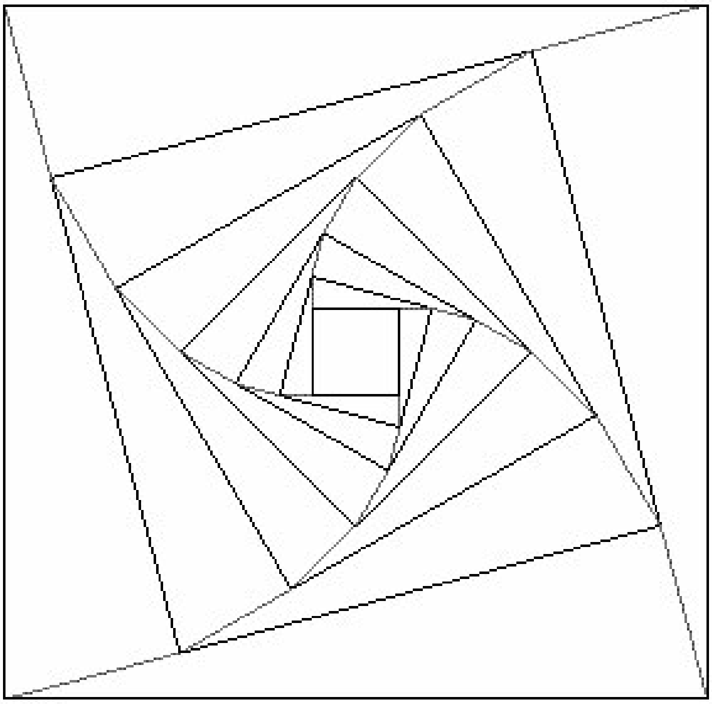
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 91
JUNIO DE 2012

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecían en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), que ha cambiado su nombre, ahora "MathEduc"

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3215
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Página web de la Sociedad "Puig Adam":
`http://www.sociedadpuigadam.es`

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse
a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

JUNTA DIRECTIVA

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2012 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 14 de abril de 2012, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil doce.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea de 14 de mayo de 2011, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

El Presidente informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 88, 89 y 90 del Boletín.

También informa de los concursos *Puig Adam, Intercentros y Fase Local de la Olimpiada Matemática de la Real Sociedad Matemática Española*:

El *XXIX Concurso Puig Adam* se celebró el 11 de junio de 2011 con buena participación, 91 estudiantes. Los resultados se publicaron en el Boletín 89. Este año el XXX Concurso se celebrará el 9 de junio de 2012.

Al igual que otros años, el *XI Concurso Intercentros* se celebró el penúltimo sábado de noviembre en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Con una buena participación de estudiantes de nuestra Comunidad. En el Boletín nº 90 aparece una reseña de los resultados.

También informa que en el Boletín nº 90 aparece la Reseña de la Fase Local de la *XLVIII Olimpiada Matemática de la RSME* en los distritos de Madrid, junto con los problemas propuestos, en la que colaboran miembros de nuestra Sociedad.

También se informa que el próximo sábado 21 de abril se celebrará el *XVI Concurso de Primavera* de Matemáticas de la Comunidad de Madrid en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Hay que destacar que algunos miembros del equipo organizador del Concurso son miembros de nuestra Sociedad.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Se someten a aprobación las cuentas desde el 14 de mayo de 2011 hasta el 14 de abril de 2012. Pasando a la votación quedan aprobadas por unanimidad.

A la vista de las cuentas aprobadas, de la modificación de las cuotas de la Federación, que afecta a las Instituciones, miembros de nuestra Sociedad, y al aumento del plazo que nos impone el Banco para poder hacer uso de las cuotas de nuestros abonados, se aprueba mantener la cuota de nuestros socios, ajustar lo que cada uno abona a la Federación a lo aprobado por ésta, y modificar la fecha de cobro, que a partir de 2013 pasará a ser en el mes de marzo

4. Elección de nuevos cargos directivos.

El Presidente manifiesta que procede el cese de los siguientes miembros de la Junta Directiva de la Sociedad, el secretario D José María Sordo Juanena y el bibliotecario D Antonio Hernando Esteban.

Se pasa a la nueva elección de los cargos, quedando esta de la siguiente manera.
Secretario: D José María Sordo Juanena
Bibliotecario: D Antonio Hernando Esteban

5. Asuntos de trámite: No hay

6. Ruegos y preguntas: No hay

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las trece y cinco minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente El Secretario

Aviso a nuestros socios sobre las cuotas de la Sociedad y de la Federación, y las fechas de cobro

Como se informa en la página anterior, que publica el borrador del acta de la Asamblea general de la Sociedad, celebrada el día 14 de abril, en dicha Asamblea se acordó mantener la cuota anual de la Sociedad, establecida en 30 euros. Por otra parte, se comunicó que la Federación de Sociedades ha modificado sus cuotas, pasando de 19 euros, a 21 para los socios individuales, y 32 los institucionales.

En consecuencia de esta elevación de la cuota de la Federación, el recibo de este año, que se pasará en el último trimestre, será de 51 euros para nuestros socios individuales, y de 62 para los institucionales.

Por otra parte, la Asamblea acordó que desde 2013 el recibo anual se pase en el mes de marzo, para adecuarlo al calendario de pagos. Esta nueva fecha de pago será por lo tanto efectiva a partir del recibo correspondiente al próximo año 2013.

Joaquín Arregui, Maestro y Amigo

Juan Tarrés Freixenet
Universidad Complutense de Madrid
tarres@mat.ucm.es

Hace ya muchos años, cuando yo era un estudiante de segundo curso de la Licenciatura de Matemáticas, conocí un joven profesor que todos los días llevaba a nuestras clases una bocanada de aire fresco a través de aquella asignatura de Álgebra y Topología, que ni siquiera formaba parte de las materias propias de la carrera; al año siguiente, esa asignatura pasó ya a formar parte del nuevo plan de estudios y pronto se convirtió en una materia emblemática en la Facultad. Quienes seguimos sus clases pudimos captar el entusiasmo y la convicción con que nos transmitía unos conocimientos novedosos en aquellos momentos. Aquel profesor era ya catedrático de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Montes; al poco tiempo ganó la cátedra de Álgebra y Topología en la Facultad de Ciencias de la Universidad Complutense de Madrid. Allí desarrolló su labor docente e investigadora hasta el final de su vida académica

Estoy hablando de Joaquín Arregui. Ha pasado el tiempo; el día 8 de febrero nos dejó, después de recorrer un largo camino, tanto académico como personal. Tenía 82 años De aquellos tiempos ya solamente queda el recuerdo. Se fue en silencio, como todas las cosas que hizo en su vida. Pensando siempre en los demás, con humildad. Con la convicción de que lo importante en la vida es el servicio a los otros y el trabajo bien hecho. Un trabajo que hacía siempre con discreción y dedicación, poniendo en él todo su entusiasmo. Entusiasmo que era capaz de contagiar a quienes lo conocimos y que ha quedado en nosotros como algo natural e imprescindible.

Joaquín Arregui fue uno de los que introdujeron la Topología en España. Fue a finales de los años 1950 y comienzos de los 60. Eran aquellos unos años de transición en los estudios de Matemáticas en la Universidad de Madrid. La Topología era ya una materia habitual en las universidades de muchos países, pero en la Complutense de Madrid no era sino una materia optativa del último curso que cursaban muy pocos estudiantes. Fue precisamente esa asignatura de Álgebra y

Topología la puerta a través de la cual conocimos, y nos entusiasmamos, con una nueva matemática que llegaba de manera inexorable. Él siguió impartiendo Topología hasta el final de su vida académica, dando a esta materia un sello muy personal. Dirigió varias tesis doctorales dentro de este campo y la mayoría de sus discípulos seguimos sus pasos y conseguimos llegar a ser profesores de estas nuevas materias.

La labor universitaria de Joaquín no se limitó a su trabajo en las aulas. Nunca rehuyó las responsabilidades que se le encomendaron y, además de otros cargos que tuvo que soportar de manera paciente, hay que destacar que estuvo muchos años al frente del Departamento de Geometría y Topología de la Facultad de Matemáticas. También en este cometido tuvo que afrontar tiempos de cambios. Había que integrar aquellas antiguas cátedras en la estructura más amplia del Departamento. En concreto, en el de Geometría y Topología confluyeron cuatro de aquellas cátedras. Joaquín llevó a cabo la tarea con tacto y eficacia consolidando el Departamento en un tiempo realmente breve.

Mis relaciones personales con Joaquín Arregui fueron siempre muy entrañables. Arregui ha sido para mí un verdadero maestro y un excelente amigo Nuestra amistad, fuerte y sincera, estuvo guiada siempre por el respeto y por este buen hacer propio de él. Siempre tuvo un buen consejo y la sonrisa a punto incluso en los momentos más difíciles.

Además, de la vida universitaria, otra de sus grandes pasiones fue la montaña. Nunca le pude acompañar en sus caminatas, aunque sí hicimos juntos largos paseos con cierta frecuencia. Pero fueron muchos los compañeros del Departamento y de la Facultad que compartieron con él tantas y tantas horas cruzando los más variados lugares de la sierra madrileña. Sé lo mucho que disfrutaba con esta actividad, lejos de la vida ajetreada de la ciudad, hablando con todos, contemplando la naturaleza, dejando que el pensamiento volara por todos aquellos parajes.

Joaquín, te has ido para siempre. Tu huella quedará en nosotros durante largo tiempo. Tus clases, claras, amenas, llenas de entusiasmo y rigor, pero por encima de todo guardaremos para nosotros el recuerdo de tu humanidad, tu discreción, tu silencio. Te recordaremos mucho y te echaremos de menos. Hace ya mucho que abandonaste la universidad, tu universidad, pero sabíamos que estabas ahí. Ahora, la separación se ha hecho definitiva. No obstante, permanecerás mucho tiempo en el recuerdo de mucha gente. Gracias, querido amigo; descansa en paz.

XVI Concurso de Primavera de Matemáticas

En nuestro decimosexto cumpleaños, seguramente que los lectores de esta revista ya saben que el Concurso de Primavera de Matemáticas es el evento matemático que más personas congrega en la Comunidad de Madrid (y seguramente en toda España).

En la primera fase de esta edición participaron 34550 estudiantes de 428 centros educativos de la Comunidad de Madrid. La segunda fase, celebrada en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid el sábado 21 de Abril, congregó a 3435 alumnos. Se dice pronto, más de 3000 adolescentes con sus padres-profesores-abuelos, llenando el edificio de la Facultad de ingenio, nervios, prisas, cómo-se-hacía-este-problema, y besos y felicitaciones a la salida, es un acontecimiento que no debe pasar inadvertido. Y todo por intentar resolver 25 problemas. "*Profe, las mates así molan*", le dijo una niña a su profesor.

Como siempre, os damos las gracias a todos los profesores que habéis sabido motivar a vuestros estudiantes, que les habéis acompañado y que les animáis a participar. Sin la implicación de vosotros, un concurso de este tipo estaría condenado al fracaso más absoluto.

Y, por supuesto, nuestro agradecimiento más profundo a todos los chicos y chicas que año tras año esperáis con ilusión otros veinticinco problemas. En representación de todos ellos os mostramos el listado de los tres primeros premiados de cada nivel.

PRIMER NIVEL (5º y 6º de Primaria)

1. Pablo Soto Martín. 5º de Primaria. CEIP Miguel de Cervantes

1. Miguel Miret Ortega. 6º de Primaria. Liceo Francés

3. Lucas Cuesta Araújo. 5º de Primaria. CEIP La Latina

SEGUNDO NIVEL (1º y 2º ESO)

1. Berta García González. 2º ESO. IES San Juan Bautista

2. Pablo del Olmo de Casas. 1º ESO. IES Las Canteras

2. Marcos Vázquez Verdejo. 1º ESO. Colegio Divina Pastora

3. Daniel Puignau Chacón. 2º ESO. IES Alameda de Osuna

TERCER NIVEL (3º y 4º ESO)

1. Miguel Barrero Santamaría. 3º ESO. IES Alameda de Osuna

2. Álvaro Robledo Vega. 3º ESO. Colegio Peñalar

3. Álvaro Rodríguez García. 4º ESO. Colegio Gredos San Diego–Vallecas

3. Ángel Prieto Naslin. 4º ESO. Liceo Francés de Madrid

CUARTO NIVEL (1º y 2º Bachillerato)

1. Jaime Mendizábal Roche. 2º Bachillerato. IES Ramiro de Maeztu

2. Pablo Esteban de la Iglesia. 1º Bachillerato. Colegio Fray Luis de León

3. Víctor García Herrero. 2º Bachillerato. IES Ortega y Gasset

Para terminar os mostramos tres problemas de esta edición.

Problema 1

El rey del castillo ha recibido la visita de príncipes y caballeros. Cada príncipe trajo de regalo tres cofres de oro y uno de plata; y cada caballero trajo un cofre de oro y dos de plata. Si en total el rey recibió 34 cofres de oro y 33 de plata, ¿cuántas personas visitaron al rey?

A) 14 **B)** 16 **C)** 18 **D)** 20 **E)** 22

Problema 2

Raúl completó el trayecto desde Principio a Final en tres horas. Su hermano Carlos empezó a la vez, pero como su velocidad era 5 km/h más lenta que la de Raúl, llegó a Final 20 minutos más tarde que su hermano. ¿Cuántos kilómetros separan Principio de Final?

A) 300 **B)** 250 **C)** 200 **D)** 150 **E)** 100

Problema 3

Don Retorcido ha pedido a cada uno de sus diez millones de alumnos que traigan un cubito de un milímetro de arista lleno de agua. Les hace vaciarlos en un gran cubo de un metro de arista. ¿A qué altura llega el agua en el gran cubo?

A) 1 mm **B)** 1 cm **C)** 1 dm **D)** 1 m **E)** El agua rebosa

Toda la información está a vuestra disposición en nuestra página web, en la que encontraréis las pruebas de este año y años anteriores:

`www.mat.ucm.es/~conprim/`

Esteban Serrano Marugán
Miembro del Comité Organizador del
Concurso de Primavera de Matemáticas

XLVIII Olimpíada Matemática Española
Fase Final

Del 22 al 25 de marzo de 2012, tuvo lugar la fase nacional de la XLVIII Olimpíada Matemática Española (OME), en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria en Santander.

La propuesta de que esta edición de la la Fase Nacional tuviese lugar en la Universidad de Cantabria fue hecha hace un año por el Prof. Fernando Etayo Gordejuela, tras asistir a la Fase Nacional de la Olimpiada Matemática celebrada en Pamplona el pasado año.

Los estudiantes que, reunidos en Santander, representaban a las distintas comunidades del Estado compitieron durante dos días ante seis problemas difíciles, en un ambiente absolutamente agradable, con una organización realmente excepcional y unos estudiantes ejemplares en su comportamiento.

Al margen de la actividad central de la Olimpíada, las sesiones de resolución de problemas, la Organización programó charlas impartidas por los profesores Francisco Santos y María José González, así como una la excursión al Parque de la Naturaleza de Cabárceno.

También se efectuó la entrega de premios de la Fase Local, y muy especialmente el tremendamente emotivo acto de entrega de premios de la Fase Final. He aquí el listado con los nombres de los 36 estudiantes que recibieron medalla (6 de oro, 12 de plata y 18 de bronce).

<u>Medalla de Oro</u>

Óscar Rivero Salgado (Galicia)
Eric Milesi Vidal (Cataluña)
Mario Ramón García (Andalucía)
Jaime Mendizábal Roche (Madrid)
Marc Felipe Alsina (Cataluña)
Luis Martínez Zoroa (Región de Murcia)

Medalla de Plata

Pau Surrell Rafart (Cataluña)
Esteban Gazmollata Marmolejo (País Vasco)
Federico Espósito Bacigalupo (Madrid)
Enrique Jiménez Izquierdo (Castilla y león)
Darío Nieuwenhuis Nivela (Cataluña)
David Pardo Simón (Comunidad Valenciana)
Antonio Hidalgo Torné (Andalucía)
Jordi Barceló Mercader (Cataluña)
Jon Asier Bárcena Petisco (País Vasco)
Xi Chen (Madrid)
Saturio Carbonell Urtubia(La Rioja)
Juan Manuel Losada Sosnovsky (Aragón)

Medalla de Bronce

Eudald Romo Grau(Cataluña)
Gonzalo Cao Labora (Galicia)
David Martínez Rubio (Castilla y León)
Luis Crespo Ruiz (Cantabria)
Iñigo Urtiaga Erneta (Navarra)
Raúl González Molina (Madrid)
Óscar Roldán Blay (Comunidad Valenciana)
Ramiro Martínez Pinilla (Castilla y León)
Miguel Ángel Rosique Linares (Región de Murcia)
Damià Torres Latorre (Comunidad Valenciana)
Marta Andrés Arroyo (Aragón)
Almudena Carrera Vázquez (Madrid)
Alfonso Martínez Cuadrado (Andalucía)
Aitor Azemar Carnicero (Cataluña)
Ana Calleja Moral (Navarra)
Javier Pliego García (Madrid)
Francisco Javier Martínez Aguinaga (La Rioja)
Sergio Pascual Díaz (País Vasco)

En la fotografía que aparece a continuación puede verse a los seis ganadores (los que obtuvieron medalla de oro), portando la medalla y el diploma que se les otorgó. Ellos serán los que representen a España en la edición del presente año de la Olimpíada Matemática Internacional.

De izquierda a derecha: Luis Martínez Zoroa, Jaime Mendizábal, Marc Felipe Alsina, Mario Román, Eric Milesi y Óscar Rivero.

Además, durante el Acto de entrega de premios, también se entregó la insignia de plata al ganador de este año, Óscar Rivero Salgado, por representar a España en la Olimpíada Internacional de Matemáticas durante tres años consecutivos.

Concesión de la insignia de oro de la OME

Por acuerdo de la Comisión de Olimpíadas la insignia de oro de la OME le fue concedida, por el decidido impulso que siempre ha prestado a la misma, al Prof. José Javier Etayo Miqueo, profesor de muchos de nuestros socios y que fue Presidente de nuestra Sociedad entre 1986 y 1990, y actualmente miembro de número de la Real Academia de Ciencias.

La concesión de la insignia la hizo pública la Presidenta de la Comisión de Olimpíadas, María Gaspar, miembro de la Junta Directiva de nuestra Sociedad. La insignia le fue impuesta a D. Javier Etayo por el Rector de la Universidad de Cantabria (véase foto a continuación) en el acto de entrega de Premios a los ganadores de la Fase Final de la OME, celebrada este año en dicha Universidad.

Problemas propuestos en la Fase Nacional de la XLVIII Olimpíada Matemática Española

Normativa

No estuvo permitido el uso de calculadoras.
Cada problema se puntuaba sobre siete puntos.
El tiempo de cada sesión fue de tres horas y media

Primera sesión, viernes 23 de marzo de 2012

Problema 1

Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ es irracional para todo entero no negativo n.

Problema 2

Hallar todas las funciones f : $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, de variable real con valores reales, tales que

$$(x-2)f(y) + f(y + 2f(x)) = f(x + yf(x))$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Problema 3

Sean x y n enteros tales que $1 \leq x < n$. Disponemos de $x+1$ cajas distintas y $n-x$ bolas idénticas. Llamamos $f(n,x)$ al número de maneras que hay de distribuir las $n-x$ bolas en las $x+1$ cajas. Sea p un número primo. Encontrar los enteros n mayores que 1 para los que se verifica que el número primo p es divisor de $f(n,x)$ para todo $x \in 1, 2, ..., n-1$.

Segunda sesión, sábado 24 de marzo de 2012

Problema 4

Hallar todos los números enteros positivos n y k tales que

$$(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$$

Problema 5

Una sucesión $(a_n)_{n\leq 1}$ se define mediante la recurrencia

$$a_1 = 1 \ , \ a_2 = 5 \ , \ a_n = \frac{a_{n-1}^2 + 4}{a_{n-2}}$$

para $n \geq 3$. Demostrar que todos los términos de la sucesión son números enteros y encontrar una fórmula explícita para a_n.

Problema 6

Sea ABC un triángulo acutángulo, ω su circunferencia inscrita de centro I, Ω su circunferencia circunscrita de centro O, y M el punto medio de la altura AH, donde H pertenece al lado BC. La circunferencia ω es tangente a este lado BC en el punto D. La recta MD corta a ω en un segundo punto P, y la perpendicular desde I a MD corta a BC en N. Las rectas NR y NS son tangentes a la circunferencia Ω en R y S respectivamente. Probar que los puntos R, P, D y S están en una misma circunferencia.

Nota

Las soluciones oficiales de estos problemas se pueden encontrar en la página web: `http://olimpiadamatematica.unican.es/`

La ecuación $x^m + y^n = z^p$

Ricardo Moreno Castillo
Catedrático de Bachillerato

Profesor del Dept. de Análisis Matemático UCM
moreno.castillo@terra.es

Abstract

This work presents a method to find solutions to the equation $x^m + y^n = z^p$ when n, p, q are different to each other.

1. La ecuación $x^4 + y^3 = z^2$

Comenzaremos por la ecuación diofántica $x^4 + y^3 = z^2$, cuyas soluciones enteras queremos encontrar. Si multiplicamos ambos miembros por λ^{12} (donde λ es un número entero), puede ser escrita del siguiente modo:

$$\left(x\lambda^3\right)^4 + \left(y\lambda^4\right)^3 = \left(z\lambda^6\right)^2$$

Entonces, si la terna de números (x, y, z) es una solución también lo es la terna $\left(x\lambda^3, y\lambda^4, z\lambda^6\right)$. De ambas soluciones diremos que son *dependientes*, y es claro que solo interesan las soluciones independientes. Para buscar estas soluciones, despejamos y^3:

$$y^3 = z^2 - x^4 = \left(z - x^2\right)\left(z + x^2\right)$$

Estudiamos la posibilidad:

$$z + x^2 = y^2$$
$$z - x^2 = y$$

Despejamos z y x^2**:**

$$z = \frac{y^2 + y}{2} \qquad x^2 = \frac{y^2 - y}{2}$$

Si en la segunda igualdad eliminamos denominadores y multiplicamos por 4, tenemos lo siguiente:

$$8x^2 = 4y^2 - 4y = (2y-1)^2 - 1 = t^2 - 1$$

Entonces cualquier solución de la ecuación de Pell $t^2 - 8x^2 = 1$ proporciona una solución de la ecuación $x^4 + y^3 = z^2$**.** De esta manera, podemos elaborar una tabla de soluciones, no exhaustiva, pero sí prolongable indefinidamente:

t	x	y	z
3	1	2	3
17	6	9	45
99	35	50	1275
577	204	289	41905
3363	1189	1682	1415403

Todas las soluciones obtenidas por este camino son independientes. En efecto, si dos soluciones (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) fueran dependientes sucedería lo siguiente:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^4 = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2$$

En consecuencia:

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^3 = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^2 = \left(\frac{y_1^2 + y_1}{y_2^2 + y_2}\right)^2 = \left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2 \left(\frac{y_1 + 1}{y_2 + 1}\right)^2$$

Comparando el primer término con el último, se deduce lo siguiente:

$$\left(\frac{y_1+1}{y_2+1}\right)^2=\left(\frac{y_1}{y_2}\right)$$

Y de aquí se desprende que

$$y_1^2y_2+2y_1y_2+y_2=y_2^2y_1+2y_2y_1+y_1$$

lo que lleva a su vez a que

$$y_1y_2(y_1-y_2)=y_1-y_2$$

con lo cual $y_1y_2=1$. Y esto es imposible porque estamos hablando de soluciones enteras.

