, es el teorema de Pitágoras). No hay que dejarse engañar de los enunciados fáciles que pueden hacer creer que también lo es la solución. Y eso, junto al hecho de haber resistido los ataques de los sabios, lo cual daría fama universal al solucionista, y hasta el premio convocado por la Sociedad de Ciencias de Gotinga, abierto hasta el 2007 y que en moneda actual rebasaría el millón 200.000 euros, espoleó el afán de muchos matemáticos aficionados que debieron de creer que, con lo poco que sabían de problemas de divisibilidad, podían plasmar en una cuartilla la demostración; y así nos asaban con sus soluciones, inasequibles a nuestra negativa de discutir su inútil desarrollo. La verdad es que la publicación en 1995 de la verdadera demostración ocupa 130 páginas y no se la voy a explicar a ustedes porque no quiero que me linchen ni tampoco sé lo suficiente para hacerlo: no es mi especialidad. Sí puedo decir que tan larga gestación ha propiciado la creación de nuevos conceptos y técnicas que, aunque no hubieran resuelto el problema, hicieron avanzar a la matemática.

Entre sus argumentos, grupos de Galois, formas modulares, ecuaciones elípticas, sobre todo en estas últimas, creo que se movía el trabajo de Ochoa. Es un tipo de ecuaciones cúbicas con coeficientes enteros sobre cuya relación con las formas modulares, que involucran determinadas simetrías, trataba la propuesta de otra conjetura –la de Taniyama-Shimura, por más señas-; de la demostración de ésta se seguiría la de Fermat. Sin poder aseverarlo, creo que Ochoa andaba metido en algunas partes de este dificilísimo problema, probablemente en el tratamiento de alguna ecuación elíptica y de la curva que la representa gráficamente. Lo digo porque encontré un artículo, y en algún recóndito lugar de mi casa estará, cuyo autor, extranjero, no español, opera sobre la que llama "curva de Ochoa", y bien pueden ustedes hacerse cargo de lo difícil e inusitado que es designar un concepto con el nombre de quien lo ha introducido.

Bueno, pues al fin Wiles demostró el teorema de Fermat, pero todavía al segundo intento de descabello, pues en su primera demostración se encontraron algunos errores. Hubo un gran despliegue informativo y uno de nuestros periódicos –seguramente ABC– me pidió un artículo sobre el tema que fuese accesible al gran público. Así lo hice y terminaba diciendo que una consecuencia grata de tal acontecimiento, aparte de la fundamental de haber vencido un reto, sería que ya los pobres matemáticos nos veríamos libres de ilusos "amateurs" que creían haberlo hecho mucho más fácilmente. Y, efectivamente, justo al día siguiente se me presentó uno con la consabida cuartillita. En su descargo apeló a algunos amigos que yo conocía y uno de ellos era Ochoa. ¡Santa palabra! Me lo ponía en bandeja: le dije que fuese a verle, que nadie mejor que él para hacerle un informe riguroso y veraz de lo que allí tenía. Pocos días después volvió a verme. Había estado con Ochoa y, respecto de su engendro, nada, ni mirarlo: que lo tirase sin más a la papelera. Pero lo que quería decirme era que lo había encontrado muy decaído; yo sabía que llevaba ya algún tiempo sin buena salud pero ahora su amigo había sacado una impresión penosísima, de total dejadez, como si hubiera perdido las ganas de vivir. Que quizá conviniera que algunos de nosotros lo visitaran para remontarle y darle ánimos. No hubo ocasión: a los pocos días supimos que el pobre y querido Ochoa había fallecido tan silenciosamente, tan falto de aparato como se había manifestado durante toda su vida, dejándonos una nota de tribulación y pesadumbre.

Yo no sé si este final triste de mi charla logrará absolverla de algunos clamorosos fallos, sobre todo en la forma que ha podido parecer falta de seriedad para ser expuesta en una institución cultural, cayendo a veces en términos frivolones y de poco fundamento. Quiero asegurar que no ha sido ése mi propósito, sino presentar, lo más cercanamente posible a un par de matemáticos nuestros, ejemplares y modestos, que nunca figurarán en la gran historia de la ciencia. Pero eso pasa en todas las manifestaciones culturales. Pensemos en la música: las grandes figuras son eximios compositores, autores de maravillosas obras sinfónicas. Junto a ellos hay otros músicos anónimos, trabajadores oscuros que acaso solo saben interpretar con un instrumento música hecha por otros. Por humildes que musicalmente sean, sin ellos no habríamos podido ni escuchar, ni gozar, las sinfonías de los grandes. Por eso he querido destacar hoy a estos dos paisanos nuestros que serán matemáticos, digamos, de segunda división, pero que en su tarea no han escatimado esfuerzos, han vivido dedicados a su misión, se han excedido en mucho más de lo que la exigencia de su cargo requería y han dotado de excelencia todo aquello que han podido hacer. Modelos de dignidad, sea para ellos, y me gustaría también transmitirla a ustedes, toda mi admiración y respeto. Y también mi agradecimiento a ustedes por su atención, presencia y paciencia. Muchísimas gracias.

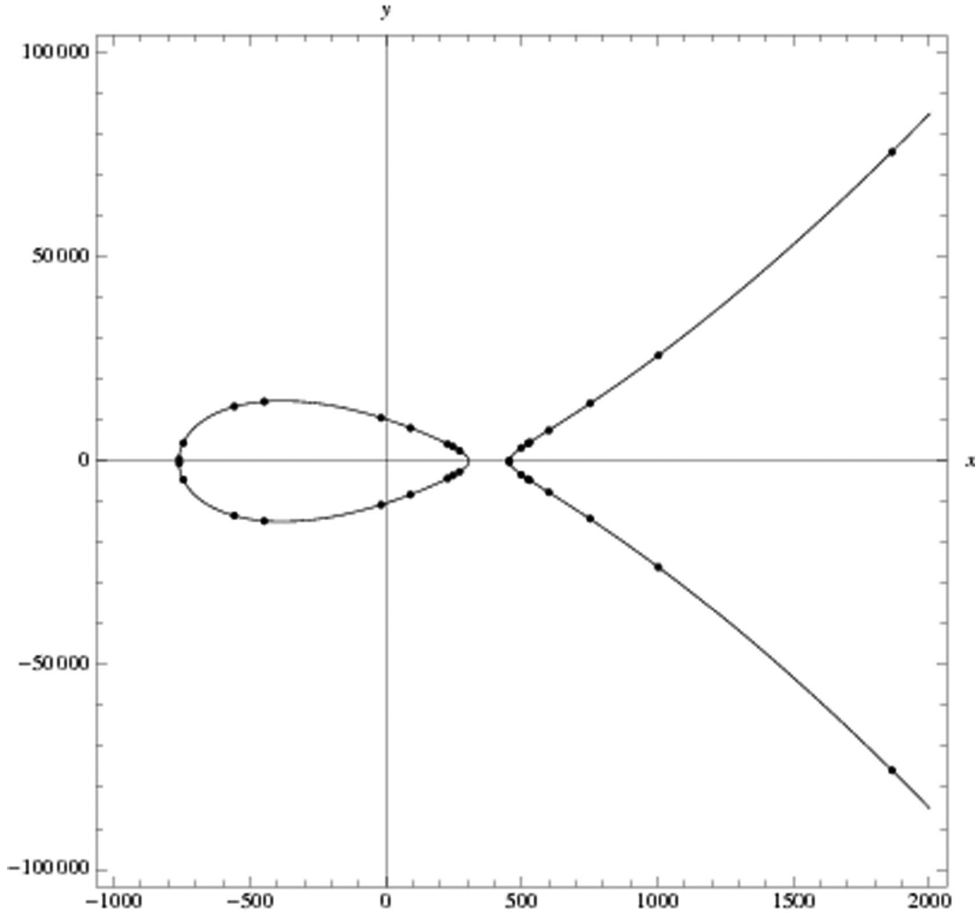
APÉNDICE

La curva de Ochoa, mencionada en el texto es la cúbica de ecuación

$$3y^2 = 2x^3 + 386x^2 + 256x - 58195$$

Tiene 23 soluciones enteras, esto es, 23 puntos $(x, \pm y)$ con x e y enteros, que se recogen en la siguiente figura[1]

[1] *Tomada de Weisstein, Eric W. "Ochoa Curve." From MathWorld--A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/OchoaCurve.html*



La curva fue introducida en 1978 por Ochoa[2]*. En posteriores artículos de Guy*[3][4] *y de Stroeker y Weger*[5] *y en el libro de Smart*[6] *la curva de Ochoa es tomada de modo esencial para estudiar cierto tipo de ecuaciones diofánticas. En la curva*

---

2 *Ochoa, J. "La ecuacion diofántica b0 y3 - b1 y2 + b2 y - b3 = z2." Gaceta Mat. 139-141, 1978.*

3 *Guy, R. K. "The Ochoa Curve." Crux Math. 16, 65-69, 1990.*

4 *Guy, R. K. "My Favorite Elliptic Curve: A Tale of Two Types of Triangles", The Amer. Math. Monthly, Vol. 102, No. 9 (Nov., 1995), pp. 771-781.*

5 *Stroeker, Roel J.; de Weger, Benjamin M. M. On elliptic Diophantine equations that defy Thue's method: the case of the Ochoa curve. Experiment. Math. 3 (1994), no. 3, 209–220.*

6 *Nigel P. Smart: "The Algorithmic Resolution of Diophantine Equations: A Computational Cookbook" Cambrige University Press, 1998.*

de Ochoa es prácticamente imposible determinar sus puntos de coordenadas enteras utilizando las ecuaciones de Thue. El propio Ochoa había propuesto como problema para la 28 Olimpiada Matemática Internacional (La Habana, 1987) la determinación de los puntos enteros de la curva, para lo que aportaba una solución original.

Por supuesto la labor original de Ochoa no se agota en este artículo. El curioso será capaz de encontrar otras publicaciones suyas que se remontan a los años 50; entre ellas queremos señalar una, "Un modelo elemental para las clases de ideales de un anillo algebraico", publicada en la Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid en 1974. Aunque no fue recensionada en Mathematical Reviews hasta 1982, ya en 1977 dio lugar a un trabajo de Hans P. Rehm aparecido en Linear Algebra and Applications y titulado directamente "On Ochoa's special matrices in matrix classes". Como se indica en la conferencia del prof. Etayo, Juan Ochoa tenía relación con Olga Taussky; y en efecto, en el artículo autobiográfico de ésta, "Some noncommutativity methods in algebraic number theory", publicado en 1989 en "A century of mathematics in America", se dice (traducido del inglés): "Cuando se estudian matrices uno raramente se preocupa de los números que aparecen en la matriz. Sin embargo Ochoa, en Madrid, España, sí se ha preocupado, y ha encontrado que en determinadas circunstancias (estudiadas por Rehm) aparecen matrices del siguiente tipo…"

Respecto de García de Galdeano podemos añadir que aunque Pamplona no le ha dado su nombre a ninguna calle, a pesar de la solicitud hecha por los profesores de matemáticas con motivo del Año 2000 Mundial de las Matemáticas, sí había denominado con anterioridad un Colegio Público con los apellidos del ilustre matemático navarro. En la Universidad de Zaragoza se perpetúa su recuerdo, y trasladada la Biblioteca García de Galdeano del edificio de la Plaza Paraíso al de la Facultad de Ciencias del Campus de San Francisco, volvió a ser trasladada al nuevo edificio de Matemáticas. Con motivo del paso por Zaragoza de la exposición Imaginary, realizada como uno de los actos de celebración del centenario de la Real Sociedad Matemática Española, la colección de figuras geométricas que D. Zoel donó a la Facultad de Ciencias de dicha ciudad en 1924 ha sido cuidadosamente restaurada, catalogada y expuesta.

Direcciones de Cavalieri entre dos triángulos

Eugenio Roanes Macías
Dept. de Algebra de la Univ. Complutense de Madrid
roanes@mat.ucm.es

Abstract

Although Cavalieri principles were set forth in the XVII century, they already appeared implicit in Archimedes' discoveries about areas and volumes. The application to triangles of the first principle admits a reciprocal theorem: any two triangles of the same area are always Cavalieri-congruent. This result was discovered and proved in 1988 and other proofs have appeared since then. In this article the problem is developed following several lines: 1) giving another solution based on a unique rotation; 2) determining the number of directions for the sheaf of parallel lines; 3) calculating such directions depending on the two triangles.

Antecedentes históricos

Buenaventura Cavalieri, profesor de matemáticas de la universidad de Bolonia y uno de los matemáticos mas prolíficos e influyentes de su época enunció hacia 1635 sus dos famosos principios:

i) dadas dos figuras planas, F y F', contenidas entre dos paralelas, si para cualquier recta, x, paralela a aquellas, sus respectivas intersecciones $F \cap x$ y $F' \cap x$ tienen la misma longitud, entonces las áreas de F y F' son iguales.

ii) dadas dos figuras del espacio, F y F', contenidas entre dos planos paralelos, si para cualquier plano, α, paralelo a aquellos, sus respectivas intersecciones $F \cap \alpha$ y $F' \cap \alpha$ tienen áreas iguales, entonces los volúmenes de F y F' son iguales.

La aceptación de estos dos principios (intuitivamente evidentes e inmediatos de probar por integración) simplifica significativamente numerosas demostraciones relativas al cálculo de áreas y volúmenes. Además, permiten resolver de manera ingeniosa numerosos ejercicios sobre áreas y volúmenes.

Pero los principios de Cavalieri ya aparecían implícitos en descubrimientos mucho más antiguos, como son los de Arquímedes sobre áreas y volúmenes. La demostración del volumen de una semiesfera, ideada por Arquímedes y grabada en su tumba, a partir de los volúmenes de un cilindro y una semiesfera apropiados (Figura 1) es buen ejemplo de ello (véase, por ejemplo, [3]).

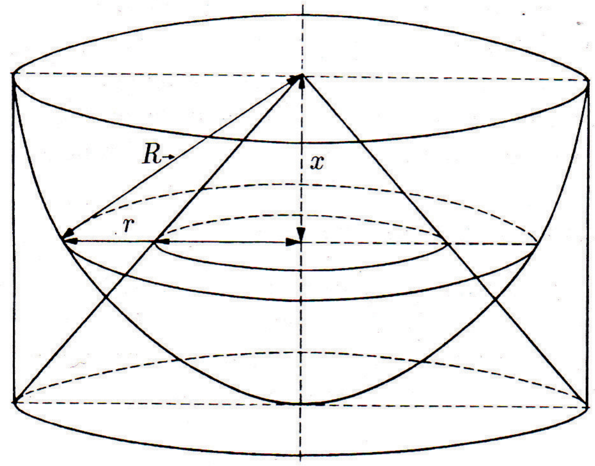


Fig. 1: *Semiesfera + cono equilátero = cilindro (Arquímedes)*

Pero los descubrimientos basados en los principios de Cavalieri continúan sucediendo. Buena muestra de ellos es la aplicación del segundo principio de Cavalieri a una esfera y un tetraedro descubierta en 1988 por el Profesor Howard Eves [1]. Siendo N y S (Figura 2) dos puntos diametralmente opuestos de una esfera de radio R (polos Norte y Sur, en términos geográficos), se considera un tetraedro con dos aristas opuestas de longitud $2\sqrt{\pi}R$ cuyos puntos medios son N y S, respectivamente, y son perpendiculares a NS, cruzándose perpendicularmente entre sí las rectas que contienen a dichas aristas opuestas. La intersección del plano ecuatorial de la esfera con el tetraedro resulta ser un cuadrado de lado $\sqrt{\pi}R$, verificándose la hipótesis del segundo principio de Cavalieri para la esfera y el tetraedro, cuyos volúmenes son iguales por tanto.

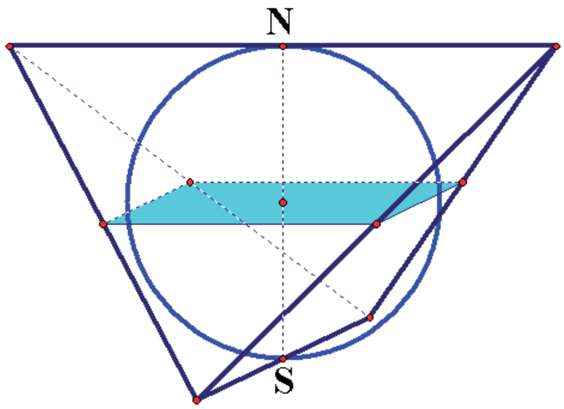


Fig. 2: *Tetraedro = esfera (Howard Eves)*

En cuanto al primer principio, es claro que dos figuras que lo verifiquen tienen áreas iguales. Pero el enunciado recíproco, es decir, que dos figuras de áreas iguales se puedan colocar en la posición relativa que indica el primer principio, es obviamente falso. Sin embargo, ello sí resulta ser cierto para triángulos. Es un hecho sorprendente que dos triángulos de formas (ángulos) cualesquiera, basta que tengan áreas iguales, para que puedan disponerse en posiciones relativas acordes con el primer principio de Cavalieri (Figura 3). Tal sorpresa es aún más evidente pensando, por ejemplo, en un triángulo equilátero y otro de igual área, pero de base muy pequeña y gran altura.

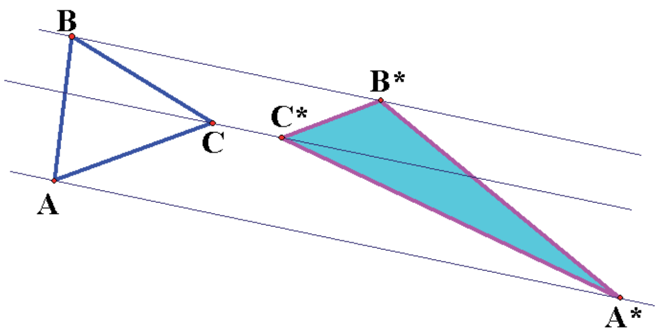


Fig. 3: *Triángulos en posición del principio de Cavalieri*

Este curioso resultado fue también descubierto y demostrado en 1988 por el prolífico Profesor Howard Eves, y publicado en el mismo artículo [1]. El descubrimiento mereció la atención del prestigioso Profesor Paul Halmos, que dos años después publicó otra demostración del curioso descubrimiento [2]. Pero, además, en el número 91 de nuestro Boletín aparece una ingeniosa demostración muy breve e intuitiva [5], desarrollada por uno de nuestros consocios, José Alberto García Suárez. Todo ello despertó nuestro interés por el problema.

1 Introducción al problema

Dos triángulos del plano euclídeo real, que verifican la hipótesis del primer principio de Cavalieri, se dice que están en *posición de Cavalieri*, siendo la dirección de las rectas del haz de paralelas su *dirección de Cavalieri*.

Dado un triángulo T, designaremos por $[T]$ a la clase de triángulos que son imagen de T por las transformaciones del grupo de las congruencias o isometrías directas (traslaciones y rotaciones). Si T y T' son dos triángulos en posición de Cavalieri, entonces las clases de triángulos $[T]$ y $[T']$ se dice que son *Cavalieri-congruentes*.

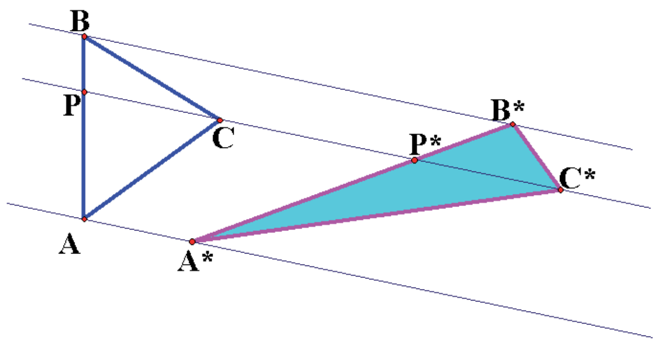


Fig. 4: *Rectas paralelas pasando por vértices de triángulos en posición Cavalieri*

Según el Primer Principio, si los triángulos ABC y $A^*B^*C^*$ están en posición Cavalieri, entonces existen tres rectas paralelas que contienen, una a los puntos A y A^*, otra a B y B^*, y la tercera a C y C^* (Figura 4), pudiendo coincidir dos de ellas. La dirección común de esas rectas paralelas es la dirección de Cavalieri de esos dos triángulos.

Notemos que por estar en posición Cavalieri los dos triángulos de la Figura 4, se verifica la igualdad de los segmentos CP y C^*P^*, donde $P = AB \cap CC^*$

y $P^* = A^*B^* \cap CC^*$. De ello resulta inmediatamente la igualdad de áreas de ABC y $A^*B^*C^*$, por ser CPB y $C^*P^*B^*$ triángulos de bases iguales y de la misma altura, y suceder lo mismo a los triángulos CPA y $C^*P^*A^*$.

Dadas dos clases de triángulos, $[T]$ y $[T']$, de igual área, para elegir representantes en posición Cavalieri, lo primero que se nos ocurre es ir girándolos para tratar de alcanzar dicha posición relativa (como en la Figura 4). Pero, tratándose de rotaciones de uno respecto del otro y para mayor sencillez, parece natural considerar los triángulos representantes de ambos clases con un vértice común y limitarnos a girar sólo uno de ellos (Figura 5).

