Algunos problemas diofánticos

Ricardo Moreno Castillo
I.E.S. Beatriz Galindo
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid.
moreno.castillo@terra.es

Abstract

This work presents some methods to find infinite solutions to some problems set out by Diophantus and by Bhaskara.

1. Sobre cubos cuya suma es un cuadrado

El problema 1 del libro IV de la versión árabe de la *Aritmética* de Diofanto pide encontrar dos números la suma de cuyos cubos sea cuadrado. Esto es, resolver en los números enteros la ecuación:

$$x^3 + y^3 = z^2$$

Diofanto da la solución $x = 4$, $y = 8$ y $z = 24$. A continuación vamos a encontrar todas las demás. Ahora bien, si $x^3 + y^3 = z^2$ entonces

$$(xt^2)^3 + (yt^2)^3 = (zt^3)^2$$

(para cualquier número entero *t*). Esto quiere decir que si dos números que cumplen la condición de que la suma de sus cubos es un cuadrado son multiplicados por un cuadrado, los dos nuevos números obtenidos también la cumplen. Dos soluciones así emparentadas las llamaremos *dependientes* (de hecho, la solución que proporciona Diofanto depende de la solución más sencilla $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$). Pues bien, es fácil de comprobar que todas las soluciones del problema, o bien tienen la siguiente forma:

$$x = u\left(u^3 + v^3\right)$$
$$y = v\left(u^3 + v^3\right)$$

o bien son dependientes de otra solución que sí tiene esa forma. Entonces solo hay que dar a u y v todos los valores posibles primos entre sí, y dividir los números obtenidos entre el mayor divisor común que sea un cuadrado (caso de que lo haya) para tener todas las soluciones de la ecuación:

u	v	x	y	z
1	2	1	2	3
1	3	7	21	98
1	4	65	260	4225
1	5	14	70	588
1	6	217	1302	47089
1	7	86	602	14792
1	8	57	456	9747
1	9	730	6570	532900
2	3	70	105	1225
2	5	266	665	17689
2	7	78	273	4563
2	9	1474	6633	543169
3	4	273	364	8281
3	5	114	190	2888
3	7	1110	2590	136900
3	8	33	88	847
4	5	84	105	1323
4	7	1628	2849	165649
4	9	3172	7137	628849
5	6	1705	2046	116281

2. Sobre cuadrados cuya suma es un cubo

El problema 3 del mismo libro del que procede la cuestión anterior pide encontrar dos números cuyos cuadrados, sumados, den lugar a un cubo. Esto significa resolver en los números enteros la ecuación:

$$x^2 + y^2 = z^3$$

En la *Aritmética* tan solo se proporciona la solución $x = 5$, $y = 10$ y $z = 5$. Igual que en el problema que acabamos de tratar, si dos números que cumplen la condición se multiplican por un cubo, los nuevos números también la cumplen. Hablaremos, igual que antes, de soluciones dependientes. Todas las soluciones son de la forma:

$$x = u\left(u^2 + v^2\right)$$
$$y = v\left(u^2 + v^2\right)$$

o son dependientes de otra solución que sí tiene esa forma. Damos a u y v todos los valores posibles primos entre sí, dividimos los números obtenidos entre el mayor divisor común que sea un cubo (caso de que lo haya), y llegamos a todas las soluciones de la ecuación:

u	v	x	y	z
1	2	5	10	5
1	3	10	30	10
1	4	17	68	17
1	5	26	130	26
1	6	37	222	37
1	7	50	350	50
1	8	65	520	65
1	9	82	738	82
2	3	26	39	13
2	5	58	145	29
2	7	106	371	53
2	9	170	765	85
3	4	75	100	25
3	5	102	170	34
3	7	174	406	58
3	8	219	584	73
4	5	164	205	41
4	7	260	455	65
4	9	388	873	97
5	6	305	366	61

3. Una generalización de los problemas anteriores

A continuación, una ecuación que engloba como casos particulares las dos que se acaban de ver:

$$x^m + y^m = z^n$$

(con $m \neq n$). Si los números x, y y z forman una solución, también la forman los números xt^n, yt^n y zt^m. Y también ahora se trata de buscar soluciones independientes. Se va a ver bajo qué condiciones dan lugar a una solución las fórmulas siguientes:

$$x = u\left(u^m + v^m\right)^k$$
$$y = v\left(u^m + v^m\right)^k$$

Si $x^m + y^m = \left(u^m + v^m\right)^{km+1}$ es una potencia enésima, entonces $km + 1 = nh$, y m y n son primos entre sí. En este caso, encontrado el valor de k, todas las soluciones del problema, o proceden de las fórmulas anteriores, o son dependientes de otra solución que sí procede de ellas. Sea, por ejemplo, la ecuación:

$$x^7 + y^7 = z^5$$

En este caso, $k = 2$, y las fórmulas que proporcionan soluciones son:

$$x = u\left(u^7 + v^7\right)^2$$
$$y = v\left(u^7 + v^7\right)^2$$

Para $u = 1$ y $v = 2$, tenemos que $x = 16641$, $y = 33282$ y $z = 2146689$. En efecto:

$$(16641)^7 + (33282)^7 =$$
$$353391373730936795216525838081 + 45234095837559909787715307274368 =$$
$$45587487211290846582931833112449 = (2146689)^5$$

Sea ahora la ecuación:

$$x^3 + y^3 = z^{10}$$

En este caso $k = 3$, y en consecuencia:

$$x = u(u^3 + v^3)^3$$
$$y = v(u^3 + v^3)^3$$

Para $u = 1$ y $v = 2$, tenemos que $x = 729$, $y = 1458$ y $z = 9$:

$$(729)^3 + (1458)^3 = 387420489 + 3099363912 = 3486784401 = 9^{10}$$

4. De cómo Bhaskhara encontró una solución común a las dos ecuaciones planteadas por Diofanto

El matemático hindú Bhaskhara, también conocido como Bhaskaracharya (que significa "Bhaskara el maestro”), o como Bhaskara II (para distinguirlo de otro Bhaskhara anterior) vivió entre los años 1114 y 1185, y es el último gran matemático de la India medieval. En sus dos tratados, *Vija-Ganita* y *Lilavati*, aparecen mezcladas aportaciones originales con diversos problemas procedentes de fuentes anteriores, muchos de ellos diofánticos.

Entre los del *Vija-Ganita* tiene un enorme interés el siguiente: encontrar dos números tales que la suma de sus cubos sea un cuadrado y la de sus cuadrados sea un cubo. En definitiva, resolver simultáneamente las siguientes ecuaciones (que, como se ha visto, ya habían sido tratadas por Diofanto separadamente):

$$x^3 + y^3 = z^2$$
$$x^2 + y^2 = t^3$$

Bhaskhara supone que $x = w^2$ e $y = 2w^2$. Esto garantiza ya la primera condición:

$$x^3 + y^3 = w^6 + 8w^6 = 9w^6 = (3w^3)^2$$

Ahora hay que escoger z de modo que se cumpla la segunda:

$$x^2 + y^2 = w^4 + 4w^4 = 5w^4 = (5w)w^3$$

El número más pequeño que convierte al último miembro en un cubo es $w = 25$, de manera que $x = 625$, $y = 1250$, $z = 46875$ y $t = 125$ son los números buscados:

$$625^3+1250^3=244140625+1953125000=2197265625=46875^2$$

$$625^2+1250^2=390625+1562500=1953125=125^3$$

Aunque Bhaskhara da una única solución, su método muestra el camino para encontrar todas las demás: consiste en partir de una solución de la primera ecuación y luego encontrar otra, dependiente de ella, que lo sea también de la segunda. Bhaskhara utiliza la primera de las soluciones de la tabla que aparece en el apartado 1. Si partimos de la segunda, postulamos soluciones de la forma $x=7w^2$ e $y=21w^2$ (y ya sabemos que verifican la primera ecuación) y buscamos *w* para que verifique también la segunda:

$$x^2+y^2=49w^4+441w^4=490w^4=(490w)w^3$$

El menor valor de *w* que convierte al segundo miembro en un cubo es $w=700$. Entonces $x=3430000$, $y=10290000$, $z=33614000000$ y $t=4900$:

$$\begin{gathered}3430000^3+10290000^3=\\=40353607000000000000+1089547389000000000000=\\=1129900996000000000000=33614000000^2\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}3430000^2+10290000^2\\=11764900000000+105884100000000\\=117649000000000=4900^3\end{gathered}$$