Que el método no es exhaustivo lo demuestra la solución $x=9$, $y=27$ y $z=162$. En este caso sería $t=53$, que no forma parte de ninguna solución de la ecuación de Pell $t^2-8x^2=1$.

2. Otro procedimiento para encontrar soluciones

Partimos de la igualdad $u^4+(v^2-u^4)=v^2$, y la multiplicamos por $(v^2-u^4)^q$ (donde q es un número a determinar). Y resulta lo siguiente:

$$u^4(v^2-u^4)^q+(v^2-u^4)^{q+1}=v^2(v^2-u^4)^q$$

Para que corresponda con la ecuación $x^4+y^3=z^2$, necesitamos que q sea múltiplo de 4 y que $q+1$ lo sea de 3. Entonces $q=4r$ y $4r+1=3s$. En principio podría parecer que para cada solución de ésta última ecuación diofántica lineal, y para cada elección de u y v tenemos una solución de la ecuación $x^4+y^3=z^2$. Pero la solución general es $r=2+3h$, $q=8+12h$, con lo cual todas las soluciones proporcionadas por los distintos valores de r son dependientes. Entonces solo interesa el valor $p=8$, y las demás soluciones solo pueden proceder de los distintos valores u y v.

La expresión general de todas ellas es pues:

$$x=u(v^2-u^4)^2 \qquad y=(v^2-u^4)^3 \qquad z=v(v^2-u^4)^4$$

En la tabla que viene a continuación, hay algunas de las soluciones así obtenidas:

u	v	x	y	z
1	2	9	27	162
1	3	64	512	12288
2	5	162	729	32805
3	10	1083	6859	1303210

Sobre este camino para encontrar soluciones caben algunas consideraciones:

1ª) Las soluciones sí pueden ser dependientes. En efecto, sean dos soluciones (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) procedentes de los parámetros (u_1, v_1) y (u_2, v_2). Si son dependientes, ha de suceder lo siguiente:

$$\left(\frac{u_1\left(v_1^2-u_1^4\right)^2}{u_2\left(v_2^2-u_2^4\right)^2}\right)^4=\left(\frac{\left(v_1^2-u_1^4\right)^3}{\left(v_2^2-u_2^4\right)^3}\right)^3=\left(\frac{v_1\left(v_1^2-u_1^4\right)^4}{v_2\left(v_2^2-u_2^4\right)^4}\right)^2$$

Simplificando, llegamos a esta otra expresión proporción:

$$\frac{u_1^4}{u_2^4}=\frac{v_1^2-u_1^4}{v_2^2-u_2^4}=\frac{v_1^2}{v_2^2}=\beta$$

De aquí se deduce que $u_1^4=\beta u_2^4$ y que $v_1^2=\beta v_2^2$. Lógicamente, $\beta=\alpha^4$, y en consecuencia $u_1=\alpha u_2$ y $v_1=\alpha^2 v_2$. Estas son las condiciones que *no* deben cumplir el par de parámetros para no perder así el tiempo buscando soluciones que sean dependientes de otras ya encontradas.

2ª) A diferencia del primer método, el segundo sí que es exhaustivo. Cualquier solución de la ecuación es dependiente de otra obtenida mediante él. Sea, por ejemplo la solución (u, w, v). Entonces $u^4+w^3=v^2$. Multiplicamos todo por w^{24} y llegamos a que $\left(uw^6\right)^4+\left(w^9\right)^3=\left(vw^{12}\right)^2$. Entonces tenemos la nueva solución dependiente de la anterior (en la que $\lambda=w^2$):

$$x=uw^6=u\left(v^2-u^4\right)^2$$
$$y=w^9=\left(v^2-u^4\right)^3$$
$$z=vw^{12}=v\left(v^2-u^4\right)^4$$

3ª) Ninguna de las soluciones obtenidas según el primer método puede salir tal cual según el segundo (eso sí, aparece disfrazada de solución dependiente más complicada) Si una solución procede del primer método, ha de suceder que $2x^2 = y^2 - y$. Si además procede del segundo, esto nos lleva a lo siguiente:

$$2u^2\left(v^2 - u^4\right)^4 = \left(v^2 - u^4\right)^6 - \left(v^2 - u^4\right)^3$$

Unas cuentas muy simples dan lugar a que sea

$$\left(v^2 - u^4\right)\left[(v^2 - u^4)^2 - 2u^2\right] = 1$$

lo que es imposible.

3. Generalización del procedimiento anterior

El segundo de los caminos tiene la ventaja de que se puede utilizar con una ecuación general $x^m + y^n = z^p$, siempre que se dé una relación entre los exponentes que se verá enseguida.

Si (x, y, z) es una solución, entonces $\left(x\lambda^{M/m}, y\lambda^{M/n}, z\lambda^{M/p}\right)$ también lo es, donde M es el mínimo común múltiplo de los tres exponentes. También ahora llamaremos dependientes a esas soluciones.

Partimos de la igualdad $u^m + \left(v^p - u^m\right) = v^p$, y la multiplicamos por $\left(v^p - u^m\right)^q$ (donde q es un número a determinar). Y resulta lo siguiente:

$$u^m\left(v^p - u^m\right)^q + \left(v^p - u^m\right)^{q+1} = v^p\left(v^p - u^m\right)^q$$

Para obtener de aquí una solución ha de suceder que q sea múltiplo de m y p, esto es, $q = rl$ (donde l es el mínimo común múltiplo de m y p) y además $q + 1 = sn$. Esto lleva a la ecuación diofántica lineal $lr + 1 = ns$, que tendrá solución si n y l son primos entre sí. Obtenida una solución, la última igualdad puede ser escrita de este modo:

$$\left(u(v^p - u^m)^{q/m}\right)^m + \left((v^p - u^m)^s\right)^n = \left(v(v^p - u^m)^{q/p}\right)^p$$

Y con esto tenemos la solución general:

$$x = u\left(v^p - u^m\right)^{q/m} \qquad y = \left(v^p - u^m\right)^s \qquad z = v\left(v^p - u^m\right)^{q/p}.$$

Las soluciones que se desprenden de las otras soluciones de la ecuación lineal proporcionan soluciones dependientes de la ecuación no lineal (lo mismo que en el caso particular ya estudiado), de manera que si queremos nuevas soluciones de ésta última, habremos de buscar otros valores para u y v.

Ya vimos que n y l han de ser primos entre sí, lo cual quiere decir que, para poder aplicar este método (que a continuación se ilustrará con dos ejemplos), uno de los exponentes ha de ser primo con los otros dos.

Ejemplo I: $x^5 + y^7 = z^3$

El mínimo común múltiplo de 5 y 3 es $l = 15$, y la ecuación diofántica es $15r + 1 = 7s$, cuya solución más pequeña es $r = 6$ y $s = 13$. La solución general es:

$$x = u\left(v^3 - u^5\right)^{18} \qquad y = \left(v^3 - u^5\right)^{13} \qquad z = v\left(v^3 - u^5\right)^{30}$$

Si hacemos, por ejemplo, $u = 1$ y $v = 2$, tenemos la solución particular:

$$x = 7^{18} = 1628413597910449,$$

$$y = 7^{13} = 96889010407$$

$$z = 2 \times 7^{30} = 45078680581384516175726498.$$

Ejemplo II: $x^6 + y^3 = z^5$

Los dos primeros exponentes no son primos entre sí, pero el tercero sí lo es con cualquiera de los otros dos (cuyo mínimo común múltiplo es $l = 6$). Entonces, en lugar de partir de la igualdad $y^3 = v^5 - u^6$, partimos de esta otra: $z^5 = v^3 + u^6$. La ecuación diofántica es $6r + 1 = 5s$, y su solución más pequeña es $r = 4$ y $s = 5$. La solución general es:

$$x = u\left(u^6 + v^3\right)^4 \qquad y = v\left(u^6 + v^3\right)^8 \qquad z = \left(u^6 + v^3\right)^5$$

Si hacemos $u = 1$ y $v = 2$, tenemos la solución:

$$x = 9^4 = 6561$$

$$y = 2 \times 9^8 = 86093442$$

$$z = 9^5 = 59049$$

Un contraejemplo

La condición de que uno de los exponentes sea primo con los otros dos es indispensable para que se pueda usar el procedimiento que se acaba de exponer, pero no es condición necesaria para la existencia de soluciones. Por ejemplo, la ecuación $x^4 + y^6 = z^2$ no la cumple y tiene la solución *"* $x = 6$, $y = 3$, $z = 45$ *"*.

4. Una generalización más

El método explicado hasta aquí puede ser utilizado en casos de más de tres sumandos, como se puede ver a continuación.

Ejemplo $x^6 + y^3 = z^5 + t^4$

El tercer exponente es el único que es primo con el mínimo común múltiplo de los otros tres (que es $l = 12$). Partimos entonces de la igualdad

$$u^6 + v^3 = (u^6 + v^3 - w^4) + w^4$$

cuyos dos miembros multiplicamos por $(u^6 + v^3 - w^4)^q$, lo que nos lleva a esta otra:

$$u^6(u^6 + v^3 - w^4)^q + v^3(u^6 + v^3 - w^4)^q = (u^6 + v^3 - w^4)^{q+1} + w^4(u^6 + v^3 - w^4)^q$$

Necesitamos que q sea múltiplo de 12 y $q+1$ lo sea de 5. Planteamos entonces la ecuación $12r + 1 = 5s$, cuya solución más pequeña es $r = 2$ y $s = 5$. Entonces la solución general de nuestra ecuación es:

$$x = u(u^6 + v^3 - w^4)^4;\ y = v(u^6 + v^3 - w^4)^8;$$

$$z = (u^6 + v^3 - w^4)^5;\ t = w(u^6 + v^3 - w^4)^6$$

Para tener una solución particular, vamos a hacer $u = 1$, $v = 3$, $w = 2$:

$$x = 12^4 = 20736$$

$$y = 3 \times 12^8 = 1289945088$$

$$z = 12^5 = 248832$$

$$t = 2 \times 12^6 = 5971968$$

Agradecimientos

Quiero dejar constancia de mi agradecimiento a Juan Ramón Delgado Pérez, Mercedes Sánchez Benito y Juan Bosco Romero Márquez, quienes se tomaron la molestia de leer el borrador del presente artículo y me hicieron valiosas sugerencias.

Bibliografía

[1] Dickson, L. E. (1971), *History of the theory of numbers*, Chelsea Publishing company, New York.

[2] Ore, O. (1988), *Number Theory and Its History*. Dover Publications, Inc., New York.

Una demostración de la Regla de los Signos de Descartes

Arturo Rodríguez Rodríguez y Mª Belén Rodríguez Rodríguez*

* Departamento de Matemáticas, I.E.S. Salvador Dalí

arturomath@hotmail.com, maria.rodriguez13@educa.madrid.org

Resumen

We present a very elementary proof of Descartes' Rule of Signs for univariate polynomials with real coefficients all whose roots are real.

La Regla de Descartes

Probablemente la razón última de que la geometría algebraica sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos haya alcanzado un grado de refinamiento mayor que la denominada geometría algebraica real radica en dos hechos muy elementales. El primero de ellos, que todo polinomio en una variable tiene tantas raíces complejas como grado, (contadas con multiplicidad) lo que es falso en el caso real, y la segunda que, al tratar con polinomios con coeficientes reales, es determinante para muchos propósitos determinar cuántas de sus raíces son positivas y cuántas son negativas.

El resultado más preciso para conocer el número de raíces distintas que tiene un polinomio $\mathtt{p}(\mathtt{t}) \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ en un intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ es el Teorema de Sturm, que éste demostró en [7], y del que se puede encontrar una prueba muy detallada en [4], Prop. V.2.5. Sin embargo, su alta complejidad computacional y el hecho de que no sea sensible a la presencia de raíces múltiples hace que el Teorema de Sturm no sea en todos los casos la herramienta más aconsejable.

Esto trae a escena la regla de Descartes. Consideremos un polinomio no nulo

$$\mathtt{p}(\mathtt{t}) := a_0\mathtt{t}^n + a_1\mathtt{t}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathtt{t} + a_n \in \mathbb{R}[\mathtt{t}].$$

El *número de cambios de signo* de la sucesión $(a_0, \ldots, a_n)$ de sus coeficientes se calcula contando un cambio por cada $k = 0, \ldots, n-1$ tal que $a_k a_\ell < 0$ con $\ell = k+1$, ó $\ell > k+1$ y $a_i = 0$ para $k < i < \ell$. Denotamos este número de cambios de signo por $v(\mathtt{p}) := v(a_0, \ldots, a_n)$.

La regla de los signos de Descartes, en cualquiera de sus formulaciones, relaciona $v(\mathtt{p})$ con el número $n^+(\mathtt{p})$ de raíces reales positivas de $\mathtt{p}$, contadas con multiplicidad. El resultado aparece enunciado, por vez primera en el tercer libro de *La Géométrie*, [2]. Una lectura bienintencionada del texto de Descartes concluiría que se afirma que $n^+(\mathtt{p}) \leq v(\mathtt{p})$. Una traducción literal de parte de la página 389 de [2] viene a decir lo siguiente: "he omitido aquí la demostración de la mayoría de mis enunciados, pues me parecen tan fáciles que si se toma la molestia de examinarlas sistemáticamente, las demostraciones se presentarán ante usted y será de mucho mayor valor aprenderlas así, que leyéndolas ... ". Como confirmación de la veracidad de su aserto, Descartes observa en la página 373 que para el polinomio

$$\mathtt{p}(\mathtt{t}) := \mathtt{t}^4 - 4\mathtt{t}^3 - 19\mathtt{t}^2 + 106\mathtt{t} - 120 = (\mathtt{t}-2)(\mathtt{t}-3)(\mathtt{t}-4)(\mathtt{t}+5)$$

se tiene la igualdad $n^+(\mathtt{p}) = v(\mathtt{p}) = 3$.

Los historiadores están de acuerdo en atribuir a Gauss [6] la primera demostración correcta del resultado que hoy se conoce como Regla de los signos de Descartes: la diferencia $v(\mathtt{p}) - n^+(\mathtt{p})$ es un entero par no negativo. Volveremos sobre este enunciado en las Observaciones 2, pero pasamos ya a enunciar el resultado al que dedicamos esta nota.

Diremos que $\mathtt{p}(\mathtt{t}) \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ es un polinomio *cuyas raíces son todas reales* si existen números reales distintos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ y enteros positivos $m_1, \ldots, m_r$ tales que

$$\mathtt{p}(\mathtt{t}) := a_0 \prod_{i=1}^{r} (\mathtt{t} - \alpha_i)^{m_i},$$

y se denota $n^+(\mathtt{p}) := \sum_{\alpha_i > 0} m_i$ el número de raíces positivas de P *contadas con multiplicidad.* Se dice que m_i es la multiplicidad de α_i como raíz de $\mathtt{p}(\mathtt{t})$. Pasamos a enunciar y demostrar el resultado objeto de esta nota, y que trata sólo el caso de polinomios cuyas raíces son todas reales. Posteriormente señalaremos en las Observaciones 2 cómo incluso esta versión simplificada resulta de utilidad en contextos muy básicos.

Proposición 1 *Sea* $\mathtt{p}(\mathtt{t}) = a_0\mathtt{t}^n + a_1\mathtt{t}^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ *un polinomio de grado* n *cuyas raíces son todas reales. Entonces, el número* $n^+(\mathtt{p})$ *de raíces positivas de* $\mathtt{p}(\mathtt{t})$*, contadas con multiplicidad, coincide con el número de cambios de signo* $v(\mathtt{p}) = v(a_0, \ldots, a_n)$ *de la sucesión de los coeficientes del polinomio* $\mathtt{p}(\mathtt{t})$*.*

Demostración. Veamos en primer lugar que podemos suponer $a_n \neq 0$, es decir, que 0 no es raíz de $\mathtt{p}(\mathtt{t})$. Denotemos m la multiplicidad de 0 como raíz del polinomio $\mathtt{p}(\mathtt{t})$. Entonces $\mathtt{p}(\mathtt{t}) = \mathtt{t}^m\mathtt{g}(\mathtt{t})$ donde $\mathtt{g}(\mathtt{t}) \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ es un polinomio cuyas raíces son todas reales y $\mathtt{g}(0) \neq 0$. Como $n^+(\mathtt{p}) = n^+(\mathtt{g})$ y $v(\mathtt{p}) = v(\mathtt{g})$, si el resultado es cierto para $\mathtt{g}(\mathtt{t})$ también lo es para $\mathtt{p}(\mathtt{t})$. Suponemos pues a partir de ahora que $a_n \neq 0$ y afirmamos que basta probar la desigualdad

$$n^+(\mathtt{p}) \leq v(\mathtt{p}). \tag{1}$$

En efecto, para probar a partir de (1) la igualdad $n^+(\mathtt{p}) = v(\mathtt{p})$ consideramos el polinomio

$$\mathtt{q}(\mathtt{t}) := \mathtt{p}(-\mathtt{t}) = c_0\mathtt{t}^n + c_1\mathtt{t}^{n-1} + \cdots + c_n, \quad \text{donde } c_i := (-1)^{n-i}a_i.$$

También $\mathtt{q}(\mathtt{t})$ es un polinomio cuyas raíces son todas reales, y sus raíces positivas son las negativas de $\mathtt{p}(\mathtt{t})$, con igual multiplicidad. En consecuencia $n^+(\mathtt{q}) = n^-(\mathtt{p})$ es el número de raíces negativas de $\mathtt{p}(\mathtt{t})$ contadas con multiplicidad. Además, como 0 no es raíz de $\mathtt{p}(\mathtt{t})$, se cumple $n^+(\mathtt{p}) + n^-(\mathtt{p}) = n$. Aplicando a $\mathtt{p}(\mathtt{t})$ y $\mathtt{q}(\mathtt{t})$ la desigualdad (1) obtenemos

$$n^+(\mathtt{p}) \leq v(\mathtt{p}) \quad \text{y} \quad n^-(\mathtt{p}) = n^+(\mathtt{q}) \leq v(\mathtt{q}).$$

Para comparar $v(\mathtt{p})$ con $v(\mathtt{q})$ analizaremos los cambios de signo mediante las relaciones

$$c_ic_{i+1} = (-1)^{2(n-i)-1}a_ia_{i+1} = -a_ia_{i+1},$$

luego una pareja de coeficientes consecutivos de $\mathtt{p}(\mathtt{t})$ aporta un cambio de signo si y sólo si los correspondientes de $\mathtt{q}(\mathtt{t})$ no lo aportan. Si todos los coeficientes fueran no nulos deduciríamos $v(\mathtt{p}) + v(\mathtt{q}) = n$, pero como en general no es el caso, sólo podemos concluir $v(\mathtt{p}) + v(\mathtt{q}) \leq n$. Sin embargo esto es suficiente, pues junto con

$$n^+(\mathtt{p}) + n^-(\mathtt{p}) = n, \quad n^+(\mathtt{p}) \leq v(\mathtt{p}) \quad \text{y} \quad n^-(\mathtt{p}) \leq v(\mathtt{q}),$$

implica $n^+(\mathtt{p}) = v(\mathtt{p})$ (y también $n^-(\mathtt{p}) = v(\mathtt{q})$, aunque esto nos da igual).

Todo consiste, por tanto, en demostrar la desigualdad (1). Si $n^+(\mathtt{p}) = 0$ la desigualdad se cumple trivialmente, así que podemos suponer que $\mathtt{p}(\mathtt{t})$ tiene alguna raíz positiva u, y por tanto grado $n \geq 1$. Aplicando la regla de Ruffini obtenemos un polinomio

$$\mathtt{f}(\mathtt{t}) := b_0\mathtt{t}^{n-1} + b_1\mathtt{t}^{n-2} + \cdots + b_{n-1},$$

tal que $\mathtt{p}(\mathtt{t}) = (\mathtt{t} - u)\mathtt{f}(\mathtt{t})$. La desigualdad (1) se sigue por inducción si demostramos que

$$v(\mathtt{f}) + 1 \leq v(\mathtt{p}). \tag{2}$$

En efecto, si suponemos (2) ya probado, y puesto que $n^+(\mathtt{f}) \leq v(\mathtt{f})$ por la hipótesis de inducción, tenemos

$$n^+(\mathtt{p}) = 1 + n^+(\mathtt{f}) \leq 1 + v(\mathtt{f}) \leq v(\mathtt{p}).$$

Sólo falta comparar $v(\mathtt{f})$ con $v(\mathtt{p})$, para lo que analizaremos los cambios de signo mediante las relaciones

$$a_0 = b_0\,; \quad a_i = b_i - ub_{i-1},\ j = 1, \ldots, n\,; \quad a_n = -ub_{n-1} \neq 0.$$

Observamos que si $b_ib_{i+1} < 0$, entonces

$$a_{i+1}b_{i+1} = (b_{i+1} - ub_i)b_{i+1} = b_{i+1}^2 - ub_ib_{i+1} > 0,$$

y por tanto

$$\text{signo}[a_{i+1}] = \text{signo}[b_{i+1}].$$

Esto significa que las sucesiones $(a_0, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ y $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ empiezan con el mismo signo (ya que $a_0 = b_0$) y vuelven a tenerlo igual inmediatamente después de cada cambio de signo en la sucesión $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ de coeficientes de $\mathtt{f}(\mathtt{t})$. Escribamos esto a partir de una coincidencia $\text{signo}[a_k] = \text{signo}[b_k]$.

(i) Si encontramos un cambio de signo después de b_k será porque, para cierto índice $i \geq k$, se tiene

$$\begin{array}{ccccc} \text{signo}[a_k] & , \dots , & \text{signo}[a_i] , & \text{signo}[a_{i+1}] \\ \| & & & \| \\ \text{signo}[b_k] & = \cdots = & \text{signo}[b_i] \neq & \text{signo}[b_{i+1}]. \end{array}$$

Por tanto los signos de a_k y de a_{i+1} son opuestos, luego existe un índice ℓ entre $k+1$ e $i+1$ tal que $a_k a_\ell < 0$. En particular hay al menos un cambio de signo entre a_k y a_{i+1}.

(ii) Si no encontramos ningún cambio de signo después de b_k será

$$\begin{array}{ccccc} \text{signo}[a_k] & , \dots , & \text{signo}[a_{n-1}] & , & \text{signo}[a_n] \\ \| & & & \not\parallel & \\ \text{signo}[b_k] & = \cdots = & \text{signo}[b_{n-1}] & , & \end{array}$$

pues $a_n = -u b_{n-1}$ y $u > 0$. Por tanto, existe un índice ℓ entre $k+1$ y n tal que $a_k a_\ell < 0$, por lo que la sucesión $(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n)$ tiene al menos un cambio de signo. Esto incluye el caso extremo $k = n-1$.

