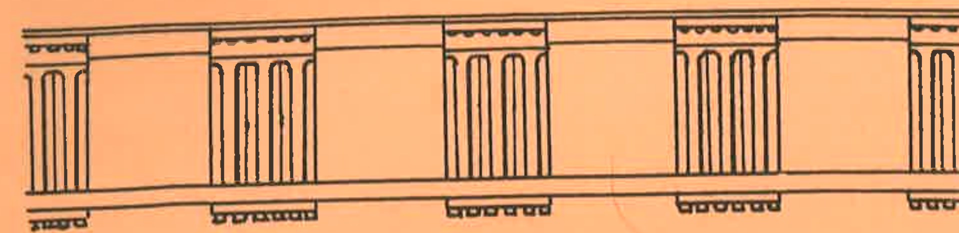
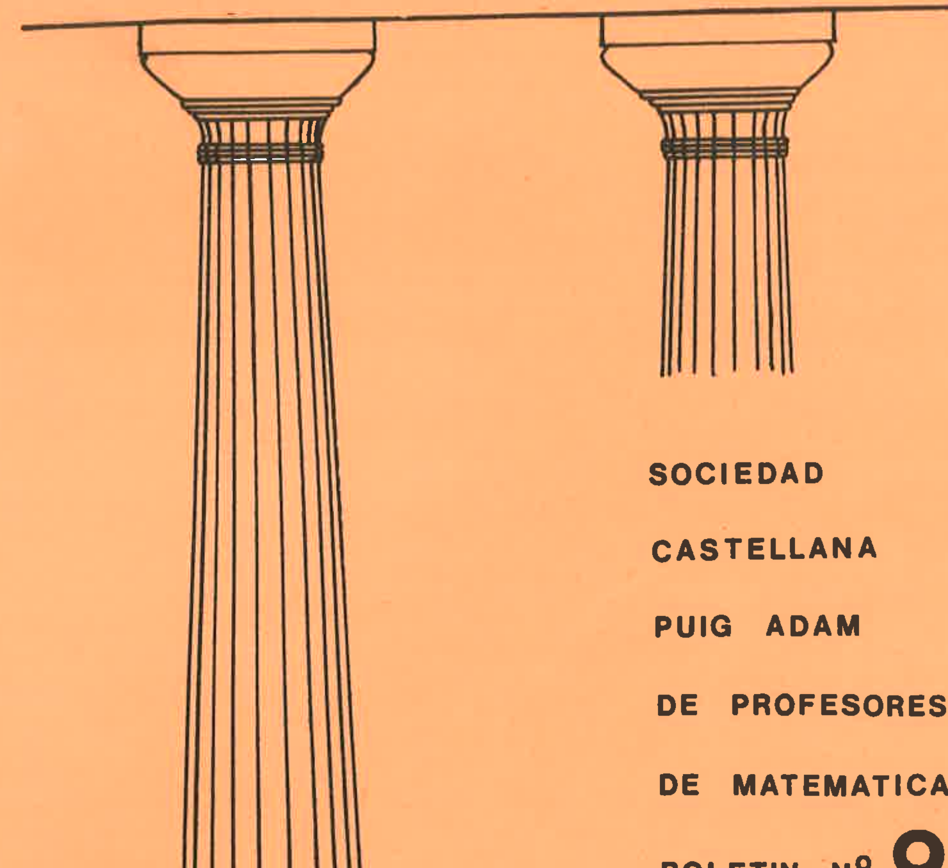
CDL pág 3

Roanne pag 45ª
(lo mismo que va a explicar en [illegible])
Problemas sin resolver
pág 74.



μηδεὶς ἀγεωμέτρητος
εἰσίτω μοῦ τὴν στέγην



SOCIEDAD

CASTELLANA

PUIG ADAM

DE PROFESORES

DE MATEMATICAS

BOLETIN Nº 9

abril 1986

B O L E T I N de la Sociedad Castellana
"PUIG ADAM" de Profesores
de Matemáticas

Abril - 1986 nº 9 (1985 - 86)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:
  Ronda de Atocha, 2 (INBAD)
  MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al

  Apartado nº 9479
  28080 - MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

  PASCUAL IBARRA, José Ramón
  FERNANDEZ BIARGE, Julio

- La portada, de J.F.B., es una fantasía sobre la inscripción que Platón hizo colocar sobre la puerta de su Academia: "Nadie entre que no sepa Geometría".

VEANSE EN ESTE NUMERO LAS CONVOCATORIAS DE NUESTRA

ASAMBLEA GENERAL

Y DE NUESTRO

IV CONCURSO DE

PROBLEMAS

INDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Julio Fernández Biarge

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardó (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretario: María Luisa Pacios

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

VIDA DE LA SOCIEDAD

- El pasado día 15 de marzo se reunió la Junta Directiva de la Sociedad. En esta sesión, además de acordar la fecha de celebración de la Asamblea General y la convocatoria anual del Concurso de Problemas, se trató de iniciar una colaboración con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias. A tal fin, la Presidencia invitó a una representación del Colegio, que acogió la idea con el mayor interés. Como primer punto de este contacto, nuestro IV Concurso de Resolución de Problemas contará ya con el apoyo del Colegio, que se ha encargado de la confección del cartel anunciador y de su remisión a todos los Centros de nuestro ámbito territorial. Esperamos que esta tarea común sea sólo el comienzo de un entendimiento entre ambos organismos, que, sin duda, contribuirá a impulsar la acción del profesorado, y, en definitiva, a la mejora de la calidad de nuestra enseñanza en beneficio de los alumnos a quienes nos debemos.

- Se comunica a nuestros socios que están agotados los boletines números 1, 2 y 8. De los números 3 y 7 quedan algunos (pocos) ejemplares. Lamentamos no poder atender las peticiones que se nos hacen de los números agotados, y las dificultades para suministrar ejemplares atrasados.

VEA LA
CONVOCATORIA
DE NUESTRA
ASAMBLEA
GENERAL

ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE 1986. CONVOCATORIA

En la reunión de la Junta Directiva celebrada el día 15 de Marzo de 1986 se acordó convocar la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1986, para el sábado 24 de Mayo de este año, a las 11^h en primera convocatoria y a las $11^h\ 30^m$ en segunda, en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de la Ronda de Valencia nª 3 (junto al Metro de Embajadores).

Se seguirá el siguiente Orden del Día:

1. Lectura y aprobación, en su caso, del Acta de la Asamblea anterior.
2. Informe del Sr. Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Posibilidades de colaboración con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados.
5. Estudio de posibles cambios en los Estatutos, relativos, en especial, al ámbito territorial de la Sociedad.
6. Elecciones para la renovación de la mitad de la Junta Directiva.
7. Ruegos y preguntas.

Los miembros de la Junta cuya renovación establecen los Estatutos para este año son los siguientes: Presidente, Vicepresidentes de Toledo, Cuenca y Segovia, vicesecretario y tesorero.

Esperamos vuestra asistencia y participación.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

IV CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS DE MATEMATICAS

Convocado por:

La Sociedad Castellana "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y El Colegio Oficial de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras en Ciencias

B A S E S

PRIMERA

Podrán participar los alumnos de 1ª y 2ª de B.U.P. de los centros de Albacete, Ciudad Real, Cuenca, Guadalajara, Madrid, Segovia y Toledo. Aquellos Centros que deseen presentar a alguno de sus alumnos (hasta un máximo de 2 por primer curso y 2 por segundo), deberán realizar la preinscripción antes del día 15 de mayo de 1986, dirigiéndose por carta a esta Sociedad, Apartado de Correos nª 9.479, 28080 Madrid.

En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados.

SEGUNDA

Las pruebas del Concurso se realizarán en la segunda quincena del mes de junio en las capitales de Madrid y Ciudad Real y posiblemente en otras si el número de preinscripciones así lo aconsejara.

TERCERA

Se comunicará directamente a los Centros preinscritos la fecha exacta, lugar y hora de realización de las pruebas y estos Centros entregarán a los alumnos que envíen, las credenciales en las que se haga constar el curso en el que están matriculados en el año académico 1985-86 y que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas.

CUARTA

Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada nivel) en un sólo día.

QUINTA

Se concederán 10 diplomas para los mejores de cada curso acompañados de los premios correspondientes.

SEXTA

Los alumnos de F.P. podrán participar concurriendo los de cualquier curso de primer grado con los de 1ª de B.U.P. y los de 1.er curso de 2ª grado con los de 2ª de B.U.P.

N O T I C I A S

OLIMPIADAS INTERNACIONALES

La XXII Olimpiada Internacional de Matemáticas se celebrará en Polonia en 1987, y la II Olimpiada Iberoamericana tendrá lugar ese mismo año, en Uruguay.

Esperamos la participación en ambas de los ganadores de nuestra Olimpiada Nacional.

VII JORNADAS DE LA SOCIEDAD "ISAAC NEWTON"

Como anunciamos en el último número de nuestro Boletín, la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas celebrará sus VII Jornadas Regionales, así como su Asamblea General, en los dias 1 al 4 de Mayo, en Lanzarote. En estas Jornadas, además de la exposición de las Comunicaciones de los participantes, se celebrará un Seminario de Geometría, una Conferencia sobre Estadística y una Mesa Redonda sobre Informática.

Para más detalles, se puede llamar al teléfono de la Sociedad, que es el (922) 261250.

Esta Sociedad anuncia también un curso de Introducción al Lenguaje de Programación PROLOG, que tendrá lugar en los meses de Abril y Mayo.

5ª SEMANA DE METODOLOGIA DE LA MATEMATICA

Organizada por la Sección de Metodología y Didáctica de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, ha tenido lugar, del 7 al 11 de abril, la 5ª Semana de Metodología de la Matemática.

La sesión inaugural corrió a cargo del Ilmo. Sr. Decano de la Facultad y seguidamente comenzaron las sesiones de trabajo. Las conferencias tenidas fueron:

- "El profesor de Matemáticas"
  Prof. don Pedro Abellanas.

- "Algunas ideas sobre la enseñanza del Análisis en el bachillerato"
  Prof. don José R. Pascual Ibarra.

- "El proyecto Athenea"
  Profs. don E. Lowy Frutos y E. Gallego.

- "Una experiencia en la Reforma de la Enseñanza Media"
  Prof. don Francisco Villafruela.

- "La historia de la Matemática como factor motivador en la enseñanza"
  Prof. don Miguel de Guzmán Ozámiz.

CURSO SOBRE HISTORIA DE LAS MATEMATICAS HASTA EL SIGLO XVII

La Real Academia de Ciencias viene organizando desde hace algunos años diversos Cursos dentro del área de Historia de las Ciencias; por ejemplo: Historia de la Física hasta el siglo XIX, de las Obras Públicas, de la Bioquímica, etc. En el presente curso 1985-86 se ofrece una serie de conferencias sobre la "Historia de las Matemáticas hasta el siglo XVII".

Sin duda las Matemáticas figuran entre las ciencias de mayor tradición y de mayor contenido conceptual en todas las épocas. Su contribución a la historia del Pensamiento es de extraordinaria importancia.

Concebido éste como el primero de tres ciclos de conferencias que cubran una Historia de las Matemáticas desde sus orígenes hasta el siglo XX, ha parecido oportuno terminar este primer ciclo con Fermat y empezar el segundo con Descartes.

El presente Curso de conferencias ha sido patrocinado por la Fundación Anaya, y ha tenido lugar durante los meses de febrero y marzo con el siguiente programa:

- "Los Pitagóricos"
  Prof. Dr. Miguel de Guzmán Ozámiz
  Catedrático de la Universidad Complutense.

- "Origen del método axiomático deductivo"
  D. Mariano Martínez
  Profesor de la Universidad Complutense.

- "Euclides"

  Prof. Dr. Alberto Dou
  Catedrático de la Universidad Autónoma de Barcelona.

- "Arquímedes"

  Prof. Dr. Baltasar Rodríguez-Salinas
  Catedrático de la Universidad Complutense.

- "Apolonio"

  Prof. Dr. Miguel de Guzmán Ozámiz.

- "Astronomía griega"

  Prof. Dr. José María Torroja Menéndez
  Catedrático de la Universidad Complutense.

- "Matemática árabe"

  Prof. Dr. Juan Vernet Ginés
  Catedrático de la Universidad de Barcelona.

- "El álgebra del cinquecento"

  Prof. Dr. José J. Etayo Miqueo
  Catedrático de la Universidad Complutense.

- "Fermat"

  Prof. Dr. Enrique Linés Escardó
  Catedrático de la Universidad Nacional de Educación a Distancia.

PROBLEMATICA DE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMATICA

El Seminario de Matemáticas del Colegio Oficial de Doctores y Licenciados, de Madrid, ha organizado con el tema enunciado, un curso destinado al profesorado de Enseñanza Media, que tendrá lugar en la primera quincena de mayo, con el siguiente Programa:

- "El papel de la Matemática en el proceso educativo"
- "La motivación"

  D. Miguel de Guzmán Ozámiz
  Catedrático de la Universidad Complutense y miembro de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

- "Aspectos fundamentales de la didáctica de la Matemática"

  D. José Ramón Pascual Ibarra
  Catedrático de Bachillerato.

- "El laboratorio de Matemáticas"

  D. José Francisco Carballido
  Profesor Titular de la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial.

- "Técnicas de estudio"
- "El valor formativo de los problemas"

  Dª María Paz Bujanda Jáuregui
  Profesora de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense.

- "El ordenador como auxiliar del profesor de Matemáticas"

  D. Ricardo Aguado-Muñoz Prada
  Catedrático de I.B.

- Exposición de una experiencia: "Simulación balística"

D. Manuel Granados Zamora
Agregado de I.B. "Isabel la Católica"

Coordinador: D. Victor M. Sánchez González.

Información:

En el CDL, Plaza de Santa Bárbara, 10 - 3ª, de 16,30 a 19,30 horas, de lunes a viernes. Teléfono: 4192712/16.

IX C.E.D.Y.A.

- El IX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones se celebrará este año, del 22 al 25 de Septiembre, organizado por el Departamento de Ecuaciones Funcionales de la Universidad de Valladolid. Para más información, dirigirse a ese Departamento, en la Facultad de Ciencias, 47012 - VALLADOLID, o al teléfono (983) 252009 .

AKADEMIA NEOPLATONICA

- Con el lema: "Entre aquí quien ame la Geometría", se ha constituido la Akademia Neoplatónica P.M., que ha comenzado a convocar sus "Tertulias de Geometría". Para más información, dirigirse al Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, c/ Almagro, 42 , 28010 - MADRID.

XXII OLIMPIADA MATEMATICA ESPAÑOLA. FASE FINAL

La Real Sociedad Matemática Española ha celebrado la Fase Final de la Olimpiada Matemática de este año, de cuya Fase Previa o de Distritos dimos cuenta en el número anterior de nuestro Boletín.

Las pruebas de esta fase han tenido lugar en Madrid y Canarias simultáneamente, los días 28 de Febrero y 1 de Marzo, y a ellas han concurrido los tres ganadores de cada uno de los distritos en que se realizó la primera fase, en total 45 aspirantes. Consistieron en la resolución de seis problemas; en cada uno de los días se propusieron tres, para resolverlos en cuatro horas y media. Pueden verse sus enunciados en nuestra sección de problemas propuestos, e invitamos a nuestros lectores a que nos envíen soluciones para su publicación en los próximos números del Boletín. Como puede verse, los problemas presentaban bastante dificultad, a pesar de lo cual, todos ellos, salvo el tercero, fueron resueltos satisfactoriamente por algunos de los participantes en la competición. El nivel medio, en esta segunda fase, fue muy elevado, como era de esperar por competir en ella los campeones de los distintos distritos.

Cada problema se puntuó de cero a diez, por lo que la puntuación alcanzable era como máximo de 60. Dos aspirantes llegaron a 40 puntos, cuatro obtuvieron de 30 a 39, y doce de 20 a 29.

Los seis ganadores, propuestos para los premios establecidos, fueron los siguientes:

1ª. Carlos UENO JACUE, del I.B. "Cervantes" de Madrid, con 41 puntos.

2ª. Alberto GARRIDO ARRIBAS, del I.B. de Cantalejo (Segovia), con 40 puntos.

3ª. Juan David GONZALEZ COBAS, del Colegio de San Fernando de Avilés (Oviedo), con 37 puntos.

4ª. Jaume AMOROS I TORRENT, del Colegio de los Hnos Maristas de Lérida, con 31 puntos.