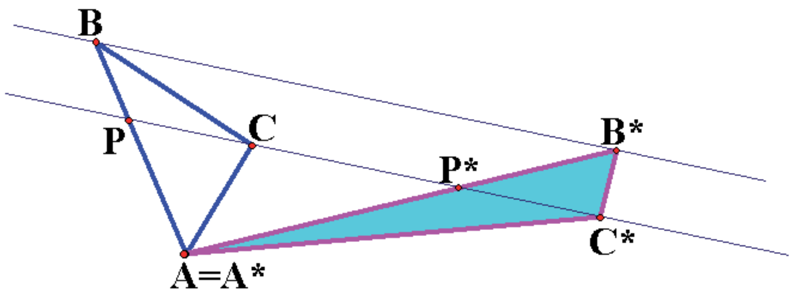


Fig. 5: *Triángulos en posición para aplicar el criterio*

Estas consideraciones conducen al siguiente criterio, que utilizaremos para caracterizar triángulos en posición Cavalieri y cuya demostración sigue fácilmente de lo indicado anteriormente y del teorema de Tales.

Criterio de Cavalieri-congruencia: *Siendo ABC y $A^*B^*C^*$ triángulos de áreas iguales, tales que $A^* = A$, $B^* \neq B$ y $C^* \neq C$, son equivalentes:*

1) BB^* y CC^* son paralelas

2) ABC y $A^*B^*C^*$ son triángulos en posición de Cavalieri.

En resumen, dados dos triángulos de igual área (en el sentido de clases de triángulos equivalentes por el grupo de las isometrías o congruencias), se trata de elegir un triángulo particular en cada una de las clases, ABC y $A'B'C'$, con un vértice común, $A' = A$, de modo que, aplicando a $A'B'C'$ una rotación de centro A y amplitud conveniente, se llegue a obtener otro triángulo, $A^*B^*C^*$, en posición de Cavalieri con ABC.

En aras de la simplicidad, supondremos que los triángulos de igual área ABC y $A'B'C'$ tienen el vértice común $A' = A$ y el lado $A'B'$ está contenido en el AB. De este modo, para que $A^*B^*C^*$ esté en posición de Cavalieri con

ABC, basta que se verifique una única condición, la de paralelismo de BB^* y CC^* mencionada en el criterio enunciado anteriormente. En la Figura 6 aparece representada dicha configuración, junto con las órbitas de B' y de C' por el subgrupo de rotaciones de centro A.

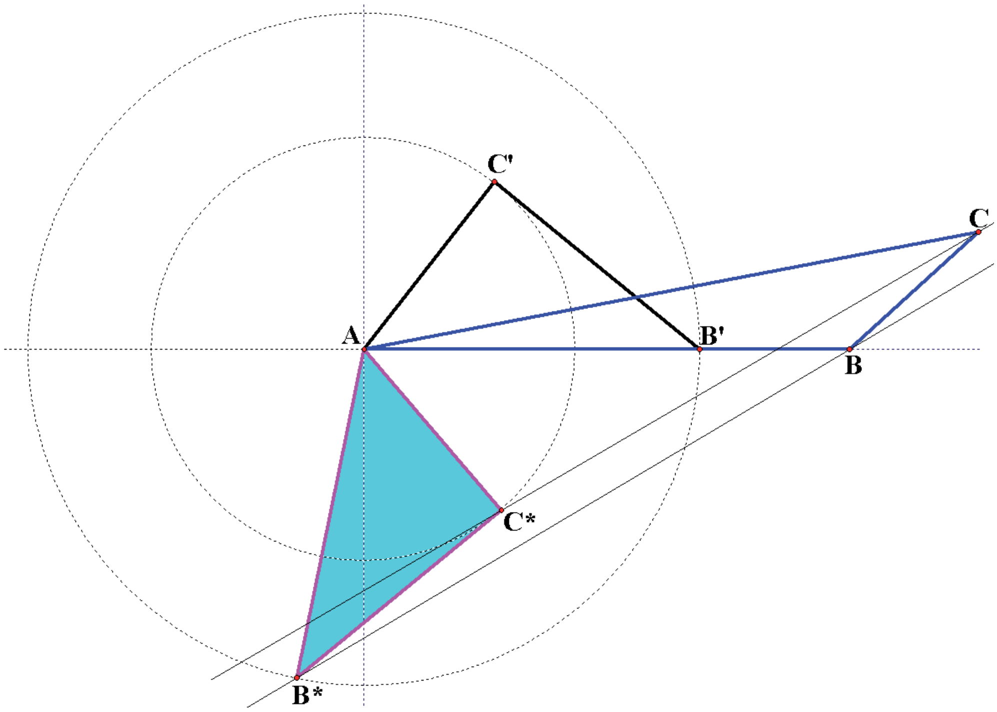


Fig. 6: *Triángulo $A^*B^*C^*$ rotado de $A'B'C'$ y en posición Cavalieri con ABC*

Los cálculos van a ser ejecutados con el Sistema de Cómputo Algebraico *Maple* y las figuras serán dibujadas con el Sistema de Geometría Dinámica *The Geometer's Sketchpad*.

Precisamente, ejecutando con este sistema la simulación que se representa en la Figura 6, nos sorprendió la obtención, no de una, sino de dos direcciones de Cavalieri distintas, fijados ABC y $A'B'C'$. Ello nos motivó a continuar investigando el problema.

En nuestro análisis aparecen raíces con valores trigonométricos, para cuya gestión nos han sido muy útiles las técnicas ideadas por nuestro consocio, el Profesor Aurel Muntean [4].

2 Primeros resultados vía geometría sintética

De acuerdo con lo indicado anteriormente, dados dos triángulos de áreas iguales, ABC y $A'B'C'$, tales que $A' = A$ y B' está en el lado AB, se trata de girar $A'B'C'$ alrededor de A hasta obtener $A^*B^*C^*$, tal que BB^* y CC^* sean paralelas, lo que asegura que ABC y $A^*B^*C^*$ estén en posición de Cavalieri. En esta sección abordaremos el problema de la existencia de soluciones haciendo uso de técnicas de geometría sintética.

Por tanto, se trata de considerar la posición relativa de las rectas BB^* y CC^*. En caso de ser secantes, denotaremos por E a su punto de intersección (Figura 7). En tal caso, al ángulo orientado convexo B^*EC^* le denominaremos *ángulo de las rectas BB^* y CC^**. Y en caso de ser paralelas BB^* y CC^*, convendremos en que el ángulo de dichas rectas sea el ángulo nulo.

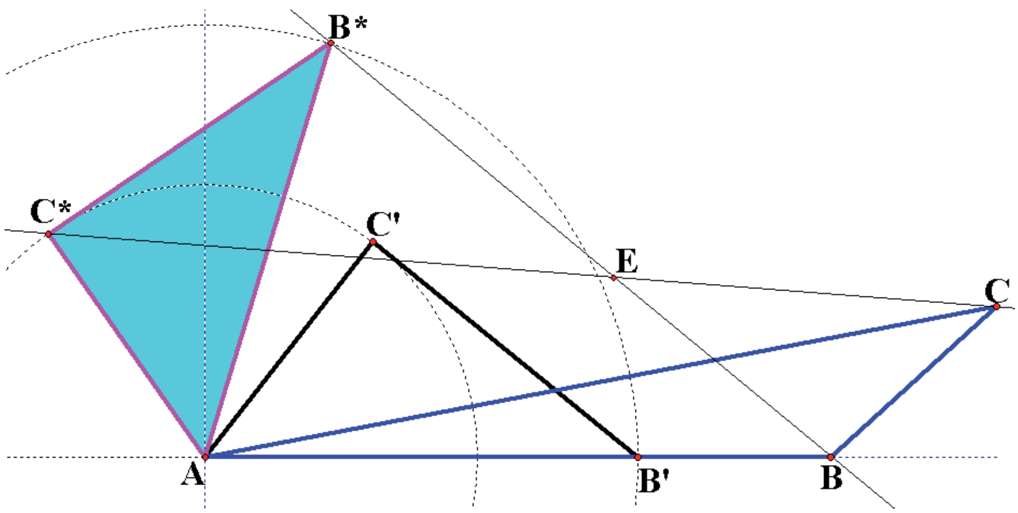


Fig. 7: *Ángulo B^*EC^* de las rectas B^*B y C^*C*

Distinguiremos posibles casos según sean ABC y $A'B'C'$, denotando por ϕ al ángulo $B'AB^*$ de la rotación y denotando por h a la altura de ABC relativa al vértice C y por h' a la altura de $A'B'C'$ relativa al vértice C'.

Caso $AB \neq A'B'$. Por ser B' un punto del lado AB, será $AB > A'B'$, lo cual implica $h < h'$, por la igualdad de áreas de ambos triángulos.

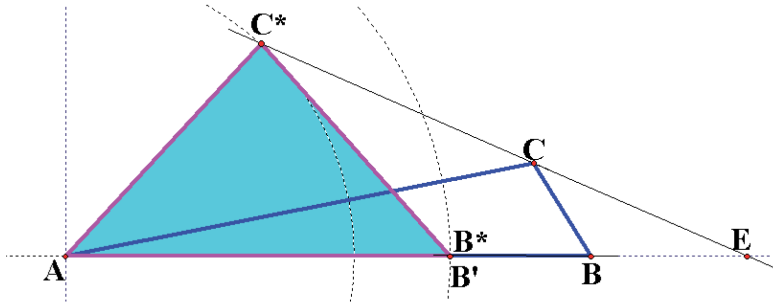


Fig. 8: *Ángulo B^*EC^* de sentido negativo*

Comencemos considerando el subcaso de ser del mismo sentido los triángulos ABC y $A'B'C'$, es decir, de estar C' en el mismo semiplano que C respecto de la recta AB. Para $\phi = 0$, es decir, $B^* = B'$ y $C^* = C'$, de la desigualdad $h < h'$ se sigue que B^*B y C^*C son secantes y el ángulo orientado convexo B^*EC^* es no nulo de sentido negativo (Figura 8). Mientras que para $\phi = \pi$, es decir, B^* simétrico de B' respecto de A, se sigue que B^*B y C^*C son secantes y el ángulo B^*EC^* es no nulo de sentido positivo (Figura 9).

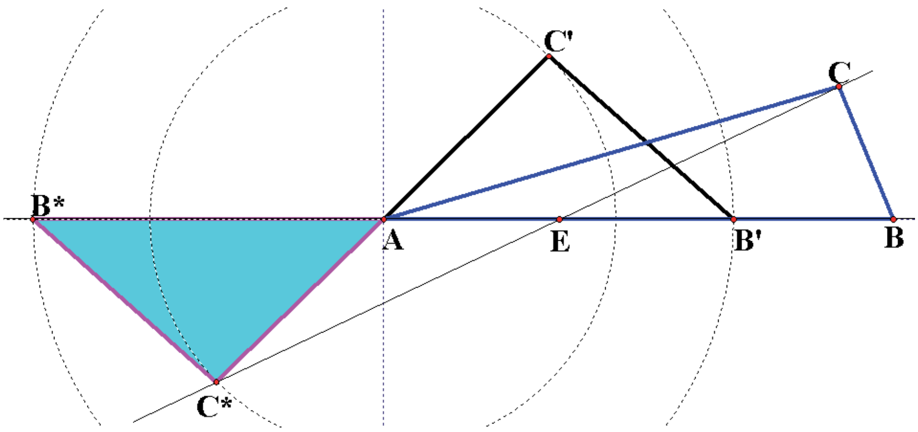


Fig. 9: *Ángulo B^*EC^* de sentido positivo*

Sea f la función de $[0, 2\pi)$ en $I\!R$ que asocia a ϕ el ángulo de las rectas BB^* y CC^*. De acuerdo con lo indicado en los dos párrafos precedentes, $signo(f(0)) \neq signo(f(\pi))$, lo cual, admitiendo la continuidad de la función f en $[0, \pi]$, implica la existencia de $\phi_1 \in (0, \pi)$ para el que $f(\phi_1) = 0$.

Para ese valor ϕ_1, las rectas B^*B y C^*C son pues paralelas y, en consecuencia, los triángulos $A^*B^*C^*$ y ABC están en posición Cavalieri. Por tanto, en este subcaso existe una dirección de Cavalieri, una al menos. (Más adelante se precisará cuántas hay exactamente).

Si, por el contrario, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son de sentidos opuestos, es decir, estando C' en distinto semiplano que C respecto de la recta AB, entonces los ángulos orientados convexos considerados en el párrafo precedente resultan ser de sentidos respectivamente opuestos a los allí mencionados, por lo que, razonando de modo similar, puede asegurarse la existencia de, al menos, una dirección de Cavalieri.

Caso $AB = A'B'$ y $C' \neq C$. Como consecuencia de la igualdad de áreas, será $h' = h$. Como en el caso anterior, consideraremos dos subcasos, según sean los sentidos de los triángulos ABC y $A'B'C'$

Si $A'B'C'$ y ABC son del mismo sentido, entonces $C'C$ será paralela a AB, luego $A'B'C'$ y ABC ya están en posición de Cavalieri, luego para amplitud de rotación $\phi = 0$, se tiene $B^* = B'$ y $C^* = C'$, siendo la dirección de Cavalieri la de la recta AB.

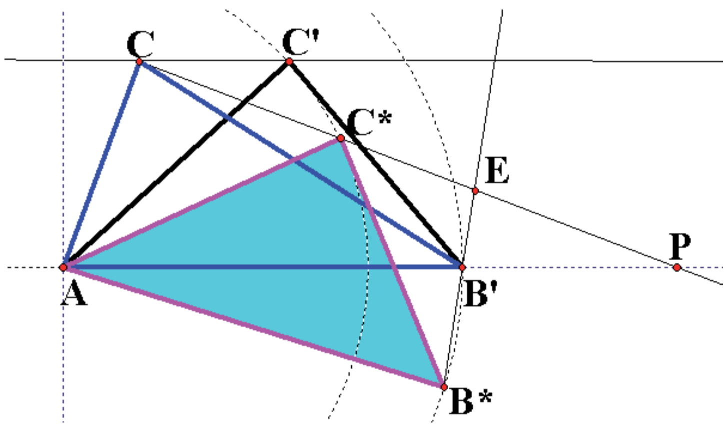


Fig. 10: *Ángulo B^*EC^* de sentido negativo*

Pero, ¿existe en este subcaso otra dirección de Cavalieri? Para responder a esta pregunta, supongamos que el segmento dirigido o vector CC' es del mismo sentido que el AB' (lo que siempre es posible, permutando, en todo caso, $A'B'C'$ y ABC). Sea P un punto cualquiera de la semirrecta de origen A que pasa por B' y tal que $AP > AB'$ (Figura 10), sea E un punto cualquiera del segmento CP exterior a la circunferencia de centro A que pasa por B' y sea B^* el otro punto de intersección de dicha circunferencia con la recta EB'. Sea ahora ϕ_o el ángulo orientado convexo $B'AB^*$ y sea C^* la imagen de C' en la rotación de centro A y amplitud ϕ_o. En estas condiciones, ϕ_o es de sentido negativo. En cambio, para $\phi = -\pi$, el ángulo B^*EC^* es de sentido positivo, como ya se vio en el caso anterior (Figura 9). Por tanto, $signo(f(-\pi)) \neq signo(f(\phi_o))$, lo cual, por continuidad de la función f, implica la existencia de $\phi_2 \in (-\pi, \phi_0)$ para el que $f(\phi_2) = 0$. En consecuencia, en este subcaso existen dos direcciones de Cavalieri, la de AB, correspondiente a $\phi = 0$ y la correspondiente a ϕ_2.

Si, por el contrario, los triángulos ABC y ABC' son de sentidos opuestos, entonces con un razonamiento similar, se prueba la existencia de, al menos, una dirección de Cavalieri. Un caso particular de este subcaso es aquel en que la recta AB es mediatriz de CC', en el cual CC' es dirección de Cavalieri, siendo fácil comprobar que no existe ninguna otra.

Caso $\underline{B' = B \ \wedge \ C' = C}$. En este caso $A'B'C'$ y ABC son coincidentes, luego cualquier dirección es dirección de Cavalieri.

Nota 2.1. El razonamiento desarrollado ha permitido probar la existencia de valores de ϕ que dan lugar a direcciones de Cavalieri, como consecuencia de la continuidad de f. Pero, en realidad, tal continuidad lo que implica es la existencia de raíces en el intervalo considerado, sin precisar su número. Será el estudio analítico desarrollado en la siguiente sección el que permitirá precisar el número exacto de dirección de Cavalieri existentes en cada caso y determinarlas en función de las coordenadas de los vértices B, B', C, C'.

3 Calculo de las direcciones de Cavalieri a partir de las coordenadas de los vértices de los triángulos

De acuerdo con lo indicado en la Sección **2**, parece natural elegir un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares de origen A y cuyo semieje positivo de abscisas pase por B y B'. Respecto de tal sistema, las coordenadas de los vértices de los tres triángulos considerados pueden denotarse en la forma

$$\begin{aligned} ABC: &\quad A=(0,0)\ ,\ B=(b,0)\ ,\ C=(c_1,c_2)\\ A'B'C': &\quad A'=A\ ,\ B'=(b',0)\ ,\ C'=(c_1',c_2')\\ A^*B^*C^*: &\quad A^*=A\ ,\ B^*=(b_1^*,b_2^*)\ ,\ C^*=(c_1^*,c_2^*)\end{aligned}$$

Siempre podemos suponer $b \geq b'$, permutando en otro caso los triángulos $A'B'C'$ y ABC. También supondremos $c_2 > 0$. De este modo, la igualdad de áreas de $A'B'C'$ y ABC puede ser expresada en la forma

$$b \cdot c_2 = b' \cdot |c_2'| \tag{1}$$

ya que tomando $A'B'$ y AB como bases de dichos triángulos sus alturas son $h = c_2$ y $h' = |c_2'|$, de acuerdo con la notación indicada en la Sección 2.

Por ser $A^*B^*C^*$ imagen de $A'B'C'$ en la rotación de centro A y amplitud ϕ, se tiene:

$$\begin{aligned} b_1^* = b' \cdot cos(\phi)\ ; &\qquad b_2^* = b' \cdot sen(\phi)\\ c_1^* = c_1' \cdot cos(\phi) - c_2' \cdot sen(\phi)\ ; &\quad c_2^* := c_1' \cdot sen(\phi) + c_2' \cdot cos(\phi)\end{aligned} \tag{2}$$

La condición de paralelismo de las rectas BB^* y CC^* viene dada por la siguiente ecuación de incógnita ϕ:

$$\boxed{(b \cdot c_1' - b' \cdot c_1) \cdot sen(\phi) + (b \cdot c_2' + b' \cdot c_2) \cdot cos(\phi) = b \cdot c_2 + b' \cdot c_2'} \tag{3}$$

Analicemos el significado geométrico de los coeficientes de esta ecuación.

La anulación del coeficiente de $sen(\phi)$ en (3) implica $\frac{c_1}{b} = \frac{c_1'}{b'}$, lo que, denotando H y H' a los pies de las alturas sobre los lados AB y $A'B'$, de los respectivos triángulos ABC y $A'B'C'$, equivale a

$$\frac{AH}{A'H'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB - AH}{A'B' - A'H'} = \frac{HB}{H'B'} \tag{4}$$

es decir, H y H', dividen a AB y $A'B'$ en segmentos proporcionales.

La anulación del coeficiente de $cos(\phi)$ implica $\frac{c_2}{b} = \frac{-c_2'}{b'}$, lo que, para caso de ser ABC y $A'B'C'$ triángulos de sentido contrario implica $\frac{h}{b} = \frac{h'}{b'}$, ya que, en ese caso, es $h = c_2$ y $h' = -c_2'$.

Finalmente, el segundo miembro de (3) consta de dos sumandos, el primero duplo del área de ABC y el segundo duplo del área de $A'B'C'$, si ambos triángulos son del mismo sentido, y su opuesto, si son de sentido contrario.

Por tanto, el segundo miembro de (3) es cuatro veces el área de ABC, si ambos triángulos son del mismo sentido, y nulo, si son de sentido contrario, ya que ambos triángulos tienen áreas (no orientadas) iguales.

En todo caso, las soluciones de (3) proporcionan los valores de ϕ que permiten calcular las coordenadas de los vértices de $A^*B^*C^*$. Si ϕ_1 es solución de la ecuación trigonométrica (3), entonces sustituyendo este valor en (2) se obtienen las correspondientes coordenadas de B^* y C^*, siendo la dirección de Cavalieri la del segmento dirigido o vector BB^* (o la del CC^*).

Para estudiar las posibles soluciones, convienen analizar separadamente los posibles casos (no mutuamente excluyentes), según que los lados AB y $A'B'$ sean divididos por los pies de las alturas, H y H', relativas a sus respectivos vértices opuestos en segmentos proporcionales, o no. Y, posteriormente, según que los lados AB y $A'B'$ sean, o no, iguales.