Esta discusión muestra que por cada cambio de signo en $(b_0, \dots, b_{n-1})$ hay otro en $(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n)$, que tiene al final un cambio de signo extra. De esto se deduce la desigualdad (2), lo que concluye la demostración. $\square$

Observaciones 2 (i) Como ya señalamos, la Regla de los signos de Descartes es más general que el enunciado de la Proposición 1. Sin imponer que $\mathtt{p}(\mathtt{t})$ sea un polinomio cuyas raíces sean todas reales la regla afirma que la diferencia $v(\mathtt{p}) - n^+(\mathtt{p})$ es un entero par no negativo.

(ii) En muchos textos esta Regla de Descartes generalizada se presenta como corolario de la llamada Regla de Budan-Fourier, obtenida por ambos de modo independiente en [1] y [3]. Dicho resultado afirma que dados dos números reales $a < b$ que no son raíces de un polinomio $\mathtt{p}(\mathtt{t}) \in \mathbb{R}[\mathtt{t}]$ de grado n, el número $n_{\mathtt{p}}(a, b)$ de raíces reales de $\mathtt{p}(\mathtt{t})$ en el intervalo $[a, b]$ de extremos a y b, contadas con multiplicidad, es menor o igual que la diferencia

$$\delta(a, b) := v(\mathtt{p}(a), \mathtt{p}'(a), \dots, \mathtt{p}^{(n)}(a)) - v(\mathtt{p}(b), \mathtt{p}'(b), \dots, \mathtt{p}^{(n)}(b))$$

y, además, $n_{\mathtt{p}}(a,b)$ y $\delta(a,b)$ tienen la misma paridad. Su demostración, que no es difícil pero sí bastante engorrosa, y que se puede consultar en [4], V.2.13, consiste en un cuidadoso análisis de los cambios de signo en la sucesión $(\mathtt{p}(t), \mathtt{p}'(t), \ldots, \mathtt{p}^{(n)}(t))$ para valores de t suficientemente próximos a una raíz de alguna de las derivadas del polinomio $\mathtt{p}$.

(iii) En los textos de Álgebra Lineal, por ejemplo [6], se demuestra que el polinomio característico de cualquier matriz simétrica con coeficientes en $\mathbb{R}$ es un polinomio cuyas raíces son todas reales. En consecuencia, la Regla de Descartes, en su formulación simplificada de la Proposición 1, permite clasificar formas cuadráticas definidas sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales en función, únicamente, de los signos de los coeficientes del polinomio característico de su matriz respecto de una base cualquiera.

(iv) Un cuerpo R se dice *real cerrado* si el anillo cociente $R[\mathtt{t}]/(\mathtt{t}^2+1)$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Tanto el enunciado como la prueba de la Proposición 1 son válidos al reemplazar $\mathbb{R}$ por un cuerpo real cerrado arbitrario.

Referencias

[1] F. Budan. *Nouvelle méthode por la résolution des équations numériques d'un degrée quelconque* (1807). Segunda edición, Paris, (1822).

[2] R. Descartes. *La Géométrie* (1637). A source book in Mathematics. Massachussets: Harvard Univ. Press (1969).

[3] J. Fourier. *Analyse des équations déterminées* (1831). F. Didot, Paris.

[4] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz. *Anillos y cuerpos conmutativos.* Tercera edición, Editorial de la UNED, (2002).

[5] C.F. Gauss. (1828). *Beweis eines algebraischen Lehrsatzes.* Journal für die reine und angewandte Mathematik. **1**, n$^{\text{o}}$ 4.

[6] W. Greub. *Linear Algebra* (1975). GTM, Springer, 451 páginas.

[7] C. Sturm. *Mémoire sur la résolution des équations numériques* (1835). inst. France Sc. Math. Phys. **6**.

Las Matemáticas y la gente

Alberto Aizpún López
Catedrático de Didáctica de las Matemáticas, UCM
aizpunycasals@telefónica.net

Abstract

This paper cast a humorous view over some examples of mathematics applied to domains of everyday life, ranging from election processes at the polls and methods for decision making, to some amusing mistakes in basic mathematics made by journalists.

El relato que sigue, presentado como declaración personal de un político en activo, forma parte de una colección de ellos. Se puede pensar que fue reunida por un curioso intelectual que, alejado mentalmente de cualquier lugar, se dedicaba a hacer hablar a la gente de las vivencias matemáticas (así las llamaba) que tuviera, aprovechándolas para comentarlas después con sus convecinos en el Casino del lugar y hacer lo que él creía brillantes y caritativas sesiones de divulgación científica.

Así que no conocemos personalmente de nada al relator-protagonista. Nos limitamos a copiar el escrito encontrado entre los papeles de aquel intelectual, quien dejó todos ellos y todos sus libros al Ayuntamiento del lugar para formar la base de una Biblioteca popular. La declaración del político es la siguiente:

"Una de las primeras cosas que me enseñaron las Matemáticas es que he de tener mucho cuidado cuando me presente a alguna elección. Cuidado con el modo con que se vaya a tratar el resultado del escrutinio. Fue mucho antes de dedicarme a la política y con ocasión de elegirse la Junta Directiva del equipo de fútbol de mi pueblo. Se compondría de cinco personas y se presentaron cinco candidatos. Dando por hecho que esos cinco formarían la Junta, se trataba de que los socios eligieran entre ellos al Presidente del club y para ello se acordó que cada votante ordenara a los cinco miembros por orden de preferencia para la Presidencia. Un notario se encargó de levantar acta y lo que nos entregó fue la tabla que veis, en la que se han sustituido los nombres de las personas por A , B , C , D , E .

1º	2º	3º	4º	5º	Votos
B	E	A	D	C	36
C	A	E	D	B	24
D	C	A	E	B	20
E	D	A	C	B	18
A	C	E	D	B	8
A	D	E	C	B	4
				Total	110

En cuanto ví el resultado corrí a felicitar a B, que era amigo mío, y a decirle que yo le había votado, lo que, por cierto, no era verdad. Pero el notario era aficionado a las Matemáticas y dejarle hablar fue nuestra perdición. La conversación entre él y yo fue, más o menos, ésta:

Notº : *¿Y por qué van a elegir a B?*

Yo : *Porque es el más votado.*

Notº : *¿Y qué? ¿Usted es de los que creen que tener más votos que los demás es una razón suficiente para ser elegido? Note que los dos tercios del electorado repudian a B. Es el último de la lista. ¿Van a elegir a un candidato que es rechazado por el 67,27% de los electores?*

Yo : *Y qué nos propone que hagamos?*

Notº : *Yo no propongo nada; han de ser Vds. quienes decidan. Pero piensen, siquiera un momento, en lo que hacen en otros países de nuestro entorno. (Esta frase de "países de nuestro entorno" me entusiasmó; desde entonces la uso en todos mis discursos, sean donde sean).*

Yo : *Póngame un ejemplo, se lo ruego.*

Not^o : *Pues en Francia eligen al Presidente de su República por votación directa. Si se presentan más de dos candidatos y ninguno obtiene más del 50% de los votos , entonces se dejan los dos más votados y se celebra una segunda vuelta con ellos. En esa vuelta es seguro que uno de ambos tendrá más de la mitad de los votos (también sería mala suerte que empataran).*

Como B no era mi preferido apoyé la sugerencia del notario, que fue aceptada porque aquello de “los países de nuestro entorno” causó una impresión palpable. Ensayamos ese procedimiento y vimos enseguida lo que cualquiera puede ver también: que B tiene en la primera fila 36 votos como primero, pero en todas las demás C es preferido a B, con lo que C tendría 74 votos y sería elegido.

Sin embargo, el notario nos llamó la atención de nuevo. Dijo: ¿No irán a elegir a C sin examinar otras posibilidades?. Prueben algo parecido a ponderar el puesto en que cada uno es votado. Adjudiquen cinco puntos al primero, cuatro al segundo, tres al tercero, dos al cuarto y uno al quinto. Después sumen los puntos conseguidos por cada uno en la votación total y vean qué pasa. Así lo hicimos, por curiosidad. El cálculo para A fue la suma 12 x 5 + 24 x 4 +74 x 3 =378. Cada uno puede hacer los cálculos restantes y ver que el ganador sería E con 382 puntos.

Antes de que hubiera ningún comentario, el notario se apresuró a decir que también podíamos ensayar el sistema de votación de los premios literarios: se elimina el menos votado en votaciones sucesivas hasta que no quede más que una persona. Como veis, las etapas serían:

1ª) se elimina A y quedan B, C, D y E con 36 , 32 , 24 y 18 votos respectivamente.

2ª) se elimina E y quedan B, C y D con 36 , 32 y 42 votos, respectivamente.

3ª) se elimina C y quedan B, con 36 y D con 74, con lo que el ganador sería D.

Total que puede ganar cualquiera menos A, dije yo. El notario soltó: pruebe Vd. a comparar a cada dos, mano a mano. Y vimos que, efectivamente, de ese modo A gana a cualquier otro con 74, 66, 72 y 56 votos frente a B, C, D y E, con 36, 44, 38 y 54 votos, respectivamente.

El notario nos indicó que aún hay más procedimientos de elección, pero que , evidentemente, no hacían al caso. Nos sugirió que pensáramos el que íbamos a seguir y que ya levantaría el acta cuando lo hubiésemos decidido. Hasta nos sugirió que cada uno de nosotros podía ordenar los cinco vistos y votar. ¿Qué os parece el notario? Matemático, él.

Y no es esa la única experiencia que he tenido con las dichosas elecciones. Otra la tuve el día que, después de mucho trabajo y muchas visitas y de dar mucha lata, conseguí que me designaran para dar una charla en la Universidad de Verano de la Comunidad a un grupo de veinte matriculados

Las opciones eran dar la charla en el aula (A), o en el bar (B) o en el campus (C). Se puso el asunto a votación y se obtuvo el resultado de la tabla

Prefiero	Acepto	No iré a	Nº de votos
A	B	C	7
B	C	A	7
C	A	B	6

Mirando a las preferencias había empate a 7 entre A y B, por lo que se atendió a la tercera fila, en la que se aceptaba A pero se rechazaba B. Así, yo como flamante Profesor y los veinte oyentes nos dirigimos al aula. Una vez acomodados, pero antes de empezar, uno de los alumnos levantó la mano y dijo: Profesor, yo creo que el grupo prefiere escuchar su charla en el campus antes que en aula; veo que los siete votos de la segunda fila y los seis de la tercera optan por C con preferencia a A, por lo que C gana a A por 13 votos a 7. Convencidos de ello, los veintiún asistentes nos dirigimos al campus, al aire libre, donde nos sentamos en el suelo, sobre la hierba. Todos menos uno. Aquel uno, miró sonriente hacia mí, de reojo a los demás, y dijo: lo que yo veo es que el grupo prefiere oír la charla en el bar en lugar de quedarse aquí, al sol. Efectivamente, si la disputa es solamente entre C y B, gana B por 14 votos a 6. ¿Que cómo acabó la reunión?. Quedaba un cuarto de hora y a mi me daban ganas de llorar, pero me porté como quien soy y pedí una ronda para todos. Ya hablaríamos otro día.

Puedo deciros también que después de esas dos iniciaciones, tan aleccionadoras para mí, he tenido, ya dentro del Partido, otras ocasiones de tratar con las Matemáticas o, mejor diré, de ser tratado por ellas. Os cuento una:

Bien sabéis que los partidos políticos suelen ser tachados de atender a sus intereses partidistas antes que a los generales del País. Y dentro del Partido, a los militantes, sobre todo si son dirigentes, se nos acusa de atender a nuestra posible carrera política, a nuestra promoción interna, antes que a los intereses del Partido. El mío tiene la costumbre de controlar si eso es cierto o no por parte de aquellos que aspiran a llegar al Comité Central. Pues bien, un buen día, nos llamaron a tres correligionarios, dos hombres y una mujer, que nos habíamos destacado por nuestras propuestas en ciertos debates, y nos anunciaron que habíamos sido seleccionados para realizar una prueba promocional en el Partido; una prueba que era un juego.

Cada uno entramos en una cabina aislada. En esa cabina había un pupitre sobre el que se encontraba un papel, tamaño folio, en blanco. Al alcance de la mano un interruptor eléctrico y en el techo un altavoz. A los pocos segundos de sentarme oí por el altavoz:

"*Buenas tardes. Escucha con atención porque lo que sigue lo diré solamente dos veces. Tienes cinco minutos para leer lo que está escrito al otro lado del folio y actuar. Tienes cinco minutos para leer lo que está escrito al otro lado del folio y actuar*. Inmediatamente volví el folio y leí lo siguiente: "*Cuando oigas* Ya*, podrás encender la luz o dejarla apagada, como ahora está. Examinaremos lo que haya hecho cada uno y entonces ocurrirá una de las cosas siguientes:*

1) Si no hay ninguna luz encendida, entonces os propondremos en los primeros puestos para ser elegidos Diputados de la Autonomía en las próximas elecciones.

2) Si las tres luces están encendidas, entonces os haremos a cada uno concejal en su pueblo.

3) Si hay alguna luz encendida, pero no las tres, entonces a quien haya encendido le haremos Ministro del Gobierno Central en cuanto tengamos ocasión. Quien no haya encendido la luz se quedará de militante de base".

Poneos en mi lugar. Leed otra vez lo escrito en aquel folio y decidme qué hubierais hecho puestos en el trance. Primero pensé, atendiendo a los intereses del grupo de tres personas amigas, que lo mejor que se ofrecía era ser diputados los tres y lo peor ser concejales los tres, así que lo que debíamos hacer era dejar los tres la luz apagada; eso si atendíamos a los intereses del grupo. Pero enseguida me acordé de esa antipática y egoísta idea de que "*la caridad, bien entendida, empieza por uno mismo*" y ví que para mirar en primer lugar por mis intereses personales lo que debía hacer era encender la luz. Efectivamente, con ello me aseguraba un puesto: o bien concejal, si los demás también encendían la luz, o bien nada menos que Ministro del Gobierno Central si alguno, pensando en el grupo, la dejaba apagada. Y si ese alguno era yo, *¡como se reiría de mí el resto de su vida quien la encendiera!* presumiendo y cobrando como ministro, mientras que yo quedaría pagando cuotas, como militante de base que dejó pasar su ocasión por atender a los intereses del grupo antes que a los suyos propios. Todo eso lo pensé en mucho menos de los cinco minutos concedidos.

Y encendí la luz ... , pero no soy ministro. Desde entonces los tres de aquel día somos concejales. En esta legislatura me ocupo del Área de Cementerios, donde cada día tengo menos trabajo porque la gente se inclina cada vez más por las incineraciones. Como concejal estoy teniendo mucho contacto con las Matemáticas y soy de lo mejorcito entre mis colegas. Ved lo que llega a decir el de Área de Circulación, según publica la prensa:

"Baja Espectacular
La Corporación impuso 116.611 sanciones durante el penúltimo ejercicio económico por exceso de velocidad. Sin embargo esta cifra se redujo a 11.644 en el ejercicio pasado , lo que supone un descenso del 1.000 % , según indica a este periódico el concejal ...."

Claro que si llama cifra a 116.611 puede esperarse cualquier cosa.

Bien. Se me ha terminado el tiempo que tenía para la explicación de mis experiencias matemáticas. Aquel notario me hizo saber que las votaciones pueden aparecer como imparciales cuando están sesgadas en beneficio de alguien. La Teoría de Juegos me enseñó que no siempre es más beneficioso para uno actuar mirando a su propio interés. Y mi trabajo como concejal me hace ver que si bien soy casi analfabeto en Matemáticas, aún hay quien me gana en ignorancia. Por lo menos entre los ediles.

....

Así termina lo que el político escribió, o al menos lo que figura en los papeles. Lo que sigue son las notas que tomó el coleccionista para sus aclaraciones a los oyentes del Casino.

La experiencia sobre votaciones que nos ha relatado el político actuante no es un ejemplo de Matemática recreativa sino que es una cuestión estudiada desde hace más de dos siglos, desde antes de la Revolución Francesa. Ya en aquel tiempo estaba planteado el problema y la persona más conocida hoy entre los que la estudiaron es el Marqués de Condorcet. Con ciertas variantes de adaptación, el ejemplo que nos ha mostrado el político está sacado de otro dado por el propio Condorcet. El problema es encontrar un criterio para expresar la opinión de un grupo partiendo de las opiniones individuales de quienes lo forman, de modo que ese criterio sea siempre mejor que los demás. Los ejemplos que mostró Condorcet son muchos y muy atractivos. La historia de la charla en la Universidad de Verano es otra adaptación de un ejemplo de Condorcet. El Marqués de Condorcet ha dejado su nombre (el nombre de su título, pues él se llamaba Caritat) para siempre en el problema de las votaciones. Ya se ha visto en el ejemplo puesto por el político que el candidato. A gana a todos los demás en las competiciones mano a mano. Cuando así ocurre, a ese ganador se le llama ganador de Condorcet en recuerdo a quien estudió estas cuestiones como pionero.

No tuvo mucha suerte el Marqués. En su tiempo, los razonamientos que se empleaban en el Cálculo de Probabilidades tenían muchas veces sesgos de orden psicológico, adolecían de falta de objetividad o bien se aplicaban allí donde no ha lugar. Por ejemplo, Condorcet sostenía la tesis de que para un reo era más favorable ser juzgado por un tribunal formado por varios jueces que por uno solo y también era preferible ser juzgado por un tribunal numeroso que por uno reducido. Más o menos, su razonamiento era el siguiente:

"*Admitamos que un juez acierta en su veredicto más veces que las que se equivoca, porque de otro modo sería mejor que adoptara su decisión a cara o cruz. Si, por ejemplo, admitimos que se equivoca el 10% de las veces, entonces si dos jueces son unánimes la probabilidad de error es una centésima; si en un tribunal de tres jueces hay unanimidad la probabilidad de error es de 0,001, es decir, menor cuantos más jueces haya*".

Hoy decimos que eso sería así si la probabilidad de error de cada juez fuera independiente de las de los demás, cosa que no es cierta. Por ejemplo, un Juez muy prestigiado, un falso testimonio u otras causas, pueden llevar a error a todos los jueces, o a unos sí y a otros no.

Como es sabido, Condorcet fue condenado por un tribunal numeroso y se envenenó en la cárcel antes de ir a la guillotina. Quizás un tribunal menos numeroso hubiera atendido con preferencia a sus condiciones de espíritu independiente, matemático, filósofo, astrónomo y hombre de aptitudes poco corrientes (y, con seguridad, mucho mayores que las de la mayoría de los jueces del tribunal), antes que al simple hecho de haberse declarado republicano y girondino.

Volviendo a la cuestión de encontrar un criterio óptimo que decida la opinión de un grupo partiendo de las opiniones de los individuos que lo componen, hay que decir que duró como problema todo el siglo XIX y gran parte del XX. Ya desde la primera época y después con más precisión conforme se avanzaba en el estudio del problema se fueron imponiendo al criterio buscado condiciones y todas parecen razonables. Por ejemplo, que exista transitividad, es decir, que si el grupo prefiere A a B y prefiere B a C, también prefiera A a C. Como se ve, esa condición no se cumple en el ejemplo último del charlista y sus veinte oyentes. También parece razonable que no exista un individuo o un grupo de ellos que imponga su opinión sin atender a la de los demás; si ocurre así, sobra la votación. Como también sobraría si la decisión del grupo se tomara por imposición exterior, por ejemplo el Estado o cualquier autoridad ajena al grupo, en lugar de por el examen de las preferencias de los individuos. Y ¿qué menos que dar preferencia a A sobre B si todos los componentes del grupo opinan lo mismo?. No cito otras condiciones tan aparentemente razonables como esas porque las señaladas son suficientes para resolver el problema.

La solución vino del campo de la Economía y de la Estadística con Kenneth Arrow. ¿Que quien es el economista Arrow?. Basta con consultar un diccionario enciclopédico o, más rápidamente, un buscador de Internet, para leer: "*Arrow (Kenneth Joseph)* .Biog. *Economista estadounidense, nacido en Nueva York en 1921 ..... Profesor de Economía y Estadística de la Universidad de Stanford a los 28 años, pasó en 1951 a la de Harvard, donde desempeñó la cátedra de Economía durante el resto de su actividad docente. En 1972 le fue concedido el Premio Nobel de Economía, compartido con el inglés John R. Hicks, por sus aportaciones a la teoría general del equilibrio económico y a la del bienestar*"

Pues bien, Arrow, no hace aún 35 años, demostró que aquellas cuatro condiciones, aunque no se atienda a otras, son incompatibles; es decir, que no existe ningún criterio para encontrar un sistema de votación que las cumpla todas. Eso significa que no basta decir que algo se va a decidir por votación para pensar que con ello se procede democráticamente; lo que importa es el criterio decisorio, que siempre adolecerá de la falta de alguno de los requisitos deseables. Resulta de ello que lo que cada interesado intentará conseguir previamente será un criterio que deje de cumplir las condiciones más convenientes para los adversarios.

Sabe todo eso el político que escribió sus experiencias? Es dudoso. Tal y como se ha expresado, parece que lo único que encontró aprovechable de las explicaciones del notario fue lo de "*en los países de nuestro entorno*". Lo demás lo tuvo por diversiones intelectuales de un aficionado a las Matemáticas.

El teorema de Arrow es un ejemplo de resolución de problemas en sentido negativo. De otro modo: el problema de encontrar un criterio universal para decidir la opinión de un grupo no tiene solución. Y si se demuestra que un problema no tiene solución, entonces ese problema está resuelto: la solución es que no tiene solución. Sin embargo, sobre todo en el campo de la enseñanza, suele pensarse que proponer problemas sin solución es hacer trampas, cuando no hacerlo así estrecha desde el principio el horizonte matemático que se puede contemplar. Ante un problema, lo primero que se debe investigar es si tiene solución, porque si se demuestra que no la tiene el problema está resuelto. Si se prueba que la solución existe, encontrarla suele exigir otra estrategia de razonamiento.

Para el profano, el problema más célebre resuelto en sentido negativo es el de la cuadratura del círculo y una expresión como "*eso es la cuadratura del círculo*" tiene el significado de cosa que se sabe imposible de obtener. (Hablar de eso más o menos, según lo que sepan los convecinos que estén en la reunión)

Y por último, el político se ha referido con cierta socarronería a la idea de su colega en el Ayuntamiento sobre lo que es un tanto por ciento. Esa confusión es muy frecuente y no solamente entre los concejales. En el ejemplo que da, el descenso ha sido del 90% porque el número de multas impuestas (11.644) es el 10% de las del año anterior (116.611). Una insistencia en el mismo error se puede ver en la crónica de prensa remitida por un corresponsal en Londres, que dice: "El lunes comienzan las rebajas en los célebres almacenes Harrod's, propiedad del árabe Al-Fayed. Hoy los escaparates lucen precios asombrosos y algunos artículos se ofrecen rebajados hasta el 1000%". Lo que no dice el cronista es cómo se las arregla el departamento financiero.