5ª. Joaquín ORTEGA I CERDA, del I.B. "Menéndez y Pelayo" de Barcelona, con 30.5 puntos.

6ª. Juan CUENCA GONZALEZ, del I.B. "Jabalcuz" de Jaén, con 30 puntos.

A corta distancia de ellos quedaron Francisco Pí Martínez (29.5 puntos), Julio Benítez López (27), Pedro Luis Cobos Pérez (27), Francisco Martínez Uriarte (25) y Francisco Santos Leal (25). A todos ellos nuestra coridal enhorabuena.

Como ya señalábamos en el número anterior de nuestro Boletín, el campeón, Carlos Ueno, que quedó en segundo lugar en la fase del distrito de Madrid, obtuvo también medalla de bronce en la I Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas celebrada a finales de 1985 en Bogotá. En 1983 participó en el concurso de problemas de nuestra Sociedad Castellana "Puig Adam", para alumnos de 1ª de B.U.P. clasificándose con el número 4, entre los 10 ganadores, y en 1984, obtuvo el 2ª puesto en el concurso para alumnos de 2ª de B.U.P.

El 2ª premio, Alberto Garrido, que fué campeón en la fase de distrito de Madrid, también obtuvo medalla de bronce en

الجبر

AL YABR

Mohammed ibn Musa Abu Djefar Al-Juarisim fué bibliotecario del califa Al-Mamun (que reinó entre 813 a 833).

Nativo de Jorassan fue en una misión a Afganistán y, quizá, regresó a través de la India.

Su libro más importante, escrito hacia 830, y que ha dado nombre a una rama de la matemática, tiene por título:

Hisāb al yabr wa-al-muqābala

de traducción no fácil (una de las traducciones propuestas es: ciencia de la reducción y confrontación), pero cuyo término al yabr dio luego nacimiento a nuestro vocablo álgebra. (al yabr correspondería al proceso que hoy conocemos por pasar de un miembro a otro los términos de una ecuación). Recuérdese que antiguamente (y, concretamente, en "El Quijote") se llamaba algebrista a quien recompone los huesos descoyuntados.

Se le debe también una ARITMETICA, que no se ha conservado en texto árabe, pero sí en su versión latina ALGORITMI DE NUMERO INDORUM donde aparece traducido y deformado el nombre del autor; de hecho, esa aritmética fue conocida durante mucho tiempo (hasta el siglo XVIII) como ALGORITMO (o el arte de Al-Juarisimi) para distinguirla de la Aritmética de BOECIO (Amicius Manlius Severinus Boecius, nació en Roma hacia 475 y falleció en 526). Así surgió, más tarde, el término ALGORITMO con la acepción matemática actual.

LAS MATEMATICAS Y LOS FILOSOFOS

Por José Barrio Gutiérrez
Catedrático de la E.U. del Magisterio "María Díaz Jiménez", de Madrid.

Uno de los aspectos más interesantes del saber matemático es la extraña fascinación que ha ejercido sobre numerosos filósofos, entre los que se cuentan algunas de las lumbreras de la Filosofía.

Dos han sido, a nuestro juicio, las características de las Matemáticas que han ocasionado este divino estupor en las mentes filosóficas. De una parte, la seguridad, la certeza de aquella ciencia; frente a la labilidad e incertidumbre del pensamiento filosófico, el saber matemático se presenta como un baluarte firme, seguro, indestructible; mientras que los filósofos todavía se cuestionan sobre temas ya estudiados por Platón y Aritóteles, los matemáticos han resuelto hace tiempo la problemática planteada por los griegos; en las Matemáticas parece haber un progreso lineal; en la Filosofía parece -salvo alguna rara excepción- no haber progreso de ningún tipo. En resumen, sería la admiración que siente el inválido ante el campeón de los cien metros lisos.

De otra parte, la fascinación del filósofo ante las Matemáticas se cifraría en la extraña conexión de esta ciencia con la realidad, tan bien expresada por aquel amigo del gran matemático alemán Lejeune-Dirichlet, cuando le decía: "*Es asombroso lo que sucede con vosotros los matemáticos. Construís vuestra ciencia con absoluto desprecio de la realidad y, sin embargo, vuestros resultados se aplican inexorablemente a lo real*".

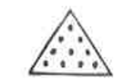
Esta admiración a la que nos referimos se ha concretado *de facto*, a lo largo de la historia del pensamiento filosófico, en el innegable dato de que gran parte de los más ilustres filósofos se han preocupado intensamente por el saber matemático, llegando a ser buenos conocedores de las Matemáticas de su tiempo (caso, por ejemplo, de Spinoza o de Kant) e, incluso, siendo matemáticos creadores (como, por ejemplo, los pitagóricos, Descartes, Pascal o Leibniz).

Ahora bien, la actitud de los filósofos ante lo que podríamos llamar la *ciencia de los números*, ha sido doble, consecuencia de la doble concepción que del número se ha tenido. Y esta duplicidad aparece ya muy temprano, nada menos que en los inicios de la escuela pitagórica, allá por el siglo VI a.C. En efecto, esta escuela se desgajó en dos ramas, la de los llamados *acusmáticos* y la de los denominados *matemáticos*.

Dejando de lado otras diferencias de menor cuantía (por ejemplo, el respeto debido al maestro; ambas ramas lo respetaban, por supuesto, pero en el caso de los acusmáticos era tan elevado que los discípulos no podían verle, sino sólo oirle -hecho que proviene su denominación, ya que el verbo ἀκούω significa *oir*; por ello el maestro impartía su enseñanza detrás de una cortina), la caracterísita fundamental de los acusmáticos era su concepción mágico-religiosa del número. Ellos aceptaban la tesis general de la escuela de que *lo más perfecto es el número y lo más bello la armonía*, pero la perfección del número la concebían como una perfección que permitía, a aquél que la conociese, dominar la Naturaleza mediante un conjunto de factores mágicos y religiosos. Las cosas y los fenómenos naturales tienen *su* número, y el conocimiento de dicho número nos permite dominar la cosa o fenómeno numerado. Un buen ejemplo de lo anterior es el llamado *novenario pitagórico*, que permitía predecir quién sería el ganador en un combate (este novenario consistía en dar valores numéricos a las letras constituyentes de los nombres de los

contendientes y, hallados los números de los nombres de ambos sumando los valores numéricos de cada una de las letras, se determinaba el ganador del combate mediante unas tablas elaboradas por la escuela pitagórica).

Otro ejemplo, de mayor trascendencia, es la importancia que los pitagóricos atribuyeron a la Tetractis, al número 10, número sagrado y perfectísimo por ser la suma de los cuatro primeros números, y que era el número de la Divinidad; por ello lo asignaron propiedades mágico-religiosas de protección contra el dolor, la enfermedad, la desgracia, es decir, contra el mal en general. Una representación geométrica de la Tetractis era portada como amuleto colgada del cuello, y en numerosas tumbas de pitagóricos se han encontrado estos amuletos en los más variados materiales, desde el sencillo cobre con piedras corrientes incrustadas hasta algunos de oro con esmeraldas o rubíes.



La concepción mágico-religiosa del número ha sido anterior a la escuela pitagórica -hay claras manifestaciones de ella en culturas muy primitivas- y ha perdurado a la desaparición de la misma. Todo el movimiento cabalista, y en especial una de las tres partes de la Cábala, la guematría, es buena prueba de ello. Y téngase en cuenta que al referirnos a la Cábala no usamos este término en su sentido más restringido, sino en el más amplio. Así, un caso claro de guematría sería el texto del Apocalipsis de San Juan en el que se nos dice que el "número de la bestia es el 666". Pues bien, de las diversas interpretaciones dadas a este pasaje, parece la más correcta y lógica la que establece que la bestia es Nerón, perseguidor de los cristianos; si escribimos en caracteres hebreos el término *Nerón César* y asignamos valores numéricos a las letras (cada letra del alfabeto hebreo tenía un valor numérico), la suma de todos ellos nos da 666.

Esta concepción mágico-religiosa tendrá su culminación en la Cábala, tanto hebrea como cristiana, que se desarrollará a lo largo de los siglos XIV, XV y XVI. Así, algunos cabalistas cristianos decían que la palabra Mesías (en hebreo Mshych) tiene como número 358; pero, a su vez, la palabra serpiente (en hebreo Nchsh) tiene como número 358; de lo que deducían que el Mesías sería el destructor de la serpiente (o sea, del demonio).

Hay que tener muy presente que, si bien en los momentos actuales esta concepción del número está en general abandonada, ha tenido muchos seguidores incluso hasta bien entrado el siglo XIX, como puede demostrarse leyendo los escritos de los grandes teósofos del siglo pasado.

Y todavía alguna de nuestras expresiones reflejan tal modo de concebir el número: "no hay dos sin tres", "a la tercera va la vencida", "el número 13 trae mala suerte". En particular, esta última ha tenido vigencia hasta hace muy poco (e incluso aun la tiene en algunas personas). No hace mucho que en las habitaciones de los hoteles no existía el número trece, que en los coches de fórmula uno tal número era eliminado, que los futbolistas suplentes no llevaban el 13 y que en algunas reuniones familiares para celebrar un almuerzo, si por casualidad el número de comensales era de 13, se invitaba a un extraño, eliminando tan nefasto número).

Pero, como antes anticipamos, ya dentro de la escuela pitagórica los llamados matemáticos tenían otra concepción del número. Para ellos el número era lo más perfecto, pero su perfección no radicaba en unos extraños poderes mágico-religiosos, sino en el hecho de que, como diría posteriormente Galileo, el libro de la Naturaleza está escrito en lenguaje matemático y el que quiera leer en tal libro ha de conocer las Matemáticas. Todo fenómeno natural podía ser expresado en ecuaciones matemáticas. Esta interpretación de la perfección del número, mucho más acertada que la anterior, es la que, afortunadamente para la escuela y para la Humanidad, alcanzó preponderancia, siendo la seguida por

los pitagóricos más insignes, como el propio fundador de la escuela, Arquitas y Filolao. Y gracias a ello los pitagóricos realizaron descubrimientos trascendentales en Matemáticas, como el teorema de Pitágoras, los números irracionales, la teoría de series, la teoría de proporciones, los números triangulares, cuadrangulares, cuadrados perfectos, perfectos, etc. etc.

Si se hiciera un detenido rastreo de cuántos han sido los filósofos que a lo largo de la historia han sentido esta admiración por las Matemáticas y, en consecuencia, las han cultivado, la lista de los mismos sería muy extensa. Pero vamos a fijarnos en tres de los más destacados, Descartes, Pascal y Leibniz.

La categoría de Descartes como filósofo y como matemático es de todos bien conocida. Pero lo que quizás no sea tan conocido es el hecho de que el genial pensador francés se basó en la estructura de las Matemáticas para intentar construir una Filosofía válida para todos, una Filosofía de valor universal -del mismo modo que las Matemáticas tienen ese valor universal-.

En efecto, la filosofía cartesiana va a construirse como un sistema axiomático (tal como Euclides había construído la geometría) y con un total desprecio por la experiencia (al igual que el matemático para nada se basa en datos experienciales).

Descartes intentará basar el método filosófico en el uso de la intuición y de la deducción. Mediante la primera conocemos aquellas verdades que son de suyo evidentes e inmediatas, es decir, los axiomas (éstos, en el caso de la Filosofía, se reducen a uno solo, el cogito, ergo sum); con la segunda alcanzamos aquellas verdades que, sin ser inmediatamente evidentes, obtienen evidencia gracias a que llegamos a ellas partiendo de los axiomas y a través de una cadena de razones, es decir, de pasos sucesivos que son de suyo evidentes (se trata de lo que los matemáticos lla man teoremas; en la edificación de su filosofía el primer teorema que Descartes quiso demostrar fue el de la existencia de Dios, única forma de salir del inmanentismo inherente al cogito).

El rechazo del dato sensible, de la experiencia, es también patente en Descartes. La verdad filosófica sólo será alcanzable si renunciamos a los cantos de sirena de nuestros sentidos, si prescindimos de lo sensible. En este punto Descartes es terminante: *sólo el entendimiento es capaz de alcanzar la verdad, por lo que nunca, si queremos evitar el error, debemos confiar ni en el testimonio fluctuante de los sentidos, ni en el juicio falaz de una imaginación incoherente*, tal como nos dice en la Regla XII de sus Reglas para la dirección del espíritu.

El genio filosófico y matemático de Pascal es también bien conocido. Pero la imbricación de Filosofía y Matemáticas en el pensador francés quizás tenga su máxima expresión en el llamado argumento a pari o argumento de la apuesta; en realidad, este argumento se nos presenta como una armoniosa mezcla del espíritu de geometría y del espíritu de finura. Se ha dicho a veces que con tal argumento Pascal intentó demostrar la existencia de Dios, tratándose, por tanto, de un argumento teológico-matemático. Creemos que tal interpretación es un craso error; Pascal no quiere demostrar que Dios existe, lo que quiere demostrar es que, desde un punto de vista psicológico, la postura del ateo es absurda, ilógica (con independencia de que realmente exista o no el Ser Supremo). Se trata, pues, de un argumento psico-matemático.

Pascal se va a basar en el concepto de esperanza matemática. El problema radica en determinar la esperanza matemática según apostemos a que Dios exista (y, en consecuencia, obremos conforme a las normas por El dictadas) o a que Dios no exista (ateísmo y, en consecuencia, nos apartemos de las anteriores normas). Supongamos que apostamos porque Dios existe. La probabilidad del suceso "existe Dios" es de $\frac{1}{2}$. La ganancia posible es la beatitud,

la felicidad eterna, una ganancia infinita. Por tanto, la esperanza matemática de esta apuesta (la apuesta teísta) es:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot \infty = \infty$$

Es decir, la esperanza matemática, si apostamos porque Dios exista, es infinita.

Consideremos el caso contrario, apostar porque Dios no exista. La probabilidad del su-ceso "Dios no existe" sigue siendo $\frac{1}{2}$. La ganancia posible es nula, ya que de la inexistencia de Dios ningún beneficio obtiene el ateo. Luego la esperanza matemática de esta apuesta es:

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$$

O sea, la esperanza matemática, si apostamos porque Dios no exista, es cero.

Es indudable, dirá Pascal, que entre dos apuestas, cuya esperanza matemática es, respectivamente, infinito y cero, sólo es racional elegir la primera, ya que todo hombre, por naturaleza, aspira a lo mejor. El ateísmo, pues, se presenta como un absurdo, tanto desde un punto de vista lógico como psicológico.

Pero quizás el filósofo en el que su extraordinaria formación matemática influyó con más intensidad en la elaboración de su pensamiento filosófico haya sido Leibniz.

Como es bien sabido, él fue el creador del sistema binario de numeración (o sistema Leibniz, como también es llamado). Pues bien, en la estructura de este sistema de numeración Leibniz creyó ver una demostración de la acción creadora de Dios: *el 1 representa la Divinidad, el 0 la nada; de ambos surge la totalidad de los números, al igual que de Dios y la nada, en virtud* *del acto creador, surgen la totalidad de los seres del universo.* Tanto se entusiasmó Leibniz con este descubrimiento que se lo comunicó al jesuíta Grimaldi, pidiéndole que lo pusiera en conocimiento del Emperador de China (por aquel entonces la Compañía de Jesús intentaba extender el número de sus misiones en China); es más, Leibniz soñaba con que el propio Emperador, gran aficionado a las Matemáticas, se convirtiera con este descubrimiento al Cristianismo. De hecho el Emperador no se hizo cristiano, pero incrementó, entusiasmado con el conocimiento del sistema binario, las facilidades concedidas a los jesuítas para su expansión por el lejano país asiático.

Si prescindimos de Raimundo Lulio, Leibniz fue el primero que realizó un intento serio de construir un método de razonamiento filosófico inspirado en el cálculo, idea que el filósofo alemán expresó con toda nitidez en las siguientes palabras:

"Según esto, cuando surja una controversia, no habrá ya necesidad de discusión entre dos filósofos, más de la que hay entre dos matemáticos. Bastará, en efecto, con tomar la pluma en la mano, sentarse a la mesa y decirse el uno al otro: ¡calculemos!"

Leibniz quiso alcanzar esta finalidad mediante la creación de el arte combinatoria. El intento en sí quedó fallido, pero hay que destacar dos puntos:

1ª) Que con su arte combinatoria Leibniz se presenta como el gran precursor de la Lógica matemática o Lógica simbólica, que nacerá con toda fuerza en el siglo pasado y que hoy día es una de las ciencias de mayor alcance y porvenir.

