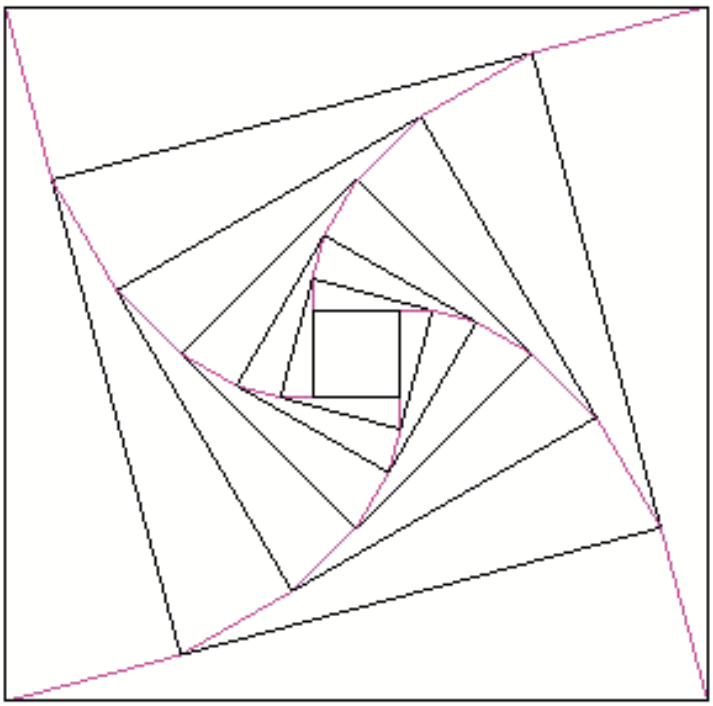
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 89
OCTUBRE DE 2011

ÍNDICE

Págs.

XXIX Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas,
por *Joaquín Hernández y Víctor Manuel Sánchez* 4
Problemas propuestos en el XXIX Concurso 8
Adiós a José Vicente García Sestafe 11
The Jagged Boundary-Edge Problem,
por *Antonio R. Quesada, Andrew Cooper* y *Laurie Dunlap* 14
Ideales maximales en anillos de polinomios,
por *Arturo Rodríguez Rodríguez* y *M.Belén Rodríguez Rodríguez* 34
Sobre la generación y resolución automática de ejercicios con medios tecnológicos y la educación matemática,
por *Angélica Martínez Zarzuelo* y *Eugenio Roanes Lozano* 53
Una aplicación de los haces de cónicas al armado de vigas,
por *José Aldeguer Carrillo* 81
Connotaciones matemáticas de una sentencia de Derecho Laboral,
por *Eugenio Roanes Lozano* 88
Reseña de libros 91
Instrucciones para el envío de originales 93
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín 95
Boletín de inscripción 96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 0201 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD “PUIG ADAM” DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 0201
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
http://www.sociedadpuigadam.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

XXIX Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Como cada año desde 1983, nuestra Sociedad y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, han celebrado su *Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas,* que en 2011 ha tenido lugar por vigésimo novena vez.

El Concurso de este año, convocado en nuestro Boletín nº 87 (en el que aparecen las Bases), se celebró en la mañana del sábado 11 de Junio de 2011. Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en el mismo lugar.

La concurrencia fue mayor que en el año anterior, 91 alumnos, que, según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles: 3º de ESO, 4º de ESO y 1º de Bachillerato. Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 7 puntos. Intentaron resolver sus 4 problemas; junto a su razonable dificultad, los nervios propios de un concurso los hicieron nada triviales.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de enhorabuena a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a todos los que han contribuido al éxito del Concurso.

Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

NIVEL I (3º ESO)

1.- **Laura Peña Queralta** (IES Beatriz Fajardo de Mendoza. Benidorm)
2.- **David Honeyands Martí** (Colegio Los Robles)
2.- **Andrés Barrueco García** (Colegio San Viator)
4.- **Ángel Prieto Naslin** (Liceo Francés)
4.- **Javier Ramos Gutierrez** (2º ESO, IES San Juan Bautista)

NIVEL II (4º ESO)

1.- **Pablo Esteban de la Iglesia** (Colegio Fray Luis de León)
1.- **Guillermo Gutiérrez Cuenca** (IES Ramiro de Maeztu)
3.- **Raúl González Molina** (Colegio Brains)
3.- **Lucas Maraj** (IES Gaspar Sanz)
5.- **Darío de la Fuente García** (IES Aramo. Oviedo)

NIVEL III (1º Bachillerato)

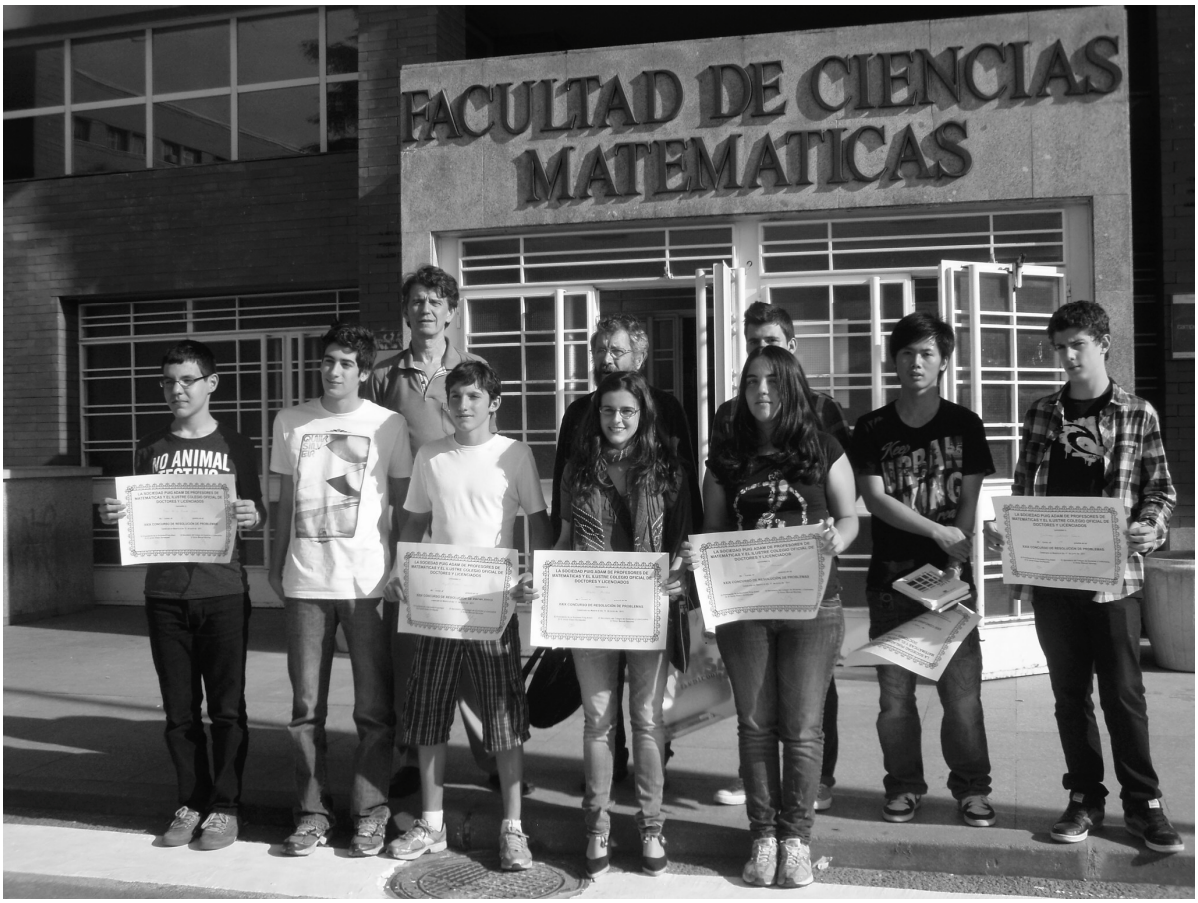
1.- **Xi Chen** (IES Vallecas I)
2**.- Javier Pliego García** (IES San Juan Bautista)
2.- **Jaime Ferrer Velasco** (IES Sos Baynat. Castellón)
4.- **Marta Penche** (Colegio Brains)
5.- **Almudena Carrera** (Colegio Ntra Sra de las Maravillas)

Nuestra enhorabuena a todos los premiados, al resto de los participantes y a los padres y profesores que los han preparado y animado a participar.

Aunque a algunos les cueste creerlo, hay adolescentes en nuestro país que dedican toda la mañana de un sábado de junio a resolver problemas, sabiendo que en el mejor de los casos, a saber que estén entre los premiados, el premio va a ser un talón de 60€ de El Corte Inglés y tres o cuatro libros de Matemáticas, que algunos los tendrán repetidos, pues ya resultaron premiados el año anterior y los libros que

nos parecen interesantes o nos donan algunas instituciones, es posible que se repitan de un año a otro.

Esto ocurre cada año en Madrid, en el Concurso Puig Adam, y entre los participantes no sólo hay estudiantes de nuestra Comunidad, sino que algunos de Oviedo, de Galicia o nuestros amigos de Requena, con Antonio Ledesma como profesor acompañante, se pagan cada año su viaje, y su hotel si vienen el día anterior, y se dedican a resolver problemas la mañana del sábado.



Finalmente, mostrar nuestro agradecimiento a la Profesora Almudena Mejías, esposa de nuestro Presidente, por tomar las fotos que aparecen en esta crónica.

Joaquín Hernández y Víctor Manuel Sánchez

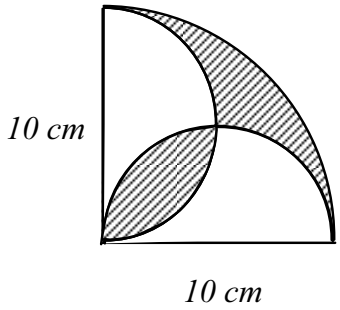
Problemas propuestos en el XXIX Concurso

Tiempo para cada problema: 1 hora 30 minutos

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Problema 1º

Calcula el área sombreada en la que, como observas, los arcos que ves son semicircunferencias y un cuarto de circunferencia.



Problema 2º

Encuentra, si existen, números enteros x e y tales que

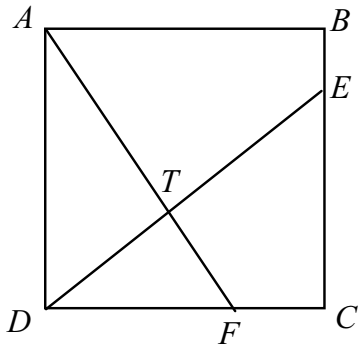
$$7 + x^2 = 3y \cdot (y + 1)$$

Problema 3º

Vidal intenta multiplicar un número de dos cifras por uno de tres, pero se le ha olvidado todo lo referente a la multiplicación y escribe, simplemente, el número de dos cifras seguido por el de tres, resultando un número de cinco cifras, que es exactamente 9 veces el producto que debería haber obtenido. ¿Cuál es la suma de los dos números que quería multiplicar?

Problema 4º

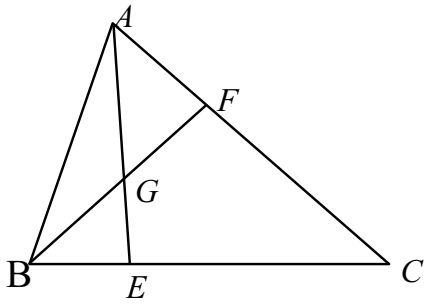
En el cuadrado *ABCD* de la figura, de lado *12 cm*, los puntos *E* y *F* son tales que *3BE = EC* y *2FC = DF*. Si *T* es el punto de intersección de *DE* y *AF*, calcula el área del triángulo *DFT*.



NIVEL II (4º de E.S.O.)

Problema 1º

En el triángulo *ABC*, el punto *F* verifica que *2AF = FC*. Si *G* es el punto medio del segmento *BF* y *E* es la intersección de las rectas BC y AG, calcula el cociente entre *BE* y *EC*.

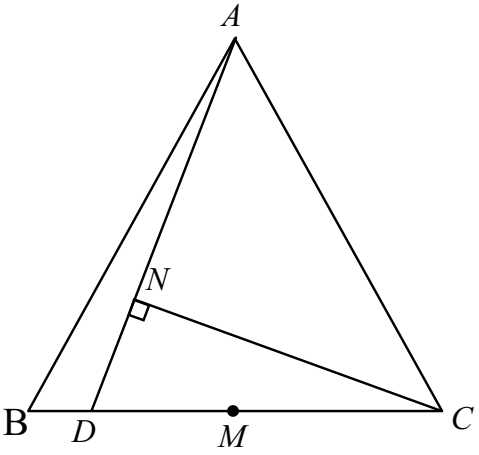


Problema 2º

Hallar dos números primos *p* y *q* tales que $p - q = 436$ y la media aritmética de *p* y $(q - 4)$ sea el cubo de un entero.

Problema 3º

En el triángulo isósceles *ABC*, con *AB = AC*, *M* es el punto medio de *BC*. El punto *D*, en el lado *BC*, verifica que $B\hat{A}D = \frac{1}{6} B\hat{A}C$. Además, la recta perpendicular a *AD* por *C*, corta a *AD* en *N*, verificándose que *DN = DM*. Calcula el valor de los ángulos del triángulo *ABC*.



Problema 4º

Marta llega a un aeropuerto que tiene 12 puertas de acceso a vuelos, alineadas y a 100 m de distancia entre cada dos consecutivas. Le asignan una de las doce al azar y, después de estar esperando, le comunican que su vuelo ha cambiado a otra puerta de salida, también elegida con igual probabilidad entre las restantes. Calcula la probabilidad de que Marta tenga que recorrer una distancia inferior o igual a 400 m para llegar a su nueva puerta de salida.

NIVEL III (1º de Bachillerato)

Problema 1º

Encuentra todos los enteros positivos *m* y *n*, con *n* impar, tal que $\frac{1}{m}+\frac{4}{n}=\frac{1}{12}$.

Problema 2º

Todo número primo *p*, mayor que *2*, se puede expresar como suma de dos enteros consecutivos (la mitad del anterior más la mitad del siguiente). Si el número no es primo hay más posibilidades, y muchos se pueden expresar, de varios modos, como suma de enteros consecutivos. Encontrar todas las soluciones de este problema para *n = 300*.

Problema 3º

En el triángulo *ABC*, con *AC* = 450 y *BC = 300*, marcamos los puntos *M* y *L* en los lados *AC* y *AB* respectivamente, siendo *M* el punto medio de *AC* y *L* el pie de la bisectriz del ángulo *C*. Sea *P* el punto de intersección de *BM* y *CL* y *K* el simétrico de *P* respecto de *M*. Si *AK = 180*, calcula *LP*.

Problema 4º

Si *a, b, c* y *d* son números reales tales que $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ y $ac+bd=0$, determina el valor de $ab+cd$.

Adiós a José Vicente García Sestafe

El pasado 25 de agosto falleció en Madrid nuestro compañero José Vicente García Sestafe, que fue Presidente de esta Sociedad durante los años 1990 a 1994.

García Sestafe había nacido el 31 de mayo de 1930. Fue realizando sucesivamente sus estudios, obteniendo el título de Maestro de Primera Enseñanza en 1948, el de Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Complutense en 1959, y el de Doctor en Ciencias Económicas por la UNED en 1987, con su tesis titulada "Algunas ampliaciones del concepto de función homogénea y sus aplicaciones económicas".

En su actividad profesional hay que distinguir dos aspectos muy diferenciados: por un lado el usual entre nuestros socios, la docencia en sus diferentes etapas y niveles, y por el otro la función pública que él desarrolló en el Instituto Nacional de Estadística.

En la docencia, como maestro y después como licenciado, enseñó primero en colegios y en Academias de preparación para Escuelas Técnicas. En 1960 comienza la docencia universitaria en la Universidad Complutense, primero como Profesor Ayudante de Análisis Matemático II en la Facultad de Matemáticas, y después como Profesor Ayudante, Profesor Adjunto y Encargado de Cátedra en la Facultad de Ciencias Económicas. Por otra parte, desde que se fundó la UNED fue profesor de Matemáticas en su Facultad de Económicas, y, habiendo obtenido el grado de doctor, impartió allí un curso de doctorado sobre Demografía Matemática.

Mientras tanto, en 1964 ingresó por oposición en el cuerpo de Profesores Agregados de I.N.B., y en 1966 en el de Catedráticos, docencia que ejercería desde 1967 hasta 1978.

Pero a esta continuada actividad como profesor, se había de sumar su otra vocación, la del servicio público en la Administración General. En el año 1964 no sólo superó como hemos indicado las oposiciones a Profesor Agregado, sino también las de Estadístico Facultativo del Instituto Nacional de Estadística. A este cuerpo perteneció, y en él cumplió su actividad profesional, desde ese momento

hasta su jubilación en 1995. Y no fue un desempeño cualquiera, sino que llegó al más alto rango en la carrera administrativa, sirviendo sucesivamente diversos puestos de subdirector general. Sirva como ejemplo que el 11 de abril de 1983 era nombrado Subdirector General de Estadísticas Demográficas y Censo Electoral. El 11 de octubre de 1985 cesaba en ese puesto, pasando a Subdirector General de la Oficina del Censo Electoral, hasta mayo de 1987. Después, el 2 de agosto de 1991, se le nombraba Subdirector General del Consejo Superior de Estadística.

Naturalmente, a esta actividad docente y administrativa tenemos que añadir sus abundantes publicaciones, tanto en el estricto ámbito de la matemática teórica, como en aspectos estadísticos y sobre todo demográficos, desarrollados en el Instituto Nacional de Estadística.

Por la notoriedad y relevancia que tuvo, no deberíamos dejar de resaltar en este ámbito la revisión de la traducción al español de la monumental Enciclopedia de las Matemáticas, en 13 tomos, de la Academia de Ciencias de la URSS.

Y, como no podía ser menos, se esforzó también siempre en la máxima difusión de todos estos conocimientos que atesoraba. En este sentido, colaboró desde los años 60 en cursos y seminarios dirigidos tanto a Inspectores de Enseñanza Primaria, como a profesores de Enseñanza Media, como, en su "otra" actividad, impartiendo cursos en el INE de formación a profesionales iberoamericanos en Estadística y Demografía. No se puede olvidar que dirigió también una tesis doctoral sobre demografía de Albacete.

Pero en este volcarse hacia los demás nosotros no podemos por menos que subrayar su esfuerzo en esta Sociedad Puig Adam. Ya hemos dicho que desde 1990 hasta 1994 fue nuestro Presidente.

Ya se sabe que en una organización de este tipo la presidencia significa ningún relumbrón y mucho trabajo; aquí el trabajo se atempera por la colaboración de los amigos que están alrededor.

Y eso es lo que más querríamos destacar de Vicente: que, terminado su periodo en la presidencia, siempre puso a disposición de sus compañeros su experiencia, su disposición al trabajo, y sus muchos conocimientos. En suma, todo lo necesario para que esta Sociedad siga rindiendo el servicio que sus socios esperan.

Querido Vicente, ahora que ya no estás entre nosotros, tu ejemplo nos ayudará a seguir trabajando. Que tus esfuerzos hayan sido premiados es nuestro deseo.

La Junta Directiva

The Jagged Boundary-Edge Problem

Antonio R. Quesada*, Andrew Cooper*, Laurie Dunlap* º

***** Department of Mathematics
º Department of Curricular and Instructional Studies
The University of Akron
Akron, Ohio 44325-4002

Abstract

Suppose that a plot of land bounded between two parallel lines is separated into two subregions by a jagged-edge (polygonal arc). We answer the following question: Can we find a line segment of minimal length (whose endpoints are a function of the polygonal arc's vertices), with one endpoint on each of the parallel lines, that separates the land into two subregions that have the same areas as the original subregions? We show the existence of a point, which is determined geometrically and algebraically via recursion, so that any segment between the boundaries that passes through this point, is a solution.

Introduction

The Trends in International Mathematics and Science Study[1] or TIMSS was designed to investigate the methodology and success of different teaching methods around the globe as described in the TIMSS homepage (2009). The third such study, conducted in 1994-1995, analyzed classes in over 40 countries at five different grade levels. Of particular interest was a problem studied in a Japanese eighth grade class concerning triangles and area problems, described by Siegel (2004).

[1] The study conducted in 1995 was called the Third International Mathematics and Science Study while subsequent studies were called the Trends in International Mathematics and Science Studies.

In one lesson students investigated a triangle with a fixed base and the opposite vertex moving along a line parallel to the base. The students found that the area of the triangle remains constant for any position of the vertex on the line parallel to the base (Figure 1).

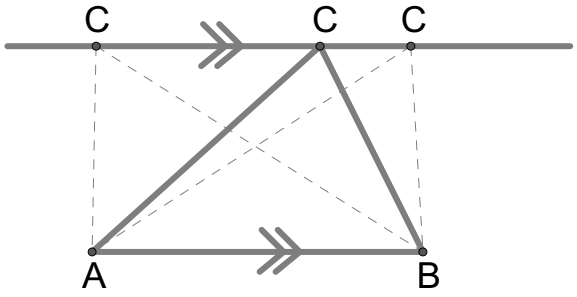


Figure 1. *C is the movable vertex*

This lesson is then extended by examining two people's land bounded between two nonparallel lines with a jagged edge of two segments between the two properties (Figure 2). The students used their solution to the previous problem and discovered a means to replace the jagged edge with a straight segment that preserves the original areas of land. Their method involved

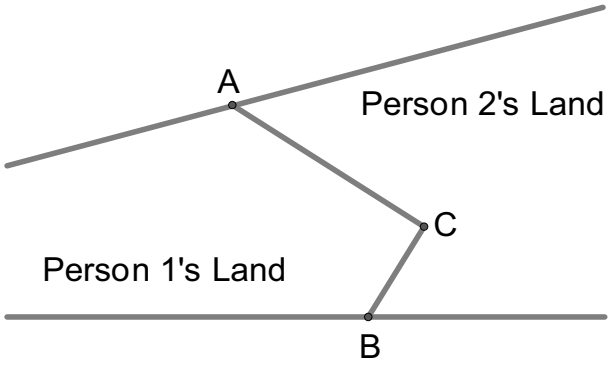


Figure 2. *Two properties separated by a jagged edge*

constructing a triangle, ΔABC, by connecting the two endpoints A and B and then drawing a line parallel to the base $\overline{AB}$ through C and moving the original vertex C to either boundary line as seen in Figure 3.

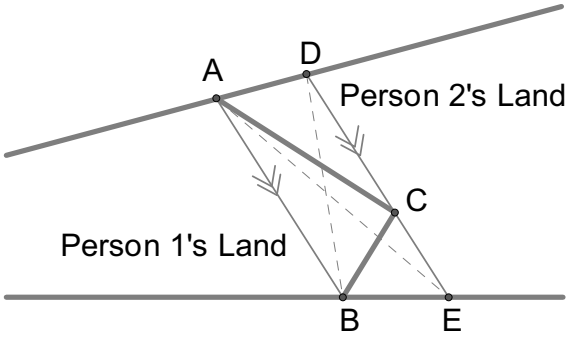


Figure 3. *Dashed segments are solutions*

In an article from *The Mathematics Teacher*, Pagni and Shultz (1999) extend the results of the Japanese class' study using trigonometry. They were interested in other possible solution segments that intersected one of the previous two solution segments (Figure 4).

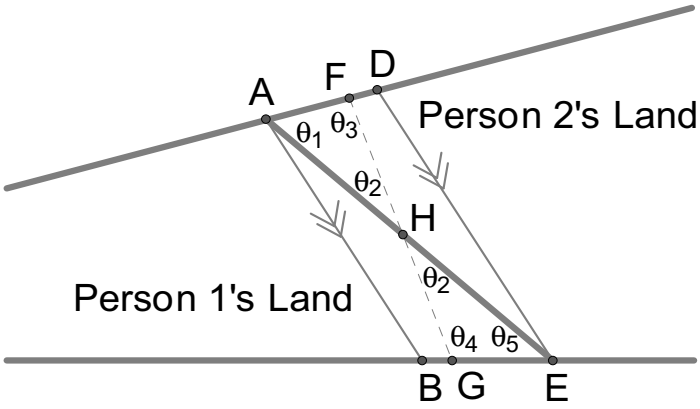


Figure 4. $\overline{FG}$ *is trigonometric solution*

They argued that $\overline{FG}$ is a solution segment if the areas of ΔAHF and ΔGHE were the same because $\overline{FG}$ would simply swap these two triangular regions between the land owners. In their solution, they picked a value for θ_4. Because θ_1 and θ_5 were already determined from the previous solution segment $\overline{AE}$, then θ_2 and θ_3 could also be determined. Next they used the law of sines to find

$$AH = \frac{AE}{\sqrt{\dfrac{\sin\theta_1 \sin\theta_4}{\sin\theta_3 \sin\theta_5}} + 1}.$$

Hence, $\overline{FG}$ could be constructed by using this value to locate H and then drawing a segment through H at angle θ_2. This solution offers intriguing possibilities but is rather complicated.