De esta manera podemos fabricar cuantas soluciones se quieran, algunas de las cuales se pueden ver en la siguiente tabla:

u	*v*	*X*	*y*	*z*	*t*
1	2	625	1250	46875	125
1	3	3430000	10290000	33614000000	49000
1	4	22936954625	91747818500	28006595020990625	20757425
1	5	19592846	97964230	973490146356	215306
2	3	2449105750	3673658625	253513058946875	2691325
3	4	56517825	753577100	780040181375	207025
3	8	113394176313	302384470168	170607699346488173	47071057
4	5	104677490484	130846863105	58199716442317023	30394161

4. Una generalización del método de Bhaskhara

En esta sección se va a aplicar el método de Bhaskhara para resolver, en los números enteros, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x^m + y^m = z^n$$
$$x^n + y^n = t^m$$

(donde m y n cumplen la relación $km+1=nh$ por ser primos entre sí). En cuanto tenemos una solución de la primera ecuación (y sabemos cómo encontrarla), multiplicamos los valores de x e y por w^{mk+1} (y por ser el exponente múltiplo de n, tenemos una nueva solución de la primera ecuación) y luego se escoge w convenientemente para que lo sean también de la segunda.

Ilustraremos el procedimiento resolviendo el sistema:

$$x^3 + y^3 = z^{10}$$
$$x^{10} + y^{10} = t^3$$

Ya vimos que una solución de la primera ecuación del sistema es $x = 729$, $y = 1458$ y $z = 9$. Buscamos una nueva solución de la forma:

$$x = 729w^{10} = 3^6 w^{10}$$

$$y = 1458w^{10} = 2 \cdot 3^6 w^{10}$$

(debido a que los números que aparecen son muy grandes, los manejaremos descompuestos en factores primos).

$$x^{10} + y^{10} = 3^{60}5^2 41w^{100} = \left(3^{60}5^2 41w\right)w^{99}$$

El último factor ya es cubo perfecto. Para que el primero también lo sea, es necesario que $w = 41^2 5$. Con lo cual $x = 3^6 5^{10} 41^{20}$ e $y = 2\left(3^6 5^{10} 41^{20}\right)$. De este modo:

$$x^3 + y^3 = 3^{20}5^{30}41^{60} = \left(3^2 5^3 41^6\right)^{10}$$
$$x^{10} + y^{10} = 3^{60}5^{102}41^{201} = \left(3^{20}5^{34}41^{67}\right)^3$$

Bibliografía

Dickson, L. E. (1971), *History of de theory of numbers*. Chelsea Publishing company, New York.

Diofanto (2007), *La Aritmética y el libro Sobre los números poligonales*. Editorial Nivola, Madrid.

Moreno Castillo, R (2011), *Aryabhata, Brahmagupta y Bhaskhara. Tres matemáticos de la India medieval*. Editorial Nivola, Madrid.

Peinando barajas

Jesús García Gual
I.E.S. Conde de Orgaz. Madrid
jesusgarciagual@gmail.com

Abstract

When repeating the same way to shuffle a deck over and over again, a cyclic group of permutations is generated. So, sooner or later you will return to the departure point. The question is how long will it take when repeating a Faro shuffle?

Cojamos un mazo de *n* cartas ordenadas y tomando cartas de una en una formemos dos montones. Después apilemos un montón encima del otro, y volvamos a repartir, ... ¿Conseguiremos volver alguna vez al orden inicial? ¿Cuántos *peinados* son necesarios?

Ensayemos con un mazo de *8* cartas, y supongamos que llevamos un cierto orden en el reparto de forma que mantengamos la posición de la que consideremos la primera carta (por ejemplo ordenando boca abajo y de abajo arriba las cartas, y luego repartiendo desde abajo cartas boca abajo a izquierda y derecha, montando al final el montón de la derecha sobre el de la izquierda).

La cosa funciona así:

Comienzo	1	2	3	4	5	6	7	8
1ª mezcla	1	3	5	7	2	4	6	8
2ª mezcla	1	5	2	6	3	7	4	8
3ª mezcla	1	2	3	4	5	6	7	8

Después de tres mezclas hemos vuelto a la posición inicial. Y vemos que en este caso (como en los mazos de un número par de cartas) siempre se ha conservado la posición de la última carta.

Por supuesto que lo que estamos haciendo es una permutación de las cartas, y como seguimos aplicando la misma permutación estamos obteniendo un grupo cíclico de permutaciones. Lo cual nos responde ya a la primera cuestión. Por la limitación del número de permutaciones en algún momento tendremos que pasar por alguna ya recorrida, y es fácil demostrar (pues podemos desbarajar) que la primera en repetirse será la posición inicial.

Con lo que la pregunta importante pasa ahora a ser la segunda. ¿Cuánto tardaremos en hacerlo?, o en lenguaje matemático, ¿cuál es el orden de ese grupo cíclico?

No dejemos que la teoría nos impida ver la maquinaria del reloj. Trabajemos con mazos de otros tamaños. (Se aconseja hacer tablas, con ordenador o con cuadrícula rellenando las casillas con los atajos que se vayan descubriendo)

Para tres cartas:

Comienzo	1	2	3
1ª mezcla	1	3	2
2ª mezcla	1	2	3

Para cinco cartas:

Comienzo	1	2	3	4	5
1ª mezcla	1	3	5	2	4
2ª mezcla	1	5	4	3	2
3ª mezcla	1	4	2	5	3
4ª mezcla	1	2	3	4	5

Para seis cartas:

Comienzo	1	2	3	4	5	6
1ª mezcla	1	3	5	2	4	6
2ª mezcla	1	5	4	3	2	6
3ª mezcla	1	4	2	5	3	6
4ª mezcla	1	2	3	4	5	6

Para nueve cartas:

Comienzo	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1ª mezcla	1	3	5	7	9	2	4	6	8
2ª mezcla	1	5	9	4	8	3	7	2	6
3ª mezcla	1	9	8	7	6	5	4	3	2

4ª mezcla	1	8	6	4	2	9	7	5	3
5ª mezcla	1	6	2	7	3	8	4	9	5
6ª mezcla	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Para diez cartas:

Comienzo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1ª mezcla	1	3	5	7	9	2	4	6	8	10
2ª mezcla	1	5	9	4	8	3	7	2	6	10
3ª mezcla	1	9	8	7	6	5	4	3	2	10
4ª mezcla	1	8	6	4	2	9	7	5	3	10
5ª mezcla	1	6	2	7	3	8	4	9	5	10
6ª mezcla	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

¡Ya es hora de sacar conclusiones!

La primera será darnos cuenta que el comportamiento de los *peinados* en los mazos de $2n-1$ cartas y de $2n$ cartas es prácticamente idéntico, las dos tablas rellenas sólo se diferencian en que la segunda tiene una columna más (la final, donde sólo aparece la última carta).

Y centrándonos más en el objetivo propuesto, anotemos que acabamos cuando la carta 2 vuelve a la 2ª posición. Fijémonos pues en el recorrido del valor de las cartas en la segunda posición (en la 2º columna). Observemos que en los mazos impares de n cartas el valor de la carta de la 2ª posición va aumentando primero 1, luego 2 más, 4 más, 8 más, ..., todo ello en módulo n. Como queremos volver a tener el valor 2 y $1+2+2^2+\ldots+2^{k-1}=2^k-1$, debemos hallar la primera solución positiva de la congruencia $2^k-1\equiv_n 0$. O sea, un conocido teorema de Fermat resuelve nuestro problema para los mazos impares y para los pares la respuesta será la de un mazo con una carta menos.

Reseñemos que en la columna 3 los valores saltan sucesivamente 2, 4, 8, 16, ...; en la columna 4 saltan, 3, 6, 12, 24, ..., siempre hablando en módulo n y así la carta m vuelve a su posición cuando $(m-1)\left(2^k-1\right)\equiv_n 0$, y en particular cuando $2^k-1\equiv_n 0$, es decir, cuando la carta 2 está en la suya.