2ª) Que fue el primero en hacer ver los graves riesgos de fiarse del llamado "sentido común" en la resolución de cualquier tipo de problemas; que sin la ayuda de

ese fabuloso potenciador de la capacidad de nuestra razón que son las Matemáticas, casi inexorablemente se cae en el error.

Veamos, entre tantos y tantos que se podrían proponer, un ejemplo bien sencillo de la anterior afirmación.

Un automovilista asciende por una carretera de un kilómetro de longitud hasta la cima de una montaña, a la velocidad de 15 km/h. ¿A qué velocidad tendrá que descender por el kilómetro de carretera que hay en la otra vertiente de la montaña para conseguir en el recorrido total de subida y bajada (o sea, en los 2 km) una velocidad media de 30 km/h?

Guiándonos por el sentido común, por el poder razonador de nuestra inteligencia pero sin usar del instrumental matemático, parece lo lógico decir que se obtendrá una velocidad media de 30 km/h en el recorrido total de los 2 km, si se hace el kilómetro de bajada a la velocidad de 45 km/h, ya que la media de 15 y 45 es 30.

Lo asombroso es que la respuesta correcta no es la de que la velocidad de bajada sea de 45 km/h o cualquier otra velocidad. La respuesta correcta es: no hay ninguna velocidad de descenso que permita obtener como media de los 2 km la de 30 km/h.

Usando el cálculo matemático, potenciador de la pobre capacidad razonadora que por naturaleza tiene la inteligencia humana, se llega con facilidad a ver la verdad de tan paradójica conclusión. Sabemos que, en el movimiento uniforme, $e = vt$; por tanto, el tiempo necesario para recorrer 2 km a la velocidad media de 30 km/h es de $\frac{2}{30}$ de hora, o sea, de 4 minutos. Ahora bien, el tiempo preciso para recorrer el kilómetro de subida a la velocidad de 15 km/h es de $\frac{1}{15}$ de hora, es decir, también de 4 minutos. Como consecuencia, el automovilista tendría que recorrer el kiló metro de bajada en 0 segundos, lo cual es manifiestamente imposible (salvo que lo hiciera con una velocidad infinita, lo que físicamente es algo sin sentido).

Es posible, y así lo sostienen muchos expertos en la filosofía leibniciana, que la teoría filosófica de más envergadura y que constituye los cimientos del resto de su pensamiento filosófico sea la monadología, la teoría de las mónadas. Naturalmente que no es este el momento de exponer con detalle esta teoría. Sólo diremos que, según Leibniz, las mónadas son los minima naturalia, es decir, los elementos últimos componentes de los seres del universo; las mónadas serían a modo de átomos, pero átomos de energía; todo cuerpo está constituído por mónadas. Las mónadas tienen diversas propiedades; son ingenerables e indestructibles (excepto por la acción creadora o aniquiladora de Dios), son inextensas (no podemos entrar en el problema de, si las mónadas son inextensas, cómo los seres del universo, compuestos por mónadas, se nos presentan como extensos), tienen percepción (1) y apetición (2), etc. etc.

Pero hay una propiedad de las mónadas que es la que nos interesa en este estudio que estamos haciendo; tal propiedad la formula Leibniz con estas palabras: *Así, pues, cada mónada creada representa el universo entero*. O sea, que cada mónada es como un modelo en pequeño de todo el universo, que cada mónada es un universo a escala pequeñísima que cada mónada es un microcosmos; de tal manera que, nos dice Leibniz, si nosotros pudiéramos conocer con todo detalle una sola mónada (lo que, según el filósofo alemán, es imposible), del conocimiento de tal mónada llegaríamos al conocimiento de todo el universo.

---

(1) La percepción consiste en un estado cognoscitivo, en un proceso de conocimiento.

(2) La apetición es una tendencia, una fuerza interna de la mónada que la impulsa a pasar de una percepción a otra.

¿Cómo llegó Leibniz a esta curiosa teoría? Para nosotros es indudable que partiendo de los conceptos matemáticos de derivada, diferencial e integral (no olvidemos que el pensador alemán fue, simultáneamente con Newton, el descubridor del cálculo infinitesimal).

Para aclarar el paralelismo entre universo, mónada, percepción y apetición con integral, derivada y diferencial, construiremos el esquema siguiente:

Ente real	Ente matemático
Universo	Integral
Mónada	Derivada
Percepción	Diferencial de la función
Apetición	Diferencial de la variable

Efectivamente, partiendo del conocimiento de la derivada de una función (en cierto modo la derivada nos da las propiedades de la función en un punto), podemos llegar por integración a conocer la totalidad de la curva, es decir, la totalidad del universo.

Por otra parte, y definiendo la derivada como cociente de diferenciales (y no olvidemos que esto es lo que hace Leibniz, cosa que no hizo Newton), fácilmente se comprende cómo la diferencial de la variable sería la apetición y la diferencial de la función sería la percepción.

Con todo lo ya dicho creemos demostrado con creces la tesis con que iniciábamos nuestro estudio: la extraña fascinación que el saber matemático ha ejercido sobre numerosos filósofos. Por supuesto que la lista de filósofos "fascinados" es muy numerosa, pero quizás los casos que hemos analizado sean los más representativos por la extraordinaria altura que, tanto en Filosofía como en Matemáticas, alcanzaron los pitagóricos, Descartes, Pascal y Leibniz.

CONJETURAS DE GOLDBACH

Por Fidel Fernández y Fernández Arroyo
Catedrático del I.B. "Riánsares". Tarancón (Cuenca)

Entre los numerosos problemas que plantea la teoría de números existen algunos, de enunciado fácilmente comprensible para un alumno de bachillerato, que se plantearon hace más de doscientos años y no han sido aún resueltos -al menos en nuestro conocimiento-, a pesar del empeño puesto en ello por muchos grandes matemáticos. Es bien sabido que los intentos de solucionar tales cuestiones han provocado a menudo notables avances en las matemáticas; recuérdense, por ejemplo, la conjetura de Fermat, propuesta ya en el siglo XVII, y todos los descubrimientos a que han dado lugar los sucesivos ensayos de demostración.

Las conjeturas de Goldbach, surgidas en junio de 1742 en la correspondencia entre Chr. Goldbach y L. Euler, marcaron el inicio de una serie de cuestiones relativas a la descomposición de un número natural estrictamente positivo como suma de números primos, al número de primos de la descomposición y al número de descomposiciones posibles. Entre los resultados conseguidos hasta el momento en este sentido, puede citarse que, en 1937, I.M. Vinográdov probó que cualquier número impar mayor que $3^{3^{15}}$ es la suma de tres primos; y posteriormente, en 1973, Chen Jing-Run demostró que cualquier número par suficientemente grande puede expresarse como la suma de un primo y un producto de un máximo de dos primos.

Sin embargo, una de las cuestiones iniciales, conocida a menudo como la conjetura de Goldbach propiamente dicha, per manece abierta aún; afirma que cualquier número natural par -mayor que cero- es igual a la suma de dos números primos.

Esta conjetura ha sido probada en bastantes casos -pero no en general-, y ha dado lugar a notables investigaciones sobre dicha descomposición. (Recuérdense los trabajos de A. Desboves (1855), F.J.E. Lionnet (1879), N.V. Bougaief (1855), G. Cantor (1894), V. Aubry (1896), R. Haussner (1896), R. Stäckel (1896), J.J. Sylvester (1896-97), F.J. Studnicka (1897), E. Landau (1900), L. Ripert (1903), E. Maillet (1905), A. Cunningham (1906), J. Merlin (1911), M. Vecchi (1913), J.G. van der Corput (1937), N.G. Cudakov (1938), T. Estermann (1938), M.L. Stein y P.R. Stein (1965), Robert C. Vaughan (1972-75), H.L. Montgomery (1975), P.M. Ross (1975), Pan Chen Dong, Ding Xia Xi y Wang Yuan (1975), y Dan Zwillinger (1979), entre otros). Además, conviene nacer notar que se han realizado también numerosos estudios sobre problemas en cierto modo similares.

Utilizando un ordenador es posible intentar la descomposición de tantos pares como se desee (pero siempre un número finito) como suma de dos números primos. Esto fue lo que sugerí una vez a mis alumnos del Instituto de Tarancón. Me llamó la atención el programa hecho en BASIC por un alumno de tercero de B.U.P. para realizar lo que les propuse.

El programa ideado por este alumno, Javier Arquero Avilés, permite, prefijado arbitrariamente cualquier número natural par, que el ordenador vaya escribiendo cada uno de los números pares que le siguen como suma de dos números primos, en el caso de que esto sea posible; el ordenador se para cuando encuentra algún número par que no es igual a la suma de dos números primos (lo cual no ha ocurrido hasta ahora, en ninguna de las ocasiones en que se ha ejecutado el programa, pese a haber descompuesto de esta forma varios miles de números pares), o cuando pulsamos la tecla "BREAK".

Evidentemente, la conjetura de Goldbach continúa sin resolver. Sin embargo, creo que puede ser interesante fijarse en la idea que tuvo este alumnos para realizar su programa, que figura a continuación de la presente nota.

BIBLIOGRAFIA

(1) Dickson.- "History of the Theory of Numbers", págs. 421-425.

(2) Richard K. Guy.- "Unsolved Problems in Number Theory", pags. 58-59.

(3) I. Vinográdov.- "Fundamentos de la Teoría de los Números.

PROGRAMA REALIZADO POR EL ALUMNO JAVIER ARQUERO AVILES

```
1Ø REM QUISIERAMOS SABER SI CUALQUIER NUMERO NATURAL PAR ES IGUAL O NO A LA
SUMA DE DOS NUMEROS PRIMOS
2Ø CLS:PRINT:PRINT
25 PRINT "QUISIERAMOS SABER SI CUALQUIER NUMERO NATURAL PAR ES IGUAL O NO
A LA SUMA DE DOS NUMEROS PRIMOS"
3Ø FOR I=1 TO 35ØØ:NEXT I
4Ø C=C+2
45 R=-1
5Ø D=1
6Ø R=R+2
7Ø D=D+1
8Ø IF D*D>R THEN 11Ø
9Ø IF R-D*INT(R/D)=Ø THEN 5Ø
```

```
100  GOTO 70
110  T=C-R
120  D=1
130  D=D+1
140  IF D*D>T THEN 160
150  IF T-D*INT(T/D)=0 THEN 50
155  GOTO 130
160  IF T<1 THEN PRINT "NO SE CUMPLE QUE PAR=PRIMO+PRIMO":END
165  PRINT C;"=";C-R;"+";R
170  GOTO 40
```

Observación

Podemos empezar a partir de cualquier número natural par con la sentencia 35 C=X; siendo X el número natural par a partir del que queremos comenzar menos dos.

CONSTRUCCIONES CON LA REGLA DE UN SOLO BORDE. PROBLEMA DE STEINER

Por Francisco Lorenzo Miranda
Catedrático del I.B. "Cervantes" de Madrid

Uno de los problemas clásicos de la Geometría fue sugerido por el geómetra francés Poncelet (1788-1867), y resuelto por Jacobo Steiner en su libro "Construcciones Geométricas Ejecutables con una Regla y un Círculo Fijo", publicado en Berlín en 1833. Por este motivo es conocido como Problema de Steiner, y afirma que: *"Toda construcción que puede realizarse con regla y compás puede resolverse con sólo la regla de un borde, siempre que en el plano del dibujo se disponga de una circunferencia con su centro"*.

Con la regla de un solo borde las únicas operaciones posibles son: trazar rectas arbitrarias, dibujar la recta que pasa por dos puntos, encontrar el punto de intersección de dos rectas. Veamos, pues, algunos problemas previos para llegar a la solución del Problema de Steiner.

* * * *

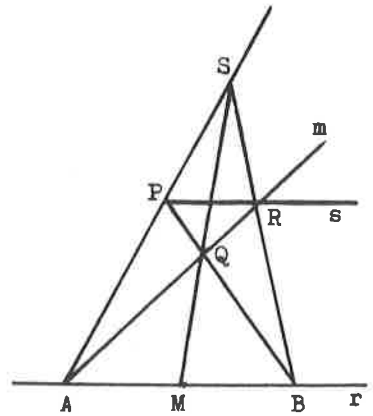
PROBLEMA 1ª

a) Dada una recta r, y en ella un segmento AB y su punto medio M, construir una paralela s a r por un punto P sólo con la regla de un borde

Solución

Se construye el cuadrivér tice completo PQRS, tal que dos PS y QR que pasen por A; otros dos PQ y RS pasen por. B; otro, SQ pase por M. El lado PR, opuesto del SQ es la paralela pedida.

Para ello, se trazan la recta AP y otra recta m arbitraria que pase por A. Se une B con P, recta que corta a m en Q. La recta MQ corta a AP en S. La recta SB corta a m en R. La recta PR es la pedida.



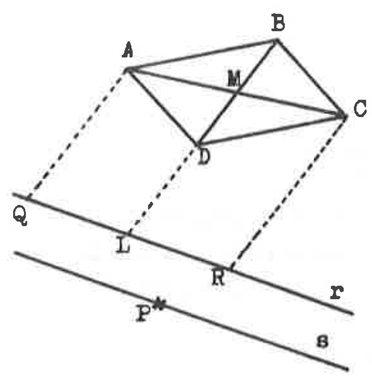
b) Si se dan dos rectas paralelas r y s y un segmento AB en una de ellas, se halla el punto medio M de Ab mediante la construcción del cuadrilátero completo de la figura.

PROBLEMA 2ª

Dado un paralelogramo ABCD, una recta r y un punto P, construir con la regla de un borde la paralela a r por el punto P.

Solución

Las diagonales AC y BD se cortan en el punto medio de ambas, M. Aplicando el problema 1°, se trazan por los extremos A y C de una de ellas las paralelas a la otra, que determinan en r los puntos Q y R, cuyo punto medio es el punto L de intersección de



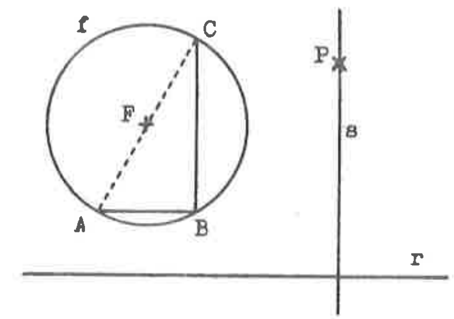
la diagonal BD con r. Aplicando nuevamente el problema 1ª, se traza por P la paralela s a r.

PROBLEMA 3ª

Si en el plano del dibujo se tiene dibujada una circunferencia f con su centro F, se puede construir con sólo la regla de un borde la paralela o la perpendicular a una recta r por un punto cualquiera P.

Solución

Puesto que dos diámetros de la circunferencia f son diagonales de un paralelogramo (en este caso rectángulo) y su punto medio es F, se puede trazar una paralela a r por cualquier punto del plano (problema 2°).

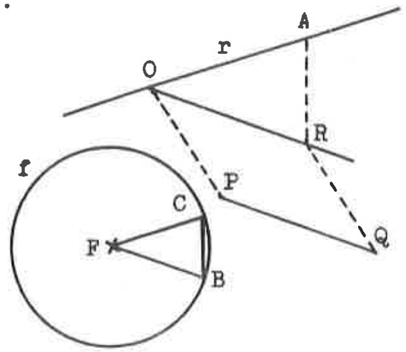


Para construir una perpendicular, se traza por un punto cualquiera A de f la paralela AB a r. Si C es el punto diametralmente opuesto al A, la recta CB es perpendicular a AB y, por tanto, a r. La paralela s por P a CB es perpendicular a r.

En todos los problemas que siguen se supone dibujada una circunferencia f y su centro F, y las construcciones que se indican se suponen realizadas sólo con la regla de un solo borde.

PROBLEMA 4ª

Dado un segmento PQ, una recta r y un punto O de r, determinar un punto A de r tal que OA = PQ.



Solución

Se traza por O una paralela OR a PQ, y por Q la paralela QR a OP (problema 3°). Por F se traza la paralela FB a PQ y FC paralela a r. La paralela RA por R a BC proporciona el punto A buscado de r.

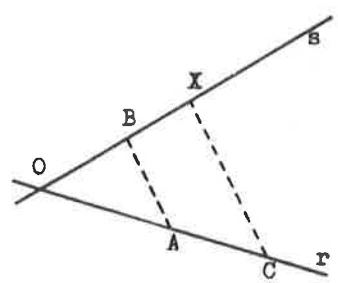
PROBLEMA 5ª

Dados los segmentos a, b, c, construir un segmento x tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

Solución

Se dibujan dos rectas cualesquiera r y s que pasen por un punto O y se determinan en r los puntos A y C y en s el B tales que OA = a, OC = c y OB = b (problema 4°).