No es solamente el tanto por ciento. Las simples cantidades se lanzan alegremente. Es de creer que, a veces, se tratará de simples erratas de imprenta porque de lo contrario habría de qué preocuparse. Véase un ejemplo, aparecido en un diario que no hace falta citar pero cuyo recorte está a vuestra disposición: "La esclava mejor pagada". Esta semana ví la revista del corazón de ...... Llevó a esa modelo, Claudia Schiffer. Cobra 400.000 millones de dólares al año por darse paseítos. Totalmente fuera de lógica. Estos programas están dirigidos a *marujas pobres* y son protagonizados por *marujas ricas*. El cuento de Cenicienta es su favorito. Para que sueñen las pobres". Dejando aparte la estúpida petulancia que supone el empleo de la palabra *marujas* en este texto, lo que harán esas pobres será reírse del cronista, porque basta leer una sola vez para ver que la cantidad citada podría resolver la crisis económica de todo un país.

No hace una semana, una emisora de Televisión mostraba un automóvil Mercedes A y la voz del locutor decía: "*ocultas en el parachoques de este automóvil se han encontrado 19.000 toneladas de hachís*". Si hubieran intervenido, de verdad, 19.000 toneladas, la noticia debería haber sido de este otro tipo: *"oculto en este enorme montón de hachís se ha encontrado un automóvil del tipo Mercedes A"*

....

Y así termina lo escrito en aquellos papeles. Hay otros del mismo tipo y su lectura hace pasar una agradable tarde en la Biblioteca Popular de ese lugar. Pues bueno ……

Resolución de problemas de optimización basada en procedimientos trigonométricos

Aurel Muntean
CEPA de Entrevías (Madrid)
Doctor en Matemáticas por la Univ. "Babes-Bolyai" de Cluj-Napoca, Rumanía
aurelmuntean@yahoo.com

Abstract

This paper aims to find the minimum or maximum values of some functions and to solve some optimization problems with constrains, using trigonometric techniques. Interesting classical mathematics problems that use non-usual techniques are presented.

Introducción

Habitualmente, el único método de los estudiantes para determinar máximos y mínimos de funciones es el uso de la derivada. En este artículo, presentamos algunos procedimientos trigonométricos por medio de los cuales se pueden determinar los máximos y mínimos de ciertos tipos de funciones, de manera bastante natural, sin emplear la derivada. Consecuentemente, se trata de unas técnicas trigonométricas, también útiles al estudio de la acotación y para hallar el recorrido de algunos tipos de funciones. Asimismo, son técnicas que pueden resultar útiles para la resolución de problemas de programación matemática.

Cabe señalar que en Muntean [3], proporcionamos unas recomendaciones para el uso de este tipo de técnicas, siendo en realidad el presente trabajo una continuación del artículo citado. Como nuestro propósito es proporcionar un procedimiento de optimización, digamos, peculiar, empleando técnicas de cálculo elemental, la mayoría de los problemas que aquí hemos reunido son clásicos. Sin embargo, hemos incluido algunos problemas originales en cuanto a la modalidad de resolución con herramientas de trigonometría casi exclusivamente.

1 Uso de procedimientos trigonométricos para hallar máximos y mínimos de algunas funciones

Algunos de los problemas de valores extremos (máximos o mínimos) pueden ser desarrollados plenamente extrayendo todas sus consecuencias sin aplicar el concepto de derivada de una función. El mayor desafío suele ser convertir un problema de optimización de una función en un problema de máximos y mínimos trigonométricos. Como se puede comprobar nos centramos en el cálculo de los extremos absolutos de ciertas clases muy concretas de funciones.

1.1 Optimización de funciones de una variable

La idea en que se basa el procedimiento para determinar máximos y mínimos absolutos de funciones aprovechando las técnicas trigonométricas es bastante sencilla: expresar, mediante un cambio de variable pertinente, la relación funcional en forma trigonométrica y, tras simplificaciones a su expresión mínima equivalente, poder indicar las cotas que darán los extremos absolutos aplicando la acotación del **seno** y del **coseno**. Es en esta etapa donde pueda ser realmente útil el procedimiento trigonométrico. Son útiles las recomendaciones clásicas:

- En el caso en el que el dominio de existencia de la función es $x \in [-a,\ a]$ con $a > 0$ y en la relación funcional intervienen expresiones de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$ tomaremos, sea $x = a\ sen\ \alpha$, con $\alpha \in \Big[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\Big]$, sea $x = a\ cos\ \alpha$, con $\alpha \in [0,\ \pi]$.
- Si el dominio de existencia de la función es todo $\mathbb{R}$ e intervienen expresiones de la forma $\sqrt{a^2 + x^2}$ puede resultar útil un cambio de variable mediante $x = a\ tg\ \alpha$, con $\alpha \in \big(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\big)$.
- Análogamente, si en la función intervienen expresiones de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$ podemos hacer, sea el cambio $x = \frac{a}{sen\ \alpha}$, con $\alpha \in \Big[-\frac{\pi}{2},\ 0\Big) \cup \Big(0,\ \frac{\pi}{2}\Big]$, sea $x = \frac{a}{cos\ \alpha}$, con $\alpha \in \big[0,\ \frac{\pi}{2}\big) \cup \big(\frac{\pi}{2}, \pi\big]$.
- Generalizando convenientemente, cabe recordar que con un cambio lineal de variable el radicante cuadrático $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ siempre se puede reducir previamente a uno de los tres tipos siguientes: $\sqrt{1 - x^2}$, $\sqrt{1 + x^2}$, $\sqrt{x^2 - 1}$.

- Obsérvese si hay alguna expresión que pueda sugerir el uso de fórmulas de funciones trigonométricas de ángulo múltiple.

<u>*Problema 1*</u>. Hallar los extremos de la función $f(x) = \sqrt{\frac{3-2x^2}{3+2x^2}}$.

Solución. Puesto que el dominio de existencia de la función es $\Big[-\sqrt{\frac{3}{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\ \Big]$, hacemos el cambio $x = \sqrt{\frac{3}{2}}\ tg\ \varphi$, con $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\big)$. Se tiene entonces que

$$f(x) = f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ tg\ \varphi\right) = \sqrt{cos\ 2\varphi}\ .$$

Luego, para $\varphi \in \big\{ -\frac{\pi}{4}\ ,\ \frac{\pi}{4}\ \big\}$ la función dada alcanza su mínimo:

$$\text{mín}\ \ f(x) = f\left[\sqrt{\frac{3}{2}}\ tg\ \Big(\pm \frac{\pi}{4}\Big)\right] = f\left(\pm \sqrt{\frac{3}{2}}\ \right) = 0$$

y para $\varphi = 0$ alcanza su máximo

$$\text{máx}\ \ f(x) = f\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ tg\ 0\right) = f(0) = 1\ .$$

<u>*Problema 2*</u>. Hallar los extremos de la función $f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$.

Solución. Nótese que mediante el cambio $x = tg\ \varphi$, con $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\big)$ se tendrá:

$$f(x) = f(tg\ \varphi) = \frac{(1+tg\ \varphi)^2}{1+(tg\ \varphi)^2} = (sen\varphi + cos\varphi)^2 = 1 + sen2\varphi\ ,$$

por lo que la función dada tiene un mínimo (global)

$$\text{mín}\ \ f(x) = f\Big[tg\ \Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big] = f(-1) = 0$$

y un máximo (global)

$$\text{máx}\ \ f(x) = f\Big(tg\ \frac{\pi}{4}\Big) = f(1) = 2\ .$$

Problema 3. Hallar los extremos de la función $f(x) = \frac{1+2x-x^2}{1+x^2}$.

Solución. Obsérvese la descomposición

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

Luego tomando $x = tg\ \frac{t}{2}$, con $t \in \Big(-\pi,\ \pi \Big)$, se define una nueva función

$$g(t) = f\Big(tg\frac{t}{2}\Big) = sen\ t + cos\ t = \sqrt{2}\ sen\Big(t + \frac{\pi}{4}\Big)$$

que alcanza su máximo en $t = \frac{\pi}{4}$ y su mínimo en $t = -\frac{3\pi}{4}$.

Así se deduce que la función dada tiene un máximo en $x = tg\ \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$, donde $f(\sqrt{2} - 1) = f(tg\ \frac{\pi}{8}) = g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

Análogamente, la función f presenta en $x = tg\big(-\frac{3\pi}{8}\big) = -\sqrt{2} - 1$ un mínimo con $f(-\sqrt{2} - 1) = f\Big(tg\big(-\frac{3\pi}{8}\big)\Big) = g\big(-\frac{3\pi}{4}\big) = -\sqrt{2}$.

Problema 4. Hallar los extremos de la función $f(x) = \frac{3x^2+2\sqrt{3}\ x-3}{2\big(1+x^2\big)}$.

Solución. De nuevo, haciendo la descomposición, aquí conseguimos:

$$f(x) = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1-x^2}{\big(1+x^2\big)} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2x}{1+x^2}\ ,$$

que nos sugiere emplear el cambio $x = tg\ \varphi$, con $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\big)$. Con ello se obtiene:

$$f(x) = f(tg\ \varphi) = -\frac{3}{2}\ cos\ 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}\ sen\ 2\varphi = -\sqrt{3}\ cos\Big(2\varphi + \frac{\pi}{6}\Big)\ ,$$

de donde se deduce inmediatamente que la función dada tiene un mínimo (global)

$$\text{mín}\ \ f(x) = f\Big[tg\ \Big(-\frac{\pi}{12}\Big)\Big] = f\big(\sqrt{3} - 2\big) = -\sqrt{3}$$

y un máximo (global)

$$\text{máx}\ \ f(x) = f\Big(tg\ \frac{5\pi}{12}\Big) = f\big(2 + \sqrt{3}\ \big) = \sqrt{3}\ .$$

<u>*Problema 5*</u>. Hallar el recorrido de la función $f(x) = \frac{1+x^4}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Solución. Nuevamente el dominio de existencia de la función nos permite el cambio $x = tg\ \varphi$, con $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right)$. Por su parte, la relación funcional se convierte en la expresión trigonométrica:

$$y = f(x) = f(tg\ \varphi) = cos^4\varphi + sen^4\varphi = 1 - \frac{1}{2} \cdot sen^2 2\varphi\ ,$$

de donde surgen los extremos de la función: un mínimo (global) $f\Big[tg\ \Big(-\frac{\pi}{4} \Big)\Big] = f\Big(tg\ \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{2}$ y un máximo (global) $f\Big(tg\ 0\Big) = 1$. Finalmente, se deduce que $y \in \left[\frac{1}{2}\ ,\ 1 \right] = Im\ f$.

<u>*Problema 6*</u>. Hallar los extremos de la función $f(x) = \frac{x-x^3}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Solución. De un modo totalmente análogo, debido a que el dominio de existencia de la función es todo $\mathbb{R}$, el cambio $x = tg\ \varphi$, con $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right)$ hace ver que:

$$x - x^3 = x \cdot \left(1 - x^2\right) = tg\ \varphi \cdot \left(1 - tg^2\ \varphi\right) =$$

$$= \frac{sen\ \varphi}{cos\ \varphi} \cdot \frac{cos\ 2\varphi}{cos^2\ \varphi} = \frac{sen\ \varphi \cdot cos\ \varphi \cdot cos\ 2\varphi}{cos^4\ \varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{sen\ 2\varphi \cdot cos\ 2\varphi}{cos^4\ \varphi} = \frac{1}{4} \cdot \frac{sen\ 4\varphi}{cos^4\ \varphi}$$

con lo que la función puede escribirse ahora de la forma:

$$f(x) = f(tg\ \varphi) = \frac{1}{4} \cdot \frac{\frac{sen\ 4\varphi}{cos^4\ \varphi}}{\frac{1}{cos^4\varphi}} = \frac{1}{4} \cdot sen\ 4\varphi\ .$$

Se aprecia fácilmente que para $sen\ 4\varphi = 1$ la función dada presenta un máximo (global) $f\Big(tg\ \frac{\pi}{8}\Big) = \frac{1}{4}$, y para $sen\ 4\varphi = -1$, un mínimo (global) $f\Big[tg\ \Big(-\frac{\pi}{8}\Big)\Big] = -\frac{1}{4}$.

<u>*Problema 7*</u>. Hallar los extremos de la función $f(x) = \frac{1-6x^2+x^4}{\left(1+x^2\right)^2}$.

Solución. Tras una sencilla manipulación algebraica, aplicando nuevamente el cambio $x = tg\ \varphi$, con $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \right)$, obtenemos sucesivamente:

$$1 - 6x^2 + x^4 = \left(1 - x^2\right)^2 - 4x^2 = \left(1 - x^2 - 2x\right)\left(1 - x^2 + 2x\right) =$$

$$= \big(1 - tg^2\,\varphi - 2\,tg\,\varphi\big)\big(1 - tg^2\,\varphi + 2\,tg\,\varphi\big) =$$

$$= \frac{cos\,2\varphi - sen\,2\varphi}{cos^2\,\varphi} \cdot \frac{cos\,2\varphi + sen\,2\varphi}{cos^2\,\varphi} = \frac{cos^2\,2\varphi - sen^2\,2\varphi}{cos^4\,\varphi} = \frac{cos\,4\varphi}{cos^4\,\varphi}\,,$$

de modo que la función dada lleva la siguiente forma trigonométrica:

$$f(x) = f(tg\,\varphi) = \frac{\frac{cos\,4\varphi}{cos^4\varphi}}{\frac{1}{cos^4\varphi}} = cos\,4\varphi\,,$$

y de ella se deduce que $\max f(x) = 1 \,\wedge\, \min f(x) = -1$.

<u>*Problema 8*</u>. Determinar el recorrido de la función $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x+x^2}$.

Solución. En este caso, seria útil escribir la función de la siguiente forma:

$$f(x) = \frac{1}{\frac{1+x+x^2}{1+x^2}} = \frac{1}{1 + \frac{x}{1+x^2}}\,.$$

Y ahora, procediendo de modo exactamente igual al problema anterior, podremos poner $x = tg\,\varphi$, con $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\big)$, ya que el dominio de existencia de la función es todo $\mathbb{R}$. Así se llega a:

$$y = f(x) = f(tg\,\varphi) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2tg\,\varphi}{1+tg^2\varphi}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cdot sen\,2\varphi} = \frac{2}{2 + sen\,2\varphi}$$

Entonces, la función dada tiene un mínimo (global) $f\Big(tg\,\frac{\pi}{4}\Big) = f(1) = \frac{2}{3}$ y un máximo (global) $f\Big[tg\,\Big(-\frac{\pi}{4}\Big)\Big] = f(-1) = 2$ y, por consiguiente, resulta $\frac{2}{3} \le y \le 2$, con igualdad para $x \in \{-1,\,1\}$. En consencuencia, el recorrido de f es $f(\mathbb{R}) = \Big[\frac{2}{3},\,2\Big]$.

<u>*Problema 9*</u> (Kadar [2]). Determinar el recorrido de la función $f(x) = \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Solución. Con la misma sustitución $x = tg\,\varphi$, con $\varphi \in \big(-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\big)$, se tiene que:

$$f(x) = f(tg\,\varphi) = \frac{tg^2\,\varphi + 2}{\sqrt{1 + tg^2\,\varphi}} = \frac{\frac{1+cos^2\varphi}{cos^2\varphi}}{\frac{1}{cos\,\varphi}} = \frac{1 + cos^2\varphi}{cos\varphi} \ge \frac{2\,cos\varphi}{cos\varphi} = 2$$

En consencuencia, el recorrido de f es $f(\mathbb{R}) = [2,\ +\infty)$.

<u>*Problema 10*</u> Estudiar si la función $f(x) = \sqrt{x^2+4} - 2x$ está acotada.

Solución. Haciendo esta vez un cambio del tipo cotangente

$$x = 2\,ctg\,\varphi \quad \Longrightarrow \quad f(x) = f(2ctg\,\varphi) = \frac{2}{sen\varphi} - \frac{2\,cos\varphi}{sen\varphi} = \frac{2(2\,sen^2\frac{\varphi}{2})}{2\,sen\frac{\varphi}{2}\,cos\frac{\varphi}{2}} = 2\,tg$$

sobra decir ahora que $\inf f(x) = -\infty \quad \wedge \quad \sup f(x) = +\infty$.

<u>*Problema 11*</u> (propuesto por el autor de este artículo). Calcular los extremos absolutos de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x+x^2} + \sqrt{1-x\sqrt{2}+x^2} + \sqrt{1-x\sqrt{3}+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \, .$$

Solución. Obsérvese que mediante el cambio $x = tg\,\varphi$, con $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$, la función se convierte en:

$$f(x) = f(tg\,\varphi) = \frac{\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2\varphi}}{cos\,\varphi} + \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot sen\,2\varphi}}{cos\,\varphi} + \frac{\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot sen\,2\varphi}}{cos\,\varphi}}{\frac{1}{cos\,\varphi}} =$$

$$= \sqrt{1-\frac{1}{2}\cdot sen\,2\varphi} + \sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot sen\,2\varphi} + \sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot sen\,2\varphi}$$

Esta expresión trigonométrica nos permite deducir que:

$$\begin{cases} \max f(x) = f\left[tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] = f(-1) = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \\[2ex] \min f(x) = f\left(tg\,\frac{\pi}{4}\right) = f(1) = \dfrac{1+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

1.2 Optimización de funciones de dos variables

El procedimiento a seguir para funciones de dos variables es similar al procedimiento empleado en los ejemplos con funciones de una variable, si bien presentan ciertas particularidades.

- Para optimizar funciones de dos variables en las que intervienen expresiones en la forma de suma de cuadrados, tomaremos $x = r\ cos\ \alpha,\ y = r\ sen\ \alpha,\ r \geq 0,\ \alpha \in [0,\ 2\pi)$.

<u>*Problema 12*</u>. Determinar el conjunto imagen de la función

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,\ 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad f(x,\ y) = \frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}\ .$$

Solución. Haciendo el cambio de las coordenadas cartesianas a polares: $x = r\ cos\ \alpha,\ y = r\ sen\ \alpha,\ r > 0,\ \alpha \in [0,\ 2\pi)$, se obtiene sucesivamente:

$$f(x,\ y) = f(r\ cos\ \alpha,\ r\ sen\ \alpha) = \frac{3r^2 sen\ \alpha \cdot cos\ \alpha - 4r^2 cos^2\ \alpha}{r^2(cos^2\ \alpha + sen^2\ \alpha)} =$$

$$= \frac{3}{2} sen 2\alpha - 2 cos 2\alpha - 2 = \frac{5}{2} \cdot \Big(\frac{3}{5} sen 2\alpha - \frac{4}{5} cos 2\alpha\Big) - 2 =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot sen(2\alpha - \varphi) - 2\ ,$$

donde hemos tomado $cos\ \varphi = \frac{3}{5},\ \ sen\ \varphi = \frac{4}{5}$. Atendiendo a la última expresión se deduce finalmente que

$$-\frac{9}{2} \leq f(x,\ y) \leq \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad Im\ f = \Big[-\frac{9}{2},\ \frac{1}{2}\Big]\ .$$

<u>*Problema 13*</u> (Suprún [5] págs. 38-39). Calcular los extremos absolutos de la función

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad f(x,\ y) = \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)}\ .$$

Solución. Puesto que $x,\ y \in \mathbb{R}$, ponemos $x = tg\ \alpha$ e $y = tg\ \beta$ con $\alpha,\ \beta \in \big(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\big)$. Así se deduce sucesivamente que

$$\big|f(x,\ y)\big| = \left|\frac{(tg\ \alpha + tg\ \beta)(1 - tg\ \alpha \cdot tg\ \beta)}{(1 + tg^2\ \alpha)(1 + tg^2\ \beta)}\right| =$$

$$= \left|sen\ (\alpha+\beta)\cdot cos\ (\alpha+\beta)\right| = \frac{1}{2}\cdot\left|sen\ 2(\alpha+\beta)\right| \le \frac{1}{2}\ .$$

- La función f alcanza su valor máximo cuando

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{4} \quad\Longrightarrow\quad y = tg\ \beta = tg\Big(\frac{\pi}{4}-\alpha\Big) = \frac{1-x}{1+x}\ .$$

- El valor mínimo de f se alcanzará cuando

$$\alpha+\beta = -\frac{\pi}{4} \quad\Longrightarrow\quad y = tg\ \beta = tg\Big(-\frac{\pi}{4}-\alpha\Big) = -\frac{1+x}{1-x} = \frac{x+1}{x-1}\ .$$

Problema 14 (Costea [1]). Calcular los extremos absolutos de la función

$$f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\quad f(x,\ y) = \frac{\big(1-x^2\big)\big(1-y^2\big)}{\big(1+x^2\big)\big(1+y^2\big)}\cdot\left[1+\frac{4xy}{\big(1+x^2\big)\big(1+y^2\big)}\right]\ .$$

Solución. Ya que $x,\ y\in\mathbb{R}$, ponemos $x = tg\ \alpha$ e $y = tg\ \beta$ con $\alpha,\ \beta \in \big(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\big)$. Así podemos expresar la función dada en forma trigonométrica:

$$f(x,\ y) = cos\ 2\alpha\cdot cos\ 2\beta\cdot(1+sen\ 2\alpha\cdot sen\ 2\beta)$$

Utilizando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica, se tiene que:

$$\sqrt{\left|f(x,\ y)\right|} = \sqrt{\left|cos\ 2\alpha\cdot cos\ 2\beta\right|}\cdot\sqrt{\left|1+sen\ 2\alpha\cdot sen\ 2\beta\right|} \le$$

$$\le \frac{\left|cos\ 2\alpha\cdot cos\ 2\beta\right| + \left|1+sen\ 2\alpha\cdot sen\ 2\beta\right|}{2}$$

Puesto que el resultado anterior es una suma de expresiones trigonométricas en valor absoluto hay que tener cuidado con los cambios de signo cuando se realizan las operaciones. Para eliminar el valor absoluto basta con desglosar los siguientes casos:

- En el caso de que 2α y 2β sean del mismo cuadrante, entonces:

$$\left|cos\ 2\alpha\cdot cos\ 2\beta\right| + \left|1+sen\ 2\alpha\cdot sen\ 2\beta\right| =$$

$$= cos\ 2\alpha\cdot cos\ 2\beta + 1 + sen\ 2\alpha\cdot sen\ 2\beta = 1 + cos\ (2\alpha-2\beta)$$

- cuando $2\alpha \in \big(0,\ \frac{\pi}{2}\big)\ \wedge\ 2\beta \in \big(\frac{\pi}{2},\ \pi\big)$, entonces

$$\big|cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\beta\big| + \big|1 + sen\ 2\alpha \cdot sen\ 2\beta\big| =$$

$$= -cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\beta + 1 + sen\ 2\alpha \cdot sen\ 2\beta = 1 - cos\ (2\alpha + 2\beta)$$

- si $2\alpha \in \big(0,\ \frac{\pi}{2}\big)\ \wedge\ 2\beta \in \big(-\frac{\pi}{2}, 0\big)$, entonces

$$\big|cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\beta\big| + \big|1 + sen\ 2\alpha \cdot sen\ 2\beta\big| =$$

$$= cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\beta + 1 - sen\ 2\alpha \cdot sen\ 2\beta = 1 + cos\ (2\alpha + 2\beta)$$

- si $\Big[2\alpha \in \big(0,\ \frac{\pi}{2}\big) \wedge 2\beta \in \big(-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\big)\Big]\ \vee\ \Big[2\alpha \in \big(\frac{\pi}{2},\ \pi\big) \wedge 2\beta \in \big(-\frac{\pi}{2},\ 0\big)\Big]$, entonces

$$\big|cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\beta\big| + \big|1 + sen\ 2\alpha \cdot sen\ 2\beta\big| =$$

$$= -cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\beta + 1 - sen\ 2\alpha \cdot sen\ 2\beta = 1 - cos\ (2\alpha - 2\beta)$$

Reuniendo los resultados de todos los casos posibles obtenemos finalmente:

$$\sqrt{\big|f(x,\ y)\big|} \leq \frac{1 \pm cos\ (2\alpha \pm 2\beta)}{2} \leq 1$$

y, por tanto, podemos concluir que $\max f(x,\ y) = 1\ \wedge\ \min f(x,\ y) = -1$.

