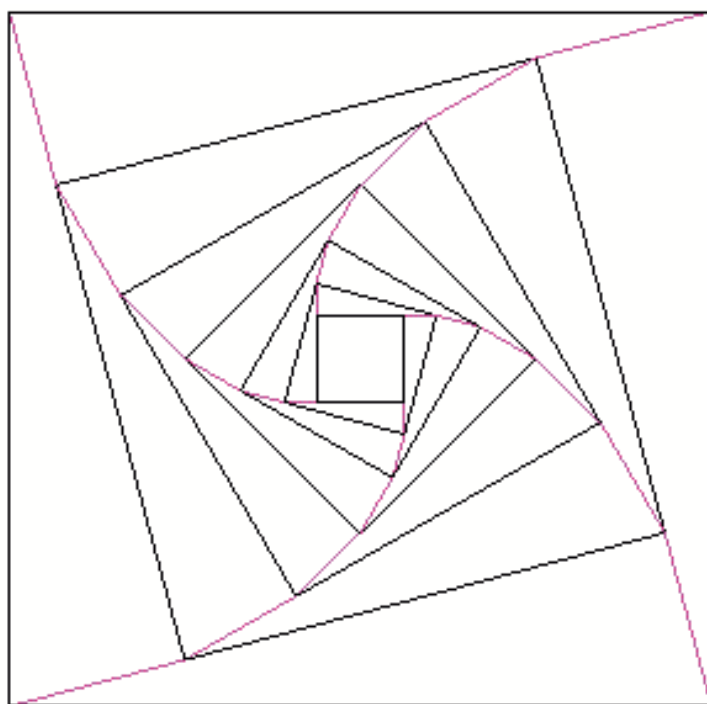


SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



**BOLETÍN N.º 88
JUNIO DE 2011**

ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2011	4
Fe de errata en número 87 del Boletín	7
Cambio provisional de Sede de la Sociedad	7
Petición de direcciones de correo electrónico a nuestros socios	7
XV Concurso de Primavera de Matemáticas, por <i>Esteban Serrano Marugán</i>	8
XLVII Olimpiada Matemática Española, por <i>Joaquín Hernández Gómez</i>	11
Estrategias para generar ecuaciones polinomiales con raíces valores de funciones trigonométricas, por <i>Aurel Muntean</i>	14
Un método algebraico-computacional para demostración automática en geometría euclídea, por <i>E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano</i>	31
Algunos problemas diofánticos, por <i>Ricardo Moreno Castillo</i>	64
Peinando barajas, por <i>Jesús García Gual</i>	72
Resolviendo un problema geométrico sobre triángulos con la ayuda de un sistema de cómputo algebraico, por <i>Nicolás Rosillo Fernández</i>	78
Reseña de libros	93
Instrucciones para el envío de originales	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción	96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).

Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 0201 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 0201
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
<http://www.sociedadpuigadam.es>

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

ENRIQUE RUBIALES CAMINO

(Relaciones Institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

(Actividades y concursos)

Secretario:

JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:

BEATRIZ BARRERO DÍAZ

CAROLINA BRAVO SANZ

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2011 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 14 de mayo de 2011, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia del Vicepresidente D. Eugenio Roanes Macías, por ausencia del Presidente D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil once.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea de 10 de abril de 2010, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Vicepresidente sobre las actividades de la Sociedad.

Se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 85, 86 y 87 del Boletín.

El Vicepresidente informa de los Concursos de Problemas de Matemáticas reseñados en el Boletín de nuestra Sociedad:

Puig Adam: El XXVIII Concurso “Puig Adam” se celebró el 12 de junio de 2010, con buena participación, 86 estudiantes. Los resultados se publicaron en el nº 86 del Boletín. Este año el XXIX Concurso se celebrará el 11 de junio de 2011.

Intercentros: Al igual que otros años se celebró el penúltimo sábado de noviembre en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Con una buena participación de 52 centros y 432 estudiantes de nuestra Comunidad. En el nº 87 del Boletín apareció una reseña de los resultados del X Concurso *Intercentros*.

Fase Regional de la Olimpiada Matemática Española: En nº 87 del Boletín aparecieron publicados los problemas de la Fase Local de la XLVII Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid.

Concurso de Primavera: El sábado 9 de abril se celebró el XV Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid con gran éxito, como en años anteriores. Participaron más de 3600 alumnos en la 2ª fase del Concurso, celebrado en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Es de destacar que algunos miembros del equipo organizador son miembros de nuestra Sociedad.

Por otra parte, se informa que, por las obras en el edificio de la Facultad de Educación y de forma provisional, la Sede de nuestra Sociedad queda ubicada en el despacho 0201 de dicha Facultad.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Se someten a aprobación las cuentas desde el 11 de abril de 2010 hasta el 14 de mayo de 2011. Pasando a la votación quedan aprobadas por unanimidad.

A la vista de las cuentas aprobadas, y de la situación de tesorería de la Sociedad, se propone el mantenimiento de la cuota, regularizando su cobro en el mes de octubre para ajustarlo al curso académico.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

El Vicepresidente manifiesta que procede el cese de los siguientes miembros de la Junta Directiva de la Sociedad, el vicepresidente D. Juan Bosco Romero Márquez y los vocales D. Julio Fernández Biarge y D. Eugenio Roanes Lozano. Se pasa a la nueva elección de los cargos, quedando esta de la siguiente manera:

Vicepresidente: D. Juan Bosco Romero Márquez

Vocales: D. Julio Fernández Biarge y D. Eugenio Roanes Lozano

5. Asuntos de trámite

Se acuerda por unanimidad solicitar a nuestros socios su dirección de correo electrónico a fin de mejorar nuestra comunicación con ellos.

6. Ruegos y preguntas

Se recuerda a nuestros socios que la Federación nos envía 10 ejemplares de la Revista SUMA, con la finalidad de que la entreguemos a quienes no la hubieran recibido por el cauce usual de distribución directa. En tal caso ha de comunicárnoslo, preferiblemente a nuestro correo electrónico.

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce cincuenta y cinco minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente

El Secretario

FE DE ERRATA en nº 87 del Boletín

En la página 17, líneas 13 y 14, así como en la página 19, líneas 10, 18, 24 y 25, aparece como símbolo de suma directa $\mathbb{A}$ en lugar de $\oplus$. Pedimos disculpas por el error (es posible que la versión de Word a partir de la cual se imprimió fuera distinta de la original del artículo).

Cambio provisional de Sede de la Sociedad

Por obras en gran parte de la Facultad de Educación de la Univ. Complutense, nuestra Sede ha pasado provisionalmente a ocupar el Despacho 0201 de la misma Facultad, como queda reflejado en la página 2 de este número del Boletín. El teléfono sigue siendo el mismo, pero aconsejamos a nuestros socios que para comunicarse con la Sede utilicen preferentemente el correo electrónico.

Petición de direcciones de correo electrónico a nuestros socios

Con el fin de mejorar la comunicación con nuestros socios, les solicitamos que quienes usen correo electrónico nos envíen un mensaje a la dirección de correo del Secretario de nuestra Sociedad

jmsordoj@edu.ucm.es

en que figure el nombre y apellidos del Socio y la dirección de correo electrónico en que desee recibir nuestros mensajes.

XV Concurso de Primavera de Matemáticas

¡Hemos cumplido quince años!

Lo celebramos con todos vosotros con uno de los problemas de este concurso:

Elvira tiene una memoria prodigiosa. Todos los años felicita a sus 46 amigos en el día de su cumpleaños. Si ninguno de ellos nació en 29 de febrero, ¿cuántos días, como máximo, Elvira no felicitará a ninguno de sus amigos en 2011?

A) 365 B) 364 C) 342 D) 319 E) 46

En la primera fase de esta edición participaron 37000 estudiantes de entre 10 y 18 años que estudian en 483 centros educativos de la Comunidad de Madrid. Y de ellos, 3136 se dieron cita el sábado 9 de abril en la fase final que se celebró en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Han leído bien: 37000 chicos y chicas que, de manera voluntaria, se presentan a un concurso de resolución de problemas. De los cuales, más de 3000 madrugaron un sábado para volver a enfrentarse con otros veinticinco problemas. La Facultad de Matemáticas se convirtió literalmente en un hervidero de seres humanos jovencitos, adultos (padres y profesores) y más adultos (abuelos).

Los chicos salían hablando del mago Hortalizo:

En una gran caja hay 1000 garbanzos, 200 lentejas y 360 guisantes. El afamado mago Hortalizo convierte: en cada golpe de tambor tres garbanzos en dos lentejas y un guisante. ¿En qué golpe de tambor conseguirá Hortalizo tener el mismo número de cada una de las tres legumbres?

A) 150 B) 155 C) 156 D) 158 E) 160

Al miércoles siguiente se produjo otro de los momentos más especiales: la entrega de premios a los 150 ganadores. No es nada habitual encontrarse con un salón de actos de una facultad repleto de gente. Y más sorprendente es aún si los que se sientan en las butacas son más de un centenar de adolescentes que comparten una pasión: el gusto por las matemáticas. Son los ganadores del XV Concurso

de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, acompañados de sus padres, de sus profesores y en muchos casos, como recordaron desde la mesa, de sus abuelos.

Visto desde fuera asombra también constatar que esos chicos y chicas son adolescentes absolutamente normales, es decir, unos ruidosos, otros tranquilos, algunos reservados, todos alegres y juguetones, unos pocos caprichosos, aquellos de esta manera y aquellos otros diferentes. Lo dicho, jóvenes estupendos que sienten las matemáticas como un reto nada aburrido. En palabras de uno de ellos: *“cada vez que me enfrento a un problema de matemáticas lo paso muy bien y si encima lo resuelvo, mucho mejor”*. Es el resumen exacto de lo que pretendemos con este concurso.

Como siempre, os damos las gracias a todos los profesores que habéis sabido motivar a vuestros estudiantes, que les habéis acompañado y que les animáis a participar. Sin la implicación de vosotros, un concurso de este tipo estaría condenado al fracaso más absoluto.

Y, por supuesto, nuestro agradecimiento más profundo a todos los chicos y chicas que año tras año esperáis con ilusión otros veinticinco problemas. En representación de todos ellos os mostramos el listado de los tres primeros premiados de cada nivel.

PRIMER NIVEL (5º y 6º de Primaria)

1. Diego González Villar. 5º de Primaria. Colegio Mirabal
2. Andrés Ruiz Benito. 6º de Primaria. CEIP Federico García Lorca
3. Hugo García González. 5º de Primaria. Colegio Padre Poveda

SEGUNDO NIVEL (1º y 2º ESO)

1. Álvaro Robledo Vega. 2º ESO. Colegio Peñalar
2. Berta García González. 1º ESO. IES San Juan Bautista
3. Álvaro Arenas González. 1º ESO. Liceo Francés de Madrid

TERCER NIVEL (3º y 4º ESO)

1. Pablo Esteban de la Iglesia. 4º ESO. Colegio Fray Luis de León
2. Miguel Barrero Santamaría. 3º ESO. IES Alameda de Osuna
3. Guillermo Gutiérrez Cuenca. 4º ESO. IES Ramiro de Maeztu

CUARTO NIVEL (1º y 2º Bachillerato)

1. Jaime Mendizábal Roche. 1º Bachillerato. IES Ramiro de Maeztu
2. Pablo Boixeda Álvarez. 2º Bachillerato. Colegio Alemán de Madrid
3. Diego Peña Castillo. 2º Bachillerato. Colegio Santa María del Yermo

Toda la información está a vuestra disposición en nuestra página web, en la que encontraréis las pruebas de este año y años anteriores:

www.mat.ucm.es/~conprim/

Nos despedimos con otro problema:

En Matematilandia se ha organizado un concurso de Matemáticas y participan ¡todos los centros de esa ciudad! Cada uno envía un equipo de tres estudiantes y en la primera edición del concurso todos los estudiantes obtuvieron diferente puntuación. La puntuación de Alicia fue la mediana de las puntuaciones y fue la más alta de la puntuaciones de su equipo. Sus compañeras de equipo Beatriz y Carolina quedaron en los puestos 37º y 64º respectivamente. ¿Cuántos centros hay en Matematilandia?

A) 22

B) 23

C) 24

D) 25

E) 26

Esteban Serrano Marugán

Miembro del Comité Organizador del
Concurso de Primavera de Matemáticas

XLVII Olimpiada Matemática Española

Fase Nacional. Pamplona

Durante el fin de semana, desde el jueves 24 al domingo 27 de marzo, se celebró en Pamplona la fase nacional de esta XLVII O.M.E.

Los 120 estudiantes que representaban a las distintas comunidades del Estado compitieron durante dos días con seis problemas difíciles, como puede observar cualquier lector que dedique tiempo a resolverlos, en un ambiente absolutamente agradable, con una organización realmente excepcional y unos estudiantes ejemplares en su comportamiento.

Al margen de la actividad central de la Olimpiada, las sesiones de resolución de problemas, la Organización programó visitas culturales a Estella y al Planetarium de Pamplona que atrajeron a los profesores acompañantes y relajaron a los estudiantes participantes.

Como punto digno de resaltar, se celebró en la mañana del viernes 25 una reunión con todos los delegados y profesores acompañantes, en la que se comunicó la decisión de la Comisión de Olimpiadas de restringir en el futuro el número de participantes en esta 2ª fase de la O.M.E. motivado, entre otras cosas, creemos, por la actual crisis económica que repercute, naturalmente, en la organización de la Olimpiada. Se acordó que serán 75 estudiantes, en lugar de 120, los participantes en esta 2ª fase, lo que supone que todas las Comunidades presentarán 3 estudiantes, salvo Andalucía, que presentará 12, Cataluña y Madrid, que presentarán 9, la Comunidad Valenciana, que presentará 6 y Ceuta y Melilla, que presentarán 1 estudiante cada una de las dos. Ello no será óbice para que se mantengan las becas del M.E.C., para tres estudiantes por cada universidad pública en cada Comunidad, siendo éstas las que organizarán la fase intermedia.