In this paper we extend the previous problem by considering parallel boundaries and a jagged edge of arbitrary length between them. We find the optimal solution among the existing infinite ones. We first use constructive geometric methods to produce the solutions and then duplicate our results algebraically.

1 The Jagged Edge Boundary Problem

Given a region (a non-empty connected open set) of finite area bounded between two parallel lines and separated by a jagged-edge (polygonal arc) into two subregions, is there a straight segment from one line to the other that maintains the original areas of each subregion? Is there a solution segment of minimal length? In Figure 5, the region is the shaded area. Even though a region is connected, the results in this paper are still valid for a nonempty open set.

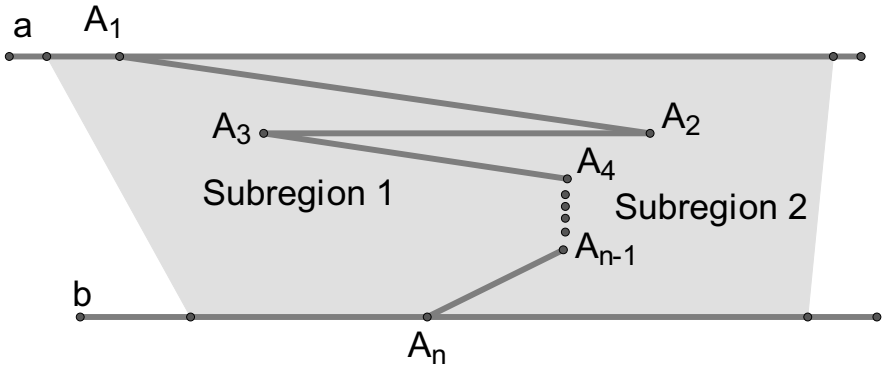


Figure 5. *Jagged-edge of n vertices for shaded region R*

For a region *R* bounded by two parallel lines, we can assume, without loss of generality, that one line coincides with the *x*-axis and the other line is above it; for otherwise a simple rotation and translation can make it so.

Definition 1. Given the region *R* bounded by two parallel lines, a *jagged edge* is a polygonal arc constructed from at least two segments, extending from one boundary to the other. It will be assumed that the consecutive y-coordinates of the vertices are non-increasing (i.e., $y_i \geq y_{i+1}$ for $1 \leq i \leq n-1$ and $y_n = 0$). The jagged edge is contained in the region with the exception of the first and last endpoints, which lie on the lines. We denote a jagged edge by listing the sequence of its vertices, $A_1A_2 \ldots A_n$ where $A_i = (x_i, y_i)$ (see Figure 5).

Definition 2. It will be assumed that the region *R* under consideration includes, but is not necessarily limited to, the interior of the rectangle whose sides are contained in the lines *a*, *b*, $x = k_1$ and $x = k_2$, where k_1 and k_2 are the minimum and maximum *x*-coordinates, respectively, of the jagged edge's vertices. The interior of the rectangle will be called the *circumscribed rectangle*. See Figure 6.

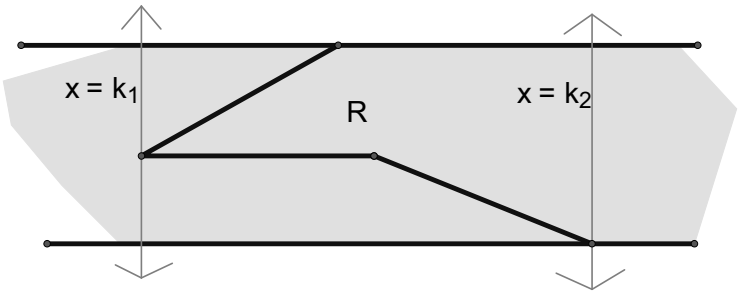


Figure 6. *The shaded region R contains circumscribed rectangle*

Definition 3. Given a jagged edge separating a finite region *R* into two subregions R_1 and R_2, any single segment that can replace the jagged edge while maintaining the same areas for R_1 and R_2 is called a *solution segment*. The midpoint of any solution segment is called the *solution midpoint*.

Definition 4. We denote the midpoint of $\overline{A_iA_{i+1}}$ by $M_{i,i+1}$, and the solution midpoint for a jagged edge $A_1A_2 \ldots A_n$ is denoted $M_{1,2,\ldots,n}$.

With the conditions given in these definitions, it will be proven that any segment extending from *a* to *b* through the solution midpoint will be a solution segment as long as any subregions bounded between this segment, *a*, *b* and the

polygonal arc are contained in the region. This condition is needed because the new subregions are formed by swapping the subregions bounded between this segment, *a*, *b* and the polygonal arc.

2 Geometrical Solution

In this section we find the solution midpoint geometrically for a region of land bounded between two parallel lines and separated into two sub-regions by a jagged edge. Our first result shows that once the midpoint of a solution segment is known, there are infinitely many solution segments through it.

Lemma 1. Let *R* be a region of finite area that is bounded between two parallel lines *a* and *b*, and let $\overline{A_1A_2}$ be a line segment from one parallel to the other that splits the given region into two subregions R_1 and R_2 (see Figure 7). Suppose the segment $\overline{CD}$ has endpoints on *a* and *b*, passes through the midpoint, $M_{1,2}$, of the given segment $\overline{A_1A_2}$, and further, the interiors of $\Delta A_1M_{12}C$ and $\Delta A_2M_{12}D$ are contained in *R*. Then the segment $\overline{CD}$ will break R into two subregions, R_{D1} and R_{D2}, where R_{D1} has the same area as R_1 and R_{D2} has the same area as R_2 (see Figure 8). Moreover, the quadrilateral $\Diamond A_1CA_2D$ is a parallelogram.

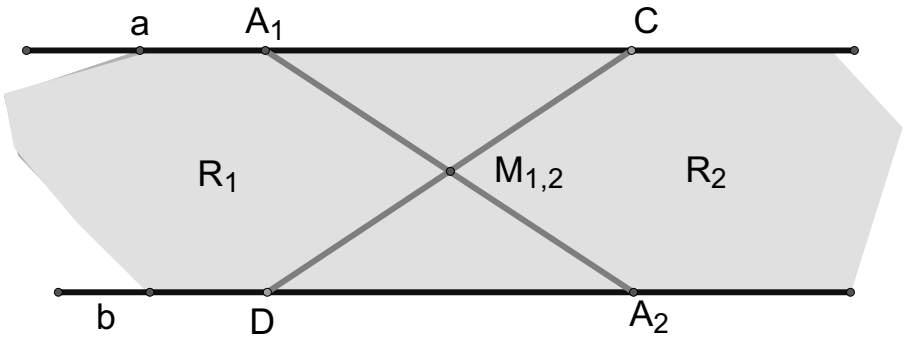


Figure 7. *Original subregions* R_1 *and* R_2

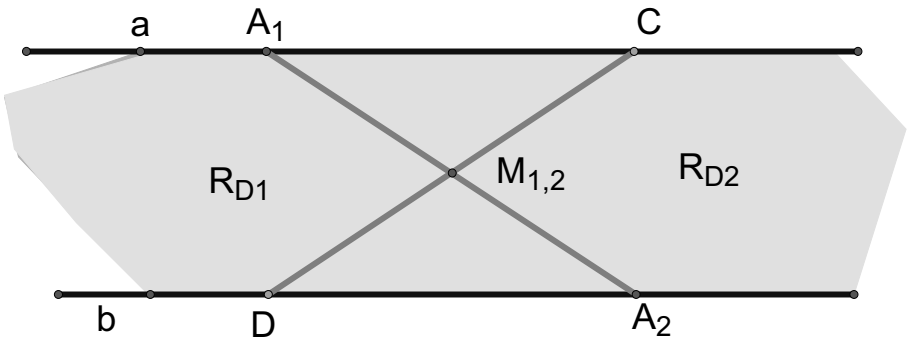


Figure 8. *New subregions* R_{D1} *and* R_{D2}

Proof. Because $M_{1,2}$ is a midpoint then $\overline{A_1M_{12}} \cong \overline{M_{12}A_2}$, also $\angle A_1M_{12}C \cong \angle A_2M_{12}D$ since they form a vertical pair, and $\angle D \cong \angle C$ and $\angle A_1 \cong \angle A_2$ by alternate interior angles. Thus $\Delta A_1M_{12}C \cong \Delta A_2M_{12}D$. It follows that the areas of the new subregions between *a* and *b* defined by $\overline{CD}$ remain unchanged because the new regions were formed by swapping the subregions in these congruent triangles (which are both contained in *R*). In addition $\overline{CM_{12}} \cong \overline{DM_{12}}$, hence $\overline{CD}$ and $\overline{A_1A_2}$ meet at their midpoint and consequently $\Diamond A_1CA_2D$ is a parallelogram.

Note that in the special case where the region is a parallelogram and each of the subregions has area that is half that of the parallelogram, then either of the diagonals would be a solution segment and the intersection of the two diagonals, I, would be the solution midpoint. Thus, any segment through I to opposite bases of the parallelogram would also be a solution segment.

Next we consider the initial case when the two regions are separated by a two-segment jagged edge boundary.

Lemma 2. Let *R* be a region of finite area that is bounded between two parallel lines *a* and *b* Suppose $A_1A_2A_3$ is a jagged edge of two segments connecting lines *a* and *b,* with $y_1 > y_2 > y_3$, such that the region contains the circumscribed rectangle, as in Figure 9. Then there is a vertical solution segment.

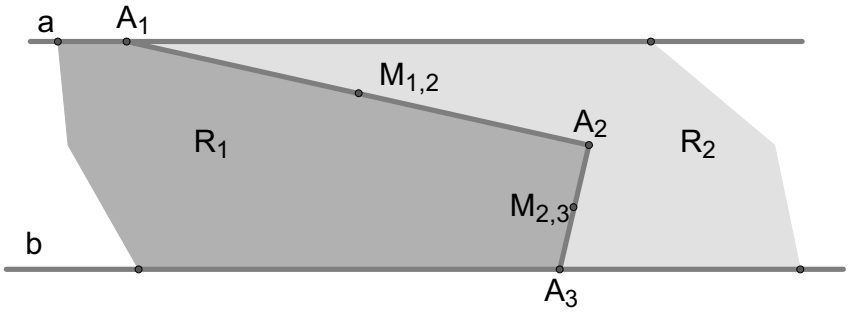


Figure 9. *Original regions* R, R_1 *and* R_2

Proof. Let line *c* be the line parallel to *a* passing through A_2. Then *c* splits each of the regions *R*, R_1 and R_2 into two subregions as shown in Figure 10. The upper and lower subregions that *R* is split into by line *c* each satisfy the conditions of Lemma 1.

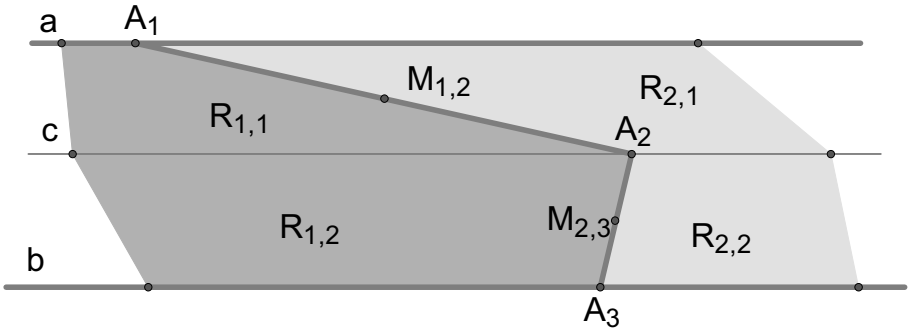


Figure 10. *Initial subregions are split by line c*

This means that any segment from lines *a* to *c*, passing through $M_{1,2}$ will preserve the areas of the upper subregions, as long as the interiors of the triangles bounded between the segment, line *a*, line *c*, and $\overline{A_1A_2}$ are contained in the region. The same holds true for the region below line *c*. For the sake of clarity, from now on, we will abuse the standard segment notation in the following definitions of segments *d* and *v*. Define *d* to be the line segment from *a* to *b* that passes through $M_{1,2}$ and $M_{2,3}$ (see Figure 11).

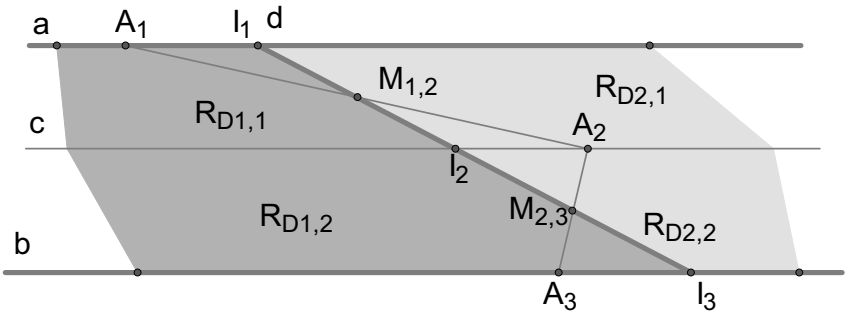


Figure 11. *Subregions split by segment d*

Let *d* intersect lines *a*, *b* and *c*, say at I_1, I_2 and I_3. In the case where the interiors of $\Delta A_1 I_1 M_{1,2}$, $\Delta M_{1,2} A_2 I_2$, $\Delta A_2 M_{2,3} I_2$ and $\Delta M_{2,3} I_3 A_3$ lie in *R*, then *d* will split *R* into subregions that preserve the areas of the upper and lower subregions by lemma 1. This means that Area($R_{1,1}$) = Area($R_{D1,1}$), Area($R_{2,1}$) = Area($R_{D2,1}$), Area($R_{1,2}$) = Area($R_{D1,2}$) and Area ($R_{2,2}$) = Area ($R_{D2,2}$), (see Figures 10 and 11). Hence, the segment *d* will be a solution segment for *R* because

$$\text{Area}(R_1) = \text{Area}(R_{1,1}) + \text{Area}(R_{1,2}) = \text{Area}(R_{D1,1}) + \text{Area}(R_{D1,2}) = \text{Area}(R_{D1})$$

$$\text{Area}(R_2) = \text{Area}(R_{2,1}) + \text{Area}(R_{2,2}) = \text{Area}(R_{D2,1}) + \text{Area}(R_{D2,2}) = \text{Area}(R_{D2})$$

(see Figures 9, 10, 11 and 12).

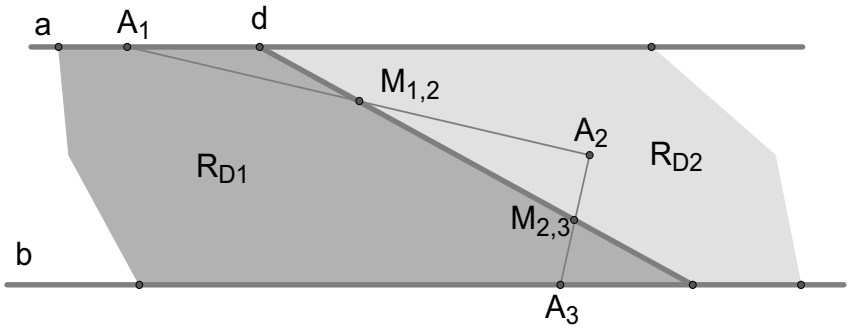


Figure 12. *Region R split by segment d*

Furthermore, any segment from lines *a* to *b* through the center, $M_{1,2,3}$, of segment *d* is a solution segment for *R* by Lemma 1, as long as the regions bounded between this segment, *a*, *b* and the jagged edge are contained in the region. This is the case for the vertical segment, *v*, through the center because the x-coordinate

of $M_{1,2,3}$, lies between the x-coordinates of $M_{1,2}$ and $M_{2,3}$, which in turn lie between the x-coordinates of A_1, A_2 and A_3, as shown in Figure 13.

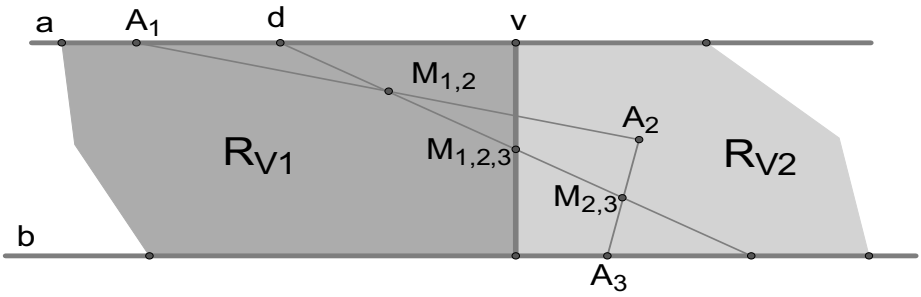


Figure 13. *R split by vertical segment* v

This is because it is assumed that the region contains the circumscribed rectangle of the jagged edge. Thus, Area(R_1) = Area(R_{D1}) = Area(R_{V1}) and Area(R_2) = Area(R_{D2}) = Area(R_{V2}).

In the case that the interiors of $\Delta A_1 I_1 M_{1,2}$, $\Delta M_{1,2} A_2 I_2$, $\Delta A_2 M_{2,3} I_2$ and $\Delta M_{2,3} I_3 A_3$ do not all lie in R, the vertical segment through its midpoint is still a solution segment (see Figure 14).

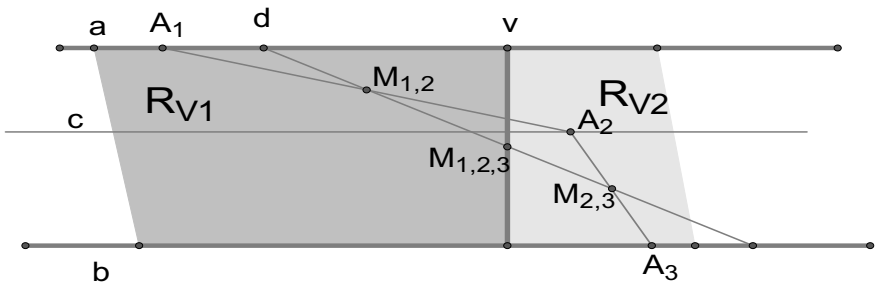


Figure 14. *One triangle not contained in R*

As reasoned previously, the interior of v will lie within the region and split it into two subregions, R_{V1} and R_{V2}. The key to showing that v is a solution segment is to create a new region, R_E, that expands R to a region that includes the interiors of these triangles. This can be done by defining $R_E = R \cup P$ where P is the interior of the rectangle that has the segment d as a diagonal, as shown in Figure 15.

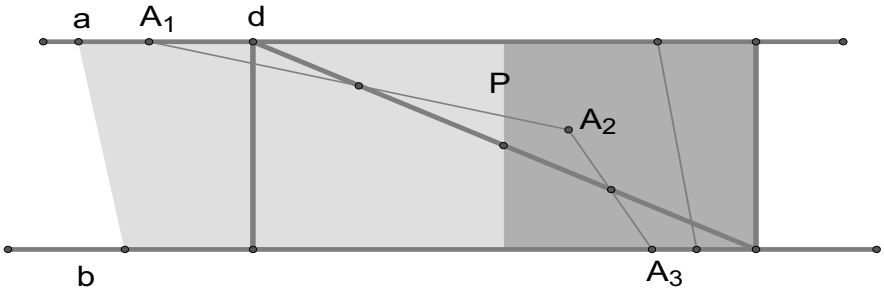


Figure 15. *The expanded region* R_E

Because R_E contains the circumscribed rectangle and P, it will also contain the interiors of the four triangles. Let E_1 be any part of P that lies to the left of the v and outside of R, and E_2 be any part of P that lies to the right of v and outside of R. (In the example shown in Figure 16, E_1 is empty.) The jagged edge (Figure 16), the diagonal segment d (Figure 17) and the vertical segment v (Figure 18) each break R_E into two regions.

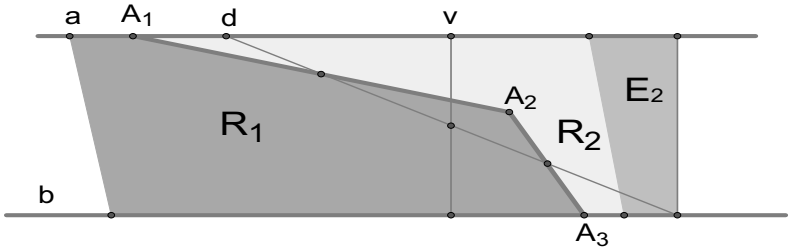


Figure 16. *The region E_2 to the right of R*

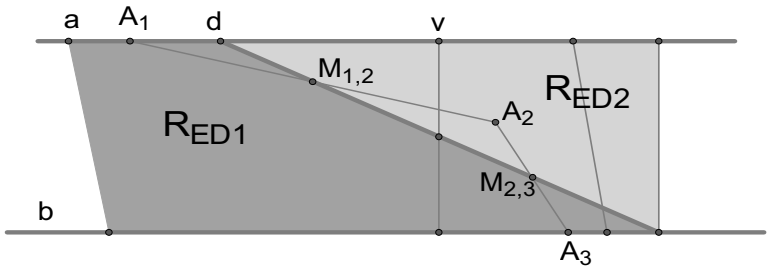


Figure 17. *The subregions of* R_E *formed by d*

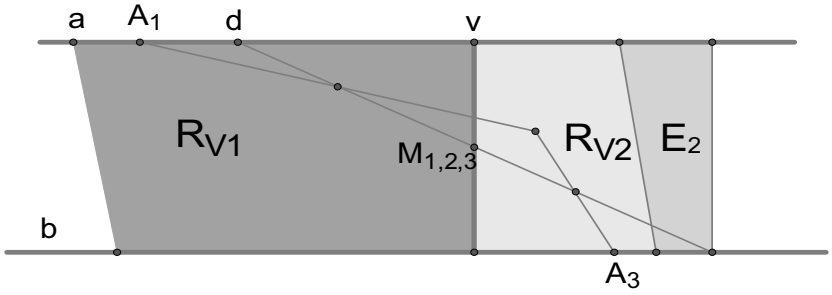


Figure 18. The *subregions of* R_E *formed by* v

Because the interiors of the four triangles are contained in R_E, the reasoning from the first part of this proof shows that each of the segments *d* and *v* preserve the areas of the subregions formed by the jagged edge. Thus

$$\text{Area}(R_1 \cup E_1) = \text{Area}(R_{ED1}) = \text{Area}(R_{V1} \cup E_1)$$

$$\text{Area}(R_2 \cup E_2) = \text{Area}(R_{ED2}) = \text{Area}(R_{V2} \cup E_2).$$

Finally, because E_1 and E_2 are disjoint from *R* and because R_1, R_2, R_{V1} and R_{V2} are contained in R, this means that Area(R_1) = Area(R_{V1}) and Area(R_2) = Area(R_{V2}). Thus proving that *v* is a solution segment for the region *R* (even when *d* is not).

Lemma 3. Let *R* be a region of finite area that is bounded between two parallel lines *a* and *b*. If $A_1A_2A_3A_4$, is a jagged edge such that the middle edge is parallel to the boundaries, that is $y_1 > y_2 = y_3 > y_4$, and such that the region contains the circumscribed rectangle of the jagged edge, then there is a vertical solution segment.

Proof. As shown in Figure 19, let *d* be the line segment from *a* to *b* that passes through $M_{1,2}$ and $M_{3,4}$. Let *c* be the horizontal line through vertices A_2 and A_3. Let I_2 be the intersection of line *c* and the segment *d*. Let $M_{1,2,3}$ be the center of the segment *d*. Let $R_E = R \cup P$ where *P* is the interior of the rectangle that has the segment *d* as a diagonal. Let *v* be the vertical segment from *a* to *b* that passes through $M_{1,2,3}$. Let E_1 be any part of *P* that lies to the left of *v* and outside of *R* and E_2 as any part of *P* that lies to the right of *v* and outside of *R*.

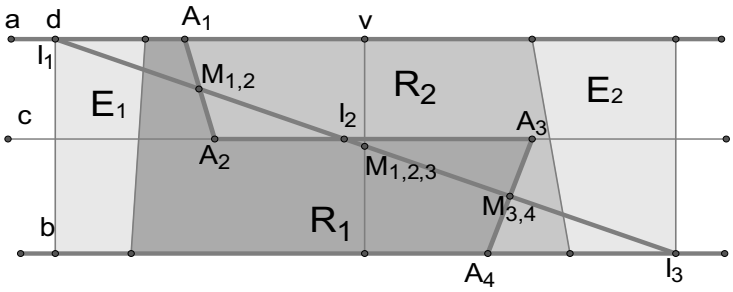


Figure 19. *The regions R and* R_E

Because the rectangles that circumscribe the jagged edge and the interior of segment *d* are contained in R_E, Lemma 1 can be applied repeatedly in this proof. Thus, by Lemma 1, $\overline{A_1A_2}$ and $\overline{I_1I_2}$ break the subregion of the region R_E that lies above line *c* into regions that satisfy:

$$\text{Area}(R_{1,1} \cup E_{1,1}) = \text{Area}(R_{ED1,1}) \quad \text{and} \quad \text{Area}(R_{2,1} \cup E_{2,1}) = \text{Area}(R_{ED2,1})$$

as shown in Figures 20 and 21.