<u>*Problema 15*</u> (propuesto por el autor de este artículo). Calcular los extremos absolutos de la función

$$f : \Big(\mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\,\}\Big) \times \left(\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right) \longrightarrow \mathbb{R}\,,$$

$$f(x,\ y) = \frac{\big(3 - x^2\big)\big(1 - 3y^2\big)}{\big(3 + x^2\big)\big(1 + 3y^2\big)} \cdot \left[1 + \frac{12xy}{\big(3 - x^2\big)\big(1 - 3y^2\big)}\right].$$

Solución. Puesto que $(x,\ y) \in \Big(\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\,\}\Big)\times\left(\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}\right)$, ponemos $x = \sqrt{3}\ tg\ \alpha$ y $\sqrt{3}\,y = tg\ \beta$ con $\alpha,\ \beta \in \big(-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4}\big) \cup \big(-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\big) \cup \big(\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\big)$. Así podemos expresar la función dada en forma trigonométrica:

$$f(x,\ y) = cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\beta \cdot (1 + tg\ 2\alpha \cdot tg\ 2\beta) =$$

$$= cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\beta \cdot \frac{cos\ (2\alpha - 2\beta)}{cos\ 2\alpha \cdot cos\ 2\beta} = cos\ (2\alpha - 2\beta)$$

Por tanto, podemos concluir que $\max f(x,\ y) = 1\ \wedge\ \min f(x,\ y) = -1$. Vamos a localizar estos puntos extremos.

- La función f alcanza su valor máximo cuando

$$2\alpha - 2\beta = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{tg\ \beta}{\sqrt{3}} = \frac{tg\ \alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} = \frac{x}{3}\ ,$$

  por lo que, salvo $\left(\sqrt{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\left(-\sqrt{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, todos los demás puntos de la recta $y = \frac{1}{3}\,x$ son puntos de máximo.

- El valor mínimo de f se alcanzará cuando

$$2\alpha - 2\beta = \pi \quad \Longrightarrow \quad y = tg\ \beta = tg\Big(\alpha - \frac{\pi}{2}\Big) = -\frac{1}{tg\ \alpha} = -\frac{1}{\frac{x}{\sqrt{3}}} = -\frac{\sqrt{3}}{x}$$

  por tanto se llega a la conclusión de que, salvo $\big(\sqrt{3},\ -1\big)$ y $\big(-\sqrt{3},\ 1\big)$, todos los demás puntos de la hipérbola equilátera $xy = -\sqrt{3}$ son puntos de mínimo de la función.

Problema 16 ([Kvant [4]). Calcular los extremos absolutos de la función

$$f : [-1,\ 1] \times [-1,\ 1] \longrightarrow \mathbb{R}\ , \quad f(x,\ y) = x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}\ .$$

Solución. Conviene observar que esta función goza de las propiedades $f(x,\ y) = f(y,\ x)$ y $f(-x,\ -y) = -f(y,\ x)$ $(\forall)$ $(x,\ y) \in [-1,\ 1] \times [-1,\ 1]$.

Haciendo el cambio:

$$\begin{cases} x = sen\ \alpha\ , & \alpha \in \Big[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\Big] \\ y = cos\ \beta\ , & \beta \in [0,\ \pi] \end{cases}$$

se obtiene sucesivamente:

$$f(x,\ y) = f(sen\ \alpha\ ,\ cos\ \beta) = sen\ \alpha\sqrt{1 - cos^2\ \beta} + cos\ \beta\sqrt{1 - sen^2\ \alpha} =$$

$$= sen\,\alpha\cdot\left|sen\,\beta\right|+cos\,\beta\cdot\left|cos\,\alpha\right| = sen\,\alpha\cdot sen\,\beta + cos\,\beta\cdot cos\,\alpha = \ cos\,(\alpha-\beta) \leq 1$$

Atendiendo a la última expresión se deduce que

$$\left|f(x,\ y)\right| \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq f(x,\ y) \leq 1$$

¿En qué puntos se alcanzan los valores extremos de esta función? Claramente la función f alcanza su valor máximo cuando se tiene:

$$\begin{cases} cos\,(\alpha-\beta)=1 \\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\ \wedge\ \beta\in[0,\ \pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=0 \\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\ \wedge\ \beta\in[0,\ \pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \beta=\alpha\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right] \quad \Rightarrow \quad (x_{\text{máx}}\ ,\ y_{\text{máx}}) = (sen\,\alpha\ ,\ cos\,\alpha)\ , \quad \alpha\in\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\Rightarrow \quad x_{\text{máx}}^2+y_{\text{máx}}^2=1 \quad \wedge \quad 0\leq x_{\text{máx}}\ ,\ y_{\text{máx}}\leq 1\ .$$

Por tanto se llega a la conclusión de que todos los puntos del arco de la circunferencia unitaria centrada en el origen, situado en el primer cuadrante, son puntos de máximo de la función.

Veamos ahora en que puntos la función alcanza su mínimo. Es obvio que los puntos mínimos de f cumplen:

$$\begin{cases} cos\,(\alpha-\beta)=-1 \\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\ \wedge\ \beta\in[0,\ \pi] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha-\beta=-\pi \\ \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]\ \wedge\ \beta\in[0,\ \pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \beta=\pi+\alpha\in[0,\ \pi] \quad \Rightarrow \quad (x_{\text{mín}}\ ,\ y_{\text{mín}}) = (sen\,\alpha\ ,\ -cos\,\alpha)\ , \quad \alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\ (\right.$$

$$\Rightarrow \quad x_{\text{mín}}^2+y_{\text{mín}}^2=1 \quad \wedge \quad -1\leq x_{\text{mín}}\ ,\ y_{\text{mín}}\leq 0\ ,$$

de donde se concluye que todos los puntos del arco de la circunferencia unitaria centrada en el origen, situado en el tercer cuadrante, son puntos de mínimo de la función.

2 Uso de procedimientos trigonométricos en la resolución de problemas de programación matemática

En problemas de optimización de funciones con restricciones en la forma de suma de cuadrados, una opción habitual es aplicar un cambio mediante $x = r\ sen\ \alpha$ o $x = r\ cos\ \alpha$ y considerar la acotación de $sen\ \alpha$ o $cos\ \alpha$.

<u>*Problema 17*</u> (Optimización con restricciones). Minimizar: $f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = x_2 + x_4$ sujeto a:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 9 \\ x_3^2 + x_4^2 = 16 \\ x_1x_4 + x_2x_3 \geq 12 \end{cases}$$

Solución. Cambiamos simultáneamente:

$$x_1 = 3cos\ \alpha,\ x_2 = 3sen\ \alpha,\ x_3 = 4cos\ \beta,\ x_4 = 4sen\ \beta;\ \ \alpha,\ \beta \in \Big(0,\ 2\pi\Big)$$

Entonces la última restricción se convierte en

$$12cos\ \alpha \cdot sen\ \beta + 12sen\ \alpha \cdot cos\ \beta \geq 12 \iff sen\ (\alpha + \beta) \geq 1 \iff$$

$$\iff \quad sen\ (\alpha + \beta) = 1 \quad \iff \quad \begin{cases} \alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} \\ \quad ó \\ \alpha + \beta = \frac{5\pi}{2} \end{cases}$$

En ambos casos se cumple $sen\ \alpha = cos\ \beta$, y en consecuencia

$$x_2 + x_4 = 3sen\ \alpha + 4sen\ \beta = 3cos\ \beta + 4sen\ \beta = 5\Big(\frac{3}{5}cos\ \beta + \frac{4}{5}sen\ \beta\Big)$$

Introduciendo el ángulo auxiliar φ mediante las fórmulas: $sen\,\varphi = \frac{3}{5}$ y $cos\,\varphi = \frac{4}{5}$ obtenemos:

$$x_2 + x_4 = 5sen(\varphi + \beta) \geq -5 \quad \Longrightarrow \quad [\text{mín}]f(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = x_2 + x_4 = -5$$

$$\begin{cases} 3cos\ \beta + 4sen\ \beta = 5 \\ sen^2\ \beta + cos^2\ \beta = 1 \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} cos\ \beta = -\dfrac{3}{5} \\ sen\ \beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Finalmente llegamos a la solución $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = (\frac{12}{5},\ -\frac{9}{5},\ -\frac{12}{5},\ -\frac{16}{5})$.

Conclusiones

Siendo continuación de un artículo anterior, en este trabajo hemos intentado destacar la diversidad de posibilidades que nos proporciona el uso de técnicas trigonométricas al alcance de los estudiantes de Bachillerato, pues este artículo puede tomarse como una sugerencia para los profesores sobre como enriquecer los contenidos de algunos temas clásicos con una mayor conexión entre ellos. Mediante varios ejemplos, el artículo demuestra que, en ocasiones, podemos aprovechar las técnicas trigonométricas como una alternativa al método habitual, para determinar máximos y mínimos de funciones sin emplear la derivada; que son también útiles al estudio de la acotación y para hallar el recorrido de estas. Es cierto que esta técnica de optimización no llega muy lejos en cuanto la función y/o las restricciones se complican mínimamente.

Bibliografía

[1] Costea, D. (1981): Problema E 18 651. *Gazeta matemática pentru Tineret (Gaceta Matemática para alumnos)*.

[2] Kadar, St. (1976): Problema E 16 181. *Gazeta matemática pentru Tineret (Gaceta Matemática para alumnos)*.

[3] Muntean, A. (2012): Procedimientos trigonométricos en la resolución de problemas específicos del álgebra, *Boletin de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, 90, 16-35.

[4] Revista rusa de Matemáticas y Física *Kvant*, 9 (1990).

[5] Suprún V. P. (2008): *Matematica para estudiantes preuniversitarios. Problemas de alta dificultad. 300 problemas detalladamente resueltos*, Editorial URSS, Moscú.

Sobre la congruencia de Cavalieri en triángulos

José Alberto García Suárez

I.E.S. Eduardo Pondal, de Santiago de Compostela
Dpto. de Economía Cuantitativa da Univ. de Santiago de Compostela
jalgasu@mundo-r.com

Abstract

In this note is proved, without the previous requirement of having equal areas, the existence of the positional relationship between two triangles that implies their Cavalieri – congruence when such equality exists. This proof simplifies the ones published by Eves[1] in 1988 and Halmos[2] in 1991, in which equality of areas is a necessary condition to arrive to the referenced position of triangles.

Introducción

El *Primer Principio de Cavalieri* afirma que dos figuras planas comprendidas entre dos líneas paralelas, de forma que cada paralela intermedia intercepta un segmento sobre cada figura, ambos de igual longitud, tienen igual área. De dos figuras que se pueden situar en la forma descrita se dice que son *Cavalieri-congruentes (cv-congruentes);* y la aceptación del citado principio como intuitivamente evidente permite determinar el área de cierta figura dada buscando otra de área conocida que sea cv-congruente con ella. Cavalieri desarrolla el método en el libro "*Geometria Indibisilibus*", publicado en 1635, y también lo aplican Roverbal (del que se reclama descubridor independiente), Torricelli, Fermat, Pascal y Barrow, consiguiendo resultados equivalentes a los obtenidos mediante integración.

En el caso de los triángulos es fácil deducir la verificación del *Principio*, dado que si dos son cv-congruentes sus posiciones relativas solo pueden ser como las indicadas en la figura 1, y la igualdad de áreas es consecuencia de la igualdad entre las bases de las parejas de triángulos y de trapecios que están comprendidos entre las mismas paralelas.

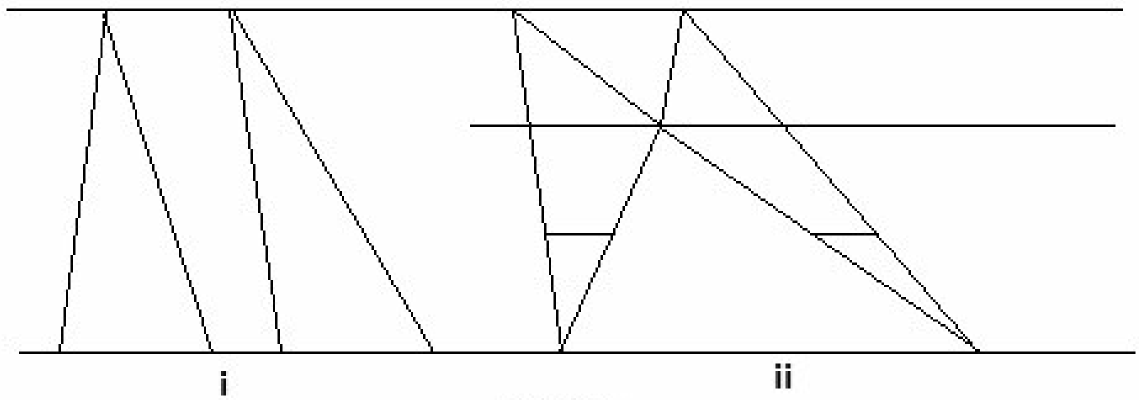


Figura 1

Consideremos el problema inverso: ¿Son necesariamente cv-congruentes dos triángulos de la misma área? La respuesta afirmativa resulta evidente si tienen un lado igual, o si es posible situarlos en la posición de la figura 1.ii), como ocurre si tienen un ángulo igual (oponiéndolos por el vértice de ese ángulo, las dos parejas de vértices – uno en cada triángulo – restantes, son extremos de los lados paralelos de un trapecio): Que una paralela determinara segmentos de distinta longitud sobre cada triángulo entraría en contradicción con la igualdad de sus áreas, expresada cada una como suma de las áreas de triángulos y trapecios comprendidos en las mismas paralelas.

El caso general lo aborda Paul Halmos (conocido autor del clásico texto –entre muchos otros – *"A Hilbert space problem book"*) en su libro *"Problems for mathematiciens, young and old"* , publicado en 1991, y que cito en su traducción al francés de 2000 [2]. Señala Halmos que *"este asombroso resultado pasó desapercibido hasta su descubrimiento relativamente reciente por H. Eves"*, quien, a su vez, en el título y en la introducción de su artículo publicado en 1988 [1] lo califica de *sorprendente* por considerar que *"es difícil de creer que un largo y estrecho triángulo de base una milla pueda ser cv-congruente, por ejemplo, a un triángulo equilátero de la misma área"*.

1. Triángulos en posición de Cavalieri

De las anteriores observaciones se desprende que sus autores no "visualizan" como cv-congruencia natural la de las parejas de triángulos que en un trapecio forman las diagonales con cada uno de los lados no paralelos, a la que arriba me refiero, y sobre la que llamo la atención de mis alumnos del Instituto desde hace décadas.

Eves presenta dos demostraciones, una de carácter constructivo, y otra como prueba de existencia, dividida esta en tres casos, según las posibles relaciones entre las longitudes de los lados de los triángulos. En ambas, la estrategia consiste en situar los triángulos en la posición indicada en la figura 1.ii) – que en lo que sigue se denominará *posición de Cavalieri* – , mediante la determinación de dos cevianas (segmentos vértice - punto del lado opuesto) de igual longitud, una en cada triángulo, que dividan a los lados correspondientes en segmentos proporcionales.

La de Halmos consiste en una elaborada prueba de existencia de las cevianas con las características citadas que permiten la posición de Cavalieri, basada en la original idea (desarrollada en [2] en las páginas 208-211) de hacer depender la longitud de cada ceviana del área por ella barrida, acumulada hasta tres veces, al tomar sucesivamente como pivote cada vértice, y llegando por reducción al absurdo a la conclusión de la existencia de un punto común a las funciones así construidas en cada triángulo, que engloba la solución buscada (igualdad de áreas barridas, y longitud común de las cevianas).

Aquí se prueba, de forma simple, que una pareja de triángulos puede situarse en la posición de Cavalieri bajo una hipótesis más general que la de la igualdad de sus áreas, de la que, en caso de darse, resulta como corolario la cv-congruencia.

Proposición. *Sean ABC y $A'C'B'$ triángulos con sus respectivos lados mayores $a < a'$, opuestos a los vértices A, A', y con alturas sobre ellos $h > h'$. Entonces es posible situarlos en la posición de Cavalieri con vértice común $C = C'$, en la cual los segmentos determinados por las paralelas intermedias sobre los triángulos están en la misma razón que sus áreas.*

Demostración. Si H, H' son los pies de las alturas, se puede suponer sin pérdida de generalidad que $BH \leq a/2$ y $B'H' \geq a'/2$ y situar inicialmente los triángulos de modo que los lados a, a' sean uno prolongación de otro, como se indica en la figura 2.i (de ser las posiciones relativas de H y H' diferentes a las supuestas, invertiríamos las situaciones indicadas para a y a', o bien los superpondríamos, para obtener la misma conclusión). Obviamente, la distancia, h, del vértice A a la recta que contiene a los citados lados es mayor que la de A', h'.

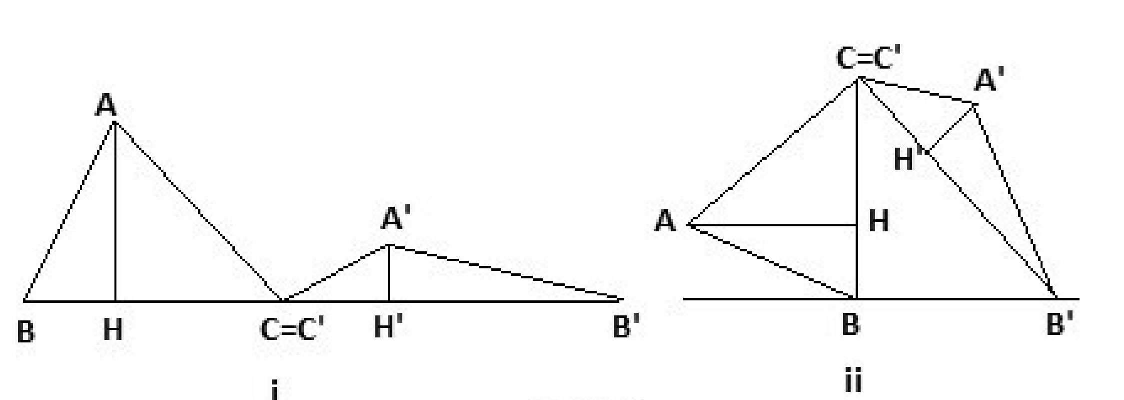


Figura 2

Desplazando perpendicularmente el vértice común $C = C'$ y manteniendo B y B' sobre la recta, se llega necesariamente a la posición ii) de la figura, en la cual la distancia de A a la recta es menor que la de A'. Y de la continuidad del desplazamiento se deduce la existencia de una posición intermedia (la posición de Cavalieri) en la que A y A' están a igual distancia de la recta.

Formalicemos analíticamente esta explicación de carácter heurístico. Sea f la función dependiente de la altura, x, del desplazamiento perpendicular de $C=C'$, que mide la diferencia entre las distancias de A y A' a la recta que contiene a sus lados opuestos, a y a', en su posición inicial, en la que siempre permanecen los vértices B, B' (figura 3). De la semejanza de cada pareja de triángulos, AHK con BHL, y $A'H'K'$ con $B'H'L'$ resulta:

$$f(x) = AK + HL - A'K' - H'L' =$$

$$AH.BO/BC + BH.x/BC - A'H'.B'O/B'C' - B'H'.x/B'C',$$

es decir, denotando $BH = a_1$, $B'H' = a_1'$,

$$f(x) = h(a^2 - x^2)^{1/2}/a + a_1x/a - h'(a'^2 - x^2)^{1/2}/a' - a_1'x/a',$$

$$f(0) = h - h' > 0, \qquad f(a) = a_1 - h'(a'^2 - a^2)^{1/2}/a' - a_1'a/a' <$$

$$< a_1 - h'(a'^2 - a^2)^{1/2}/a' - a/2 < 0,$$

ya que estamos suponiendo que $a_1 < a/2$ y $a_1' > a'/2$.

La resolución de la ecuación $f(x) = 0$, conduce a una ecuación bicuadrada de la que se obtiene el valor de x que fija la posición Cavalieri.

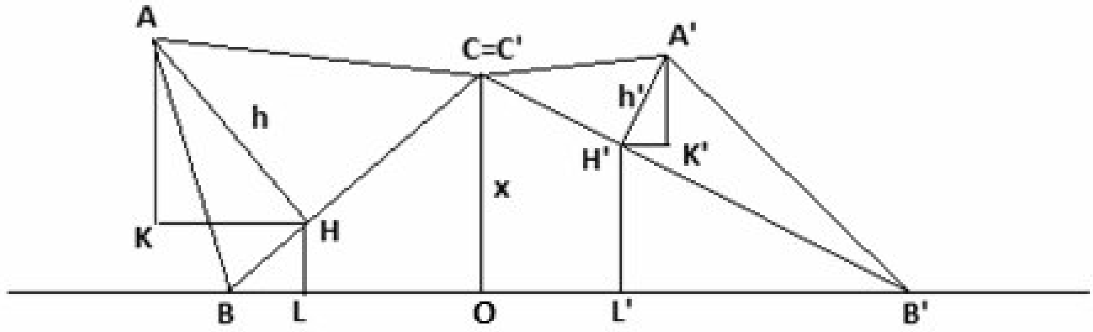


Figura 3

La proporcionalidad entre segmentos y áreas se obtiene, para los segmentos *RC* y *CR'* expresando el área de cada triángulo como suma de las de los dos triángulos de base común *RC* y *CR'* respectivamente (figura 4). Y para cualquier otra pareja de segmentos *ST* y *S'T'*, considerando los trapecios *RCTS* y *R'CS'T'* y descomponiendo cada área en tres sumandos.