Los estudiantes de nuestra Comunidad obtuvieron unos resultados muy buenos, no excepcionales como en las pasadas ediciones, pero sí excelentes, como refleja el cuadro final, en el que, además de los enunciados de los problemas, hacemos notar algunos resultados.

Y aunque aún no sabemos dónde será la próxima O.M.E., aunque todo apunta a Cantabria, esperamos que resulte tan atractiva como la última.

Joaquín Hernández

Problemas propuestos y ganadores en la Fase Nacional de la XLVII Olimpiada Matemática Española

Primera sesión, viernes 25 de marzo

Problema 1

En un polígono regular de 67 lados trazamos todos los segmentos que unen dos vértices, incluidos los lados del polígono. Elegimos n de estos segmentos y asignamos a cada uno de ellos un color entre 10 colores posibles. Halla el valor mínimo de n que garantiza que, independientemente de cuáles sean los n segmentos elegidos y de cómo se haga la asignación de colores, siempre habrá un vértice del polígono que pertenece a 7 segmentos del mismo color.

Problema 2

Sean a, b, c números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} + \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}} \geq \frac{5}{2}$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Problema 3

Sean A, B, C, D cuatro puntos en el espacio, tales que no hay ningún plano que pase por los cuatro a la vez. Los segmentos AB, BC, CD, DA son tangentes a una misma esfera. Demuestra que los cuatro puntos de tangencia están en un mismo plano.

Segunda sesión, sábado 26 de marzo.

Problema 4

Sea ABC un triángulo con $\angle B = 2\angle C$ y $\angle A > 90^\circ$. Sean D el punto de la recta AB tal que CD es perpendicular a AC , y M el punto medio de BC . Demuestra que $\angle AMB = \angle DMC$.

Problema 5

Cada número racional se pinta de un color, usando solo uno de dos colores, blanco o rojo. Se dice que una tal coloración es *sanferminera* cuando para cada dos números racionales x, y , con $x \neq y$, si se verifica una de las tres condiciones siguientes: a) $xy = 1$; b) $x + y = 0$; c) $5x + y = 1$, entonces x e y están pintados de distinto color. ¿Cuántas coloraciones *sanfermineras* hay?

Problema 6

Sea (S_n) , con $n \geq 0$, la sucesión definida por:

- i. $S_n = 1$ para $0 \leq n \leq 2011$.
- ii. $S_{n+2012} = S_{n+2011} + S_n$, para $n \geq 0$.

Prueba que, para todo entero no negativo a , se cumple que $S_{2011a} - S_n$ es múltiplo de 2011.

Medallas de Oro

- 1.- Byoung Tae Bae (Madrid)
 - 2.- Darío Nieuwenhuis Nivela (Cataluña)
 - 3.- Óscar Rivero Salgado (Galicia)
 - 4.- Pablo Boixeda Álvarez (Madrid)
 - 5.- Cassius Manuel Pérez de los Cobos Hermosa (Castilla-La Mancha)
 - 6.- Eric Milesi Vidal (Cataluña)
- (El séptimo clasificado, Jaime Mendizábal Roche (Madrid) entra a formar parte del equipo en la Internacional, sustituyendo a Byoung, que es coreano).

Los madrileños

Byoung Bae Tae, Oro
Pablo Boixeda Álvarez, Oro
Jaime Mendizábal Roche, Plata
Raúl González Molina, Bronce
Lorenzo Esteban de la Iglesia, Bronce

Sin premio se quedaron los otros cuatro

Fernando Gago Encinas
Aitor Alonso Lorenzo
Alejandro González Recuenco
Kostadin Ivanov Kostadinov

Estrategias para generar ecuaciones polinomiales con raíces valores de funciones trigonométricas

Aurel Muntean

IES Severo Ochoa de Alcobendas

Doctor en Matemáticas por la Univ. “Babes-Bolyai” de Cluj-Napoca, Rumanía
aurelmuntean@yahoo.com

Abstract

The equations with trigonometric values as roots were obtained in the 1959's by Kenneth W. Wegner. The present article is concerned with some strategies and remarks on how to generate such equations. Its starting point is certain trigonometric equations that involve the trigonometric functions of multiple angles such as $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$ and $\tan n\varphi$. Finally, a short list of algebraic numbers expressed as trigonometric functions of rational multiples of π are offered.

Introducción

En 1959, en un artículo de pequeña extensión, Kenneth W. Wegner [1] proporcionó las 64 ecuaciones polinomiales irreducibles, con coeficientes enteros, de grado 2, 3, 4, 5 y 6, cuyas raíces son de la forma $\pm \operatorname{sen} \alpha$, $\pm \operatorname{cos} \alpha$, $\pm \operatorname{tg} \alpha$, $\pm \operatorname{ctg} \alpha$, $\pm \operatorname{sec} \alpha$, $\pm \operatorname{cosec} \alpha$, con α un número racional de grados, subrayando que éstas son las únicas posibles. De éstas, 14 son de grado II, 8 son de grado III, 18 son de grado IV, 4 son de grado V y 20 son de grado VI. No hay ninguna de grado VII.

El objetivo de este trabajo es mostrar algunas técnicas para originar tales ecuaciones con coeficientes enteros, cuyas raíces sean valores de funciones trigonométricas de ángulos múltiplos racionales de π radianes.

La obtención de dichas ecuaciones requiere de diversas técnicas trigonométricas y algebraicas, y la manipulación de variables transformadas y al mismo tiempo actuaciones a través de la observación.

La idea básica para generar tales ecuaciones consiste en considerar una ecuación trigonométrica y transformarla en una ecuación polinómica mediante una sustitución adecuada.

Por no existir una denominación para este tipo de ecuaciones, emplearemos una nomenclatura abreviada cómoda, llamándolas *ecuaciones de tipo Wegner*.

El lector comprobará fácilmente que las técnicas y los procedimientos de este trabajo corresponden a un “nivel matemático” que se podría impartir incluso en el Bachillerato.

1 Las 6 ecuaciones de grado II de tipo Wegner, de fácil obtención

De las 14 ecuaciones de grado II de tipo Wegner, veamos primeramente las seis que son de fácil obtención:

- Los números $\pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}$ son raíces de la ecuación polinómica $2x^2 - 1 = 0$
- Los números $\pm \operatorname{cosec} \frac{\pi}{4}$ son raíces de la ecuación polinómica $x^2 - 2 = 0$
- Los números $\pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}$ verifican la ecuación polinómica $4x^2 - 3 = 0$
- Los números $\pm \operatorname{cosec} \frac{\pi}{3}$ verifican la ecuación polinómica $3x^2 - 4 = 0$
- Los números $\pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ son raíces de la ecuación polinómica $x^2 - 3 = 0$
- Los números $\pm \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$ son raíces de la ecuación polinómica $3x^2 - 1 = 0$

2 Estrategias para generar ecuaciones de tipo Wegner

Seguidamente, a través de varios ejemplos, presentamos unas estrategias que proporcionan herramientas para generar ecuaciones polinómicas irreducibles, con coeficientes enteros, que tengan todas las raíces simples e irracionales, y estas raíces sean valores de funciones trigonométricas.

2.1 Procedimiento consistente en multiplicar ciertas ecuaciones polinómicas con coeficientes irracionales cuyas raíces son valores de funciones trigonométricas

Ejemplo 1. Partimos de la fórmula trigonométrica

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha} \iff (3 \operatorname{tg}^2 \alpha - 1) \operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg}^3 \alpha - 3 \operatorname{tg} \alpha.$$

Haciendo uso de la igualdad $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ y efectuando sustituciones para sucesivos valores 5° , 65° , -55° de α , obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha = 5^\circ \quad : \quad (3 \operatorname{tg}^2 5^\circ - 1) \operatorname{tg} 15^\circ &= \operatorname{tg}^3 5^\circ - 3 \operatorname{tg} 5^\circ \\ (3 \operatorname{tg}^2 5^\circ - 1)(2 - \sqrt{3}) &= \operatorname{tg}^3 5^\circ - 3 \operatorname{tg} 5^\circ \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha = 65^\circ \quad : \quad (3 \operatorname{tg}^2 65^\circ - 1) \operatorname{tg} 195^\circ &= \operatorname{tg}^3 65^\circ - 3 \operatorname{tg} 65^\circ \\ (3 \operatorname{tg}^2 65^\circ - 1)(2 - \sqrt{3}) &= \operatorname{tg}^3 65^\circ - 3 \operatorname{tg} 65^\circ \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \alpha = -55^\circ \quad : \quad (3 \operatorname{tg}^2(-55^\circ) - 1) \operatorname{tg}(-165^\circ) &= \operatorname{tg}^3(-55^\circ) - 3 \operatorname{tg}(-55^\circ) \\ (3 \operatorname{tg}^2(-55^\circ) - 1)(2 - \sqrt{3}) &= \operatorname{tg}^3(-55^\circ) - 3 \operatorname{tg}(-55^\circ) \end{aligned} \quad (3)$$

Así, es evidente que la ecuación:

$$(3x^2 - 1)(2 - \sqrt{3}) = x^3 - 3x \quad (4)$$

tiene las raíces

$$x_1 = \operatorname{tg} 5^\circ, \quad x_2 = \operatorname{tg} 65^\circ, \quad x_3 = -\operatorname{tg} 55^\circ$$

Del mismo modo, a partir de $\operatorname{tg} 75^\circ = 2 + \sqrt{3}$, llegamos a la ecuación:

$$(3x^2 - 1)(2 + \sqrt{3}) = x^3 - 3x \quad (5)$$

cuyas raíces son

$$x_4 = \operatorname{tg} 25^\circ, \quad x_5 = \operatorname{tg} 85^\circ, \quad x_6 = -\operatorname{tg} 35^\circ$$

De las ecuaciones (4) y (5) se deduce:

$$[(3x^2 - 1)(2 - \sqrt{3}) - (x^3 - 3x)] \cdot [(3x^2 - 1)(2 + \sqrt{3}) - (x^3 - 3x)] = 0$$

llegando finalmente a la ecuación

$$x^6 - 12x^5 + 3x^4 + 40x^3 + 3x^2 - 12x + 1 = 0 \quad (6)$$

con las siguientes raíces:

$$\operatorname{tg} 5^\circ, \quad \operatorname{tg} 25^\circ, \quad -\operatorname{tg} 35^\circ, \quad -\operatorname{tg} 55^\circ, \quad \operatorname{tg} 65^\circ, \quad \operatorname{tg} 85^\circ$$

2.2 El uso de transformadas para “inventar” otras ecuaciones

Hay que señalar que, una vez obtenida una ecuación de tipo Wegner, usando las transformaciones

$$x \longrightarrow -x, \quad x \longrightarrow \frac{1}{x}, \quad x \longrightarrow -\frac{1}{x}$$

se pueden conseguir otras ecuaciones del mismo tipo.

Ejemplo 2. Continuando con el ejemplo anterior, sea

$$p(x) = x^6 - 12x^5 + 3x^4 + 40x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

Es obvio que $p(x) = 0$ es precisamente la ecuación (6) y entonces claramente la ecuación transformada

$$p(-x) = x^6 + 12x^5 + 3x^4 - 40x^3 + 3x^2 + 12x + 1 = 0$$

tiene las raíces

$$-\operatorname{tg} 5^\circ, \quad -\operatorname{tg} 25^\circ, \quad \operatorname{tg} 35^\circ, \quad \operatorname{tg} 55^\circ, \quad -\operatorname{tg} 65^\circ, \quad -\operatorname{tg} 85^\circ$$

2.3 Procedimientos basados en desarrollos trigonométricos

Por medio de ciertas ecuaciones trigonométricas es posible generar ecuaciones algebraicas equivalentes de tipo Wegner cuyas raíces conocemos de antemano.

2.3.1 Procedimiento basado en el desarrollo de la función $\sin n\varphi$

En el desarrollo que vamos a seguir empleamos la fórmula

$$\sin n\varphi = C_n^1 \cos^{n-1}\varphi \sin \varphi - C_n^3 \cos^{n-3}\varphi \sin^3 \varphi + C_n^5 \cos^{n-5}\varphi \sin^5 \varphi - \dots$$

Ejemplo 3. Comenzamos con una ecuación trigonométrica cuya solución conocemos. Consideremos por un lado,

$$\sin 7x = 0 \iff x_k = \frac{k\pi}{7} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Por otra parte, efectuando el desarrollo de la función $\sin 7x$ obtenemos sucesivamente:

$$C_7^1 \cos^6 x \sin x - C_7^3 \cos^4 x \sin^3 x + C_7^5 \cos^2 x \sin^5 x - C_7^7 \sin^7 x = 0$$

$$7 \cos^6 x - 35 \cos^4 x \sin^2 x + 21 \cos^2 x \sin^4 x - \sin^6 x = 0$$

Teniendo en cuenta que

$$2 \sin x = t \implies \begin{cases} \cos^2 x = 1 - \frac{t^2}{4} \\ \cos^4 x = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{16} \\ \cos^6 x = \left(1 - \frac{t^2}{4}\right)^3 = 1 - \frac{3t^2}{4} + \frac{3t^4}{16} + \frac{t^6}{64} \end{cases}$$

podemos pasar de la ecuación trigonométrica a una ecuación polinómica:

$$7\left(1 - \frac{3t^2}{4} + \frac{3t^4}{16} + \frac{t^6}{64}\right) - 35\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{16}\right) \frac{t^2}{4} + 21\left(1 - \frac{t^2}{4}\right) \frac{t^4}{16} - \frac{t^6}{64} = 0$$

llegando finalmente a la ecuación

$$t^6 - 7t^4 + 14t^2 - 7 = 0 \tag{7}$$

cuyas raíces son

$$\pm 2 \sin \frac{\pi}{7}, \quad \pm 2 \sin \frac{2\pi}{7}, \quad \pm 2 \sin \frac{3\pi}{7}$$

Nota 1: Obsérvese que la raíz $t_1 = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$ representa la longitud del lado de un heptágono regular inscrito en una circunferencia de radio 1, mientras que $t_2 = 2 \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7}$ y $t_3 = 2 \operatorname{sen} \frac{3\pi}{7}$ corresponden a la longitud de sus diagonales. Veamos ahora qué consecuencias pueden derivarse.