Fermat nos informa que en los mazos impares de n cartas, el número de peinados necesarios es divisor de $n-1$. Podemos ahora enlistar mazos y número mínimo de peinados necesarios para volver a la situación inicial sin más que estudiar los divisores de $2^k - 1$.

k peinados	2^k-1	Mazos o divisores impares de 2^k-1 que a recen por primera vez
2	3	3
3	7	7
4	15	5 – 15
5	31	31
6	63	9 – 21 – 63
7	127	127
8	255	17-51-85-255
9	511	73 – 511
10	1023	11-33-93-341-1023

En la lista vemos que ha aparecido el mazo de 51 cartas, y por tanto el de 52 (una baraja francesa) y se necesitan 8 peinados. La baraja española de 40 cartas no ha aparecido todavía, y es porque necesita 12 peinados ($2^{12} - 1 = 4095$, es el primer número de Mersenne múltiplo de 39).

Resuelto el problema matemático, mejoremos la presentación flexibilizando las condiciones. Lo importante es volver a un orden cíclico, no necesariamente el inicial (ascendente y comenzando por la carta 1). Así en los mazos impares podremos introducir cortes antes de empezar un reparto, pues ello no afecta al orden cíclico, ya que un corte del mazo equivale a varios pases de una carta de arriba abajo. Pasar una carta de arriba abajo y peinar da lugar al mismo orden cíclico que simplemente peinar. Veámoslo en un mazo de 7 cartas:

Pasar una carta de arriba abajo es la permutación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Un peinado se corresponde con la permutación: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \boxed{1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 2 \quad 4 \quad 6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \boxed{6 \quad 1 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 2 \quad 4} \end{pmatrix}$$

pasar una carta y peinar.

Vemos que el orden cíclico de las cartas en los recuadros coincide.

También podemos peinar sin cuidado de repartir de arriba abajo o de abajo a arriba (o cómo apilar los dos montones, lo cual es un corte del mazo) ya que si acaso estaremos invirtiendo el orden cíclico y pasando algunas cartas de arriba a abajo.

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&3&5&7&2&4&6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&3&5&7&2&4&6\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&5&2&6&3&7&4\end{pmatrix}}$$

reparto de abajo a arriba reparto de abajo a arriba

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&4&2&7&5&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&3&5&7&2&4&6\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&3&6&2&5&1\end{pmatrix}}$$

reparto de arriba a abajo reparto de abajo a arriba

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&4&2&7&5&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&4&2&7&5&3&1\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&7&4&1&5&2&6\end{pmatrix}}$$

reparto de arriba a abajo reparto de arriba a abajo

En los tres casos reseñados vemos en los recuadros que las permutaciones obtenidas son, o bien cíclicamente equivalentes, o bien cíclicamente inversas. (Una demostración completa debería hacerse para mazos $4m + 1$ y para mazos $4m + 3$, pero ello conlleva una engorrosa notación).

Observemos además que en los mazos de tamaño $2^k + 1$, la carta 2 llega a la última columna una vez realizados la mitad de los peinados, y en ese momento las cartas están ordenadas cíclicamente en orden inverso al inicial (revisemos las tablas de 3, 5 y 9 cartas). Así en los mazos $2^k + 1$, tendremos un orden (igual o inverso al de partida) con la mitad de peinados (también podremos hacerlo en los mazos $2^k + 2$ si después de uno de los peinados intercambiamos la primera y la última carta, pero cuidado con la paridad del mazo).

Resumiendo, un mazo de 2^k cartas necesita k peinados para volver a su estado inicial, y es óptimo en cuanto al número de cartas, pero al ser éste par, no podremos hacer cortes intermedios de la baraja y deberemos tener cuidado en la forma de repartir y en cómo apilamos los montones después del reparto. Un mazo de $2^k + 1$ cartas necesita en principio $2k$ peinados para volver al orden cíclico inicial (ya que $2^{2k} - 1$ es el primer número de Mersenne múltiplo de $2^k + 1$) pero su imparidad hace que con la mitad, k, de peinados lleguemos al orden cíclico inicial o a su inverso. Así, salvo que seamos expertos peinadores y nos atrevamos con un mazo de 51 cartas (nos guardamos una de la baraja francesa bajo la manga) el mazo de nueve cartas $\left(2^3+1=9\right)$ es el nuestro.

Digamos de paso que el argumento utilizado, relaciona el número de peinados necesarios para un mazo de un número impar n de cartas con la expresión decimal en base 2 del número $\frac{1}{n}$ (en concreto con el número de decimales del periodo, es decir el número de pasos que hay que hacer en la división para repetir la situación inicial). Así:

$$\frac{1}{3}=0,\widehat{01}_2;\ \ \frac{1}{7}=0,\widehat{001}_2;\ \ \frac{1}{5}=0,\widehat{0011}_2;\ \ \frac{1}{15}=0,\widehat{0001}_2;\ \ \ldots$$

Ahora, si queremos saber el número de peinados necesarios para un mazo de 13 cartas podemos hallarlo directamente calculando en base 2 su expresión decimal y contando la longitud de su periodo.

Como $\frac{1}{13}$ tiene en base 2 un periodo de 12 decimales (el mayor posible) el mazo de 13 cartas (ya es mala suerte) precisa de 12 peinados.

El periodo de $\frac{1}{2^k-1}$ está formado por $k-1$ ceros y un uno final, mientras que el de $\frac{1}{2^k+1}$ lo forman k ceros seguidos de k unos, de forma que pasados los primeros k pasos de la división vemos una inversión del periodo (k unos y k ceros).

Resolviendo un problema geométrico sobre triángulos con la ayuda de un sistema de cómputo algebraico.

Nicolás Rosillo Fernández
IES Máximo Laguna. Santa Cruz de Mudela. Ciudad Real
nicolasrosillo@gmail.com

Abstract

This article presents the results for a geometrical problem to which we know of no other solution.

Enunciado del problema

En la dirección web http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/ se encuentra la revista "*Laboratorio virtual de triángulos con Cabri II*", dirigida por Ricardo Barroso. Dicha revista consiste en una propuesta quincenal de problemas geométricos. En ella, para la quincena del 1 al 15 de abril de 2010, se plantea el problema 558, enunciado a continuación.

Enunciado: *Dado un triángulo ABC, encontrar otro A1B1C1 tal que los simétricos de sus vértices respecto del lado opuesto, coincidan con los vértices A B C del primero* (Figura 1).

El problema proviene de un discurso pronunciado por un profesor en el que se habla de la solución (numérica y parcial) de forma muy críptica.

Varios compañeros hemos tratado de resolverlo vía geometría sintética, sin éxito. Al traducir el problema a términos algebraicos, resulta un sistema de ecuaciones algebraicas del que, al ser triangulado, da lugar a una ecuación de grado elevado, por lo que seguramente no es resoluble con regla y compás.

Ello justifica nuestra intención de tratar de resolverlo con ayuda de un sistema computacional de cálculo algebraico (Maple), utilizando cálculo aproximado, cuando los cálculos exactos no sean viables, y con un sistema de geometría dinámica (Geogebra).

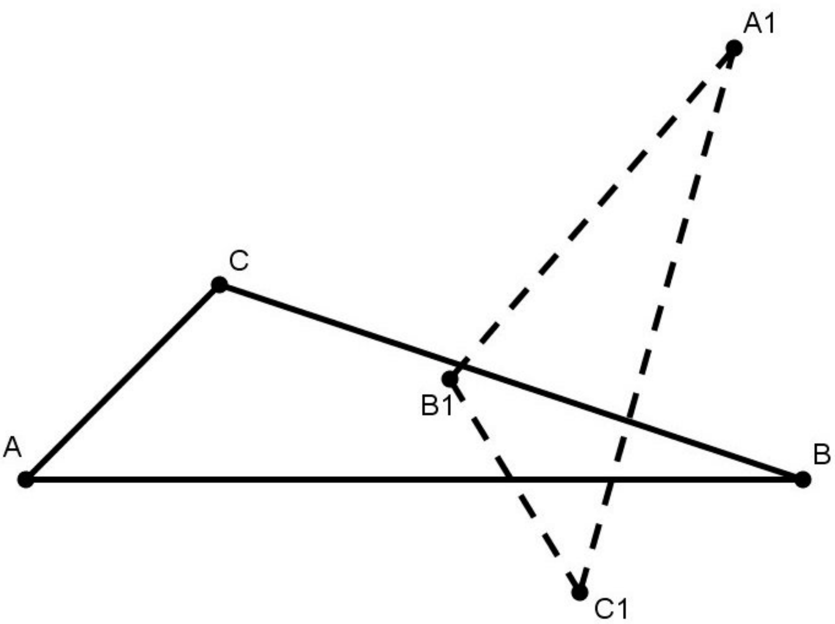

Figura 1

1. Planteamiento del problema

En la resolución del problema, se generan seis condiciones que los puntos del triángulo inicial A, B, C y los puntos del triángulo solución del problema A1, B1 y C1 deben cumplir:

1) *A1C1 perpendicular a BB1.*
2) *Colineales A1, C1 y el punto medio de BB1.*
3) *B1C1 perpendicular a AA1.*
4) *Colineales B1, C1 y el punto medio de AA1.*
5) *B1A1 perpendicular a CC1.*
6) *Colineales B1, A1 y el punto medio de CC1.*

Eligiendo el sistema de referencia con origen en A y eje de abscisas pasando por B (lo que no supone pérdida de generalidad), podemos considerar las siguientes coordenadas para los seis puntos mencionados en el enunciado del problema: A(0,0), B(1,0), C(m,n) A1(a,b), B1(c,d), C1(e,f).