La paralela CX a AB (problema 3°), determina X en s tal que OX = x.

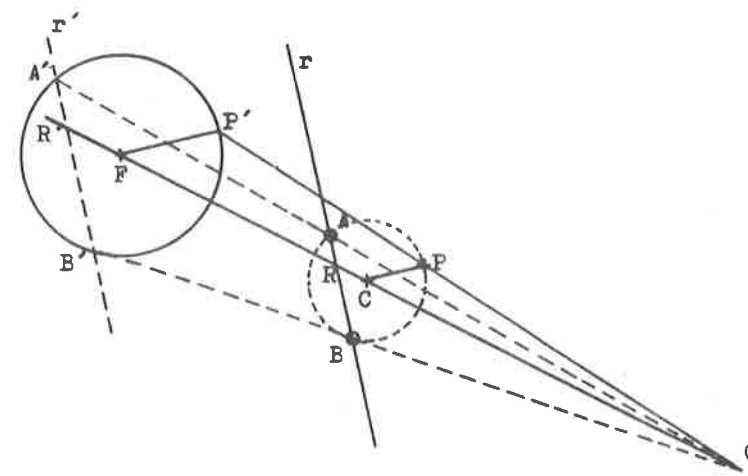


PROBLEMA 6ª

Hallar los puntos de intersección de una recta r con una circunferencia no dibujada de la que se conoce el centro y el radio, o lo que es equivalente, el centro C y un punto P de ella.

Solución

Sea C el centro de la circunferencia, P un punto de ella, y r la recta. Sea f la circunferencia auxiliar y F su centro.



Se traza por F la paralela FP' a CP (problema 3°). El punto O, intersección de FC y PP' es uno de los centros de homotecia de las dos circunferencias. Si R es la intersección de r con FC, se determina el homólogo R' tal que $\frac{OR}{OR'} = \frac{OC}{OF} = \frac{CP}{FP'}$ (problema 5°). Se traza por R' la paralela r' a r (problema 3) que corta a f en A' y B'. Las rectas OA' y OB' cortan a r en los puntos pedidos A y B.

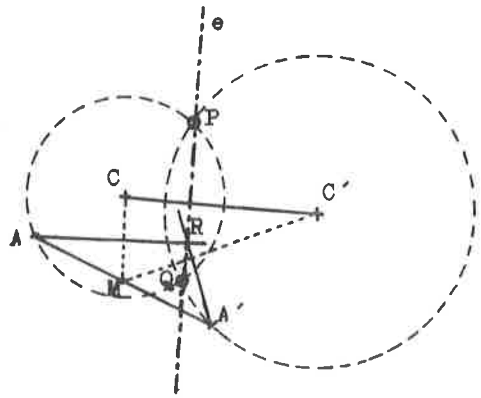
Si las circunferencias son concéntricas, la construcción no difiere esencialmente de la que se acaba de exponer.

PROBLEMA 7ª

Hallar los puntos de intersección de dos circunferencias no dibujadas de las que se conocen sus centros y un punto de cada una de ellas.

Solución

Sean C y C' los centros de las circunferencias dadas y A y A' un punto de cada una.



Se halla el punto medio M de AA' (problema 1°). Se trazan las perpendiculares AR y A'R a CM y C'M, respectivamente (problema 3°). La perpendicular por R a CC' es el eje radical e, ya que R es el centro radical de las circunferencias dadas y la de diámetro AA'. Las intersecciones de e con una cualquiera de las dos circunferencias (problema 6°) son los puntos P y Q pedidos.

Puesto que las construcciones básicas que se pueden efectuar con la regla y el compás son: determinar el punto de intersección de dos rectas, los de intersección de una recta y una circunferencia y los de intersección de dos circunferencias, con la resolución de los problemas anteriores queda probado el Problema de Steiner.

Como aplicación proponemos los siguientes problemas:

- Construir con la regla de un solo borde:

  I. El segmento medio geométrico de dos segmentos dados.

  II. La bisectriz de un ángulo dado.

  (Se supone dibujada la circunferencia auxiliar f con su centro F).

A quienes estén interesados en el conocimiento del origen y solución de los más célebres problemas clásicos de matemáticas elementales, recomendamos el precioso libro de Heinrich DÖRRIE: "100 Great Problems of Elementary Mathematics". Their History and Solution. Publicado en la Editorial Dover de Nueva York.

En él encontrará el lector la historia y solución de 100 problemas clásicos tales como: El "Problema Bovinum" de Arquímedes; el de las parejas matrimoniales de Lucas; el de la aguja de Buffon; el de la duplicación del cubo; el de la loxodroma, etc.

Para dar una idea de la gran belleza de las soluciones, transcribimos un párrafo del prólogo del autor a la primera edición: *"En la presente obra se encuentran muchas perlas del arte matemático; las soluciones de los problemas, en realizaciones de un Gauss, de un Euler, Steiner y otros, representan increíble triunfo de la mente matemática".*

SIMULACION LOGO DEL GRUPO EQUIFORME

Por E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano

El grupo equiforme, o grupo de transformaciones geométricas que conservan la forma, es sin duda uno de los capítulos fundamentales de la Geometría Elemental, tanto por su aspecto utilitario como por el formativo. La dificultad del tema para principiantes radica, en gran medida, en las escasas vivencias que pueden ser consideradas como experiencias, a partir de las cuales puedan elaborarse los conceptos abstractos que constituyen estas transformaciones. De aquí el importante papel que pueden jugar en ello las simulaciones.

El lenguaje LOGO, en su aspecto más original, la "geometría de la tortuga", parece el instrumento idóneo para simular las experiencias anteriormente indicadas.

Aunque el subconjunto unión de las simetrías (axiales) y homotecias genera el grupo equiforme, por razones didácticas y de simplicidad de los procedimientos LOGO, se han considerado cuatro transformaciones básicas: traslaciones, giros, simetrías y homotecias.

El programa que se ha elaborado permite:

a) simular cada una de estas cuatro transformaciones básicas, de modo que baste dar los *datos de la figura original* (posición, tamaño, etc) y los *datos de la transformación* (centro y amplitud del giro, eje de la simetría, etc), para que el procedimiento dibuje la figura imagen e indique su posición

b) ejecutar sucesivamente dos, o más, de esas transformaciones

c) dadas dos figuras (original y final), determinar la transformación (o producto de transformaciones) en que la última sea imagen de la primera

d) determinar la transformación producto de dos, o más, transformaciones previamente efectuadas

Aunque los listados estan escritos para LOGO de Apple II (128 K), con muy pocas variaciones pueden adaptarse a otras versiones de LOGO.

§1. FUNDAMENTACION GEOMETRICA

La adaptación de las transformaciones del grupo equiforme a la "Geometría de la tortuga" nos ha obligado a desarrollar métodos originales de determinación del centro de semejanza, eje de simetría deslizante, etc., que explicaremos en este apartado.

Como espacio gráfico de trabajo utilizaremos el rectángulo (-120,120) x (-50,90), reservando para textos las cuatro lineas inferiores. Por ello se representarán los ejes de coordenadas señalando doce divisiones en cada semieje horizontal y nueve en el vertical superior. Los ejes pueden no ser dibujados, si así se desea.

1.1 Figuras original y final

Aunque una semejanza del plano es una aplicación biyectiva del conjunto de puntos del plano en si mismo, lo cierto es que, cuando se trata de intuir el efecto producido por una transformación, se piensa en una cierta figura sencilla y en la imagen de aquella figura.

Puesto que una semejanza queda determinada por tres puntos no alineados (vértices de un triángulo no isósceles) y sus respectivos puntos imagen, la figura elegida debe tener tres puntos bien distinguibles y en ella debe ser inmediatamente perceptible uno de los posibles sentidos en el plano. A lo largo del présente trabajo se ha operado con una sencilla figura en forma de bandera (fig.1) en la que se han considerado tres

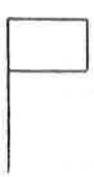


Fig.1

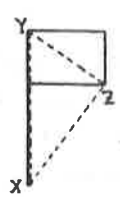


Fig.2

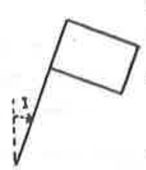


Fig.3

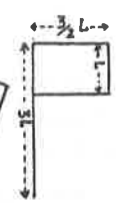


Fig.4

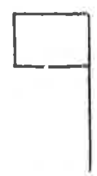


Fig.5

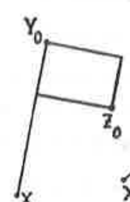


Fig.6

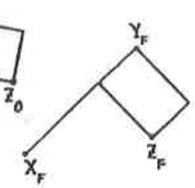


Fig.7

puntos que la determinan (X, Y, Z en la figura 2).

Para determinar la posición de la figura (bandera), hasta fijar:

i) las coordenadas del punto X (pié de la bandera), al que en adelante llamaremos *punto base* para dibujar la figura

ii) el ángulo I (en grados), de inclinación a la derecha de la figura respecto de la vertical (fig. 3)

iii) la longitud de los tramos de la figura, que son multiplos de una cantidad, L, arbitrariamente elegida, de acuerdo con el principio de similitud del lenguaje LOGO (fig. 4)

iv) el sentido de la figura, con posibles valores +1 (fig.3) o bien -1 (fig. 5), según sea el sentido de los ángulos trazados, de acuerdo con el principio de simetría del lenguaje LOGO

A la figura que se da inicialmente la llamaremos *figura original* y a sus tres puntos característicos los designaremos X_0, Y_0, Z_0 (fig. 6). Análogamente, a la figura imagen en la transformación la llamaremos *figura final* y a sus tres puntos característicos los designaremos X_F, Y_F, Z_F (fig. 7).

La inclinación, longitud de tramos, y sentido se designarán respectivamente por I_0, L_0, S_0 para la figura original, y por I_F, L_F, S_F para la final.

1.2 Traslación

Dada una figura original cuyo punto base es el de coordenadas (X_{0_1}, X_{0_2}) y cuyos otros datos son I_0, L_0, S_0, su imagen en la traslación de vector (v_1, v_2) será la figura (fig. 8) cuyo punto base es el de coordenadas

$$X_{F_1} = X_{0_1} + v_1 \quad ; \quad X_{F_2} = X_{0_2} + v_2$$

y cuyos otros datos son:

$$I_F = I_0 \quad , \quad L_F = L_0 \quad , \quad S_F = S_0$$

La simulación se desarrolla en los procedimientos TRASLACION y POR.TRASLACION (del §2)

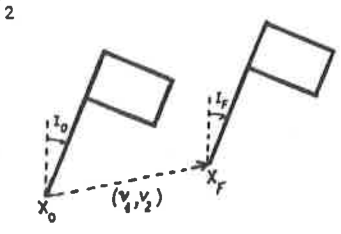


Fig. 8

1.3 Giro

Dada una figura original de datos X_0, I_0, L_0, S_0, su imagen (fig. 9) en el giro de centro C y amplitud A tendrá por punto base el punto X_F, que verifique:

$$\overline{X_F C} = \overline{X_0 C} \quad , \quad \widehat{X_0 C X_F} = A$$

y sus otros datos serán

$$I_F = I_0 - A \quad , \quad L_F = L_0 \quad , \quad S_F = S_0$$

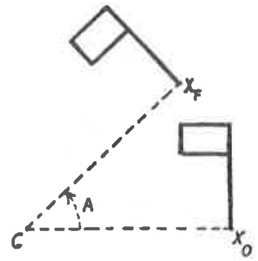


Fig. 9

La simulación se desarrolla en los procedimientos GIRO y POR.GIRO (del §2).

1.4 Simetría (axial)

Si el eje de la simetría pasa por el punto P y se inclina A grados respecto de la horizontal (fig. 10), entonces $\vec{e}$ = (cos A, sen A) es un vector unitario de la dirección del eje, luego designando por X_e al punto medio del segmento $\overline{X_0 X_F}$ se tendrá

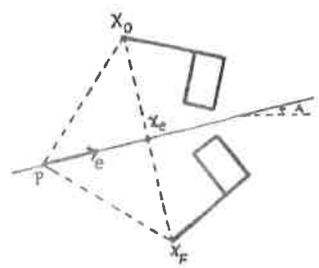


Fig. 10

$$\overrightarrow{PX_e} = (\overrightarrow{PX_0} \cdot \vec{e})\, \vec{e}$$

$$ESC = \overrightarrow{PX_0} \cdot \vec{e} = (X_{0_1} - P_1) \cos A + (X_{0_2} - P_2) \operatorname{sen} A$$

$$\overrightarrow{X_0 X_F} = 2\overrightarrow{X_0 X_e} = 2\,(\overrightarrow{PX_e} - \overrightarrow{PX_0})$$

de donde resulta que X_F es el punto

$$X_{F_1} = 2\,(P_1 + ESC \cdot \cos A) - X_{0_1}$$

$$X_{F_2} = 2\,(P_2 + ESC \cdot \operatorname{sen} A) - X_{0_2}$$

Es claro que los otros datos de la figura final serán

$$I_F = 2 \text{ Rectos} - I_0 - 2A \quad , \quad L_F = L_0 \quad , \quad S_F = -S_0$$

La simulación se desarrolla en los procedimientos SIMETRIA y POR.SIMETRIA (del §2).

1.5 Homotecia

En la homotecia de centro C y razón K, el punto base de la figura final, habrá de verificar

$$\overrightarrow{CX_F} = K\, \overrightarrow{CX_0}$$

su inclinación vendrá dada así

$$I_F = \begin{cases} I_0 \quad , \quad \text{si } K > 0 \quad \text{(fig. 11)} \\ I_0 + 2 \text{ Rectos, si } K < 0 \quad \text{(fig. 12)} \end{cases}$$

y sus restantes datos serán

$$L_F = |K|\, L_0 \quad , \quad S_F = S_0$$

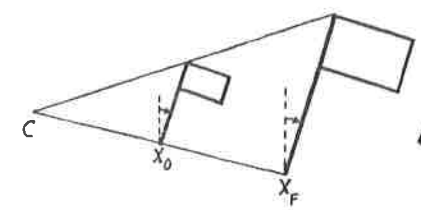


Fig. 11

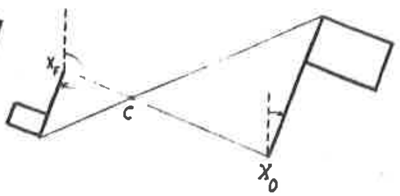
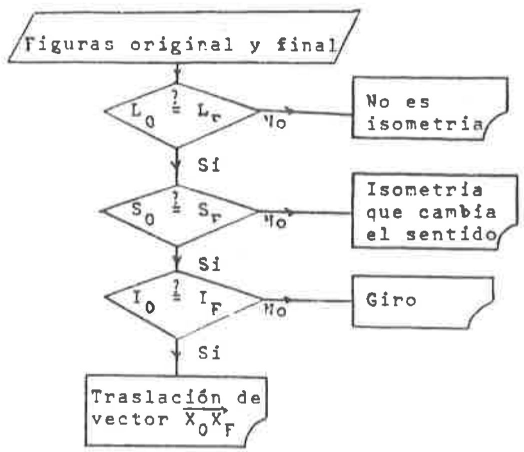


Fig. 12

La simulación se desarrolla en los procedimientos HOMOTECIA y POR.HOMOTECIA (del §2)

1.6 Clasificación de isometrías

Dadas una figura original (determinada por los cuatro parámetros X_0, I_0, L_0, S_0) y otra final (determinada por X_F, I_F, L_F, S_F), la caracterización de la isometría en que esta es imagen de aquella la haremos de acuerdo con el siguiente diagrama de flujo



La simulación se desarrolla en los procedimientos MOVIMIENTO y QUE.MOV.ES (del §2).

1.7 Determinación de la amplitud y centro de giro

Si al clasificar la isometría (en 1.6) resulta ser un giro, su amplitud A, será la diferencia $I_0 - I_F$ y su centro, C, se determina como sugiere la figura 12, en que X_M es el punto medio del segmento $\overline{X_0X_F}$, y por tanto

$$\overline{CX_M} = \overline{X_MX_F} \,/\, tg(A/2) \qquad (*)$$

Por tanto, situada la tortuga en X_F, hasta que avance hasta X_M, gire a la izquierda un recto y avance (*), para situarse en C.