Ejemplo 4. Con el cambio $t = 2z$ en la ecuación (7) se obtiene la ecuación

$$64z^6 - 112z^4 + 56z^2 - 7 = 0 \quad (8)$$

que tiene las siguientes raíces:

$$\pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}, \quad \pm \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7}, \quad \pm \operatorname{sen} \frac{3\pi}{7}$$

Ejemplo 5. Haciendo la transformación $z \longrightarrow \frac{1}{z}$ en la ecuación (8) se obtendrá:

$$7z^6 - 56z^4 + 112z^2 - 64 = 0$$

con las raíces:

$$\pm \operatorname{cosec} \frac{\pi}{7}, \quad \pm \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{7}, \quad \pm \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{7}$$

Ejemplo 6. Tomando $t^2 = y$, la ecuación (7) se convierte en:

$$y^3 - 7y^2 + 14y - 7 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y_1 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{7}, \quad y_2 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{7}, \quad y_3 = 4 \operatorname{sen}^2 \frac{3\pi}{7}$$

Como es fácil ver, esta ecuación no es de tipo Wegner, pero realizando el cambio $y = 2(1 - u)$ nos sirve para establecer la ecuación

$$8u^3 + 4u^2 - 4u - 1 = 0$$

cuyas soluciones son de la forma

$$u_k = 1 - \frac{y_k}{2} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{k\pi}{7} = \cos \frac{2k\pi}{7}, \quad \text{donde } k \in \{1, 2, 3\}$$

2.3.2 Procedimiento basado en el desarrollo de la función $\cos n\varphi$

Recurrimos en este procedimiento a la fórmula:

$$\cos n\varphi = \cos^n \varphi - C_n^2 \cos^{n-2} \varphi \operatorname{sen}^2 \varphi + C_n^4 \cos^{n-4} \varphi \operatorname{sen}^4 \varphi - \dots$$

Ejemplo 7. Por medio de la ecuación trigonométrica

$$\cos 5x = 0 \iff x_k = \frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

es posible generar una ecuación algebraica realizando el desarrollo de la función $\cos 5x$. Así aparecen las ecuaciones equivalentes:

$$\cos^5 x - C_5^2 \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + C_5^4 \cos x \operatorname{sen}^4 x = 0$$

$$16 \cos^5 x - 20 \cos^3 x + 5 \cos x = 0$$

Esta última ecuación es interesante, puesto que llamando $t = \cos x$ se convierte en

$$16 t^5 - 20 t^3 + 5 t = 0$$

cuyas raíces son

$$t_k = \cos \left(\frac{\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} \right), \text{ con } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Eliminando la solución $t = 0$, llegamos a la ecuación

$$16 t^4 - 20 t^2 + 5 = 0 \tag{9}$$

con las raíces

$$\pm \cos \frac{\pi}{10}, \quad \pm \cos \frac{3\pi}{10}$$

Ejemplo 8. Haciendo la transformación $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ en la ecuación (9), obtenemos:

$$5t^4 - 20t^2 + 16 = 0$$

que tiene como soluciones:

$$\pm \sec \frac{\pi}{10}, \quad \pm \sec \frac{3\pi}{10}$$

2.3.3 Procedimiento basado en el desarrollo de la función $tg\ n\varphi$

La idea clave de este procedimiento radica en el uso de la siguiente fórmula:

$$tg\ n\varphi = \frac{C_n^1 tg\ \varphi - C_n^3 tg^3\ \varphi + C_n^5 tg^5\ \varphi - \dots}{1 - C_n^2 tg^2\ \varphi + C_n^4 tg^4\ \varphi - \dots}$$

Ejemplo 9. Partiendo de la ecuación trigonométrica

$$tg\ 9x = 0 \iff x_k = \frac{k\pi}{9} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

y realizando el desarrollo de la función $tg\ 9x$ obtenemos sucesivamente:

$$\begin{aligned} tg\ 9x = 0 &\iff C_9^1 tg\ x - C_9^3 tg^3\ x + C_9^5 tg^5\ x - C_9^7 tg^7\ x + C_9^9 tg^9\ x = 0 \\ &\iff 9 tg\ x - 84 tg^3\ x + 126 tg^5\ x - 36 tg^7\ x + tg^9\ x = 0 \end{aligned}$$

Haciendo el cambio $tg\ x = t$, obtenemos:

$$t^9 - 36t^7 + 126t^5 - 84t^3 + 9t = 0 \iff t_k = tg\ \frac{k\pi}{9}, \text{ con } k \in \{1, 2, \dots, 9\}$$

Eliminando la solución $t = 0$, aparece la ecuación

$$t^8 - 36t^6 + 126t^4 - 84t^2 + 9 = 0 \tag{10}$$

con las raíces

$$\pm tg\ \frac{\pi}{9}, \quad \pm tg\ \frac{2\pi}{9}, \quad \pm tg\ \frac{3\pi}{9}, \quad \pm tg\ \frac{4\pi}{9}$$

Nota 2: Resulta especialmente importante aquí la afirmación de Kenneth W. Wegner [1] sobre la inexistencia de ecuaciones de grado mayor que VI del tipo de ecuaciones planteadas en su artículo. Obsérvese que la ecuación anterior, de grado VIII, no es de tipo Wegner, puesto que el polinomio

$$p(t) = t^8 - 36t^6 + 126t^4 - 84t^2 + 9$$

“no es irreducible” sobre $\mathbb{Z}$. Efectivamente,

$$t^8 - 36t^6 + 126t^4 - 84t^2 + 9 = (t^2 - 3)(t^6 - 33t^4 + 27t^2 - 3)$$

Ejemplo 10. Como consecuencia de la nota anterior deducimos la ecuación

$$t^6 - 33t^4 + 27t^2 - 3 = 0 \quad (11)$$

con las raíces

$$\pm tg \frac{\pi}{9}, \quad \pm tg \frac{2\pi}{9}, \quad \pm tg \frac{4\pi}{9}$$

Ejemplo 11. Haciendo la transformación $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ en la ecuación (11), obtenemos:

$$3t^6 - 27t^4 + 33t^2 - 1 = 0$$

con las raíces:

$$\pm ctg \frac{\pi}{9}, \quad \pm ctg \frac{2\pi}{9}, \quad \pm ctg \frac{4\pi}{9}$$

Ejemplo 12. Reemplazando t^2 por y en la ecuación (11), encontramos:

$$y^3 - 33y^2 + 27y - 3 = 0 \implies y_k = tg^2 \frac{k\pi}{9}, \quad k \in \{1, 2, 4\}$$

Es una pena que esta ecuación, a pesar del bonito aspecto de sus raíces, no sea de tipo Wegner. No obstante, observemos que:

$$z_k = \frac{1 - y_k}{1 + y_k} = \frac{1 - tg^2 \frac{k\pi}{9}}{1 + tg^2 \frac{k\pi}{9}} = tg \frac{2k\pi}{9}$$

lo que se indica la sustitución

$$z = \frac{1 - y}{1 + y} \implies y = \frac{1 - z}{1 + z}$$

con la cual la ecuación anterior se convierte en:

$$8z^3 - 6z + 1 = 0, \quad (12)$$

que proporciona las raíces

$$\cos \frac{2\pi}{9}, \quad \cos \frac{4\pi}{9}, \quad \cos \frac{8\pi}{9}$$

La ecuación (12) conlleva las siguientes consecuencias:

Ejemplo 13. Mediante la transformación $z \longrightarrow -z$ en (12), se obtiene la ecuación:

$$8z^3 - 6z - 1 = 0 \implies \begin{cases} z_1 = -\cos \frac{2\pi}{9} = \cos \frac{7\pi}{9} \\ z_2 = -\cos \frac{4\pi}{9} = \cos \frac{5\pi}{9} \\ z_3 = -\cos \frac{8\pi}{9} = \cos \frac{\pi}{9} \end{cases}$$

Ejemplo 14. Con la transformación $z \longrightarrow \frac{1}{z}$ en (12), llegamos a la siguiente ecuación:

$$z^3 - 6z^2 + 8 = 0 \iff z_1 = \sec \frac{2\pi}{9}, \quad z_2 = \sec \frac{4\pi}{9}, \quad z_3 = \sec \frac{8\pi}{9}$$

Ejemplo 15. Con la transformación $z \longrightarrow -\frac{1}{z}$ en (12), conseguimos la ecuación:

$$z^3 + 6z^2 - 8 = 0 \iff z_1 = \sec \frac{\pi}{9}, \quad z_2 = \sec \frac{5\pi}{9}, \quad z_3 = \sec \frac{7\pi}{9}$$

2.4 Partiendo de algunas ecuaciones recíprocas

Ofrecemos aquí un procedimiento que emplea la equivalencia entre ciertas ecuaciones recíprocas y binómicas.

Ejemplo 16. Partimos de la ecuación

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \iff \frac{z^5 - 1}{z - 1} = 0, \text{ con } z \neq 1$$

cuyas raíces son

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5}, \text{ con } k \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Como se trata de una *ecuación recíproca*, si r es una raíz, entonces también $\frac{1}{r}$ es una raíz. Haciendo el cambio

$$y = z + \frac{1}{z} \implies \begin{cases} y^2 = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 2 \implies z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2 \\ y_k = z_k + \frac{1}{z_k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{5}, \text{ con } k \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

la ecuación puede ser sustituida sucesivamente por otras formas equivalentes:

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \iff \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0 \iff$$

$$\iff (y^2 - 2) + y + 1 = 0 \iff y^2 + y - 1 = 0 \iff y_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{5}, \quad y_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{5}$$

Por último, haciendo la sustitución $y = 2x$ deducimos:

$$4x^2 + 2x - 1 = 0 \quad (13)$$

$\Downarrow$

$$x_1 = \cos \frac{2\pi}{5}, \quad x_2 = \cos \frac{4\pi}{5}$$

Tres consecuencias:

Ejemplo 17. Mediante la transformación $x \longrightarrow -x$ en (13), se construye la ecuación:

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x_1 = \cos \frac{\pi}{5}, \quad x_2 = \cos \frac{3\pi}{5}$$

Ejemplo 18. Igualmente, haciendo $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ en (13), llegamos a:

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \iff x_1 = \sec \frac{2\pi}{5}, \quad x_2 = \sec \frac{4\pi}{5}$$

Ejemplo 19. Efectuando la transformación $x \longrightarrow -\frac{1}{x}$ en la ecuación (13), obtenemos:

$$x^2 + 2x - 4 = 0 \iff x_1 = \sec \frac{\pi}{5}, \quad x_2 = \sec \frac{3\pi}{5}$$

Ejemplo 20. Tomemos como punto de partida la ecuación

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \iff \frac{z^7 - 1}{z - 1} = 0, \quad \text{con } z \neq 1$$

cuyas raíces son

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{7} + i \sin \frac{2k\pi}{7}, \quad \text{con } k \in \{1, 2, \dots, 6\}$$

Dado que esta ecuación es *recíproca* optamos por la sustitución

$$y = z + \frac{1}{z} \implies \begin{cases} y^2 = \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 2 \implies z^2 + \frac{1}{z^2} = y^2 - 2 \\ y^3 = \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) \implies z^3 + \frac{1}{z^3} = y^3 - 3y \\ y_k = z_k + \frac{1}{z_k} = 2 \cos \frac{2k\pi}{7}, \text{ con } k \in \{1, 2, \dots, 6\} \end{cases}$$

La ecuación original puede escribirse de la siguiente forma:

$$z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \iff \left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + \left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0$$

$$\iff (y^3 - 3y) + (y^2 - 2) + y + 1 = 0$$

Finalmente llegamos a la ecuación:

$$y^3 + y^2 - 2y - 1 = 0 \quad (14)$$

con las raíces

$$y_1 = 2 \cos \frac{2\pi}{7}, \quad y_2 = 2 \cos \frac{4\pi}{7}, \quad y_3 = 2 \cos \frac{6\pi}{7}$$

Ejemplo 21. A partir de la ecuación (14), haciendo la sustitución $y = 2x$ se obtiene:

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0 \quad (15)$$

cuyas raíces son

$$x_1 = \cos \frac{2\pi}{7}, \quad x_2 = \cos \frac{4\pi}{7}, \quad x_3 = \cos \frac{6\pi}{7}$$

Con lo anterior hemos llegado nuevamente a la misma ecuación vista en el ejemplo 6 a través de un enfoque diferente. Y ahora vienen las consecuencias:

Ejemplo 22. La ecuación

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (16)$$

tiene las siguientes raíces:

$$\cos \frac{\pi}{7}, \quad \cos \frac{3\pi}{7}, \quad \cos \frac{5\pi}{7}$$

En efecto, efectuando la transformación $x \longrightarrow -x$ en (15), obtenemos:

$$8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_k = -\cos \frac{k\pi}{7} = \cos \frac{(7-k)\pi}{7}, \text{ con } k \in \{2, 4, 6\}$$

Ejemplo 23. De nuevo, aplicando la transformación $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ en la ecuación (15), llegamos a:

$$x^3 + 4x^2 - 4x - 8 = 0 \iff x_1 = \sec \frac{2\pi}{7}, \quad x_2 = \sec \frac{4\pi}{7}, \quad x_3 = \sec \frac{6\pi}{7}$$

Ejemplo 24. Aplicando la transformación $x \longrightarrow \frac{1}{x}$ en (16), se obtiene:

$$\begin{aligned} x^3 - 4x^2 - 4x + 8 &= 0 \\ \Downarrow \\ x_1 &= \sec \frac{\pi}{7}, \quad x_2 = \sec \frac{3\pi}{7}, \quad x_3 = \sec \frac{5\pi}{7} \end{aligned}$$

2.5 Partiendo de ciertas ecuaciones trigonométricas

Seguidamente veremos otras ecuaciones trigonométricas conducentes a ecuaciones de tipo Wegner.