En lo que sigue nos será útil considerar la siguiente función G de $[0, 2\pi)$ en $I\!R$, cuyos ceros son las raíces de la ecuación (3):

$$G(\phi) = (b \cdot c'_1 - b' \cdot c_1) \cdot sen(\phi) + (b \cdot c'_2 + b' \cdot c_2) \cdot cos(\phi) - (b \cdot c_2 + b' \cdot c'_2) \quad (5)$$

3.1 Direcciones en caso de ser $b \cdot c'_1 \neq b' \cdot c_1$ ($\frac{AH}{HB} \neq \frac{A'H'}{H'B'}$)

De acuerdo con lo indicado anteriormente, corresponde al caso en que los pies de las alturas sobre los lados AB y $A'B'$ no dividen a estos en segmentos proporcionales. Comencemos probando que las raíces de (3) no corresponden a valores opuestos de ϕ. Y tampoco a valores cuya diferencia sea π, en caso de ser del mismo sentido los triángulos.

Proposición 3.1. *Sea ϕ_o una raíz de (3), distinta de 0 y de π. Entonces su valor opuesto, $-\phi_o$, no es raíz de (3).*

Demostración. Por ser impar la función *sen* y ser par la función *cos*, es decir, $sen(-\phi) = -sen(\phi)$ y $cos(-\phi) = cos(\phi_o)$, para la función $G(\phi)$ definida por(5) se tiene: $G(-\phi_o) + G(\phi_o) = 2 \cdot (b \cdot c'_1 - b' \cdot c_1) \cdot sen(\phi_o)$. Si ϕ_o es raíz de (3), entonces $G(\phi_o) = 0$, con lo que la igualdad anterior implica $G(-\phi_o) = 2 \cdot (b \cdot c'_1 - b' \cdot c_1) \cdot sen(\phi_o)$. Pero, por haber supuesto ϕ_o distinta de 0 y de π, será $sen(\phi_o) \neq 0$, y, por ser, en nuestro caso, $b \cdot c'_1 \neq b' \cdot c_1$, se tiene $G(-\phi_o) \neq 0$. En consecuencia, $-\phi_o$ no es raíz de (3). □

Proposición 3.2. *Supuesto que C' y C están en el mismo semiplano respecto de la recta AB, si ϕ_o es raíz de (3), entonces $\phi_o + \pi$ no lo es.*

Demostración. Por ser $sen(\phi_o+\pi) = -sen(\phi)$ y $cos(\phi_o+\pi) = -cos(\phi)$, para la función $G(\phi)$ definida por(5) se tiene: $G(\phi_o+\pi)+G(\phi_o) = b\cdot c_2+b'\cdot c_2'$. Si ϕ_o es raíz de (3), entonces $G(\phi_o) = 0$, con lo que la igualdad anterior implica $G(\phi_o+\pi) = b\cdot c_2+b'\cdot c_2'$. Pero, estando C' y C en el mismo semiplano respecto de la recta AB, será $b \cdot c_2 = b' \cdot c_2'$, luego $G(\phi_o + \pi) = 2 \cdot b \cdot c_2 \neq 0$, donde la desigualdad sigue de ser $area(ABC) = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c_2 \neq 0$. En consecuencia, $\phi_o + \pi$ no es raíz de (3). □

Proposición 3.3. *Si $b \cdot c_1' \neq b' \cdot c_1$, entonces la ecuación (3) tiene dos raíces reales distintas.*

Demostración. Para estudiar las soluciones de esa ecuación, puede hacerse el cambio de variable $x = cos(\phi)$ en la ecuación (3), resultando

$$(b \cdot c_1' - b' \cdot c_1)\sqrt{1 - x^2} + (b \cdot c_2' + b' \cdot c_2) \cdot x - b \cdot c2 - b' \cdot c'2 = 0$$

que puede expresarse en la forma

$$(-b \cdot c_1' + b' \cdot c_1)\sqrt{1 - x^2} = (b \cdot c_2' + b' \cdot c_2) \cdot x - b \cdot c2 - b' \cdot c'2$$

para elevar al cuadrado ambos miembros de la ecuación. Operando, la ecuación de segundo grado resultante puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}((b \cdot c_2' + b' \cdot c_2) + (-b \cdot c_1' + b' \cdot c_1)) \cdot x^2 + 2 \cdot (-b \cdot c_2 - b' \cdot c_2')(b \cdot c_2' + b' \cdot c_2)x \\ +(-b \cdot c_2 - b' \cdot c_2')^2 - (-b \cdot c_1' + b' \cdot c_1)^2 = 0 \qquad (6)\end{aligned}$$

siendo su discriminante

$$\begin{gathered}4 \cdot (-b \cdot c_2 - b' \cdot c_2')^2(b \cdot c_2' + b' \cdot c_2)^2 \\ -4 \cdot ((b \cdot c_2' + b' \cdot c_2) + (-b \cdot c_1' + b' \cdot c_1)) \cdot ((-b \cdot c_2 - b' \cdot c_2')^2 - (-b \cdot c_1' + b' \cdot c_1)^2)\end{gathered}$$

el cual, operando apropiadamente, se puede llegar a factorizar en la forma

$$\boxed{4(b \cdot c_1' - b' \cdot c_1)^2((b \cdot c_1' - b' \cdot c_1)^2 + (b^2 - b'^2)({c_2'}^2 - {c_2}^2))} \qquad (7)$$

Basta ahora tener en cuenta las tres desigualdades siguientes:

i) $(b \cdot c_1' - b' \cdot c_1)^2 > 0$ (ya que se ha supuesto $b \cdot c_1' \neq b' \cdot c_1$)

ii) $b^2 - b'^2 \geq 0$ (ya que se ha supuesto $b \geq b'$)

iii) ${c_2'}^2 - {c_2}^2 \geq 0$ (ya que $b \geq b'$ junto con (1) implican $|c_2'| \geq c_2$)

para poder afirmar que el discriminante (7) es positivo.

En consecuencia, la ecuación (6) tiene dos raíces reales distintas, x_1 y x_2, de cada una de las cuales, al deshacer el cambio $x = cos(\phi)$, se obtienen dos soluciones opuestas $\pm arccos(x_1)$ y $\pm arccos(x_2)$. De cada uno de estos pares de soluciones opuestas, sólo una de ellas será solución de (3), de acuerdo con la proposición 3.1. (Ello se debe a que al elevar al cuadrado, para obtener la ecuación (6) se han incluido soluciones extrañas a la ecuación (3)).

Finalmente, para asegurar que dichos arcos cosenos no son imaginarios, bastaría comprobar que x_1 y x_2 tienen valor absoluto menor o igual a 1, lo que es bastante laborioso. Pero ello es innecesario, teniendo en cuenta que en la Sección 2 ya se probó la existencia de, al menos, un valor de $\phi \in [0, \pi)$, para el que las rectas B^*B y C^*C son paralelas y que, por tanto, verifica la ecuación (3). Y lo mismo es cierto para el intervalo $[\pi, 2\pi)$. □

Nota 3.4. La demostración precedente, a priori, no permite distinguir cuál de los dos valores de ϕ cuyo arco coseno es x_1 o x_2 es solución de la ecuación (3). Por ello, en los ejemplos numéricos es preferible resolver dicha ecuación mediante el cambio de variable $x = tan(\frac{x}{2})$, ya que al ser impar la función tan, los arcos tangentes son distintos para los dos valores opuestos de ϕ entre los cuales hay que discernir, de acuerdo con la proposición 3.1.

Ejemplo 3.5. Para $A = [0, 0]$, $B = [9, 0]$, $C = [8, 2]$, $A' = [0, 0]$, $B' = [6, 0]$, $C' = [4, 3]$ ambos triángulos tienen área 9 y la ecuación (3) queda en la forma $12 \cdot sen(\phi) - 39 \cdot cos(\phi) + 36 = 0$. Expresando sen y cos mediante la tangente del ángulo mitad, esta ecuación se transforma en la ecuación equivalente $25 \cdot tan^2(\frac{\phi}{2}) + 8 \cdot tan(\frac{\phi}{2}) - 1 = 0$, la cual tiene dos soluciones: $\phi_1 = 2 \cdot arctan(\frac{\sqrt{41}-4}{25})$ y $\phi_2 = -2 \cdot arctan(\frac{\sqrt{41}+4}{25})$, pudiéndose comprobar que (3) es verificada por ϕ_1 y por ϕ_2, pero no por sus respectivos opuestos. A partir de ϕ_1 y ϕ_2, mediante (2), se obtienen los respectivos triángulos $A^*B^*C^*$ y $A^{**}B^{**}C^{**}$, en posición de Cavalieri con ABC (Fig. 11).

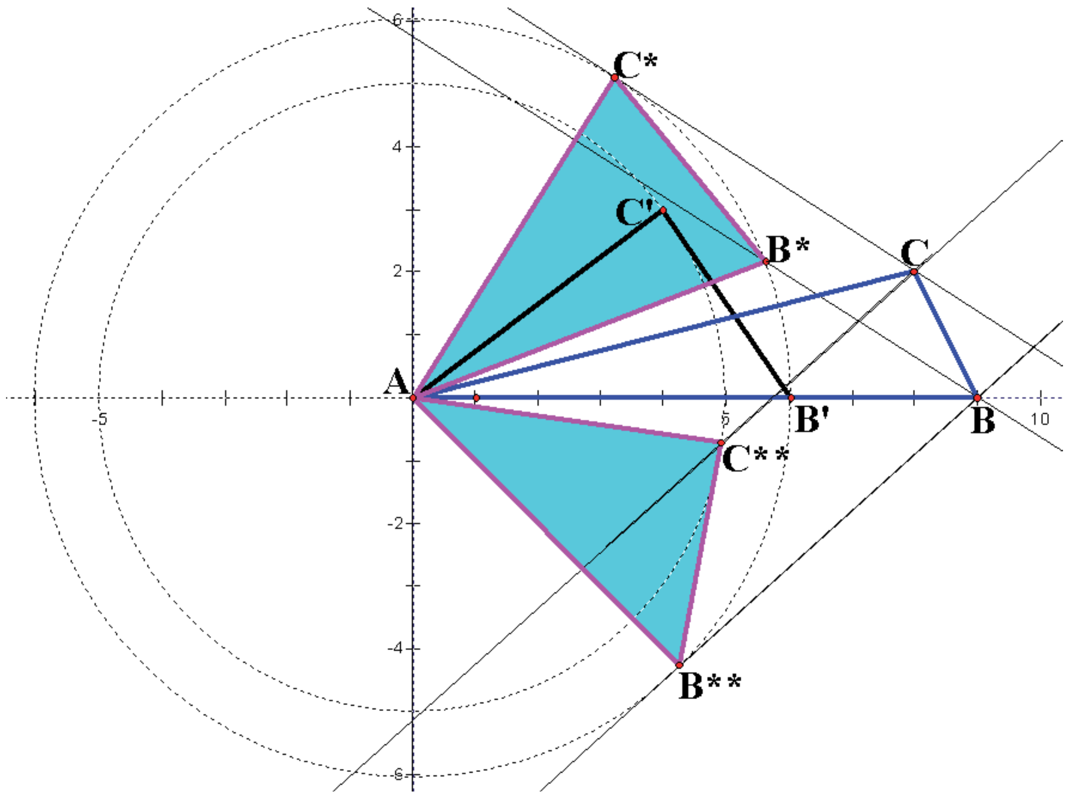


Fig. 11: *Caso de dos direcciones distintas de AB y no simétricas respecto de AB*

Visualización con un SGD (Sistema de Geometría Dinámica)

Ejemplos como el anterior pueden ser desarrollados experimentalmente con un SGD, ejecutando los pasos indicados en el siguiente algoritmo (Fig. 11):

1. Representar los triángulos ABC y $A'B'C'$.
2. Trazar la circunferencia de centro A que pasa por B'
3. Situar un punto, B^*, sobre dicha circunferencia (ligado a ella)
4. Hallar AB^*C^*, imagen de $AB'C'$ en el giro de centro A y amplitud $B'AB^*$
5. Trazar las rectas BB^* y CC^*
6. Arrastrar B^* sobre la mencionada circunferencia (lo cual arrastrará al triángulo AB^*C^*), hasta conseguir paralelismo de las rectas BB^* y CC^* (en cuyo caso ABC y $A^*B^*C^*$ estarán en posición Cavalieri)
7. Repetir los pasos 3^o al 6^o, a partir de otro punto $B^{**}(\neq B^*)$, para obtener el otro triángulo, $A^{**}B^{**}C^{**}$, en posición de Cavalieri con el ABC

3.1.1 Caso de ser $c'_1 \neq c_1 \;\wedge\; c'_2 = c_2$ ($\frac{AH}{HB} \neq \frac{A'H'}{H'B'} \;\wedge\; CC' \| AB$)

La igualdad $c'_2 = c_2$ implica $b' = b$, como consecuencia de la igualdad (1). Por tanto, se tiene $b{\cdot}c'_1 \neq b'{\cdot}c_1$, luego se trata de un caso particular del considerado en la Sección 3.1, que tratamos aparte por sus especiales características. En tal caso, la ecuación (3) queda $(c'_1 - c_1) \cdot sen(\phi) + 2 \cdot c_2 \cdot cos(\phi) = 2 \cdot c_2$. Resolviendo esta ecuación (con el cambio $x = cos(\phi)$) se obtienen dos raíces: $\phi_1 = arccos(1) = 0$ y $\phi_2 = arccos\left(\frac{(c_1-c'_1)^2-4\cdot c_2^2}{(c_1-c'_1)^2+4\cdot c_2^2}\right)$. La solución $\phi_1 = 0$ era previsible, ya que la condición $c'_2 = c_2$ implica el paralelismo de $C'C$ y $B'B$, por lo que $A^*B^*C^*$ es el propio $A'B'C'$, siendo la correspondiente dirección de Cavalieri la de la recta AB. Y la otra solución es uno de los dos ángulos opuestos resultantes al calcular el arco coseno ϕ_2. Por ello, en los ejemplos numéricos es preferible expresar *sen* y *cos* mediante la tangente del ángulo mitad, como nuestra el siguiente ejemplo.

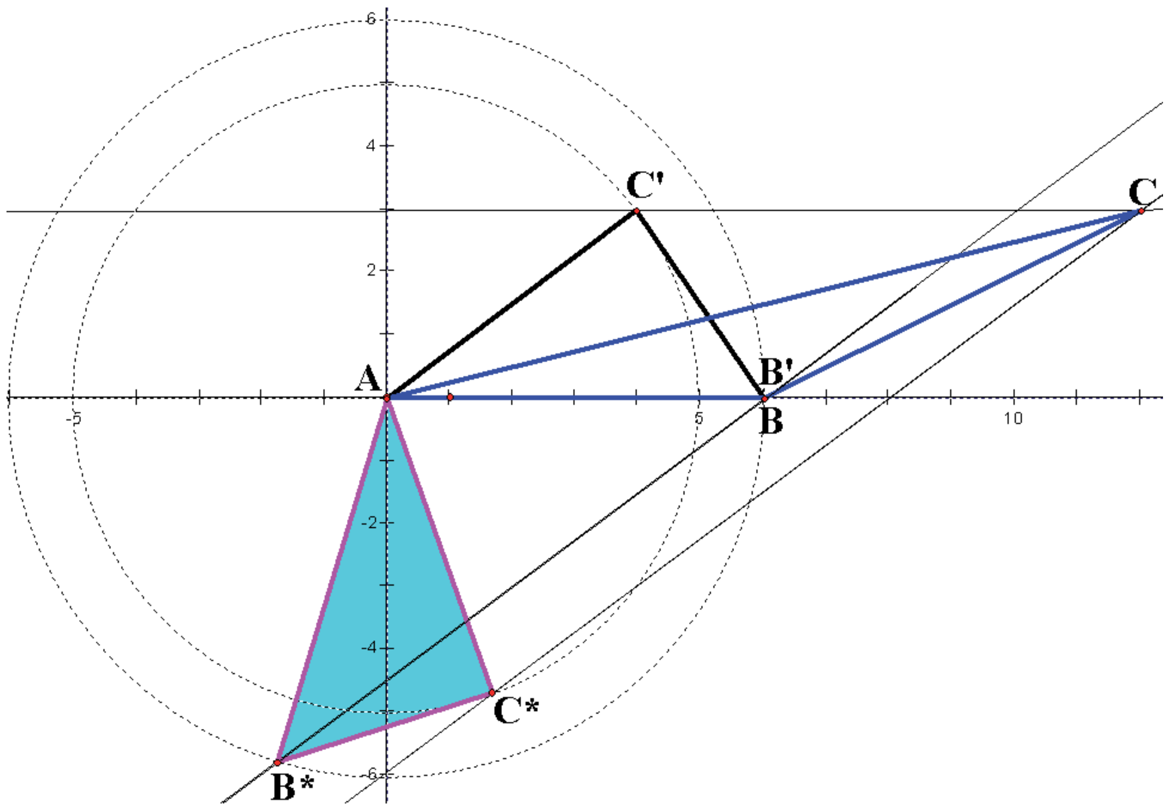


Fig. 12: *Caso de una dirección de Cavalieri paralela a AB y otra distinta*

Ejemplo 3.6. Siendo $A = [0, 0]$, $B = [6, 0]$, $C = [12, 3]$, $A' = [0, 0]$, $B' = [6, 0]$, $C' = [4, 3]$, ambos triángulos tienen área 9, quedando la ecuación (3) en la forma $4 \cdot sin(\phi) - 3 \cdot cos(\phi) + 3 = 0$. Expresando *sen* y *cos* mediante la tangente del ángulo mitad, esta ecuación se transforma en la ecuación equivalente $3 \cdot tan^2(\frac{\phi}{2}) + 4 \cdot tan(\frac{\phi}{2}) = 0$, la cual tiene dos soluciones: $\phi_1 = 0$ y $\phi_2 = -2 \cdot arctan(\frac{4}{3})$. Ello aparece visualizado con un SGD en la Figura 12, en que puede apreciarse el par de rectas paralelas que determinan esta segunda dirección de Cavalieri.

3.2 Direcciones en caso de ser $b \cdot c'_1 = b' \cdot c_1$ $\left(\frac{AH}{HB} = \frac{A'H'}{H'B'}\right)$

De acuerdo con lo indicado al comienzo de la Sección 3, corresponde al caso en que los pies de las alturas sobre los lados AB y $A'B'$ sí los dividen en segmentos proporcionales, es decir, se verifica (4). En este caso, la ecuación (3) queda reducida a $(b \cdot c'_2 + b' \cdot c_2) \cdot cos(\phi) = b \cdot c_2 + b' \cdot c'_2$, cuya solución, supuesto $b \cdot c'_2 + b' \cdot c_2 \neq 0$, es obviamente: $\phi = arccos\left(\frac{b \cdot c_2 + b' \cdot c'_2}{b \cdot c'_2 + b' \cdot c_2}\right)$.

Nota 3.7. Si $b \cdot c'_2 + b' \cdot c_2 = 0$, entonces, por ser positivos b, b', c_2, sería $c'_2 < 0$ y la igualdad (1) quedaría $b \cdot c_2 = -b' \cdot c'_2$, es decir, $b \cdot c_2 + b' \cdot c'_2 = 0$. Multiplicando esta igualdad por b y la igualdad $b \cdot c'_2 + b' \cdot c_2 = 0$ por b' y restando, resultaría $(b'^2 - b^2) \cdot c_2 = 0$, lo que, por ser $c_2 \neq 0$, implicaría $b' = b$ y por tanto, $c'_1 = c_1$ y $c'_2 + c_2 = 0$. (Esta posibilidad va a ser considerada separadamente, en la siguiente subsección).

Proposición 3.8. *Los dos valores opuestos* $\pm arccos(\frac{b \cdot c_2 + b' \cdot c'_2}{b \cdot c'_2 + b' \cdot c_2})$ *son reales.*

Demostración. Para probar que las soluciones no son imaginarias, basta probar que el cuadrado del denominador de la fracción $\frac{b \cdot c_2 + b' \cdot c'_2}{b \cdot c'_2 + b' \cdot c_2}$ es mayor o igual que el cuadrado de su numerador. Para ello, teniendo en cuenta la igualdad: $(b \cdot c_2 + b' \cdot c'_2)^2 - (b \cdot c_2 + b' \cdot c'_2)^2 = (b^2 - b'^2) \cdot ({c'_2}^2 - {c_2}^2)$, basta probar que ambos factores de su segundo miembro son positivos. Y, en efecto, excluida la posibilidad $b' = b$ (de acuerdo con lo indicado en la nota precedente), la relación $b' \leq b$ (que se viene suponiendo) implica $b' < b$, lo que junto con (1) implica $c'_2 > c_2$. Por tanto, $(b^2 - b'^2) \cdot ({c'_2}^2 - {c_2}^2) > 0$ □

Ejemplo 3.9. Siendo $A = [0, 0]$, $B = [9, 0]$, $C = [6, 4]$, $A' = [0, 0]$, $B' = [3, 0]$, $C' = [2, 12]$, ambos triángulos tienen área 18, quedando la ecuación (3) en la forma $5 \cdot cos(\phi) = 3$, siendo sus soluciones los dos valores opuestos $\phi = \pm arccos(\frac{3}{5})$. Ahora aplicando (2), para la solución positiva, resultan $B^* = [\frac{9}{5}, \frac{12}{5}]$, $C^* = [-\frac{42}{5}, \frac{44}{5}]$ siendo la dirección de Cavalieri la del vector BB^*, es decir, $[3, -1]$. Y para la solución negativa, resultan $B^{**} = [\frac{9}{5}, \frac{-12}{5}]$, $C^{**} = [-\frac{54}{5}, \frac{28}{5}]$ siendo la dirección de Cavalieri la del vector $[3, 1]$. Todo ello aparece visualizado con un SGD en la Figura 13, en que pueden apreciarse los pares de rectas paralelas que determinan las dos direcciones de Cavalieri simétricas respecto de AB, pero distintas de la determinada por AB.