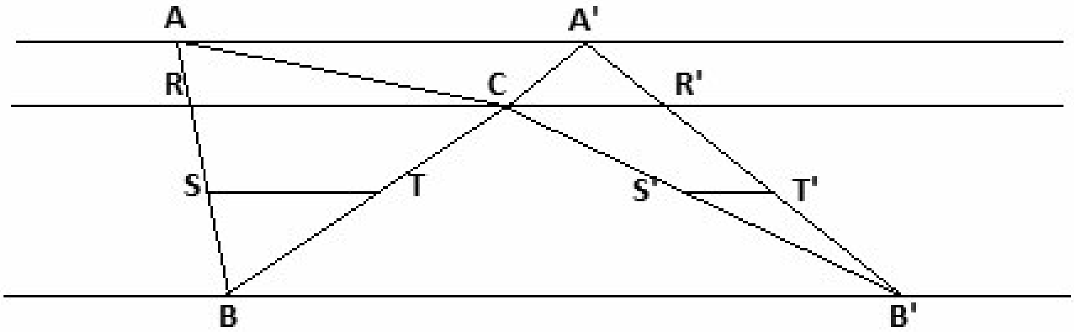


Figura 4

Corolario. *Dos triángulos de igual área son Cavalieri congruentes.*

Demostración. La igualdad de áreas $ah = a'h'$ implica que si $a < a'$, entonces $h > h'$, y en consecuencia la existencia de la posición de Cavalieri entre los triángulos que pone de manifiesto la congruencia.

Referencias

[1] Eves, Howard. *Two Surprising Theorems on Cavalieri Congruence.* The College Mathematics Journal, Vol. 22 No. 2 (Mar. 1991), 118 – 124. (Reprinted from the 1988 Mathematical Sciences Calendar. Rome Press, Inc.)

[2] Halmos, Paul. *Problemes pour mathématiciens, petits et grands*. Problèm 5 J. Cassini, Paris 2000. Traducción de *Problems for mathematicians, young and old*. Mathematical Association of America, Washington, D.C. 1991.

En el Centenario de Alan Turing. Turing *versus* Torres Quevedo

Francisco González de Posada
Dpto. Física e Instalaciones. ETS Arquitectura
Universidad Politécnica de Madrid
francisco.gonzalez@upm.es

El 23 de junio de 1912 nacía en Londres Alan Turing, reconocido como uno de los padres y pioneros de disciplinas científicas tan actuales como Informática, Inteligencia artificial, Robótica y Automática. En este año 2012 el mundo científico universal se desborda para conmemorar su nacimiento.

También en España se está recordando y se recordará a bombo y platillo. De momento, hemos tenido público conocimiento, a modo de introducción, por mediación de un interesante artículo de Ramón López de Mántaras, "El legado de un científico visionario", en *El País* del pasado 21 de marzo, bajo la cabecera "Futuro. Centenario de Alan Turing".

Y todo ello está muy bien. El conceptualizador de lo que en la actualidad se denomina *máquina de Turing*, base de los ordenadores actuales, con la introducción de los conceptos de *algoritmo* y de *calculabilidad*; el proponente del hoy denominado *test de Turing* para averiguar si una máquina es o no inteligente; el impulsor de la autonomía de los robots y el introductor de las máquinas conexionistas, merece el recuerdo, el homenaje, el estudio de su obra y la reflexión sobre ella; todo esto.

Y merece, además, la gratitud de la humanidad, no sólo por tanto concepto matemático como aportó a la historia del conocimiento ocupando lugar preeminente en la ciencia del siglo XX, sino también por el importante papel que desempeñó para descifrar los mensajes codificados que se intercambiaban los mandos nazis, facilitando el acortamiento de la II Guerra Mundial y, consecuentemente, reduciendo el número de víctimas de la misma. Y más aún, merece también que se le haga a título póstumo una solicitud de perdón por el triste final de su vida.

Por su condición homosexual fue procesado, condenado y sometido a castración química, elegida por él frente a la cárcel, de manera que sometido al repudio social y a secuelas físicas y psíquicas, acabó suicidándose por envenenamiento con cianuro. Es decir, merecedor de homenaje, de reconocimiento, de gratitud y de solicitud de perdón.

Todo esto está muy bien, y debe ser así. Pero, al menos si se escribe o se habla en España o desde España, con unas condiciones mínimas.

Primera. Que no se olvide que el padre e inventor de la Automática fue el ingeniero español Leonardo Torres Quevedo, que inició, precisamente en el año del nacimiento de Turing, la construcción de su 'primer ajedrecista', la primera máquina que *automáticamente* jugaba un final de partida de ajedrez, dando jaques y mate al rey contrario con torre y rey, *ajedrecista* que presentó en París en enero de 1914 ante el asombro de los académicos franceses, que ya habían reconocido anteriormente sus máquinas de calcular algébricas y con asombro, en el año 1911, visto su dirigible, el 'Astra-Torres nº 1', encabezar el desfile nacional del 14 de julio por los Campos Elíseos rumbo al Arco del Triunfo.

Segunda. Que se recuerde que los conceptos básicos de Automática y Robótica quedaron establecidos por Torres Quevedo en sus *Ensayos sobre Automática* en 1914, más de veinte años antes de que Alan Turing iniciara su extraordinaria senda.

Tercera. Que se deje constancia de que el *aritmómetro electromecánico*, presentado en París en 1920 para conmemorar el centenario del aritmómetro de Tomas de Colmar, se considera en el ámbito francés, con razón, el primer ordenador del mundo en el sentido actual. Fue traducido al inglés por Brian Randell en 1973 y yo tuve el honor de traducir e impulsar la primera versión española (Intemac, edición numerada de Navidad, trilingüe español-inglés-francés) en 1996.

Y *cuarta*, y quizás sobre todo, que los españoles -al menos los españoles- cuando festejemos a Alan Turing, sepamos que antes de éste, bastante antes, inició con notable éxito estos caminos Leonardo Torres Quevedo. Ya hacemos bastante el *papanatas* cuando a los dirigibles los llamamos *zeppelines*, siendo así que los *torresquevedos* utilizados por los aliados en la I Guerra europea o mundial desplazaron a los *zeppelines* en la segunda década del siglo. Es cierto que, desaparecido de la escena competitiva mundial don Leonardo, ya a finales de la década de los veinte, fue cuando se impusieron los nuevos dirigibles alemanes, pero éstos acabarían su gloriosa pero efímera presencia con el estrepitoso desastre del 'Hindenburg' en llamas sobre Nueva York. Y, sobre todo, como ha ilustrado en sus libros y artículos el profesor Francisco A. González Redondo, todos los dirigibles actuales incorporan las primordiales ideas establecidas hace cien años por el inventor español habiendo prescindido de las propugnadas por Zeppelin.

¿Cuándo vamos a introducir en nuestro lenguaje científico el *autómata torresquevediano*? ¿Cuándo el *aritmómetro torresquevediano*, que fue el auténtico primer ordenador del mundo en el sentido actual? ¿Cuándo el *telekino torresquevediano,* primer dispositivo de mando a distancia? Etc. Lo cortés y la justicia con Turing no nos eximen de la nobleza y de la verdad con Torres Quevedo. En ningún lugar, pero menos en España, cuando se hable de Turing puede no citarse a Torres Quevedo, que lo precedió en prácticamente todo como primer pionero en estos ámbitos y estableciendo en todos ellos lo primordial, lo antecedente.

Perturbación de las hipersuperficies $S = \{r = r_0\}$ en la métrica de Schwarzchild debida a su curvatura extrínseca

Jose Mª Fernández Cristóbal
RIES Jovellanos.Gijón.Asturias
jmariafc@educastur.princast.es

Abstract

We study the perturbation of hypersurfaces $S(x) = \{r = r_0\}$ inside the Schwarzchild metric under its own extrinsic curvature. Particularly, we consider $r_0 = 2M$ (the event horizon) and we show that the induced metric of this is kept stable under the induced perturbation by the extrinsic curvature.

1 Introducción

En cualquier fenómeno físico la solución completa de las ecuaciones que le gobiernan depende de los valores iniciales de las magnitudes que intervienen y de sus derivadas, es decir de las denominadas *condiciones de contorno*. La relatividad general no es una excepción en este sentido y la resolución del denominado *problema de valores iniciales* de la relatividad general implica seleccionar una *hipersuperficie* (el conjunto de puntos definidos por la condición $S(x^\mu) = Cte$ siendo $x^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ las coordenadas) de género espacio (o espacial) que puede escogerse libremente y sobre ésta especificar dos tensores simétricos [1] :

- La *métrica inducida* o *primera forma fundamental* $h_{\mu\nu}$(aunque escrito en forma cuadri-dimensional con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, en realidad $h_{\mu\nu}$ sólo tiene 6 componentes como veremos) que "hereda" la hipersuperficie de la métrica $g_{\mu\nu}$ que opera sobre toda la variedad M en la que está inmersa S.

- Su derivada de Lie a lo largo de la dirección normal a la hipersuperficie η que es, salvo factores, la *segunda forma fundamental* o *curvatura extrínseca* $\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2}L_\eta h_{\mu\nu}$ y que determina la forma en la que S está "sumergida" en M. [2]

Estos tensores no pueden escogerse libremente sino que han de verificar, además de las ecuaciones de Einstein, las denominadas *ecuaciones de Gauss-Codazzi.* Habitualmente,y en relación con otros problemas, la elección de la hipersuperficie S suele ser la "rodaja" $t = t_0$. Sin embargo, en nuestro caso elegiremos como hipersuperficies las definidas por la condición $S = \{r = r_0\}$ y veremos cómo evolucionan bajo la perturbación introducida por su propia curvatura extrínseca. Como caso particular, consideraremos las que mantienen invariante la métrica inducida (llamada también, a veces , métrica espacial).

2 Métrica inducida

La solución (única según el teorema de Birkhoof), asintóticamente plana, de las ecuaciones de Einstein en el vacío que describe el campo gravitacional exterior ($r > 2M$) de un cuerpo arbitrario -estático, oscilante colapsándose o expandiéndose - de masa M y esféricamente simétrico (en adelante r,θ, φ son las coordenadas esféricas y t es la coordenada temporal) es, en unidades naturales ($G = c = \hbar = 1$),[3] :

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r})dt^2 + (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \tag{1}$$

siendo $d\Omega^2 = d\theta^2 + sen^2\theta d\phi^2$.

Esta fue obtenida por Schwarzchild y , aunque inicialmente fue considerada por el propio Einstein como una curiosidad matemática simplemente, físicamente se corresponde con un agujero negro no rotante y sin carga de masa M. La métrica del mismo es :

$$g_{\mu\nu} = diag(-(1 - \frac{2M}{r}), (1 - \frac{2M}{r})^{-1}, r^2, r^2 sen^2\theta) \tag{2}$$

$$\Longrightarrow g^{\mu\nu} = diag(-(1 - \frac{2M}{r})^{-1}, 1 - \frac{2M}{r}, r^{-2}, (rsen\theta)^{-2}) \tag{3}$$

Esta contiene una singularidad no esencial (en el sentido de que ésta es evitable si se escoge un sistema de coordenadas apropiado) en

$r_H = 2M$ que define el denominado *horizonte de sucesos*: la superficie de no retorno a través de la cual nada puede escapar del agujero negro.

El cuadrivector normal a las hipersuperficies $S(x) = \{r - r_0 = 0\}$ está definido por la expresión [3]:

$$\eta^\mu = N(x) g^{\mu\nu} \partial_\nu S(x) = N(x) g^{rr} \delta^{\mu r} \tag{4}$$

siendo $N(x)$ un factor de normalización escogido de forma que $\eta^2 = g_{\mu\nu}\eta^\mu\eta^\nu$ sea 1 (así será de género espacio).Por tanto, obviamente:

$$\eta^\mu = \sqrt{g^{rr}} \delta^{\mu r} \Longrightarrow \eta_\mu = g_{\mu\nu}\eta^\nu = \sqrt{g_{rr}} \delta_{\mu r} \tag{5}$$

La métrica inducida sobre la superficie S ($r - r_0 = 0$) o *primera forma fundamental* es [4]:

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_\mu\eta_\nu = g_{\mu\nu} - g_{rr}\delta_{\mu r}\delta_{\nu r} = diag(-(1 - \frac{2M}{r_0}), 0, r_0^2, r_0^2 sen^2\theta) \tag{6}$$

Y por tanto:

$$h^\nu_\mu = g^{\nu\rho} h_{\mu\rho} = \delta^\nu_\mu - \eta_\mu \eta^\nu = \delta^\nu_\mu - \delta_{\mu r}\delta^{\nu r} \quad {}^{1} \tag{7}$$

Obviamente esta métrica verificará, entre otras, las siguientes propiedades:

$$h_{\mu\nu}\eta^\nu = (g_{\mu\nu} - \eta_\mu\eta_\nu)\eta^\nu = 0 \tag{8}$$

$$\eta^\nu \bigtriangledown_\sigma h_{\mu\nu} = -h_{\mu\nu} \bigtriangledown_\sigma \eta^\nu \tag{9}$$

siendo ∇ la derivada covariante.

Nos proponemos estudiar el efecto que sobre tales hipersuperficies puede introducir su propia curvatura extrínseca.

3 La curvatura extrínseca

La curvatura extrínseca o *segunda forma fundamental* asociada a esta métrica inducida está dada por [4] :

$$\kappa_{\mu\nu} = h^\alpha_\mu h^\beta_\nu (\bigtriangledown_\alpha \eta_\beta + \bigtriangledown_\beta \eta_\alpha) = g^{\sigma\lambda} g^{\varrho\tau} h_{\mu\sigma} h_{\nu\varrho} (\nabla_\lambda \eta_\tau + \bigtriangledown_\tau \eta_\lambda) \tag{10}$$

[1] No debe entenderse suma sobre r

Por otra parte:

$$\begin{aligned}\nabla_\mu \eta_\nu = \partial_\mu \eta_\nu - \Gamma^\sigma_{\mu\nu}\eta_\sigma = \delta_{\nu r}\partial_\mu \sqrt{g_{rr}} - \delta_{\sigma r}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\sqrt{g_{rr}} = \\ \delta_{\nu r}\partial_\mu \sqrt{g_{rr}} - \Gamma^r_{\mu\nu}\sqrt{g_{rr}} = \sqrt{g_{rr}}(\delta_{\nu r}\partial_\mu log\sqrt{g_{rr}} - \Gamma^r_{\mu\nu})\end{aligned} \tag{11}$$

O bien:

$$\nabla_\mu \eta_\nu = \sqrt{g_{rr}}(\delta_{\nu r}\delta_{\mu r}\partial_r log\sqrt{g_{rr}} - \Gamma^r_{\mu\nu}) \tag{12}$$

Por tanto (10) queda de la forma:

$$\kappa_{\mu\nu} = 2\sqrt{g_{rr}}(h^r_\mu h^r_\nu \partial_r log\sqrt{g_{rr}} - h^\lambda_\mu h^\sigma_\nu \Gamma^r_{\lambda\sigma}) \quad ^2 \tag{13}$$

Ahora bien, sobre la hipersuperficie $r - r_0 = 0, \quad h^r_\mu = 0 \quad \forall \mu$. Por tanto la curvatura extrínseca sobre la misma queda:

$$\kappa_{\mu\nu} = -2\sqrt{g_{rr}} h^\lambda_\mu h^\sigma_\nu \Gamma^r_{\lambda\sigma} \tag{14}$$

Conocemos, por otra parte, que los únicos símbolos de Christoffel no nulos con superíndice r son [5]:

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{M}{r^3}(r - 2M) \qquad \Gamma^r_{rr} = \frac{-M}{r(r-2M)}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -(r - 2M) \qquad \Gamma^r_{\phi\phi} = -(r-2M)sen^2\theta$$

Por tanto la curvatura extrínseca de las hipersuperficies $r = r_0$ es:

$$\kappa_{\mu\nu} = -2\sqrt{r_0(r_0 - 2M)}[\frac{M}{r_0^3}h^t_\mu h^t_\nu - h^\theta_\mu h^\theta_\nu - h^\phi_\mu h^\phi_\nu sen^2\theta] \tag{15}$$

O bien, a partir de (7):

$$\kappa_{\mu\nu} = -2\sqrt{r_0(r_0 - 2M)}[\frac{M}{r_0^3}\delta^t_\mu \delta^t_\nu - \delta^\theta_\mu \delta^\theta_\nu - \delta^\phi_\mu \delta^\phi_\nu sen^2\theta] \tag{16}$$

Es sabido [1][4], por otra parte, que para los vectores unitarios, η, normales a las hipersuperficies $r - r_0 = 0$ se verifica que la derivada de Lie, en la dirección de tales vectores , L_η , de las métricas inducidas es simplemente 2 veces el tensor de curvatura. Es decir:

$$\kappa_{\mu\nu} = \frac{1}{2}L_\eta h_{\mu\nu}$$

[2] Idem

La perturbación de la métrica $h_{\mu\nu}$ en la vecindad de la hipersuperficie $r = r_0$ mediante una variación infinitesimal δr viene dada por la expresión :

$$h_{\mu\nu} \longrightarrow h_{\mu\nu} + \delta r L_\eta h_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\delta r \kappa_{\mu\nu}$$

Por tanto tendremos que la "nueva" métrica inducida es :

$$d\acute{s}_0^2 = (h_{\mu\nu} + 2\delta r \kappa_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu = ds_0^2 + 2\delta r \kappa_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \tag{17}$$

A partir de esta ecuación está claro que la métrica inducida sobre la hipersuperficie no cambia bajo la acción de la curvatura extrínseca bien porque:

$$\kappa_{\mu\nu} \mid_S = 0 \tag{18}$$

o bien porque, aún siendo $\kappa_{\mu\nu} \mid_S \neq 0$:

$$\kappa_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \tag{19}$$

En el caso que estamos tratando la métrica inducida varía de la forma:

$$h_{\mu\nu} - 4\delta r \sqrt{r_0(r_0 - 2M)} [\frac{M}{r_0^3} \delta_\mu^t \delta_\nu^t - \delta_\mu^\theta \delta_\nu^\theta - \delta_\mu^\phi \delta_\nu^\phi sen^2\theta] \tag{20}$$

Por componentes, ésta variación es:

- (tt)
$$-(1 - \frac{2M}{r_0}) - 4\frac{M\delta r}{r_0^2} \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}} \tag{21}$$
- (rr)
$$0 \tag{22}$$
- $(\theta\theta)$
$$r_0^2 (1 + 4\frac{\delta r}{r_0} \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}}) \tag{23}$$
- $(\phi\phi)$
$$r_0^2 sen^2\theta (1 + 4\frac{\delta r}{r_0} \sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}}) \tag{24}$$

La métrica inducida sobre la hipersuperficie $r = r_0$ es, de acuerdo con (6):

$$ds_0^2 = -(1 - \frac{2M}{r_0}) dt^2 + r_0^2 d\Omega^2 \tag{25}$$

y bajo la transformación infinitesimal (16) se transforma en:

$$ds_0^2 \to ds_0^2 + 4\delta r \sqrt{(1 - \frac{2M}{r_0})} [-\frac{M}{r_0^2} dt^2 + r_0 d\Omega^2] \tag{26}$$

4 Horizonte de sucesos

Obviamente en el horizonte de sucesos $r_0 = 2M$ y, a partir de las ecuaciones anteriores, (21)-(24), queda claro que estamos en el caso en que se verifica la ecuación (18) y por tanto la métrica inducida sobre el mismo no sufre ninguna modificación debido a su propia curvatura extrínseca, al menos, a primer orden perturbativo. La métrica inducida, que permanece invariante, en el horizonte es:

$$ds_h^2 = 4M^2 d\Omega^2 \tag{27}$$

5 Conclusiones

Se ha estudiado el comportamiento de la métrica inducida sobre las hipersuperficies $S = \{(r = r_0\}$ (las de coordenada radial constante) para un agujero negro de carga nula y de momento angular nulo (agujero negro de Schwarzchild) bajo la perturbación (a primer orden) producida por su propia curvatura extrínseca. Como caso particular de ese tipo de hipersuperficies se ha considerado el horizonte de sucesos del agujero negro y hemos obtenido el resultado de que la métrica inducida sobre éste no sufre ninguna perturbación en absoluto. Si bien los efectos físicos de este resultado, si los tuviese, no se alcanzan a ver de forma nítida, pensamos que, como ejercicio matemático, el estudio realizado es interesante. Obviamente podría generalizarse el mismo a otro tipo de métricas como por ejemplo la de un agujero negro con carga (Reissner-Nordsrtöm) y/o con momento angular (Kerr-Newman).

6 Referencias

[1] Poisson, E.*An avanced course in general relativity.* www.physics.ouguelph.ca

[2] Gibbons, G.W.*The Time Symmetric Initial Value Problem for Black Holes.* Commun.math.Phys. **27**,87-102 (1972)

[3] Townsend, P.K. *Black Holes.*Lectures notes. **gr-qc/9707012**.

[4] Ortín, T. *Agujeros negros clásicos y cuánticos en Teoría de Cuerdas.* **hep-th/ 0405005**.

[5] Carroll S. M. *Lectures notes on General Relativity* **gr-qc /9712019**

La Matemática en las revistas científicas españolas del siglo XIX

Francisco A. González Redondo
Dpto. Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@edu.ucm.es

Abstract

In 1911 the Spanish Mathematical Society started its activities publishing the first issue of their Journal. At last, the mathematical community in our country had their own publication gathering together the results of their scientific work. But this initiative was not an isolated outgrowth of the first decade of 20th century, but the last step in a continuous process full of personal and institutional efforts that run all along 19th century.

1. A modo de introducción

En 1911 comenzaba su existencia la Sociedad Matemática Española (SME). Como habían hecho años antes los Físicos y Químicos, por primera vez, la comunidad de matemáticos españoles se reunía en una asociación y empezaba la publicación de su *Revista*. Fructificaban así diferentes llamadas de atención y no pocas iniciativas, muchas de ellas a título personal, que a lo largo del siglo XIX y primera década del XX habían intentado (sin éxito apreciable) acercarnos a las vías de institucionalización científica consagradas en nuestro entorno europeo inmediato y que en España habían tenido que esperar a la constatación final de nuestra decadencia, abruptamente aprehendida tras el 'desastre del 98'[1].

[1] Acerca de la gestación y primeros pasos de la SME pueden verse, entre otros trabajos, los de Ausejo y Millán (1994), González Redondo y de León (2001) y Español (2011).

Los pasos inmediatos que permitirían la consecución de tantos deseos se dieron a partir de la creación de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (AEPC) en 1908 y la celebración de su Congreso fundacional en Zaragoza ese mismo año[2]. Allí, Manuel Benítez Parodi, Vicepresidente de la Sección de Ciencias Exactas, terminaba su Discurso con las siguientes palabras[3]:

> "Es indispensable, particularmente en España, que los amantes de tales estudios [matemáticos] mantengamos lazos de unión y fraternidad estrecha, y nada mejor para conseguirlo que formar una Asociación de matemáticos españoles, que pudiera tener por base el personal docente de las Facultades de Ciencias de nuestras Universidades y el de las Academias civiles y militares, y tomar acaso por modelo *la Societé mathématique de France*, establecida en la *Sorbonne*.
>
> Y por si pareciese admisible la idea, la resumiré en esa forma: creación de una Sociedad Matemática Española con los propósitos que siguen: 1º Publicación de un *Boletín* con trabajos originales de investigación científica y las noticias más importantes de la prensa matemática nacional y extranjera […]"

Las diferentes iniciativas aprobadas en Zaragoza fueron desarrolladas en la siguiente reunión de la AEPC, celebrada en Valencia del 15 al 20 de mayo de 1910. La más importante era la creación en España de una Sociedad de matemáticos que editara su propia publicación periódica, y para su organización se había nombrado una Comisión Gestora compuesta por el General Benítez, Luis Octavio de Toledo, Cecilio Jiménez Rueda y Julio Rey Pastor. Todo ello quedó certificado en el Discurso Inaugural de la Sección de Ciencias Matemáticas del Congreso de Granada de la AEPC, celebrado del 20 al 25 de junio de 1911, en el que Jiménez Rueda terminaba su intervención constatando[4]: "Acaba de constituirse, al amparo de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, la Sociedad Matemá-

---

[2] Estudios sobre el proceso de gestación de la SME desde la AEPC son los de Hormigón (1987), González Redondo y de León (2000) y Español (2011).