Ejemplo 25. Partimos de la ecuación trigonométrica

$$5 \operatorname{sen}^4 x - 10 \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = 0$$

homogénea en $\cos x$ y $\operatorname{sen} x$.

Observamos, en primer lugar, que $\cos x \neq 0$. Así ocurre, pues si fuese $\cos x = 0$, entonces lo sería también $\operatorname{sen} x = 0$, una contradicción puesto que nunca se dará $\operatorname{sen} x = \cos x = 0$. Como consecuencia de ello, es posible dividir la ecuación por $\cos^4 x$ y entonces puede ser reescrita como:

$$5 \operatorname{tg}^4 x - 10 \operatorname{tg}^2 x + 1 = 0$$

Finalmente la sustitución $\operatorname{tg} x = t$ nos lleva a la ecuación:

$$5t^4 - 10t^2 + 1 = 0 \quad (17)$$

con las siguientes raíces:

$$t_1 = \sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{10}, \quad t_2 = -\sqrt{\frac{5 - 2\sqrt{5}}{5}} = -\operatorname{tg} \frac{\pi}{10}$$

$$t_3 = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10}, \quad t_4 = -\sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = -\operatorname{tg} \frac{3\pi}{10}$$

Ejemplo 26. Efectuando la transformación $t \longrightarrow \frac{1}{t}$ en la ecuación (17), obtenemos la ecuación

$$t^4 - 10t^2 + 5 = 0$$

cuyas raíces son:

$$\pm \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}, \quad \pm \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{10}$$

Ejemplo 27. Dada la ecuación trigonométrica

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{\operatorname{sen} 2x} + \frac{1}{\operatorname{sen} 3x}$$

imponemos las condiciones de existencia

$$x \notin \left\{ k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Transformamos sucesivamente la ecuación de partida en:

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} 4x + \operatorname{sen} 2x)} \iff \operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} 4x$$

cuyas soluciones son de la forma

$$4x = (-1)^m \cdot 3x + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z} \iff x = \frac{m\pi}{7}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad m = \text{impar}$$

Por otra parte, para transformar la ecuación de partida en una ecuación polinómica conviene efectuar la sustitución

$$2 \operatorname{sen} x = t \implies \begin{cases} \operatorname{sen} 2x = \frac{t}{2} \sqrt{4-t^2} \\ \operatorname{sen} 3x = \frac{t}{2}(3-t^2) \end{cases}$$

obteniendo sucesivamente:

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{t\sqrt{4-t^2}} + \frac{1}{t(3-t^2)} \iff \frac{1}{t} - \frac{1}{3t-t^3} = \frac{1}{t\sqrt{4-t^2}}$$

y llegando finalmente a:

$$t^6 - 7t^4 + 14t^2 - 7 = 0$$

Así, hemos vuelto a obtener nuevamente la ecuación (7), pero con un planteamiento distinto.

3 Algunos números algebraicos irracionales valores de funciones trigonométricas

Recordemos que un número real es un *número algebraico* sobre $\mathbb{Z}$ si es raíz de una ecuación polinómica con coeficientes enteros.

Dos números reales α y α' son *algebraicamente conjugados* si son raíces de la misma ecuación polinómica irreducible con coeficientes enteros, es decir, si existe un polinomio $p \in \mathbb{Z}[x]$, irreducible en $\mathbb{Z}[x]$, tal que $p(\alpha) = p(\alpha') = 0$.

Nótese que en realidad, en este artículo, estamos dando algunos ejemplos de *sistemas de números reales algebraicamente conjugados* expresados mediante *valores de funciones trigonométricas de ángulos múltiplos racionales de π radianes*.

En resumen, cabe hacer una lista de los *sistemas de números algebraicamente conjugados* obtenidos con estos métodos:

- *para ecuaciones de grado II* (se proporcionan en los ejemplos 16, 17, 18 y 19, respectivamente):

$$\begin{aligned} - \left\{ \cos \frac{2\pi}{5}, \cos \frac{4\pi}{5} \right\} & \text{ satisface la ecuación } 4x^2 + 2x - 1 = 0 \\ - \left\{ \cos \frac{\pi}{5}, \cos \frac{3\pi}{5} \right\} & \text{ satisface la ecuación } 4x^2 - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

- $\left\{ \sec \frac{2\pi}{5}, \sec \frac{4\pi}{5} \right\}$ satisface la ecuación $x^2 - 2x - 4 = 0$
- $\left\{ \sec \frac{\pi}{5}, \sec \frac{3\pi}{5} \right\}$ satisface la ecuación $x^2 + 2x - 4 = 0$
- *para ecuaciones de grado III* (véase los ejemplos 12, 13, 14, 15, 21, 22, 23, y 24, respectivamente):
 - $\left\{ \cos \frac{2\pi}{9}, \cos \frac{4\pi}{9}, \cos \frac{8\pi}{9} \right\}$ verifica la ecuación $8x^3 - 6x + 1 = 0$
 - $\left\{ \cos \frac{\pi}{9}, \cos \frac{5\pi}{9}, \cos \frac{7\pi}{9} \right\}$ verifica la ecuación $8x^3 - 6x - 1 = 0$
 - $\left\{ \sec \frac{2\pi}{9}, \sec \frac{4\pi}{9}, \sec \frac{8\pi}{9} \right\}$ verifica la ecuación $x^3 - 6x^2 + 8 = 0$
 - $\left\{ \sec \frac{\pi}{9}, \sec \frac{5\pi}{9}, \sec \frac{7\pi}{9} \right\}$ verifica la ecuación $x^3 + 6x^2 - 8 = 0$
 - $\left\{ \cos \frac{2\pi}{7}, \cos \frac{4\pi}{7}, \cos \frac{6\pi}{7} \right\}$ satisface la ecuación $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$
 - $\left\{ \cos \frac{\pi}{7}, \cos \frac{3\pi}{7}, \cos \frac{5\pi}{7} \right\}$ satisface la ecuación $8x^3 - 4x^2 - 4x + 1 = 0$
 - $\left\{ \sec \frac{2\pi}{7}, \sec \frac{4\pi}{7}, \sec \frac{6\pi}{7} \right\}$ satisface la ecuación $x^3 + 4x^2 - 4x - 8 = 0$
 - $\left\{ \sec \frac{\pi}{7}, \sec \frac{3\pi}{7}, \sec \frac{5\pi}{7} \right\}$ satisface la ecuación $x^3 - 4x^2 - 4x + 8 = 0$
- *para ecuaciones de grado IV* (los ejemplos 25, 26, 7 y 8, respectivamente):
 - $\left\{ \pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{10}, \pm \operatorname{tg} \frac{3\pi}{10} \right\}$ satisface la ecuación $5x^4 - 10x^2 + 1 = 0$
 - $\left\{ \pm \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}, \pm \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{10} \right\}$ satisface la ecuación $x^4 - 10x^2 + 5 = 0$
 - $\left\{ \pm \cos \frac{\pi}{10}, \pm \cos \frac{3\pi}{10} \right\}$ satisface la ecuación $16x^4 - 20x^2 + 5 = 0$
 - $\left\{ \pm \sec \frac{\pi}{10}, \pm \sec \frac{3\pi}{10} \right\}$ satisface la ecuación $5x^4 - 20x^2 + 16 = 0$
- *para ecuaciones de grado VI* (los ejemplos 10, 11, 4, 5, 1 y 2, respectivamente):
 - $\left\{ \pm \operatorname{tg} \frac{\pi}{9}, \pm \operatorname{tg} \frac{2\pi}{9}, \pm \operatorname{tg} \frac{4\pi}{9} \right\}$ satisface la ecuación

$$x^6 - 33x^4 + 27x^2 - 3 = 0$$

$$\begin{aligned}
& - \left\{ \pm \operatorname{ctg} \frac{\pi}{9}, \pm \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{9}, \pm \operatorname{ctg} \frac{4\pi}{9} \right\} \quad \text{satisface la ecuación} \\
& \quad 3x^6 - 27x^4 + 33x^2 - 1 = 0 \\
& - \left\{ \pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}, \pm \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7}, \pm \operatorname{sen} \frac{3\pi}{7} \right\} \quad \text{satisface la ecuación} \\
& \quad 64x^6 - 112x^4 + 56x^2 - 7 = 0 \\
& - \left\{ \pm \operatorname{cosec} \frac{\pi}{7}, \pm \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{7}, \pm \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{7} \right\} \quad \text{satisface la ecuación} \\
& \quad 7x^6 - 56x^4 + 112x^2 - 64 = 0 \\
& - \left\{ \operatorname{tg} \frac{\pi}{36}, \operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}, -\operatorname{tg} \frac{7\pi}{36}, -\operatorname{tg} \frac{11\pi}{36}, \operatorname{tg} \frac{13\pi}{36}, \operatorname{tg} \frac{17\pi}{36} \right\} \quad \text{verifica la} \\
& \quad \text{ecuación} \\
& \quad x^6 - 12x^5 + 3x^4 + 40x^3 + 3x^2 - 12x + 1 = 0 \\
& - \left\{ -\operatorname{tg} \frac{\pi}{36}, -\operatorname{tg} \frac{5\pi}{36}, \operatorname{tg} \frac{7\pi}{36}, \operatorname{tg} \frac{11\pi}{36}, -\operatorname{tg} \frac{13\pi}{36}, -\operatorname{tg} \frac{17\pi}{36} \right\} \quad \text{verifica la} \\
& \quad \text{ecuación} \\
& \quad x^6 + 12x^5 + 3x^4 - 40x^3 + 3x^2 + 12x + 1 = 0
\end{aligned}$$

Conclusiones

En este artículo hemos reflexionado acerca del bello aspecto de las raíces de ciertas ecuaciones de tipo estándar, ya que afortunadamente hay lugar para la sorpresa.

Parece bastante obvio que el conocimiento de los métodos para la obtención de tales expresiones para el cálculo de las raíces no se estima hoy en día, pues al disponer de calculadoras y ordenadores hay un cambio en los métodos de enseñanza-aprendizaje. Verdaderamente, plantear tales ecuaciones constituye la expresión de una creencia muy generalizada en la posibilidad de resolverlas solamente por procedimientos mecánicos de cálculo. Sin embargo, nos ha parecido un ejercicio interesante para el lector amante de técnicas inusuales, puesto que es bueno saber analizar un problema desde puntos de vista diferentes y resolver problemas no rutinarios.

Bibliografía

- [1] Kenneth W. Wegner (1959), Equations with trigonometric values as roots. *The Amer. Math. Monthly*, **66**, 52-53.

Un método algebraico-computacional para demostración automática en geometría euclídea.*

E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano

Dept. Algebra, Facultad de Educación UCM

{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

Abstract

An elementary version of a computer-oriented algebraic method for automated theorem proving in Euclidean Geometry is explained in detail. It is specially useful for theorems with many thesis conditions. It is applied to obtaining simultaneously proofs of several elegant and unexpected properties derived from the classic configuration of Napoleon's theorem for triangles. The difficulties that can arise when applying this method are illustrated through other suitable examples.

Introducción

El propósito de este artículo es mostrar otro modo de abordar problemas geométricos mediante deducción automática, lo que no exige, a priori, la concurrencia de “ideas felices”.

Se trata de una técnica algebraica de demostración automática especialmente útil en caso de muchas condiciones de tesis y bastante fácil de aplicar.

Esta técnica algebraica solo requiere efectuar operaciones elementales con polinomios, para llegar a comparar dos ideales, el generado por los polinomios de hipótesis y tesis con el generado solo por los polinomios de hipótesis, ambos relativos a la configuración geométrica considerada.

*Parcialmente subvencionado por el proyecto *TIN2009-07901* del Gobierno de España.

Hasta hace pocos años estas técnicas algebraicas eran inoperantes, porque la obtención de generadores que permitieran realizar dicha comparación requiere de un proceso laborioso y tedioso. Afortunadamente hoy pueden obtenerse automáticamente con sistemas computacionales de cálculo algebraico, como Maple, Mathematica, Derive, Cocoa, Singular,...

El lector podrá comprobar que la técnica algebraica utilizada en este artículo es muy sencilla de aplicar y no requiere conocimientos informáticos previos. Esto no significa que el computador vaya a ejecutar automáticamente el desarrollo de la demostración automática. La labor a efectuar por el usuario no es trivial, ya que requiere realizar un planteamiento apropiado del problema, lo que no es obvio. En la Sección 2 se explica detalladamente el método, precedido de una descripción de cómo expresar en términos algebraicos las relaciones geométricas usuales entre elementos de una configuración.

El método de demostración automática tratado en este artículo tiene la ventaja de que permite verificar conjuntamente todas las condiciones de tesis, en vez de una a una (como se ha de hacer por otros métodos algebraicos de demostración automática [1, 2, 3]). Lo aplicaremos a demostrar un teorema relativo a nuevas propiedades de la configuración de Napoleón, en que se prueban simultáneamente 14 condiciones de tesis.

El inconveniente del método de demostración automática considerado en este artículo estriba en que hay problemas a los que, en principio, parece no aplicable. Pues bien, en las secciones 4 y 5 se indica como superar tales dificultades, considerando configuraciones geométricas apropiadas al efecto.

Nos consta que hay matemáticos reacios al uso de estas técnicas de demostración automática, sobre todo por aversión al computador, por lo que pondremos énfasis en mostrar que su utilización no requiere de conocimientos informáticos previos.

Finalmente, deseamos hacer notar que con estos métodos no se pretende jubilar los métodos clásicos de demostración, sino mas bien complementarlos con nuevas técnicas, que pueden ayudar a decidir fácilmente sobre la veracidad de un aserto, independientemente de su tratamiento con métodos clásicos. Además, para ciertos problemas a los que no son aplicables métodos clásicos, como el tratado en [4], son estos los únicos métodos que permiten abordarlos.