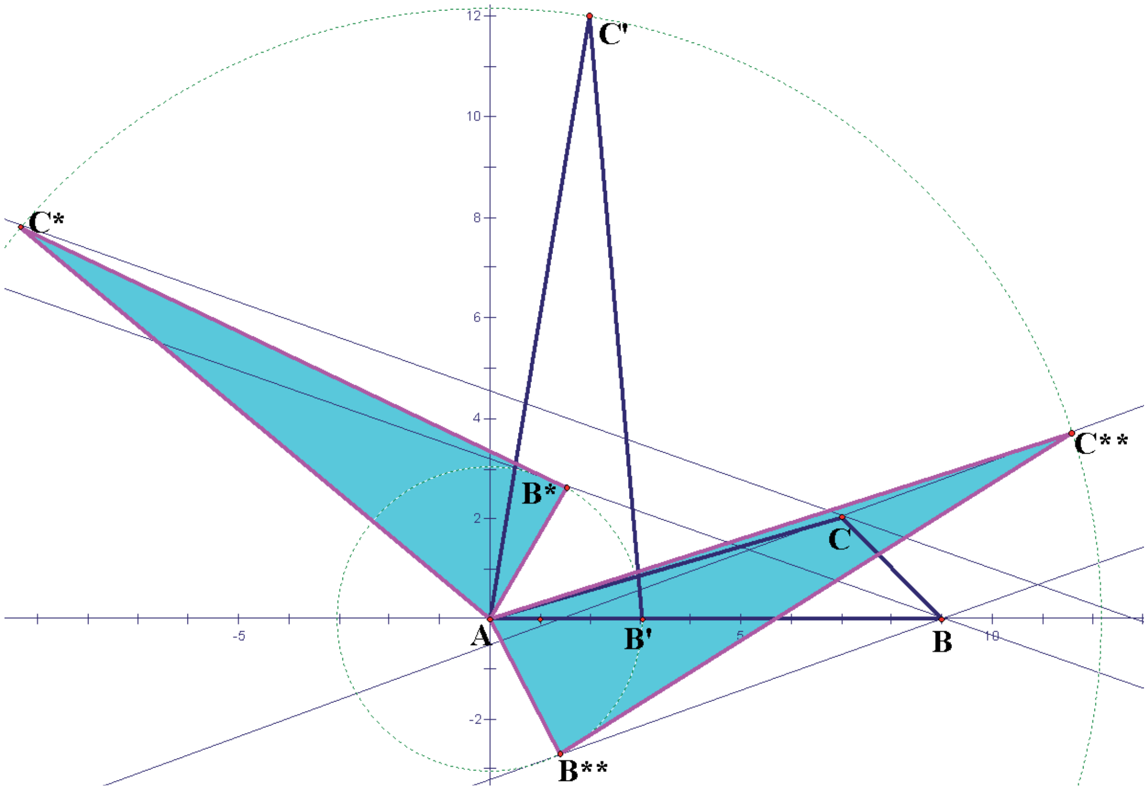


Fig. 13: *Caso de dos direcciones de Cavalieri ($\neq AB$) simétricas respecto de AB*

3.2.1 Direcciones en caso de ser $c'_1 = c_1 \;\wedge\; c'_2 = -c_2$

Por ser $|c'_2| = c_2$ resulta $b' = b$, como consecuencia de (1). Por tanto, se tiene $b \cdot c'_1 = b' \cdot c_1$, luego se trata de un caso particular del considerado en la Sección 3.2, pero que tratamos aparte por ser caso excepcional.

Por ser $b' = b$ y $c'_2 = -c_2$, la ecuación (3) es idénticamente nula, por lo que no aporta solución. Ello se debe a que al coincidir B^* con B, la recta BB^* queda indeterminada, con lo cual el criterio de posición Cavalieri por paralelismo de B^*B y C^*C de la Sección 1 ya no es aplicable.

Ahora bien, en este caso, la recta AB es mediatriz del segmento CC', es decir, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son simétricos respecto de la recta AB (Figura 14), por lo que la dirección de la recta CC' es dirección de Cavalieri.

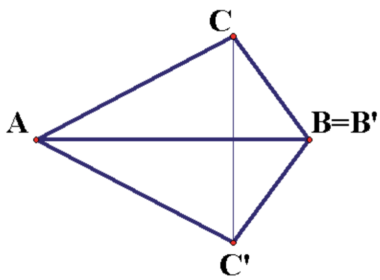


Fig. 14: *Caso de una única dirección de Cavalieri, la perpendicular a AB*

Para probar que en este caso no existe otra dirección, γ, distinta de la de AB, que sea dirección de Cavalieri, basta comprobar que la imagen de ABC en la afinidad homológica de eje AB, de dirección γ y de razón -1 es siempre un triángulo distinto del $A'B'C'$

3.2.2 Direcciones en caso de ser $c'_1 = c_1 \;\wedge\; c'_2 = c_2$

La igualdad $c'_2 = c_2$ implica $b' = b$, como consecuencia de (1). Por tanto, se tiene $b \cdot c'_1 = b' \cdot c_1$, luego se trata de otro caso particular del considerado en la subsección 3.2, pero que tratamos aparte también por ser caso excepcional.

Por ser $b' = b$ y $c'_2 = c_2$, la ecuación (3) queda reducida a $cos(\phi) = 1$, de solución obvia $\phi = 0$. Pero, al igual que ocurría en 3.2.1, al coincidir B^* con B, la recta BB^* queda indeterminada, por lo que el criterio de posición Cavalieri por paralelismo de la Sección 1 ya no es aplicable, por lo que la ecuación (3) ya no es válida.

Ahora bien, al ser iguales las coordenadas de los tres vértices, se tiene $A = A', B = B', C = C'$, luego los triángulos ABC y $A'B'C'$ son coincidentes, lo cual obviamente implica que cualquier dirección sea dirección de Cavalieri.

3.3 Resumen de resultados

Los resultados obtenidos se resumen en el siguiente teorema.

Teorema 3.10. *Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos de áreas iguales del plano euclídeo real, tales que $A' = A$ y el vértice B' está en el lado AB. Denotemos $A = (0, 0)$, $B = (b, 0)$, $C = (c_1, c_2)$, $B' = (b', 0)$, $C' = (c'_1, c'_2])$ a las coordenadas de sus vértices. Sean H y H' los pies de las alturas sobre los lados AB y $A'B'$, respectivamente.*

La amplitud de las rotaciones de centro A en que el triángulo $A'B'C'$ se transforma en otro, $A^*B^*C^*$, en posición de Cavalieri con ABC, son las raíces reales de la ecuación trigonométrica (3).

Si H y H' no dividen a AB y $A'B'$ en segmentos proporcionales, es decir, si $\frac{AH}{HB} \neq \frac{A'H'}{H'B}$, entonces (3) tiene dos raíces reales y distintas, ϕ_1 y ϕ_2, no opuestas una de la otra (además, tampoco se diferencian en π, supuesto que C' y C están en el mismo semiplano respecto de la recta AB) y sus correspondientes direcciones de Cavalieri no son simétricas respecto de AB. En particular, si $B' = B$ y además C' y C están en el mismo semiplano respecto de la recta AB, entonces $\phi_1 = 0$, siendo ϕ_2 uno de los dos valores opuestos $\pm arccos(\frac{(c_1-c'_1)^2-4\cdot c_2^2}{4\cdot c_2^2+(c_1-c'_1)^2})$ (pudiendo distinguir el válido, expresando sen y cos en (3) en función de la tangente del ángulo mitad, de modo que la raíz venga dada en forma de arco tangente) y sus correspondientes direcciones de Cavalieri son la de AB y otra distinta de ella.

Si, por el contrario, los pies de las alturas sobre los lados AB y $A'B'$, los dividen en segmentos proporcionales, es decir, si $\frac{AH}{HB} = \frac{A'H'}{H'B}$, entonces (3) tiene dos raíces opuestas, dadas por $\phi = \pm arccos(\frac{b\cdot c_2+b'\cdot c'_2}{b\cdot c'_2+b'\cdot c_2})$ y sus correspondientes direcciones de Cavalieri son simétricas respecto de AB, pero distintas de la determinada por AB. En particular, si $B' = B$ y la recta CC' es perpendicular a la AB, entonces la única dirección de Cavalieri es la de la recta CC'.

En todo caso, para cada valor de ϕ que sea solución de (3), la correspondiente dirección de Cavalieri es la de la recta BB^* (o la de CC^*), donde las coordenadas de B^* y C^* se obtienen sustituyendo en (2) el correspondiente valor de ϕ.

Finalmente, si $B' = B$ y $C' = C$, entonces cualquier dirección es dirección de Cavalieri.

Nota 3.11. Sean $[T]$ y $[T']$ dos clases de triángulos directamente congruentes (en el sentido de la Sección 1) y sea s una semirrecta de origen A. Cabe preguntarse: ¿existen dos triángulos, $ABC \in [T]$ y $AB'C' \in [T']$ con B y B' en s, tales que sus direcciones de Cavalieri no sean simétricas respecto de la recta que contiene a s? Puesto que, para ello basta que sea $\frac{AH}{HB} \neq \frac{A'H'}{H'B}$, la respuesta es afirmativa, salvo que los triángulos sean ambos equiláteros.

Conclusiones

Este artículo se ha enfocado a determinar las direcciones de Cavalieri existentes entre dos triángulos de áreas iguales, ABC y $A'B'C'$, del plano euclídeo real con un vértice común, $A' = A$, haciendo rotar uno de ellos alrededor de dicho vértice. La posición de los pies de las alturas, H y H', sobre los respectivos lados AB y $A'B'$, decide el tipo de soluciones. Si son iguales las razones de segmentos $\frac{AH}{HB}$ y $\frac{A'H'}{H'B}$, entonces existen dos direcciones y son simétricas respecto de AB; y si son distintas las razones, entonces también existen dos direcciones, pero no simétricas respecto de AB. En casos especiales, existe una única dirección o infinitas direcciones.

Referencias

[1] H. Eves (1991), Two Surprising Theorems on Cavalieri Congruence. The College Mathematics Journal, Vol. 22/2, págs. 118–124. (Reprinted from the 1988 Mathematical Sciences Calendar. Rome Press, Inc.)

[2] P. Halmos (1991), *Problems for mathematicians, young and old.* Mathematical Association of America, Washington, D.C., págs. 202–206.

[3] E. Roanes Macías (1998), Evolución en la enseñanza de la Geometría Elemental. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, 50, págs. 49–60.

[4] A. Muntean (2011), Estrategias para generar ecuaciones polinomiales con raíces valores de funciones trigonométricas. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, 88, págs. 14–30.

[5] J.A. García Suárez (2012), Sobre la congruencia de Cavalieri en triángulos. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, 91, págs. 56–61.

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 92 (Octubre 2012)

Probabilidad condicionada: tratando de atar algunos cabos sueltos

Víctor Manuel Sánchez
Profesor de Secundaria
vsanch3@olmo.pntic.mec.es

Abstract

I have an experience of many years as a teacher and I think that some textbooks do not insist enough in clarifying the difficulties that arise when considering the independence of events within a single random experiment and, in particular, what happens when they are compound experiments. I shall discuss here my experience regarding how to bypass these difficulties through a few examples.

Introducción

De forma muy resumida, y mediante ejemplos, procuraré atar algunos cabos que, a mi modo de ver, quedan algo sueltos en las explicaciones que, sobre probabilidad condicionada, figuran en algunos libros de texto de Secundaria. Así, por ejemplo, pienso que no está muy clara la conexión entre lo que se dice sobre la independencia de sucesos dentro de un solo experimento aleatorio, y lo que se dice cuando se trata de experimentos compuestos. Trataré de explicarlo, sobre todo con las dos observaciones finales. Y para ir más directamente al grano, trataré sólo con sucesos elementales equiprobables, lo que, a mi juicio, es suficiente para conseguir el objetivo que me he propuesto.

1 Probabilidad condicionada

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio, y A y B dos subconjuntos de E. Si a $A \cap B$ lo consideramos como un subconjunto de E, $A \cap B$ es un suceso normal y corriente (Figura 1); pero si lo consideramos como subconjunto de A, entonces A desempeñaría el papel de nuevo espacio muestral, y $A \cap B$ pasaría a ser otro tipo de suceso que se llama B/A (B condicionado por A).

Observación: Hay autores que hablan de "*B condicionado por A*"; otros dicen "*B si A*"; otros "*B sabiendo que se ha verificado A*"; y también suele aparecer con frecuencia en los libros la frase "*Probabilidad del suceso B condicionada por A*".

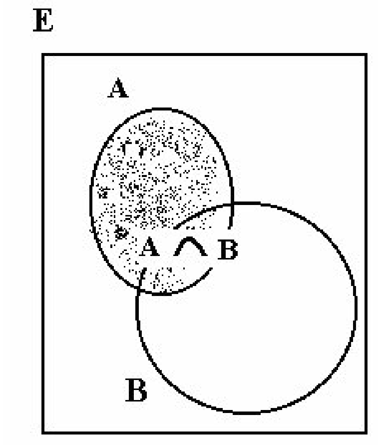


Figura 1

Por lo tanto, denotando *Card(A)* al cardinal del subconjunto *A*, si *Card(A)=*n_1, *Card* $(A \cap B)$=n_3 y *Card(E)=n* , entonces

$$\text{P(B/A)}=\frac{n_3}{n_1}=\frac{\frac{n_3}{n}}{\frac{n_1}{n}}=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},$$

luego

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

y, análogamente,

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo 1. En el experimento del dado, consideremos los sucesos A = "*mayor que 3*" y B = *"par"*. Si se lanza el dado y, sin mirar, apostamos por *A*, la probabilidad de acertar será:

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5\ .$$

Pero si un "compinche" nos hiciese una seña indicándonos que lo que ha salido es *par*, entonces, la probabilidad de acertar sería

$$P(A/B) = \frac{2/6}{3/6} = 0{,}\widehat{6}\ .$$

Esto quiere decir que, si lanzásemos muchas veces un dado, la mitad de ellas debería de salir un número mayor que *3*, y que, si sólo nos fijásemos en las "apariciones" de *B* (los pares), por cada tres números pares, debería de haber dos de ellos mayores que *3*. (*Ejercicio*: Comprobarlo con el ordenador).

Observación: En algunos libros de texto usan el *"deber"* en vez del *"deber de",* y, evidentemente, no es lo mismo; así, por ejemplo, si nos preguntasen por el Director, es muy distinto decir que *"debe estar (obligación)"* en su despacho, que decir *"debe de estar (probablemente esté)"* en su despacho.

Como se ve, *P(B/A)* viene a expresar en qué medida se encuentra *B* dentro de *A* (razón de sus cardinales). Por eso, *cuando B está dentro de A en la misma proporción que lo está dentro de E*, sucede que:

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(E)}$$

luego, en este caso,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(E)} = P(B)$$

es decir, la probabilidad de *B* condicionada por *A* es igual que la probabilidad sin condicionar; por lo tanto, *A*, en este caso, no condiciona nada. Cuando esto sucede, se dice que A y B son *independientes* y se cumple, lógicamente, que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

mientras que, si son *dependientes***,** entonces

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)\,,$$

o bien

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A / B)$$

Ejemplo 2. En la baraja, las figuras dentro de los bastos están en la misma proporción que las figuras dentro de toda la baraja; por eso, sucede que:

$$P(F / B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{10} = \frac{12}{40} = P(F)$$

lo que quiere decir que tiene la misma probabilidad de salir una figura al extraer una carta entre los bastos que al extraerla entre las 40 cartas.

Ejemplo 3. Supongamos que unos universitarios, para estudiar la relación entre el consumo de tabaco y el sexo de las personas, hubiesen conseguido, entre otros, los siguientes datos:

	F	**NF**	**TOTAL**
H	800	1600	2400
M	1200	2400	3600
TOTALES	2000	4000	6000

H= Hombre
M= Mujer
F = Fumador
NF= No fumador

Con estos datos, como

$$P(F / M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} = \frac{\frac{1200}{6000}}{\frac{3600}{6000}} = \frac{1}{3}$$

es igual a

$$P(F) = \frac{2000}{6000} = \frac{1}{3},$$

los universitarios podrán concluir que el hecho de ser mujer no influye en que la persona sea fumadora o no. Pero si *P(F/M)* fuese mayor que *P(F)*, entonces *M* tendría una influencia favorable sobre la ocurrencia de *F*. Y si *P(F/M)<P(F)*, entonces *M* tendría una influencia desfavorable sobre la ocurrencia de *F*.

2 Experimentos compuestos

Hasta ahora, hemos estudiado experimentos aleatorios simples, como, por ejemplo, lanzar un dado y considerar el número obtenido. Ya vimos que, en este caso, su espacio muestral es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Ahora, vamos a estudiar experimentos que se pueden descomponer en otros simples.

Ejemplo 4. Primero se lanza un dado y, a continuación, una moneda. Resultados posibles:

Dado	Moneda	Resultados
1	c	1c
	f	1f
2	c	2c
	f	2f
3	c	3c
	f	3f
4	c	4c
	f	4f
5	c	5c
	f	5f
6	c	6c
	f	6f

El espacio muestral es

$$E = \{(1, c), (1, f), (2, c), (2, f), ... (6, c), (6, f)\},$$

es decir, $E = E_1 \times E_2$, siendo $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E_2 = \{c, f\}$.

Como los 12 sucesos elementales de E son equiprobables, la probabilidad, por ejemplo, del suceso S = "*obtener par y cara*" = $\{(2, c), (4, c), (6, c)\}$ es pues (denotando *NCF* al Nº de casos favorables y *NCP* al Nº de casos posibles):

$$\text{P(S)} = \frac{NCF\ a\ S}{NCP} = \frac{NCF\ de\ "par"\ en\ dado\ x\ NCF\ de\ "cara"\ en\ moneda}{NCP\ en\ dado\ x\ NCP\ en\ moneda} =$$

$$= \frac{3\times 1}{6\times 2} = \frac{NCF\ de\ "par"\ en\ dado}{NCP\ en\ dado} \times \frac{NCF\ de\ "cara"\ en\ moneda}{NCP\ en\ moneda} =$$

$$= P(\text{“}par\text{”})\ x\ \ P(\text{“}cara\text{”}) = \frac{3}{6}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

lo que quiere decir que, por cada 4 veces que realicemos el experimento, el suceso *S* debería de verificarse una vez; o, lo que es lo mismo, que por cada *100* veces, lo normal será que *S* se verifique *25*.

Observación: A mi modo de ver, es ahora cuando comienzan a aparecer los cabos sueltos a los que me refería al principio. Pero como la mayoría de los alumnos no se plantearán estos interrogantes, para que no se "líen", no he puesto aquí las notas correspondientes, que sí figuran al final, para dar respuesta a aquellos otros alumnos que no queden muy convencidos.

Ejemplo 5. Primero se lanza un dado; luego, una moneda; y, por último, se extrae una carta. Como resultado del experimento se considerará la terna obtenida. Este experimento se puede descomponer en 3 simples:

$$\mathbf{E} = \underset{\substack{\text{(6 resultados} \\ \text{posibles)}}}{\overset{\textit{Dado}}{\mathbf{E_1}}} \times \underset{\substack{\text{(2 resultados} \\ \text{posibles)}}}{\overset{\textit{Moneda}}{\mathbf{E_2}}} \times \underset{\substack{\text{(40 resultados} \\ \text{posibles)}}}{\overset{\textit{Baraja}}{\mathbf{E_3}}}$$

Obviamente, el número de resultados posibles de *E* es:

NCP en dado × *NCP* en moneda × *NCP* en carta = 6 × 2 × 40

Hallemos, por ejemplo, la probabilidad del suceso

S = obtener {múltiplo de 3} Λ {cruz} Λ {copa}

para el cual

$$P(S) = \frac{2\times1\times10}{6\times2\times40} = \frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{10}{40} = \frac{1}{24} = 0{,}041\overset{\frown}{6}$$

lo que quiere decir que, en condiciones normales de suerte, por cada 24 veces que realicemos el experimento compuesto, el suceso *S* debería de verificarse una vez.