Las seis condiciones geométricas anteriores se traducen en el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-(c-e)\,a-(d-f)\,b=0$$
$$(c-e)\left(f-\frac{1}{2}b\right)-\left(e-\frac{1}{2}a\right)(d-f)=0$$
$$(a-e)\,(m-c)+(b-f)\,(n-d)=0$$
$$(a-e)\left(f-\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}d\right)-\left(e-\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}c\right)(b-f)=0$$
$$(a-c)\,(1-e)-(b-d)\,f=0$$
$$(a-c)\left(d-\frac{1}{2}f\right)-\left(c-\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}\right)(b-d)=0$$

2. Solución exacta para un triangulo equilátero

Para el triángulo inicial de vértices A(0,0), B(1,0), C(1/2, $\sqrt{3}/2$) los triángulos solución obtenidos en aritmética exacta son lo siguientes:

$$\{b=\frac{1}{2},a=\frac{1}{2},e=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3},c=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3},f=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4},d=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\},$$
$$\{a=\frac{1}{2},b=\frac{-1}{2},c=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3},e=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4},f=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3},d=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\},$$
$$\{c=\frac{1}{2},a=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3},b=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4},e=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3},f=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4},d=\frac{1}{2}\},$$
$$\{c=\frac{1}{2},d=\frac{-1}{2},e=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3},b=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3},a=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4},f=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\},$$
$$\{e=\frac{1}{2},f=\frac{1}{2},c=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4},a=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3},b=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4},d=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3}\},$$
$$\{e=\frac{1}{2},f=\frac{-1}{2},c=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3},a=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{3},b=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{3},d=\frac{1}{4}\sqrt{3}+\frac{1}{4}\},$$
$$\{e=\frac{1}{4},d=0,c=\frac{1}{2},a=\frac{3}{4},b=\frac{1}{4}\sqrt{3},f=\frac{1}{4}\sqrt{3}\}$$

Por tanto, para el triángulo equilátero ABC considerado, existen 7 triángulos tales que los simétricos de sus vértices respecto de sus lados generan el triangulo original. A saber: IGH, EJF, FJK, FKD, DKL, EDL y ELJ (Figura 2).

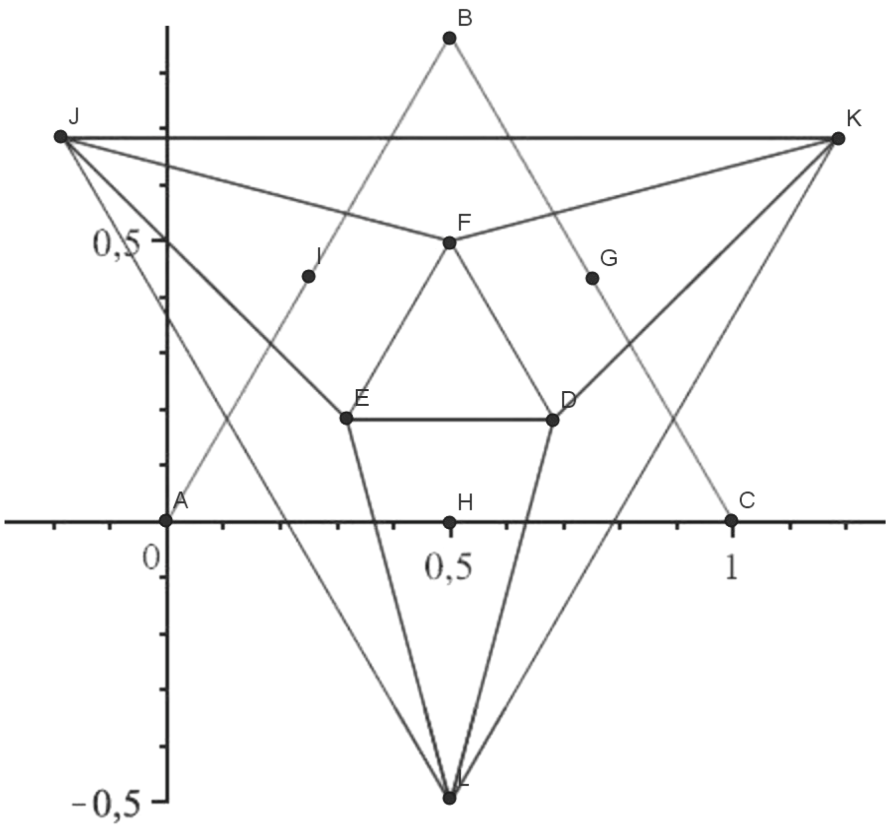

Figura 2

Propiedades observadas en los triángulos solución

Excepto IGH cuya área es ¼ de la del triángulo original, el resto poseen área $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ de la del triángulo original.

Además AEGK, BFHL y CDIJ están alineados.

A, E F y B pertenecen a la misma circunferencia, de centro J.

B, F, D y C pertenecen a la misma circunferencia, de centro K.

A, E, D y C pertenecen a la misma circunferencia, de centro L.

3. Solución numérica aproximada para triángulos escalenos

Para el triángulo inicial A(0,0), B(1,0), C(0.25,1) se obtienen cinco soluciones (Figura 3). Introducimos el dato 0.25, en vez de ¼ , para obtener la solución en coma flotante, la cual con aproximación de 5 dígitos resulta ser:

$$\{e = .62312, a = .53406, c = 1.2017, b = -.45530, f = .19004, d = .86867\},$$
$$\{d = -.77706, c = .54134, f = .10193, b = .15896, a = .68535, e = .33747\},$$
$$\{f = -.48755, b = .20415, a = .26189, e = .59058, d = .71600, c = -.34764\},$$
$$\{f = .50808 - .086512\, I, e = .25884 - .19924\, I, d = .15328 - .15444\, I,$$
$$b = .64330 - .24709\, I, a = .80967 - .33324\, I, c = .53674 - .13916\, I\}, \{$$
$$e = .25884 + .19924\, I, d = .15328 + .15444\, I, f = .50808 + .086512\, I,$$
$$b = .64330 + .24709\, I, a = .80967 + .33324\, I, c = .53674 + .13916\, I\},$$
$$\{e = -.56890, f = .72129, d = .31218, c = .19327, b = .64578, a = .34664\},$$
$$\{b = .65981, a = -.32228, f = .95813, c = .33788, d = .57365, e = 1.1251\}$$

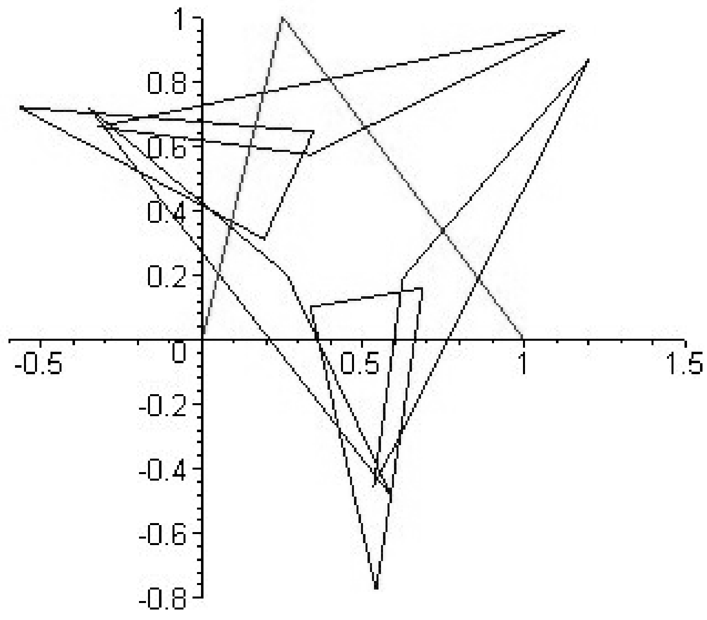

Figura 3

De modo análogo, para el triángulo inicial A(0,0), B(1,0), C(0.25,0.5) se obtienen otras cinco soluciones (Figura 4).