1 Ejemplo previo introductorio

Antes de pasar a describir el método de modo general, hemos considerado conveniente mostrar un sencillo ejemplo ilustrativo de introducción al método.

El problema geométrico subyacente es la propiedad de las diagonales del paralelogramo en que se basa esencialmente la equipolencia de vectores libres.

Enunciado: *Cada diagonal de un paralelogramo corta a la otra en su punto medio* (Fig. 1).

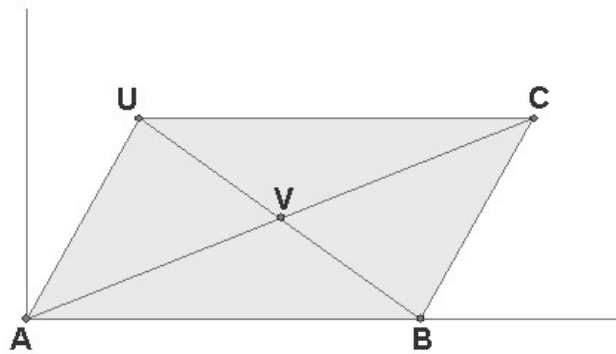


Fig. 1: *Propiedad de las diagonales del paralelogramo*

Se consideran coordenadas cartesianas rectangulares en el plano euclídeo.

Coordenadas de los puntos considerados

Vértices del cuadrilátero (la elección de un vértice como origen de coordenadas y otro en el eje de abscisas no supone pérdida de generalidad):

$$A = [0, 0], \quad B = [b, 0], \quad C = [c_1, c_2], \quad U = [u_1, u_2]$$

Punto de intersección de las diagonales: $V = [v_1, v_2]$

Condiciones de hipótesis y sus correspondientes polinomios de hipótesis

Denotaremos por $H_1, H_2, H_3, \dots$ a las condiciones de hipótesis y por $h_1, h_2, h_3, \dots$ a los correspondientes polinomios con cuya anulación se definen.

Los tres vértices A, B, C del paralelogramo $ABCU$ se suponen libremente elegidos, con las únicas restricciones de ser $B \neq A$ y no ser colineales A, B, C , de modo que el paralelogramo no sea degenerado.

Las dos condiciones siguientes, H_1 y H_2 , determinan el cuarto vértice U .

$$H_1) UC \text{ y } AB \text{ son paralelas: } h_1 = -b \cdot c_2 + b \cdot u_2$$

$$H_2) AU \text{ y } BC \text{ son paralelas: } h_2 = c_2 \cdot u_1 - u_2 \cdot c_1 + b \cdot u_2$$

Las dos condiciones siguientes, H_3 y H_4 , determinan el punto V de intersección de las diagonales.

$$H_3) A, C, V \text{ son colineales: } h_3 = c_1 \cdot v_2 - c_2 \cdot v_1$$

$$H_4) B, U, V \text{ son colineales: } h_4 = v_2 \cdot u_1 - v_2 \cdot b - u_2 \cdot v_1 + b \cdot u_2$$

Lista de polinomios de hipótesis: $listaH = [h_1, h_2, h_3, h_4]$

Parámetros y variables

Parámetros (coordenadas libremente elegibles): b, c_1, c_2

Variables (coordenadas ligadas, condicionadas a los valores de los parámetros) denotando var a la sucesión de las mismas (en el orden elegido):

$$var = u_1, u_2, v_1, v_2$$

Condiciones de tesis y sus correspondientes polinomios de tesis

Denotaremos por T_1, T_2 a las condiciones de tesis y por t_1, t_2 a los correspondientes polinomios con cuya anulación se definen.

$$T_1) \overline{VA} = \overline{VC}: t_1 = -c_1^2 + 2 \cdot c_1 \cdot v_1 - c_2^2 + 2 \cdot c_2 \cdot v_2$$

$$T_2) \overline{VB} = \overline{VU}: t_2 = b^2 - 2 \cdot b \cdot v_1 - u_1^2 + 2 \cdot u_1 \cdot v_1 - u_2^2 + 2 \cdot u_2 \cdot v_2$$

(Al estar la distancia euclídea dada por una expresión radical y, por tanto, no polinomial, se han de utilizar cuadrados de distancias, en vez de distancias).

Lista de polinomios de hipótesis, junto con los de tesis:

$$listaHT = [h_1, h_2, h_3, h_4, t_1, t_2]$$

Polinomios de tesis como combinación lineal de los de hipótesis

Geométricamente las condiciones H_1, H_2, H_3, H_4 implican T_1 y T_2 , es decir, las anulaciones de h_1, h_2, h_3, h_4 implican la anulación de t_1 y t_2 .

Ello invita a plantearse la posibilidad de que t_1 y t_2 pudieran expresarse como combinación lineal de los polinomios de hipótesis. Si esto se lograra, las anulaciones de h_1, h_2, h_3, h_4 implicarían la anulación de t_1 y t_2 . Tras cálculos rutinarios, aunque laboriosos, conseguimos encontrar los siguientes coeficientes multiplicadores:

$$f_1 = \frac{c_2 \cdot b \cdot c_1^2 + c_1^3 \cdot v_2 - c_1^2 \cdot v_2 \cdot b - c_2 \cdot c_1^2 \cdot v_1 + v_2 \cdot c_1 \cdot c_2^2 - c_2^2 \cdot v_2 \cdot b - c_2^3 \cdot v_1 + b \cdot c_2^3}{b^2 \cdot c_2^2}$$

$$f_2 = \frac{(c1^2+c2^2) \cdot v2}{b \cdot c2^2} ; f_3 = \frac{c2^3+c2 \cdot c1^2-2 \cdot c1 \cdot b \cdot c2}{b \cdot c2^2} ; f_4 = \frac{c1^2+c2^2}{b \cdot c2}$$

tales que $f_1 \cdot h_1 + f_2 \cdot h_2 + f_3 \cdot h_3 + f_4 \cdot h_4 = t_1$.

De modo análogo, también t_2 se puede expresar como combinación lineal algebraica de los polinomios de hipótesis, lo que omitimos por brevedad.

Observemos que f_1, f_2, f_3, f_4 pueden ser consideradas como expresiones polinómicas en las variables $u1, u2, v1, v2$, cuyos coeficientes son fracciones racionales en los parámetros $b, c1, c2$.

En términos algebraicos, el conjunto de tales expresiones es un anillo, respecto de la suma y producto habituales. En particular, el conjunto de todas las posibles expresiones de la forma $g_1 \cdot h_1 + g_2 \cdot h_2 + g_3 \cdot h_3 + g_4 \cdot h_4$, donde g_1, g_2, g_3, g_4 son elementos cualesquiera de dicho anillo, se dice que forman un ideal de ese anillo, esto es, un subanillo tal que el producto de uno de sus elementos por otro del anillo pertenece al subanillo (como, por ejemplo, los múltiplos de 3 constituyen un ideal del anillo de los enteros). Dicho ideal, generado por los polinomios h_1, h_2, h_3, h_4 , se denota brevemente por $\langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$.

Así pues, la demostración que se acaba de describir está basada en la relación de pertenencia $t_1, t_2 \in \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$, o lo que es equivalente, en la siguiente igualdad de ideales: $\langle h_1, h_2, h_3, h_4, t_1, t_2 \rangle = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$. Su dificultad consiste en efectuar los tediosos y largos cálculos que llevan a calcular los multiplicadores, f_1, f_2, f_3, f_4 . Pues bien, esa dificultad evita como se indica a continuación.

Abreviación calculando Bases de Groebner

En un anillo de polinomios, como es nuestro caso, cada ideal admite unos elementos generadores especialmente sencillos, que constituyen la base canónica del ideal y se denomina *Base de Groebner* del ideal. (En la Sección 2 se da información sobre ellas).

De este modo, comprobar la condición antes mencionada de igualdad de ideales $\langle h_1, h_2, h_3, h_4, t_1, t_2 \rangle = \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$, queda reducida a comprobar que ambos ideales tienen la misma Base de Groebner. Pero calcular Bases de Groebner no es simple, ni breve, por lo que en la práctica se calculan con ayuda de un Sistema de Cómputo Algebraico.

Denotemos por *GB1* a la Base de Groebner del ideal generado por los polinomios de hipótesis y por *GB2* a la del ideal generado por los polinomios

de hipótesis junto con los de tesis. Al calcular $GB1$ se obtiene:

$$GB1 := [-c2 + 2 \cdot v2, -c1 + 2 \cdot v1, -c2 + u2, -c1 + b + u1]$$

y al calcular $GB2$ se obtiene el mismo resultado obtenido para $GB1$, lo que implica la igualdad de aquellos dos ideales, es decir, se tiene:

$$\langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle = GB1 = GB2 = \langle h_1, h_2, h_3, h_4, t_1, t_2 \rangle$$

En consecuencia, $t_1, t_2 \in \langle h_1, h_2, h_3, h_4 \rangle$, luego

$$h_1 = 0 \wedge h_2 = 0 \wedge h_3 = 0 \wedge h_4 = 0 \implies t_1 = 0 \wedge t_2 = 0$$

De este modo, el enunciado del comienzo de esta sección ha quedado probado por este método de las Bases de Groebner iguales, que nos ha permitido probar conjuntamente las dos condiciones de tesis.

Nota: En el Anexo (Sección 6), al final del artículo, se explicita el código para ejecutar los cálculos anteriores en un determinado SCA (Sistema de Cómputo Algebraico), lo que puede servir de guía a los usuarios de otros SCA.

2 Descripción general del método

Nuestro universo será el espacio euclídeo real de dos dimensiones. Las condiciones geométricas entre los puntos de la configuración considerada en cada problema se traducen algebraicamente en la anulación de expresiones polinómicas y operando con esos polinomios se llega a decidir la validez de las proposiciones.

Puntos

Los puntos se consideran como pares ordenados de números reales. El punto P de coordenadas $[p1, p2]$ se denotará $P = [p1, p2]$.

Distancia

Por necesidad de operar exclusivamente con expresiones polinómicas, no se considerarán distancias, sino cuadrados de distancia. Dados dos puntos, $P = [p1, p2]$ y $Q = [q1, q2]$, el cuadrado de la distancia entre ellos se denotará por $dist2(P, Q)$, estando su valor dado por la expresión polinómica $(q1 - p1)^2 + (q2 - p2)^2$.

Equidistancia (transporte de segmentos)

La condición de igualdad de segmentos $PQ = AB$ se corresponde con la

expresión polinómica $dist2(P, Q) - dist2(A, B) = (q1 - p1)^2 + (q2 - p2)^2 - ((b1 - a1)^2 + (b2 - a2)^2)$.

Colineación

La condición de alineación de tres puntos, $P = [p1, p2]$, $Q = [q1, q2]$ y $R = [r1, r2]$, se corresponde con la expresión polinómica $(q1 - p1)(r2 - p2) - (q2 - p2)(r1 - p1)$.

Paralelismo

La condición de paralelismo de la recta que pasa por los puntos $P = [p1, p2]$ y $Q = [q1, q2]$, con la recta que pasa por puntos $A = [a1, a2]$ y $B = [b1, b2]$, se corresponde con la expresión polinómica $(b2 - a2)(q1 - p1) - (b1 - a1)(q2 - p2)$.

Ortogonalidad

La condición de perpendicularidad de la recta que pasa por los puntos $P = [p1, p2]$ y $Q = [q1, q2]$, con la recta que pasa por puntos $A = [a1, a2]$ y $B = [b1, b2]$, se corresponde con la expresión polinómica $(b1 - a1)(q1 - p1) + (b2 - a2)(q2 - p2)$.

Igualdad de ángulos convexos orientados (transporte de ángulos)

Siendo $U = [u1, u2]$, $V = [v1, v2]$ y $W = [w1, w2]$ tres puntos no alineados, denotaremos por $\widehat{UVW}$ al ángulo convexo orientado de vértice V , de lado origen la semirrecta de origen V que pasa por U y de lado extremo la semirrecta de origen V que pasa por W . Así mismo, siendo $P = [p1, p2]$ un punto distinto del origen de coordenadas, O , denotaremos por $x^+ \widehat{OP}$ al ángulo convexo orientado de vértice O , de lado origen el semieje positivo de abscisas, x^+ , y de lado extremo la semirrecta de origen O que pasa por P .

Se trata de expresar la condición de igualdad de ángulos convexos orientados $\widehat{UVW} = x^+ \widehat{OP}$. Dicha igualdad de ángulos es equivalente a la igualdad de sus tangentes, $\tan(\widehat{UVW}) = \tan(x^+ \widehat{OP})$, por la biyección existente entre ángulos agudos orientados y números reales (al ser $\tan$ función impar).

Por otra parte, para poder expresar $\tan(\widehat{UVW})$ en función de las coordenadas de los puntos U, V, W , basta considerar UVW como ángulo diferencia $\widehat{UVW} = \widehat{XVW} - \widehat{XVU}$, donde $\widehat{XVW}$ representa el ángulo convexo orientado de lado origen la semirrecta de origen V , paralela y del mismo sentido que el semieje positivo de abscisas, y de lado extremo la semirrecta de origen

V que pasa por W . Por tanto, teniendo en cuenta que:

$$\tan(\widehat{x^+OP}) = \frac{p_2}{p_1} ; \tan(\widehat{XVW}) = \frac{w_2 - v_2}{w_1 - v_1} ; \tan(\widehat{XVU}) = \frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}$$

$$\tan(\widehat{UVW}) = \frac{\tan(\widehat{XVW}) - \tan(\widehat{XVU})}{1 + \tan(\widehat{XVW})\tan(\widehat{XVU})}$$

la condición de igualdad $\tan(\widehat{UVW}) = \tan(\widehat{x^+OP})$, se corresponde con la expresión polinómica: $-p_2(-w_1u_1 + w_1v_1 + v_1u_1 - v_1^2 - u_2w_2 + u_2v_2 + v_2w_2 - v_2^2) - (-w_2u_1 + w_2v_1 + v_2u_1 + u_2w_1 - u_2v_1 - v_2w_1)p_1$

Simetría central y punto medio

La condición de ser W el simétrico del punto U respecto del V (o de ser V el punto medio del segmento UW) se corresponde con un par de expresiones polinómicas (para abscisas y ordenadas) a que da lugar la expresión vectorial $OV - (OU + OW)$, donde OV, OU, OW son los vectores de posición de los puntos V, U, W y $O = [0, 0]$ el origen de coordenadas. En consecuencia, dicha expresión vectorial puede abreviarse así: $V - (U + W)$.