[3] Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1908). *Congreso de Zaragoza*, Tomo I, Primera Parte, pp. 69-89.

[4] Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1908). *Congreso de Granada*, Tomo I, Primera Parte, Discursos de Apertura, pp. 29-30.

tica Española, análoga a la de Física y Química y a la de Historia Natural, la cual publica una *Revista* de Matemáticas puras y aplicadas [...]".

Conocer en detalle el panorama completo de los más de cien años de iniciativas matemáticas emprendidas en nuestro país que culminaron en la primavera de 1911 con la elección de la primera Junta Directiva de la SME y la aparición del primer número de la *Revista* constituye tarea para muchos artículos. En éste se detallan un primer recorrido por las diferentes revistas científicas con contenido matemático que se editaron en España a los largo del siglo XIX y primeros años del XX.

2. La Matemática en las revistas científicas españolas del siglo XIX

El siglo XIX se inaugura, a los efectos de este trabajo, con la publicación, a partir de octubre de 1801, del *Memorial Literario ó Biblioteca Periódica de Ciencias y Artes*[5], bajo la dirección de Pedro María Olive (1767-1843). Heredero declarado del *Memorial instructivo y curioso de la Corte de Madrid* (publicado entre 1784 y 1790), único periódico que obtuvo permiso para reanudar su publicación en 1793 (hasta su desaparición en diciembre de 1797), tras la suspensión de todos los medios decretada en 1791 por José Moñino y Redondo (Conde de Floridablanca)[6], pretendía ofrecer a los españoles una crónica de las novedades literarias, artísticas, científicas, técnicas, legislativas y académicas, desde una perspectiva ilustrada moderada, respetuosa y hasta defensora del rey, la religión y la tradición española, al mismo tiempo que abierta al extranjero, especialmente al quehacer del Instituto Nacional de Francia.

El *Memorial* se constituye así en la primera publicación periódica española del siglo XIX que incluye entre sus contenidos la Ciencia y la Técnica en general, y la Matemática en particular, pues, para sus responsables: "una nación tiene necesidad de buenas obras periódicas, que den razón del estado y progresos de los conocimientos humanos con la intención de dar noticia de los descubrimientos y adelantamientos de cada ciencia y arte en particular". Y a ello dedican sus páginas, a la crítica, reseña e información bibliográficas. Como es natural, la presencia de referencias a temas matemáticos sólo constituirá una pequeña parte del conjunto de trabajos científicos publicados, que a su vez constituían entre la cuarta y la

---

[5] En www.bne.es puede consultarse esta revista digitalizada.
[6] El *Memorial Literario* se estudia en Ausejo (1998).

quinta parte de cada volumen del *Memorial*, pero, en cualquier caso, nuestra disciplina aparecía impresa en una revista. En suma, los primeros pasos estaban dados… aunque se detendrían con el estallido de la Guerra de la Independencia

Reinstaurado el absolutismo en España con la vuelta de Fernando VII tras la expulsión de los ejércitos franceses, en 1817 comienza a editarse en Madrid la *Crónica Científica y Literaria*[7]. Su fundador fue José Joaquín de Mora (1783-1864), político liberal y escritor conocido en la Historia de la Literatura por su polémica contra el Romanticismo. Como es natural, es a la Literatura a lo que mayor atención se presta en la *Crónica*. La divulgación científica y técnica llegaría a ocupar una cuarta parte de los contenidos, referidos especialmente a cuestiones prácticas sanitarias y de técnica agrícola, aunque también se recogieron algunas noticias sobre cuestiones astronómicas y sobre Electricidad, así como las reseñas de dos trabajos matemáticos elementales, uno de Aritmética y otro de Geometría[8].

En suma, transcurrido el primer tercio del siglo XIX, protagonizado por la resistencia del absolutismo a la entrada del pensamiento ilustrado, la Guerra de la Independencia, y las diferentes contiendas civiles que le siguieron, la situación de las Ciencias, en general, y de nuestra disciplina en particular, no era la más propicia para que pudieran fructificar iniciativas editoriales en el ámbito de la Matemática. Para ilustrar el panorama en esos momentos, resulta muy ilustrativa la valoración del Marqués de las Amarillas y el Marqués de Santa Cruz, retomada por el Conde de Ofalia, y recogida en un informe remitido al Ministerio de Fomento el 20 de febrero de 1934, en relación con la propuesta de creación de una Academia de Ciencias[9]:

> "Si tendemos la vista al campo general de nuestra ilustración en los más de los ramos que señala el Decreto a las Secciones de la Academia proyectada, y si recorremos esas Universidades, donde todavía se conserva la división del Peripato y el sistema o círculo de Ciencias que se estableció hace seis siglos, veremos que alguna vez, como por excepción y privadamente se enseñan en ellos los primeros elementos de las Matemáticas, nun-

---

[7] En www.bne.es puede consultarse esta revista digitalizada.

[8] Un análisis de la *Crónica Científica y Literaria* puede verse en Ausejo (2001).

[9] Informe recogido en Peset, Garma y Pérez Garzón (1978). Puede verse, también, Gomis Blanco, Fernández Pérez y Pelayo López (1986).

ca la verdadera Física, ni la Química, ni las demás ciencias naturales, ni la Astronomía".

Conscientes de esa realidad, a lo largo del siglo XIX algunas instituciones científicas, animadas por el deseo de encuentro con la Ciencia practicada en los países de nuestro entorno, desarrollaron incipientes actividades científicas, entre las que puede destacarse la edición de publicaciones periódicas recogiendo trabajos matemáticos. Así, el 7 de febrero de 1834, en los primeros años de la Regencia de la Reina Gobernadora María Cristina de Borbón, nacía la Real Academia de Ciencias Naturales de Madrid[10]. Su objeto consistiría en promover el estudio de todas las Ciencias Naturales y propagar esta clase de conocimientos publicando el resultado de sus tareas e investigaciones. Los ocho académicos de número de la sección de Ciencias Físico-Matemáticas comenzaron sus trabajos nada más tomar posesión de sus plazas el 24 de julio de 1835, tareas reglamentarias que quedaron recogidas en los *Resúmenes de las Memorias presentadas en el curso anterior*, redactadas por Mariano Lorente durante los cuatro años siguientes. Del total de 69 trabajos recogidos hasta el curso 1838-39, destacan los diez presentados por el matemático granadino José Mariano Vallejo. Pero este primer anuario-revista científica de contenido matemático del siglo XIX dejaría de publicarse a partir de 1839, por falta de medios de la Academia que vería languidecer sus actividades a partir de entonces, hasta que en 1846 solicitaran del Ministerio de Fomento la creación de una Academia Nacional de Ciencias.

Desde el Observatorio Astronómico de la Armada en San Fernando (Cádiz), y por iniciativa del que había sido su Director, el entonces ya brigadier retirado del servicio José Sánchez Cerquero (1784-1850), surgió en 1848 la primera revista científica especializada en Matemáticas y Física, el *Periódico Mensual de Ciencias Matemáticas y Físicas*[11]. Solamente alcanzaría seis números antes de que el editor tuviera que suspender la publicación por el corto número de suscriptores alcanzado: veintiocho entre personas e instituciones. En total aparecerían once trabajos más o menos originales, nueve de Matemáticas y dos de Física, y uno traducido del *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville. Entre ellos pueden destacarse "Memoria acerca del Teorema de Wilson demostrado por Lagrange" por Alberto Lista, "Nota relativa a la determinación de los ejes princi-

[10] Gomis *et a*l. (1986), *op. cit.*

[11] El *Periódico Mensual de Ciencias Matemáticas y Físicas* se analiza en Ausejo y Hormigón (1986).

pales de un cuerpo" por Rehuel Lobatto (el traducido del francés), "Observaciones sobre el desarrollo de funciones en serie, empleando la diferenciación" por el propio José Sánchez Cerquero, etc.

Atendiendo la solicitud de la casi fenecida Real Academia de Ciencias Naturales de Madrid, el 25 de febrero de 1847 la Reina Isabel II firmaba el Real Decreto por el que se creaba la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid[12], suprimiendo la Real Academia de Ciencias Naturales, cuyos fondos, actas, memorias, etc. pasaron a la nueva corporación. La revista de la nueva Academia no vería la luz hasta 1850, con el nombre de *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*[13]. Comenzaba su andadura con una "Advertencia preliminar"[14]: "La Academia Real de Ciencias, ocupada desde su creación en las tareas propias de su instituto, ha mirado siempre como una de las principales entre cuantas reclama el estado de instrucción en España, la de la formación de un resumen o análisis de lo más notable que contengan las actas y periódicos nacionales y extranjeros".

Radicando en la Academia los cultivadores de la Matemática con mayor reconocimiento social y oficial (esencialmente, ingenieros y militares, con prácticamente ausencia de catedráticos universitarios), en ella debería buscarse la base para conocer la situación de la Matemática española de su época. Y es cierto que el primer trabajo publicado fue la reproducción del artículo "Cálculo integral. Rectificación de la circunferencia de círculo, o valor de π", publicado en 1848 por Sánchez Cerquero en el *Periódico Mensual*. Sin embargo, sería la única aportación española durante muchos años: hasta 1866 todos los trabajos de Matemáticas recogidos en los *Progresos* consistieron en traducciones de las Notas (especialmente de Astronomía) publicadas por autores extranjeros en las *Comptes Rendus* de la Academie des Sciences de París, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* de Liouville, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, *Cosmos*, etc. Y es que la pretensión de los académicos con su revista no era publicar sus propios trabajos, sino ofrecer a los estudiosos un medio que les informase de los adelantos de las ciencias, y esos "progresos" se producían, esencialmente, en el extranjero.

---

[12] Sobre la historia de la Real Academia de Ciencias puede verse García Barreno *et al*. (eds.) (1995); también Díaz (2009).

[13] En www.rac.es, www.archive.org y http://books.google.es pueden consultarse los diferentes volúmenes de esta revista digitalizados. También puede verse Pérez García y Muñoz Box (1988).

[14] "Advertencia preliminar". *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Tomo I, 1850, pp. 5-6.

El panorama en la *Revista* comenzó a cambiar en 1866, cuando empieza a publicarse por capítulos la "Introducción a la Geometría superior", denso tratado de un joven ingeniero-matemático, profesor en la Escuela de Caminos, que había sido elegido académico el año anterior: José Echegaray Eizaguirre. En 1868 publicará "Aplicaciones de los determinantes"; entre 1871 y 1879 "Teoría matemática de la luz"; y en 1883, en colaboración con Gumersindo Vicuña, "Relaciones principales entre las teorías matemáticas de la física". Como diría años después Julio Rey Pastor: "Para la matemática española el siglo XIX comienza en 1865, y comienza con Echegaray"[15].

Junto a los Ingenieros, especialmente los de Caminos, el Ejército español jugaría un papel especialmente relevante en la vida política y cultural española a lo largo del siglo XIX. De hecho, en el estamento militar pueden encontrarse algunas de las actitudes más aperturistas y liberales de nuestro país, y en sus centros de formación, las respectivas Academias de los diferentes Cuerpos (especialmente los de Artillería e Ingenieros), las instituciones educativas donde mayores contenidos científicos y técnicos se impartían, tras las Escuelas Especiales de Ingenieros, y muy por delante de las Universidades de su tiempo[16]. Esta realidad se fue materializando muy especialmente durante la guerra civil que denominamos Primera Guerra Carlista, entre 1833 y 1840, años de consolidación de un nuevo régimen, el liberal de la Regencia de María Cristina, sustentado por el Ejército.

Terminada la guerra, en el marco de las reformas de los planes de estudios de las Academias militares (que, aunque se centraba en los estudios sobre fortificaciones, ampliaban los contenidos científicos, especialmente en lo que se refiere a los aspectos teóricos físico-matemáticos y químicos, y a las prácticas experimentales de Física y Química), y por iniciativa del General Antonio R. Zarco del Valle (1785-1866), el *Memorial de Ingenieros*, vio aparecer su primer número en enero de 1846[17], El objetivo de la revista, que completaba su cabecera con el subtítulo de *Memorias, artículos y noticias interesantes al arte de la guerra en general y a la profesión de ingeniero en particular,* era "difundir entre los oficiales del Cuerpo aquellos estudios y conocimientos que más les podían interesar y, al mismo tiempo, darles facilidades para que el resultado de sus trabajos y el fruto de su experiencia fueran conocidos". Realmente, seguían el ejemplo del Cuerpo de Artilleros, que habían visto aparecer su propio *Memorial de Artillería* en 1844.

---

[15] Cita tomada de Rey Pastor (1915).

[16] Sobre este tema puede verse Velamazán (1995).

[17] El *Memorial de Ingenieros* se analiza en Velamazán (1993).

Como cabía esperar, y aunque diferentes ingenieros militares escribieron libros de texto de Matemáticas para la Academia, los trabajos recogidos en el *Memorial* que pueden clasificarse como "de Matemáticas", representaban una pequeña parte de su contenido, inferior al 5%, la mitad del cual estaba dedicado a instrumentos matemáticos: aritmómetros, planímetros, compases multiplicadores, compases elípticos, trazado de planos, cartografía, etc. El resto de las contribuciones se distribuían entre la Geometría (trazado de elipses e hipérbolas, trisección de ángulos, etc.) y la Aritmética (números primos, fracciones continuas, aproximación numérica, etc.), presentadas en su mayoría por ingenieros militares españoles. Sí se recogieron referencias a libros de Matemáticas de autores franceses como el *Traité de Géométrie* de Eugene Rouche y Charles Comberouse o la *Exposition Géométrique des Propriétés générales des curbes* de Charles Ruchonnet.

En 1853, a los siete años de la aparición del primer número del *Memorial de Ingenieros*, y los tres años de que la Academia de Ciencias comenzara la publicación de su *Revista de los Progresos de las Ciencias*, desde la Escuela Oficial del Cuerpo de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos se iniciaba la publicación de la *Revista de Obras Públicas*[18], en cierta forma, órgano de expresión, por prolongación, de las Cátedras de la Escuela. La perspectiva desde la que se ofrecía a la sociedad española en el contexto de su época quedaba explicitado desde su primera página: "ante el incesante movimiento de todas las Naciones Europeas hacia el bien material y moral, ante esas aspiraciones utilitarias del espíritu moderno, ¿quién será el que desconozca la inmensa influencia que las obras públicas, principal agente del progreso después de la prensa, deben ejercer sobre la civilización del porvenir?".

A partir del número 4 del primer Tomo, aparecido el 15 de junio de 1853, el que se constituirá en nuestro matemático más importante de la segunda mitad del siglo XIX, José Echegaray, recién egresado de la Escuela de Ingenieros de Caminos, empezaba sus publicaciones en el ámbito de la Física Matemática con un artículo sobre movimiento continuo. En 1858 publicaba su "Cálculo de Variaciones"; en 1865, sus "Problemas de Geometría Analítica"; en 1867, iniciaba su obra más importante, "Teorías modernas de la Física"; y en 1868, su "Teoría de los determinantes.

En agosto de 1895 empezaría a publicarse, en varias partes, la *Memoria sobre las máquinas algébricas* de Leonardo Torres Quevedo. Este trabajo, editado en

---

[18] En http://ropdigital.ciccp.es puede consultarse la revista completamente digitalizada.

Bilbao en forma de libro financiado por el Ministerio de Fomento, suponía el primero de los diferentes trabajos sobre máquinas de calcular analógicas de tecnología mecánica que llevarían a su consagración internacional (especialmente en Francia) como matemático aplicado. Un año más tarde, en diciembre de 1896 la *Revista* continuó publicando los resúmenes elaborados por Mariano Luiña de las conferencias sobre resolución de ecuaciones y Teoría de Galois impartidas por José Echegaray en el Ateneo de Madrid, que, como se destacará a continuación, habían empezado a publicarse de forma exclusiva en *Madrid Científico* el año anterior. En suma, la *Revista de Obras Públicas* recogía parte de la mejor (aunque modesta) Matemática española de su tiempo.

Si bien los ingenieros eran reconocidos en estos años como los científicos más relevantes en España[19], la creación de las Facultades de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales tras la promulgación de la Ley de Instrucción Pública el 9 de septiembre de 1857 (la conocida como Ley Moyano, por el titular de la cartera de Fomento en esos momentos), iría dando entrada en el panorama científico a nuevos matemáticos para acompañar a Francisco Travesedo (jubilado ese mismo año 1857) y Juan Cortázar en la Universidad española: Acisclo Fernández Vallín, Eugenio de la Cámara, José A. de Elizalde, Eduardo Novellas, Agustín Monreal, Gumersindo Vicuña, Eduardo Torroja, Simón Archilla, etc.

Aunque la nueva realidad, consecuencia también de los sucesivos cambios en los Planes de Estudio, tardaría varias décadas en permear a la Sociedad española, algunos profesores de las Facultades universitarias (especialmente de la Central de Madrid) y de Institutos de Bachillerato, reunidos en incipientes asociaciones científicas, también comenzaron a hacer incursiones destacables, aunque breves, en el ámbito de las revistas periódicas. Entre ellas destaca la publicación de la *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias*, iniciada en Madrid en 1874[20] por impulso del Presidente de esta Sociedad, el extremeño Eduardo Lozano y Ponce de León (1844-1927)[21], entonces estudiante de doctorado en Ciencias Físico-Matemáticas y profesor en el Instituto de Noviciado. La Sociedad tenía como objeto hacer llegar a la comunidad científica española las novedades que debían transformar la investigación científica en nuestro país, especialmente en los cam-

[19] Puede traerse a colación la irónica sentencia, generalizada con sorna desde aquellos años: “Dios existe, claro que existe; y, además, es Ingeniero de Caminos”.

[20] Para el estudio de esta revista hemos recurrido a la colección conservada en la Biblioteca de la Facultad de CC. Matemáticas de la UCM.

[21] Sobre Eduardo Lozano puede consultarse Cobos Bueno (2007).

pos de la Matemática y la Física. La *Revista* distribuía sus contenidos entre la Matemática, la Física, la Historia Natural, las Soluciones a cuestiones propuestas (de Matemáticas) y las biografías de científicos. En ella se recogían traducciones de trabajos extranjeros, como "De las hipótesis que se hallan en las bases de la Geometría" por G. F. B. Riemann, o "Del espacio de cuatro dimensiones" por G. R. Rodwell, lo que permite atisbar las pretensiones de europeización-actualización emprendida por los redactores.

Entre los artículos propiamente matemáticos escritos por españoles, varios, todos de carácter elemental, fueron del propio Lozano (como muchos de Física). De ellos pueden destacarse "Del teorema de Ptolomeo y algunos de sus corolarios" (1874), "Un teorema sobre la parábola y algunos corolarios" (1874), "Notación decimal" (1875), "Fórmulas de los poliedros regulares" (1876). Es verdad que Ingenieros de Caminos, como Francisco Lizárraga, publicaron artículos como "Demostración de un teorema" (1875). Pero la *Revista de la Sociedad* debe destacarse por los artículos publicados por diferentes matemáticos universitarios. Así, Eduardo Torroja, Catedrático de Geometría Descriptiva de la Universidad Central, publicó "Coordenadas polares. Su aplicación al estudio de las líneas algébricas" (1874). También Zoel García de Galdeano, aún Catedrático de Instituto, publicó "Examen de algunos resultados a que conduce la consideración de las proyecciones" (1876).

Pero ni la Sociedad ni su *Revista* superarán el traslado de Lozano tras obtener por oposición la Cátedra de Física y Química en el Instituto de Teruel.

Crónica Científica, Revista Internacional de Ciencias, fundada por el ingeniero y enólogo catalán Rafael Roig y Torres (1855-1931), se publicaría en Barcelona entre 1878 y 1892[22]. Concebida, como tantas otras publicaciones artísticas y literarias, en el marco del espíritu regeneracionista del último tercio del siglo XIX, su propósito quedaba explicitado en su editorial de apertura: la defensa "por todos los medios legales, de los intereses y derechos de los profesores españoles", para "dotar a España de una publicación donde pueda incorporarse el progreso científico de nuestro país"[23]. La *Crónica* estaba dividida en doce secciones, la primera de las cuales estaba dedicada a la Matemática, con artículos originales tanto de autores españoles como extranjeros, mientras la última recogía problemas propuestos de Matemáticas, Física y Química y sus soluciones.

---

[22] Puede verse Llombart (1993).

[23] *Crónica Científica. Revista Internacional de Ciencias*. Tomo 1 (1878), p. 2.

Entre los autores españoles más prolíficos destacó el ingeniero Industrial y Catedrático del Instituto de Bachillerato General y Técnico de Tarragona Lauro Clariana y Ricart (a partir de 1881, Catedrático de Calculo Diferencial e Integral en la Universidad de Barcelona). A él se deben trabajos tales como “Importancia del método leibniziano” (1878), “Armonías notables entre el álgebra y la trigonometría” (1878), “Aplicación de los determinantes a la trigonometría” (1879), “Aplicación de las integrales eulerianas” (1885), “Covariantes pares de una forma binaria cualquiera” (1886), “Cuaternions” (1886), “Estudios del factor que convierte en integrable una ecuación diferencial de primer orden” (1888), “Geometría del porvenir” (1889), “Funciones elípticas” (1892), etc. Otros autores que también colaboraron en *Crónica* fueron el Capitán de Artillería Manuel Herrera, con trabajos de Matemática elemental como “Propiedad de los números” (1888), “Área de un polígono esférico” (1890), etc.; Francisco Correa y Ramírez, profesor en la Facultad de Ciencias de Barcelona, quien publicó trabajos tales como “Demostración de la fórmula de Ongtred para hallar el volumen de un tonel” (1882) o “Intersección de una hipérbola con una recta” (1884); José de Castro Pulido, Catedrático primero de Bachillerato en León y luego en la Facultad de Ciencias de Madrid, con “Concepto de los algoritmos fundamentales” (1879) o “Análisis del concepto de cantidad y contribución al estudio de la geometría analítica” (1882); etc.

La sección de Matemáticas también recogió catorce artículos de autores extranjeros, tales como “La experiencia en las ciencias exactas” (1881) y “Consideraciones elementales sobre la generalización sucesiva de la idea de cantidad en el Análisis Matemático” (1883), de G. J. Hoüel; “Catenaria de igual resistencia”, de E. Collington; “Sobre el cálculo de Probabilidades” (1887), de D. André; “Cartas inéditas de Bernouilli a Euler” (1880), de Eneström; etc.