$\{e = .61459, c = .94611, f = .11334, a = .64033, b = -.51108, d = .52870\}$,
$\{a = .21226, d = .36140, e = .52330, c = -.077834, f = -.60347, b = .13224\}$,
$\{d = -.11763 - .39922\,I, a = .64550 - .098346\,I, b = .24733 - .28485\,I,$
$f = .17045 - .18339\,I, e = .31748 - .013630\,I, c = .52506 - .026438\,I\}$, $\{$
$e = .31748 + .013630\,I, c = .52506 + .026438\,I, a = .64550 + .098346\,I,$
$d = -.11763 + .39922\,I, f = .17045 + .18339\,I, b = .24733 + .28485\,I\}$,
$\{f = .57972, c = .30106, e = 1.0046, b = .29880, a = -.12074, d = .29544\}$,
$\{c = .12763, e = -.62812, d = .14059, b = .31882, f = .59844, a = .19315\}$,
$\{a = .90900, c = .65291, b = .51656, d = -.090878, e = .47565, f = .22106\}$

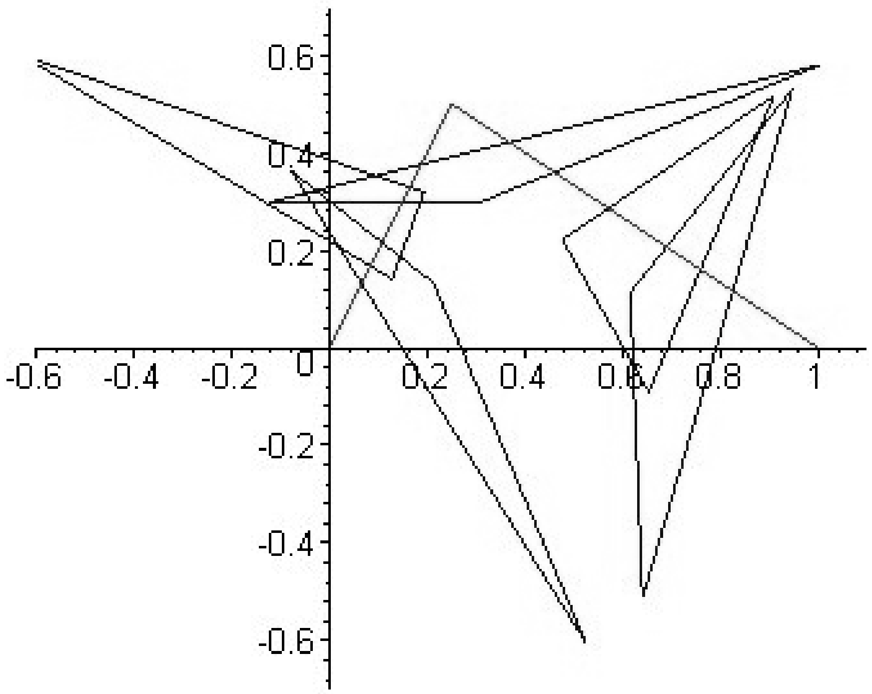

Figura 4

4. Un vistazo a las soluciones generadas para un triángulo isósceles

Hasta el momento no hemos sido capaces de resolver el sistema de forma genérica, ni siquiera dependiendo de un solo parámetro, como sería el caso isósceles. Por ello, hemos optado por resolver el problema para distintos valores de n, para el triángulo inicial A(0, 0), B(1, 0), C(0.5, n), mostrando el conjunto de soluciones obtenidas (figuras 5 a 13), por si aportan alguna luz sobre la solución.

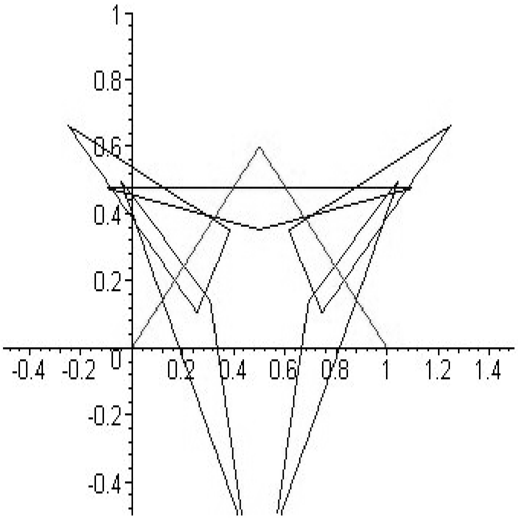

Figura 5 (n=0.6)

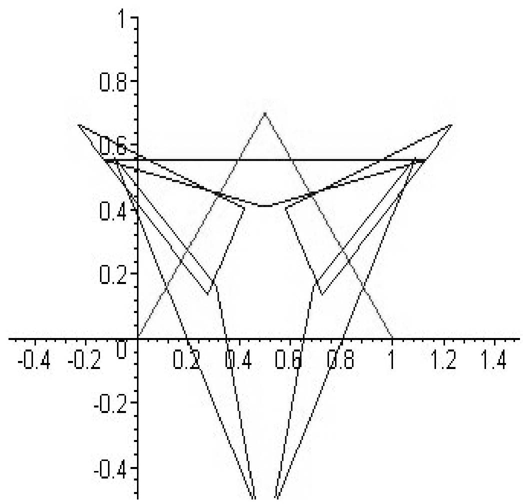

Figura 6 (n=0.7)

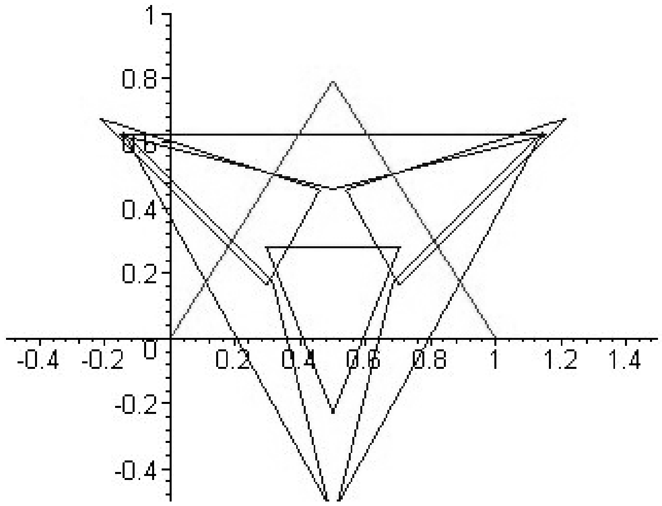

Figura 7 (n=$\frac{1}{6}\sqrt{3+8\sqrt{6}} \approx 0.7922527295...$)

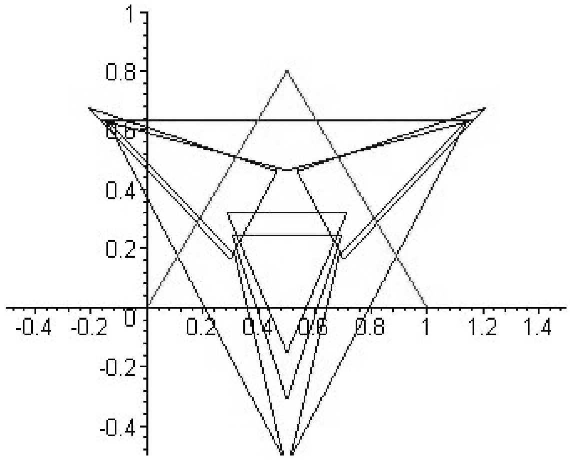

Figura 8 (n=0.8)