La simulación se desarrolla en el procedimiento ES.GIR. (del §2).

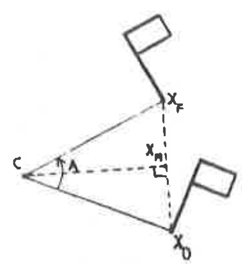


Fig.12

1.8 Determinación de la isometría que cambia el sentido

Si al clasificar la isometría (en 1.6), esta cambia el sentido, entonces pueden considerarse las rectas X_0Y_0 y X_FY_F.

Si dichas rectas son secantes y de acuerdo con la fig.13, r es bisectriz de ambas, X_T es punto de intersección de la paralela a r por X_F con la perpendicular a r por X_0, e Y_T es el

cuarto vértice del paralelogramo $X_TX_FY_FY_T$, entonces la recta e, paralela a r por el punto $X_TY_T \cap X_0Y_0$, es eje de una simetría en que X_TY_T es imagen de X_0Y_0 (según puede probarse fácilmente), por lo que la isometría se reduce a dicha simetría compuesta con la traslación de vector $\overrightarrow{X_TX_F}$.

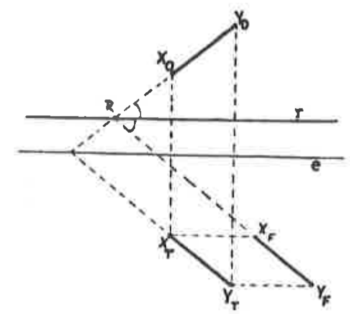


Fig. 13

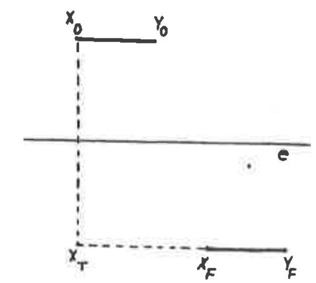


Fig. 14

Si, por el contrario, las rectas X_0Y_0 y X_FY_F son paralelas y, de acuerdo con la fig. 14, el punto X_T es proyección ortogonal de X_0 sobre la recta X_FY_F, entonces la isometría se reduce obviamente a la simetría de eje la recta e (mediatriz del segmento X_0X_T) compuesta con la traslación de vector $\overrightarrow{X_TX_F}$.

Por tanto, en ambos casos la isometría se reduce al producto de una simetría axial por una traslación de vector paralelo al eje de simetría, por lo que dicha transformación compuesta suele denominarse *simetría deslizante* (si X_T y X_F coincidieran, la traslación sería la aplicación idéntica y en consecuencia la isometría sería la simetría de eje e).

Es fácil probar que el punto medio del segmento de extremos dos puntos homólogos en la isometría ha de pertenecer al eje, e, de la simetría (axial o deslizante). Por tanto, los puntos medios X_M, Y_M, Z_M de los respectivos segmentos $\overline{X_0X_F}$, $\overline{Y_0Y_F}$, $\overline{Z_0Z_F}$ permiten determinar dicho eje (fig. 15 y fig. 16).

Observese que esos tres puntos no pueden coincidir, pues entonces la isometría sería simetría central, luego conservaría el sentido, en contradicción con nuestra hipótesis.

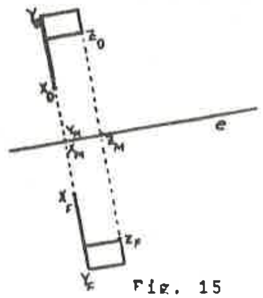


Fig. 15

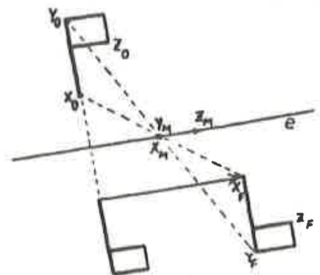


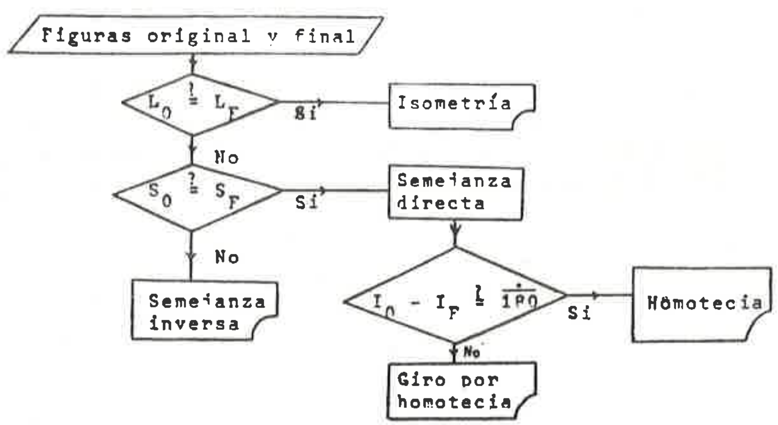
Fig. 16

Una vez determinado el eje e, para distinguir si la simetría es axial o deslizante, puede comprobarse si X_0X_F es, o no es, ortogonal a e. Si fuera $X_0 = X_F$, dicho punto sería invariante, luego se trataría de simetría axial, ya que la simetría deslizante no posee puntos invariantes. Por tanto, el producto escalar de $\overrightarrow{X_0X_F}$ por un vector de la dirección de e será nulo si, y solo si, la simetría es axial.

El procedimiento EJ.SIM determina el eje de simetría, TIP.SIM decide si la simetría es axial o deslizante. El primer caso se simula en ES.AXI y el segundo con ES.DESL (en el § 2).

1.9 Clasificación de semejanzas

Dadas una figura original y otra final, la determinación de la semejanza en que son homólogas se hará de acuerdo con el siguiente diagrama



La simulación se desarrolla en los procedimientos SEMEJANZA y QUE.SEM.ES (del §2)

1.10 Determinación de la razón y centro de la homotecia

Si al clasificar la semejanza (en 1.9), resulta ser homotecia, su razón K será el cociente L_F / L_0 y para determinar su centro, C, basta tener en cuenta que de su ecuación vectorial

$$\overrightarrow{CX_F} = K\,\overrightarrow{CX_0}$$

resulta

$$\overrightarrow{CX_F} = K(\overrightarrow{CX_F} - \overrightarrow{X_0X_F})$$

luego

$$\overrightarrow{X_FC} = \frac{K}{K-1}\,\overrightarrow{X_FX_0} \qquad (*)$$

Por tanto, situada la tortuga en X_F y orientada hacia X_0, basta que avance (*), para situarse en C (fig. 11)

Se desarrolla en el procedimiento ES.HOM (del §2).

1.11 Determinación del centro de semejanza directa

Si el clasificar la semejanza (en 1.9), esta resulta ser giro por homotecia, para determinar el unico punto del plano que es centro de un giro y de una homotecia de razón positiva, de cuyo producto resulta la semejanza (llamado *centro de semejanza*) no puede utilizarse el método clásico de intersección de las circunferencias X_0X_FP e Y_0Y_FP (fig. 17) por no ser viable en LOGO.

El método alternativo que hemos ideado consiste en hacer uso de las ecuaciones generales de una semejanza

$$x_1' = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \quad , \quad x_2' = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 \qquad (**)$$

determinando sus coeficientes a_i, b_i; $i = 1,2,0$ por la condición de que X_F, Y_F, Z_F sean las respectivas imágenes de X_0, Y_0, Z_0 (el sistema lineal ha de ser determinado, ya que una semejanza queda determinada por tres puntos no alineados y sus imágenes).

Una vez determinados dichos coeficientes, el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 &= x_1 \\ b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 &= x_2 \end{aligned}\right\}$$

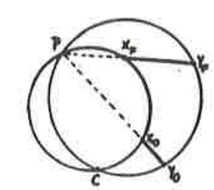


Fig. 17

tendrá por solución el centro de semejanza (por ser el único punto invariante de la semejanza directa).

Es claro que la amplitud del giro será $I_0 - I_F$ y la razón de homotecia L_F / L_0.

Se desarrolla en el procedimiento ES.GIR.HOM (del §2).

1.12 Determinación de la semejanza inversa

Si al clasificar la semejanza (en 1.9), resulta una semejanza que cambia el sentido, entonces basta considerar la recta e (fig. 18) que pase por X_0 y de dirección bisectriz de las semirrectas X_0Y_0 y paralela a X_FY_F por el punto X_0. La imagen de la figura original en la simetría de eje e, es obviamente una figura homotética de la final.

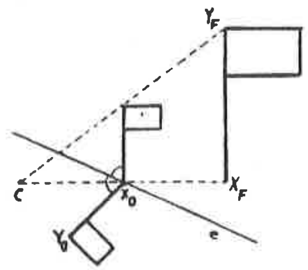


Fig. 18

La semejanza se ha reducido pues al producto de simetría axial por homotecia (se desarrolla en el procedimiento ES.SIM.HOM).