Area de triángulo

Dados tres puntos no alineados, $M = [m_1, m_2]$, $N = [n_1, n_2]$ y $P = [p_1, p_2]$, el área orientada del triángulo MNP se define del modo usual, mediante un determinante de orden 3, que se corresponde con la expresión polinómica: $\frac{1}{2}(n_1 \cdot p_2 - p_1 \cdot n_2 + m_1 \cdot n_2 - m_1 \cdot p_2 + m_2 \cdot p_1 - m_2 \cdot n_1)$

Condiciones y polinomios de hipótesis y de tesis

Las configuraciones geométricas consideradas constan de un conjunto finito de puntos. Dichos puntos determinan ciertas rectas, segmentos, ángulos,... Entre tales objetos geométricos se verifican ciertas relaciones de igualdad de distancias, de colineación de puntos, de paralelismo y perpendicularidad de rectas, de igualdad de ángulos, etc, que se expresan mediante ecuaciones polinomiales en las coordenadas de puntos de la configuración, las cuales se traducen en expresiones polinómicas en esas coordenadas.

De entre estas relaciones, las que se suponen ciertas se denominan *condiciones de hipótesis* y sus correspondientes expresiones polinómicas se denominan *polinomios de hipótesis*. Así mismo, las relaciones que se pretende deducir de aquellas se denominan *condiciones de tesis* y sus correspondientes expresiones polinómicas se denominan *polinomios de tesis*.

A las n condiciones de hipótesis las denotaremos por $H_1, H_2, \dots, H_n$ y a sus correspondientes polinomios de hipótesis los denotaremos respectivamente por $h_1, h_2, \dots, h_n$. De modo análogo, a las m condiciones de tesis las denotaremos por $T_1, T_2, \dots, T_m$ y a sus correspondientes polinomios de tesis los denotaremos respectivamente por $t_1, t_2, \dots, t_m$.

Parámetros y variables

Consideremos ahora las coordenadas de los puntos de que consta la configuración geométrica. Aquellas coordenadas que pueden ser libremente elegidas se denominan *parámetros*. Las demás, determinadas a partir de aquellas por las condiciones de hipótesis, se denominan *variables*.

Anillo de polinomios de la configuración

Siendo $c_1, c_2, \dots, c_s$ los parámetros y $v_1, v_2, \dots, v_n$ las variables, el anillo de polinomios en las indeterminadas $v_1, v_2, \dots, v_n$ con coeficientes fracciones racionales de los parámetros, es decir, elementos del cuerpo $\mathbb{R}(c_1, c_2, \dots, c_s)$, se denomina *anillo de polinomios de la configuración* y se denotará por $\mathbf{A}$, es decir, $\mathbf{A} = \mathbb{R}(c_1, c_2, \dots, c_s)[v_1, v_2, \dots, v_n]$.

Ideales de polinomios de hipótesis y tesis

A partir de los polinomios de hipótesis, $h_1, h_2, \dots, h_n$, se considera el subconjunto de polinomios del anillo $\mathbf{A}$ que son combinación lineal algebraica de aquellos, es decir, de la forma $f_1 h_1 + f_2 h_2 + \dots + f_n h_n$, donde $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbf{A}$. Dicho subconjunto de polinomios constituye un ideal del anillo $\mathbf{A}$, que denotaremos $\langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle$. De modo similar, los polinomios de tesis $t_1, t_2, \dots, t_m$ junto con los de hipótesis, $h_1, h_2, \dots, h_n$, generan otro ideal del anillo $\mathbf{A}$, que denotaremos por $\langle h_1, h_2, \dots, h_n, t_1, t_2, \dots, t_m \rangle$.

El método de demostración utilizado en este artículo consiste en comparar el ideal $\langle h_1, h_2, \dots, h_n, t_1, t_2, \dots, t_m \rangle$ con el ideal $\langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle$, para comprobar si son iguales. En principio, resulta bastante laborioso comprobar si dos ideales del anillo de polinomios $\mathbf{A}$ son iguales. Para comprobarlo de modo sencillo, lo que se hace en la práctica es determinar una base canónica de ambos ideales, lo que se trata a continuación.

Bases de Groebner de ideales de un anillo de polinomios

El matemático Wolfgang Groebner, inició en los años 30 del pasado siglo la idea de la determinación de una base canónica de los ideales de los anillos de polinomios, lo que permitiría comprobar si dos ideales de un anillo de

polinomios son iguales. Posteriormente, en los años 60 del pasado siglo, el matemático Bruno Buchberger, alumno de Groebner, diseñó un algoritmo para determinar tales bases, en lo que fue su tesis doctoral [7]. En honor a su maestro, dicha base canónica de un ideal se denomina su *Base de Groebner*.

Una vez elegido un orden para los monomios y las variables (orden lexicográfico y orden dado por la sucesión *var*), la base de Groebner es única para ese ideal, independientemente de los generadores utilizados para definirlo. No vamos aquí a transcribir dicho algoritmo, que el lector interesado puede encontrar, por ejemplo, en [1, 3, 7, 8]. Por ser bastante laborioso y tedioso de aplicar, ha sido implementado en casi todos los sistemas de cómputo algebraico (SCA): Maple, Mathematica, Derive, Cocoa, Singular,... En la práctica, las bases de Groebner de ideales se calculan automáticamente con cualquiera de esos sistemas computacionales.

Lo que si haremos a continuación es mostrar un ejemplo sencillo de base de Groebner con su correspondiente interpretación geométrica, para tratar de dar una idea intuitiva de este concepto.

En el anillo de polinomios $\mathbb{R}[x, y]$, consideremos los dos ideales siguientes:

$$H = \langle x^2 + y^2 - 2, x - y \rangle ; \quad J = \langle x^2 + y^2 - 2, y^3 - x, y^2 - 1 \rangle$$

Respecto del orden lexicográfico (x, y) , es decir, x *anterior* a y , ambos ideales resultan tener la misma base de Groebner, $\langle 1 - y^2, x - y \rangle$, lo que indica que ambos ideales son iguales (el mismo). Y, en efecto, el elemento $x - y$ del ideal H , resulta pertenecer a J , ya que puede expresarse como combinación lineal algebraica de elementos de J :

$$x - y = 0 \cdot (x^2 + y^2 - 2) - 10 \cdot (y^3 - x) + y \cdot (y^2 - 1)$$

y los elementos $(y^3 - x)$ e $(y^2 - 1)$ de J , resultan pertenecer a H , ya que pueden expresarse como combinación lineal algebraica de elementos de H :

$$y^3 - x = \frac{1}{2} \cdot y \cdot (x^2 + y^2 - 2) - \frac{1}{2} \cdot (y \cdot (x + y) + 2) \cdot (x - y)$$

$$y^2 - 1 = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 - 2) - \frac{1}{2} \cdot (x + y)(x - y)$$

Hagamos una rápida interpretación geométrica del ejemplo anterior (Fig. 2). Los dos polinomios considerados para generar H corresponden respectivamente a una circunferencia de radio 2 y una recta, cuyos puntos comunes

son $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. Los tres considerados para generar J corresponden a la misma circunferencia, la cúbica $y^3 - x = 0$ y el par de rectas $y = \pm 1$, cuyos puntos comunes vuelven a ser $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. Por último, los dos considerados para generar la base de Groebner común a ambos corresponden a la recta $y - x = 0$ y al par de rectas $y = 1$, cuyos puntos comunes vuelven a ser $(1, 1)$ y $(-1, -1)$. Pero esta última es la forma más simple de describir algebraicamente el subconjunto del plano consistente en esos dos puntos.

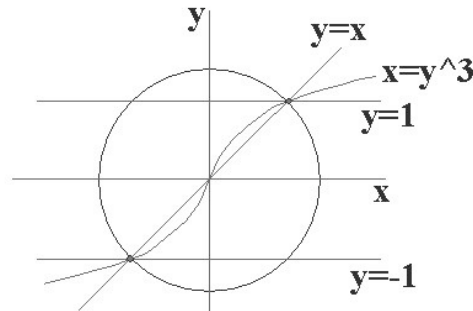


Fig. 2: *Interpretación geométrica*

Una mas amplia información sobre interpretación geométrica de Bases de Groebner puede encontrarse en [6].

Comprobación de la igualdad de las Bases de Groebner

Para comprobar si son iguales el ideal $\langle h_1, h_2, \dots, h_n, t_1, t_2, \dots, t_m \rangle$, generado por los polinomios de hipótesis y los de tesis, y el ideal $\langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle$, generado por solo los polinomios de hipótesis, basta comprobar si son iguales sus respectivas bases de Groebner.

Denotando $GB(J)$ a la base de Groebner del ideal J , se trata pues de ejecutar los tres pasos siguientes:

- i) calcular $GB(\langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle)$ con ayuda del SCA utilizado
- ii) calcular $GB(\langle h_1, h_2, \dots, h_n, t_1, t_2, \dots, t_m \rangle)$ con ayuda del SCA utilizado
- iii) comprobar $GB(\langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle) = GB(\langle h_1, h_2, \dots, h_n, t_1, t_2, \dots, t_m \rangle)$.

Este último paso suele ejecutarse automáticamente con el comando de evaluación booleana de que disponen muchos SCA.

Si en el paso iii) la respuesta es afirmativa, entonces puede asegurarse que las condiciones de tesis son consecuencia de las de hipótesis. En efecto, el paso iii) implica la igualdad de ideales $\langle h_1, h_2, \dots, h_n \rangle = \langle h_1, h_2, \dots, h_n, t_1, t_2, \dots, t_m \rangle$,

luego cada uno de los polinomios de tesis, $t_1, t_2, \dots, t_m$ pertenece al ideal generado por los polinomios de hipótesis. Por tanto, $t_1, t_2, \dots, t_m$ pueden expresarse en la forma $t_i = f_{i_1} \cdot h_1 + \dots + f_{i_{m_i}} \cdot h_{m_i}$; $f_{i_j} \in \mathbf{A}$; $i = 1, \dots, m$, de donde se sigue: $h_1 = 0 \wedge h_2 = 0 \wedge \dots \wedge h_n = 0 \implies t_1 = 0 \wedge t_2 = 0 \wedge \dots \wedge t_m = 0$, es decir, las n condiciones de hipótesis implican las m condiciones de tesis.

Pasos del proceso de demostración por Bases de Groebner iguales

En resumen, el proceso descrito, consta de estos pasos:

- 1) elegir el sistema de referencia y nombre de la coordenadas
- 2) definir los polinomios de hipótesis
- 3) definir los polinomios de tesis
- 4) distinguir parámetros y variables, eligiendo un orden de estas últimas
- 5) calcular la Base de Groebner del ideal de polinomios de hipótesis
- 6) calcular la Base de Groebner del ideal de polinomios de hipótesis y tesis
- 7) comprobar la igualdad de ambas Bases de Groebner.

En la práctica, excluido el primer paso, los demás, y en particular los Pasos 5 y 6, se ejecutan con la ayuda de un *SCA*. En el Anexo (Sección 6) se muestra un ejemplo de cómo ejecutar cada uno de ellos.

Advertencias: Las condiciones de hipótesis y tesis, han de introducirse mediante expresiones polinomiales, únicas admisibles por los métodos algebraicos de demostración (que no admiten expresiones no polinomiales: radicales, trigonométricas, ...). Por otra parte, hay problemas geométricos de configuración a los que, en principio, este método parece no ser aplicable, pero que son evitables, como se verá en las secciones 4 y 5.

Nota: Para ampliar información sobre deducción automática usando Bases de Groebner, puede verse [8].

3 Triángulo de Napoleón: nuevas propiedades

El clásico teorema de geometría elemental llamado Teorema de Napoleón afirma: *Dado un triángulo cualquiera orientado, ABC , si sobre cada uno de sus lados se construye un triángulo equilátero exteriormente, es decir, de orientación opuesta a la de ABC (Fig. 3), entonces los centros, M , N , P , de esos tres triángulos equiláteros, ABC' , BCA' y CAB' , son vértices de otro triángulo equilátero de la misma orientación que ABC . Si, por el contrario,*

los triángulos equiláteros se construyen interiormente, es decir, de la misma orientación que la de ABC , esto es, solapados con ABC (Fig. 4), entonces los centros, M' , N' , P' , de los tres triángulos equiláteros, ABC'' , BCA'' y CAB'' , que así resultan, son también vértices de otro triángulo equilátero de orientación opuesta a la de ABC .

En el primer caso a MNP se le denomina *triángulo de Napoleón exterior* y en el segundo caso, a $M'N'P'$ se le llama *triángulo de Napoleón interior*.