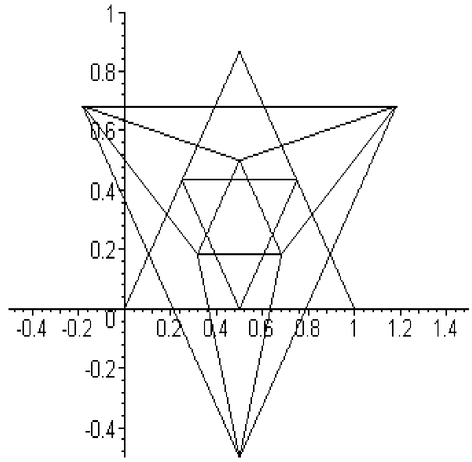

Figura 9 ($n=\frac{1}{2}\sqrt{3}$)

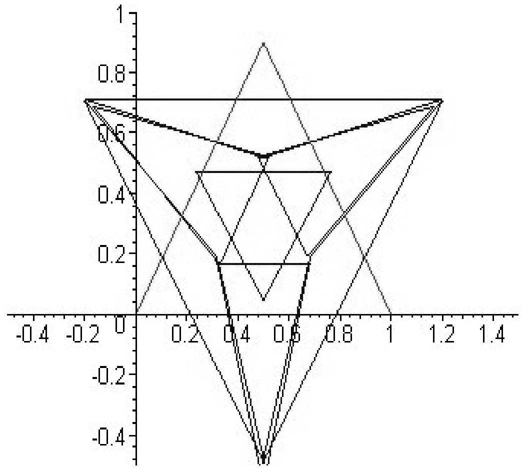

Figura 10 (n=0.9)

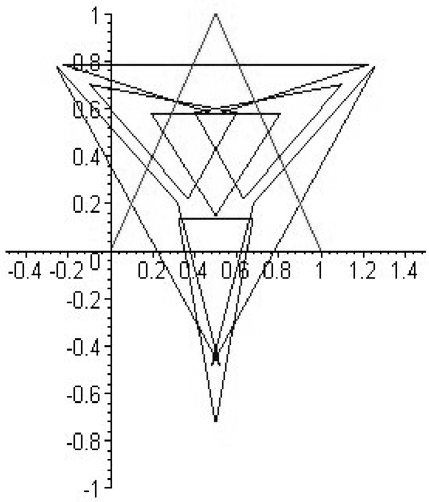

Figura 11 (n=1)

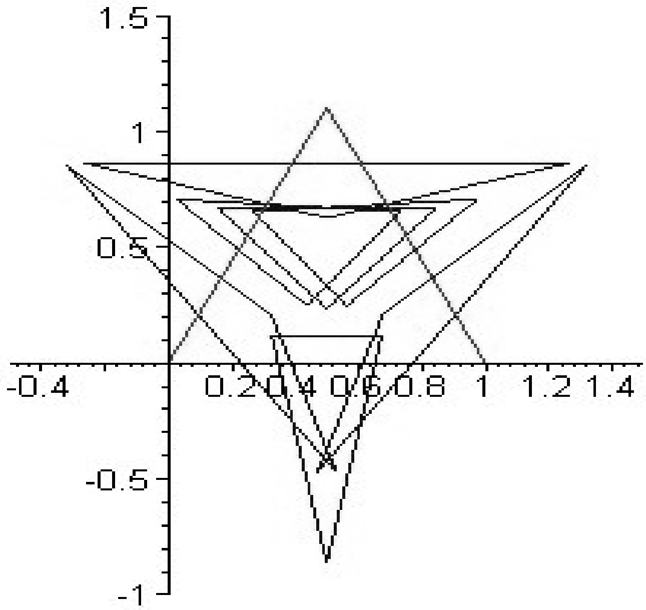

Figura 12 (n=1.1)

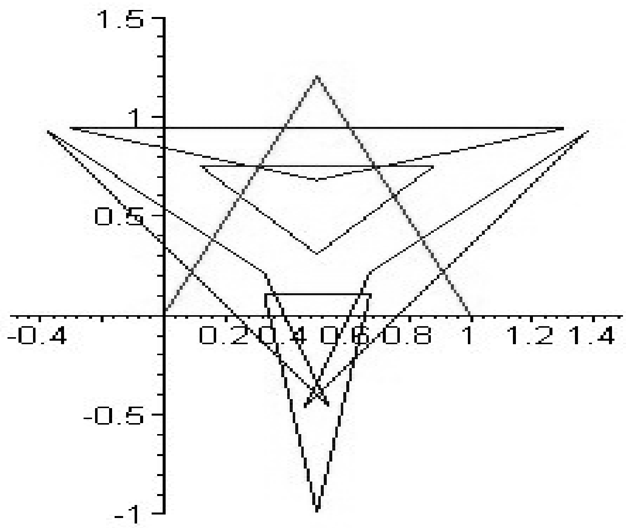

Figura 13 (n=1.2)

Observaciones: El paso a 6 soluciones ocurre en $\frac{1}{6}\sqrt{3+8\sqrt{6}} \approx 0.792252729...$

y el paso de 7 a 5 soluciones ocurre en $\frac{1}{14}\sqrt{91+112\sqrt{2}} \approx 1.128010527...$

5. Soluciones (parciales) para el triángulo isósceles con un sistema de geometría dinámica

Utilizando el sistema de geometría dinámica *Geogebra*, se llega a generar la configuración de la Figura 14, en la que se observa genera algunas soluciones.

Para un triángulo inicial A(0, 0), B(1, 0) y E(0.5, *n*), se construye la perpendicular a AB por E, creando un punto F sobre dicha perpendicular. Se construye G como punto medio de F y E, y la perpendicular a FE por G. A continuación, se construye una circunferencia de centro F y radio FA, y se obtienen los puntos de corte H e I de dicha circunferencia con la perpendicular antes descrita. Se forma el triangulo HIF y se generan los simétricos de H e I (H' e I') respecto de FI y FH, respectivamente.

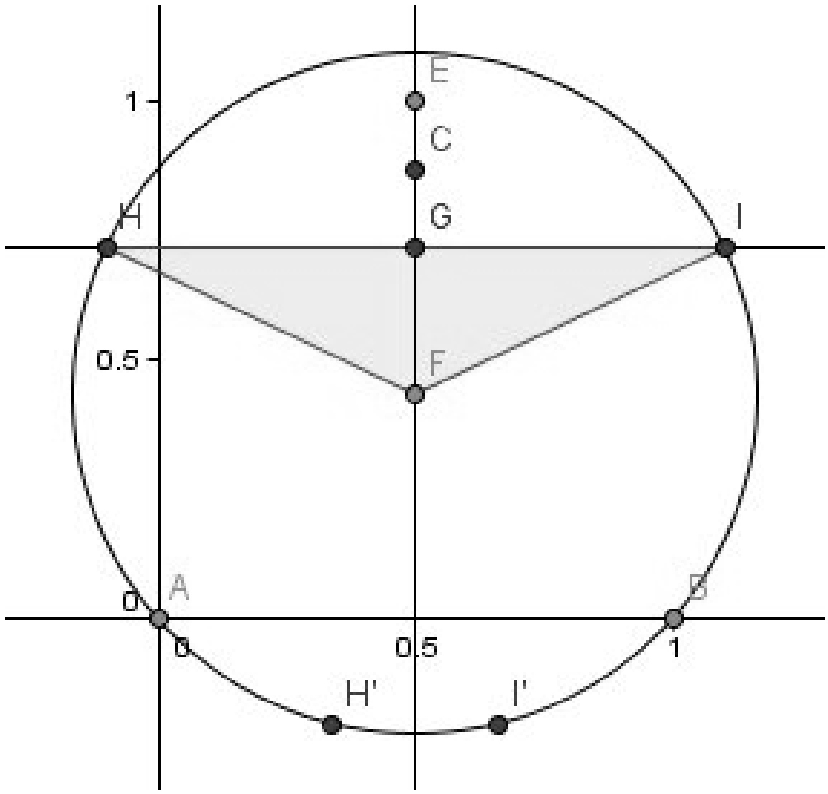

Figura 14

Desplazando F y en función del valor de *n,* se llegan a obtener hasta tres soluciones (Figuras 15 a 17).