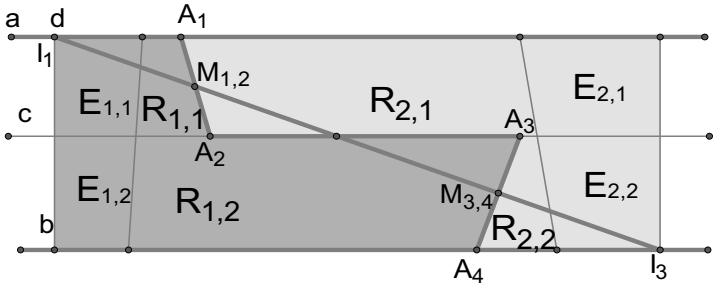


Figure 20. *Subregions of* R_E *from jagged edge*

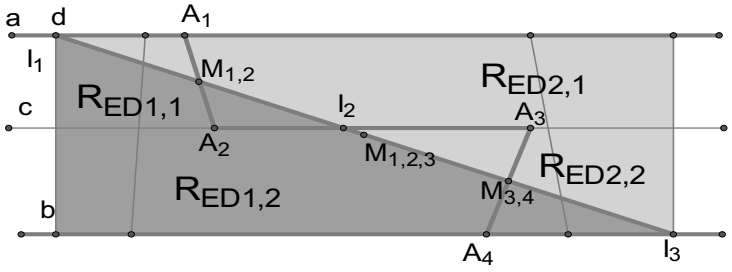


Figure 21. *Subregions of* R_E *formed from d*

Likewise, $\overline{A_3A_4}$ and $\overline{I_2I_3}$ break the subregion of the region R_E that lies below line *c* into regions that satisfy:

$$\text{Area}(R_{1,2} \cup E_{1,2}) = \text{Area}(R_{ED1,2}) \quad \text{and} \quad \text{Area}(R_{2,2} \cup E_{2,2}) = \text{Area}(R_{ED2,2})$$

as shown in Figures 20 and 21. Because E_1 and E_2 are disjoint from *R* and because R_1 and R_2 are contained in *R*, combining these results yields

$$\text{Area}(R_1 \cup E_1) = \text{Area}(R_{ED1}) \text{ and } \text{Area}(R_2 \cup E_2) = \text{Area}(R_{ED2})$$

Hence, the segment *d* is a solution segment for the region R_E. By Lemma 1, *v* is also a solution segment for the region R_E. Thus,

$$\text{Area}(R_1 \cup E_1) = \text{Area}(R_{ED1}) = \text{Area}(R_{V1} \cup E_1) \text{ and}$$

$$\text{Area}(R_2 \cup E_2) = \text{Area}(R_{ED2}) = \text{Area}(R_{V2} \cup E_2).$$

(see Figure 22).

Finally, because E_1 and E_2 are disjoint from *R* and because R_1, R_2, $R_{V!}$ and R_{V2} are contained in R, this means that $\text{Area}(R_1) = \text{Area}(R_{V1})$ and $\text{Area}(R_2) = \text{Area}(R_{V2})$. Thus proving that *v* is a solution segment for the region *R*.

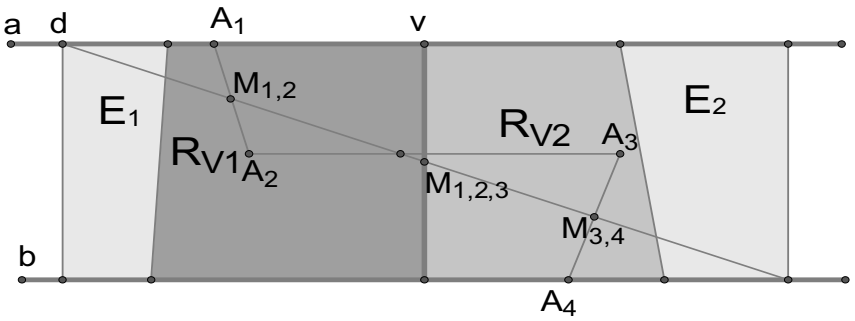


Figure 22. *Subregions of* R_E *formed by* v

Theorem 4 expands the results of all three lemmas to the case of a jagged edge with an arbitrary number of vertices.

Theorem 4. Let *R* be a region of finite area that is bounded between two parallel, horizontal lines. Let $A_1A_2...A_n$ be a jagged edge through *R* from one parallel line

to the other where $n \geq 2$. If *R* contains the circumscribed rectangle of the jagged edge, then there is a vertical solution segment.

Proof. The proof uses induction on *n*, for $n \geq 2$. When *n* = 2, the jagged edge is a line segment. Because the region contains the circumscribed rectangle, then the interior of the region created by the vertical segment from $y = y_1$ to $y = y_2$ that passes through the midpoint of this segment will be contained in the initial region. Hence by Lemma 1 it is a solution segment.

Next, assume this is true for some k, $k \geq 2$, and show that it is true for $k+1$. Let $A_1A_2...A_kA_{k+1}$ be a jagged edge. Then $A_1A_2...A_k$ is a jagged edge from the line $y = y_1$ to the line $y = y_k$ for the subset of the region bounded between these lines, where y_k is the *y*-coordinate of A_k. Because the region contains the circumscribed rectangle of $A_1A_2...A_kA_{k+1}$, then the subset of the region between $y = y_1$ and $y = y_k$ will contain the circumscribed rectangle of $A_1A_2...A_k$. Hence, by the induction assumption, there is a vertical solution segment for this jagged edge, call it *v'*. Then the endpoints of *v'* are $A_1' = (x', y_1)$ and $A_2' = (x', y_k)$, where x' is between the smallest and largest *x*-coordinates of $A_1A_2...A_k$ (see Figure 23).

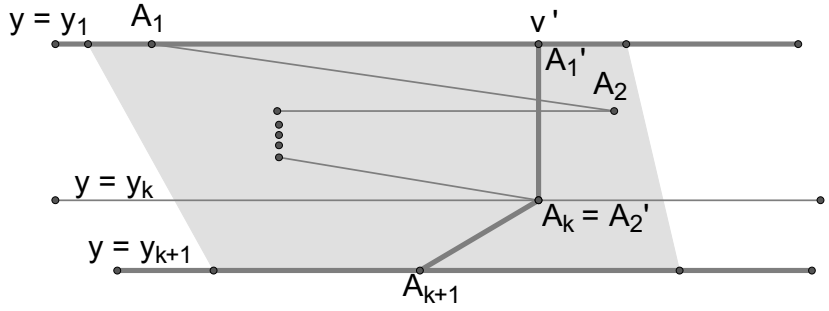


Figure 23. *Segment v' ends at* A_k

If $x' = x_k$ then $A_2' = A_k$ and $A_1'A_2'A_{k+1}$ is a jagged edge for *R* that preserves the areas of the jagged edge $A_1A_2...A_kA_{k+1}$ (see Figure 23). Because this jagged

edge is constructed from two segments, Lemma 2 guarantees the existence of a vertical solution segment. If $x' \neq x_k$ then $A_1' A_2' A_k A_{k+1}$ is a jagged edge of the region that contains a horizontal segment and preserves the areas of the jagged edge $A_1 A_2 \ldots A_k A_{k+1}$ (see Figure 24).

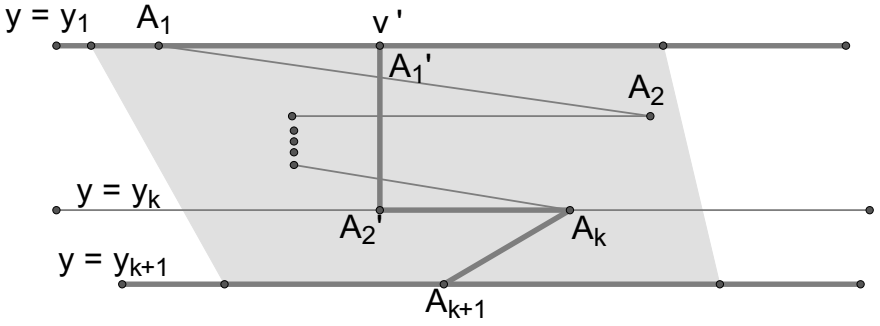


Figure 24. *Segment v' does not end at* A_k

Because this jagged edge satisfies the conditions of Lemma 3, once again, there is a vertical solution segment. The result follows by the principle of mathematical induction for any natural number $n \geq 2$ as indicated in Figure 25.

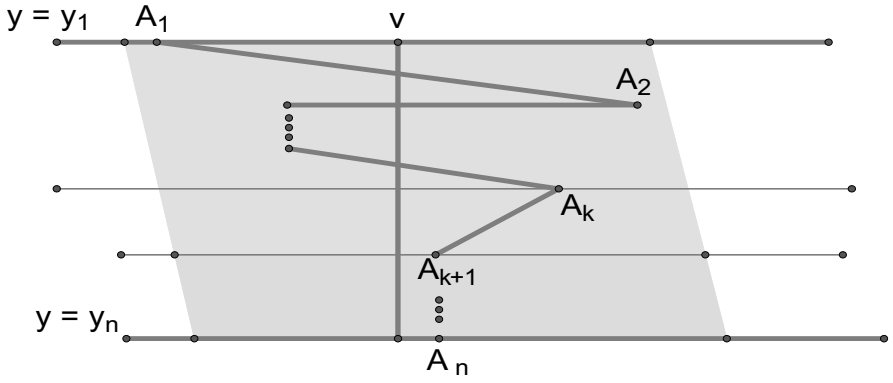


Figure 25. A *jagged edge with n vertices and its vertical solution segment*

3 Algebraic Recursive Solution

In this section, formulas for the coordinates of the midpoint of this vertical solution segment will be established algebraically via recursion. Recall that we denote the coordinates of A_i by (x_i, y_i) and those of any midpoint $M_{i,i+1}$ of a segment $\overline{A_i A_{i+1}}$ by $(x_{M_{i,i+1}}, y_{M_{i,i+1}})$.

Theorem 5. For any jagged edge $A_1A_2\ldots A_k$ between two parallel boundary lines *a* and *b*, the coordinates of the solution midpoint $M_{12\ldots k}$ are given as:

$$\left(x_{M_{1,2,\ldots,k}}, y_{M_{1,2,\ldots k}}\right) = \left(x_{M_{k-1,k}} + (y_{M_{1,2,\ldots k}} - y_{M_{k-1,k}}) \frac{x_{M_{1,2,\ldots k-1}} - x_{M_{k-1,k}}}{y_{M_{1,2,\ldots k-1}} - y_{M_{k-1,k}}}, \frac{y_1 + y_k}{2} \right) \quad (1)$$

Proof. We proceed by induction on the number of vertices, $k \geq 3$, composing the jagged edge. Let $A_1A_2A_3$ be a jagged edge between parallel lines *a* and *b*. We know by lemma 2 that the midpoint of the segment from *a* to *b* passing through $M_{1,2}$ and $M_{2,3}$, namely $M_{1,2,3}$, is a solution midpoint. In the proof of lemma 1 it was shown that $M_{1,2,3}$ would also be the midpoint of any segment from *a* to *b* that passed through $M_{1,2,3}$, as long as the triangular regions bounded between the segment and the jagged edge were contained in the region. Hence, $M_{1,2,3}$ is also the midpoint of the vertical solution segment, *v* (see Figure 26). Consequently, $y_{M_{1,2,3}} = \frac{y_1 + y_2}{2}$.

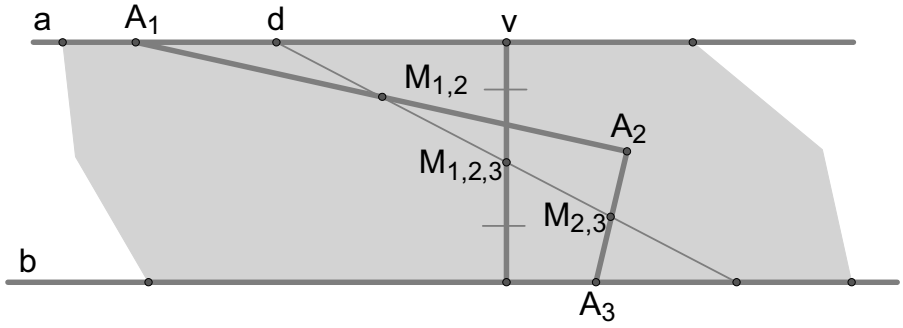


Figure 26. *Jagged edge $A_1A_2A_3$ with solution midpoint M_{123}*

Because the equation of the line containing d, $\overleftrightarrow{M_{1,2}M_{2,3}}$ is given by

$$y - y_{M_{2,3}} = \frac{y_{M_{1,2}} - y_{M_{2,3}}}{x_{M_{1,2}} - x_{M_{2,3}}}\left(x - x_{M_{2,3}}\right) \qquad (2)$$

then we can find $x_{M_{1,2,3}}$ substituting y with $y_{M_{1,2,3}} = \frac{y_1 + y_3}{2}$ in (2) and solving for x. Using straight forward algebraic manipulation yields

$$x_{M_{1,2,3}} = x_{M_{2,3}} + (y_{M_{1,2,3}} - y_{M_{2,3}})\left(\frac{x_{M_{1,2}} - x_{M_{2,3}}}{y_{M_{1,2}} - y_{M_{2,3}}}\right)$$

This establishes the first case of the induction argument.

Proceeding by induction, we seek the middle point of $A_1A_2\ldots A_{n+1}$ and assume that the jagged edge $A_1A_2\ldots A_n$ from parallel lines a to $y = y_n$ has the solution midpoint

$$M_{1,2,\ldots,\mathrm{n}} = \left(x_{M_{n-1,n}} + (y_{M_{1,2,\ldots,n}} - y_{M_{n-1,n}})\frac{x_{M_{1,2,\ldots,n-1}} - x_{M_{n-1,n}}}{y_{M_{1,2,\ldots n-1}} - y_{M_{n-1,n}}}, \frac{y_1 + y_n}{2}\right)$$

Let v be the vertical solution segment of the jagged edge. As in the first step of the induction argument the y-coordinate of the solution midpoint is the midpoint of v, namely $y_{M_{1,2,\ldots,n+1}} = \frac{y_1 + y_{n+1}}{2}$. Also, the equation of the line containing d, $\overleftrightarrow{M_{1,2,\ldots,n}M_{n,n+1}}$ is given by

$$y - y_{M_{n,n+1}} = \left(\frac{y_{M_{1,2,\ldots n}} - y_{M_{n,n+1}}}{x_{M_{1,2,\ldots n}} - x_{M_{n,n+1}}}\right)\left(x - x_{M_{n,n+1}}\right)$$

Hence, the *x*-coordinate of the solution midpoint can be found by substituting $y_{M_{1,2,\ldots,n+1}}$ for *y* and then solving for *x*. Using straight forward algebraic manipulation yields that the *x*-coordinate of the solution midpoint is

$$x_{M_{12..n+1}} = x_{M_{n,n+1}} + (y_{M_{12\ldots n+1}} - y_{M_{n,n+1}})\left(\frac{x_{M_{1,2\ldots,n}} - x_{M_{n,n+1}}}{y_{M_{1,2,\ldots,n}} - y_{M_{n,n+1}}}\right)$$

Thus the solution midpoint is

$$M_{12\ldots n+1} = \left(x_{M_{n,n+1}} + \left(y_{M_{12\ldots n+1}} - y_{M_{n,n+1}}\right)\left(\frac{x_{M_{12\ldots n}} - x_{M_{n,n+1}}}{y_{M_{12\ldots n}} - y_{M_{n,n+1}}}\right), \frac{y_1 + y_{n+1}}{2}\right)$$

and the results follows by the induction.

4 Conclusion

The vertical solution segment splits the original region into two new subregions that preserve the areas of the subregions determined by the jagged edge. Any other segment through the midpoint of the vertical solution segment is guaranteed to be another solution segment whenever the new segment is the diagonal of a rectangle whose interior is contained in the original region. However, the vertical segments will have the minimum length amongst all of the solution segments. This solution may prove helpful in different applications such as replacing a jagged edge boundary between two properties with a straight one. But, can the solution be extended to the general case of a jagged-edge between nonparallel lines?

References

1. International Study Center at Boston College (2009, March 11). Third international mathematics and science study - 1995. Retrieved from `http://timss.bc.edu/timss1995.html`

2. Pagni, D.L. & Shultz, H. S. (1999). Extending a (TIMSS) Japanese lesson using trigonometry. *The Mathematics Teacher*, 92(3), 189-191.

3. Siegel, A., (2004). Telling lessons from the TIMSS Videotape. In W. M. Evers & H. J. Wahlberg (Eds.), *Testing student learning, evaluating teaching effectiveness* (pp. 161-194). Stanford, CA; Hoover Press.

Ideales maximales en anillos de polinomios

Arturo Rodríguez Rodríguez y Mª Belén Rodríguez Rodríguez*

* Departamento de Matemáticas, I.E.S. Salvador Dalí

arturomath@hotmail.com, maria.rodriguez13@educa.madrid.org

Resumen

We describe, by means of suitable generators, the maximal ideals of polynomial rings $k[X_1, \ldots, X_n]$ where k is either a field or a principal ideal domain with infinitely many nonassociated irreducible elements. We have also developed some examples and consequences.

1. Introducción

Sean k un cuerpo, $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$ y $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas sobre k. La *evaluación en* a, definida como el homomorfismo sobreyectivo

$$\mathcal{P}_n(k) = k[X_1, \ldots, X_n] \to k,\ f \mapsto f(a),$$

tiene por núcleo el ideal $\mathfrak{m}_a$ generado por $X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n$, que es por tanto un ideal maximal de $\mathcal{P}_n(k)$, ya que $\mathcal{P}_n(k)/\mathfrak{m}_a \approx k$. La forma débil del Teorema de los ceros de Hilbert, una de cuyas demostraciones más sencillas y elegantes puede encontrar el lector en [1], dice que si k es algebraicamente cerrado éstos son todos los ideales maximales del anillo $\mathcal{P}_n(k)$. Sin embargo, si k no es algebraicamente cerrado existe un polinomio irreducible $f \in k[X]$ sin raíces en k y, como $k[X]$ es un dominio euclídeo, el ideal (f) de $k[X]$ generado por f es maximal. El objetivo de esta nota es describir mediante generadores los ideales maximales del anillo $\mathcal{P}_n(k)$ para un cuerpo k arbitrario, véase la Proposición 3.5. Empleamos este resultado para deducir en la Proposición

4.4 otro análogo reemplazando k por un dominio de ideales principales que tiene infinitos elementos irreducibles.

Fijamos algunas notaciones. Dados un anillo B, un subanillo suyo A, ambos conmutativos y unitarios, y elementos $b_1, \ldots, b_n \in B$, se denomina *evaluación* en $b = (b_1, \ldots, b_n)$ al homomorfismo

$$\mathrm{ev}_b : A[X_1, \ldots, X_n] \to B,\ f \mapsto f(b_1, \ldots, b_n),$$

donde $X_1, \ldots, X_n$ son indeterminadas, y cuya imagen $A[b_1, \ldots, b_n]$, es el menor subanillo de B que contiene a $A \cup \{b_1, \ldots, b_n\}$. Se dice que $b_1, \ldots, b_n$ son *algebraicamente dependientes* sobre A si el homomorfismo ev_b no es inyectivo. Si este es el caso y $n = 1$ se dice que $b = b_1$ es *algebraico* sobre A; en caso contrario se dice que b es *transcendente.* Si el núcleo de ev_b contiene un polinomio mónico, esto es, de la forma

$$T^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j, \text{ donde cada } a_j \in A \text{ y } T \text{ es una indeterminada,}$$

se dice que b es *entero* sobre A. Si cada $b \in B$ es entero sobre A se dice que $B|_A$ es una *extensión entera.* Si $A = k$ es un cuerpo, $b \in B$ es entero sobre k si y sólo si es algebraico, y en tal caso $k[b]$ es un cuerpo. Además, $k[T]$ es un dominio de ideales principales, luego existe un polinomio mónico $f \in k[T]$ que genera el núcleo de ev_b. Se dice que f es el *polinomio mínimo* de b sobre k, y su grado, que se denota $n = [k(b) : k]$, se denomina *grado de la extensión de cuerpos* $k[b]|_k$. Las potencias $\{b^j :\ 0 \leq j \leq n-1\}$ constituyen una base de $k[b]$ como k-espacio vectorial.

Denotaremos mediante $K|_k$ una extensión de cuerpos, y por $\overline{k}$ un cierre algebraico de k. Si C es un subconjunto de K, denotaremos $k(C)$ al menor subcuerpo de K que contiene a $k \cup C$. Nótese que si $C = \{c\}$ consta de un único elemento algebraico sobre k, entonces $k(C) = k[c]$. Además, si C es finito y está formado por elementos algebraicos sobre k, el cuerpo $k(C)$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita, que denotamos $[k(C) : k]$, y que se llama *grado* de la extensión de cuerpos $k(C)|_k$.

Dados un homomorfismo de anillos $f : A \to B$ y un ideal $\mathfrak{a}$ de A, denotaremos $\mathfrak{a}B$ al *extendido* de $\mathfrak{a}$ a B, esto es, el menor ideal de B que contiene

a $f(\mathfrak{a})$. Si $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathbb{N}^n$ es una n-upla de enteros no negativos, denotaremos su *peso* por $|\nu| = \nu_1 + \cdots + \nu_n$ y, si no hay lugar a confusión, abreviaremos $X^\nu = X_1^{\nu_1} \cdots X_n^{\nu_n}$.

2. Extensión del cuerpo base

Comenzamos esta sección con un lema preparatorio.

Lema 2.1 *Sean k un cuerpo, $c \in \overline{k}$ y $X_1, \ldots, X_n$ indeterminadas sobre k. Entonces,*

$$[k(X_1, \ldots, X_n, c) : k(X_1, \ldots, X_n)] = [k[c] : k].$$

Demostración. Si $m = [k[c] : k]$ el conjunto $\mathcal{B} = \{c^j : \ 0 \leq j \leq m-1\}$ es base de $k[c]$ como k-espacio vectorial, y procedemos por inducción sobre n. Para $n = 1$ el conjunto $\mathcal{B}$, que es sistema generador de $k(X_1, c) = k(X_1)[c]$ como $k(X_1)$-espacio vectorial, de hecho es base. En caso contrario existirían polinomios $g, f_j \in k[X_1]$, con $0 \leq j \leq m-2$ tales que

$$c^{m-1} = \sum_{j=0}^{m-2} \frac{f_j(X_1)}{g(X_1)} c^j, \ \text{ esto es, } \ g(X_1)c^{m-1} = \sum_{j=0}^{m-2} f_j(X_1)c^j.$$

Igualando los coeficientes de mayor grado de ambos miembros de la última igualdad se deduce que $\mathcal{B}$ no es un conjunto libre de vectores sobre k, lo cual es falso.

Suponemos $n \geq 2$ y probada la igualdad del enunciado para menos de n indeterminadas. Si $L = k(X_1, \ldots, X_{n-1})$, y puesto que $c \in \overline{k} \subset \overline{L}$, se sigue de la hipótesis de inducción que

$$\begin{aligned}[k(X_1, \ldots, X_n, c) : k(X_1, \ldots, X_n)] &= [L(X_n, c) : L(X_n)] = [L[c] : L] \\ &= [k(X_1, \ldots, X_{n-1}, c) : k(X_1, \ldots, X_{n-1})] = [k[c] : k].\end{aligned}$$

□

La siguiente proposición es fundamental para todo lo que sigue.

Proposición 2.2 *Sean $K|_k$ una extensión de cuerpos y $\mathfrak{a}$ un ideal propio del anillo de polinomios $\mathcal{P}_n(k)$. Denotemos $\jmath : \mathcal{P}_n(k) \hookrightarrow \mathcal{P}_n(K)$ la inclusión. Entonces, también el ideal $\mathfrak{a}\mathcal{P}_n(K)$ es propio.*

Demostración. Supongamos por reducción al absurdo, que existen polinomios $f_1, \ldots, f_\ell \in \mathfrak{a}$ y $g_1, \ldots, g_\ell \in \mathcal{P}_n(K)$ tales que

$$1 = \sum_{j=1}^{\ell} f_j g_j. \tag{1}$$

Denotamos C al conjunto formado por los coeficientes de los polinomios $g_1, \ldots, g_\ell$, que es finito, y vamos a demostrar que existen un subconjunto propio C_0 de C y una relación de la forma $1 = \sum_{j=1}^{\ell} f_j h_j$, donde los coeficientes de todos los polinomios h_j pertenecen al menor subcuerpo $k(C_0)$ de K que contiene a k y C_0. Aplicando esto recurrentemente se obtiene una igualdad como (1) donde cada $g_j \in \mathcal{P}_n(k)$, y esto es falso pues $1 \notin \mathfrak{a}$.