Observemos que sucede lo mismo que en el experimento anterior; es decir, que la probabilidad de *S* es igual que el producto de las probabilidades.

$$P(\dot{3}FCo) = \frac{2}{6}\times\frac{1}{2}\times\frac{10}{40} = P(\dot{3})\cdot P(F)\cdot P(Co)$$

En general, cuando los experimentos simples son *independientes entre sí* (lo que ocurra en uno de ellos no influye para nada en lo que suceda en los otros experimentos), la probabilidad de un suceso (r_1 , r_2 ,…. r_n) del experimento compuesto de $E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$, es igual que el producto de las probabilidades; es decir:

$$P(r_1, r_2, \ldots r_n) = P(r_1) \times P(r_2) \times ... \times P(r_n)$$

pero, si son dependientes, entonces

$$P(r_1, r_2, \ldots r_n) = P(r_1) \times P(r_2/r_1) \times P(r_3/r_1 \cap r_2) \times P(r_4 / r_1 \cap r_2 \cap r_3) \times \; ....$$

Ejemplo 6. Consideremos el experimento consistente en: *extraer* una bola al azar de una urna que contiene 5 bolas numeradas del 1 al 5; *devolver* la bola a la urna, y realizar una *segunda extracción*. Vamos a considerar como resultado del experimento el número que tiene por decena la cifra de la primera bola, y, por unidad, la de la segunda. Entonces:

1ª extracción	2ª extracción	Resultados
1	1	11
	2	12
	3	13
	4	14
	5	15
2	1	21
	2	22
	3	23
	4	24
	5	25
…	…	…
5	1	51
	2	52
	3	53
	4	54
	5	55

Espacio muestral: E= {11, 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, 24,...54, 55}
Nº de sucesos elementales = $VR_{5,2}=5^2=25$

Consideremos el suceso S = "*obtener un número par, cuya cifra de las decenas sea impar*" = {(1, 2), (1, 4), (3, 2), (3, 4), (5, 2), (5, 4)}
Estos experimentos simples son independientes, porque lo que ocurra en la primera extracción no influye para nada en lo que suceda en la segunda; por lo tanto

$$\mathrm{P(S)} = \frac{3\times 2}{5\times 5} = \frac{3}{5}\times\frac{2}{5} =$$

(probabilidad de sacar cifra impar en el experimento simple primera extracción)× (probabilidad de obtener par en segunda extracción)

Ejemplo 7. Sea el mismo experimento anterior, pero *sin devolución* de la bola. El espacio muestral es ahora E = $\{12, 13, 14, 15, 21, 23, ...54\}$ y el nº de sucesos elementales = $V_{5,\,2}$ = 5×4 = 20.

¡Ojo! En este caso, lo que salga en la primera extracción *sí influye* en el resultado de la segunda; por lo tanto son experimentos *dependientes*.
Si A = $\{(1, 5)\}$, entonces:

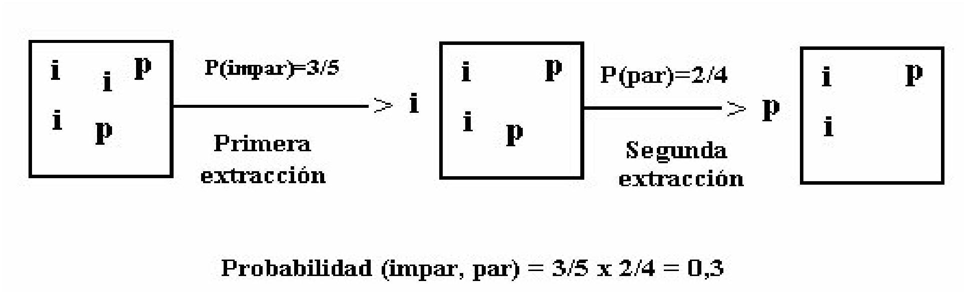
$$P(A) = \frac{1}{20} = P("1")\cdot P("5"/"1") = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{20}$$

Si B = "par, par", entonces :

$$P(B) = P(p_1)\cdot P(p_2 / p_1) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$

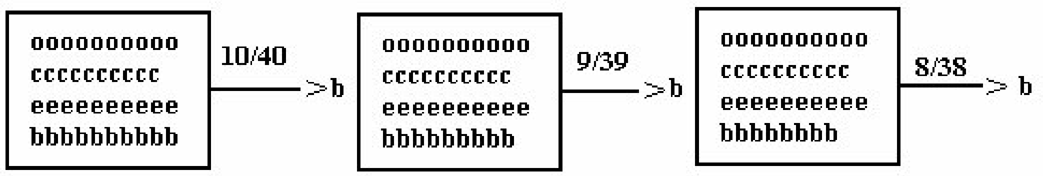
Si S = "impar, par", entonces:

$$P(S) = P(impar\ en\ 1^{a}\ ext)\cdot P(par\ en\ 2^{a}\ ext/ impar\ en\ 1^{a}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4} = \frac{3}{10}$$



Ejemplo 8. Se realizan 3 extracciones sucesivas, *sin devolución*, de una carta de la baraja. La probabilidad de obtener 3 bastos será:

$$P(b_1 b_2 b_3) = P(b_1) \cdot P(b_2 / b_1) \cdot P(b_3 / b_1 \cap b_2) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} \cdot \frac{8}{38} = \frac{3}{247}$$



Probabilidad de obtener tres bastos = 10/40 x 9/39 x 8/38

Consideremos ahora la probabilidad de obtener tres cartas del mismo palo. Puesto que cada palo es equivalente a otro cualquiera, puede considerarse el suceso unión

$$Or_1Or_2Or_3 \cup C_1C_2C_3 \cup E_1E_2E_3 \cup B_1B_2B_3,$$

y como estos cuatro sucesos (compuestos) son incompatibles, podemos escribir:

$$P(Or_1Or_2Or_3 \cup C_1C_2C_3 \cup E_1E_2E_3 \cup B_1B_2B_3) =$$

$$P(Or_1Or_2Or_3) + P(C_1C_2C_3) + P(E_1E_2E_3) + P(B_1B_2B_3) = 4 \cdot \frac{3}{247} = \frac{12}{247}$$

Observaciones al Ejemplo 4

1) Si somos rigurosos, en principio no deberíamos poner la misma "*P*" en los dos experimentos aleatorios considerados en el ejemplo. Para ser mas precisos, deberíamos escribir *P(S) =* P_1*("par")* × P_2*("cara")*, ya que son experimentos diferentes; pero, si convenimos en que, al escribir: *"par"*, queremos indicar el suceso *(par, cualquier resultado en moneda)* de *E*, y que, al escribir "cara", queremos decir suceso (*cualquier número del dado, cara*) de *E*, no habría nada que objetar.

2) Mediante la tabla (o un diagrama en árbol), hemos llegado a la conclusión de que la probabilidad del suceso compuesto es igual al producto de las probabilidades de los sucesos simples que lo componen; pero a esta misma conclusión podríamos llegar utilizando el concepto de probabilidad condicionada ya estudiado. En efecto, siendo *cq=cualquier suceso*, como

$$P((s_1, cq)/(cq, s_2)) = \frac{P(s_1, s_2)}{P(cq, s_2)} \underset{(*)}{=} \frac{P(s_1, cq)}{P(cq, cq)} = P(s_1, cq)$$

podemos afirmar que los sucesos son independientes y, por lo tanto:

$$P(S) = P(s_1, s_2) = P((s_1, cq) \cap (cq, s_2)) = P(s_1, cq) \cdot P(cq, s_2) \underset{(**)}{=} P(s_1) \cdot P(s_2)$$

[Por supuesto, la igualdad (*) es consecuencia de que

$$\frac{Card(s_1, s_2)}{Card(cq, s_2)} = \frac{Card(s_1)}{Card(cq)} = \frac{Card(s_1, cq)}{Card(cq, cq)}$$

y la igualdad (**) sigue del convenio citado anteriormente].

Y en caso de que los sucesos no sean independientes tendremos:

$$P(S) = P(s_1, s_2) = P((s_1, cq) \cap (cq, s_2)) = P(s_1, cq) \cdot P((cq, s_2)/(s_1, cq)) \underset{(**)}{=}$$

$$= P(s_1) \cdot P(s_2 / s_1)$$

donde la última igualdad es consecuencia de la anterior igualdad (**) .

Alan Turing, 1912-1954: El origen de la computación

Elena Jurado Málaga
Dept. de Ing. de Sistemas Informáticos y Telemáticos
Universidad de Extremadura
elenajur@unex.es

Resumen

Alan Turing was one of the greatest scientists of the 20th century. He made fundamental contributions to the theory of computation, artificial intelligence, cryptography, mathematical biology and pure mathematics. He can be seen as the primary founder of the modern discipline of computer science. In this year, the centenary of his birth, this paper revises his life and the main lines of Turing's mathematic early work.

Introducción

En el año 2012 se cumplen 100 años del nacimiento del brillante matemático británico Alan Turing y la comunidad científica internacional no está escatimando esfuerzos para celebrar esta efemérides con actos de todo tipo. La sociedad actual intenta así rendir un homenaje póstumo a un personaje que, como otros muchos genios, no recibió en vida el reconocimiento que merecía.

Pero para catalogar a Alan Turing como genio deberíamos revisar cuales son las características que suelen acompañar a los personajes a los que se atribuye este calificativo.

Por supuesto, los genios deben hacer aportaciones extraordinarias en el terreno científico o artístico. Esta cuestión resulta evidente en el caso de Turing como se comprobará a lo largo del texto.

Una característica muy común entre los genios es la precocidad y Turing no era una excepción, desde muy pequeño llamó la atención su inteligencia y su interés por los números y por la ciencia, en general.

También es habitual que los genios muestren ciertas rarezas en su carácter. En este aspecto Turing tampoco fue una excepción: era tímido, solitario, de aspecto desaliñado y, con el tiempo, sus rarezas fueron cada vez más comentadas entre sus compañeros. El esplendido trabajo de A. Hodges [2] ofrece numerosas aportaciones de familiares y compañeros en este sentido. El carácter solitario e independiente de Turing hizo que en diferentes ocasiones llevara a cabo investigaciones sin hacer un estudio previo del estado de la cuestión. Esto, que sin duda aportaba frescura y originalidad a su trabajo, le llevó, por ejemplo, a demostrar teoremas que habían sido previamente probados por otros científicos.

Alan Turing, y esto no es una característica frecuente en los genios, también fue un gran deportista. Practicó remo y, sobre todo, carreras de larga distancia, de hecho, estuvo inicialmente seleccionado para acudir a las Olimpiadas de 1948.

Aunque en la primera parte de este artículo (sección 1) se revisaran brevemente los aspectos más interesantes de su biografía, dejaremos de lado la mayor parte los detalles de la vida de Turing para centrarnos en una de sus más importantes aportaciones científicas, la máquina A, conocida tradicionalmente como **Máquina de Turing** (MT). En la sección 2 se presenta el panorama de las matemáticas en el periodo de entreguerras, algunas de las cuestiones que más preocupaban a los matemáticos de la época son cruciales para entender los motivos que llevaron a Turing a presentar su máquina. El alcance teórico que en el mundo de la computación tiene el trabajo de Turing se presenta en la sección 3. Para finalizar, y antes de las conclusiones, en la sección 4 se describe de manera formal la MT. La definición va acompañada por algunos ejemplos que pretenden ayudar a comprender su diseño.

1 Lo más esencial de su biografía

Alan Turing nació en Londres el 23 de junio de 1912. Por aquella época sus padres residían de manera habitual en la India donde su padre, Julius Turing, trabajaba como funcionario del gobierno británico. Por este motivo, Alan tuvo una infancia poco habitual ya que pasó largas temporadas viviendo con amigos de sus padres hasta que finalmente éstos volvieron a residir en el Reino Unido.

Al cumplir 6 años le enviaron a un pequeño colegio llamado Hazelhurst y posteriormente, a los 14 años, a Sherborne School.

En Sherborne conoce a Christopher Morton, un brillante estudiante de ciencias algo mayor que él. La temprana muerte por tuberculosis de su compañero le afecta profundamente. La admiración que Alan sentía por Morton fue, con toda seguridad, un gran aliciente en su desarrollo como científico, sus logros intelectuales se convertirían en un homenaje póstumo a su querido amigo.

En 1931 comienza a estudiar matemáticas en el prestigioso King's College de Cambridge. Allí coincide con científicos y pensadores de la talla de G. H. Hardy, B. Russell o J. M. Keynes. En esta época conoce al topólogo Max Newman con el que coincidirá en numerosas ocasiones a lo largo de su vida. Una vez terminados sus estudios, en 1935 es admitido como miembro del King's College con una beca de 300 libras anuales. Al año siguiente recibe el premio Smith por su trabajo en teoría de probabilidad "On the Gaussian error function".

Es precisamente Max Newman el que le aconseja viajar a la Universidad de Princeton en 1937 para trabajar con Alonzo Church. En 1936 Turing había escrito un artículo titulado "Números computables, con una aplicación al *Entscheidungsproblem*" en el que llega a conclusiones similares a las que Church acababa de publicar en la presentación del cálculo *lambda*. El artículo de Turing es publicado finalmente en 1937 ya que se ve obligado a revisarlo para incluir una referencia al trabajo de Church. La estrecha relación entre su trabajo y el de Church motiva el viaje a Princeton, lugar en el que tiene la oportunidad de conocer a científicos de la talla de A. Einstein y otros como Kleene o Post con los que coincide en su línea de trabajo. Sin embargo, para él resulta una decepción no encontrar a Kurt Gödel que, pocos meses antes, había dejado dicha Universidad. Tras dos años trabajando en EEUU regresa al King's College.

Es de una importancia trascendental el trabajo que realiza durante la segunda guerra mundial en Bletchley Park, un palacete situado a unos 80 Km. de Londres, sede de la *General Code and Cliper School*, donde coincide de nuevo con Newman. Allí lidera al equipo de científicos que, apoyándose en el trabajo previo del polaco Marian Rejewski, construye la *Bombe*, una máquina que permite decodificar los mensajes que el ejercito alemán encripta utilizando otra máquina genial llamada *Enigma.* Gracias al excelente diseño de los algoritmos que *Bombe* utiliza, el tiempo necesario para decodificar los mensajes alemanes interceptados disminuye rápidamente facilitando, entre otras cosas, la localización de la flota de submarinos alemanes (U-boots) en el Atlántico Norte y el crucial desembarco del ejercito aliado en Normandía. La guerra, antes o después, habría terminado, pero sin el trabajo de Alan Turing y de su equipo el final se habría retrasado, posiblemente, un par de años. Es imposible calcular la cantidad de vidas humanas que se salvaron por este motivo pero es un hecho más que corrobora la deuda contraída con este científico. Debido al estricto secreto decretado por Winston Churchill sobre las actividades llevadas a cabo en Bletchley Park, el trabajo de Turing fue completamente desconocido hasta la década de los setenta.

Después de la guerra, Turing se incorpora a la vida civil en el *National Physical Laboratory* de Londres donde se le encarga el diseño y construcción de un ordenador llamado ACE. Posteriormente, es invitado por Max Newman para formar parte de su grupo de investigación en la Universidad de Manchester y es allí donde desarrolla un fructífero trabajo durante el último periodo de su vida. Con la conocida prueba del *Test de Turing* por vez primera un científico se plantea la idea de que las máquinas, que hasta ese momento sólo se consideraban calculadoras muy rápidas, podrían pensar. El test debe llevarlo a cabo un juez que se comunica con un hombre y una máquina a los que no puede ver, sólo les hace preguntas y recibe sus respuestas. Si el juez, al analizar las respuestas, no consigue distinguir al hombre de la máquina es que la máquina, convenientemente programada, ha conseguido *engañarle* y se podría considerar que esa máquina *piensa.* Es la semilla que provocará el nacimiento de una importante rama de la Informática, la Inteligencia Artificial. También trabaja en el campo de la morfogénesis, a caballo entre la bilogía y las matemáticas, estudiando la aparición de los números de Fibonacci en ciertas estructuras vegetales y los patrones que siguen los dibujos de la piel de muchos animales.

Lamentablemente también hay que destacar la temprana, trágica y polémica muerte de Turing en 1954. De forma accidental o voluntaria, y esto último parece lo más probable, ingirió un veneno que provocó su muerte. La sombra del suicidio planea sobre la biografía de Turing debido al giro que, en los últimos dos años, tomó su vida. Había sido condenado en 1952 por su homosexualidad. Era éste un aspecto de su vida que no se preocupó demasiado en ocultar, a pesar de que era considerado un delito por la legislación británica de la época. La pena de cárcel fue conmutada por un tratamiento hormonal que pretendía anular la libido para corregir así su tendencia homosexual. El tratamiento debilitó tanto su cuerpo como su espíritu y, con mucha probabilidad, fue la principal causa de su muerte.

2 Las motivaciones de Turing: Hilbert, Gödel, el *Entscheidungsproblem*

En 1937 Turing publica "Números computables, con una aplicación al *Entscheidungsproblem*". En este trabajo define desde un punto de vista estrictamente teórico la máquina A (Automática), conocida actualmente como Máquina de Turing (más detalles en la sección 4), y el concepto de números computables, que son aquellos cuya expresión decimal se puede calcular mediante un método finito. En segundo lugar, presenta la Máquina Universal (U) que puede llevar a cabo la tarea de cualquier otra máquina A siempre que conozca su configuración. Y, por último, emplea las definiciones anteriores para demostrar que el *Entscheidungsproblem* no se puede resolver.

En principio podría pensarse que Turing, con el diseño de su Máquina Universal, pretendía realizar los *planos* de un computador, ya que por muy complejo que pueda parecernos, éste no es más que una máquina que almacena información en un dispositivo de memoria y que lleva a cabo operaciones de lectura y escritura sobre esta memoria. Y, como veremos, esto es básicamente lo mismo que hace una MT. Sin embargo, me inclino a creer que Turing tenía en la cabeza otras preocupaciones diferentes a las de la futura construcción de un computador, aunque más tarde participara en varias ocasiones en esta tarea. Analizaremos en esta sección las circunstancias científicas que más influyeron en este trabajo de Turing, planteando qué problemas preocupaban a los matemáticos de la época.

A principios del siglo XX, B. Russell y A. N. Whitehead habían publicado los tres volúmenes de *Principia Mathematica*, en ellos proponen un sistema axiomático que permitiría, en base a una colección de axiomas (verdades indiscutibles) y utilizando determinadas reglas de inferencia, expresar formalmente un razonamiento matemático correcto. Fue un proyecto ambicioso pero poco útil y flexible. Los autores no ocultaron su preocupación al encontrar paradojas que no *encajaban* en este sistema. Por ejemplo, si consideramos el conjunto R de todos los conjuntos que no son miembros de sí mismos, ¿podemos considerar que R es miembro de sí mismo? Si la respuesta es afirmativa, R no debería pertenecer a R y por tanto no sería miembro de sí mismo. Una respuesta negativa nos llevaría igualmente a una contradicción.

Los grandes avances realizados en el campo de las matemáticas durante generaciones habían favorecido unas altas expectativas por parte de gran parte de la comunidad matemática. El prestigioso matemático alemán David Hilbert (1862-1943) estaba convencido de que los cimientos de las matemáticas eran tan sólidos que era posible definir un sistema matemático formalizado que fuera completo, consistente y decidible. Y éste fue el reto que lanzó a la joven comunidad de matemáticos de la época en Bolonia (1928).

A pesar de que su dudosa utilidad, las ideas planteadas en *Principia Mathematica* aumentaron las expectativas de Hilbert, que dio por sentado que los resultados del reto serían positivos. Hilbert pretendía así potenciar el establecimiento de los sistemas matemáticos formalizados. Pero veamos con algo más de detalle lo que Hilbert animaba a conseguir: Un sistema ...

Completo significa que es posible demostrar cualquier afirmación verdadera y refutar cualquiera que sea falsa

Consistente significa que no es posible llegar a demostrar una afirmación inválida, por ejemplo, que 0=1 o que 2+2=5.

Decidible significa que existe un método que permite demostrar la veracidad o falsedad de cualquier afirmación.

Esta última cuestión era conocida como *Entscheidungsproblem*, el problema de la decisión. Hilbert ya había declarado en París en 1930 que estaba convencido de la solubilidad de todos los problemas matemáticos "en matemáticas no existe *ignorabimus*". En un discurso pronunciado en su ciudad natal, Königsberg, en 1931 fue más lejos afirmando que "los problemas insolubles no existen". En este discurso pronuncia su famosa frase "Hemos de saber, y sabremos" que resume todas sus inquietudes.

Es fácil imaginar la decepción que Hilbert (y gran parte de los matemáticos de la época) debió sentir cuando, unos días después, un joven matemático austriaco Kurt Gödel (1906-1978) echa por tierra sus ambiciosas ideas al presentar el *Teorema de la incompletitud* en un artículo titulado "Sobre las proposiciones formalmente irresolubles de *Principia Mathematica* y sistemas emparentados".