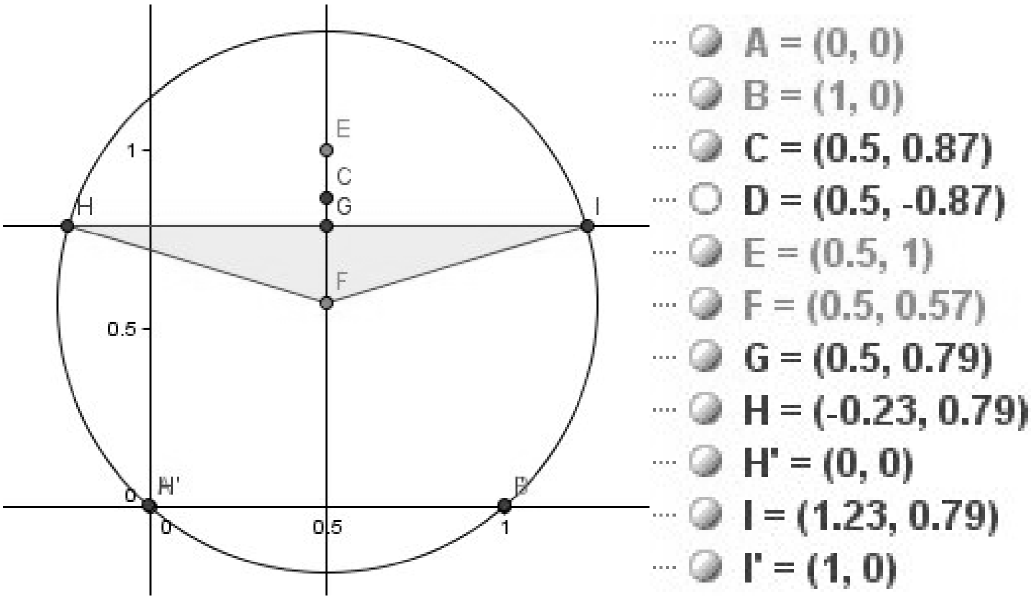

Figura 15

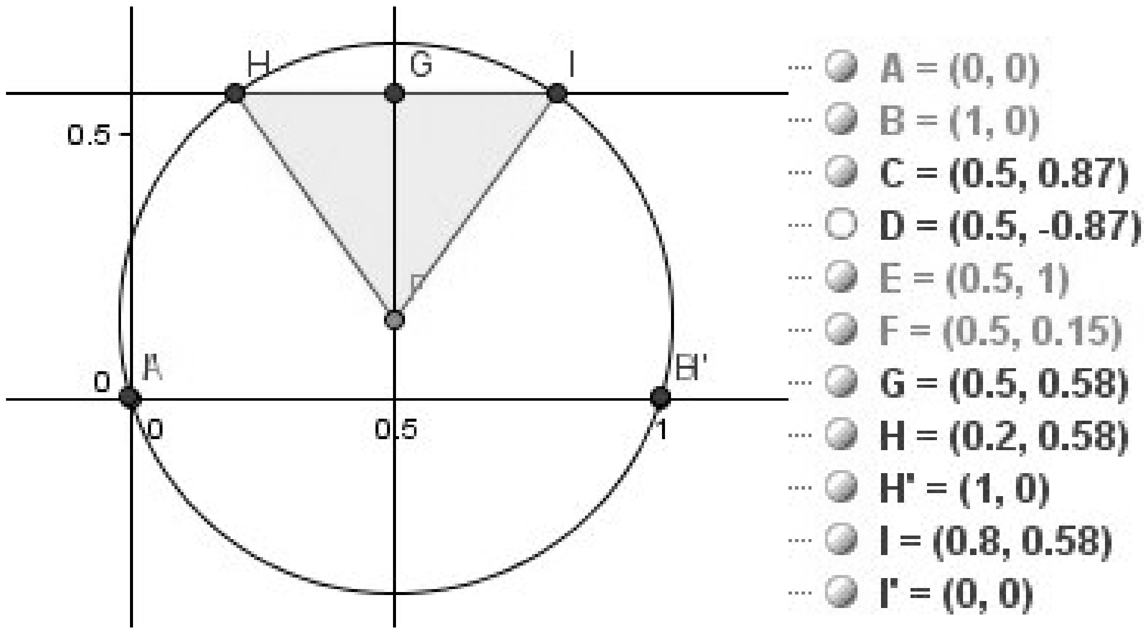

Figura 16

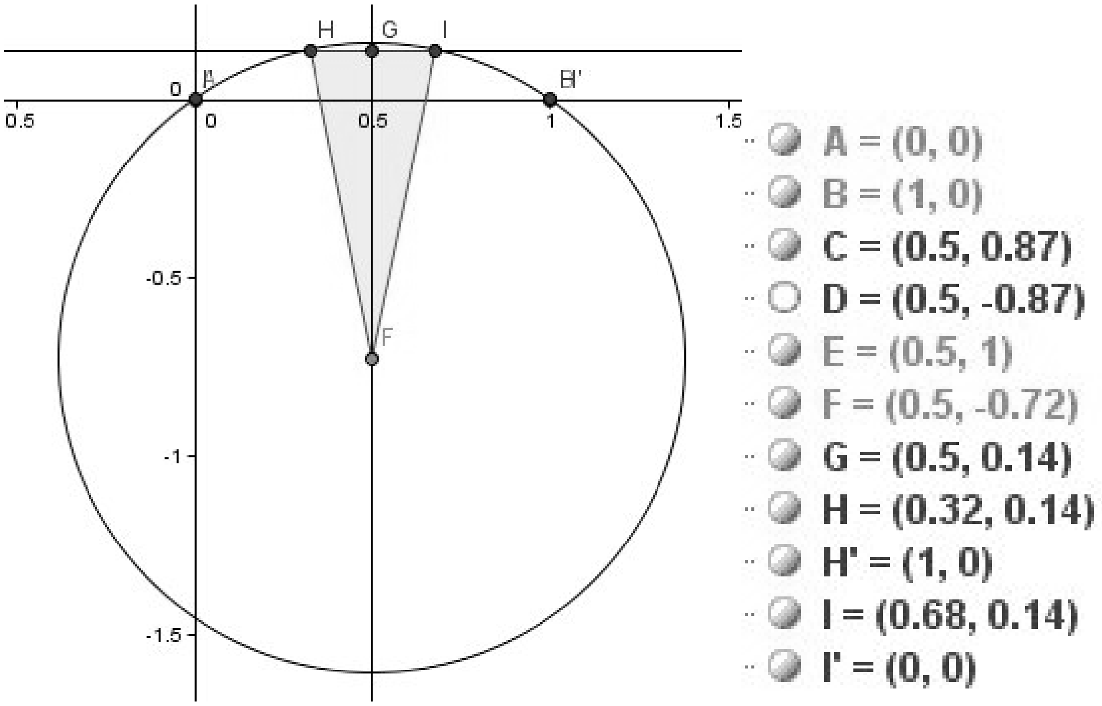

Figura 17

6. Solución general utilizando bases de Groebner

El sistema de cálculo algebraico que hemos utilizado permite resolver el sistema de ecuaciones algebraicas explicitadas en la sección 1 por el método de bases de Groebner.

En particular, para un triángulo isósceles genérico, dependiente del parámetro *n*, considerado en la sección 4, se obtiene las correspondientes soluciones dependientes de *n*, que omitimos por su extensión.

Y en el caso general, de un triángulo genérico de vértices (0,0), (1,0), (*m,n*), las correspondientes soluciones dependientes de los parámetros *m* y *n*, se obtienen soluciones aun mas extensas.

En ambos casos, las soluciones obtenidas no nos han aportado ninguna explicación digna de mención sobre el número de soluciones.

7. Un último estudio experimental

Para finalizar, decidimos realizar otro experimento. En el intervalo en que los triángulos isósceles poseen siete soluciones, ¿qué ocurre si desplazamos horizontalmente el vértice C(0.5 ,*n*)?