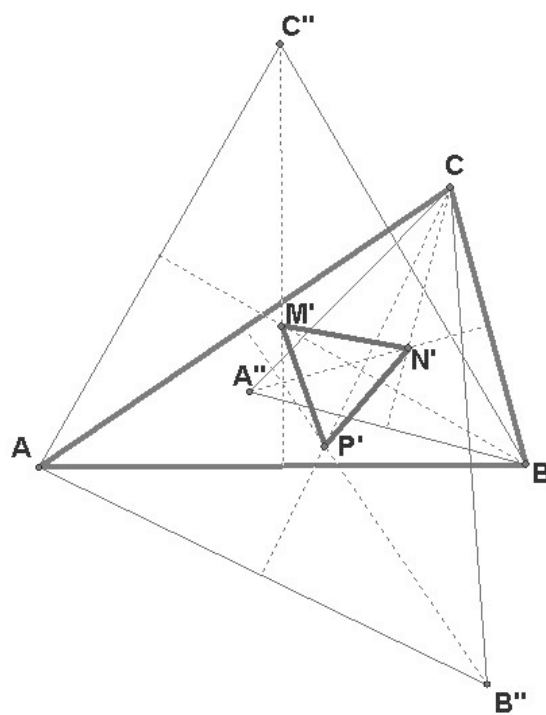
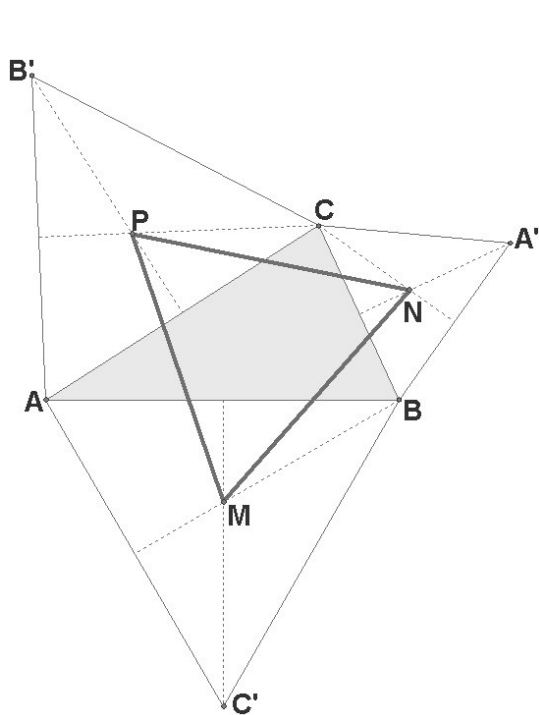


Fig. 3: *Triángulo de Napoleón exterior* Fig. 4: *Triángulo de Napoleón interior*

Nuevas propiedades de la configuración de Napoleón para triángulos, descubiertas por N. Grunbaum [5] con un sistema de geometría dinámica, han sido probadas recientemente por N. Dimitrov [11] con métodos de geometría sintética. Vamos a desarrollarlas algo mas con el método de la Sección 2.

Enunciado 1: Sea ABC un triángulo arbitrario, cuyo centroide o baricentro es denotado por G . Sobre cada uno de los lados de ABC se construye exteriormente (no solapado con ABC) un triángulo equilátero, de lado igual a dicho lado de ABC , obteniendo tres triángulos equiláteros ABC' , BCA' y

CAB' , cuyos respectivos centros son denotados M, N y P . Los puntos medios de los lados $A'B', B'C', C'A'$ son denotados J, K, L , respectivamente. Estos tres puntos permiten considerar los triángulos JKB, KLC y ALJ , cuyos respectivos centroides son denotados D, E, F . Entonces, se tiene:

- i) el triángulo MNP es equilátero, siendo G su centro
- ii) los triángulos JKB, KLC y ALJ son equiláteros
- iii) el triángulo DEF es equilátero, siendo G su centro (Fig. 5).

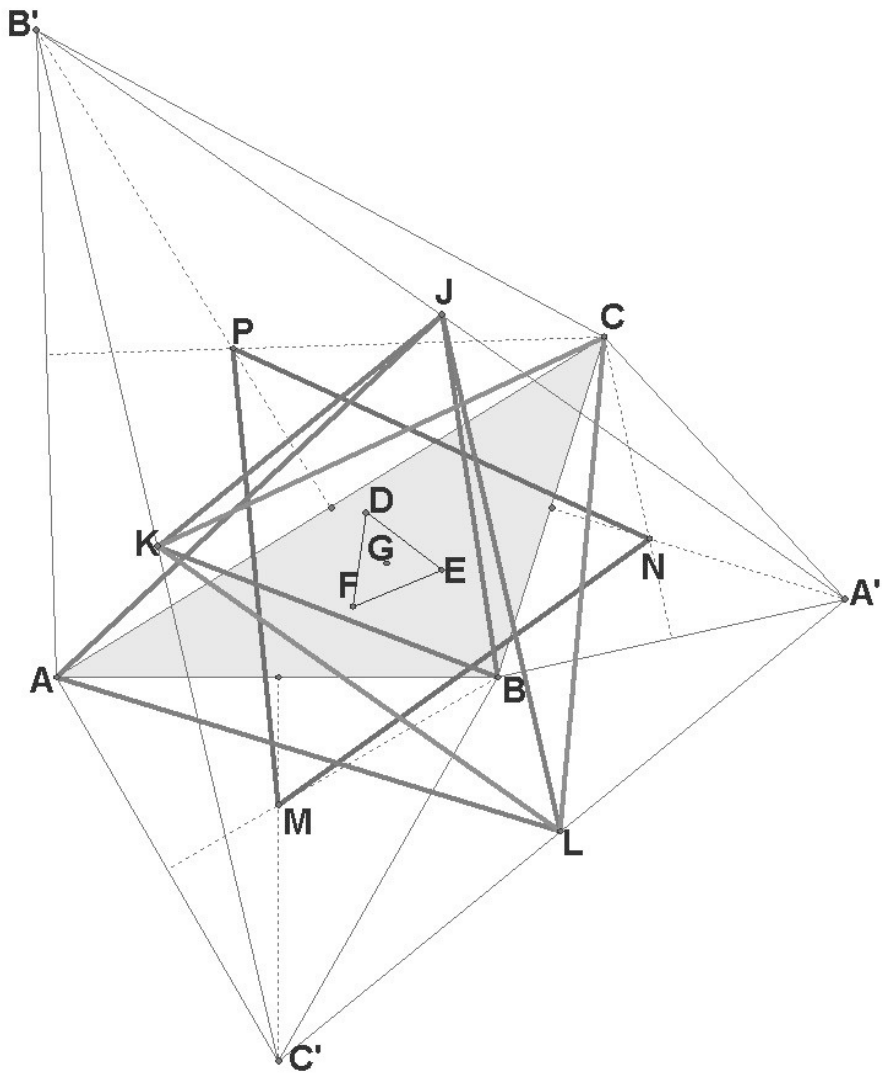


Fig. 5: *Propiedades de puntos del triángulo de Napoleón exterior*

El siguiente enunciado es similar al anterior, pero ahora construyendo interiormente (solapado) un triángulo equilátero sobre cada lado de ABC .

Enunciado 1': Sea ABC un triángulo arbitrario, cuyo centroide o baricentro es denotado por G . Sobre cada uno de los lados de ABC se construye interiormente (solapado con ABC) un triángulo equilátero, de lado igual a dicho lado de ABC , obteniendo tres triángulos equiláteros ABC'' , BCA'' y CAB'' , cuyos respectivos centros son denotados M' , N' y P' . Los puntos medios de los lados $A''B''$, $B''C''$, $C''A''$ son denotados J' , K' , L' , respectivamente. Estos tres puntos permiten considerar los triángulos $J'K'B''$, $K'L'C''$ y $A''L'J'$, cuyos respectivos centroides son denotados D' , E' , F' . Entonces, se tiene:

- i) el triángulo $M'N'P'$ es equilátero, siendo G su centro
- ii) los triángulos $J'K'B''$, $K'L'C''$ y $A''L'J'$ son equiláteros
- iii) el triángulo $D'E'F'$ es equilátero, siendo G su centro (Fig. 6)

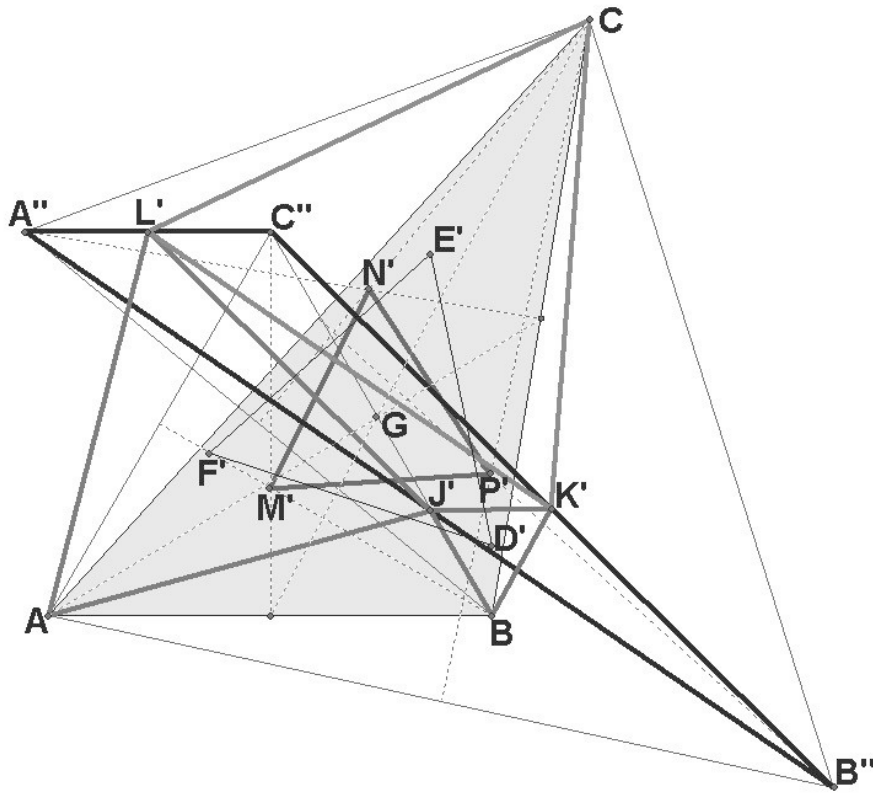


Fig. 6: Propiedades de puntos del triángulo de Napoleón interior

Comencemos observando que, fijados B y C , los puntos A' y A'' vienen simultáneamente determinados por las mismas condiciones polinómicas, traducción de las condiciones geométricas: $A'B = A'C = AB$ y $A''B = A''C = AB$. Lo mismo ocurre para los puntos B' y B'' y, también, para los puntos C' y C'' . Por ello, vamos a probar simultáneamente los enunciados 1 y 1'. Posteriormente separaremos las coordenadas de los puntos involucrados en cada uno de los dos enunciados.

Coordenadas de los puntos considerados inicialmente

Con objeto de tratar simultáneamente los enunciados 1 y 1', en principio denotaremos por $A', B', C', G, J, K, L, D, E, F$ tanto a estos puntos del Enunciado 1, como a sus correspondientes en el Enunciado 1'.

Vértices del triángulo ABC : $A = [0, 0]$, $B = [1, 0]$, $C = [c1, c2]$ (la elección de un vértice como origen de coordenadas y otro en el eje de abscisas no supone pérdida de generalidad). Centroide de ABC : $G = [g1, g2]$

Terceros vértices de los triángulos equiláteros contruidos sobre los respectivos lados BC, CA, AB : $A' = [a'1, a'2]$, $B' = [b'1, b'2]$, $C' = [c'1, c'2]$

(Los puntos medios, J, K, L , de los lados de $A'B'C'$ serán definidos más adelante, en aras de la brevedad).

Los centroides de los respectivos triángulos JKB, KLC, LJA son los puntos: $D = [d1, d2]$, $E = [e1, e2]$, $F = [f1, f2]$

Condiciones de hipótesis y sus correspondientes polinomios de hipótesis

Como venimos haciendo, denotaremos por $H_1, H_2, H_3, \dots$ a las condiciones de hipótesis y por $h_1, h_2, h_3, \dots$ a sus correspondientes polinomios de hipótesis. Las dos condiciones siguientes, H_1 y H_2 , determinan el tercer vértice C' del triángulo equilátero ABC' :

$$H_1) C'A = AB$$

$$H_2) C'A = C'B$$

Las dos condiciones siguientes, H_3 y H_4 , determinan el tercer vértice A' del triángulo equilátero $A'BC$:

$$H_3) A'C = A'B$$

$$H_4) \widehat{A'BC} = \widehat{C'AB} \text{ definida mediante } \tan(\widehat{C'AB}) = \tan(\widehat{A'BC})$$

(De acuerdo con lo indicado en la Sección 2, la igualdad de dos ángulos convexos orientados se equivalente a la de sus tangentes).