Como $\mathfrak{a}$ es un ideal propio, $C \not\subset k$, y estudiamos en primer lugar el caso en que existe un coeficiente $c \in C \setminus k$ algebraico sobre $k_1 = k(C_0)$, donde $C_0 = C \setminus \{c\}$. Cada polinomio $g_j \in \mathcal{P}_n(k_2)$, donde $k_2 = k(C) = k_1[c]$, por lo que se escribe como $g_j = \sum_\nu a_{\nu j} X^\nu$, donde el número de sumandos es finito y cada $a_{\nu j} \in k_2$. Si $m = [k_1[c] : k_1]$ existen coeficientes $b_{\nu j,i} \in k_1$ tales que

$$a_{j\nu} = \sum_{i=0}^{m-1} b_{\nu j i} c^i \ \text{ para cada } \ 1 \le j \le \ell \ \text{ y } \ 0 \le i \le m-1.$$

Al reemplazar estos valores en (1) obtenemos

$$\begin{aligned} 1 = \sum_{j=1}^{\ell} f_j g_j &= \sum_{j=1}^{\ell} f_j \Big(\sum_\nu a_{\nu j} X^\nu \Big) = \sum_{j=1}^{\ell} f_j \Big(\sum_\nu \big(\sum_{i=0}^{m-1} b_{\nu j i} c^i \big) X^\nu \Big) \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \Big(\sum_{j=1}^{\ell} f_j \sum_\nu b_{\nu j i} X^\nu \Big) c^i. \end{aligned}$$

Por el Lema 2.1 los elementos $\{c^j : \ 0 \le j \le m-1\}$ son linealmente independientes sobre el cuerpo de fracciones $k_1(X_1, \ldots, X_n)$ de $\mathcal{P}_n(k_1)$, luego de

la última igualdad se deduce, denotando $h_j = \sum_\nu b_{\nu j0} X^\nu \in \mathcal{P}_n(k_1)$, que

$$1 = \sum_{j=1}^{\ell} f_j \sum_{\nu} b_{\nu j0} X^\nu, \text{ es decir, } 1 = \sum_{j=1}^{\ell} f_j h_j.$$

Si $C \setminus k$ no contiene elementos algebraicos sobre k_1, existe $c \in C \setminus k$ transcendente sobre k_1. Cada polinomio g_j de la igualdad $(*)$ se escribe como cociente $g_j = p_j(c)/p(c)$, donde los polinomios $p_1, \ldots, p_\ell, p \in \mathcal{P}_n(k_1)[T]$ son no nulos. Multiplicando $(*)$ por $p(c)$ se obtiene

$$p(c) = \sum_{j=1}^{\ell} f_j p_j(c)$$

y, como c es transcendente sobre k_1, deducimos que $p(T) = \sum_{j=1}^{\ell} f_j p_j(T)$. En particular son iguales los coeficientes directores, respecto de la variable T, de los dos miembros de esta igualdad, lo que proporciona otra de la forma $1 = \sum_{j=1}^{\ell} f_j h_j$ donde cada $h_j \in \mathcal{P}_n(k_1)$, como pretendíamos. □

Corolario 2.3 *Dados una extensión de cuerpos $K|_k$ y un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{P}_n(k)$ existe un ideal maximal $\mathfrak{n}$ de $\mathcal{P}_n(K)$ tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(k)$.*

Demostración. En virtud de la Proposición 2.2 el ideal $\mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K)$ es propio luego, por el Teorema 1.3 en [3], está contenido en un ideal maximal $\mathfrak{n}$ de $\mathcal{P}_n(K)$. Por tanto,

$$\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K) \cap \mathcal{P}_n(k) \subset \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(k) \subsetneq \mathcal{P}_n(k),$$

y por la maximalidad de $\mathfrak{m}$ se da la igualdad $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(k)$. □

3. Ideales maximales de $\mathcal{P}_n(k)$

Observación y Notación 3.1 (1) Emplearemos el Corolario anterior para describir los ideales maximales de $\mathcal{P}_n(k)$, y para ello introducimos nuevas

notaciones. Sean $a, b \in \overline{k}$. En particular, b es algebraico sobre $k[a]$, y consideramos el polinomio mínimo

$$g(Y) = Y^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i Y^i \in k[a][Y] \tag{2}$$

de b sobre $k(a)$. Si denotamos por $m = [k[a] : k]$ el grado de la extensión de cuerpos $k[a]|_k$, las potencias $\{a^j : \ 0 \leq j \leq m-1\}$ constituyen una base de $k[a]$ como k-espacio vectorial, luego cada $a_i \in k[a]$ se escribe, de modo único, como

$$a_i = \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} a^j \ \text{ para } \ 0 \leq i \leq n-1, \ \text{ donde cada } \ c_{ij} \in k. \tag{3}$$

Al reemplazar a por X en (3) y sustituir en (2) se obtiene el polinomio

$$F_{a,b}(X, Y) = Y^n + \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} c_{ij} X^j Y^i \in k[X, Y].$$

Diremos que $F_{a,b}$ se obtiene a partir del polinomio mínimo de b sobre $k[a]$ *sustituyendo a por X.*

Nótese que $F_{a,b}(a, Y) = g(Y)$ y, en particular, $F_{a,b}(a, b) = g(b) = 0$.

(2) Dados $a_1, \ldots, a_\ell \in \overline{k}$ con $\ell \geq 3$, sea $F_{a_1,a_2} \in k[X_1, X_2]$ el polinomio que se obtiene a partir del polinomio mínimo de a_2 sobre $k[a_1]$ en la variable X_2, sustituyendo a_1 por X_1. Para cada $3 \leq j \leq \ell$, denotamos $F_{a_1,\ldots,a_j}$ el polinomio en $k[X_1, \ldots, X_j]$ que se obtiene a partir del polinomio mínimo de a_j sobre $k[a_1, \ldots, a_{j-1}]$ en la variable X_j, sustituyendo a_i por X_i, para cada $1 \leq i \leq j-1$.

Obsérvese que $F_{a_1,\ldots,a_j}(a_1, \ldots, a_j) = 0$. En efecto, para $j = 2$ lo hemos probado en el apartado (1) y $f(X_j) = F_{a_1,\ldots,a_j}(a_1, \ldots, a_{j-1}, X_j)$ es, para cada $j \geq 3$, el polinomio mínimo de a_j sobre $k[a_1, \ldots, a_{j-1}]$, luego

$$F_{a_1,\ldots,a_j}(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j) = f(a_j) = 0.$$

Antes de probar la Proposición 3.5, que es el resultado principal de este trabajo, necesitamos introducir algunas nociones y resultados auxiliares.

Definición y Proposición 3.2 (1) Dados anillos $A \subset B$ se llama *clausura entera* de A en B al conjunto $C \subset B$ formado por los elementos $x \in B$ enteros sobre A. *La clausura entera de A en B es un subanillo de B.*

(2) *Supongamos que B es un dominio y sean $f, g \in B[T]$ polinomios mónicos tales que $fg \in C[T]$. Entonces, tanto f como g pertenecen a $C[T]$.*

(3) *Supongamos que B es un dominio y que la extensión $B|_A$ es entera. Entonces, también es entera la extensión $B[T]|_{A[T]}$.*

Demostración. (1) Hemos de probar que $x + y, xy \in C$ para cada par de elementos $x, y \in C$. En virtud de [3] Prop. 5.1, $A[x]$ es A-módulo finitamente generado, es decir, existen $\zeta_1, \ldots, \zeta_m \in A[x]$ que lo generan como A-módulo. También $A[y]$ es A-módulo finitamente generado, lo que implica que $A[x][y]$ es un $A[x]$-módulo finitamente generado. Existen por tanto $\xi_1, \ldots, \xi_n \in A[x][y]$ que lo generan como $A[x]$-módulo. Por ello los productos

$$\{\zeta_i \xi_j : \ 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n\}$$

generan $A[x][y] = A[x, y]$ como A-módulo, luego $A[x, y]$ es A-módulo finitamente generado. Esto implica que $A[x + y]$ y $A[xy]$, que son submódulos de $A[x, y]$, son finitamente generados, de donde se deduce, por [3] Prop. 5.1, que $x + y$ y xy son enteros sobre A.

(2) Sean k el cuerpo de fracciones de B y $\overline{k}$ un cierre algebraico de k. Basta demostrar que $f \in C[T]$, es decir, que si c es uno de los coeficientes de f, se cumple que $c \in C$. Como $\overline{k}$ es algebraicamente cerrado existen $u_1, \ldots, u_r \in \overline{k}$ y enteros positivos $m_1, \ldots, m_r$ tales que

$$f(T) = \prod_{i=1}^{r} (T - u_i)^{m_i}.$$

Cada u_i es raíz del polinomio mónico $fg \in C[T]$, luego es entero sobre C, y como c es una suma de productos de $u_1, \ldots, u_r$, se desprende del apartado (1) que c es entero sobre C. Sea $h = T^n + \sum_{j=1}^{n-1} c_j T^j \in C[T]$ un polinomio mónico tal que $h(c) = 0$. Así, c es entero sobre $D = A[c_1, \ldots, c_{n-1}]$, luego $D[c]$ es un D-módulo finitamente generado. Además D es un A-módulo finitamente generado pues cada $A[c_j]$ lo es, así que $D[c]$ es A-módulo finitamente generado. Esto implica que $A[c]$ también lo es, luego $c \in C$.

(3) Sea $f = \sum_{j=0}^{d} b_j T^j \in B[T]$. Cada b_j es entero sobre A, luego lo es sobre $A[T]$. Además cada potencia $T^j \in A[T]$, luego es entero sobre $A[T]$. En el apartado (1) hemos probado que la suma y el producto de elementos enteros es también entero, luego f es entero sobre $A[T]$. □

Corolario 3.3 *Sean $K|_k$ una extensión algebraica de cuerpos y n un entero positivo. Entonces, la extensión de anillos $\mathcal{P}_n(K)|_{\mathcal{P}_n(k)}$ es entera.*

Demostración. Razonamos por inducción sobre n. Si $n = 1$, y puesto que la extensión $K|_k$ es entera, por ser algebraica, se deduce de 3.2 (3) que la extensión $K[T]|_{k[T]}$ es entera. Supongamos el resultado probado para $n-1$ indeterminadas, es decir, la extensión $\mathcal{P}_{n-1}(K)|_{\mathcal{P}_{n-1}(k)}$ es entera. Aplicando de nuevo 3.2 (3), se sigue que $\mathcal{P}_n(K)|_{\mathcal{P}_n(k)} = \mathcal{P}_{n-1}(K)[X_n]|_{\mathcal{P}_{n-1}(k)[X_n]}$ es también una extensión entera. □

Corolario 3.4 *Sean $K|_k$ una extensión algebraica de cuerpos, $\mathfrak{n}$ un ideal primo de $\mathcal{P}_n(K)$ y $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(K)$. Entonces, $\mathfrak{m}$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(k)$ si y sólo si $\mathfrak{n}$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(K)$.*

Demostración. La extensión $\mathcal{P}_n(K)|_{\mathcal{P}_n(k)}$ es entera, por el Corolario 3.3, luego basta aplicar el Corolario 5.8 de [3]. □

Proposición 3.5 *Dado un cuerpo k, un ideal $\mathfrak{m}$ del anillo de polinomios $\mathcal{P}_n(k)$, es maximal si y sólo si existen $a_1, \ldots, a_n \in \overline{k}$ de modo que*

$$\mathfrak{m} = (f_1, F_{a_1,a_2}, \ldots, F_{a_1,\ldots,a_n})\mathcal{P}_n(k), \tag{4}$$

donde $f_1(X_1)$ es el polinomio mínimo de a_1 sobre k y $F_{a_1,\ldots,a_j}$ es, para cada $2 \leq j \leq n$, el polinomio que se obtiene a partir del polinomio mínimo de a_j sobre $k(a_1, \ldots, a_{j-1})$ en la variable X_j, sustituyendo a_i por X_i para todo $1 \leq i \leq j-1$. Además, $\mathcal{P}_n(k)/\mathfrak{m} \approx k[a_1, \ldots, a_n]$.

Demostración. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $\mathcal{P}_n(k)$, y argumentamos por inducción. El resultado es obvio para $n = 1$ ya que $\mathcal{P}_1(k)$ es un dominio euclídeo. Suponemos $n \geq 2$ y probado el resultado para los ideales maximales de $\mathcal{P}_{n-1}(k)$. Por el Corolario 2.3 existe un ideal maximal $\mathfrak{n}$ de $\mathcal{P}_n(\overline{k})$ tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(k)$. Por la forma débil del Teorema de los ceros de Hilbert existe un punto $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \overline{k}^n$ tal que $\mathfrak{n} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)\mathcal{P}_n(\overline{k})$.

El ideal $\mathfrak{n}_1 = (X_1 - a_1, \ldots, X_{n-1} - a_{n-1})\mathcal{P}_{n-1}(\overline{k})$ es maximal, y se deduce del Corolario 3.4 que también $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n}_1 \cap \mathcal{P}_{n-1}(k)$ es maximal. Por la hipótesis de inducción, y puesto que los cuerpos $\mathcal{P}_{n-1}(k)/\mathfrak{m}_1$ y $k_1 = k[a_1, \ldots, a_{n-1}]$ son isomorfos, se tiene

$$(f_1, F_{a_1,a_2}, \ldots, F_{a_1,\ldots,a_{n-1}})\mathcal{P}_{n-1}(k) = \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{n}_1 \cap \mathcal{P}_{n-1}(k) \subset \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(k) = \mathfrak{m}.$$

Sea $g(X_n) \in k_1[X_n]$ el polinomio mínimo de a_n sobre k_1; como $g(a_n) = 0$ se deduce que $g \in \mathfrak{n}$, y escribimos $g = \sum_{i=0}^{m} b_i X_n^i \in k_1[X_n]$, donde cada $b_i = P_i(a_1, \ldots, a_{n-1})$ para cierto polinomio $P_i \in k[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. Entonces,

$$F_{a_1,\ldots,a_n} = \sum_{i=0}^{m} P_i(X_1, \ldots, X_{n-1}) X_n^i \in \mathcal{P}_n(k), \quad \text{luego}$$
$$F_{a_1,\ldots,a_n}(a_1, \ldots, a_n) = g(a_n) = 0,$$

lo que implica que $F_{a_1,\ldots,a_n} \in \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(k) = \mathfrak{m}$. Como además $\mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{m}$ se tiene

$$\mathfrak{a} = (f_1, F_{a_1,a_2}, \ldots, F_{a_1,\ldots,a_n})\mathcal{P}_n(k) \subset \mathfrak{m},$$

y todo se reduce a probar que $\mathfrak{a}$ es el núcleo del homomorfismo sobreyectivo

$$\varphi : \mathcal{P}_n(k) \to k[a_1, \ldots, a_n],\ h(X_1, \ldots, X_n) \mapsto h(a_1, \ldots, a_n).$$

Hecho esto, el Primer Teorema de isomorfía asegura que $\mathcal{P}_n(k)/\mathfrak{a}$ es isomorfo al cuerpo $k[a_1, \ldots, a_n]$, lo que prueba que $\mathfrak{a}$ es un ideal maximal, que coincide con $\mathfrak{m}$ y además $\mathcal{P}_n(k)/\mathfrak{m} \approx k[a_1, \ldots, a_n]$. La inclusión $\mathfrak{a} \subset \ker \varphi$ es evidente. Para el recíproco, sea $h \in \ker \varphi$, y denotemos

$$X = (X_1, \ldots, X_n) \quad \text{y} \quad X' = (X_1, \ldots, X_{n-1}).$$

Desarrollando h en potencias de X_n existen un entero no negativo s y polinomios $h_0, \ldots, h_s \in \mathcal{P}_{n-1}(k)$ tales que

$$h = \sum_{j=0}^{s} h_j(X') X_n^j. \tag{5}$$

Dividimos cada potencia X_n^j entre $F_n = F_{a_1,\ldots,a_n}$ como polinomios en la indeterminada X_n. Existen por tanto $q_j, r_j \in \mathcal{P}_n(k)$ tales que $X_n^j = q_j F_n + r_j$ y $\deg_{X_n} r_j < \deg_{X_n} F_n = \deg(g) = m$. Al sustituir estas igualdades en (5) resulta

$$h = \sum_{j=0}^{s} h_j(X') \big(q_j(X) F_n(X) + r_j(X)\big).$$

A su vez, cada polinomio r_j se escribe como $r_j(X) = \sum_{i=0}^{m-1} p_{ij}(X') X_n^i$ para ciertos polinomios $p_{ij} \in \mathcal{P}_{n-1}(k)$, luego si $p_n = \sum_{j=0}^{s} h_j q_j \in \mathcal{P}_n(k)$, se tiene

$$\begin{aligned} h &= \big(\sum_{j=0}^{s} h_j q_j\big) F_n + \sum_{j=0}^{s} h_j(X') \sum_{i=0}^{m-1} p_{ij}(X') X_n^i \\ &= p_n F_n + \sum_{i=0}^{m-1} \big(\sum_{j=0}^{s} h_j(X') p_{ij}(X')\big) X_n^i. \end{aligned} \tag{6}$$

Evaluamos ambos miembros de esta igualdad en el punto a. Sabemos que $h(a) = F_n(a) = 0$, por lo que

$$\sum_{i=0}^{m-1} \big(\sum_{j=0}^{s} h_j(a') p_{ij}(a')\big) a_n^i = 0, \quad \text{donde} \quad a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}).$$

Como las potencias $\{a_n^j : 0 \leq j \leq m-1\}$ son linealmente independientes sobre el cuerpo k_1 se deduce que para cada $1 \leq i \leq m-1$,

$$\sum_{j=0}^{s} h_j(a') p_{ij}(a') = 0, \quad \text{es decir,} \quad \sum_{j=0}^{s} h_j(X') p_{ij}(X') \in \mathfrak{n}_1 \cap \mathcal{P}_{n-1}(k) = \mathfrak{m}_1,$$

lo que sustituido en (6) implica que $h \in F_n \mathcal{P}_n(k) + \mathfrak{m}_1 \subset \mathfrak{a}$.

El recíproco resulta de lo que acabamos de probar, pues de hecho hemos demostrado que si un ideal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{P}_n(k)$ admite la presentación de la igualdad (4) el cociente $\mathcal{P}_n(k)/\mathfrak{m}$ es isomorfo al cuerpo $k[a_1,\ldots,a_n]$, luego en particular el ideal $\mathfrak{m}$ es maximal. □

Ejemplos 3.6 (1) Sean $k=\mathbb{Q}$, $a=\sqrt{2}$ y $b=\sqrt[4]{2}$. Por el Criterio de Eisenstein, [4] pg. 144, los polinomios mínimos de a y b sobre $\mathbb{Q}$ son, respectivamente, $f(X)=X^2-2$ y $h(Y)=Y^4-2$, mientras que el polinomio mínimo de b sobre $\mathbb{Q}[a]$ es $g(Y)=Y^2-a$. Para comprobar esto último es suficiente observar que $g(b)=0$ y que $b\notin\mathbb{Q}[a]$, pues en caso contrario $\mathbb{Q}\subset\mathbb{Q}[b]\subset\mathbb{Q}[a]$, luego,

$$4=\deg(h)=[\mathbb{Q}[b]:\mathbb{Q}]\leq[\mathbb{Q}[a]:\mathbb{Q}]=\deg(f)=2,$$

que es falso. Con las notaciones de 3.1, el polinomio $F_{a,b}$ que se obtiene a partir de g sustituyendo a por X es $F_{a,b}=Y^2-X$, y por tanto el ideal $\mathfrak{m}=(X^2-2,Y^2-X)\mathbb{Q}[X,Y]$ es maximal.

Nótese que, sin embargo, el ideal $\mathfrak{b}=(f,h)k[X,Y]$ generado por los polinomios mínimos de a y b sobre $\mathbb{Q}$ ni siquiera es primo. En efecto, cada polinomio perteneciente a $\mathfrak{b}$ se anula en los puntos $(\varepsilon a,b)\in\mathbb{R}^2$, con $\varepsilon=\pm1$, ya que $f(\varepsilon a)=h(b)=0$. Por ello, los polinomios $h_\varepsilon=Y^2+\varepsilon X\notin\mathfrak{b}$, ya que $h_\varepsilon(\varepsilon a,b)=b^2+a=2a\neq0$, y sin embargo

$$h_1\cdot h_{-1}=(Y^2+X)(Y^2-X)=Y^4-X^2=h-f\in\mathfrak{b}.$$

(2) Sean k un cuerpo, $a_1\in\overline{k}$ y $h_2,\ldots,h_n\in k[X_1]$. Para cada $2\leq j\leq n$ denotemos $a_j=h_j(a_1)\in k[a_1]$. Para cada $j\geq2$ el polinomio mínimo de a_j sobre $k[a_1]$ es $g_j(X_j)=X_j-a_j=X_j-h_j(a_1)$, y coincide con el polinomio mínimo de a_j sobre $k[a_1,\ldots,a_{j-1}]$. El polinomio que se obtiene a partir de g_j sustituyendo a_i por X_i para $1\leq i\leq j-1$ es $F_j(X_1,X_j)=X_j-h_j(X_1)$. En consecuencia, se deduce de la Proposición 3.5 que si $f_1(X_1)\in k[X_1]$ es el polinomio mínimo de a_1 sobre k, el ideal

$$\mathfrak{m}=(f_1(X_1),X_2-h_2(X_1),\ldots,X_n-h_n(X_1))k[X_1,\ldots,X_n]$$

es maximal.

Corolario 3.7 *Sean k un cuerpo y $0 < m < n$ enteros positivos. Entonces, para cada ideal maximal $\mathfrak{n}$ de $\mathcal{P}_n(k)$ la intersección $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_m(k)$ es un ideal maximal de $\mathcal{P}_m(k)$.*

Demostración. Razonando por inducción podemos suponer $m = n - 1$. Con las notaciones de 3.1 y por la Proposición 3.5, existen $a_1, \ldots, a_n \in \overline{k}$, y polinomios $f_1 \in \mathcal{P}_1(k)$ y $F_j = F_{a_1,\ldots,a_j} \in \mathcal{P}_j(k)$ tales que $\mathfrak{n} = (f_1, F_2, \ldots, F_n)\mathcal{P}_n(k)$. Como $f_1, F_2, \ldots, F_{n-1} \in \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_{n-1}(k) = \mathfrak{m}$ resulta que

$$(f_1, F_2, \ldots, F_{n-1})\mathcal{P}_{n-1}(k) \subset \mathfrak{m},$$

y como el miembro de la izquierda es, por la Proposición 3.5, un ideal maximal de $\mathcal{P}_{n-1}(k)$, coincide con $\mathfrak{m}$, que es así ideal maximal de $\mathcal{P}_{n-1}(k)$. □

Ejemplo 3.8 Sea $\mathbb{R}$ el cuerpo de los números reales. Un ideal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ es maximal si y sólo si $\mathfrak{m} = (f_1, F_2, \ldots, F_n)\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ para ciertos polinomios $f_1, F_2, \ldots, F_n \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ que cumplen, tras reordenar las variables si es preciso, una de las siguientes condiciones:

(i) Tanto $f_1 \in \mathbb{R}[X_1]$ como cada $F_j \in \mathbb{R}[X_j]$ tiene grado 1, o bien,

(ii) El polinomio $f_1 \in \mathbb{R}[X_1]$ tiene grado 2 y es mónico e irreducible en $\mathbb{R}[X_1]$ y para cada $2 \leq j \leq n$ el polinomio $F_j \in \mathbb{R}[X_1, X_j]$ es de la forma $F_j = X_j - \lambda_j X_1 - \mu_j$ con $\lambda_j, \mu_j \in \mathbb{R}$.