En 1894 aparecía el primer número de *Madrid Científico. Revista de Ciencia, Ingeniería y Electricidad*[24]. Fundada por Francisco Granadino, con la colaboración en la redacción a partir de 1896 de Augusto Krahe (estudiantes ambos de Ingeniería de Caminos que abandonaron la carrera tras pelearse con el Director de la Escuela), y desde la perspectiva de un noticiario profesional de Ingeniería[25], fue una interesante revista de divulgación científico-técnica que destacó en su época (y aquí radicó gran parte de su éxito) por sus comentarios críticos con la Administración y las diferentes instituciones, tanto públicas como privadas, relacionadas

[24] En www.bne.es puede consultarse esta revista digitalizada.
[25] Ver Español y Martínez (2010).

con los ámbitos del Ministerio de Fomento. En tanto que revista de ingenieros para ingenieros, en sus páginas se recogían trabajos sobre todos los campos de su interés, entre los que siempre estuvo la Matemática (materia que explicaba Krahe en la Academia que dirigía preparatoria para el ingreso en la Escuela de Ingenieros). Así, proponían problemas, en general de aritmética y geometría, cuya solución se publicaba en números posteriores; también "cuestiones matemáticas", como reflexiones en torno al número π, construcciones geométricas, etc.

En 1896 destacó la publicación de reseñas, elaboradas por el entonces estudiante de Ingeniería de Caminos Mariano Luiña, de las lecciones impartidas por José Echegaray en el Ateneo de Madrid sobre "Resolución de las ecuaciones de grado superior y teoría de Galois", primera vez que se explicaba y escribía en España sobre este tema. También en 1896 García de Galdeano publicó en *Madrid Científico* artículos que ya no podrían leerse en su recién clausurado *El Progreso Matemático*, como el titulado "Las Modernas generalizaciones de la Ciencia Matemática expresadas por el Álgebra simbólica y la Geometría de *n* dimensiones", y otros posteriores sobre Enseñanza universitaria.

Pero quizá una de las ideas publicadas en *Madrid Científico* más relevantes para nuestra historia es la de otra manera anecdótica pregunta: "¿Cuándo lograremos constituir en España una Sociedad de Matemáticos?", planteada en una noticia que publicaron en 1900 sobre el traslado a la Sorbona de las sesiones y la biblioteca de la Société Mathématique de France, y la respuesta adelantada: "El terreno no parece muy abonado por ahora", pues ni siquiera logra arraigar con vida vigorosa una revista dedicada a tal linaje de estudios"[26].

En ese contexto, y transcurridos ya los primeros años del siglo XX, la Academia de Ciencias decidía cambiar el nombre (y el alcance) de su ya obsoleta *Revista de los Progresos de las Ciencias*, por el de *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*[27]. El primer número aparecería en enero de 1905 (aunque corresponde al Tomo I, de 1904), reuniendo artículos ya sí propiamente científicos de (muy especialmente) los académicos españoles. Así, se publicaban trabajos originales de Química (J. Rodríguez Carracido), Fisiología (S. Ramón y Cajal), Botánica (B. Lázaro Ibiza), Física (J. M: de Madariaga), etc. El número, que se cerraba con la sección de "Noticias de interés científico", recogía

---

[26] *Madrid Científico*, 1900, p. 168. Ver la cita y los comentarios al respecto en Español y Martínez (2010, pp. 300-301).

[27] En www.rac.es y www.archive.org puede consultarse esta revista digitalizada. Véase García Barreno *et al*. (1995) y Díaz (2009), *op. cit*.

también el primer trabajo de Matemáticas, “Sobre coordenadas proyectivas” por Miguel Vegas, quien publicaría en números posteriores sucesivos capítulos de su tratado de Geometría Analítica. En ese primer Tomo se publicaron también “Un teorema sobre polígonos regulares del cual son corolarios otros de Gauss, Catalan y Muir”, de Augusto Krahe; “Notas sobre ecuaciones diferenciales”, de José Echegaray; “Nota explicativa de un nuevo sistema de medida angular, dividiendo la circunferencia en seiscientas partes o grados iguales”, de Horacio Bentabol; “Teoremas deducidos de la identidad de Vandermonde”, de Augusto Krahe; “La obra científica de Seki y sus discípulos” de Ventura Reyes Prósper, etc.

En el tomo II (1905) se publicaba la breve nota “Problema de Geometría”, de Enrique Linés y “Ecuaciones armónicas”, de Augusto Krahe. En el Tomo III, primero de los tres volúmenes publicados en 1906, aparecían “División de un segmento en media y extrema razón” y “Contribución a la teoría de polígonos regulares”, de Luis Catalá. En el IV comienzan a publicarse las seis primeras conferencias sobre “Introducción a la Física matemática”, de José Echegaray; “Sobre un nuevo sistema de notaciones y símbolos destinados a facilitar la descripción de las máquinas”, de Leonardo Torres Quevedo; “Principios fundamentales de la teoría de los vectores”, de Blas Cabrera; y “Nuevo método gráfico para la resolución de la ecuación de segundo grado” y “Contribución a la teoría de los polígonos regulares”, de L. Catalá. Y en el Tomo V, correspondiente también a 1906, aparecían las Conferencias 7ª a 12ª de J. Echegaray sobre “Introducción a la Física matemática”; “Sobre los residuos cuadráticos”, por J. J. Durán Loriga; “Ensayo de Geometría analítica no euclidiana”, por J. A. Pérez del Pulgar; “Poliedros regulares”, por L. Catalá; “Nuevos caracteres de divisibilidad”, por F. Simón y Mayorga; y “Nueva teoría para el desarrollo de las ecuaciones finales”, por G. M. Seco.

3. Consideraciones finales

Como puede observarse, al comenzar el siglo XX existía una institución científica que reunía a algunos de los matemáticos españoles con mayor reconocimiento socio-científico (además del Presidente de la Corporación, José Echegaray, la sección de Exactas estaba compuesta por Eduardo Saavedra, Leonardo Torres Quevedo, José Morer, Miguel Merino, Joaquín M. Barraquer, Francisco P. Arrillaga, Javier Los Arcos y Miranda, Eduardo Torroja Caballé, Juan Navarro-Reverter y Diego Ollero Carmona) y una publicación periódica de cierta calidad en la que podían leerse algunos artículos matemáticos de interés para la España de la época.

Pero ni la Academia era una Sociedad de matemáticos, ni su *Revista* era una publicación periódica *de* Matemáticas, ni los artículos publicados suponían precisamente grandes contribuciones originales a la Matemática universal.

Otras iniciativas, emprendidas a título personal por diferentes matemáticos españoles a lo largo de la última década del siglo XIX y la primera del XX, completarían el panorama de publicaciones matemáticas que sentarán las bases sobre la que se constituirá la Sociedad Matemática Española y se concebirá su *Revista*, pero éstos son temas que trataremos en un próximo artículo[28].

Referencias

[1] Ausejo, E. y Hormigón, M. (1986), "Noticia del *Periódico Mensual de Ciencias Matemáticas y Físicas* (Cádiz, 1848). Actas del III Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias, Vol. 2, pp. 35-50. San Sebastián.

[2] Ausejo, E. y Millán, A. (1994), "The Spanish Mathematical Society and its Periodicals in the first third of the 20th Century". En *Messengers of Mathematics: European Mathematical Journals (1800-1946)*. Madrid, Siglo XXI, pp. 159-187.

[3] Ausejo, E. (1998), "El *Memorial Literario ó Biblioteca Periódica de Ciencias y Artes* (1801-1806)". En J. L. García Hourcade *et al*. (coords.), *Estudios de Historia de las Técnicas, la Arqueología Industrial y las Ciencias*, Vol. I, pp. 351-358. Salamanca, Junta de Castilla y León.

[4] Ausejo, E. (2001), "La emergencia de la ciencia en el furor absolutista: la *Crónica Científica y Literaria* (1817-1920)". En M. Álvarez Lires (ed.), *Estudios de Historia das Ciencias e das Técnicas. VII Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, Vol. 2, pp. 645-656. Pontevedra, Diputación de Pontevedra.

[5] Cobos Bueno, J. M. (2007), *Eduardo Lozano y Ponce de León*. Badajoz, Diputación de Badajoz.

[28] Pueden verse unas primeras consideraciones sobre el tema en González Redondo (2012).

[6] Díaz, J. I. (2009), "Observación y Cálculo: los comienzos de la real Academia de Ciencias y sus primeros correspondientes extranjeros". *Revista de la Real Academia Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, Tomo 103, 437-507.

[7] Español, L. y Martínez, Mª A. (2010), "Ecos matemáticos en la revista *Madrid Científico* a finales del siglo XIX". *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez*, pp. 287-306. Logroño, Universidad de La Rioja.

[8] Español González, L. (2011), *Historia de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, Madrid, Real Sociedad Matemática Española.

[9] García Barreno, P. *et al*. (eds.) (1995), *La Real Academia de Ciencias, 1582-1995*. Madrid, Real Academia de Ciencias.

[10] Gomis Blanco, A., Fernández Pérez, J. y Pelayo López, F. (1986), "Noticia histórica de la Real Academia de Ciencias Naturales de Madrid (1834-1847)". *Actas del III Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias*, Vol. II, pp. 135-152. San Sebastián.

[11] González Redondo, F. A. y de León, M. (2000), "La vida institucional de la RSME entre 1908 y 1918". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 3 (3), 575-584.

[12] González Redondo, F. A. y de León, M. (2001), "El primer congreso matemático en España (Zaragoza, 1908) y los orígenes de la RSME". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* 4 (1), 280-291.

[13] González Redondo, F. A. (2012), "Las revistas de la Real Sociedad Matemática Española, 1911-2011". *La Gaceta Selecta. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol. 15 (Núm. 1), 9-36.

[14] Hormigón, M. (1987), "El primer Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias". En *Cinquanta Anys de Ciència i Técnica a Catalunya*, pp. 121-133. Barcelona, Institut d'Studis Catalans.

[15] Llombart, J. (1993), "*Crónica Científica*. The articles of the Mathematics section". En E. Ausejo y M. Hormigón (eds.), *Messengers of Mathematics: European Mathematical Journals (1800-1946)*, pp. 267-281. Madrid, Siglo XXI.

[16] Pérez García, Mª C. y Muñoz Box, F. (1988), "La *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*". En M. Esteban *et al*. (eds.), *Estudios sobre Historia de la Ciencia y de la Técnica*, Vol. 1, pp. 543-552. Valladolid, Junta de Castilla y León.

[17] Peset, J. L., Garma, S. y Pérez Garzón, J. S. (1978), *Ciencia y enseñanza en la revolución burguesa*, pp. 155-159. Madrid, Siglo XXI.

[18] Rey Pastor, J. (1915), "Discurso inaugural". *Congreso de Valladolid*. Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Madrid.

[19] Velamazán, Mª A. (1993), "The *Memorial de Ingenieros*". En E. Ausejo y M. Hormigón (eds.), *Messengers of Mathematics. European Mathematical Journals (1800-1946)*, pp. 259-266. Madrid, Siglo XXI.

[20] Velamazán, Mª A. (1995), "Le rôle de Armée dans le développement du journalisme scientifique en Espagne pendant le XIXe siècle". *Rivista di Storia della Scienza* 3 (1), 67-82.

Reseña de libros

ETAYO GORDEJUELA, FERNANDO y ETAYO GORDEJUELA, MIGUEL: *Hasta el infinito y más allá* (238 págs). ISBN: 978-84-8102-618-4. Ediciones Universidad Cantabria. Colección "Divulgación Científica". Santander, 2012.

Se trata de un libro de difícil catalogación. De carácter eminentemente divulgativo, trata del problema común a muchas disciplinas de plasmar el mundo circundante tridimensional en un plano bidimensional. La primera mitad del libro está dedicada al Espacio en el Arte, y en ella se analiza fundamentalmente cómo en la pintura se pasa de la representación de los objetos aisladamente a la conjunción de todos ellos con la noción de perspectiva, representando con ello el espacio que los contiene, para terminar con la fragmentación de ambas nociones de espacio y objeto en la pintura contemporánea. Todo ello está ilustrado con muchos ejemplos.

La segunda parte del libro está dedicada a la Ciencia y la Técnica. Se describe el modelo matemático subyacente a la perspectiva lineal o cónica, que no es otra cosa que la geometría proyectiva. Un capítulo de carácter mucho más matemático describe el espacio proyectivo como objeto matemático de gran interés en numerosas ramas de nuestra disciplina. El libro concluye con una descripción de los fundamentos matemáticos de las cámaras (desde la cámara oscura hasta las digitales) y con un capítulo dedicado al problema inverso, el de reconstrucción de imágenes, en el que datos sobre la volumetría de los objetos se obtienen a partir de distintas imágenes planas de los mismos.

Como decíamos al principio, es un libro de difícil catalogación, porque, teniendo esta idea central de plasmar el mundo 3D en un plano 2D, realiza una descripción del proceder de disciplinas tan variadas como la cartografía, la fotogrametría, o la tomografía. En cada una de ellas, en el arte, le geometría descriptiva o las matemáticas es fácil encontrar excelentes obras de divulgación. La presente aporta el dirigirse simultáneamente a lectores de todos estos ámbitos, proporcionando un marco común de comprensión. De hecho, para facilitar el manejo de la nomenclatura los autores han incluido un glosario en el que se describen las nociones básicas que aparecen en el libro con las denominaciones que reciben, que en muchas ocasiones difieren de un ámbito a otro. Un breve epílogo muestra cómo Arte, Ciencia y Técnica han trabajado con las mismas ideas.

Otro punto importante de la obra es mostrar que la proyección cónica es muy singular entre todas las proyecciones de la geometría descriptiva. Porque es la única que hace aparecer los puntos del infinito o de fuga, haciendo que la noción de espacio se deba ampliar para incluir estos puntos del infinito. Así nace el espacio proyectivo, del que se muestra su naturaleza geométrica, algebraica, topológica, etc. Como dice el título, en la búsqueda de la representación se fue "hasta el infinito y más allá".

El texto, a pesar de la profundidad de algunos de los conceptos manejados, es ligero, conforme al espíritu divulgativo del libro. Se ha evitado la profusión de tecnicismos (de las diferentes materias involucradas) y se han incluido muchas ilustraciones a lo largo de toda la obra. Los autores, con larga experiencia docente en Enseñanza Media y Universitaria, en Arte y en Matemáticas, han aprovechado el material acumulado a lo largo de los años para escribir este texto tan rico en ejemplos y referencias. En la introducción señalan que no pretendían escribir una enciclopedia ni un libro de historia, sino mostrar ideas subyacentes comunes a muchas disciplinas. Nos atreveríamos a decir que, aunque a cualquier especialista lo contemplado en el libro sobre su campo le parecerá escaso, seguro que aprenderá sobre otros ámbitos y disfrutará de ver cómo otras disciplinas manejan ideas similares a las empleadas en la suya. Y le dejará con ganas de profundizar. Y lo mismo podemos decir de cualquier lector curioso, que encontrará en el libro muchas sugerencias, muchas incitaciones a la reflexión y a la búsqueda.

El libro está bellamente editado, con una encuadernación y tipografía muy agradables. Tiene muchas ilustraciones a color, prácticamente en todas las páginas, y aunque los lectores, y seguro que los autores, hubieran deseado que éstas fueran más grandes, cumplen perfectamente su papel de explicación y motivación. En definitiva, un buen libro para regalar y con el que regalarse.

UGARTE FERNÁNDEZ, ALBERTO: *Fibonacci y los problemas del Liber Abaci* (110 págs,). ISBN: 978-1-4478-4282-8. Editado por el autor. Logroño, 2011. Puede adquirirse a través de cualquiera de las págs. web:
`www.amazon.es  y  www.lulu.com`

Casi todos relacionamos a Leonardo de Pisa, mas conocido por Fibonacci, con la sucesión; 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … , en que cada término es suma de los dos precedentes. Es la solución de uno de los problemas incluidos en su *Liber Abaci*, relativo a la descendencia de una pareja de conejos.

El Liber Abaci, escrito en 1202, contiene una colección de problemas del ámbito de la matemática recreativa. En este libro Fibonacci mostraba a sus coetáneos las ventajas del sistema de numeración decimal indo-arábigo, que había aprendido en sus viajes por el Mediterráneo oriental, con respecto a la numeración romana, que todavía se usaba en la Europa cristiana.

En el presente libro se propone una colección de 51 problemas extraídos del Liber Abaci, elegidos entre los más interesantes, especialmente de su capítulo 12. Los enunciados de los problemas se trascriben al lenguaje actual, añadiendo, a veces, condiciones para que tengan solución única. Las soluciones aparecen abreviadas en lenguaje simbólico actual. Muchos de los problemas van acompañados de ilustraciones de Rosa Ugarte.

Bastantes de los problemas elegidos son usuales en libros de matemática recreativa, pero la forma en que son presentados y solucionados es muy original. Entre ellos y para hacerse una idea, cabe citar los siguientes:

Los árboles del Rey.
El león, el leopardo y el oso.
Dos hormigas que se siguen.
Dos barcos al encuentro.
Una cisterna con grifos y desagües.
La bolsa encontrada por tres amigos.
Las manzanas del jardín.
Dos hombres que tienen cinco panes.
Una ciudad con diez puertas.

La colección de problemas va precedida de un prólogo que narra de manera atractiva cómo era el Mundo en tiempos de Leonardo de Pisa, en que la Europa cristiana y el Islán realizaban gran cantidad de intercambios comerciales y culturales. En especial las “ciudades libres”, que funcionaban como ciudades-estado independientes. A través de esos intercambios llegaron a Occidente los avances que supusieron la adopción del sistema de numeración indo-arábigo.

Aunque dirigido a todos los públicos, el libro puede ser especialmente útil a profesores de matemáticas interesados en que sus alumnos conozcan un ejemplo sencillo de desarrollo histórico y trasmisión de conocimientos en el ámbito matemático.

DMITRY FOMIN, SERGEY GENKIN, ILIA ITENBERG: *Círculos Matemáticos* (353 págs). ISBN 9788467552270. Ediciones SM, Biblioteca Estímulos Matemáticos. Madrid, 2012.

Se trata de la traducción al español del exitoso libro “Mathematical Circles” editado por la American Mathematical Society en 1996. Traducción a su vez del original (en ruso) de los tres autores citados. Ha sido traducido y adaptado del inglés por Enrique Hernández Arnáiz y revisado científicamente por Fernando Barbero González y Joaquín Hernández Gómez, miembro este último de la Junta Directiva de nuestra Sociedad.

La Colección “Estímulos Matemáticos” pretende editar en lengua castellana libros de matemáticas de amplia difusión de carácter educativo no lectivo, en especial para profesores y estudiantes de matemáticas de los diferentes niveles educativos. Este es el primer libro de la colección.

La Comisión “Estímulo” de la Real Sociedad Matemática Española está formada por María Moreno Warleta (Presidenta), Bartolomé Barceló Taberner, Emilio Fernández Moral, Victoria Otero Espinar, Guillermo Curbera Costello, Joaquín Hernández Gómez, Juan Núñez Valdés y Encarnación Reyes Iglesias.

Con la idea de que pensar y discutir sobre problemas matemáticos podría generar el mismo entusiasmo que hacerlo sobre un deporte, surgió en la antigua Unión Soviética el singular movimiento cultural de los “Círculos Matemáticos”, que dejó tras de sí un intenso rastro de problemas, enfoques y textos. Este libro recoge parte de aquella interesante experiencia.

La versión española de que nos ocupamos, comienza con un Prefacio de María Gaspar, miembro de la Junta Directiva de nuestra Sociedad, que se inicia con estas palabras de Lluis Santaló, que describen muy bien el propósito de los autores del libro: *En la historia de las matemáticas, la curiosidad por la resolución de problemas de ingenio ha sido un factor que ha contribuido a la creación matemática tanto o más que sus posibles aplicaciones prácticas*.

El libro comienza con problemas para chicos de 10-11 años de edad, sin contenido matemático específico y cuyo objetivo es detectar habilidades lógico-matemáticas en ese nivel.

En la primera parte del libro (Primer año) en sus nueve capítulos se tratan problemas de diverso índole: sentido común, paridad, combinatoria, divisibilidad y restos, principio del palomar, grafos, desigualdad triangular y juegos, para terminar con una colección de problemas.

En la segunda parte (Segundo año), en otros nueve capítulos se tratan problemas de inducción, divisibilidad, combinatoria, invariantes, grafos, geometría, sistemas de numeración y desigualdades, terminando con otra colección de problemas.

Concluye el libro con tres apéndices dedicados respectivamente a Concursos de Problemas, Respuestas y Soluciones, y Bibliografía.

Se trata de un libro de divulgación matemática dirigido a todos aquellos que sientan curiosidad por el juego mental que implican las matemáticas y que deseen indagar en sus ramas menos conocidas.

También es un libro ideal para estudiantes que quieran salir de los límites del curriculum escolar, y para profesores que deseen proponer retos matemáticos interesantes, pero que no requieren técnicas complicadas para resolverse.

Eugenio Roanes Macías

Una máquina de Turing real construida con LEGO

Siendo 2012 el año del centenario del nacimiento de Alan Turing y siendo las Ciencias de la Computación considerada hoy como una parte de la Matemática, nos ha parecido oportuno mencionar una noticia curiosa al respecto.

La denominada *máquina de Turing* fue descrita por Alan Turing en 1936, no como un ordenador real, sino más bien como una invención teórica representativa de una máquina computadora.

Un equipo de estudiantes del Dept. de Ciencias de la Computación de la Escuela Normal Superior de Lyon ha construido una máquina de Turing real. El material utilizado para construirla ha sido esencialmente piezas del célebre juguete LEGO, originario de Billund (Dinamarca). En su construcción han utilizado más de veintiuna mil piezas de Lego y su diseño y elaboración ha requerido cientos de horas por parte de los ocho estudiantes del equipo.

Una máquina de Turing es fácil de simular con un ordenador actual, pero esto no se trata de una simulación, sino de una máquina real puramente mecánica, tal como se hubiera podido construir en tiempos de Turing.

Una detallada descripción puede encontrarse en Google: *A real Turing Machine / The Alan Turing Year* (5 abril 2012). En ella pueden verse fotos de sus partes esenciales:

- el carro para la cinta
- el cabezal que lee y escribe símbolos en el carro
- la memoria que codifica las acciones de la máquina y almacena los estados
- el mecanismo regulador de tiempo que dispara cada componente de la máquina de Turing, uno tras otro, tardando 40 segundos en cada ciclo.

Un anuncio de la Conferencia "*How Turing's machine changed the world*" a celebrar en la ENS de Lyon los días 2-4 de julio de 2012 aparece en la web:
`http://www.turing2012.fr/?p-530&lang=en`

Eugenio Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm (exactamente como este archivo). El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta puigadam@mat.ucm.es ,o bien en un disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pediráa los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90 y 91

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número

3025-0006-24-1400002948

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.