En este artículo Gödel presenta un método que permite numerar cadenas de símbolos, siempre que el número de símbolos sea finito. A modo de ejemplo, para aplicar el método a las expresiones aritméticas deberíamos asociar un número natural a cada símbolo utilizado. Así, la fórmula 1+2=3 podría representarse como la tupla (1,11,2,15,3) en la que 11 representa a la suma (+) y 15 al símbolo igual (=), suponiendo que los números se representan a sí mismos. Con la tupla anterior podemos construir un nuevo número (llamado número de Gödel) utilizando las potencias de los primeros números primos, es decir, se calcula $x = 2^1 * 3^{11} * 5^2 * 7^{15} * 11^3$. De acuerdo con el teorema fundamental del álgebra la descomposición en factores primos es única por lo que este número x se puede asociar de forma única a la formula $1 + 2 = 3$. Por tanto, dado un número natural existe una única expresión asociada a ese número, así que podríamos hablar con rigor de la primera expresión, de la segunda, tercera, ..., etc.

Partiendo de este método, Gödel plantea la siguiente situación: "Sea G una fórmula matemática, cuyo número de Gödel asociado es g, que declara que la fórmula con número de Gödel g no es demostrable en *Principia Mathematica*". Si esta fórmula es cierta entonces no es demostrable y si es demostrable entonces no es cierta. En definitiva, el sistema planteado en *Principia Mathematica* (o cualquier otro de características similares) no es completo ya que hay afirmaciones que no se pueden probar ni refutar. Además, en un sistema consistente, no es posible demostrar una afirmación falsa ni refutar una cierta, por lo que Gödel también había demostrado la inconsistencia del sistema. Eso significaba que muchos problemas en los que los matemáticos llevaban décadas (y siglos) trabajando podrían ser imposibles de resolver. En la mente de todos estaba la aparentemente simple conjetura de Goldbach, planteada hace más de 200 años, que afirma que cualquier número par es la suma de dos números primos. Aún no ha sido demostrada ni refutada.

En ese momento, y en relación con los sistemas para formalizar las matemáticas, quedaba en el aire una importante cuestión, ¿sería posible encontrar un método que permitiera demostrar la veracidad o falsedad de una afirmación?. El *Entscheidungsproblem* seguía abierto. Y éste fue el reto que se planteó Turing (y Church). Con la máquina A, definía formalmente un proceso mecánico para resolver problemas (o demostrar afirmaciones), en la actualidad lo llamaríamos algoritmo. Además, demostró que ciertos problemas no se podían resolver con dicha máquina. Estaba resolviendo el problema de la decisión y estableciendo, además, los límites de la computación. Así sentaba las bases de una rama de la Informática que hoy conocemos como Teoría de la Computación.

3 La tesis de Church-Turing

"La noción de procedimiento algorítmico que actúa sobre una secuencia de símbolos es idéntica al concepto de un proceso que puede ser ejecutado por una MT". Esta afirmación la formuló Alonzo Church y se la conoce como **tesis de Church** o **tesis de Church-Turing**. Estrictamente, no puede considerarse una afirmación matemática ya que carecemos de una definición precisa para el término *procedimiento algorítmico* y, por tanto, no puede demostrarse formalmente. Sin embargo, esta tesis es universalmente aceptada, debido, entre otros, a los siguientes motivos:

1. No se ha planteado ningún modelo de computo que pueda incluirse en la categoría de *procedimiento algorítmico* y que no pueda ser ejecutado en una MT.

2. Se han propuesto mejoras al diseño de la MT original y en todos los casos ha sido posible demostrar que el poder computacional de las MT's no se veía ampliado.

3. Se han propuesto otros modelos teóricos de cómputo que nunca han superado, en términos de potencia computacional, al de las MT's.

La tesis de Church-Turing no puede probarse de manera precisa debido justamente a la imprecisión del término *algoritmo* o *proceso algorítmico.* Sin embargo, una vez adoptada esta tesis, ya podemos darle un significado preciso al término. Es tan sencillo como decir que un algoritmo es un procedimiento que puede ser ejecutado por una MT. Esta definición proporciona un robusto punto de partida para la teoría de la computación que analiza formalmente cuales son los problemas computables, es decir, aquellos que pueden ser resueltos con una MT. Resulta muy interesante saber que la categoría de los problemas computables coincide con los problemas que pueden plantearse de manera recursiva.

4 La Máquina de Turing: definición y ejemplos

En general, podemos decir que una MT tiene como objetivo el proceso de una cadena de símbolos para resolver un problema concreto. Al comenzar el proceso la máquina dispone de una colección de símbolos que pueden considerarse los datos del problema y cuando finaliza la tarea, los símbolos de la máquina representan el resultado obtenido. Por ejemplo, una MT que lleve a cabo la sencilla tarea de sumar dos números enteros podría comenzar con la cadena **14 + 25** y al finalizar el proceso la cadena resultante debería ser **39**.

Como todos los autómatas, la MT queda definida por un conjunto finito de estados diferentes y una función que establece cuándo y cómo se realizan las transiciones entre los estados. Pero, además, el modelo básico de MT está formado por un dispositivo de lectura/escritura que controla una cinta de longitud infinita en la que se almacena la información procesada y que marca la principal diferencia de la MT respecto al resto de los autómatas. La cinta está dividida en celdas en las que se almacena un único símbolo o un espacio en blanco. Aunque la longitud de la cinta es infinita, en cada instante sólo un número finito de celdas contiene símbolos diferentes al espacio en blanco. Estos símbolos pertenecen a un alfabeto también finito. El dispositivo de lectura/escritura puede explorar(leer) el contenido de una celda y grabar(escribir) un nuevo símbolo sobre ella, seguidamente se desplaza hacia la izquierda o hacia la derecha en una posición. Por tanto, la MT dependiendo del símbolo leído y del estado actual del autómata, realiza las siguientes operaciones:

1. Cambia de estado.

2. Escribe un símbolo en la celda analizada.

3. Desplaza la cabeza de lectura/escritura a la izquierda o a la derecha en una posición.

Con el siguiente esquema se representa una MT que se encuentra en un estado llamado p y cuya cabeza de lectura/escritura señala a una celda que contiene al símbolo a

		a			

$\uparrow p$

A continuación presentamos una definiciones formales necesarias para formalizar la definición de la MT.

Definición 4.1 (Alfabeto). Un alfabeto es un conjunto finito de símbolos.

Ejemplos de alfabetos: $\Sigma_1 = \{0, 1\}$ $\quad$ $\Sigma_2 = \{a, b, c, \ldots z\}$

Definición 4.2 (Lenguaje universal). El lenguaje universal definido sobre un alfabeto Σ, que se denota Σ^* o $w(\Sigma)$ es el conjunto de todas las cadenas de longitud finita formadas con símbolos de dicho alfabeto.

Por ejemplo: $1010011 \in \Sigma_1^*$ $\quad$ $casa \in \Sigma_2^*$

Definición 4.3 (Máquina de Turing). Una MT se define como una tupla:

$$MT = \{Q, \Sigma, \Gamma, f, q_0, b, F\}$$

donde

- Q es el conjunto finito de estados
- Σ es el alfabeto de la cadena de entrada
- Γ es el alfabeto de la cinta
- $q_0 \in Q$ es el estado inicial
- b es el espacio en blanco $b \in \Gamma$, pero $b \notin \Sigma$
- $F \subset Q$ es el conjunto de estados finales

- $f : Q \times \Gamma \longrightarrow Q \times \Gamma \times \{I, D\}$

Inicialmente, en la cinta hay una colección finita de símbolos de Σ precedida y seguida por blancos (b), el estado de la MT es q_0 y la cabeza de lectura/escritura señala al primer símbolo distinto de b que hay en la cinta. A lo largo del proceso la MT va modificando la información almacenada en la cinta y además va pasando por diferentes estados hasta que llega a un estado final que hace que acabe el proceso. Una transición definida de la siguiente forma $f(p, a) = (q, b, I)$ indica que si la MT está en el estado p y señala a una celda que contiene el símbolo a debe cambiar al estado q, sustituir en la cinta el símbolo a por b y desplazarse una posición a la izquierda (la letra D representaría un desplazamiento a la derecha).

La descripción instantánea representa la situación de una máquina en un momento determinado y, entre otras cosas, nos permite describir formalmente la evolución de una MT.

Definición 4.4 (Descripción Instantánea de una M.T.). Llamaremos *Descripción Instantánea*(D.I.) de la MT a $\boxed{\alpha_1 \mathbf{q} \alpha_2}$ donde q es el estado actual de la máquina y $\alpha_1\alpha_2 \in \Gamma^*$ es el contenido de la cinta. La cabeza de lectura/escritura analiza en ese momento el primer símbolo de α_2. Dentro de la cadena $\alpha_1\alpha_2$ podemos encontrar el carácter b, pero el primer carácter de α_1 es el carácter diferente de b más a la izquierda de la cinta y el último carácter de α_2 es el carácter diferente de b más a la derecha de la cinta.

Teniendo en cuenta el concepto de D.I. los cambios de una MT pueden definirse de la siguiente forma:

Sea una MT cuya D.I. es $x_1 \dots x_{i-1} \mathbf{q} x_i \dots x_n$ *Si* $f(q, x_i) = (p, y, I)$ *entonces la nueva D.I. es* $x_1 \dots x_{i-2} \mathbf{p} x_{i-1} y x_{i+1} \dots x_n$

Podemos representar la transición de la forma:

$x_1 \dots x_{i-1} \mathbf{q} x_i \dots x_n \longrightarrow x_1 \dots x_{i-2} \mathbf{p} x_{i-1} y x_{i+1} \dots x_n$

Se suele utilizar el símbolo $\xrightarrow{*}$ para indicar que la MT ha pasado de una situación a otra en uno o más pasos.

Una representación más gráfica sería la siguiente:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & x_1 & \dots & x_{i-1} & x_i & \dots & x_n & \\ \hline \multicolumn{4}{c}{} & \uparrow q \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|}\hline & x_1 & \dots & x_{i-1} & y & x_{i+1} & \dots & x_n & \\ \hline \multicolumn{3}{c}{} & \uparrow p \end{array}$$

A pesar de su tremenda simplicidad, la MT es el modelo de cómputo más potente que se conoce, es decir, es el que puede resolver un mayor número de problemas. Además, se pueden llevar a cabo restricciones que simplifican la definición sin que por ello se pierda poder computacional. Por ejemplo, se puede restringir el alfabeto de entrada para que sea un alfabeto binario, se puede acotar la cinta en un sentido de manera que sólo sea infinita por uno de sus extremos o se puede obligar a la función de transición a que sólo ejecute una operación (leer, escribir, desplazar) en cada transición. Es fácil demostrar que en ninguno de estos casos se pierde poder computacional, como mucho puede aumentar el número de estados o el tamaño de la cinta ocupada (cuestión que no preocupa por ser ésta infinita).

También podemos extender la definición de la MT utilizando varias pistas, uniendo varias máquinas o permitiendo que sea no determinista. En una MT no determinista una situación puede tener asociadas varias transiciones diferentes, por ejemplo: $f(p, a) = \{(q, b, I), (r, c, D), (s, d, D), (t, a, I)\}$. Y de ninguna de estas formas podremos resolver un mayor número de problemas, como mucho, podremos ahorrar estados o celdas utilizadas.

Pero Turing llega más lejos diseñando una Máquina Universal que partiendo de una cinta de entrada que contiene la información apropiada puede simular el comportamiento de cualquier otra MT. De la misma forma que se puede establecer un paralelismo entre MT y algoritmo (resuelven un problema concreto), también se puede asociar Máquina Universal y computador (resuelven cualquier problema *computable* siempre que estén correctamente programados).

A continuación, y con objeto de clarificar la definición de MT, se presentan algunos sencillos ejemplos. La situaciones no definidas en las funciones de transición son interpretadas como situaciones de error, tendrían lugar si el contenido inicial de la cinta no se ajusta a lo esperado.

Ejemplo 4.1 (Paridad). Esta MT calcula la paridad del número de 1's que hay en la cadena binaria de entrada. La máquina tiene dos estados finales, q_{f1}, q_{f2}, el primero indica que el número de 1's es par y el segundo indica que es impar. La máquina procesa la cadena de izquierda a derecha. La idea es muy sencilla, se utilizan dos estados q_0, q_1 de manera que se pasa de uno a otro cada vez que se detecta un 1, si al final del proceso el estado es el mismo con el que se comenzó q_0, el número de 1's es par, en caso contrario, es impar. Definición formal de la MT "Paridad".

$Q = \{q_0, q_1, q_2\} \quad F = \{q_{f1}, q_{f2}\} \quad \Sigma = \{0, 1\} \quad \Gamma = \{0, 1, b\}$

La función de transición se define en la siguiente tabla:

	0	**1**	**b**
q_0	$q_0 0D$	$q_1 1D$	$q_{f1} bI$
q_1	$q_1 0D$	$q_0 1D$	$q_{f2} bI$

Otra forma de indicar el resultado del proceso podría haber grabado un determinado símbolo en la cinta, por ejemplo, 'P'(par) o 'I'(impar).

Ejemplo 4.2 (Duplicar). Esta MT recibe una cadena formada por 1's en la cinta de entrada y duplica su tamaño. Si consideramos que una cadena de 1's representa un número entero (cinco 1's representan al número 5), esta máquina serviría para multiplicar por dos el número representado en la entrada. El proceso comienza en el extremo derecho de la cadena. Para llevar a cabo este trabajo, cada vez que encuentra un 1 lo *marca* sustituyéndolo por un 0 y se desplaza hasta el final de la cadena donde añade otro 0 (que representa a un 1 *marcado*). Al final del proceso, en el estado q_2 se cambian todos los 0's por 1's para reconstruir la información.

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$ $\quad F = \{q_3\}$ $\quad \Sigma = \{1\}$ $\quad \Gamma = \{0, 1, b\}$

La función de transición se define en la siguiente tabla:

	1	**0**	**b**
q_0	$q_1 0D$	$q_0 0I$	$q_2 bD$
q_1	$q_1 1D$	$q_1 0D$	$q_0 0I$
q_2		$q_2 1D$	$q_3 bI$

Ejemplo 4.3 (Paréntesis anidados). Esta MT reconoce cadenas de paréntesis anidados. El problema que aquí se resuelve puede servir para modelar el trabajo llevado a cabo por un traductor de lenguajes de programación que debe controlar si los bloques de instrucciones están correctamente anidados.

Las parejas de paréntesis que se van procesado se *marcan* convirtiéndose en *. En este caso se dispone de dos estado finales f_1 y f_2 que indican respectivamente si la cadena inicial es o no correcta, además, a pesar de ser algo redundante se escribe en la cinta la letra 'S' o 'N' (**si** o **no**). Al final del proceso la información inicial de la cinta se pierde ya que sólo queda una cadena de asteriscos, si quisiéramos conservar los datos de entrada podríamos utilizar dos símbolos diferentes de marcado, por ejemplo, 'a' y 'b' para poder reconstruir, al final, la cadena de entrada. Esta máquina puede reconocer cadenas como éstas: $((()))$ o $(()())$ pero no reconocería $(()))($. Definición:

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, f_1, f_2\}$ $\quad F = \{q_{f1}, q_{f2}\}$ $\quad \Sigma = \{(,)\}$ $\quad \Gamma = \{(,), *, S, N, b$

La función de transición se define en la siguiente tabla:

	(	)	*	b	
q_0	$q_0(D$	$q_1 * I$	$q_0 * D$	q_2bI	marca un) y pasa a q_1
q_1	$q_0 * D$		$q_1 * I$	$q_{f2}ND$	marca un (y pasa a q_0
q_2	$q_3 * I$		$q_2 * I$	$q_{f1}SD$	al final, comprueba que no quedan (
q_3	$q_3 * I$		$q_3 * I$	$q_{f2}ND$	se llega a q_3 si hay más (que)

Conclusiones

En este artículo se ha revisado brevemente la interesante vida de Alan Turing. A pesar de que sus trabajos sobre criptografía durante la segunda guerra mundial y su participación en la construcción de algunos de los primeros ordenadores en la última etapa de su vida han tenido una gran trascendencia, hemos decidido centrar este trabajo en la famosa Máquina de Turing. La máquina se ha presentado formalmente haciendo hincapié en los motivos que llevaron a Turing a plantear este dispositivo teórico.

La MT es un autómata, es decir, un dispositivo teórico que permite describir el comportamiento de un proceso en base a tareas muy sencillas. En general, los autómatas pueden ser utilizados para modelar formalmente el comportamiento de un sistema o la resolución de determinados problemas. De los diferentes autómatas conocidos, la MT se caracteriza por tener la más alta capacidad computacional. Este hecho, unido a su simplicidad, la convierte en una herramienta extraordinaria para el estudio de la computabilidad (que establecer si un problema es o no computable) y de la complejidad algorítmica (que establece la *calidad* de un algoritmo). De esta forma, la MT constituye los cimientos en los que se apoya la computación formal.

La autora desearía haber justificado a lo largo del texto que el Dr. Turing merece el calificativo de genio.

Referencias

[1] D. Leavitt (2006), *El hombre que sabía demasiado. Alan Turing y la invención de la computadora*. Antoni Boch Ed.

[2] A. Hodges (2000), *Alan Turing: The Enigma*. Walker.

[3] R. Lahoz-Beltrá (2005), *Turing. Del primer ordenador a la inteligencia artificial*. NIVOLA libros y ediciones, S.L.

[4] P. Strathern (1999),*Turing y el ordenador*. Siglo veintiuno de España editores.

[5] Página web mantenida por Andrew Hodges, *http://www.turing.org.uk*

Sobre la generación y resolución automática de ejercicios con medios tecnológicos y la educación matemática - II

Angélica Martínez Zarzuelo[a]
Eugenio Roanes Lozano[b]

[a] Dpto. de Evaluación y Análisis de Datos
Instituto Nacional de Evaluación Educativa
Ministerio de Educación, Cultura y Deporte
angelica.martinez@mecd.es

[b] Dpto. de Álgebra, Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
eroanes@mat.ucm.es

Abstract

This article completes a previous survey (published in this same bulletin) focused on the automatic generation and resolution of exercises. From the same point of view, some of the possibilities of Maple, one of the "big CAS", are detailed and analyzed here. This second article focuses on the so called "Maplets" (introduced in Maple 8) and give some hints on Maple 16's "Smart Popups" and "Drag to Solve".

1 Introducción

La generación y resolución automática de ejercicios, es factible hoy en día gracias a las posibilidades que ofrecen los medios tecnológicos, como se detalla en el artículo panorámico [1]. El disponer de una cantidad inmensa[1] de enunciados de ejercicios y sus respectivas soluciones, supone una ventaja en el ámbito educativo en general, y en la educación matemática en particular.

El desarrollo de una opción didáctica con estas características, puede llevarse a cabo con diferentes sistemas de cálculo simbólico. Se comentan en el presente artículo las posibilidades que en este sentido ofrece el programa de cálculo simbólico Maple, analizándose en detalle las de los llamados Maplets.

2 Una opción didáctica con Maple

En [1] se expuso cómo, mediante el programa Maple [2-7], se puede crear un código que ofrezca la posibilidad de disponer de una cantidad inmensa de enunciados y soluciones de ejercicios empleando una metodología interactiva.

Allí se detalla como ejemplo la discusión de sistemas de ecuaciones lineales haciendo uso del Teorema de Rouché-Fröbenius. El usuario final de la herramienta se beneficia de una singular interacción con el programa Maple. Éste puede decidir, tanto el origen de los datos de los enunciados de los ejercicios, como el tipo de solución de los mismos.

Esto es, en cuanto a los datos de los enunciados de los ejercicios, dispone de dos opciones; que sea el propio usuario quien introduzca los datos deseados o que sea el propio sistema quien los genere, esto es, que sean aleatorios. En cuanto al tipo de resolución, posee de nuevo dos alternativas; una resolución directa, únicamente mostrando el resultado final, o una resolución desglosada con los diferentes pasos a seguir para la resolución del ejercicio.

Con ello, se consiguen cuatro posibles combinaciones didácticas, disponibles según el requerimiento del usuario.

Se elige la discusión de sistemas de ecuaciones lineales, únicamente a modo de ejemplo, siendo claro que un desarrollo similar podría lograrse para una temática muy variada.

2.1 Ventajas de la opción didáctica

Disponer de un material didáctico con las características descritas proporciona a sus usuarios la oportunidad de utilizarlo entre otros, con los siguientes fines:

---

[1] Como se hizo en [1], no se utilizará aquí la palabra “infinito”, pues, desde un punto de vista formal, el conjunto de las posibles combinaciones de la memoria del ordenador es inmenso pero finito.

- como material de apoyo,
- como “comprobador” de soluciones,
- como generador aleatorio de ejercicios, y
- como identificador de patrones.

Por lo tanto, este material:

- sirve como ayuda para la comprensión de conceptos,
- permite la revisión y la práctica de ejercicios de manera autónoma,
- posibilita la obtención de soluciones de manera rápida, y
- requiere del contacto directo con los comandos de Maple (dependiendo de la finalidad, pueden practicarse dos competencias de forma simultánea: la competencia matemática, y el tratamiento de la información y competencia digital).