En efecto, supongamos primero que tanto f_1 como cada $F_j \in \mathbb{R}[X_j]$ tiene grado 1. Podemos suponer que $f_1 = X_1 - a_1$ y cada $F_j = X_j - a_j \in \mathbb{R}[X_j]$, luego $\mathfrak{m}$ es el núcleo del epimorfismo

$$\varphi : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(a_1, \ldots, a_n),$$

por lo que $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})/\mathfrak{m} \approx \mathbb{R}$, así que el ideal $\mathfrak{m}$ es maximal. Supongamos ahora que $\mathfrak{m}$ es un ideal maximal de $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ que no está en las condiciones anteriores. Tras reordenar si es preciso, se desprende de la Proposición 3.5 que existe $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, con $a_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, tal que $f_1(X_1) \in \mathfrak{m}$ es el polinomio mínimo de a_1 sobre $\mathbb{R}$. Por tanto $f_1 \in \mathbb{R}[X_1]$ tiene grado 2 y es mónico e irreducible en $\mathbb{R}[X_1]$. Además,

$$\mathfrak{m} = (f_1, F_2, \ldots, F_n)\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$$

donde para cada $2 \leq j \leq n$, F_j es el polinomio que se obtiene al sustituir a_i por X_i, con $1 \leq i \leq j-1$, en el polinomio mínimo $g_j(X_j)$ de a_j sobre $\mathbb{R}[a_1, \ldots, a_{j-1}] = \mathbb{C}$. Si denotamos $a_1 = \lambda + \mu i$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, con $\mu \neq 0$ e $i = \sqrt{-1}$ y $a_j = \alpha_j + \beta_j i$, el polinomio mínimo de a_j sobre $\mathbb{C}$ es

$$g_j(X_j) = X_j - a_j = X_j - \alpha_j - \beta_j(a_1 - \lambda)/\mu,$$

y el resultado de sustituir a_1 por X_1 en este polinomio es, si $\lambda_j = \beta_j/\mu$ y $\mu_j = \alpha_j - \beta_j\lambda/\mu$,

$$F_j(X_1, X_j) = X_j - \alpha_j - \beta_j(X_1 - \lambda)/\mu = X_j - \lambda_j X_1 - \mu_j.$$

Nuestro último objetivo en esta sección es caracterizar, dada una extensión de cuerpos $K|_k$, los ideales maximales de $\mathcal{P}_n(K)$ cuya intersección con $\mathcal{P}_n(k)$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(k)$. Antes necesitamos un resultado auxiliar.

Lema 3.9 *Sean k un cuerpo, $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $\mathcal{P}_n(k)$ y $K = k(T)$ el cuerpo de funciones racionales en una variable sobre k. Entonces $\mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K)$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(K)$.*

Demostración. Sean $F = \mathcal{P}_n(k)/\mathfrak{m}$ y $\varphi : \mathcal{P}_n(K) \to F(T)$ el único homomorfismo de anillos cuya restricción a k es la identidad y cumple $\varphi(T) = T$ y $\varphi(X_i) = X_i + \mathfrak{m}$ para cada $1 \leq i \leq n$. Es obvio que φ es sobreyectivo y, como $F(T)$ es un cuerpo, el núcleo de φ es un ideal maximal de $\mathcal{P}_n(K)$, pues $\mathcal{P}_n(K)/\ker\varphi$ es isomorfo a $F(T)$. Es por tanto suficiente demostrar que $\ker\varphi = \mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K)$. Se tiene un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_n(k) & \xhookrightarrow{\jmath_1} & \mathcal{P}_n(K) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ F & \xhookrightarrow{\jmath_2} & F(T) \end{array}$$

donde $\pi : \mathcal{P}_n(k) \to F, f \mapsto f + \mathfrak{m}$. Por tanto,

$$\jmath_1(\mathfrak{m}) = \jmath_1(\ker\pi) = \jmath_1(\ker(\jmath_2 \circ \pi)) = \jmath_1(\ker(\varphi \circ \jmath_1)) \subset \ker\varphi,$$

por lo que $\ker\varphi$ contiene al menor ideal $\mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K)$ de $\mathcal{P}_n(K)$ que contiene a la imagen $\jmath_1(\mathfrak{m})$.

Recíprocamente, sea $G = \sum_\nu a_\nu(T)X^\nu \in \ker\varphi$, donde cada coeficiente $a_\nu(T) = g_\nu(T)/g(T)$ con $g_\nu, h \in k[T]$ y la suma es finita. En consecuencia, $g(T)G = \sum_\nu g_\nu(T)X^\nu \in \ker\varphi$, y escribiendo

$$g_\nu(T) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_{\nu j}T^j, \text{ para ciertos } \alpha_{\nu j} \in k,$$

se deduce que

$$0 = \varphi(g(T)G) = \sum_\nu \varphi(g_\nu)(X+\mathfrak{m})^\nu = \sum_{j=0}^{d}\Big(\sum_\nu \alpha_{\nu j}(X+\mathfrak{m})^\nu\Big)T^j,$$

luego para cada $0 \le j \le d$ se tiene $\sum_\nu \alpha_{\nu j}(X+\mathfrak{m})^\nu = 0$. Esto significa que para cada $0 \le j \le d$ el polinomio $h_j = \sum_\nu \alpha_{\nu j}X^\nu \in \mathfrak{m}$, y en consecuencia,

$$G = \sum_{j=0}^{d} h_j(X)T^j/g(T) \in \mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K),$$

como queríamos probar. □

Proposición 3.10 *Sean $K|_k$ una extensión de cuerpos tal que k es algebraicamente cerrado en K y $\mathfrak{n}$ un ideal maximal de $\mathcal{P}_n(K)$. Entonces, existe una subextensión de cuerpos $K_1|_k \subset K|_k$ transcendente pura y finitamente generada, de modo que la extensión $K|_{K_1}$ es finita, tal que $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\cap\mathcal{P}_n(k)$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(k)$ si y sólo si existen $f_1,\dots,f_m \in \mathcal{P}_n(k)$ tales que*

$$\mathfrak{n}\cap\mathcal{P}_n(K_1) = (f_1,\dots,f_m)\mathcal{P}_n(K_1).$$

Además, en tal caso $\mathfrak{m} = (f_1,\dots,f_m)\mathcal{P}_n(k)$.

Demostración. Como el anillo $\mathcal{P}_n(K)$ es noetheriano, $\mathfrak{n} = (g_1,\dots,g_s)\mathcal{P}_n(K)$ para ciertos polinomios $g_1,\dots,g_s \in \mathcal{P}_n(K)$, y denotamos $\mathcal{C} \subset K$ el conjunto finito formado por los coeficientes de los polinomios $g_1,\dots,g_s$ que son

transcendentes sobre k. Como la extensión $k(\mathcal{C})|_k$ es finitamente generada, se deduce del Teorema de Steinitz, [4] pg. 272, que existen elementos $t_1, \ldots, t_r$ algebraicamente independientes sobre k (eventualmente $r = 0$, en cuyo caso basta tomar $K_1 = k$), tales que si $K_1 = k(t_1, \ldots, t_r)$ la extensión $K|_{K_1}$ es finita. Esta es la extensión buscada. Ya hemos señalado que el caso en que $\mathcal{C} = \varnothing$ es trivial, luego suponemos que $\mathcal{C}$ no es vacío. Más aún, argumentando por recurrencia sobre r podemos suponer que $r = 1$, esto es, $K_1 = k(t_1)$.

Si $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(k)$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(k)$, el ideal $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(K_1)$ cumple que $\mathfrak{n}_1 \cap \mathcal{P}_n(k) = \mathfrak{m}$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(k)$, y se deduce del Lema 3.9 que su extensión $\mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K_1)$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(K_1)$. Como $\mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K_1) \subset \mathfrak{n}_1 \subsetneq \mathcal{P}_n(K_1)$ resulta que $\mathfrak{n}_1$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(K_1)$, y de hecho $\mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K_1) = \mathfrak{n}_1$.

Por ser $\mathcal{P}_n(k)$ noetheriano, $\mathfrak{m} = (f_1, \ldots, f_m)\mathcal{P}_n(k)$ para ciertos polinomios $f_1, \ldots, f_m \in \mathfrak{m}$, luego

$$\mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(K_1) = \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{m}\mathcal{P}_n(K_1) = (f_1, \ldots, f_m)\mathcal{P}_n(K_1),$$

como queríamos demostrar.

Supongamos, recíprocamente, que $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(K_1) = (f_1, \ldots, f_m)\mathcal{P}_n(K_1)$ para ciertos polinomios $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{P}_n(k)$. Sean $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)\mathcal{P}_n(k)$ y $A = \mathcal{P}_n(k)/\mathfrak{a}$. Como la extensión $K|_{K_1}$ es algebraica, por ser finita, y $\mathfrak{n}$ es un ideal maximal de $\mathcal{P}_n(K)$, se deduce del Corolario 3.4 que $\mathfrak{n}_1$ es ideal maximal de $\mathcal{P}_n(K_1)$, y por tanto

$$A(t_1) = \mathcal{P}_n(K_1)/\mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(K_1) = \mathcal{P}_n(K_1)/\mathfrak{n}_1 \text{ es un cuerpo,}$$

por lo que también A lo es. Esto significa que $\mathfrak{a}$ es un ideal maximal de $\mathcal{P}_n(k)$. Ahora bien, cada $f_j \in \mathfrak{n} \cap \mathcal{P}_n(k) = \mathfrak{m}$, luego $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$, y la maximalidad de $\mathfrak{a}$ implica que $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$. □

Ejemplo 3.11 Sea e la base de los logaritmos neperianos. Por el Teorema de Hermite, véase [4], pg. 300, e es transcendente sobre el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales. Sean $K = \mathbb{Q}(e)$ y $\mathfrak{n} = (X, Y - e)A$, que es un ideal maximal de $A = K[X, Y]$. Nótese que $\mathbb{Q}$ es algebraicamente cerrado en K y que el conjunto $\mathcal{C}$ formado por los coeficientes de los generadores de $\mathfrak{n}$ transcendentes

sobre $\mathbb{Q}$ consta, únicamente, del elemento $\{e\}$. Se deduce de la demostración de la Proposición 3.10 que $\mathfrak{m} = \mathfrak{n} \cap \mathbb{Q}[X, Y]$ no es un ideal maximal de $\mathbb{Q}[X, Y]$ pues, en caso contrario, $\mathfrak{n}$ estaría generado por polinomios con coeficientes en $\mathbb{Q}$. Pero los polinomios de $\mathfrak{n}$ se anulan al evaluarlos en el punto $p = (0, e)$, y los únicos polinomios de $\mathbb{Q}[X, Y]$ que se anulan en p son los múltiplos de X, así que $\mathfrak{n} = (X)$, y esto es falso.

4. Ideales maximales en anillos de polinomios con coeficientes en un dominio de ideales principales

A lo largo de esta sección fijamos un entero positivo n y un dominio de ideales principales A que contiene infinitos elementos irreducibles no asociados dos a dos. Denotaremos $\mathcal{P}_n(A) = A[X_1, \ldots, X_n]$ el anillo de polinomios en n indeterminadas con coeficientes en A y, para cada elemento irreducible $p \in A$, denotaremos $\kappa_p = A/pA$ el cuerpo cociente.

Lema 4.1 *Todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{P}_n(A)$ cumple que $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap A \neq \{0\}$.*

Demostración. Como A es noetheriano se deduce del Teorema 4 en [2] que el cociente $A/\mathfrak{p}$ es un anillo semilocal, esto es, con un número finito de ideales primos. Por hipótesis A tiene infinitos elementos irreducibles no asociados y, como A es un dominio de ideales principales, cada elemento irreducible de A genera un ideal primo. Por tanto A no es semilocal, luego $\mathfrak{p} \neq (0)$. □

Observaciones 4.2 (1) El anillo $A = \mathbb{Z}$ de los números enteros es un dominio de ideales principales con infinitos elementos irreducibles no asociados dos a dos, los números primos, por lo que el Lema anterior es válido para $A = \mathbb{Z}$. Por otro lado, los cuerpos son dominios de ideales principales que no contienen infinitos elementos irreducibles no asociados, pero no son los únicos. Por ejemplo, los únicos ideales propios del anillo de series formales $k[[T]]$ en una indeterminada T con coeficientes en un cuerpo k son las potencias (T^j) de su único ideal primo no nulo $\mathfrak{m} = (T)$, pues las series con término independiente

no nulo son unidades. Así, $k[[T]]$ es un dominio de ideales principales cuyo único elemento irreducible, salvo producto por unidades, es T.

(2) De hecho la conclusión del Lema 4.1 no se cumple para $A = k[[T]]$. En efecto el ideal $\mathfrak{m} = (f)$ donde $f = TX - 1 \in A[X]$ es maximal en $A[X]$, pues el cociente $A[X]/\mathfrak{m}$ es isomorfo al cuerpo de series de Laurent $k((T))$, esto es, el cuerpo de fracciones de A. Sin embargo, $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap A = (0)$.

Notación 4.3 Dados $a, p \in A$ denotamos $[a]_p \in \kappa_p$ la clase de $a \bmod p$ y, si no hay riesgo de confusión, denotamos $\varphi_p : \mathcal{P}_\ell(A) \to \mathcal{P}_\ell(\kappa_p)$, para cada $1 \leq \ell \leq n$, el único homomorfismo de anillos que cumple $\varphi_p(a) = [a]_p$ para cada $a \in A$ y $\varphi_p(X_j) = X_j$ para cada $1 \leq j \leq \ell$. Nótese que φ_p es sobreyectivo.

Proposición 4.4 *Un ideal $\mathfrak{m}$ de $\mathcal{P}_n(A)$ es maximal si y sólo si existen un elemento irreducible $p \in A$, elementos $a_1, \ldots, a_n \in \overline{\kappa_p}$ y $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{P}_n(A)$ tales que $\mathfrak{m} = (p, f_1, \ldots, f_n)\mathcal{P}_n(A)$, cada $f_j \in A[X_1, \ldots, X_j]$, $\varphi_p(f_1) \in \kappa_p[X_1]$ es irreducible y para cada $2 \leq j \leq n$ el polinomio*

$$\overline{f}_j(X_j) = \varphi_p(f_j)(a_1, \ldots, a_{j-1}, X_j)$$

es irreducible en el anillo $\kappa_p[a_1, \ldots, a_{j-1}][X_j]$ y $\overline{f_j}(a_j) = 0$. Además, en estas condiciones, $\mathcal{P}_n(A)/\mathfrak{m} \approx \kappa_p[a_1, \ldots, a_n]$.

Demostración. Supongamos que $\mathfrak{m}$ es maximal. Por el Lema 4.1 el ideal primo $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cap A$ no es nulo. Como A es un dominio de ideales principales existe un elemento irreducible $p \in A$ tal que $\mathfrak{p} = pA$. Como el homomorfismo $\varphi_p : \mathcal{P}_n(A) \to \mathcal{P}_n(\kappa_p)$ es sobreyectivo, la imagen $\mathfrak{n} = \varphi_p(\mathfrak{m})$ es un ideal de $\mathcal{P}_n(\kappa_p)$ y la aplicación inducida

$$\widehat{\varphi_p} : \mathcal{P}_n(A)/\mathfrak{m} \to \mathcal{P}_n(\kappa_p)/\mathfrak{n},\ f + \mathfrak{m} \mapsto \varphi_p(f) + \mathfrak{n}$$

es isomorfismo, luego $\mathfrak{n}$ es un ideal maximal de $\mathcal{P}_n(\kappa_p)$. Se sigue de la Proposición 3.5 que existen elementos $a_1, \ldots, a_n$ algebraicos sobre κ_p tales que

$$\mathfrak{n} = (g_1, G_{a_1,a_2}, \ldots, G_{a_1,\ldots,a_n})\mathcal{P}_n(\kappa_p), \tag{7}$$

donde $g_1(X_1)$ es el polinomio mínimo de a_1 sobre κ_p y $G_{a_1,\ldots,a_j}$ es, para cada $2 \leq j \leq n$, el polinomio que se obtiene a partir del polinomio mínimo de a_j sobre $\kappa_p[a_1,\ldots,a_{j-1}]$ en la variable X_j, sustituyendo a_i por X_i para todo $1 \leq i \leq j-1$. Además, se cumple que

$$\mathcal{P}_n(A)/\mathfrak{m} \approx \mathcal{P}_n(\kappa_p)/\mathfrak{n} \approx \kappa_p[a_1,\ldots,a_n].$$

Como φ_p es sobreyectivo existe $f_1(X_1) \in A[X_1]$ tal que $\varphi_p(f_1) = g_1$, que es irreducible en $\kappa_p[X_1]$. Para cada índice $2 \leq j \leq n$ existe, por la sobreyectividad de φ_p, un polinomio $f_j \in A[X_1,\ldots,X_j]$ tal que $\varphi_p(f_j) = G_{a_1,\ldots,a_j}$. Puesto que $G_{a_1,\ldots,a_j}(a_1,\ldots,a_{j-1},X_j)$ es, para cada $2 \leq j \leq n$, el polinomio mínimo de a_j sobre $\kappa_p[a_1,\ldots,a_{j-1}]$ el polinomio $\overline{f_j}$ se anula en a_j y es irreducible en el anillo de polinomios $\kappa_p[a_1,\ldots,a_{j-1}][X_j]$. Además, se deduce de la igualdad (7) la que pretendemos demostrar:

$$\mathfrak{m} = (p, f_1,\ldots,f_n)\mathcal{P}_n(A).$$

El recíproco es evidente pues, con las notaciones anteriores y por la Proposición 3.5, el ideal $\mathfrak{n}$ de la igualdad (7) es maximal, luego también es maximal, por ser $\widehat{\varphi_p}$ isomorfismo, $\mathfrak{m} = (p, f_1,\ldots,f_n)\mathcal{P}_n(A)$. □

Ejemplos 4.5 (1) Se deduce directamente de la Proposición anterior que el ideal $\mathfrak{m} = (3, X, Y^2+1)\mathbb{Z}[X,Y]$ es maximal porque X es un polinomio irreducible en $\mathbb{Z}_3[X]$ e Y^2+1 lo es en $\mathbb{Z}_3[Y]$.

(2) Sin embargo el ideal $\mathfrak{a} = (2, X, Y^2+1)\mathbb{Z}[X,Y]$ ni siquiera es primo. Nótese que la presentación dada no cumple las condiciones de la Proposición 4.4, porque $Y^2+1 = (Y+1)^2 \in \mathbb{Z}_2[Y]$ es reducible. De hecho

$$(Y-1)(Y+1) = Y^2-1 = (Y^2+1)-2 \in \mathfrak{a}$$

pero ni $Y-1$ ni $Y+1$ pertenecen al ideal $\mathfrak{a}$.

(3) Tampoco está en las condiciones de la Proposición 4.4 la presentación del ideal $\mathfrak{b} = (3, X^2+1, Y^2+1)\mathbb{Z}[X,Y]$, pues el polinomio $Y^2+1 = (Y+i)(Y-i)$ es reducible en $\mathbb{Z}_3[i][Y]$, donde i es una raíz cuadrada de -1, que es raíz de X^2+1. De hecho el ideal $\mathfrak{b}$ no es primo porque

$$(X-Y)(X+Y) = X^2-Y^2 = (X^2+1)-(Y^2+1) \in \mathfrak{b},$$

pero ni $X - Y$ ni $X + Y$ pertenecen al ideal $\mathfrak{a}$.

Referencias

[1] E. Arrondo. *Another elementary proof of the Nullstellensatz,* American Mathematical Monthly, 113 (2) (2006), 169-171.

[2] E. Artin and J. Tate. *A note on finite ring extensions,* J. Math. Soc. Japan 3 (1951), 74-77.

[3] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald. *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley (1969).

[4] J.M. Gamboa, J.M. Ruiz. *Anillos y cuerpos conmutativos.* Editorial de la UNED, tercera edición. (2002).

Sobre la generación y resolución automática de ejercicios con medios tecnológicos y la educación matemática

Angélica Martínez Zarzuelo[a]
Eugenio Roanes Lozano[b]

[a] Dpto. de Evaluación y Análisis de Datos
Instituto de Evaluación. Ministerio de Educación
angelica.martinez@educacion.es

[b] Dpto. de Álgebra, Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
eroanes@mat.ucm.es

Abstract

Regarding software, the first computer algebra systems are dated from the late 60s, and were spread (at an academic level) at the end of the '90s. These are, possibly, the most powerful software pieces for maths education. Regarding hardware, nowadays it is normal in Spain to have a computer at home, plus specific purpose electronic devices such as video game consoles, smartphones, e-readers, tablet-PCs… Meanwhile, to have a computer connected to a beamer and even an electronic blackboard in the classroom is becoming common. But, surprisingly, maths teaching is still based almost exclusively on printed books and the blackboard/whyteboard. Therefore, little advantage is taken from the available technological media. We shall try to give a survey of the possibilities of technological media in math education, focusing on the automatic generation and resolution of examples.

1 Introducción

La resolución de problemas es una parte esencial de la educación matemática en cualquiera de sus etapas, ya que permite experimentar, generalmente, la potencia y utilidad de las matemáticas aprendidas en el mundo que nos rodea.

Uno de los pasos previos a la resolución de problemas en los que se apliquen ciertos contenidos matemáticos, es la familiarización con los mismos. Para tal consecución, la realización en primer lugar de ejercicios por parte del alumnado constituye una labor imprescindible.

La práctica continuada es, sin duda, uno de los hechos que comporta mayor utilidad al respecto. Por esta razón, la disposición de un gran número de ejercicios con los que ensayar juega un papel importante. Los libros de ejercicios y muy en particular los de ejercicios resueltos son un material didáctico aconsejable para los alumnos.

Aunque en la mayoría de los libros de texto de matemáticas de Educación Secundaria se propone la resolución de un número adecuado de ejercicios, no tan adecuado es el número de ejercicios que se muestran resueltos indicando cada uno de los pasos a seguir.

La compleción de tales ejercicios con los proporcionados por el profesor, puede resultar no ser plena, por lo que la posibilidad de disponer de un número ya no sólo elevado, sino inmenso[1] de ejercicios resueltos, puede ser una opción didáctica que merezca la pena.

Es más, si un material didáctico con las características anteriores ofreciese al alumno la posibilidad de obtener la solución de ejercicios con datos que él mismo proporcionase, la utilidad de éste sería aún mayor.

Por todo lo anterior, consideramos apropiado para abordar la resolución de ejercicios y con ello la resolución de problemas, la disponibilidad de un material didáctico que combine los cuatro aspectos siguientes respecto a enunciados y soluciones de los ejercicios.

---

[1] Es tentador usar aquí la palabra “infinito”. No obstante, desde un punto de vista formal, dado el carácter digital del ordenador y la finitud de su memoria, es clara la finitud, desde un punto de vista matemático, del conjunto de las posibles combinaciones de dicha memoria. Por ello hemos decidido utilizar aquí el término inmenso.

ENUNCIADO DEL EJERCICIO	SOLUCIÓN DEL EJERCICIO
Datos introducidos por el alumno	Directa
Datos introducidos por el alumno	Paso a paso
Datos generados por el sistema (aleatorios)	Directa
Datos generados por el sistema (aleatorios)	Paso a paso

Tabla 1: *Combinaciones didácticas*

Respecto al tipo de solución del ejercicio (directa o paso a paso) existen dos alternativas principales:

- que el alumno domine la materia y una simple comprobación del resultado final le sea suficiente,
- que el alumno se encuentre en la primera fase del aprendizaje y necesite una guía detallada de la resolución de ciertos ejercicios.

En cualquier caso, puesto que la segunda alternativa incluye a la primera, la aportación de la resolución paso a paso de ejercicios, tanto con datos proporcionados por el alumno como por el sistema, podría ser entonces una estrategia metodológica de gran relevancia para el alumnado.

2 Sobre educación matemática y el libro digital

2.1 Libro impreso versus libro digital

La función adjetiva que desempeña “digital” respecto a “libro” varía con frecuencia por la continua innovación del objeto a definir.

Es por esta razón por la que en la actualidad existen muchas y muy variadas definiciones de libro digital [1–3], también conocido como libro electrónico o ebook.

En numerosas definiciones y escritos referentes a libros digitales se hace alusión al libro impreso tradicional. Se habla de un nuevo tipo de libro y su comparación con lo existente es inevitable. Con ello las ventajas e inconvenientes junto con las semejanzas y diferencias entre un libro impreso y un libro digital constituyen el núcleo de muchos debates.

En cuanto a las diferencias, la principal entre uno y otro, es el soporte en el que éstos se presentan. Ahora bien la línea divisoria entre ambos conceptos debe sobrepasar esta cualidad. Si eso no fuese así no se podría hacer referencia a dos conceptos realmente diferentes, ya que algo tan sencillo como la impresión de un libro digital en papel o el escaneado de un libro impreso convertirían ambos conceptos en uno solo.

2.2 Libros digitales de editoriales educativas en el ámbito matemático

Esa línea divisoria entre ambos tipos de libro, depende además, y debe depender del propio contenido del libro. Lógicamente, las posibilidades que ofrece un contenido de lectura divulgativa son muy diferentes a las que ofrece un contenido de aprendizaje curricular.

Centrándonos en el segundo tipo de contenido, vamos a analizar algunas de las características de interés que puede ofrecer un libro digital destinado a la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas.