§ 2. PROCEDIMIENTOS

```
TO SITUA.FIG.O
CS HT .SETSCRUNCH 1 WINDOW
PR [ESCRIBE LA MAXIMA ABSCISA REPRESENTADA ( DIVISOR O MULTIPLO DE 120 )]
MAKE "E FIRST RL
PR [DEBO REPRESENTAR LOS EJES? ( CONTESTA: SI O NO )]
MAKE "EJ RL
IF :EJ = [SI] [EJES]
PR [ESCRIBE LAS COORDENADAS DEL PUNTO BASE PARA DIBUJAR LA FIGURA ORIGINAL]
MAKE "X RL MAKE "XY :X
PR [ESCRIBE EL NUMERO DE GRADOS DE INCLINA CION A LA DERECHA DE LA FIGURA ORIGINAL]
PR [( RESPECTO DE LA VERTICAL )]
MAKE "I FIRST RL
PR [ESCRIBE LA LONGITUD DE LOS TRAMOS DE LA FIGURA ORIGINAL]
MAKE "B FIRST RL
PR [ESCRIBE EL SENTIDO DE LOS ANGULOS DE LA FIGURA ORIGINAL ( 1, O BIEN -1 )]
MAKE "S FIRST RL
MAKE "X1 120 / :E * FIRST :X
MAKE "X2 120 / :E * LAST :X
MAKE "L 120 / :E * :B
PU SETPOS SE :X1 :X2
FIG.O
END
```

```
TO FIG.O
FIG
MAKE "IO :I
MAKE "LO :L MAKE "SO :S
MAKE "XO1 FIRST :X MAKE "XO2 LAST :X
MAKE "YO1 FIRST :Y MAKE "YO2 LAST :Y
MAKE "ZO1 FIRST :Z MAKE "ZO2 LAST :Z
END
```

```
TO SITUA.FIG.F
PR [ESCRIBE LAS COORDENADAS DEL PUNTO BASE PARA DIBUJAR LA FIGURA FINAL]
MAKE "X RL
PR [ESCRIBE EL NUMERO DE GRADOS DE INCLINA CION A LA DERECHA DE LA FIGURA FINAL]
PR [( RESPECTO DE LA VERTICAL )]
MAKE "I FIRST RL
PR [ESCRIBE LA LONGITUD DE LOS TRAMOS DE LA FIGURA FINAL]
MAKE "B FIRST RL
PR [ESCRIBE EL SENTIDO DE LOS ANGULOS DE LA FIGURA FINAL ( 1, O BIEN -1 )]
MAKE "S FIRST RL
MAKE "X1 120 / :E * FIRST :X
MAKE "X2 120 / :E * LAST :X
MAKE "L 120 / :E * :B
PU SETPOS SE :X1 :X2
FIG.F
END
```

```
TO FIG.F
FIG
MAKE "IF :I
MAKE "LF :L MAKE "SF :S
MAKE "XF1 FIRST :X MAKE "XF2 LAST :X
MAKE "YF1 FIRST :Y MAKE "YF2 LAST :Y
MAKE "ZF1 FIRST :Z MAKE "ZF2 LAST :Z
END


TO TRASLACION
SITUA.FIG.0
POR.TRASLACION
END


TO GIRO
SITUA.FIG.0
POR.GIRO
END


TO SIMETRIA
SITUA.FIG.0
POR.SIMETRIA
END


TO HOMOTECIA
SITUA.FIG.0
POR.HOMOTECIA
END


TO POR.TRASLACION
PR [ESCRIBE LAS COORDENADAS DEL VECTOR TRASLACION]
MAKE "V RL
MAKE "V1 120 / :E * FIRST :V
MAKE "V2 120 / :E * LAST :V
MAKE "XT1 :X1 + :V1
MAKE "XT2 :X2 + :V2
SETPC 4 SETPOS SE :XT1 :XT2
SETH TOWARDS SE :X1 :X2 RT 30 FD 7 BK 7 LT 60 FD 7 BK 7
FIG.F
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
PR [LAS COORDENADAS DEL PUNTO IMAGEN DEL]
( PR [PUNTO BASE SON] SE APR :X1 * :E / 120 APR :X2 * :E / 120 )
END
```



```
TO POR.GIRO
PR [ESCRIBIR LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE GIRO]
MAKE "C RL
PR [ESCRIBIR LA AMPLITUD DEL GIRO ( EN GRA DOS )]
MAKE "A FIRST RL
MAKE "W :A ANG.RED MAKE "A :W
MAKE "C1 120 / :E * FIRST :C
MAKE "C2 120 / :E * LAST :C
SETPC 4 SETPOS SE :C1 :C2
MAKE "D1 :X1 - :C1 MAKE "D2 :X2 - :C2
SETH TOWARDS SE :X1 :X2
ARCO
SETH TOWARDS SE :X1 :X2
LT :A FD :D
MAKE "I :I - :A
MAKE "W :I ANG.RED MAKE "I :W
FIG.F
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
DOTS
PR [LAS COORDENADAS DEL PUNTO IMAGEN DEL]
( PR [PUNTO BASE SON] SE APR :X1 * :E / 120 APR :X2 * :E / 120 )
END


TO POR.SIMETRIA
PR [ESCRIBE LAS COORDENADAS DE UN PUNTO DEL EJE DE SIMETRIA]
MAKE "P RL
PR [ESCRIBE EL ANGULO ( EN GRADOS ) DEL EJE DE SIMETRIA CON LA HORIZONTAL]
MAKE "A FIRST RL
MAKE "P1 120 / :E * FIRST :P
MAKE "P2 120 / :E * LAST :P
PU SETPOS SE :P1 :P2 SETH 90 - :A SETPC 5
BK 250 PD FD 500 PU BK 250
MAKE "ESC ( :X1 - :P1 ) * ( COS :A ) + ( :X2 - :P2 ) * SIN :A
MAKE "XT1 ( :P1 + :ESC * ( COS :A ) ) * 2 - :X1
MAKE "XT2 ( :P2 + :ESC * ( SIN :A ) ) * 2 - :X2
SETPOS SE :X1 :X2 SETPC 4 PD SETPOS SE :XT1 :XT2
MAKE "I 180 - :I - :A * 2
MAKE "S :S * -1
FIG.F
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
PR [LAS COORDENADAS DEL PUNTO IMAGEN DEL]
( PR [PUNTO BASE SON] SE APR :X1 * :E / 120 APR :X2 * :E / 120 )
END
```

```
TO POR.HOMOTECIA
PR [ESCRIBIR LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE HOMOTECIA]
MAKE "C RL
PR [ESCRIBIR SU RAZON]
MAKE "K FIRST RL
MAKE "C1 120 / :E * FIRST :C
MAKE "C2 120 / :E * LAST :C
PD SETPC 4 SETPOS SE :C1 :C2
SETPOS :Y
PU SETPOS SE :C1 :C2 PD
MAKE "D1 :X1 - :C1
MAKE "D2 :X2 - :C2
DIST SETH TOWARDS SE :X1 :X2 FD :D * :K
IF :K > 0 [MAKE "L :L * :K] [MAKE "L :L * :K * - 1 MAKE "I :I + 180]
FIG.F
PU SETPOS SE :YF1 :YF2 PD SETPC 4 SETPOS SE :C1 :C2
PU SETPOS SE :XF1 :XF2
DOTS
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
PR [LAS COORDENADAS DEL PUNTO IMAGEN DEL]
( PR [PUNTO BASE SON] SE APR :X1 * :E / 120 APR :X2 * :E / 120 )
END
```

```
TO FIG
MAKE "X SE XCOR YCOR
MAKE "W :I ANG.RED MAKE "I :W
PD SETPC 1
SETH 0 RT :I FD :L * 3
MAKE "Y SE XCOR YCOR
RT 90 * :S FD :L * 1.5 RT 90 * :S FD :L
MAKE "Z SE XCOR YCOR
RT 90 * :S FD :L * 1.5 RT 90 * :S BK :L * 2
END
```

```
TO EJES
SETPC 2 PU SETH 90 BK 120 PD
REPEAT 24 [FD 10 RT 90 FD 1 BK 1 LT 90]
PU BK 120 LT 90 BK 90 PD
REPEAT 18 [FD 10 LT 90 FD 2 BK 2 RT 90]
PU BK 90
END
```

```
TO DIST
MAKE "D SQRT ( :D1 * :D1 + :D2 * :D2 )
END
```

```
TO APR :NU
MAKE "NN ( ROUND ( :NU * 100 ) ) / 100
IF ( INT :NN ) = :NN [OP INT :NN] [OP :NN]
END
```



```
TO ANG.RED
IF :W > 180 [MAKE "W :W - 360]
IF :W < -179.999 [MAKE "W :W + 360]
IF OR :W > 180 :W < -179.999 [ANG.RED]
END
```

```
TO ARCO
DIST
IF :D < 20 [GO "XX]
IF AND :A < 20 :A > -20 [GO "XX]
IF :A < 0 [MAKE "U -1] [MAKE "U 1]
MAKE "H INT ( :A * :U / 2 )
FD 20 LT 90 * :U
REPEAT :H [LT 2 * :U FD 0.698]
RT 40 * :U BK 7 FD 7 LT 70 * :U BK 7 FD 7
PU SETPOS SE :C1 :C2 PD
LABEL "XX
END
```

```
TO DOTS
SETPC 1 PD
IF ( AND :C1 < 120 :C2 < 90 :C1 > - 120 :C2 > - 90 ) [DOT SE :C1 :C2]
END
```

```
TO PREGUNTON
PR [Observa ambas figuras y trata de averiguar la transformación solución]
PR [Para comprobarlo, pulsa Return]
MAKE "R3R RL
END
```

```
TO MOVIMIENTO
SITUA.FIG.O
SITUA.FIG.F
PREGUNTON
IF :LO = :LF [QUE.MOV.ES] [PR [NO ES MOVIMIENTO]]
END
```

```
TO QUE.MOV.ES
IF :SO = :SF [IF :IO = :IF [ES.TRAS] [ES.GIR]] [EJ.SIM]
END
```

```
TO ES.TRAS
MAKE "V SE APR ( :XF1 - :XO1 ) * :E / 120 APR ( :XF2 - :XO2 ) * :E / 120
IF :V = [0 0] [PR [SE TRATA DE LA IDENTIDAD] STOP]
PU SETPOS SE :XO1 :XO2
SETH TOWARDS SE :XF1 :XF2
SETPC 3 PD SETPOS SE :XF1 :XF2
RT 30 BK 7 FD 7 LT 60 BK 7 FD 7
( PR [TRASLACION DE VECTOR] :V )
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
END
```

```
TO ES.GIR
MAKE "A :IO - :IF
MAKE "W :A ANG.RED MAKE "A :W
MAKE "XM1 ( :XO1 + :XF1 ) / 2
MAKE "XM2 ( :XO2 + :XF2 ) / 2
PU SETH TOWARDS SE :XO1 :XO2
SETPOS SE :XM1 :XM2 RT 90
MAKE "D1 :XM1 - :XF1
MAKE "D2 :XM2 - :XF2
DIST FD :D * ( COS :A / 2 ) / SIN :A / 2
MAKE "C1 XCOR MAKE "C2 YCOR
SETPOS SE :XO1 :XO2 SETPC 3 PD SETPOS SE :C1 :C2
MAKE "D1 :XO1 - :C1
MAKE "D2 :XO2 - :C2
SETH TOWARDS SE :XO1 :XO2
ARCO
SETPOS SE :XF1 :XF2
DOTS
( PR [GIRO DE CENTRO] SE APR :C1 * :E / 120 APR :C2 * :E / 120 )
( PR [Y DE AMPLITUD] :A [GRADOS] )
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
END


TO EJ.SIM
MAKE "XM1 ( :XO1 + :XF1 ) / 2
MAKE "XM2 ( :XO2 + :XF2 ) / 2
MAKE "YM1 ( :YO1 + :YF1 ) / 2
MAKE "YM2 ( :YO2 + :YF2 ) / 2
MAKE "ZM1 ( :ZO1 + :ZF1 ) / 2
MAKE "ZM2 ( :ZO2 + :ZF2 ) / 2
IF AND :XM1 = :YM1 :XM2 = :YM2 [MAKE "P1 :ZM1 MAKE "P2 :ZM2]
[MAKE "P1 :YM1 MAKE "P2 :YM2]
PU SETPOS SE :XM1 :XM2 SETH TOWARDS SE :P1 :P2
SETPC 5 BK 250 PD FD 500 PU BK 250
IF :P1 = :XM1 [MAKE "A 90] [MAKE "A ARCTAN ( ( :P2 - :XM2 ) / ( :P1 - :XM1 ) )]
TIP.SIM
END


TO TIP.SIM
MAKE "G SE APR :XM1 * :E / 120 APR :XM2 * :E / 120
MAKE "PRE ( :XF1 - :XO1 ) * ( COS :A ) + ( :XF2 - :XO2 ) * SIN :A
MAKE "PREA APR :PRE
IF :PREA = 0 [ES.AXI] [ES.DESL]
END


TO ES.AXI
SETPOS SE :XO1 :XO2
SETPC 3 PD SETPOS SE :XF1 :XF2
IF :A > 180 [MAKE "A :A - 360]
( PR [SIMETRIA CUYO EJE ( EN AZUL ) PASA POR] :G )
( PR [Y FORMA CON LA HORIZONTAL UN ANGULO DE] ROUND :A [GRADOS] )
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
END
```



```
TO ES.DESL
MAKE "V1 :PRE * COS :A
MAKE "V2 :PRE * SIN :A
SETPOS SE :XO1 :XO2 SETPC 3
PD SETPOS SE :XF1 - :V1 :XF2 - :V2
FIG
SETH TOWARDS SE :XF1 :XF2
SETPC 3 SETPOS SE :XF1 :XF2
RT 30 BK 7 FD 7 LT 60 BK 7 FD 7
MAKE "V SE APR :V1 * :E / 120 APR :V2 * :E / 120
( PR [SIMETRIA DESLIZANTE CUYO EJE ( EN AZUL ) PASA POR] :G )
( PR [Y CUYO VECTOR TRASLACION ES] :V )
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
END


TO SEMEJANZA
SITUA.FIG.O
SITUA.FIG.F
PREGUNTON
QUE.SEM.ES
END


TO QUE.SEM.ES
IF :LO = :LF [QUE.MOV.ES] [IF :SO = :SF [ES.SEM.DIR] [ES.SIM.HOM]]
END


TO ES.SEM.DIR
MAKE "R :IO - :IF
IF ( OR :R = 0 :R = 180 :R = - 180 ) [ES.HOM] [ES.GIR.HOM]
END


TO ES.HOM
MAKE "K :LF / :LO
IF NOT :IO = :IF [MAKE "K :K * -1]
MAKE "D1 :XF1 - :XO1
MAKE "D2 :XF2 - :XO2 DIST
IF NOT :D = 0 [SETH TOWARDS SE :XO1 :XO2]
PU FD :D * :K / ( :K - 1 )
MAKE "C1 XCOR MAKE "C2 YCOR
PD SETPC 3
SETPOS SE :XO1 :XO2
SETPOS SE :XF1 :XF2
SETPOS SE :C1 :C2
SETPOS SE :YO1 :YO2
SETPOS SE :YF1 :YF2
DOTS
MAKE "CEN SE APR :C1 * :E / 120 APR :C2 * :E / 120
( PR [HOMOTECIA DE CENTRO] :CEN [Y RAZON] APR :K )
PU SETPOS SE :XF1 :XF2 PD
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
END
```

```
TO ES.GIR.HOM
MAKE "A :IO - :IF
MAKE "W :A ANG.RED MAKE "A :W
MAKE "K :LF / :LO
MAKE "T ( :YO1 - :XO1 ) * ( :ZO2 - :XO2 ) - ( :ZO1 - :XO1 ) * ( :YO2 - :XO2 )
MAKE "TA1 ( :YF1 - :XF1 ) * ( :ZO2 - :XO2 ) - ( :ZF1 - :XF1 ) * ( :YO2 - :XO2 )
MAKE "TA2 ( :YO1 - :XO1 ) * ( :ZF1 - :XF1 ) - ( :ZO1 - :XO1 ) * ( :YF1 - :XF1 )
MAKE "TB1 ( :YF2 - :XF2 ) * ( :ZO2 - :XO2 ) - ( :ZF2 - :XF2 ) * ( :YO2 - :XO2 )
MAKE "TB2 ( :YO1 - :XO1 ) * ( :ZF2 - :XF2 ) - ( :ZO1 - :XO1 ) * ( :YF2 - :XF2 )
MAKE "A1 :TA1 / :T MAKE "A2 :TA2 / :T
MAKE "B1 :TB1 / :T MAKE "B2 :TB2 / :T
MAKE "MA0 :A1 * :XO1 + :A2 * :XO2 - :XF1
MAKE "MB0 :B1 * :XO1 + :B2 * :XO2 - :XF2
MAKE "H ( :A1 - 1 ) * ( :B2 - 1 ) - :B1 * :A2
MAKE "H1 :MA0 * ( :B2 - 1 ) - :MB0 * :A2
MAKE "H2 ( :A1 - 1 ) * :MB0 - :B1 * :MA0
MAKE "C1 :H1 / :H MAKE "C2 :H2 / :H
PU SETPOS SE :XO1 :XO2 SETPC 3 PD SETPOS SE :C1 :C2
MAKE "D1 :XO1 - :C1 MAKE "D2 :XO2 - :C2
SETH TOWARDS SE :XO1 :XO2
ARCO
SETH TOWARDS SE :XO1 :XO2 LT :A FD :D
MAKE "I :IO - :A MAKE "L :LO
FIG
( PR [GIRO DE AMPLITUD] :A [GRADOS] )
( PR [POR HOMOTECIA DE RAZON] APR :K )
PU SETPOS SE :YF1 :YF2 SETPC 3
PD SETPOS :Y SETPOS SE :C1 :C2
SETPOS SE :XF1 :XF2
MAKE "CENT SE APR :C1 * :E / 120 APR :C2 * :E / 120
( PR [EL CENTRO DE AMBOS ES] :CENT )
MAKE "X1 XCOR MAKE "X2 YCOR
DOTS
END
```

```
TO ES.SIM.HOM
MAKE "RE ( :IO + :IF ) / 2
PU SETPOS SE :XO1 :XO2 SETH :RE
BK 250 SETPC 5 PD FD 500 PU BK 250 PD
MAKE "L :LO
FIG
IF :RE < 0 [MAKE "A :RE + 180] [MAKE "A :RE]
( PR [SIMETRIA CUYO EJE ( EN AZUL ) PASA POR] :XY )
( PR [Y SE INCLINA] APR 90 - :A [GRADOS, POR] )
PU SETPOS SE :XF1 :XF2 PD
MAKE "ZZ1 :YO1 MAKE "ZZ2 :YO2
MAKE "YO1 FIRST :Y MAKE "YO2 LAST :Y
MAKE "Q :IO MAKE "IO :IF
ES.HOM
MAKE "YO1 :ZZ1 MAKE "YO2 :ZZ2
MAKE "IO :Q
END
```



```
TO EMPEZAR
TEXTSCREEN CT
PR [Puedes hacer una de estas tres cosas:]
PR []
PR [1.Ejecutar una TRANSFORMACION]
PR []
PR [2.Trazar dos figuras iguales para determinar un MOVIMIENTO,]
PR [que transforme la primera en la segunda]
PR []
PR [3.Trazar dos figuras semejantes para determinar una SEMEJANZA,]
PR [que transforme la primera en la segunda]
PR []
PR [Cuál de las tres deseas hacer?]
PR [Teclea una de esas tres palabras escri tas en mayúsculas ( y pulsa Return )]
PR []
PR []
PR [Nota: al terminar de ejecutar cualquier opción, para seguir]
PR [en el programa, debes teclear SEGUIR y pulsar Return]
END
```

```
TO TRANSFORMACION
CT
PR [Las transformaciones basicas que conservan la forma de las figuras son:]
PR []
PR [TRASLACION]
PR [GIRO]
PR [SIMETRIA]
PR [HOMOTECIA]
PR []
PR [Cuál de ellas deseas ejecutar?]
PR [Teclea su nombre ( y pulsa Return )]
PR []
END
```

```
TO seguir
TEXTSCREEN CT
PR [Ahora puedes hacer una de estas tres cosas:]
PR []
PR [1.COMPONER con otra transformación]
PR []
PR [2.Determinar cual es la transformación PRODUCTO de]
PR [las ejecutadas desde que empezaste]
PR []
PR [3.EMPEZAR de nuevo]
PR []
PR [Teclea una de esas tres palabras en mayúsculas ( y pulsa Return )]
END
```

```
TO PRODUCTO
QUE.SEM.ES
END
```

```
TO COMPONER
CT
PR [Para componer la(s) transformacion(es) que ya has ejecutado con]
PR [otra transfor mación, basta que escribas una de estascuatro ordenes:]
PR []
PR [POR.TRASLACION]
PR [POR.GIRO]
PR [POR.SIMETRIA]
PR [POR.HOMOTECIA]
PR []
PR [y pulses Return]
PR []
END
```

Observaciones

Aunque en el §1 ya se ha indicado el cometido de varios de los procedimientos anteriores, conviene aclarar la misión de los restantes.

La situación de las figuras original y final se lleva a cabo con SITUA.FIG.O y SITUA.FIG.F, respectivamente, y la memorización de las coordenadas de sus puntos característicos se hace en FIG.O y FIG.F (el dibujo de figuras se hace mediante el procedimiento FIG).

Los ejes de coordenadas se trazan con EJES, las distancias se estiman con DIST y los puntos de especial interés (centro de giro u homotecia) se marcan con DOTS.

El procedimiento APR permite redondear resultados a dos decimales, evitando así los errores de aproximación del ordenador. El procedimiento ANG.RED reduce el ángulo al intervalo (-180, 180], evitando que (por ejecución de sucesivos giros, por ejemplo) aparezcan valores superiores a los 360 grados. Y el procedimiento ARCO permite trazar un arquito visualizador del ángulo orientado considerado (en uno u otro sentido).

Finalmente, el procedimiento PREGUNTON para el programa, invitando a averiguar la solución, antes de ser dada por el ordenador (Los cinco últimos procedimientos serán comentados en el §3).

§3. SIMULACIONES

Como ya se indicó al comienzo del artículo, el programa que se ha elaborado permite efectuar cuatro tipos de simulaciones, que pasamos a describir.

Para ejecutar alguna de las cuatro transformaciones básicas, basta escribir su nombre (HOMOTECIA, por ejemplo) y pulsar RETURN, con lo que el programa se pone en marcha, preguntando los datos que caracterizan a la figura original y los datos de la transformación (centro y razón de homotecia por ejemplo), representando la figura imagen y respondiendo las coordenadas de su punto base.

Para ejecutar una tranasformación posterior (sobre la figura imagen antes obtenida), basta escribir su nombre precedido de "por." (POR.TRASLACION, por ejemplo) y pulsar RETURN, con lo que el programa se pone de nuevo en marcha, preguntandonos los datos de la transformación (vector de la traslación, por ejemplo), representando la figura imagen y respondiendo las coordenadas de su punto base.

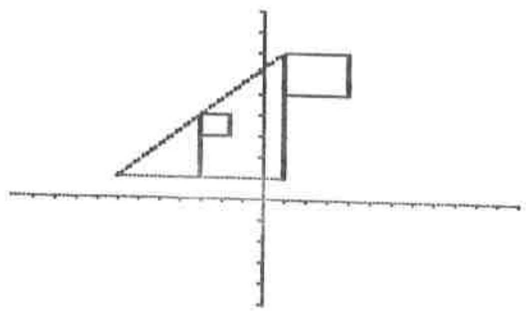
Para determinar la semejanza (o la isometría) en que dos figuras son homólogas, basta escribir SEMEJANZA (o MOVIMIENTO, respectivamente) y pulsar RETURN, para que el programa se ponga en marcha, preguntandonos los datos de las figuras original y final, representandolas y respondiendo cuál es la transformación en que la figura final es imagen de la inicial.