Las anteriores son sin duda ventajas para usuarios tales como alumnos, aunque también lo son para los docentes, ya que, aunque éstos no sean los usuarios directos del material, son parte indispensable del proceso de enseñanza-aprendizaje. El docente, además, disfruta de la ventaja de que este material evita parte de la búsqueda de ejercicios apropiados, además de proporcionarle automáticamente las soluciones de los ejercicios.

3 Los Maplets: un ejemplo de herramientas que no necesitan ser programadas al modo tradicional

Aunque mediante la programación de procedimientos en Maple pueden crearse aplicaciones muy amigables para el usuario final, existen interesantes alternativas. En el caso de que no se quiera que el usuario tenga ningún tipo de contacto con el código Maple, o de que éste no tenga la experiencia o el deseo de interactuar directamente con comandos de Maple, existe la posibilidad del uso de interfaces gráficas, pues Maple dispone de una serie de aplicaciones integradas que permiten resolver cuestiones de este tipo.

Algunos de estos recursos que ofrece Maple, que no necesitan ser programados al modo tradicional, son los llamados asistentes y tutoriales. Nos centraremos en un asistente, el “Maplet Builder”, y en algunos de sus tutoriales. La lista completa de ambos puede encontrarse en el menú “Herramientas de Maple”.

3.1 ¿Qué son los Maplets?

Los Maplets[2] son interfaces gráficas de usuario, basados en el lenguaje de programación Java. Su nombre proviene de la abreviación y concatenación de las palabras “Maple” y “applet”, pues Maple es el software matemático en que se basan, y un applet [8] es un componente de una aplicación que se ejecuta en el contexto de otro programa.

Una de las características más sugerente de los Maplets, es que el usuario final de los mismos, utiliza la interfaz sin necesidad de conocer el funcionamiento interno de Maple.

3.2 El paquete Maplets

Maple dispone del llamado paquete “Maplets”, el cual contiene los comandos necesarios para diseñar aplicaciones Maplet. En concreto, el subpaquete “Maplets[Elements]” incluye los diferentes tipos de elementos disponibles para la implementación de la interfaz, tales como elementos del cuerpo de ventana, de diseño, de barras de menús, de barras de herramientas, de comandos y de diálogo.

3.3 Creación de Maplets

Existen básicamente dos formas de crear un Maplet.

La primera de ellas, apropiada para el diseño de Maplets complejos, es programando los mismos usando el paquete “Maplets”.

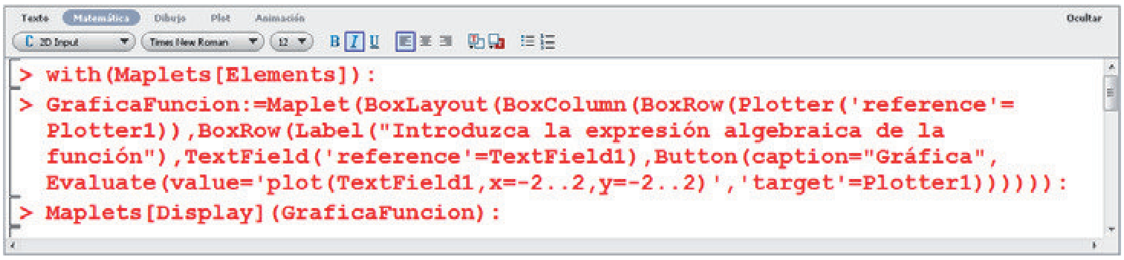


Figura 1: *Código Maple para generación de un Maplet.*

[2] Disponibles a partir de la versión 8 de Maple.

En la Figura 1 puede verse, a modo de ejemplo, parte del código de un Maplet que realiza la representación gráfica de la función que el usuario introduce mediante su expresión algebraica.

La segunda forma de crear un Maplet, pensada para crear Maplets simples, consiste en la utilización de uno de los asistentes que ofrece Maple, el "Maplet Builder" (al que se accede vía: Herramientas/Asistentes/Maplet Builder). Esta aplicación, disponible sólo en la "Standard Interface" de Maple (no en la versión "Maple Classic Worksheet"), está basada en una interfaz gráfica de usuario del paquete "Maplets". La interfaz permite crear de una manera sencilla y visual un Maplet. A través de ella se eligen los diferentes elementos, se establecen sus propiedades y se asignan las acciones asociadas a los mismos.

El asistente "Maplet Builder", se encuentra dividido en cuatro partes [9]:

- Palette: contiene los elementos de los Maplets que se pueden añadir, organizados por categorías,
- Layout: distribución de los elementos visuales que se añaden al Maplet que se está creando,
- Command: se disponen los comandos y las acciones correspondientes definidas en el Maplet,
- Properties: posibles propiedades de los elementos definidos en el Maplet.

La Figura 2 muestra una imagen del asistente "Maplet Builder", en el que se han dispuesto los elementos y asociado las acciones necesarias para el diseño de un Maplet que ofrezca el mismo resultado que la ejecución del código de la Figura 1.

El Maplet generado a partir de las dos formas detalladas anteriormente es exactamente el mismo. El resultado puede verse en la Figura 3.

3.4 Maplets listos para usar

En las formas expuestas anteriormente se pueden diseñar una gran variedad de Maplets de temáticas diferentes. No obstante, Maple posee algunos Maplets ya implementados y listos para usar.

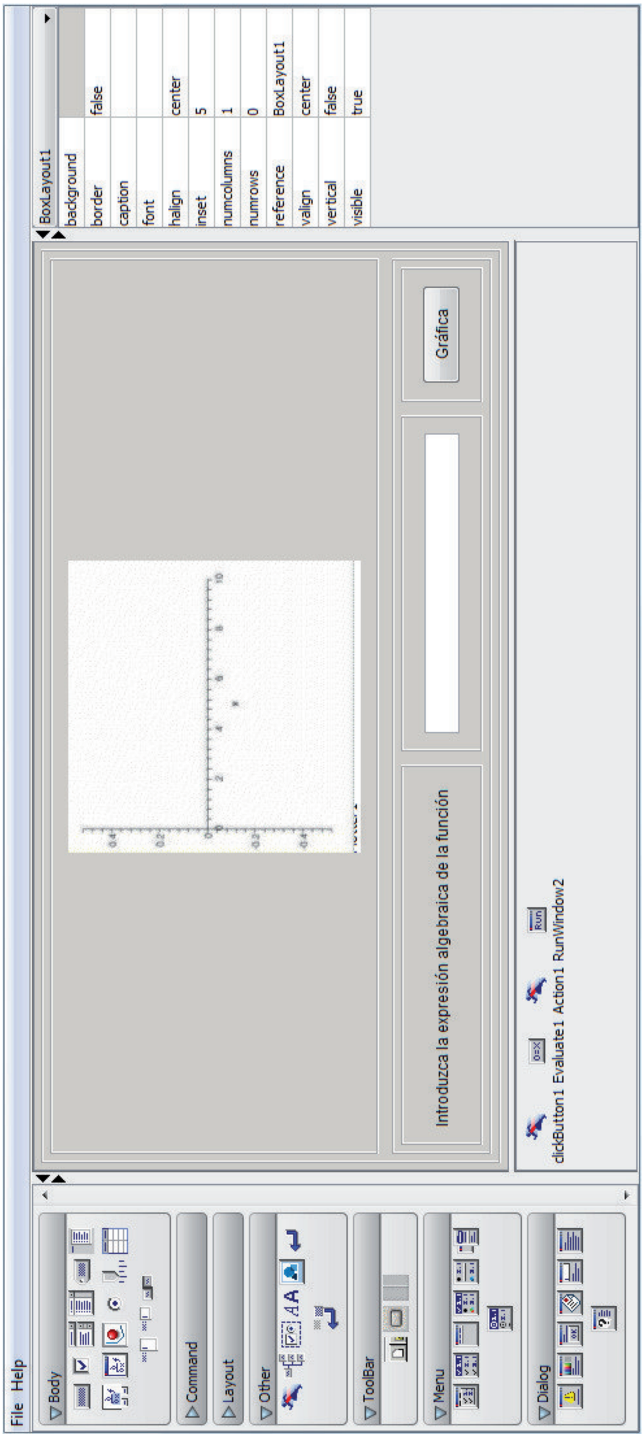


Figura 2: *Vista del asistente “Maplet Builder”.*

Algunos de ellos, bajo el nombre de tutoriales, tratan la resolución de cuestiones sobre distintos temas tales como, cálculo, cálculo vectorial, álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, análisis numérico y variable compleja, entre otros.

Los aproximadamente cuarenta tutoriales interactivos que ofrece Maple, son de una gran heterogeneidad, no sólo en cuanto al contenido que atienden, sino también en lo referente a la metodología en que se basan.

Si se relaciona con la opción didáctica de los autores desarrollada en [1], se oberva que:

- en lo referente a los enunciados, en algunos de los tutoriales es el usuario quien debe introducir los datos, mientras que en otros existe, tanto la posibilidad de que el usuario los edite, como de que sea el sistema quien los genere aleatoriamente,
- en lo referente a las soluciones, la mayoría de ellos ofrece una resolución directa, en ocasiones acompañada de animaciones, siendo reducido el número de tutoriales que ofrecen una resolución paso a paso.

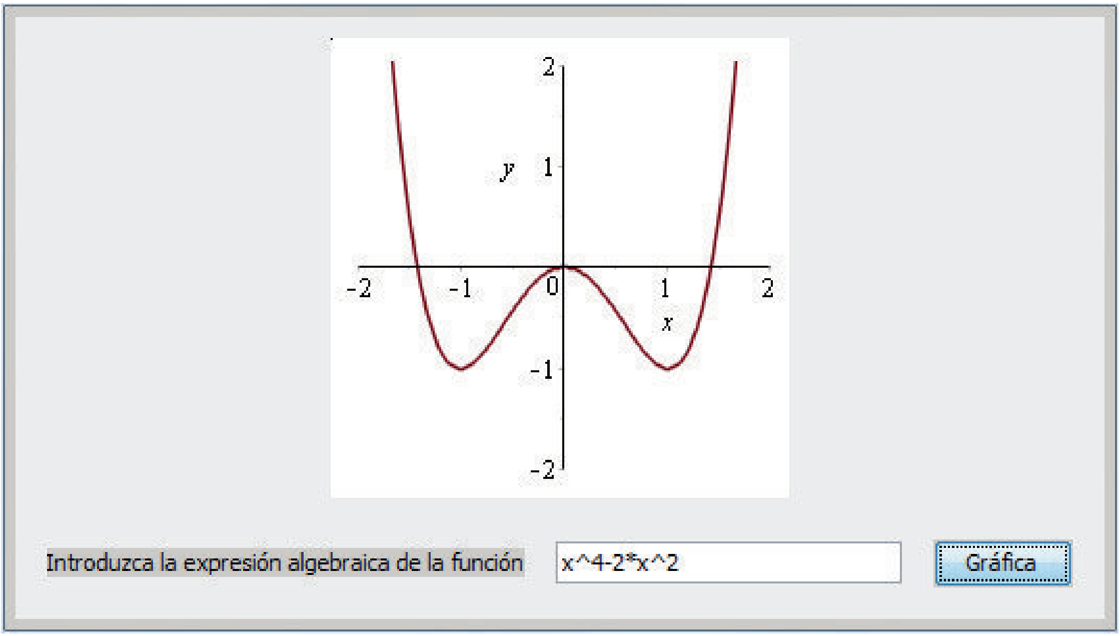


Figura 3: *Aspecto del Maplet desarrollado.*

En las Figuras 4-6 se muestran Maplets que tratan tres temas fundamentales del análisis: límites, derivadas e integrales.

Respecto a la introducción de datos, los tres carecen de aleatoriedad, ya que el sistema proporciona un único dato a modo de ejemplo. Es por tanto el usuario quien debe introducir los datos de la cuestión a resolver.

La introducción de los mismos se realiza en la parte superior de los Maplets. En el Maplet "Métodos de Límite" (Figura 4), debe indicarse la expresión algebraica de la función, la variable independiente, el valor y opcionalmente la dirección en la que tomar el límite.

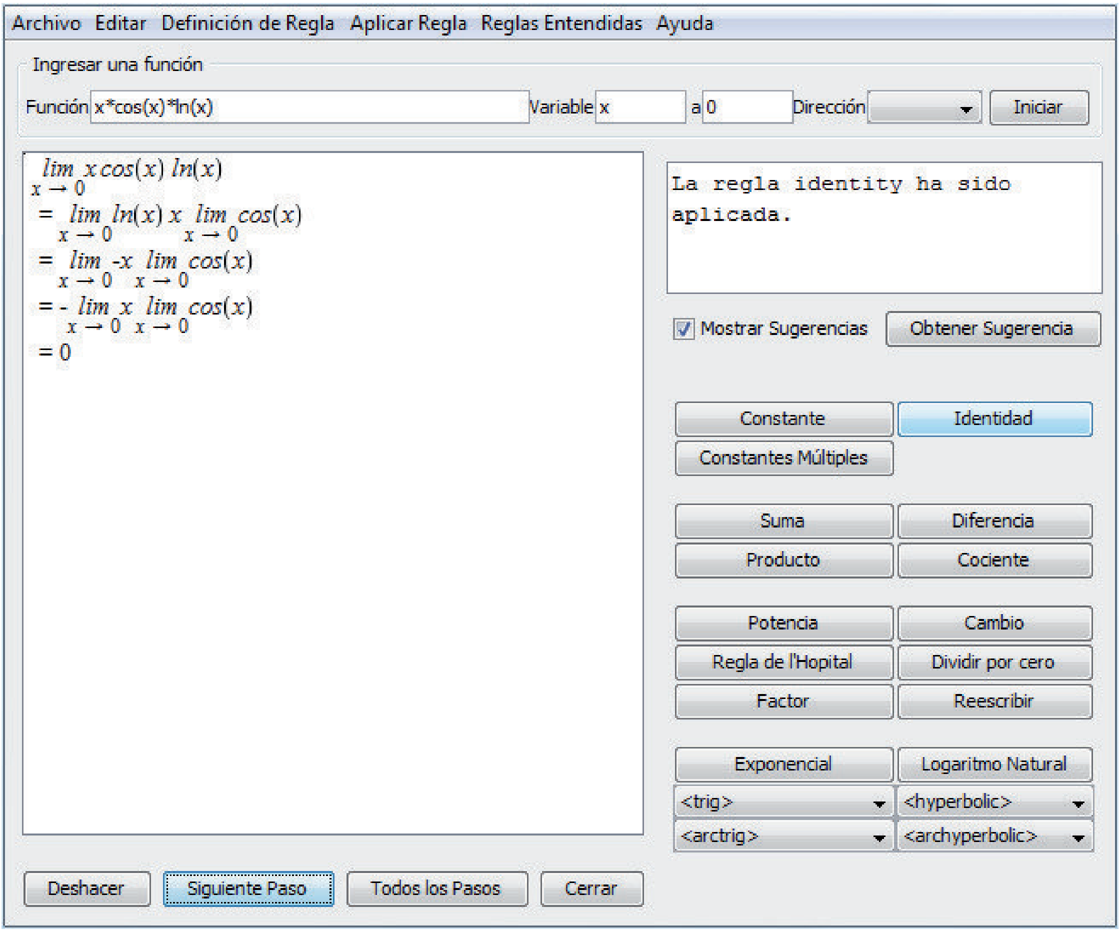


Figura 4: *Maplet que ilustra el cálculo de límites (accesible vía Herramientas/Tutoriales/Cálculo en una variable/Métodos de Límite).*

En el de “Métodos de Diferenciación” (Figura 5), la expresión algebraica de la función y la variable independiente.

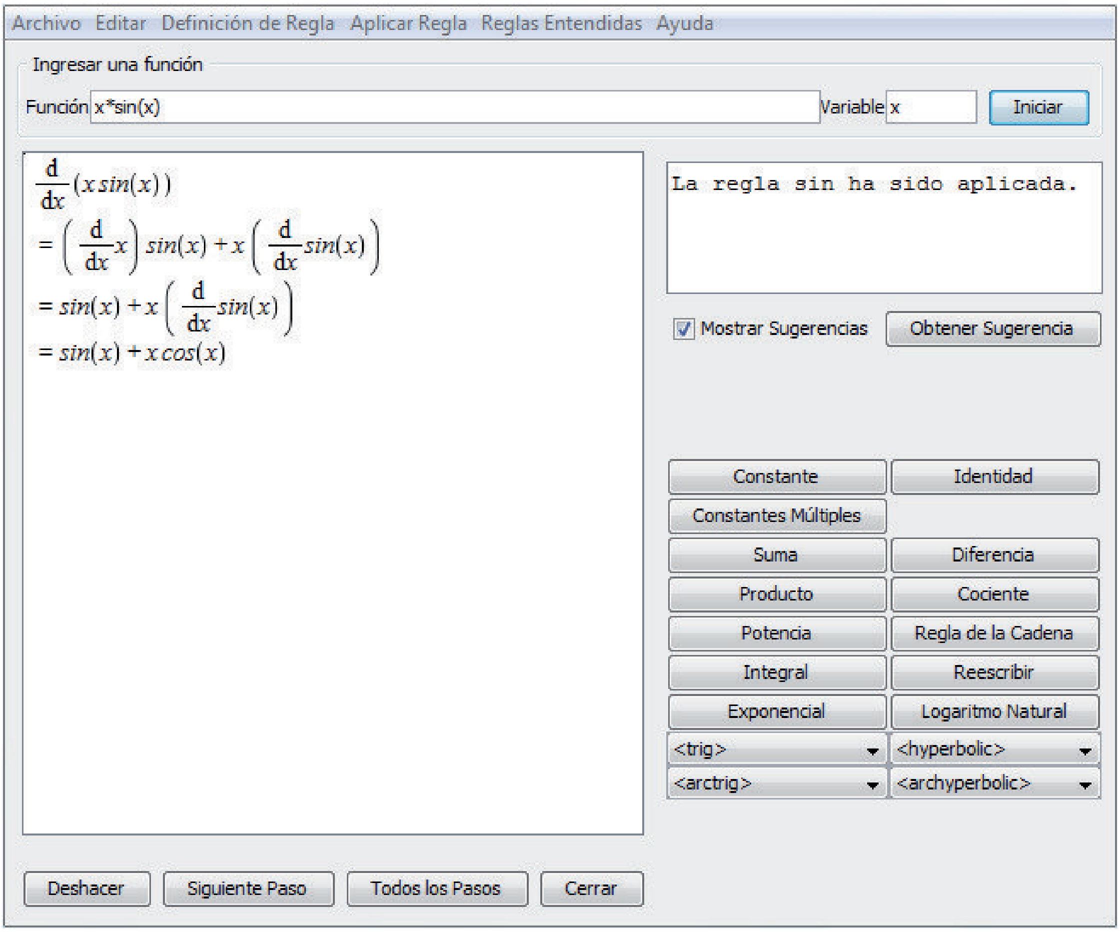


Figura 5: *Maplet que ilustra el proceso de diferenciación (accesible vía: Herramientas/Tutoriales/Cálculo en una variable/Métodos de Diferenciación).*

Y en el Maplet “Métodos de Integración” (Figura 6), la expresión algebraica de la función a integrar, la variable independiente y opcionalmente, el límite inferior y superior para una integral definida.