Pensemos en un libro de texto impreso de contenido matemático. Imaginemos ahora ese mismo libro de texto visto desde la pantalla de un dispositivo electrónico. ¿Qué ventajas observamos respecto al libro impreso?

Ventajas hacia el aprendizaje ninguna, ya que la única diferencia es que el libro ahora puede verse en pantalla en vez de tenerlo físicamente en papel; es cuestión únicamente de un cambio en el tipo de formato. El dispositivo electrónico adopta así la única función de un simple "pasa páginas". ¿Se trata entonces lo anterior de un libro digital?

Algunas editoriales actuales lo promocionan como tal. Sin embargo, la introducción de características que hagan que el libro adquiera funciones añadidas a las de un libro de texto impreso es fundamental.

Todo el contenido de un libro de texto impreso es estático, no depende de quién lo visualice. Sin embargo, en un libro de texto digital, para que realmente sea tratado como tal, debe existir una interacción, una relación biunívoca entre el mismo y su lector o usuario, en nuestro caso el alumno.

Ahora bien, existen diferentes grados de interacción y son éstos también los que definen la amplitud de las discrepancias entre un libro de texto impreso y un libro de texto digital en este ámbito. Aquí es donde realmente se comienzan a marcar las diferencias y a definir la utilidad del tipo de libro digital creado.

Algunas editoriales de libros de texto [4,5] añaden a la simple digitalización de un libro impreso ciertas posibilidades de carácter interactivo tales como:

- zoom para la ampliación de distintas zonas del texto,

- visualización del libro a página sencilla o a página doble,
- paginación y acceso directo a páginas,
- herramientas de subrayado, remarcado, incorporación de notas, contenidos,…
- hipertextos, accesos a recursos multimedia,…
- actividades para resolver en línea.

De todas las anteriores, a nuestro entender, para la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas, la característica más importante y similar a nuestro propósito la introduce la posibilidad de que el alumno pueda resolver actividades en línea.

Esto es, que el libro de texto digital disponga de ciertos contenidos dinámicos. Es decir, contenidos que sean solicitados por el lector y que se generen y resuelvan automáticamente en el momento en que éste los solicite.

2.3 Contenidos dinámicos. Resolución de actividades en línea

El estado de la cuestión sobre contenidos dinámicos en libros de texto digitales para la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas es el siguiente:

- en gran parte de los casos cada una de las unidades didácticas que se ofrece incorpora además de sus actividades estáticas, la posibilidad de resolver en línea un número muy limitado de ejercicios,
- en ocasiones, existe la posibilidad de comprobación de los resultados de tales actividades, pero en la mayoría de los casos el dispositivo indica la respuesta correcta sin explicación ninguna,
- en escasas situaciones se muestra una solución paso a paso de los ejercicios y, cuando esto ocurre, está disponible sólo para determinados conceptos y en un número muy reducido de ejercicios.

Observamos entonces que el grado de interacción que se ofrece entre el libro y el alumno no es demasiado alto en este sentido. Parece necesario entonces incorporar nuevas características que hagan del "libro electrónico" un concepto realmente diferente al ya existente.

Nuestra propuesta metodológica de incorporar generación y resolución automática de problemas no sólo permite una mayor interactividad, sino que ofrece una notable particularidad al aspecto digital. El incorporar la posibilidad de ofre-

cer una batería inmensa de ejercicios permitiría trabajar con un libro de ejercicios de extensión casi ilimitada, hecho materialmente imposible para un libro de texto impreso.

Con el fin de aproximarnos a lo que sería una estrategia metodológica óptima, se analizan algunas de las posibilidades que ofrece el software educativo más relevante en el ámbito matemático hoy en día.

Para ello se realiza una panorámica de lo que cada uno de los sistemas a tratar ofrece en bruto, es decir, sin necesidad de que el usuario programe nada aunque el sistema lo permita.

3 Parámetros del estudio

Entre los parámetros de estudio se encuentran:

Interfaz de usuario: de entre sus características se analizan las siguientes:

- *input*: referido al introductor de datos (usuario o sistema) y a la herramienta y formato (unidimensional o bidimensional) con que éstos se introducen,
- *output*: referente a la región de la interfaz donde se muestran los resultados, y al tipo de formato de las expresiones de salida.

Contenidos matemáticos: sobre el nivel de matemáticas con el que el sistema es apto para trabajar.

Aleatoriedad: relativo a cualquier aspecto referente a la aleatoriedad de objetos matemáticos aportados por el sistema.

Paso a paso: posibilidad de resolución paso a paso de cuestiones matemáticas.

Programación de nuevos recursos educativos: relacionado con las posibilidades de programación de algoritmos pertinentes para el aprendizaje de las matemáticas.

4 Los distintos sistemas

A continuación incluiremos una panorámica de ejemplos de los distintos tipos de software directamente aplicables en educación matemática en general. No contemplamos pues los paquetes estadísticos, sistemas de geometría dinámica, hojas de cálculo,… aunque, en cualquier caso, la filosofía de utilización sería similar a

la de los sistemas de cómputo algebraico. Análogamente se omiten las calculadoras, pues representan de algún modo otra presentación (hardware) de los mismos paquetes de software.

4.1 Sistemas de Cómputo Algebraico

4.1.1 Generalidades sobre los sistemas de cómputo algebraico

Los sistemas de cómputo algebraico (CAS), como Maple, Mathematica, Derive, MuPad, Reduce, Axiom, Macsyma/Maxima/wxMaxima,… tienen dos características que los diferencian de los lenguajes informáticos habituales (C, Fortran, Pascal, Basic,...):

- pueden trabajar en aritmética exacta (además de en coma flotante): no se producen redondeos en las cifras decimales, ni de los números muy grandes y se trabaja, en cambio, como es habitual en matemáticas (con fracciones, raíces, valores trigonométricos,...), en lugar de considerar un cierto número de cifras fijo para representar todos los números,
- pueden manejar variables sin asignación, esto es, pueden realizar cómputos con variables en el sentido matemático, en lugar de en el sentido habitual en informática, como, por ejemplo, en la simplificación:

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4 \cdot x \cdot y$$

Para ilustrar las posibilidades de estos sistemas, elegimos Derive, por ser posiblemente el más difundido a nivel de matemática elemental (una detallada comparativa entre los principales CAS puede encontrarse en el clásico [6]).

4.1.2 Derive[2]

Posiblemente el CAS más sencillo de manejar y para el que hay desarrolladas mayor número de aplicaciones educativas es Derive [7–10]. Era un software comercial sobre el sistema operativo comercial más difundido y, sorprendentemente, no está ya a la venta (sustituido por TI-Nspire)[3].

Desde principios de los ’90 se lleva a cabo una interesantísima experiencia en Austria [12,13], donde las autoridades educativas nacionales adquirieron una licencia nacional de Derive para todos los centros de Secundaria del país [14]

---

[2] Estudio realizado sobre la versión 6.10.

[3] Se puede encontrar un resumen de la curiosa historia de Derive en [11].

(algo parecido a lo que hizo en Primaria con el lenguaje Logo el Proyecto Atenea en los ’80 en España).

Interfaz de usuario

input: la introducción de datos es función exclusiva del usuario. Ésta se realiza a través de la llamada *Línea de Edición* también conocida como *Barra de introducción de expresiones*, o a través de *cuadros de diálogo*.

La configuración de entrada de las expresiones matemáticas en cualquiera de los dos casos es siempre unidimensional, aunque la *Línea de Edición* pueda hacerse opcionalmente múltiple, y los *cuadros de diálogo* de ciertos elementos matemáticos como matrices y sistemas de ecuaciones (Figura 1) posean formato bidimensional.

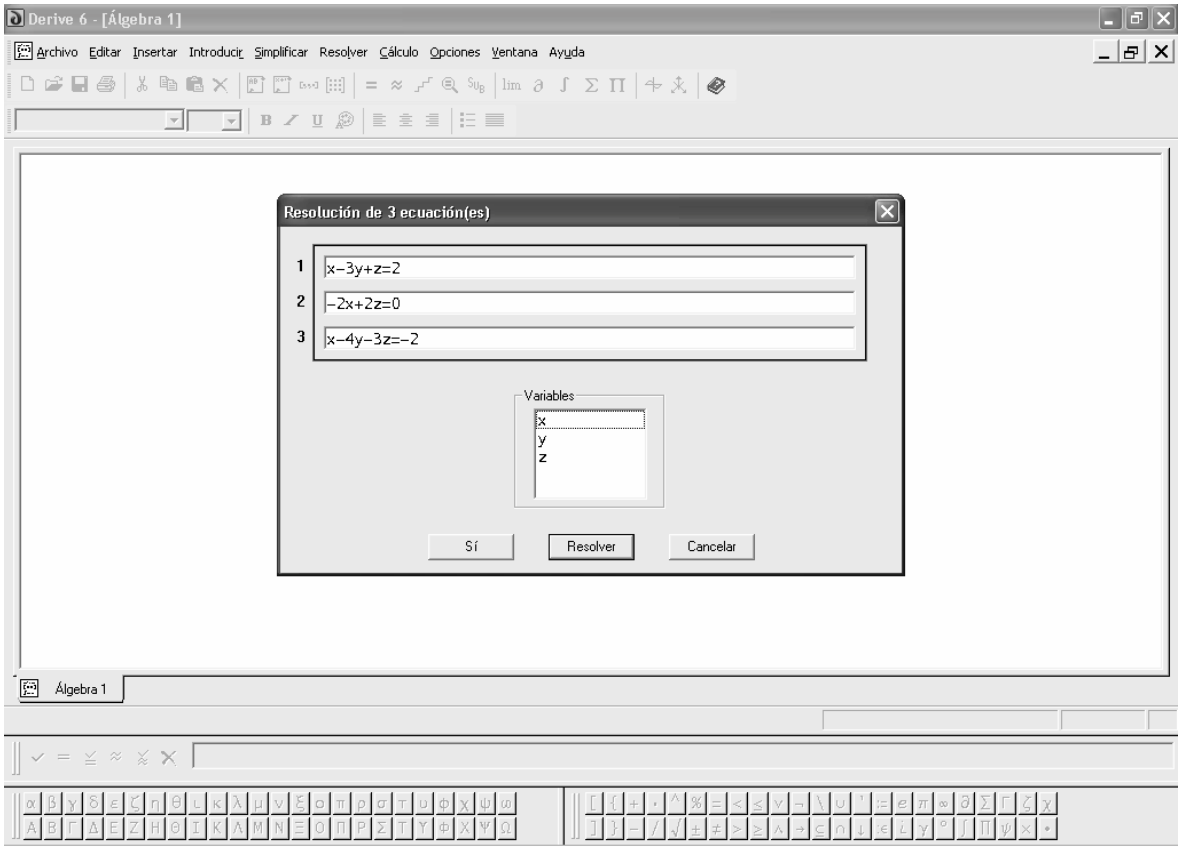


Figura 1: *Cuadro de diálogo para la introducción de un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas con Derive 6.10*

Los datos pasan entonces a la llamada *Ventana de* Álgebra. En la *Barra de Menús* o de *Herramientas* se elige la orden u órdenes que se deseen ejecutar sobre los datos seleccionados.

output: los resultados se muestran en la *Ventana de Álgebra* o *Gráfica* según el tipo de comando seleccionado. El formato bidimensional de las expresiones de salida en la *Ventana de Álgebra* facilita la lectura e interpretación de las mismas.

Contenidos matemáticos: tiene integrados contenidos matemáticos suficientes para la Educación Secundaria Obligatoria y los primeros años de Universidad, siendo ese el uso más habitual de este CAS.

Aleatoriedad: en principio sólo existe la posibilidad de generar números aleatorios (aunque el usuario podría usarlo en programas implementados por él).

Paso a paso: el icono de la *Barra de herramientas* etiquetado con *Mostrar los pasos intermedios* o su orden equivalente *Simplificar/Paso a paso* en la *Barra de menú* permite mostrar los pasos intermedios, y opcionalmente, las fórmulas o reglas aplicadas que ha utilizado el sistema en la ejecución de una determinada orden antes de presentar el resultado final. Sin embargo, su aplicación no está desarrollada para todos los tipos de órdenes ni para todo tipo de expresiones. Entre las órdenes en las que sí está implementado destacan:

- resolución de ecuaciones lineales,
- resolución de inecuaciones,
- suma de matrices,
- cálculo de derivadas,
- cálculo de integrales.

Si la opción de *Mostrar reglas* está activada, cada uso de esta orden muestra en la *Ventana de Álgebra*, como objeto de texto, la regla utilizada para ese paso, y, como expresión, el paso matemático realizado.

Programación de nuevos recursos educativos: tradicionalmente Derive admitía una programación funcional. A partir de la versión 5 es posible crear también procedimientos (aunque con una sintaxis y una forma de editarlos peculiar). Además los archivos de texto tradicionales (MTH) se vieron completados con la posibilidad de salvar hojas de trabajo (DFW).

4.2 Interfaces Gráficas de Usuario

4.2.1 Generalidades sobre interfaces gráficas de usuario

Existen diversas interfaces gráficas de usuario como WIMS [15−17], WMI [18,19], WME [20−22], SAGE [23−25],… en adelante denotadas GUI (Graphics User Interfaces), destinadas a desarrollar aplicaciones matemáticas concretas que reutilizan software existente (esto es, llaman a algún sistema matemático para realizar procesos de forma oculta para el usuario).

Ya hay desarrolladas colecciones de aplicaciones didácticas para las GUI más desarrolladas como WIMS [16], WMI [18],… Éstas suelen hacer uso de las distintas posibilidades ofertadas por el CAS detrás de la GUI, pero requieren para su desarrollo de un nivel de experto a nivel de manejo tanto de la GUI como del CAS [22].

4.2.2 GUI para CAS

En particular comentaremos una GUI sumamente sencilla, usada inicialmente para desarrollar s*istemas expertos basados en reglas* [26], pero que puede ser usada en el campo que nos compete. Se trata de una interfaz de usuario implementada en Visual-BASIC, apta para ser utilizada en cualquier ordenador bajo el sistema operativo más común.

Su diseño (Figura 2) consta de:

- *Barra de Título*: en la que se especifica el título de la actividad,
- *Barra de Menús*: con dos menús, *Archivo* con submenús *Abrir* y *Salir* para ejecutar una nueva actividad o salir de la interfaz respectivamente y *Fuentes* con submenús *Texto Entrada* y *Texto Resultado* para personalizar las características de la fuente del input y el output respectivamente,
- *Línea de Entrada*: acompañada de las indicaciones asociadas al input,
- *Área de Resultados*,
- dos botones: *Cancelar* y *OK*.

Esta GUI puede interactuar con (al menos) las versiones de consola de texto de los siguientes sistemas matemáticos: CoCoA, Maple, Maxima, Singular, Risa-Asir y Octave.

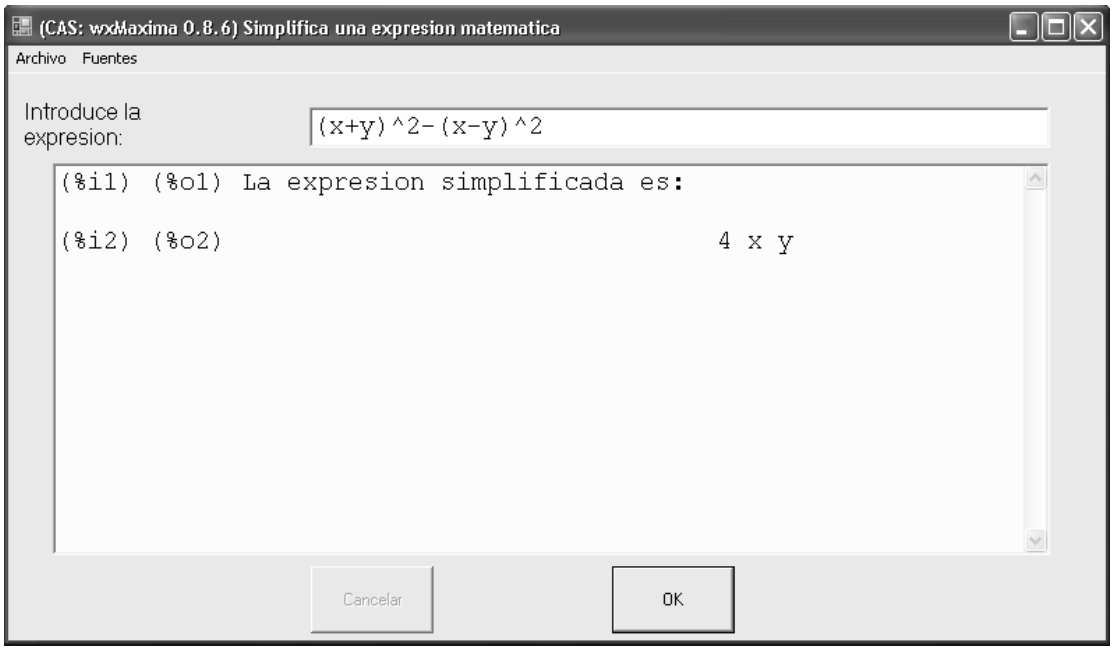


Figura 2: *Ejemplo de uso de la GUI (programado en Maxima)*

La aplicación se complementa con una serie de archivos de extensión TXT propios de la actividad que se implementa con, en términos generales, el siguiente contenido:

- el código de programación de la actividad,
- el contenido de la barra del título, las indicaciones de la línea de entrada, la ruta de acceso al sistema que se desee utilizar y el nombre del archivo del ítem anterior,
- la salida de cada ejecución.

Interfaz de usuario

input: la introducción de datos es tarea exclusiva del usuario final de la GUI. Éste, a través del teclado, inserta en la *Línea de Entrada* los datos correspondientes a la actividad a ejecutar. El formato de la línea, como su propio nombre adelanta, es unidimensional, al igual que la configuración de la expresión matemática de entrada.

Mediante el botón *OK* la GUI llama al sistema matemático correspondiente y ejecuta el código de programación de la actividad.

output: el resultado aportado por el sistema se muestra en el *Área de Resultados* de la GUI, en un formato que, aunque bidimensional en ocasiones, es de difícil interpretación.

Contenidos matemáticos: admite todas aquellas actividades que puedan programarse en el sistema matemático elegido. Sin embargo, la opción más didáctica sería limitar su uso a aquellos contenidos en que el input sea sencillo y el output fácilmente interpretable (por la limitación física que supone la pantalla disponible –se trabaja en modo texto y, si es necesario, incluyendo una gráfica adicional–).

Aleatoriedad: depende de las posibilidades en aleatoriedad del sistema matemático utilizado para la programación de cada actividad. En el caso de Maxima, por ejemplo, existen funciones que proporcionan valores aleatorios procedentes de distribuciones estadísticas y grafos, redes, permutaciones y árboles aleatorios, entre otros.

Paso a paso: ligado en su totalidad al sistema matemático en que se programe. Se podrá visualizar a través de la GUI la resolución paso a paso de aquellas cuestiones matemáticas programadas como tal, en el lenguaje de programación correspondiente.

Programación de nuevos recursos educativos: admite un amplio abanico de posibilidades de programación de nuevos recursos. Se trata de una aplicación didáctica, abierta a todas aquellas actividades programables que se presten, acordes a su diseño de entrada y salida.

4.3 TutorMates[4]

Este es un software matemático novedoso (Figura 3), desarrollado conjuntamente por varias universidades españolas y la empresa Addlink Softtware Científico [27], que integra herramientas de cálculo científico, estadístico y geométrico (llama a Maxima, GeoGebra y Excel) [28]. Está desarrollado hasta el primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria.

[4] Estudio realizado sobre la versión 2.3.1.

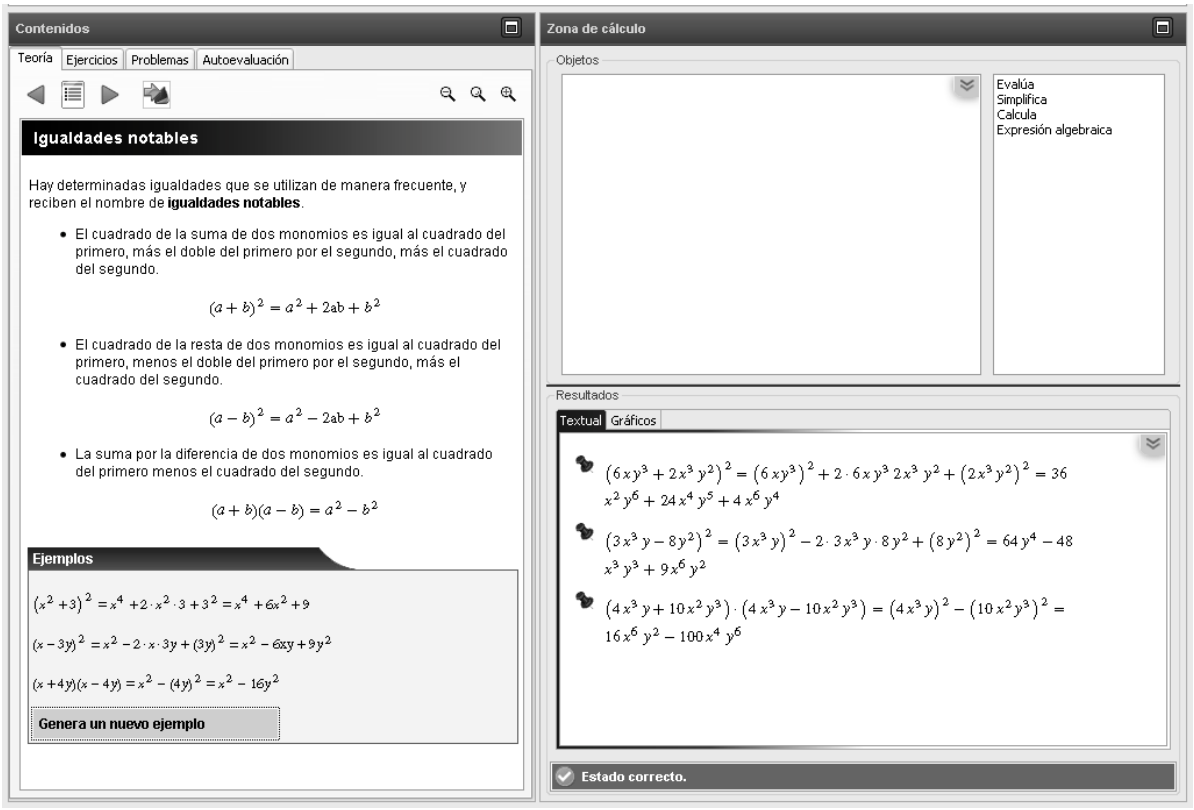


Figura 3: *Generador de ejemplos sobre desarrollos de igualdades notables en TutorMates 2.3*

Interfaz de usuario

input: permite tanto la introducción de datos por el usuario como la generación de datos por el sistema.

Para la introducción de datos por el usuario se precisa la utilización de un editor de expresiones matemáticas.

Para la generación de datos por el sistema, opción viable sólo para determinados contenidos, basta con pulsar un botón etiquetado con un texto que comienza con la palabra *Genera*.

Una vez introducidos los datos, éstos pasan a la llamada *Zona de cálculo*, donde se puede elegir el comando adecuado, de entre una lista de comandos expresados en lenguaje natural.

output: los resultados se muestran en la ventana de *Resultados*, presentándose mediante salidas textuales (en formato bidimensional) y gráficas, en función de la índole del resultado.

Contenidos matemáticos: tiene integrados los contenidos matemáticos propios del primer y segundo cursos de Educación Secundaria Obligatoria.

Aleatoriedad: incluye generación de ejemplos y ejercicios aleatorios sobre determinados contenidos.

Respecto a los ejemplos, genera tanto el dato del enunciado como la solución asociada, mientras que en los ejercicios, genera únicamente el dato del enunciado.

Entre los tipos de datos aleatorios se encuentran: números, expresiones algebraicas, fracciones, ángulos, triángulos, conjuntos de datos, tablas de frecuencias y frases matemáticas en lenguaje natural, entre otros.

Paso a paso: de entre los ejemplos de enunciado aleatorio mencionados en el apartado anterior, existen algunos cuya solución está desarrollada paso a paso. Éstos son los referidos a:

- operaciones con paréntesis,
- operaciones combinadas de números enteros,
- cálculo del m.c.m. y m.c.d. (algoritmo de Euclides),
- suma, resta, producto y cociente de fracciones,
- cálculo de la fracción generatriz de números decimales periódicos puros y mixtos,
- cálculo de potencias de un producto, de un cociente, de productos y cocientes de potencias de la misma base y de potencias de potencias,
- suma, resta y producto de polinomios y cociente de un polinomio entre un monomio,
- desarrollo de las igualdades notables: cuadrado de una suma, cuadrado de una diferencia, suma por diferencia (Figura 3),
- paso de un ángulo de forma compleja (varias unidades) a incompleja (una única unidad) y viceversa,

- cálculo de la media aritmética, la mediana y la moda de un conjunto de datos y de la media aritmética de un conjunto de datos agrupados en una tabla de frecuencias.