Para determinar la transformación producto de dos, o más, transformaciones previamente efectuadas, basta escribir QUE.SEM.ES (o QUE.MOV.ES) y pulsar RETURN, para que el programa se ponga de nuevo en marcha, respondiendo cuál es la transformación producto y representando sus principales características (eje de la simetría, centro y amplitud del giro, etc).

A estos cuatro tipos de simulaciones, que se acaban de describir, también puede accederse directamente. Con solo escribir EMPEZAR y pulsar RETURN, entran en juego los cinco últimos procedimientos del §2, con lo que se tiene un "programa interactivo", que guia al usuario, evitandole la necesidad de recordar las instrucciones de los cuatro párrafos precedentes.

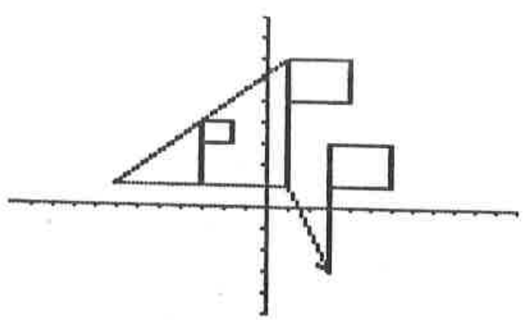
3.1 Ejemplo de ejecución de una transformación

```
?HOMOTECIA
ESCRIBE LA MAXIMA ABSCISA REPRESENTADA ( DIVISOR O MULTIPLO DE 120 )
12
DEBO REPRESENTAR LOS EJES? ( CONTESTA: SI O NO )
SI
ESCRIBE LAS COORDENADAS DEL PUNTO BASE PARA DIBUJAR LA FIGURA ORIGINAL
-3 1
ESCRIBE EL NUMERO DE GRADOS DE INCLINA CION A LA DERECHA DE LA FIGURA ORIGINAL
( RESPECTO DE LA VERTICAL )
0
ESCRIBE LA LONGITUD DE LOS TRAMOS DE LA FIGURA ORIGINAL
1
ESCRIBE EL SENTIDO DE LOS ANGULOS DE LA FIGURA ORIGINAL ( 1, O BIEN -1 )
1
ESCRIBIR LAS COORDENADAS DEL CENTRO DE HOMOTECIA
-7 1
ESCRIBIR SU RAZON
2
LAS COORDENADAS DEL PUNTO IMAGEN DEL
PUNTO BASE SON 1 1
```



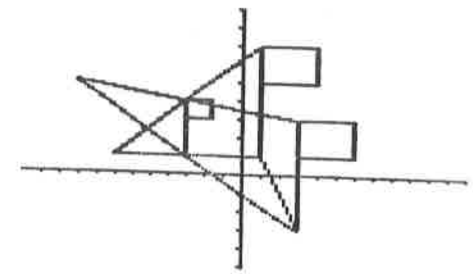
3.2 Ejemplo de ejecución de una transformación posterior

```
?POR.TRASLACION
ESCRIBE LAS COORDENADAS DEL VECTOR TRASLACION
2 -4
LAS COORDENADAS DEL PUNTO IMAGEN DEL
PUNTO BASE SON 3 -3
```



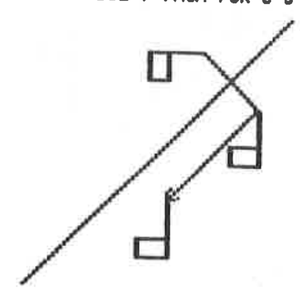
3.3 Determinación de la transformación producto de las dos anteriores

```
?QUE.SEM.ES
HOMOTECIA DE CENTRO -9 5 Y RAZON 2
```



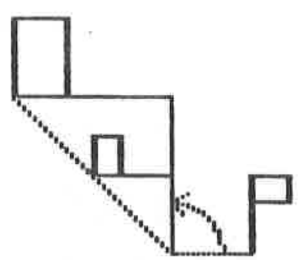
3.4 Ejemplo de determinación de isometría en que dos figuras son homólogas

```
?MOVIMIENTO
ESCRIBE LA MAXIMA ABSCISA REPRESENTADA ( DIVISOR O MULTIPLO DE 120 )
12
DEBO REPRESENTAR LOS EJES? ( CONTESTA: SI O NO )
NO
ESCRIBE LAS COORDENADAS DEL PUNTO BASE PARA DIBUJAR LA FIGURA ORIGINAL
4 7
ESCRIBE EL NUMERO DE GRADOS DE INCLINA CION A LA DERECHA DE LA FIGURA ORIGINAL
( RESPECTO DE LA VERTICAL )
-90
ESCRIBE LA LONGITUD DE LOS TRAMOS DE LA FIGURA ORIGINAL
1
ESCRIBE EL SENTIDO DE LOS ANGULOS DE LA FIGURA ORIGINAL ( 1, O BIEN -1 )
-1
ESCRIBE LAS COORDENADAS DEL PUNTO BASE PARA DIBUJAR LA FIGURA FINAL
2 -1
ESCRIBE EL NUMERO DE GRADOS DE INCLINA CION A LA DERECHA DE LA FIGURA FINAL
( RESPECTO DE LA VERTICAL )
180
ESCRIBE LA LONGITUD DE LOS TRAMOS DE LA FIGURA FINAL
1
ESCRIBE EL SENTIDO DE LOS ANGULOS DE LA FIGURA FINAL ( 1, O BIEN -1 )
1
Observa ambas figuras y trata de averi guar la transformación solución
Para comprobarlo, pulsa Return

SIMETRIA DESLIZANTE CUYO EJE ( EN AZUL ) PASA POR 3 3 Y CUYO VECTOR TRASLACION ES -5 -5
```



3.5 Ejemplo de determinación de la semejanza en que dos figuras son homólogas

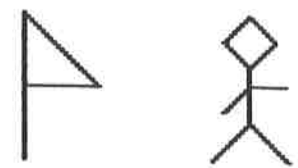
```
?SEMEJANZA
ESCRIBE LA MAXIMA ABSCISA REPRESENTADA ( DIVISOR O MULTIPLO DE 120 )
12
DEBO REPRESENTAR LOS EJES? ( CONTESTA: SI O NO )
NO
ESCRIBE LAS COORDENADAS DEL PUNTO BASE PARA DIBUJAR LA FIGURA ORIGINAL
5 -2
ESCRIBE EL NUMERO DE GRADOS DE INCLINA CION A LA DERECHA DE LA FIGURA ORIGINAL
( RESPECTO DE LA VERTICAL )
0
ESCRIBE LA LONGITUD DE LOS TRAMOS DE LA FIGURA ORIGINAL
1
ESCRIBE EL SENTIDO DE LOS ANGULOS DE LA FIGURA ORIGINAL ( 1, O BIEN -1 )
1
ESCRIBE LAS COORDENADAS DEL PUNTO BASE PARA DIBUJAR LA FIGURA FINAL
2 4
ESCRIBE EL NUMERO DE GRADOS DE INCLINA CION A LA DERECHA DE LA FIGURA FINAL
( RESPECTO DE LA VERTICAL )
-90
ESCRIBE LA LONGITUD DE LOS TRAMOS DE LA FIGURA FINAL
2
ESCRIBE EL SENTIDO DE LOS ANGULOS DE LA FIGURA FINAL ( 1, O BIEN -1 )
1
Observa ambas figuras y trata de averiguar la transformación solución
Para comprobarlo, pulsa Return

GIRO DE AMPLITUD 90 GRADOS
POR HOMOTECIA DE RAZON 2
EL CENTRO DE AMBOS ES 2 -2
```



3.6 Cambio de figura

La figura que hemos venido utilizando (bandera) puede ser sustituida por otra figura sencilla, que también tenga tres puntos no alineados bien distinguibles y en la que el sentido se perciba fácilmente.

Para efectuar tal sustitución de figura, basta editar el procedimiento FIG y efectuar los cambios deseados. He aquí otras figuras con las que también hemos trabajado.



3.7 Color

En todos los procedimientos del §2 se ha seguido un estricto código de colores, que ayuda a interpretar aún más rápidamente las imágenes. Los ejes de coordenadas se representan en color verde. Las figuras original y final, así como la figura auxiliar en los casos en que es precisa, se representan en color blanco. Las líneas indicadoras de la transformación (vector de la traslación, ángulo de giro, segmento de extremos un punto y su simétrico, segmento de extremos el centro de homotecia y los puntos mas característicos de la figura) se representan en color naranja. Excepcionalmente los ejes de simetría se representan en azul, para distinguirlos de las otras líneas. Las líneas indicadoras de la transformación producto (movimiento o semejanza resultante de la composición de dos o mas transformaciones), se representan en color violeta.

Por supuesto el programa también puede ejecutarse en monitor monocromo (fósforo verde, por ejemplo).

BIBLIOGRAFIA

ABELSON y DISESSA: *Turtle Geometry. The computer as a Medium for Exploring Mathematics*; M.I.T. 1981

PUIG ADAM: *Curso de Geometria Métrica* (Vol. 1)

ROANES MACIAS: *Introducción a la Geometría*; Anaya. 1980

RODRIGUEZ ROSELLO: *Logo; de la tortuga a la inteligencia artificial*; Vector. 1986

- SCHOOL SCIENCE AND MATHEMATICS. School Sciencies and Mathematics Association. Straight Hall. P.O. Box 1614. Indiane University of Pensylvania. (Pensilvania 15705). U.S.A.

- AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY. A.B. Willcox, Executive Director. Mathematical Association of America. 1529 Eighteen Street N.W. Washington, D.C. 20036.

- ARITHMETIC TEACHER. National Council of Teachers of Mathematics. 1906 Association Drive. Reston, VA 22091.

- CRUX MATHEMATICORUM. F.G.B. Maskell. Algonquin College. 200 Lees Avenue. Ottawa, Ontario, Canada. K15 0C5.

- FUN WITH MATHEMATICS. Fun with Mathematics. C/O Mary Stager. Ontario Institute for Studies in Education. 252 Bloor Street West. Toronto, ON M5S 1V6. Canada.

- JOURNAL FOR RESEARCH IN MATHEMATICS EDUCATION. NCTM. 1906 Association Drive. Reston, VA 22091.

- MATHEMATICAL GAZETTE. Honorary Treasurer, Math. Assoc. 259 London Road. Leicester LE2 3BE. Great Britain.

- MATHEMATICAL SPECTRUM. The Editor, Mathematical Spectrum. Hicks Building. The University. Sheffield S3 7RH. England.

- MATHEMATICS TEACHER. NCTM. 1906 Association Drive. Reston, VA 22091.

- PROBLEM SOLVING. Franklin Institute Press. P.O. Box 2266. Philadelphia, PA 19103.

En Italiano:

- ARCHIMEDE. Casa editrice Le Monnier. Via Scipione Ammirato, 100. FIRENZE (Italia).

- L'EDUCATIONE MATEMATICA. Centro di ricerca e sperimentazione dell'educazione matematica di Cagliari. CRSEM. CAGLIARI (Italia).

- INSEGNAMENTO DE LA MATEMATICA E DELLE SCIENZE INTEGRATE. Centro de richerche didattique Ugo Morin. Via S. Giacomo, 4. 31010 PADERNO DEL GRAPPA (Treviso-Italia).

- NOTICIARIO DELLA UNIONE MATEMATICA ITALIANA. Unione Matematica Italiana. Via Vicenza, 23. 00185 ROMA (Italia).

En Alemán:

- ALPHA. Mathematische Schülerzeitschrift. Wisen Wolkseigenes Verlag. Lindestrasse 54a. 108 BERLIN.

- ARCHIMEDES. Franz Denk. Regensburg.

PROBLEMAS PROPUESTOS

ENUNCIADOS PROPUESTOS EN LA FASE FINAL DE LA XXII OLIMPIADA MATEMATICA NACIONAL

PROBLEMA 1ª

Es sabido que si x es un número real, se llama parte entera de x, E(x), al entero m que cumple $m \leq x < m+1$, y mantisa de x, m(x), a la diferencia $x - E(x)$. Llamaremos ahora "distancia entre dos números reales x,y al valor de

$$\sqrt{(E(x)-E(y))^2 + (m(x)-m(y))^2}$$

Determinar (como unión de intervalos) el conjunto de los números reales que "distan" del número $\frac{3}{2}$ menos de $\frac{202}{100}$.

PROBLEMA 2ª

Un segmento, $\bar{d}$, divide al segmento $\bar{s}$, si existe un número natural n, tal que

$$n\,\bar{d} = \bar{d} + \overset{n}{\overbrace{\ldots\ldots\ldots}} + \bar{d} = \bar{s}$$

Se pide:

a) Demostrar que si el segmento $\bar{d}$ divide a los segmentos $\bar{s}$ y $\bar{s}'$ ($\bar{s} < \bar{s}'$), entonces $\bar{d}$ divide al segmento diferencia $\bar{s}' - \bar{s}$.

b) Demostrar que ningún segmento divide al lado $\bar{s}$ y a la diagonal $\bar{s}'$ de un pentágono regular. (Razonar sobre el pentágono regular cuyos lados están contenidos en las diagonales del pentágono regular dado, sin efectuar cálculos numéricos).

PROBLEMA 3ª

Hallar los valores de n, $n \in \mathbb{N}$, para los que 5^n+3 es una potencia de 2 de exponente natural.

PROBLEMA 4ª

Además de la media aritmética $\bar{x} = \frac{x_1 - x_2}{2}$, se define la media $\bar{\bar{x}}$ relativa a la función g mediante $2g(\bar{\bar{x}}) = g(x_1) + g(x_2)$, donde g es una función real positiva que tiene sus dos primeras derivadas positivas.

Se pide ordenar razonablemente los números $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$.

PROBLEMA 5ª

Dada la curva C_2 definida por la ecuación $y^2 = x^3 + bx + b^2$, donde la constante b es un número racional no nulo, se pide inscribir en C un triángulo cuyos vértices tengan coordenadas racionales.

PROBLEMA 6ª

Calcular $\prod_{k=1}^{14} \cos k \frac{\pi}{15}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS O SUGERIDOS EN OLIMPIADAS MATEMATICAS INTERNACIONALES

PROBLEMA 7ª

Sobre los lados de un triángulo ABC se construyen triángulos isósceles semejantes, APB (AP = PB), AQC (AQ = QC) y BRC (BR = = RC); los dos primeros están fuera del triángulo ABC y el tercero se superpone con él. Probar que APQR es un paralelogramo.

(Sugerido por Bélgica para la O.M.I. de 1983).

PROBLEMA 8ª

P es un punto dado en el interior de una esfera y A, B, C, son tres puntos de la superficie esférica tales que PA, PB y PC son perpendiculares dos a dos. Sea Q el vértice diagonalmente opuesto a P en el paralelepípedo determinado por las aristas PA, PB o PC. Encontrar el lugar geométrico de Q.

(Propuesto por USA en la O.M.I. de 1978).

PROBLEMA 9ª

Sean p y q números naturales tales que:

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$$

Probar que p es divisible por 1979.

(Propuesto por R.F.A. en la O.M.I. de 1979).

PROBLEMA 10ª

En un triángulo ABC, AB = AC. Una circunferencia es tangente interiormente a la circunscrita al triángulo ABC y también a los lados AB y AC, en los puntos P y Q, respectivamente. Probar que el punto medio del segmento PQ es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

(Propuesto por USA en la O.M.I. de 1978).

- No se han recibido en la redacción del Boletín soluciones a los problemas propuestos en boletines anteriores:

  - Problema nª 6, del Boletín nª 4
  - Problema nª 3, del Boletín nª 5
  - Problema nª 3, del Boletín nª 6 (ver corregido el enunciado en el nª 8)
  - Problemas nºs 3 y 4, del Boletín nª 7
  - Problemas nºs 1, 2, 3, 4, 5 y 6, del Boletín nª 8.

Esperamos que los compañeros se animen a su resolución y nos remitan sus soluciones con objeto de publicarlas en nuestro próximo Boletín.