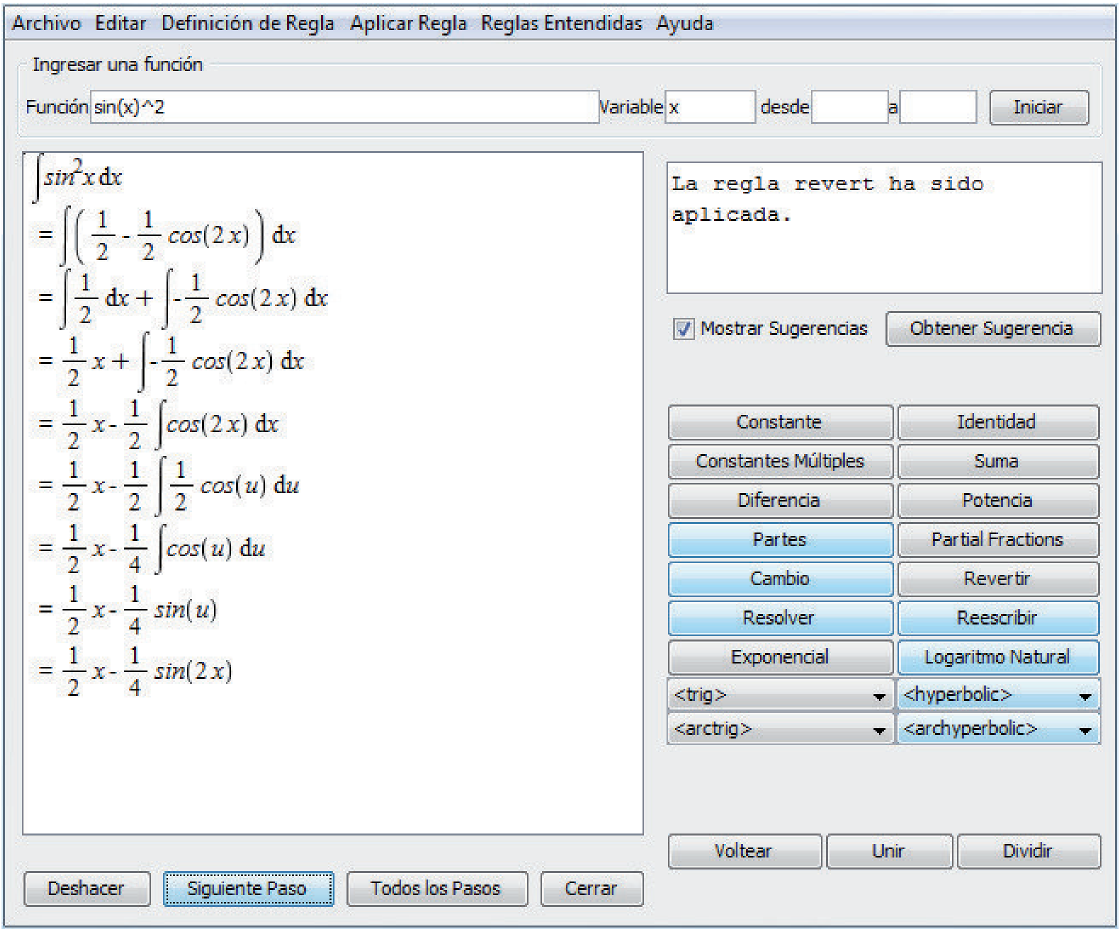


Figura 6: *Maplet que ilustra el proceso de integración (accesible vía Herramientas/Tutoriales/Cálculo en una variable/Métodos de Integración).*

Respecto a la solución de la cuestión matemática, sí ofrecen un desarrollo de su resolución paso a paso. Este desarrollo puede realizarlo el sistema, o bien puede ser el propio usuario quien decida, de entre una lista de posibles reglas de límites, de diferenciación y de integración respectivamente, cual es la siguiente a aplicar. Las definiciones de estas reglas pueden consultarse además en el menú “Definición de Regla” de cada uno de los tres Maplets.

Existen tres posibles puntos de vista en lo referente a quien lleve a cabo la resolución de la cuestión:

- únicamente el sistema: mediante el uso exclusivo de los botones “Todos los pasos” y “Siguiente paso”. El uso del botón “Todos los pasos”, produce la resolución completa mostrando cada uno de los pasos seguidos. El botón “Siguiente paso”, añade al anterior el siguiente paso de la resolución, además de indicar la regla que ha sido aplicada en ese paso en concreto,
- únicamente el usuario: en este caso no se debe hacer uso de los botones “Todos los pasos” y “Siguiente paso”. Aunque el usuario sólo debe elegir la regla a aplicar en cada paso, el sistema le propociona información determinante. Si la regla elegida puede ser aplicada, se muestra el resultado y se indica que tal regla ha sido aplicada. En caso de seleccionar una regla que no pueda ser aplicada, se indica que ésta no ha podido aplicarse. Además, en este último caso, existe la opción de que el usuario solicite al sistema una sugerencia para que le guíe en la toma de decisión de la siguiente regla a aplicar. Esto se consigue mediante la activación de “Mostrar Sugerencias”.
- el sistema y el usuario de forma combinada: existe la opción de llevar a cabo una resolución mediante una combinación de los dos casos anteriores.

Otros Maplets destacables son los que ilustran el proceso del cálculo de la inversa de una matriz a través de transformaciones elementales de filas, o la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante la eliminación de Gauss-Jordan o la eliminación Gaussiana (Figura 7). Estos ofrecen, en cuanto a los enunciados, tanto la posibilidad de que los edite el usuario, como de que sea el sistema quien los genere aleatoriamente.

En lo referente a la solución, al igual que en los casos anteriores, se ofrece un desarrollo de resolución paso a paso. De igual manera puede resolverlo únicamente el sistema, el usuario o bien una combinación de ambos. Todo ello mediante la selección de los parámetros pertinentes y el uso de los botones “Agregar”, “Multiplicar” e “Intercambio”.

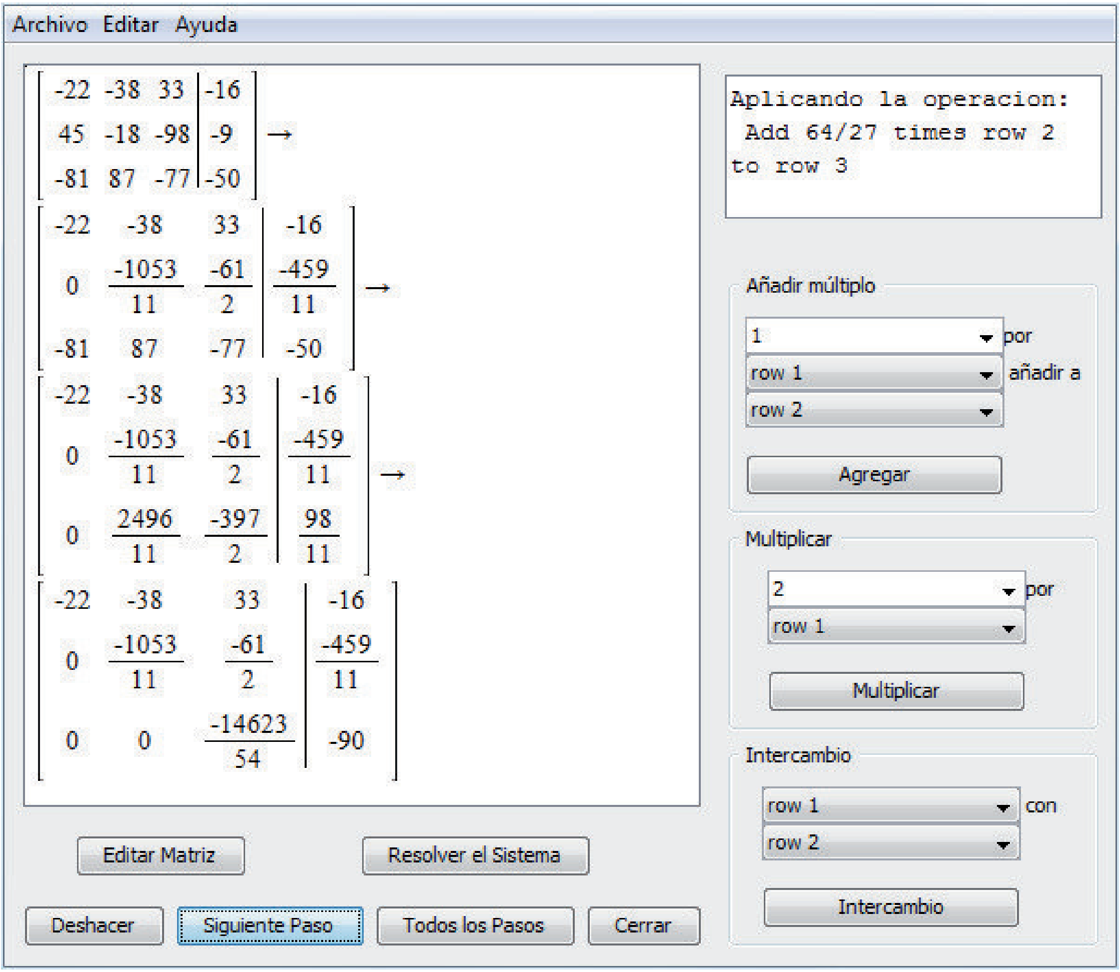


Figura 7: *Maplet que ilustra el proceso de eliminación Gaussiana (accesible vía Herramientas/Tutoriales/Álgebra Lineal/Eliminación de Gaussiana).*

En el caso del Maplet de "Eliminación Gaussiana" cuando la matriz está en forma de "fila escalón"[3] (Figura 8), el usuario puede utilizar el botón "Resolver el Sistema" para que el sistema muestre la resolución del mismo paso a paso. En este último proceso de resolución el usuario no tiene opción de participación.

---

[3] Nomenclatura claramente entendible utilizada por Maple.

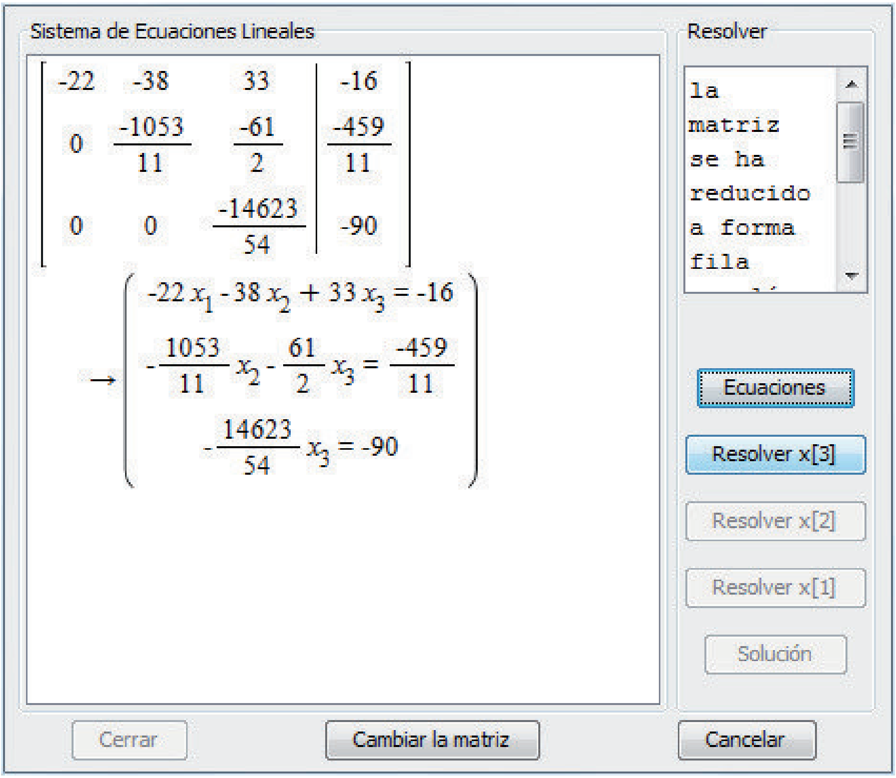


Figura 8: *Maplet que ilustra la resolución de un sistema de ecuaciones (accesible vía Herramientas/Tutoriales/Álgebra Lineal/Eliminación de Gaussiana, cuando la matriz está en forma de "fila escalón").*

En los Maplets mencionados, en lo referente a la resolución de sus respectivas cuestiones, son destacables los siguientes aspectos:

- la realización de cálculos únicamente por parte del sistema. Este aspecto, además de evitar al usuario errores de cálculo, le permite centrarse en mayor medida en el método de resolución más que en los propios cálculos,
- la seguridad que ofrecen al usuario de que cada una de las opciones por éste elegidas no sea incorrecta. Si bien es cierto que tampoco aseguran que tal opción sea la más apropiada,
- englobando a las dos anteriores, la posibilidad de combinar las acciones llevadas a cabo por el sistema y por el usuario.

Estos aspectos, sin duda positivos, son propios también de unas nuevas herramientas que ofrece Maple: “Drag to Solve” y “Smart Popups” [10].

4 Drag to Solve y Smart Popups

Estas opciones disponibles en la versión 16 de Maple, ofrecen, junto con los Maplets de los tipos mencionados, la posibilidad de resolver cuestiones matemáticas a través de una experimentación combinada con Maple.

“Drag to Solve” permite al usuario resolver ecuaciones simplemente seleccionando sus términos y arrastrándolos al lugar donde éste desee. Ofrece además, una vista previa del efecto que tendría el paso elegido mediante el arrastre indicado por el usuario.

“Smart Popups” (Figura 9), tras introducir la expresión matemática a resolver y seleccionar la parte de ella deseada, sugiere una serie de posibles opciones a llevar a cabo en esa parte. Tales sugerencias pueden emplearse también como una vista previa del resultado, antes de que el usuario se cerciore de la corrección del paso dado. Además, el usuario puede documentar el trabajo realizado ya que, a medida que va eligiendo los pasos a seguir, los resultados se devuelven al documento junto con una indicación de la opción que el usuario ha elegido en cada paso.

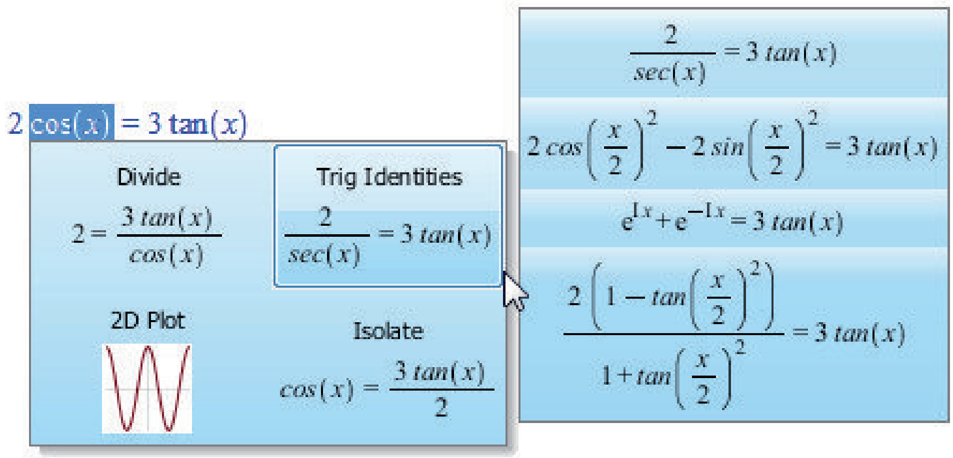


Figura 9: *Resolución de una ecuación utilizando Smart Popups.*

En ambos casos Maple se encarga de los cálculos y de asegurar la viabilidad de los pasos elegidos. Ahora bien, a diferencia de los Maplets mencionados, éstas nuevas herramientas no ofrecen la posibilidad de que el sistema aporte todos y cada uno de los pasos de la resolución de una cuestión. Esto es, con su utilización Maple ofrece posibilidades de resolución, pero no resuelve de manera autónoma. Se trata por tanto de herramientas en las que la participación combinada del sistema y el usuario es obligada[4].

5 Conclusiones

La opción didáctica de combinar los principios de aleatoriedad de enunciados y resolución paso a paso de ejercicios, es sin duda una destacable metodología en el proceso de enseñanza-aprendizaje dentro del ámbito matemático. Si a estos dos principios se le añade la posibilidad de resolución combinada entre el usuario y el sistema, esto proporciona un carácter interesante de retroalimentación educativa a tal metodología.

La elección para ello del sistema de cálculo simbólico Maple, ofrece además la posibilidad de creación y diseño de interfaces gráficas de usuario que hacen mucho más amable el uso de dicho sistema.

La opción de poder desarrollar una aproximación de este tipo para una amplia temática podría suponer, en el caso de ponerse en práctica, una contribución a la educación matemática.

Como inconveniente para llevar una experiencia de este tipo al aula, Maple no es software libre[5], pero los sistemas gratuitos como Maxima, Reduce, Axiom,… no proporcionan todas las posibilidades de los grandes sistemas como Maple o Mathematica.

Bibliografía

[1] Martínez Zarzuelo, A., & Roanes Lozano, E. (2011). Sobre la generación y resolución automática de ejercicios con medios tecnológicos y la educación matemática. Boletín de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas (89) 53-80.

[4] Característica también del asistente “Equation Manipulator” de Maple.

[5] Se puede solicitar una versión de evaluación de Maple 16, activa durante 30 días, en http://www.maplesoft.com/contact/webforms/maple_evaluation.aspx (esta versión no está disponible para estudiantes).

[2] Corless, R. (2002): Essential Maple 7 An Introduction for Scientific Programmers. New York: Springer-Verlag.

[3] Garvan, F. (2001). *The Maple Book*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2001.

[4] Heck, A. (2003): Introduction to Maple. New York: Springer-Verlag.

[5] Maplesoft (2011). *Maple User Manual*. Waterloo, Canadá: Waterloo Maple Inc.

[6] Ochoa Álvarez, A., Esnaola Cano, I., Portu Repollés, E., Granados Mateo, E., & Bastero de Eleizalde, C. (2002). *Aprenda Maple 8 como si estuviera en primero.* San Sebastián: Escuela Superior de Ingenieros Industriales. Universidad de Navarra.

[7] Roanes Macías, E. & Roanes Lozano, E. (1999). *Cálculos Matemáticos con Maple V.5*. Madrid: Editorial Rubiños.

[8] URL: http://es.wikipedia.org/wiki/Applet

[9] URL: http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path= MapletBuilder

[10] URL: http://www.maplesoft.com/products/maple/new_features/clickable math.aspx

Reseña de libros

ΠOETAS. Primera antología de poesía con matemáticas. Selección y prólogo de Jesús Malia. Ediciones Amargord. Colección pi de poesía. Madrid, 2011, 240 págs. ISBN: 978-84-15398-02-8.

Matemáticas para los que gustan de la poesía o poesía para los que gustan de las matemáticas. ¿Poesía con matemáticas o matemáticas con poesía? "Tanto monta, monta tanto". Ya desde la antigüedad, filósofos y eruditos entendían la interdependencia de las dos disciplinas. Platón nos habla de la armonía de los números, hasta el punto de que en nuestro Siglo de Oro el adjetivo "numeroso" no tenía, como ahora, un significado de "abundante", sino de "armonioso".

Y eso es lo que vemos en esta antología de poetas: un numeroso ("armonioso") conjunto de poemas trazados por grandes escritores del momento; poemas unidos por el hilo conductor de las matemáticas que, en ocasiones, nos trasladan al pasado y nos hacen recordar momentos juveniles en los que estábamos ante un problema matemático dando vueltas y vueltas hasta encontrar (o no) la solución. Y también nos retrotraen a la poesía japonesa a través del *haiku*; o nos adentran en la vanguardia poética de principios del siglo XX, sirviéndose de *caligramas*, ese tipo de poesía visual creado por el francés Guillaume Apollinaire, y magistralmente practicado por autores como Vicente Huidobro, José Juan Tablada, Guillermo de Torre, Carlos Oquendo de Amat y una larga lista de escritores.

Los peruanos RODOLFO HINOSTROZA, perteneciente a la denominada "Generación del 60", que ha llegado a ser comparado con poetas de la talla de César Vallejo o Martín Adán y ENRIQUE VERÁSTEGUI, fundador del "Movimiento Hora Zero", son dos de los grandes exponentes de las letras en su país; el matemático y poeta venezolano DANIEL RUIZ y los españoles JOSÉ FLORENCIO MARTÍNEZ, poeta y crítico literario, que hace poco tiempo ha sacado a la luz su estudio *Biografía de Lope de Vega (1562-1635). Un friso literario del Siglo de Oro*, la hasta ahora más amplia biografía del dramaturgo; DAVID JOU, físico teórico; RAMÓN DACHS, AGUSTÍN FERNÁNDEZ MALLO, JAVIER MORENO, JULIO REIJA y JESÚS MALIA, responsable también del prólogo y la selección, forman la nómina de poetas de esta antología.

No se puede concluir sin mencionar especialmente el prólogo, en el que Jesús Malia nos deleita con un sabroso discurso en el que, magistralmente, conduce al lector a través de la historia de la poesía y las matemáticas desde el principio de los tiempos, demostrando la conexión que siempre ha existido entre las dos.

En definitiva, una antología que deleitará a sus lectores, sean o no matemáticos y hará que se adentren en un mundo de música, de estrellas, de armonía y de belleza.

Almudena Mejías Alonso
Facultad de Filología
Universidad Complutense de Madrid

Nuevo número de la revista científica "Todo Ciencia"

En el número 83 de nuestro Boletín anunciábamos la aparición del primer número del periódico científico "Todo Ciencia", que coordina nuestro consocio el profesor Miguel Ángel Queiruga y aborda distintos temas de actualidad científica y tecnológica, siendo sus alumnos quienes hacen de reporteros, redactores, etc.

Aunque se trata de una revista de divulgación de ciencias en general, el número 4 incluye un artículo que trata sobre un tema muy geométrico, los Diagramas de Voronoi, presentado de modo asequible a alumnos de ESO.

Los profesores interesados en dicha publicación pueden conseguirla gratuitamente a través de Miguel Angel Queiruga, cuyo correo electrónico es `queiruga@inicia.es`

XXV Congreso ENCIGA

Nuestros colegas de la Asociación dos Ensinantes de Ciencias de Galicia organizan su congreso a celebrar en Santiago de Compostela los días 22 al 24 de noviembre de 2012. Para mas información e inscripción, véase la página web: `www.enciga.org`

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm (exactamente como este archivo). El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` ,o bien en un disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pediráa los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91 y 92

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número

3025-0006-24-1400002948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia.*