Programación de nuevos recursos educativos: no admite programación de nuevos recursos en ningún lenguaje. El software ofrece posibilidades cerradas, sin dar la opción de adaptarlo según las necesidades del usuario.

4.4 Scientific WorkPlace[5]

Este programa consta de un procesador de texto que permite construir fácilmente complejos textos científicos, haciendo uso de los iconos de los menús (Figura 4), con la posibilidad de generar salida LaTeX y también de llamar al núcleo de un sistema de cómputo algebraico (MuPAD 3.1 en la versión actual y antiguamente Maple) [29–31]. La combinación de ambos permite la edición de textos científicos complejos con presentación profesional y la realización de cálculos matemáticos en un mismo entorno de trabajo. En la Figura 4 se muestra una entrada del procesador de texto y en la Figura 5 la salida LaTeX correspondiente ya compilada en formato DVI.

Curiosamente también se comercializa aislado el procesador de texto con salida LaTeX (Scientific Word) [30], así como el mismo procesador de texto pero sin salida LaTeX pero con la posibilidad de realizar cálculos matemáticos (Scientific Notebook) [30].

Interfaz de usuario

input: aunque la introducción de datos matemáticos es tarea propia del usuario, existen algunos casos en los que el sistema puede aportar datos numéricos aleatorios sujetos a ciertas restricciones.

Las entradas de expresiones matemáticas se realizan en formato bidimensional a través de un sistema de menús desplegables, cuadros de diálogo y botones.

El sistema de cómputo algebraico integrado en el programa efectúa los cálculos solicitados a través de la barra de herramientas *Compute*.

output: los resultados de las operaciones aparecen en el mismo documento en el que las expresiones matemáticas están siendo editadas, sin necesidad de ninguna acción adicional. La notación que utiliza coincide con la notación matemática usual, por lo que emplea entonces una configuración bidimensional.

---

[5] Estudio realizado sobre la versión 5.5.

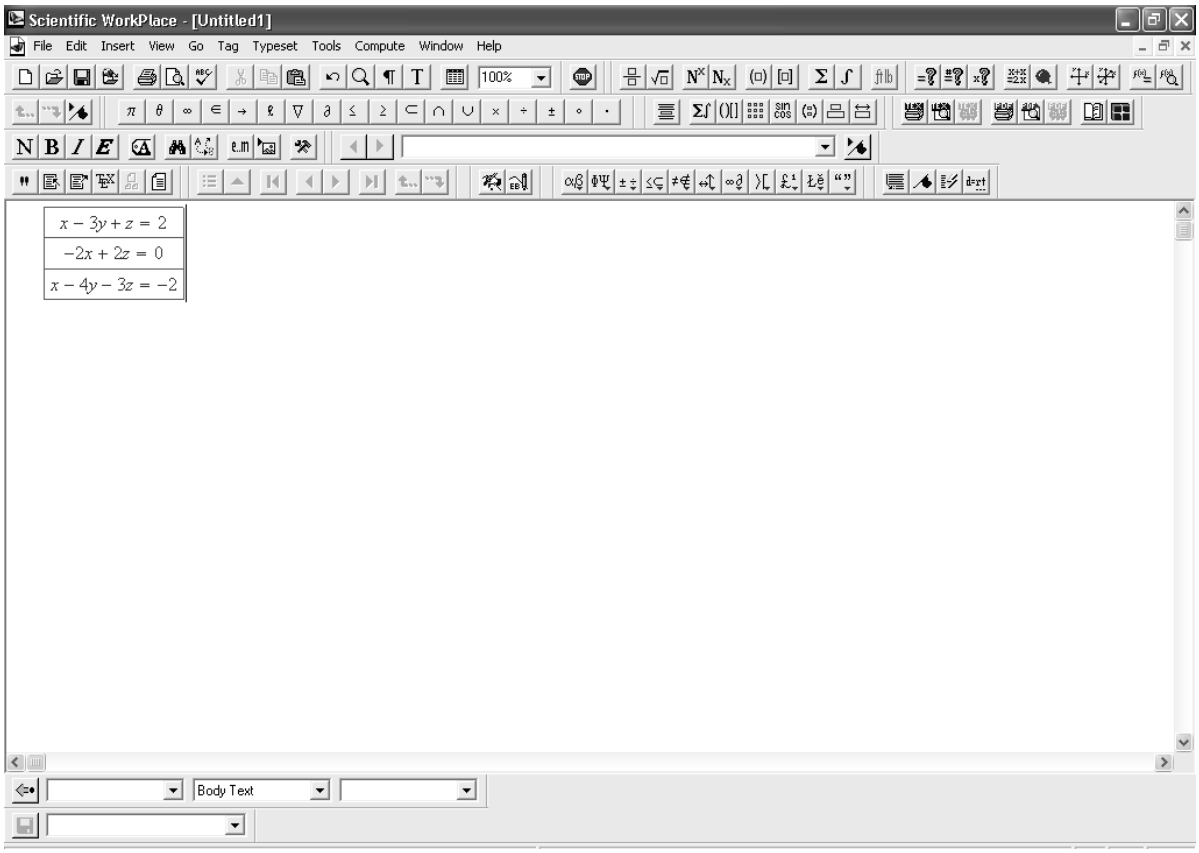


Figura 4: *Edición del fichero fuente a partir del que Scientific WorkPlace generará el código LaTeX (primera etapa)*

Contenidos matemáticos: tiene integrados los contenidos matemáticos propios del núcleo del sistema de cómputo algebraico usado.

Aleatoriedad: incluye generación de números aleatorios enteros y decimales sujetos a restricciones impuestas por el usuario. Pueden obtenerse en dos formatos distintos; en sucesiones (separados por comas) o como entradas de matrices.

- generador de números aleatorios: genera una secuencia de valores discretos procedentes de distribuciones estadísticas. El usuario, a través del itinerario *Compute/Statistics/Random Numbers*, dispone de un cuadro de diálogo mediante el que impone, la cantidad de números aleatorios que desea, el tipo de distribución estadística del que proceden (*Beta, Binomial, Cauchy, Chi-cuadrado, Exponencial, F, Gamma, Normal, Poisson, t de Student, Uniforme o Weibull*) y los valores de los parámetros de la

correspondiente distribución. Permite una lista con un máximo de 1000 elementos.

- generador de matrices de entradas aleatorias: existen dos opciones para la generación de matrices con entradas enteras aleatorias.

  Una primera opción en la que, a través de la ruta *Compute/Matrices/ Random Matrix* el usuario dispone de un cuadro de diálogo mediante el que puede especificar; el tipo de matriz que desea (*sin restricciones, simétrica, antisimétrica o triangular superior*), la dimensión de la matriz y el rango de enteros del que extraer los números aleatorios que formarán las entradas de la matriz.

  La segunda opción disponible es en realidad un caso particular de la anterior. Mediante el itinerario *Compute/Matrices/Fill Matrix* se habilita un cuadro de diálogo en el que el usuario puede especificar la dimensión deseada de la matriz y elegir *random* de entre los diferentes tipos de llenado.

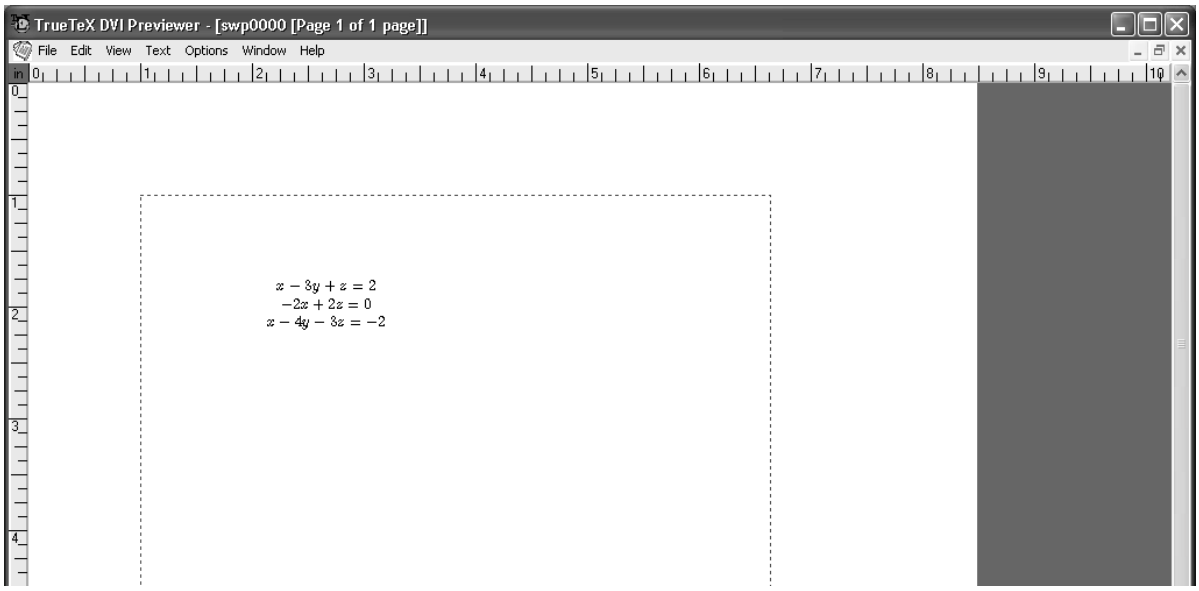


Figura 5: *Visualización del fichero DVI generado (tercera etapa) tras compilar el código LaTeX generado (segunda etapa)*

Paso a paso: el programa no muestra los pasos intermedios de ningún tipo de cálculo. Puede simularse un vago paso a paso en la simplificación de expresiones mediante la combinación de los comandos *Expand* y *Simplify* del menú *Compute*.

La utilización simultánea con la tecla *Ctrl* permite sobrescribir el resultado de la nueva operación en el lugar de la expresión seleccionada.

Programación de nuevos recursos educativos: el software no permite ampliación de recursos con ningún lenguaje de programación. Las funciones disponibles a través de los comandos ya existentes son las únicas utilizables por el usuario.

4.5 Tabla comparativa

En la Tabla 2 se resume nuestra visión de las posibilidades de los distintos tipos de software que acabamos de comentar.

		Derive	**GUI**	**TutorMates**	**Scientific WorkPlace**
Interfaz de usuario	**input**	Usuario Unidimensional	Usuario Unidimensional	Usuario & Sistema Bidimensional	Usuario & Sistema Bidimensional
	output	Bidimensional	Bidimensional	Bidimensional	Bidimensional
Contenidos matemáticos		ESO Primeros años de Universidad	En función del sistema matemático llamado	1º ESO 2º ESO	Los de una calculadora simbólica y gráfica
Aleatoriedad		Sólo función *RANDOM*	En función del sistema matemático llamado	En ejemplos: enunciado & solución En ejercicios: enunciado	Secuencias de números y entradas de matrices
Paso a paso		Icono *Mostrar los pasos intermedios*	En función del sistema matemático llamado	En ejemplos de algunos de los contenidos	No dispone
Programación de nuevos recursos educativos		Si admite	Si admite	No admite	No admite

Tabla 2: *Resumen de las posibilidades de los distintos tipos de software*

5 Aplicaciones desarrolladas a medida sobre un CAS

En nuestra opinión, la herramienta tecnológica más flexible de que se dispone en educación matemática son los CAS (trabajando directamente con ellos o tras una GUI). Daremos como ejemplo a continuación como se pueden fácilmente programar en el CAS Maple, unos procedimientos que generan las cuatro combinaciones apropiadas sobre enunciados y soluciones de ejercicios, tratadas anteriormente, respecto a un determinado contenido matemático.

5.1 Ejemplo: Discusión paso a paso de sistemas lineales

El contenido matemático tratado es el correspondiente a la discusión de sistemas de ecuaciones lineales mediante el Teorema de Rouché-Fröbenius. La metodología elegida es la realización de una cantidad adecuada de ejercicios al respecto, cuyos enunciados puedan ajustarse a las necesidades específicas del alumno en cada una de las etapas de su aprendizaje.

Un enunciado común a los ejercicios propuestos sobre este contenido podría corresponder a "*Discute el siguiente sistema utilizando el Teorema de Rouché-Fröbenius*". Ahora bien, lejos de tratarse de un único tipo de ejercicio, las diferentes alternativas en cuanto al introductor de datos (usuario o sistema) y el tipo de solución (directa o paso a paso) permiten las cuatro combinaciones didácticas recomendables tratadas con anterioridad[6]. Estas cuatro alternativas, junto con los posibles datos introducidos por el usuario, generan un abanico de ejercicios (bajo el mismo enunciado) verdaderamente amplio. Los casos asociados a este ejercicio en particular, en función del introductor de datos elegido, se reflejan en la Tabla 3.

Mostramos a continuación (Figuras 6–9) un ejemplo concreto de cada uno de los cuatro tipos de ejercicios implementados. En cada uno de ellos pueden verse, los datos concretos de cada enunciado que particularizan el enunciado común (en color rojo en la pantalla del ordenador[7]), y la solución aportada por Maple (en color azul en pantalla) tras la ejecución del procedimiento correspondiente.

Obsérvese que la implementación de este material didáctico incluye dos de los parámetros principales de este estudio, la aleatoriedad y el paso a paso.

---

[6] Ver Tabla 1.

[7] Si usamos la versión Classic Worksheet de las hojas de trabajo de Maple.

INTRODUCTOR DE DATOS	DATOS A INTRODUCIR POR EL USUARIO
Usuario (Figuras 6 y 7)	listado de las ecuaciones que forman el sistema
	listado de las incógnitas sobre las que hacer la discusión
Sistema computacional (Figuras 8 y 9)	número de ecuaciones que forman el sistema
	número de incógnitas sobre las que hacer la discusión

Tabla 3: *Tipo de introductor de datos y datos a introducir por el usuario en el ejercicio tratado*

```
> DiscutirSistemaDirecta([x-3*y+z=-3,
  -2*x+2*z=0,-x-3*y+3*z=8],[x,y,z]);
```

El sistema es INCOMPATIBLE

Figura 6: *Datos introducidos por el usuario. Solución directa*

```
> DiscutirSistemaStep([x-3*y+z=2,
  -2*x+2*z=0,x-4*y-3*z=-2],[x,y,z]);
>
```

La discusión del sistema se realiza paso a paso de la siguiente manera:

En primer lugar extraemos del sistema los tres datos fundamentales para proceder a su clasificación:

1.- La matriz de coeficientes asociada al sistema es:, $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$

2.- La matriz ampliada asociada al sistema es:, $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$

3.- El número de incógnitas del sistema es:, 3

En segundo lugar calculamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada (Recuerda que el rango de una matriz puedes calcularlo mediante el Método de Gauss)

El rango de la matriz, $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & -3 \end{bmatrix}$, *es:*, 3

El rango de la matriz, $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, *es:*, 3

En tercer lugar comparamos ambos rangos:

Como el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada aplicando el Teorema de Fröbenius afirmamos que el sistema es COMPATIBLE

Además como el valor de los rangos anteriores es igual al número de inógnitas del sistema entonces por el Teorema de Rouché-Fröbenius afirmamos que el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO

Figura 7: *Datos introducidos por el usuario. Solución paso a paso*

```
> DiscutirSistemaAleat(Enunciado)(3,3);
>
```

ENUNCIADO: Clasifica en compatible determinado, compatible indeterminado o inco
mpatible el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$[-8x + y - 10z + 4 = 0, x + 7y - 14z + 9 = 0, 5x - 7y - 7z - 12 = 0]$

```
>
> DiscutirSistemaAleat(SolucionDirecta)();
```

SOLUCIÓN:

El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO

Figura 8: *Datos generados por el sistema. Solución directa*

5.2 Contexto educativo de la aplicación

Respecto al tipo de tecnología de la información y comunicación analizada en este artículo, la normativa educativa vigente[8] referida a la Educación Secundaria Obligatoria y al bachillerato, indica el papel esencial que ésta supone en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. No olvidemos por otra parte que el "*Tratamiento de la información y competencia digital*" es una de las ocho competencias básicas correspondientes a las Educación Secundaria Obligatoria.

El contenido abordado con el recurso tecnológico presentado se encuadra, principalmente, en el bloque de Álgebra Lineal de la materia de Matemáticas II (Bachillerato), dispuesto como "*Discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.*"

Por otra parte, y como se analizaba en un comienzo, la práctica continuada en resolución de ejercicios con la herramienta propuesta, contribuye sin duda a la formación de una buena base para afrontar uno de los contenidos de la materia de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I (Bachillerato): "*Resolución de problemas del ámbito de las ciencias sociales mediante la utilización de ecuaciones o sistemas de ecuaciones lineales*".

---

[8] Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.
Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.
Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

```
> DiscutirSistemaAleat(Enunciado)(2,3);
```

ENUNCIADO: Clasifica en compatible determinado, compatible indeterminado o inco\ mpatible el siguiente sistema de ecuaciones lineales,

$[3x + 13y + 15z - 12 = 0, -10x - 12y - 12z - 6 = 0]$

```
> DiscutirSistemaAleat(SolucionStep)();
```

SOLUCIÓN:

La discusión del sistema se realiza paso a paso de la siguiente manera:

En primer lugar extraemos del sistema los tres datos fundamentales para proceder a su \ clasificación:

1.- La matriz de coeficientes asociada al sistema es:, $\begin{bmatrix} 3 & 13 & 15 \\ -10 & -12 & -12 \end{bmatrix}$

2.- La matriz ampliada asociada al sistema es:, $\begin{bmatrix} 3 & 13 & 15 & 12 \\ -10 & -12 & -12 & 6 \end{bmatrix}$

3.- El número de incógnitas del sistema es:, 3

En segundo lugar calculamos el rango de la matriz de coeficientes y de la matriz ampliada (Recuerda que el rango de una matriz puedes calcularlo mediante el Método de Gauss)

El rango de la matriz, $\begin{bmatrix} 3 & 13 & 15 \\ -10 & -12 & -12 \end{bmatrix}$, *es:*, 2

El rango de la matriz, $\begin{bmatrix} 3 & 13 & 15 & 12 \\ -10 & -12 & -12 & 6 \end{bmatrix}$, *es:*, 2

En tercer lugar comparamos ambos rangos:

Como el rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada apl\ icando el Teorema de Fröbenius afirmamos que el sistema es COMPATIBLE

Además como el valor de los rangos anteriores es menor que el número de incógnitas de\ l sistema entonces por el Teorema de Rouché-Fröbenius afirmamos que el sistema es C\ OMPATIBLE INDETERMINADO

Figura 9: *Datos generados por el sistema. Solución paso a paso*

6 Comparación de recursos educativos

Tras la comparación de los distintos tipos de software aplicables en educación matemática, a través del estudio de una serie de parámetros, y la propuesta de una posible aplicación implementada a medida, parece razonable la comparación de los diferentes recursos educativos tratados en este artículo con un fin común: la enseñanza y el aprendizaje de contenidos matemáticos mediante la resolución de ejercicios.

Para tal comparativa se emplean los siguientes parámetros de estudio.

Espacio de almacenamiento: referido a la cantidad de espacio físico necesario para almacenar la información. El espacio de almacenamiento va ligado al número de páginas del libro (extensión), a su tamaño, a su longitud,…

Cantidad de ejercicios resueltos: cantidad de ejercicios resueltos de los que dispone el recurso.

Cantidad de ejercicios resueltos paso a paso: cantidad de ejercicios resueltos paso a paso de los que dispone el recurso.

Interactividad: referido a la posibilidad o no de un diálogo entre el recurso y el usuario. Este parámetro está fuertemente ligado a la posibilidad de disponer resueltos, ejercicios concretos demandados por el usuario.

Ejercicios listos para usar: disponibilidad inmediata de ejercicios tras el arranque del sistema.

Los resultados de la comparativa respecto a tales parámetros quedan resumidos en la Tabla 4. Observemos que, cuando hablamos de *cantidad inmensa de ejercicios disponibles*, hacemos referencia lógicamente a una cantidad inmensa dentro de los contenidos para los que está desarrollado el correspondiente recurso educativo.

Nota: Notemos que la impresión de los resultados del recurso digital a medida, anularía sus características diferenciadoras, como se muestra en la Figura 10.

7 Conclusiones

En resumen, si se comparan desde el punto de vista de la generación aleatoria de ejercicios y su explicación paso a paso las cuatro categorías exploradas en la Sección 5 (Derive / GUI simple / TutorMates / Scientific WorkPlace) con lo factible

con aplicaciones desarrolladas a medida sobre un CAS, estas últimas las superan. Si además estas aplicaciones se llamaran desde una de las complejas GUI citadas en la Sección 4.2.1, se podrían obtener herramientas extraordinarias. Sin embargo, el trabajo para desarrollarlas sería muy considerable. Mientras, TutorMates representa una excelente colección lista para usar (aunque con unas capacidades intermedias desde este punto de vista en concreto), por lo que puede ser una opción muy interesante.

	Espacio físico de almacenamiento requerido	**Cantidad de ejercicios resueltos**	**Cantidad de ejercicios resueltos paso a paso**	**Interactividad**	**Ejercicios listos para usar**
Libro de texto impreso	amplio	finita	finita	no	si
Libro de texto digital [9]	reducido	Finita	finita	no	si
Derive	reducido	inmensa	inmensa	si	no
GUI	reducido	no aplicable	no aplicable	si	no
TutorMates	reducido	inmensa	inmensa	si	si
Scientific Workplace	reducido	no aplicable	no aplicable	si	no
Recurso digital a medida	reducido	inmensa	inmensa	si	si

Tabla 4: *Resumen de la comparación de los recursos educativos*

[9] Acorde al estado de la cuestión analizado.

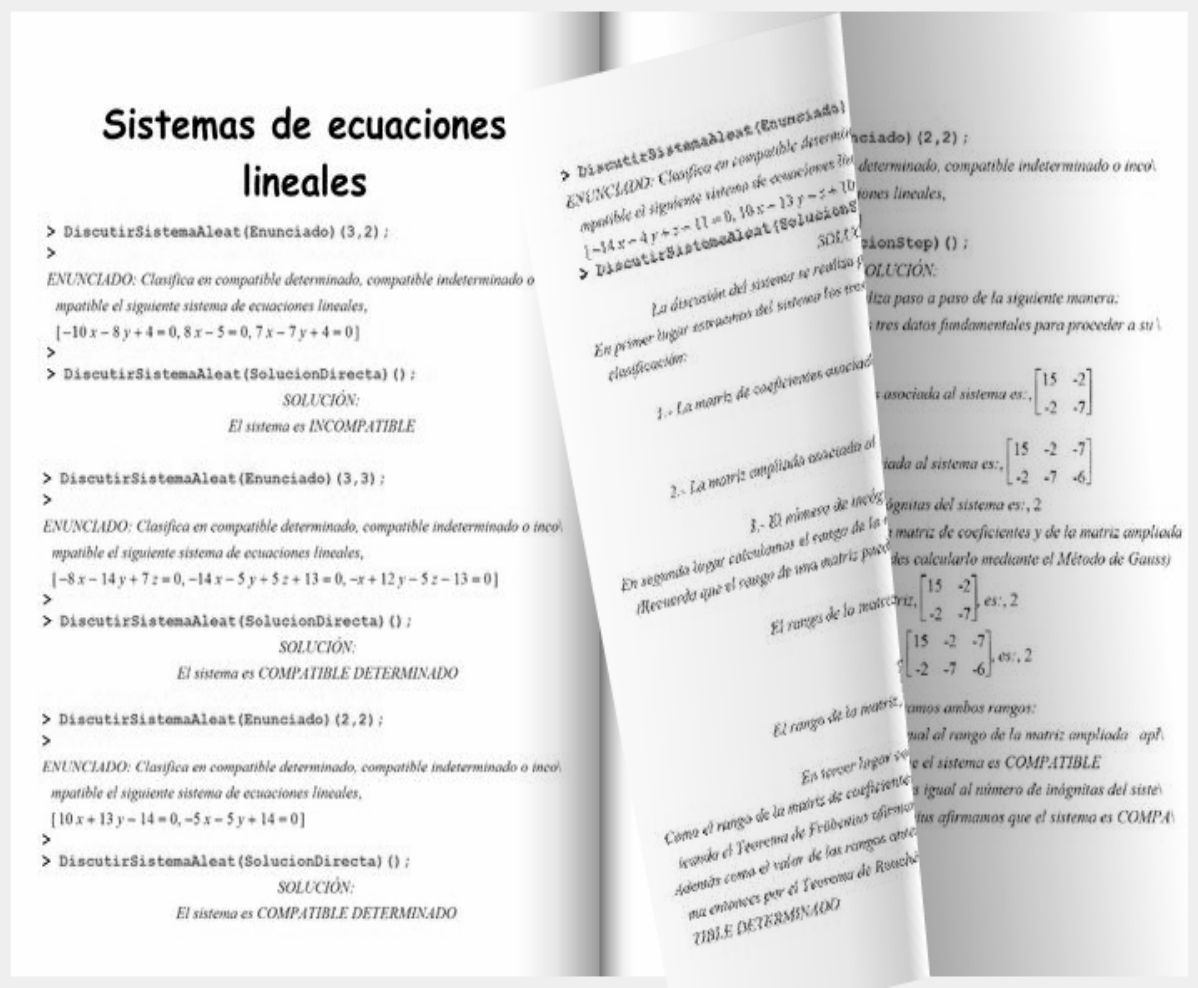


Figura 10: *Libro impreso generado a partir del ejemplo desarrollado en la Sección 5.1*

Bibliografía

[1] URL: http://www.ciberhabitat.gob.mx/biblioteca/textos/texto_le.htm

[2] URL: http://www.absysnet.com/tema/tema60.html

[3] URL: http://recursostic.educacion.es/observatorio/web/es/equipamiento-tecnologico/ hardware/954-libros-electronicos-ebooks-

[4] URL: http://www.smlir.com/Libro.html

[5] URL: http://www.mcgraw-hill.es/secundaria_digital/unidad_muestra/8448177185/unidad05/ud1/sco01/sco1fs.htm

[6] M. Wester: A Review of CAS Mathematical Capabilities. *Computer Algebra Nederland Nieuwsbrief* 13 (1994) 41-48.