Para *n*=1, el vértice C puede desplazarse hasta (0.529487, 1) generando siete soluciones reales, para un triangulo escaleno…

$$\{b = -.4828039, a = .4739892, f = .1990874, d = .7707465, c = 1.267966, e = .6856757\},$$
$$\{a = .6745450, b = .1344857, f = .1414983, d = -.7245659, e = .3224680, c = .4951374\},$$
$$\{c = -.2508647, b = .1973066, f = -.4786026, d = .7886304, a = .3281060, e = .5111858\},$$
$$\{d = .1758240, f = .6370800, e = .06007702, b = .5629062, a = .6956700, c = .4333056\},$$
$$\{e = .05866074, a = .6947266, b = .5630051, d = .1762210, f = .6377504, c = .4326832\},$$
$$\{d = .2400363, c = .6614870, b = .7207440, a = 1.175396, f = .5938032, e = .4445598\},$$
$$\{d = .5731077, a = -.2187153, b = .8043563, f = .7693832, c = .5192598, e = 1.241090\}$$

Y pasando a (0.529488, 1) se generan cinco soluciones reales (las otras dos resultan ser imaginarias) para un triangulo escaleno…

$$\{b = -.4828039, c = 1.267966, e = .6856759, a = .4739889, f = .1990875, d = .7707462\},$$
$$\{d = -.7245659, c = .4951372, f = .1414985, b = .1344856, e = .3224679, a = .6745449\},$$
$$\{b = .1973065, f = -.4786025, a = .3281063, c = -.2508645, e = .5111856, d = .7886307\}, \{$$
$$d = .1760222 - .0001167556\, I, f = .6374152 - .0001971147\, I, b = .5629552 - .00002908451\, I,$$
$$c = .4329944 + .0001829777\, I, e = .05936932 + .0004164305\, I, a = .6951982 + .0002773849\, I\},$$
$$\{c = .4329944 - .0001829777\, I, f = .6374152 + .0001971147\, I, a = .6951982 - .0002773849\, I,$$
$$d = .1760222 + .0001167556\, I, e = .05936932 - .0004164305\, I, b = .5629552 + .00002908451\, I\}$$
$$, \{b = .7207445, d = .2400368, a = 1.175398, c = .6614879, e = .4445611, f = .5938036\},$$
$$\{d = .5731077, c = .5192604, b = .8043569, e = 1.241091, f = .7693827, a = -.2187149\}$$

Para *n*=1.1 el desplazamiento es hasta 0.5030005…

Para *n*=0.9 el desplazamiento es hasta 0.570977…

Para *n*=0.8 el desplazamiento es hasta 0.626497…

Para *n*=0.79225 el desplazamiento es hasta 0.631583…

A partir de aquí, aparecen intervalos no centrados en 0.5, en que vuelven a aparecer siete soluciones:

Para n=0.79 entre 0.539223… y 0.633092…

Para n=0.78 entre 0.590206… y 0.639969…

Para n=0.77 entre 0.619736… y 0.647185…

Para n=0.76 entre 0.641753… y 0.654833…

Para n=0.75 entre 0.659156… y 0.663088…

La Figura 18 muestra los puntos considerados, pertenecientes a la curva algebraica borde de la región en que el número de soluciones pasa de 5 a 7.

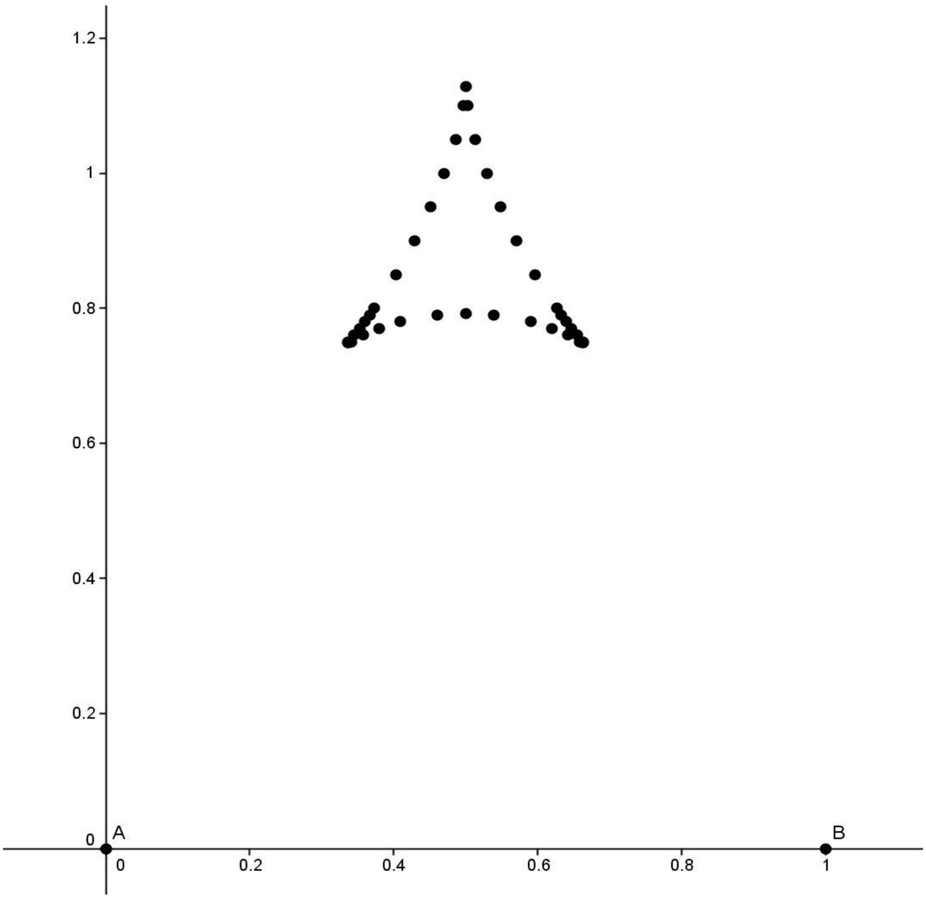

Figura 18

En resumen, se observa que el número de soluciones del problema varía entre 5 y 7. La región en la que se obtienen siete soluciones para un triángulo de base unidad es la anteriormente indicada.

Reseña de libros

DE LA FUENTE ARJONA, ANTONIO: *La Rebelión de los números* (93 págs,).
ISBN: 978-84-7960-471-9. Ediciones de la Torre. Madrid, 2010.
www.edicionesdelatorre.com

La rebelión de los números conecta las matemáticas con el teatro, a través de la aventura de un grupo de alumnos y alumnas que salen a la búsqueda de su profesor de matemáticas que ha desaparecido misteriosamente mientras impartía su lección.

La obra comienza con una insólita asamblea de los números y los signos, donde comentan con pesar el rechazo que muchas personas sienten por las matemáticas. Tras una simpática discusión sobre la importancia de cada uno de ellos, deciden comenzar *la rebelión de los números* para dar una merecida lección a los "humanos" que les tienen tan poco respeto.

Así comienza la aventura de seis amigos en búsqueda de su desaparecido profesor. En su caminar, cada vez que uno de ellos dice una frase en contra de las matemáticas, el nombre de un número se sustituye por un sonido... y así comienzan a percibirse las enormes dificultades de una vida carente de números.

Tratándose de una obra de teatro, se presenta dividida en escenas:

Escena 1. Jaleo de números
Escena 2. Una puerta en la pizarra.
Escena 3. El reloj revuelto.
Escena 4. Arte y matemáticas.
Escena 5. Peso máximo autorizado
Escena 6. Sopa de letras.
Escena 7. Un asombroso artilugio.

En las escenas se proponen enigmas o acertijos que invitan a los lectores a descubrir el trasfondo matemático de situaciones diversas, para llegar a concluir que no es posible un mundo "desmatematizado".

El libro está redactado a modo de pieza teatral. Su lectura es deliciosa. La edición está muy cuidada, con cubierta en colores. Las ilustraciones de José Manuel García Álvarez son muy divertidas.

Va dirigido a todos los públicos y puede ser especialmente útil a profesores de matemáticas que sufren alumnos que no aman precisamente las matemáticas.

Eugenio Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm (exactamente como este archivo). El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "Abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser impresas. Las figuras deben llevar debajo numeración (Figura 1, Figura 2, …), para referirse a ellas en el texto. No debe escribirse texto a ninguno de los lados de la figura, ni a la izquierda ni a la derecha (es decir, las figuras no deben intercalarse en el texto).

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta puigadam@mat.ucm.es ,o bien en un disquete formateado para PC compatible.

De otro modo, también puede enviarse impreso en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87 y 88.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948**, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia.*