PROBLEMAS RESUELTOS

SOLUCIONES RECIBIDAS CORRESPONDIENTES A LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTRO BOLETIN Nª 7

PROBLEMA 1ª

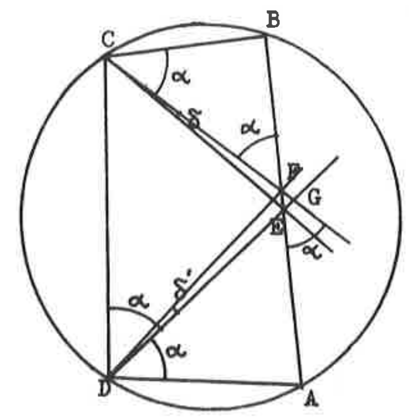
Un cuadrilátero convexo ABCD tiene todos sus vértices sobre una circunferencia. Otra circunferencia tiene su centro sobre el lado AB y es tangente a los otros tres lados del cuadrilátero. Probar que se verifica:

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}$$

Solución

Sea E el centro de la circunferencia tangente a los lados BC, CD, DA. Entonces, las rectas CE y DE son las bisectrices de $\widehat{BCD}$ y $\widehat{CDA}$ respectivamente.

Sea F, tal que $\overline{BF} = \overline{BC}$. Suponemos $\overline{BC} \leq \overline{DA}$



Como $\overline{BC} = \overline{BF}$ tenemos que $\widehat{BCF} = \widehat{BFC} = \alpha$.

Por ángulos opuestos $\widehat{EFG} = \alpha$.

En el triángulo BCF tenemos $2\alpha + \widehat{CBA} = 180°$.

Además $\widehat{CBA} + \widehat{CDA} = 180°$ y por tanto $2\alpha = \widehat{CDA}$ y como DE es la bisectriz de $\widehat{CDA}$ se deduce que $\widehat{CDE} = \alpha$.

Luego $\widehat{EFG} = \widehat{CDG}$ y $\widehat{CGD} = \widehat{EGF}$. Por tanto, los triángulos FGE y DGC son semejantes. De aquí se tiene que:

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{DG}} = \frac{\overline{EG}}{\overline{CG}} \Longleftrightarrow \frac{\overline{FG}}{\overline{EG}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{CG}}$$

Esta última relación y $\widehat{CGE} = \widehat{DGF}$ nos dice que los triángulos CGE y DGF son semejantes, por tanto:

$$\delta = \delta'$$

Como $\widehat{DCB} + \widehat{DAB} = 180°$ y CE es la bisectriz de $\widehat{DCB}$ se tiene que

$$2(\alpha+\delta) + \beta = 180°$$

En el triángulo DAF tenemos $(\alpha+\delta) + \beta + \widehat{DFA} = 180°$.

Comparando estas dos últimas igualdades, tenemos que $\widehat{DFA} = \alpha + \delta$. Por lo tanto, $\overline{FA} = \overline{DA}$.

Luego,

$$\overline{DA} + \overline{BC} = \overline{FA} + \overline{FB} = \overline{AB}$$

Salvador Calvo-Fernández Pérez
Ciudad Real

- ■ - ■ - ■ -

PROBLEMA 2ª

Dados los números naturales n y k, primos entre sí, tales que $0 < k < n$. Cada número del conjunto $M = \{1, 2, \ldots, (n-1)\}$ está coloreado de blanco o azul.

El conjunto M cumple las condiciones siguientes:

a) Para cada $i \in M$, los números i y $(n-i)$ tienen el mismo color.

b) Para cada $i \in M$, $i \neq k$. Los números i y $|k-i|$ tienen el mismo color.

Demostrar que todos los números de M han de tener el mismo color.

Solución

M lo podemos considerar como $Z/(n) - \{\bar{0}\}$. Vamos a expresar las condiciones en términos de clases.

a) i y $n-i$ tienen el mismo color

$\overline{n-i} = -\bar{i}$; luego las clases $\bar{i}$ y $-\bar{i}$ tienen el mismo color.

b) i y $|k-i|$ el mismo color si $i \neq k$.

Si $k > i$, $|k-i| = k-i \Longrightarrow \bar{i}$ y $\overline{k-i}$ el mismo color si $\bar{i} \neq \bar{k}$.

Si $k < i$, $|k-i| = i-k \Longrightarrow \bar{i}$ y $\overline{i-k}$ el mismo color si $\bar{i} \neq \bar{k}$, pero por a), $\overline{i-k}$, $\overline{k-i}$, el mismo color.

Luego las clases $\bar{i}$ y $\overline{k-i}$ tienen el mismo color si $\bar{i} \neq \bar{k}$.

Sea $\bar{i}$; entonces $\bar{i}$ y $-\bar{i}$ tienen el mismo color, y si $-\bar{i} \neq \bar{k}$ entonces $-\bar{i}$ y $\overline{k-(i)}$ tienen el mismo color. Luego si $-\bar{i} \neq \bar{k}$, $\bar{i}$ y $\overline{k+i}$ tienen el mismo color.

Por tanto, $\bar{k}$, $\overline{2k} = \overline{k+k}$, $\overline{3k} = \overline{2k+k}, \dots, \overline{(n-1)\ k} = \overline{(n-2)k+k}$, tienen el mismo color si $-\overline{pk} \neq k$, $1 \leq p \leq (n-2)$, pero esto es cierto ya que si $-\overline{pk} = k \Longrightarrow \overline{pk} + \bar{k} = \bar{0}$, $\overline{(p+1)k} = \bar{0}$ y como k es primo con n, es una unidad de $Z/(n)$ luego $\overline{(p+1)} = \bar{0}$ por tanto $p+1 = \lambda \cdot n$, pero esto es imposible, pues $2 \leq p+1 \leq n-1$. (Hay que hacer una pequeña salvedad para el caso $n = 2$, pero este caso es evidente).

Asímismo, como $\bar{k}$ es unidad en $Z/(n)$ los elementos $\{\bar{k}, \overline{2k}, \overline{3k}, \dots, \overline{(n-1)k}\}$ son $n-1$ elementos distintos de $Z/(n) - \{\bar{0}\}$, luego dicho conjunto coincide con $Z/(n) - \{\bar{0}\}$. Por lo tanto, todos los elementos de $Z/(n) - \{\bar{0}\}$ tienen el mismo color.

Salvador Calvo-Fernández Pérez
Ciudad Real

- ▩ - ▩ - ▩ -

PROBLEMA 5ª

Una circunferencia de centro O pasa por los vértices A y C del triángulo ABC e intersecta los segmentos AB y BC nuevamente en puntos distintos K y N, respectivamente.

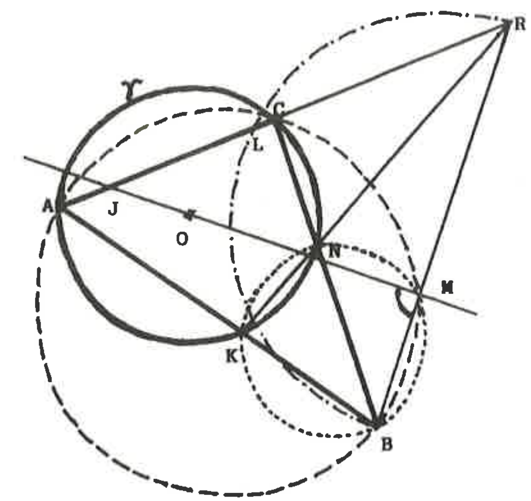
Las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC y KBN se cortan exactamente en dos puntos distintos B y M.

Demostrar que el ángulo OMB es recto.

Solución

Llamemos γ a la primera circunferencia, que pasa por A, C, K y N. Las tres rectas AC, KN y BM son concurrentes en R, punto que es el centro radical de las tres circunferencias. Los puntos R y B, por ser vértices del cuadrilátero completo ACNK inscrito en γ, son conjugados respecto a γ, y, por tanto esta circunferencia es ortogonal a la que tiene por diámetro RB.

Consideremos ahora una inversión de polo R y potencia $RA \times RC = RK \times RN = RM \times RB$. En ella las tres circunferencias del enunciado son invariantes, y la inversa de la de diámetro RB, por pasar por el polo, es la recta MJ (M es inverso de B, y J inverso de L), perpendicular a RB. Como la inversión conserva los ángulos, esta recta será perpendicular a γ, esto es, pasa por el centro O de ésta, con lo que queda demostrado que el ángulo OMB es recto.



Argearge

- ▩ - ▩ - ▩ -

PROBLEMA 6ª

Para cada número real x_1, se construye la sucesión x_1, $x_2, \dots$ en la cual $x_{n+1} = x_n(x_n + \frac{1}{n})$, para todo $n \geq 1$.

Demostrar que existe exactamente un valor de x_1 para el cual $0 < x_n < x_{n+1} < 1$, para todo n.

Solución

Ha de ser $0 < x_1 < 1$, luego sólo nos fijaremos en el intervalo $[0,1]$. Además, si $x_1 > 0$, será, para todo $n \in N$, $x_n > 0$, pues es producto de dos números positivos.

a) $\forall n \in N: \quad \{0 \leq x_1' < x_1\} \Longleftrightarrow \{0 \leq x_n' < x_n\}$

En efecto,

$$x_{n+1} - x_{n+1}' = x_n^2 - x_n'^2 + \frac{1}{n}(x_n - x_n') = (x_n - x_n')\ (x_n + x_n' + \frac{1}{n})$$

por lo que la diferencia $x_n - x_n'$ conserva el mismo signo para todos los valores de n.

b) $\{\forall n \in N: \quad 0 < x_n < x_{n+1} < 1\} \Longleftrightarrow \{\forall n \in N: \quad \frac{n-1}{n} < x_n < 1\}$

En efecto,

$$x_{n+1} - x_n = x_n(x_n + \frac{1}{n}) - x_n = x_n(x_n - \frac{n-1}{n})$$

por lo que siendo $x_n > 0$, $\{x_{n+1} > x_n\} \Longleftrightarrow \{x_n > \frac{n-1}{n}\}$. La desigualdad $x_n < 1$ figura en ambos lados.

c) Si la sucesión $\{x_n\}$ tiene límite finito, éste es 0 ó 1. Tomando límites en la relación de recurrencia, el límite L ha de satisfacer $L = L^2$, o sea que de existir será 0 ó 1.

d) Si dado x_1, existe un $k \in N$ tal que $x_k \leq \frac{k-1}{k}$, la sucesión decrece estrictamente a partir del término (k+1)-ésimo y tiene límite cero.

Para h = k, es $x_{h+1} - x_h = x_h(x_h - \frac{h-1}{h}) \leq 0$, o sea $x_{h+1} \leq x_h$.

Procedamos por inducción, suponiendo que es cierto para un valor de h y probando que $x_{h+2} > x_{h+1}$. En efecto,

$$x_{h+2} - x_{h+1} = x_{h+1}(x_{h+1} - \frac{h}{h+1}) = x_{h+1}(x_{h+1} - x_h + x_h - \frac{h-1}{h} + \frac{h-1}{h} - \frac{h}{h-1}) = x_{h+1} \cdot$$

$$\cdot \left[(x_{h+1} - x_h) + (x_h - \frac{h-1}{h}) - \frac{1}{h(h+1)}\right] < 0 \ , \quad \text{c.d.d.}$$

Al ser mónotona decreciente tiene límite, que según c) sólo puede ser cero.

e) Si dado x_1, existe un $k \in N$ tal que $1 \leq x_k$, la sucesión es estrictamente creciente a partir del término (k+1)-ésimo y divergente.

En efecto, si $x_h > 1$, es:

$$x_{h+1} - x_h = x_h(x_h - \frac{h-1}{h}) > x_h(1 - \frac{h-1}{h}) = \frac{x_h}{h} > 0$$

y por tanto,

$$x_{h+1} > x_h > 1$$

Por inducción resulta la monotonía, y de ella que no puede tener límite ≤ 1 por lo que, según c) es divergente.

f) Para un cierto x_1, puede ocurrir uno de los tres casos siguientes (y sólo uno):

1. $\forall n \in N: \ \frac{n-1}{n} < x_n < 1.$

2. $\exists n \in N$: $x_n \leq \frac{n-1}{n}$

3. $\exists n \in N$: $1 \leq x_n$

De d) y e) se deduce que los tres casos son incompatibles.

g) Formemos una sucesión de intervalos: $I_n = [a_n, b_n]$, llamando m_n al punto medio de I_n, $m_n = (a_n+b_n)/2$, de la siguiente manera:

Comenzaremos con $I_0 = [0,1]$, o sea $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $m_0 = \frac{1}{2}$. Si para un m_i, la sucesión que resulta de $x_1 = m_i$ está en el caso 1, por c), ese valor m_i es el buscado. Si está en el caso 2 (con lo que, por d) es infinitésima), tomaremos $I_{i+1} = [m_i, b_i]$ o sea, $a_{i+1} = m_i$, $b_{i+1} = b_i$. Si está en el caso 3 (con lo que, por e) es divergente), tomaremos $I_{i+1} = [a_i, m_i]$, o sea $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = m_i$. Si nunca se produce el caso 1, se habrá formado una sucesión de intervalos $I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ en lo que $\{b_n - a_n\}$ tiende a cero, por lo que definen un punto único $x_1 = \mu$. Probaremos que la sucesión $\{x_n\}$ formada a partir de él es la pedida. Antes demostraremos unos lemas.

h) Para todo n, si $x_1 \in [0, a_n[$, la sucesión está en el caso 2, y si $x_1 \in]b_n, 1]$ está en el caso 3.

Es consecuencia inmediata de a).

i) Si para un cierto x_1, existe un $k \in N$ tal que $x_k \geq 1$, también existe otro x_1' tal que $x_{k+1}' = 1$, y $x_1' < x_1$.

En efecto, por e) será $x_{k+1} > 1$. Para que sea $x_{k+1}' = 1$, ha de ser $x_{k+1}' = x_k'^2 + \frac{1}{k} x_k' = 1$, o sea que x_k será la raiz positiva (que existe, sin duda) de $t^2 + \frac{1}{k} t - 1 = 0$. Análogamente, determinaremos x_{k-1}' como la raiz positiva de $t^2 + \frac{1}{k-1} t - x_k' = 0$, y así sucesivamente, retrocediendo, hasta llegar a determinar x_1'. Por b), al ser $1 = x_{k+1}' < x_{k+1}$, será $x_1' < x_1$.

j) Si para un cierto x_1 existe un $k \in N$ tal que $x_k \leq \frac{k-1}{k}$, existe también otro x_1' tal que $x_{k+1}' = 1$ y $x_1' > x_1$.

La demostración es análoga a la anterior.

k) La sucesión formada con el $x_1 = \mu$ obtenido en g) no puede ser del tipo 3.

En efecto, si fuese así, existiría un $x_k \geq 1$, con lo que $x_{k+1} > 1$, y según i) existiría un $x_1' < x_1 = \mu$ tal que $x_{k+1}' = 1$, para el que la sucesión sería también del tipo 3. Pero como la sucesión $\{a_n\}$ es no decreciente con límite μ, x_1' pertenecerá, según h), a un $[0, a_n[$, con lo que la sucesión correspondiente habría de ser del tipo 2, lo que es una contradicción.

l) La sucesión formada con el $x_1 = \mu$ obtenido en g) no puede ser del tipo 2.

En efecto, si fuese así, existiría un $k \in N$, tal que $x_k \leq \frac{k-1}{k}$ y por d) sería $x_{k+1} < \frac{k}{k+1}$. Por j) existiría un $x_1' > x_1 = \mu$ tal que $x_{k+1}' = \frac{k}{k+1}$, para el que la sucesión sería también del tipo 2. Pero como la sucesión $\{b_n\}$ es no creciente con límite μ, x_1' pertenecerá, según h), a un $]b_n, 1]$, con lo que la sucesión correspondiente habría de ser del tipo 3, lo que es una contradicción.

m) En consecuencia, si en el proceso descrito en g) no se llega al tipo 1, el valor μ determinado allí es un x_1 que da una sucesión del tipo 1, y que por b) satisface a la condición del enunciado. Si algún m_i da lugar a una sucesión del tipo 1, esa es la que la satisface.

n) El x_1 así determinado es único, pues si x_1 y x_1' diesen sucesiones del tipo 1, siendo $x_1 > x_1'$, ambas sucesiones, como monótonas crecientes acotadas, según c) tendrían límite igual a 1, por lo que desde un valor de n en adelante sería $x_n > \frac{1}{2}$. $x_n' > \frac{1}{2}$, y $x_{n+1} - x_{n+1}' = (x_n - x_n')\ (x_n + x_n' + \frac{1}{n}) > x_n - x_n'$, es decir la sucesión de diferencias $\{x_n - x_n'\}$ sería positiva y monótona creciente, en contra del resultado de que ambas sean convergentes a 1.

Salvador Calvo-Fernández Pérez
Ciudad Real

- ▪ - ▪ - ▪ -