[7] B. Kutzler, V. Kokol-Voljc: *Introduction to DERIVE 6*. Soft Warehouse Europe, Hagenberg, Austria, 2003.

[8] URL: http://www.upv.es/derive/english.htm

[9] URL: http://www.chartwellyorke.com/deriveb1.html

[10] J. Cabezas, E. Roanes Lozano: Towards the Abandonment of Statistical Tables. Pro *Dialog (Journal of the Polish Information Processing Society)* 12 (2001) 67-76.

[11] URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Derive_computer_algebra_system

[12] J. Birhm (editor): *Teaching Mathematics with DERIVE. Proceedings of the International School on the Didactics of Computer Algebra (April 27-30, 1992, Krems, Austria)*. Chartwell-Bratt Ltd., Bromley, UK, 1992.

[13] H. Heugl, B. Kutzler (editors): *DERIVE in Education, Proceedings of the Second International Conference on the Didactics of Computer Algebra (September, 1993, Krems, Austria)*. Chartwell-Bratt Ltd., Bromley, UK, 1993.

[14] URL: http://www.acdca.ac.at/english/index.htm

[15] X. Gang: WIMS: An Interactive Mathematics Server. *Journal of Online Mathematics and its Applications.* Section 3.1 Algebra (2001). Accesible en: URL: http://mathdl.maa.org/mathDL/4/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=354

[16] A. Galligo, G. Xiao: Using WIMS for Mathematical Education. En: *2001 IAMC Workshop Proceedings (electronic), a Workshop at ISSAC 2001* (2001). Accesible en: URL: http://icm.mcs.kent.edu/research/iamc.html

[17] URL: http://wims.unice.fr

[18] R. Vajda, Z. Kovacs: Interactive Web Portals in Mathematics. *Teaching Mathematics and Computer Science* 1-2 (2003) 347-361.

[19] URL: http://matek.hu

[20] P.S. Wang, Y. Zhou, X. Zou: Web-based Mathematics Education: MeML Design and Implementation. En: *Proceedings of IEEE/ITCC'2004*. Las Vegas, Nevada, USA, 2004 (pp. 169-175).

[21] P.S. Wang, N. Kajler, Y. Zhou, X. Zou: WME: Towards a Web for Mathematics Education. En: *ISSAC 2003 Proceedings*. ACM Press, New York, NY, USA, 2003 (pp. 258-265).

[22] URL: http://eagle.cs.kent.edu/WME/

[23] W. Stein and D. Joyner: SAGE: System for Algebra and Geometry Experimentation, *SISGSAM Bulletin* 39/2 (2005) 61-64.

[24] URL: http://www.math.washington.edu/newsletter/2006/sage.php

[25] URL: http://sage.scipy.org/sage/

[26] E. Roanes Lozano, L. M. Laita, A. Hernando, E. Roanes Macías: An algebraic approach to rule based expert systems. *RACSAM* 104 (2010) 19-40.

[27] URL: http://www.tutormates.es

[28] Grupo TutorMates: TutorMates: Cálculo Científico en Educación Secundaria. *La Gaceta de la RSME* 14/3 (2011) 565-577.

[29] Dpto. Apoyo a Investigación. Serv. Inf. Apoyo a Docencia e Investigación UCM: *Guía de aprendizaje al Scientific WorkPlace 4.1*. UCM, Madrid, 2003. Disponible en: URL: www.sisoft.ucm.es/Manuales/manual_scw41.pdf

[30] Dpto. Apoyo a Investigación. Serv. Inf. Apoyo a Docencia e Investigación UCM: *Iniciación al Scientific WorkPlace*. UCM, Madrid, 2004. Disponible en: URL: www.sisoft.ucm.es/Manuales/manual_swp50.pdf

[31] URL: http://www.mackichan.com/

Una aplicación de los haces de cónicas al armado de vigas

José Aldeguer Carrillo
Dr. Ingeniero de Construcción. Universidad Politécnica de Valencia
jaldegue@upvnet.upv.es

Abstract

This article describes the analytic process to obtain a partial solution for the moment diagram in order to calculate rebars in reinforced concrete structures. Conic curves bundle theory is used to assess the risk taken when calculating rebars by the comparison method.

Introducción

En el cálculo de estructuras planas reticulares, es muy frecuente la obtención del diagrama de momentos en una viga entre pilares, de la forma que se indica en el dibujo (Figura 1).

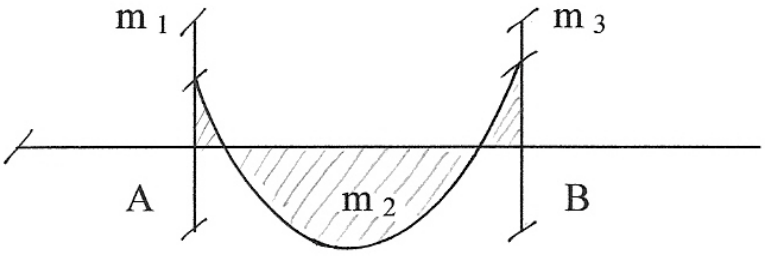


Figura 1

El armado de acero, es la principal consecuencia, entre otros factores de los momentos obtenidos correspondientes a las secciones de la viga. En la ejecución de la obra, a veces se tiene la tendencia al armado por comparación con otras vigas similares.

El propósito de este artículo es la exposición de una sencilla aplicación de la Teoría de Haces de Cónicas, que advierte de la necesidad, de considerar todas las condiciones que llevaron a los diagramas de momentos. De no ser así pueden presentarse parábolas que no cumplen las condiciones iniciales, del proyecto de ejecución.

1 Representación matricial de la curva de momentos (utilizando la nomenclatura tradicional)

Curva parábola *ACDB,* si la viga estuviese apoyada (Figura 2). En la sección *x-x*, el momento (supuesta apoyada) es $M = (q/2)(L\ x - x^2)$, siendo q la carga por unidad lineal y L la longitud de la viga. Al introducir los momentos, M_a y M_b, se suele decir que la parábola cuelga de sus extremos.

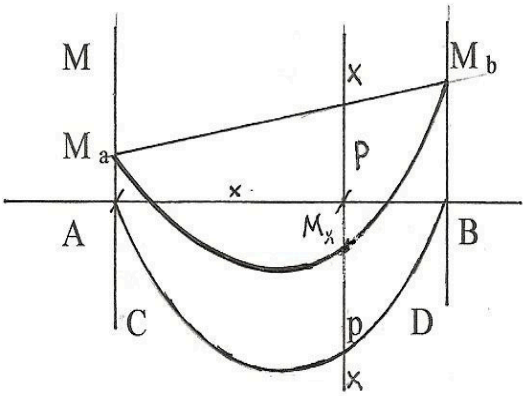


Figura 2

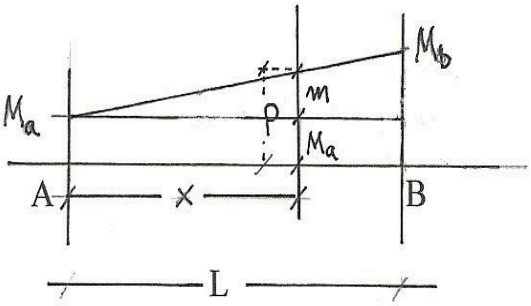


Figura 3

Al establecer las relaciones geométricas (Figura 3), $m = x(M_b - M_a)/L$, resulta que es $p = m + M_a$ y el momento en la sección *x-x* resulta ser $M_x = M$ (apoyada) – p . Desarrollando, se obtiene:

$$M_x = M \text{ (apoyada)} - p = [(q / 2)(L\ x - x^2)] - [x(M_b - M_a) / L + M_a] =$$

$$= [(q / 2) (L x - x^2)] - (M_b - M_a) \; x / L - M_a ,$$

que es la curva de momentos de la forma $M = f(x)$. Desarrollando resulta:

$$(q / 2) x^2 + M + [(q L / 2) - (M_b - M_a) / L] x + M_a = 0$$

cuya representación matricial, siendo *A* la matriz

$$A = \begin{bmatrix} M_a & -\frac{1}{2}\left[(qL/2) - \frac{M_b - M_a}{L}\right] & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}\left[(qL/2) - \frac{M_b - M_a}{L}\right] & \frac{q}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & x & M \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ M \end{bmatrix} = 0$$

Si atendemos a su clasificación, observando que $\det A = -q/8 \neq 0$ y $A_{00}=0$, se concluye que se trata de una parábola .

Los momentos correspondientes en cada una de las secciones, determinarán los armados de acero correspondientes, junto con las características de carga y secciones.

2 Casos considerados

Analicemos dos casos en el armado, por comparación, al considerar características importantes en el diagrama que se toma como referencia.

2.1 Determinación del diagrama de momentos, dados los momentos de empotramiento y el momento máximo de tracción en la parte inferior de la viga(incluidas sus posiciones)

Se trata de la obtención de la parábola (Figura 4) que contiene a los puntos M y N, y es tangente a la recta m en el punto P. Tomemos como ejemplo, aquel cuyos datos se indican en dicha figura.

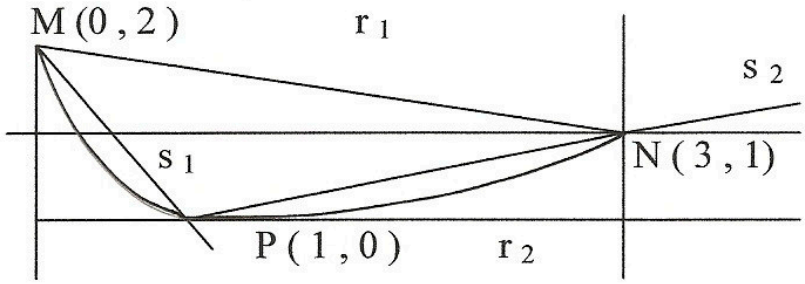


Figura 4

El haz de cónicas (excluida $r_1 \times r_2$) que cumple las condiciones es

$$[s_1 \times s_2] + \lambda [r_1 \times r_2] = 0$$

Tomando como ejemplo el dado por los puntos M(0, 2), N(3, 1), P(1, 0) y la recta $m \equiv y = 0$, las ecuaciones de las rectas serán :

$$r_1 (M, N) \equiv x + 3y - 6 = 0 ; \; r_2 \equiv y = 0 ;$$

$$s_1(M, P) \equiv 2x + y - 2 = 0 ; \; s_2(N, P) \equiv x - 2y - 1 = 0$$

El haz viene representado por:

$$[2x + 2y - 2] [x - 2 y - 1] + \lambda [x + 3 y - 6] [y] = 0$$

que al desarrollar da lugar a la expresión :

$$2 x^2 + (3 \lambda - 2) y^2 - 4 x + (3 - 6 \lambda) y + (\lambda - 3) x y + 2 = 0,$$

resultando

$$A = \begin{bmatrix} +2 & -2 & \frac{1}{2}(3-6\lambda) \\ -2 & +2 & \frac{1}{2}(\lambda-3) \\ \frac{1}{2}(3-6\lambda) & \frac{1}{2}(\lambda-3) & 3\lambda-2 \end{bmatrix} \; ; \; A_{00} = \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2}(\lambda-3) \\ \frac{1}{2}(\lambda-3) & 3\lambda-2 \end{vmatrix}$$

De $A_{00} = 0$, obtenemos:

$$\lambda^2 - 30\lambda + 25 = 0 \quad ; \quad \lambda = 15 \pm 10\sqrt{2}\,.$$

Y para

$$\lambda_1 = 15 + 10\sqrt{2} \quad \text{y} \quad \lambda_2 = 15 - 10\sqrt{2}$$

resulta $|A| \neq 0$. Como consecuencia, al sustituir dicho valores en la expresión del haz de cónicas, dos parábolas que cumplen las condiciones iniciales del problema.

2.2 Determinación del diagrama de momentos, conociendo los puntos en los que se pasa de compresión a tracción (momento nulo) y el momento máximo positivo (tracción en la parte inferior de la viga)

El problema equivale a obtener la parábola (Figura 5) que contiene a X_1 y X_2 (puntos de momento nulo) y es tangente a la recta t en el punto P.

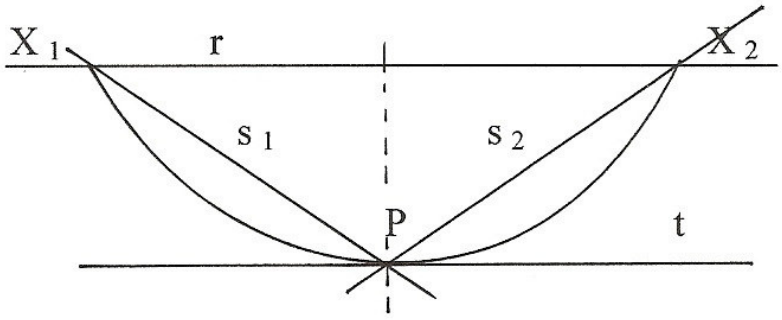


Figura 5

Suponiendo X_1 (0, 0) , X_2(4, 0) y P(2, -1), se tiene:

r (X_1, X_2) ≡ y = 0 ; s_1 (X_1, P) ≡ x + 2y = 0 ; s_2 (X_2, P) ≡ x-2y-4 = 0

Considerando el haz $r\,t + \lambda\, s_1\, s_2 = 0$, (excluyendo, en principio, $s_1 s_2$, puesto que buscamos una parábola que se pueda asociar al diagrama de momentos), resulta y(y + 1) + λ(x – 2y – 4)(x + 2 y) = 0, a cuya expresión general, $\lambda x^2 + (1-4\lambda)y^2 - 4\lambda x + (1-8\lambda)y = 0$, corresponden

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2\lambda & \frac{1}{2}(1-8\lambda) \\ -2\lambda & \lambda & 0 \\ \frac{1}{2}(1-8\lambda) & 0 & 1-4\lambda \end{bmatrix} \quad ; \qquad A_{00} = \begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1-4\lambda \end{vmatrix}$$

Para $A_{00} = 0$, obtenemos $\lambda(1-4\lambda) = 0$. Para $\lambda = 0$, tenemos las rectas r t (no considerando esta solución, por no tratarse de una parábola) , pero para $\lambda = \frac{1}{4}$, es $|A| \neq 0$, resultando la parábola $x^2 - 4x - 4y = 0$. El caso es muy interesante, porque la solución de parábola es única.

3 Conclusiones

En general al proceder al armado de vigas por comparación, con otras similares dentro del mismo pórtico, se parte de elementos que se han de repetir, pero hay que tener en cuenta que se trata en el proceso de cálculo de la estructura correspondiente, entre otras cosas, de la determinación de una cónica, y son necesarios cinco puntos o condiciones que los sustituyan (en nuestro caso, parábola). Las normas son cada vez más exigentes y conviene no pasar de los márgenes de tolerancia que estén establecidos. En el caso 1, hemos visto de una forma sencilla la presentación del problema con dos soluciones, y una sola debe cumplir las condiciones del proyecto, y en el 2 la solución única en el caso de considerar los puntos en los que se pasa de tracción a compresión, y el punto de momento de tracción máximo.

Bibliografía

[1] Carlos Fernández Casado (1967). *Cálculo de Estructuras Reticulares*. Ed. Dossat.

[2] S. Timoshenko (1967). *Resistencia de Materiales.* Ed. Espasa Calpe.

[3] J. Aldeguer, J.L. Morera (1988). *Cónicas y Cuádricas*. Ed. Universidad Politécnica de Valencia.

[4] P.Jiménez Montoya, A. García Meseguer, F. Morán Cabré (1973). *Hormigón Armado* . Ed . Gustavo Gili.

[5] Larson- Hostetler (1985). *Cálculo y Geometría Analítica.* Ed. Mc.Graw Hill.

Connotaciones matemáticas de una sentencia de Derecho Laboral

Eugenio Roanes Lozano

Dpto. de Álgebra, Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

A curious judge's sentence regarding labour law is described and commented along the paper. It is yet another example of how mathematics appear everywhere.

El ejercicio del juez es realmente complejo. Son bien conocidos los ejemplos en que el posicionamiento de una coma hace cambiar el signo de una sentencia. Existen otros casos delicados como el que se relata y comenta en esta nota.

Por razones que no vienen al caso, hace unos años tuve noticia detallada de muchas sentencias de Derecho Laboral.

En la legislación laboral española el veredicto de un despido no es Booleano (puede ser procedente, improcedente o nulo -a aplicar, por ejemplo en caso de embarazo de la trabajadora-), pero podemos agruparlo de modo Booleano como favorable para el trabajador (improcedente o nulo) o desfavorable para él (procedente).

Una sentencia dictada en un país con una legislación análoga a la española me resultó realmente curiosa, aunque triste por su temática, y quien me la relató me aseguró que lo transcrito a continuación es rigurosamente cierto. En cualquier caso, nos sirve para meditar sobre la dificultad que presenta en muchos casos llegar a un veredicto y sus implicaciones matemáticas.

La sentencia era relativa a una demanda en el equivalente a Magistratura de Trabajo contra el despido de un trabajador concreto, dentro de un Expediente de Regulación de Empleo (ERE) de una gran empresa.

Una vez eliminado el usual y farragoso despliegue de terminología de la sentencia, el razonamiento del juez era el siguiente:

- se admite que la empresa tiene problemas económicos,
- es sabido que una regulación de empleo puede salvar una situación similar,
- pero el despido de este trabajador en concreto no solucionaría la situación de la empresa

ergo (de acuerdo con la legislación)

- el despido es improcedente.

Lo curioso del caso es que si a este juez le correspondieran todos los casos relativos a esta empresa:

- si cada trabajador hubiera presentado separadamente el mismo recurso contra el despido, todos lo hubieran ganado,

mientras que:

- si todos los trabajadores despedidos hubieran presentado conjuntamente el mismo recurso contra el despido citado en el punto anterior, lo hubieran perdido.

Lo sorprendente de este caso, desde un punto de vista matemático, es que influye esencialmente en la decisión la forma de presentar el recurso. Formalmente, si k fuera el número mínimo de trabajadores a despedir por la empresa para hacerla viable, cambiaría el signo de la sentencia según que el cardinal de los recurrentes fuera, o no, estrictamente menor que k.

No se trata de las circunstancias de los hechos. Por ejemplo, fuera del Derecho Laboral, una turba no puede argumentar defensa propia frente a un maleante armado con un palo, mientras que una persona que se encontraba sola en el momento de los hechos sí puede argumentar defensa propia ante varios asaltantes armados con palos.

El problema, entiendo, es simplemente el extraer el caso de contexto. Uno espera que la aplicación de la ley se atenga estrictamente a los hechos (incluidas sus circunstancias), pero que sea independiente del cardinal del conjunto de personas que presentan un recurso.

Reseña de libros

BALDOMERO RUBIO*: Introducción a los Números y al Análisis Matemático.* ISBN: 978-84-934918-2-6. Depósito Legal: SE-5501-2011. Páginas: 379. Publicado por el autor. Dirección: c/ Leopoldo Alas Clarín, 4, Madrid-20035. Telf.: 630 715 194. Correo electrónico: baldomero.rubio@gmail.com

El autor, conocido y estimado por muchas generaciones de matemáticos formados en la Univ. Complutense de Madrid, es actualmente Catedrático Emérito de Análisis Matemático en la Facultad de Ciencias Matemáticas de dicha Universidad, de la cual ha sido Decano.

Este nuevo libro suyo puede ser considerado como adaptación a los actuales estudios de Grado de otros dos libros suyos. El primero de ellos titulado *Números y Convergencia. Primeros pasos en el Análisis Matemático* y el segundo *Introducción a los Números y al Análisis Matemático*, ambos publicados en 2006 reseñados en números anteriores de este Boletín.

El Prólogo, muy original, comienza narrando ejemplos a modo de cuentos introductorios del tipo de problemas de los que se ocupa el análisis matemático.

Los tres primeros capítulos se ocupan de las sucesivas extensiones del concepto de número, desde los naturales a los complejos. El paso más difícil, de racionales a reales, se hace a partir de las representaciones, decimales o binarias, de los racionales, adjuntando los irracionales, para rellenar los huecos o lagunas que dejan los racionales en el proceso de compleción, lo que entendemos es preferible en un texto de iniciación, desde un punto de vista tanto didáctico como utilitario.

Concretamente, en el capítulo primero, partiendo de nociones elementales de teoría de conjuntos, se introducen los números naturales (con la axiomática de Peano), el método de inducción y los conceptos de sucesión y serie. En cuanto a racionales, se presta especial atención a la representación decimal, como preparación al modo de presentar los números reales.

En el capítulo segundo se introducen los números reales por el camino anteriormente mencionado. Para ello se hace uso de las sucesiones de racionales y de la noción de convergencia, para llegar a los reales a partir de las sucesiones de Cauchy. Se llegan a introducir los resultados fundamentales de las sucesiones y series de números reales, que se culminan con los teoremas de Bolzano-Weierstrass y de Borel.

En el capítulo tercero se introducen los números complejos. Para ello se hace uso de consideraciones de tipo geométrico, en aras del aspecto didáctico, pero sin abandonar la precisión y el rigor. La notación de Euler es usada para extender al campo complejo las funciones exponencial y logarítmica. En realidad, se llegan a introducir todas las funciones elementales, incluyendo el teorema de descomposición de funciones racionales (reales) en suma de una función polinómica y funciones racionales simples.

El capítulo cuarto se dedica a los límites funcionales y las funciones continuas y el quinto a integrales y derivadas. Notemos que los conceptos fundamentales se establecen inicialmente en el contexto más simple. Así, por ejemplo, la integral se introduce para las funciones continuas, y además se presenta antes que la derivada para independizarla de ésta: sólo después del teorema fundamental del Cálculo aparece la conexión entre ambas nociones. Curiosamente, se hace una breve introducción al concepto de integral de Lebesgue, como recurso para profundizar en la integración con la teoría de Riemann. También se incluyen resultados tan importantes como los teoremas de Wallis y Stirling,

En el capítulo sexto se presta una atención especial a las sucesiones y series de funciones y, en particular, a las series de potencias y sus aplicaciones.

Por último, en el capítulo séptimo se consideran funciones en las que intervienen números complejos, tanto funciones complejas de variable real, como funciones de variable compleja, para terminar con las funciones exponencial y logaritmo neperiano y el teorema fundamental del Álgebra.

En cada uno de los capítulos se ofrecen varios ejemplos de aplicaciones y de ejercicios resueltos. También una amplia colección de problemas, con indicaciones que facilitan su resolución, en muchos de los cuales se tratan resultados complementarios o prolongaciones, útiles para estudios mas avanzados.

Finalmente, un índice alfabético muy completo ayuda a localizar cómodamente conceptos y resultados.

El autor manifiesta su experiencia en la metodología utilizada en la exposición, haciendo hincapié en la importancia que tiene presentar las ideas de modo que despierten el interés de los lectores. Huyendo de rigorismos estériles, se mezcla la precisión con la claridad en una composición difícil de mejorar.

El libro es recomendable, no sólo para alumnos de primer curso de Análisis Matemático, también para profesores y alumnos de matemáticas, en general.

Eugenio Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm (exactamente como este archivo). El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta puigadam@mat.ucm.es ,o bien en un disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pediráa los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88 y 89

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948**, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.