Las dos condiciones siguientes, H_5 y H_6 , determinan el tercer vértice B' del triángulo equilátero $AB'C$:

$$H_5) B'A = B'C$$

$$H_6) \widehat{B'CA} = \widehat{A'BC} \text{ definida mediante } \tan(\widehat{B'CA}) = \tan(\widehat{A'BC})$$

Las dos condiciones siguientes, H_7 y H_8 , determinan el centro N del triángulo equilátero BCA' :

$$H_7) NA' = NB$$

$$H_8) NC = NB$$

Las dos condiciones siguientes determinan el centro P del triángulo CAB' :

$$H_9) PB' = PA$$

$$H_{10}) PC = PA$$

Las dos condiciones siguientes determinan el centro M del triángulo ABC' :

$$H_{11}) MC' = MA$$

$$H_{12}) MB = MA$$

Las dos condiciones siguientes, H_{13} y H_{14} , determinan el centroide o bari-centro G del triángulo ABC :

$$H_{13}) G, C \text{ y el punto medio del segmento } AB \text{ son colineales}$$

$$H_{14}) G, A \text{ y el punto medio del segmento } BC \text{ son colineales}$$

Definimos J, K, L como respectivos puntos medios de los lados $A'B', B'C', C'A'$ del triángulo $A'B'C'$:

$$J = \frac{1}{2}(A' + B') ; K = \frac{1}{2}(B' + C') ; L = \frac{1}{2}(C' + A')$$

Las dos condiciones siguientes, H_{15} y H_{16} , determinan el centroide D del triángulo JKB :

$$H_{15}) D, J \text{ y el punto medio del segmento } KB \text{ son colineales.}$$

$$H_{16}) D, K \text{ y el punto medio del segmento } JB \text{ son colineales.}$$

Las dos condiciones siguientes, H_{17} y H_{18} , determinan el centroide E del triángulo KLC :

$$H_{17}) E, K \text{ y el punto medio del segmento } LC \text{ son colineales.}$$

$$H_{18}) E, L \text{ y el punto medio del segmento } KC \text{ son colineales.}$$

Las dos condiciones siguientes, H_{19} y H_{20} , determinan el centroide F del triángulo LJA :

$$H_{19}) F, L \text{ y el punto medio del segmento } JA \text{ son colineales.}$$

$$H_{20}) F, J \text{ y el punto medio del segmento } LA \text{ son colineales.}$$

Lista de polinomios de hipótesis: $listaH = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}]$

Parámetros y variables

Parámetros (coordenadas libremente elegibles): $c1, c2$

Variables (coordenadas ligadas, condicionadas a los valores de los parámetros) en el orden elegido, denotando *var* a la sucesión de las mismas:

$var = a'1, a'2, b'1, b'2, c'1, c'2, m1, m2, n1, n2, p1, p2, g1, g2, d1, d2, e1, e2, f1, f2$

Por tanto, el anillo de polinomios de la configuración es: $\mathbf{A} = \mathbb{R}(c1, c2)[o1, o2, a1, a2, b1, b2, c1, c2, m1, m2, n1, n2, p1, p2, g1, g2, d1, d2, e1, e2, f1, f2]$

Condiciones y polinomios de tesis

Como venimos haciendo, denotaremos por $T_1, T_2, T_3, \dots$ a las condiciones de tesis y por $t_1, t_2, t_3, \dots$ a sus correspondientes polinomios de tesis.

Las dos condiciones siguientes, T_1 y T_2 , verifican que MNP sea equilátero:

$$T_1) NP = MN$$

$$T_2) MP = MN$$

Las dos condiciones siguientes, T_3 y T_4 , verifican que G sea centro de MNP :

$$T_3) GP = GM$$

$$T_4) GN = GM$$

Las dos condiciones siguientes, T_5 y T_6 , verifican que JKB sea equilátero:

$$T_5) JK = KB$$

$$T_6) JB = KB$$

Las dos condiciones siguientes, T_7 y T_8 , verifican que KLC sea equilátero:

$$T_7) KL = KC$$

$$T_8) LC = KC$$

Las dos condiciones siguientes, T_9 y T_{10} , verifican que LJA sea equilátero:

$$T_9) LJ = LA$$

$$T_{10}) JA = LA$$

Las dos condiciones siguientes, T_{11} y T_{12} , verifican que DEF sea equilátero:

$$T_{11}) DF = DE$$

$$T_{12}) FE = DE$$

Las dos condiciones siguientes, T_{13} y T_{14} , verifican que G sea centro de DEF :

$$T_{13}) GD = GE$$

$$T_{14}) GF = GE$$

Lista de polinomios de hipótesis y tesis:

$lista_{HT} = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, h_{13}, h_{14}, h_{15}, h_{16}, h_{17}, h_{18}, h_{19}, h_{20}, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, t_7, t_8, t_9, t_{10}, t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}]$

Demostración por el método de Bases de Groebner iguales

Denotemos por $GB1$ a la Base de Groebner del ideal generado por $ListaH$ y por $GB2$ a la del ideal generado por $ListaHT$. Respecto del orden lexicográfico y el orden de variables dado por la sucesión var , resulta:

$$GB1 = [3 \cdot c2^2 - 1 + 2 \cdot c1 - c1^2 - 24 \cdot f2 \cdot c2 + 48 \cdot f2^2, -c1^2 - c2^2 + 1 + (4 \cdot c1 - 4) \cdot f1 + 4 \cdot f2 \cdot c2, 3 \cdot c2 - 2 \cdot c2 \cdot c1 + (4 \cdot c1 - 4) \cdot e2 - 4 \cdot f2, -2 \cdot c1 + 4 \cdot e1 - 1, c2 - 2 \cdot c2 \cdot c1 + (4 \cdot c1 - 4) \cdot d2 + 4 \cdot f2 \cdot c1, -c1^2 - c1 + 2 + c2^2 + (4 \cdot c1 - 4) \cdot d1 - 4 \cdot f2 \cdot c2, -c2 + 3 \cdot g2, -c1 - 1 + 3 \cdot g1, c2 - 2 \cdot c2 \cdot c1 + (2 \cdot c1 - 2) \cdot p2 + 4 \cdot f2 \cdot c1, -c1^2 + c1 + c2^2 + (2 \cdot c1 - 2) \cdot p1 - 4 \cdot f2 \cdot c2, -2 \cdot f2 + n2, -c1^2 - c2^2 + 1 + (2 \cdot c1 - 2) \cdot n1 + 4 \cdot f2 \cdot c2, c2 + (2 \cdot c1 - 2) \cdot m2 - 4 \cdot f2, -1 + 2 \cdot m1, 3 \cdot c2 + (2 \cdot c1 - 2) \cdot c'2 - 12 \cdot f2, -1 + 2 \cdot c'1, c2 - 4 \cdot c2 \cdot c1 + (2 \cdot c1 - 2) \cdot b'2 + 12 \cdot f2 \cdot c1, c1 - c1^2 + 3 \cdot c2^2 + (2 \cdot c1 - 2) \cdot b'1 - 12 \cdot f2 \cdot c2, c2 - 6 \cdot f2 + a'2, -c1^2 + 1 - 3 \cdot c2^2 + (2 \cdot c1 - 2) \cdot a'1 + 12 \cdot f2 \cdot c2]$$

Al calcular $GB2$ se obtiene el mismo resultado obtenido para $GB1$, lo que implica que el ideal generado por la lista de polinomios $listaHT$ sea igual al ideal generado por la lista de polinomios $listaH$. Por tanto, los polinomios $t_1, t_2, \dots, t_{14}$ pertenecen al ideal generado por los polinomios de hipótesis, luego las 20 condiciones de hipótesis implican las 14 condiciones de tesis.

En consecuencia y de acuerdo con lo indicado inmediatamente después de la Fig. 5, los resultados contenidos en los enunciados 1 y 1' han quedado probados por este método.

Cálculo de coordenadas de los puntos considerados en los enunciados 1 y 1'

Resolviendo el sistema de ecuaciones polinomiales de hipótesis respecto de las variables, se obtienen las soluciones en función de los parámetros, $c1$ y $c2$. Naturalmente se obtienen dos soluciones, una correspondiente al triángulo de Napoleón interior, es decir, a los puntos $A'', B'', C'', M', N', P', D', E', F'$:

$$\begin{aligned} a''1 &= -\frac{\sqrt{3} \cdot c2}{2} + \frac{c1}{2} + \frac{1}{2}, \quad a''2 = \frac{\sqrt{3} \cdot c1}{2} + \frac{c2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b''1 = \frac{\sqrt{3} \cdot c2}{2} + \frac{c1}{2}, \\ b''2 &= -\frac{\sqrt{3} \cdot c1}{2} + \frac{c2}{2}, \quad c''1 = \frac{1}{2}, \quad c''2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad m'1 = \frac{1}{2}, \quad m'2 = \frac{\sqrt{3}}{6}, \\ n'1 &= \frac{c1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot c2}{6}, \quad n'2 = \frac{\sqrt{3} \cdot c1}{6} + \frac{c2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad p'1 = \frac{c1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot c2}{6}, \\ p'2 &= -\frac{\sqrt{3} \cdot c1}{6} + \frac{c2}{2}, \quad g1 = \frac{1}{3} + \frac{c1}{3}, \quad g2 = \frac{c2}{3}, \\ d'1 &= \frac{\sqrt{3} \cdot c1^3 - \sqrt{3} \cdot c1^2 + c1^2 \cdot c2 + \sqrt{3} \cdot c1 \cdot c2^2 - 6 \cdot c2 \cdot c1 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 + 6 \cdot \sqrt{3} + c2^3 + \sqrt{3} \cdot c2^2 - 3 \cdot c2}{4(\sqrt{3} \cdot c1^2 + 3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot c2^2 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 - 3 \cdot c2)}, \\ d'2 &= \frac{-3 \cdot c1 + 3 \cdot c1^2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 \cdot c2 - c1^3 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c2 + c2^3 \cdot \sqrt{3} - c1 \cdot c2^2 + c1^2 \cdot \sqrt{3} \cdot c2 - 3 \cdot c2^2}{4(\sqrt{3} \cdot c1^2 + 3 \cdot \sqrt{3} + \sqrt{3} \cdot c2^2 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 - 3 \cdot c2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e'1 &= \frac{c1}{2} + \frac{1}{4}, \quad e'2 = \frac{-\sqrt{3} \cdot c2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 \cdot c2 + c1 - 6 \cdot c2^2}{4(\sqrt{3} \cdot c1 - 3 \cdot c2)}, \\
f'1 &= \frac{\sqrt{3} \cdot c1^3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c1^2 \cdot c2 - c1^2 \cdot c2 + \sqrt{3} \cdot c1 \cdot c2^2 - 4 \cdot c2 \cdot c1 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 - 4 \cdot c2 + \sqrt{3} - c2^3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c2^2}{4(-3 \cdot c2 + \sqrt{3} \cdot c1 + \sqrt{3} \cdot c1^2 + \sqrt{3} \cdot c2^2 + \sqrt{3})}, \\
f'2 &= \frac{-1 - 4 \cdot c2^2 + c1^3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c2 + c2^3 \cdot \sqrt{3} + c1 \cdot c2^2 + c1^2 \cdot \sqrt{3} \cdot c2}{4(-3 \cdot c2 + \sqrt{3} \cdot c1 + \sqrt{3} \cdot c1^2 + \sqrt{3} \cdot c2^2 + \sqrt{3})}
\end{aligned}$$

y la otra correspondiente a los puntos $A', B', C', M, N, P, D, E, F$, es decir, al triángulo de Napoleón exterior:

$$\begin{aligned}
a'1 &= \frac{\sqrt{3} \cdot c2}{2} + \frac{c1}{2} + \frac{1}{2}, \quad a'2 = -\frac{\sqrt{3} \cdot c1}{2} + \frac{c2}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad b'1 = -\frac{\sqrt{3} \cdot c2}{2} + \frac{c1}{2}, \\
b'2 &= \frac{\sqrt{3} \cdot c1}{2} + \frac{c2}{2}, \quad c'1 = \frac{1}{2}, \quad c'2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad m1 = \frac{1}{2}, \quad m2 = -\frac{\sqrt{3}}{6}, \\
n1 &= \frac{c1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot c2}{6}, \quad n2 = -\frac{\sqrt{3} \cdot c1}{6} + \frac{c2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad p1 = \frac{c1}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot c2}{6}, \\
p2 &= \frac{\sqrt{3} \cdot c1}{6} + \frac{c2}{2}, \quad g1 = \frac{1}{3} + \frac{c1}{3}, \quad g2 = \frac{c2}{3}, \\
d1 &= -\frac{\sqrt{3} \cdot c1^3 + \sqrt{3} \cdot c1^2 \cdot c2 + c1^2 \cdot c2 - \sqrt{3} \cdot c1 \cdot c2^2 - 6 \cdot c2 \cdot c1 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 - 6 \cdot \sqrt{3} + c2^3 - \sqrt{3} \cdot c2^2 - 3 \cdot c2}{4(-\sqrt{3} \cdot c1^2 - 3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot c2^2 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 - 3 \cdot c2)}, \\
d2 &= \frac{-3 \cdot c1 + 3 \cdot c1^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 \cdot c2 - c1^3 - 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c2 - c2^3 \cdot \sqrt{3} - c1 \cdot c2^2 - c1^2 \cdot \sqrt{3} \cdot c2 - 3 \cdot c2^2}{4(-\sqrt{3} \cdot c1^2 - 3 \cdot \sqrt{3} - \sqrt{3} \cdot c2^2 + 3 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 - 3 \cdot c2)}, \\
e1 &= \frac{c1}{2} + \frac{1}{4}, \quad e2 = \frac{\sqrt{3} \cdot c2 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 \cdot c2 + c1 - 6 \cdot c2^2}{4(-\sqrt{3} \cdot c1 - 3 \cdot c2)}, \\
f1 &= -\frac{\sqrt{3} \cdot c1^3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c1^2 \cdot c2 - c1^2 \cdot c2 - \sqrt{3} \cdot c1 \cdot c2^2 - 4 \cdot c2 \cdot c1 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c1 - 4 \cdot c2 - \sqrt{3} - c2^3 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c2^2}{4(-3 \cdot c2 - \sqrt{3} \cdot c1 - \sqrt{3} \cdot c1^2 - \sqrt{3} \cdot c2^2 - \sqrt{3})}, \\
f2 &= \frac{-1 - 4 \cdot c2^2 + c1^3 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot c2 - c2^3 \cdot \sqrt{3} + c1 \cdot c2^2 - c1^2 \cdot \sqrt{3} \cdot c2}{4(-3 \cdot c2 - \sqrt{3} \cdot c1 - \sqrt{3} \cdot c1^2 - \sqrt{3} \cdot c2^2 - \sqrt{3})}
\end{aligned}$$

Propiedades que relacionan puntos de las configuraciones exterior e interior

En todo lo precedente de esta sección, se ha tratado conjuntamente con las configuraciones exterior e interior de Napoleón. Ello es consecuencia del modo en que se han tenido que introducir las condiciones de hipótesis y tesis, tratando de traducirlas mediante expresiones polinomiales.

Pero también hay propiedades que relacionan ciertos puntos de la configuración exterior de Napoleón con otros de la interior. Para probar estas propiedades hemos de separar las coordenadas los puntos de las configuraciones exterior e interior, haciendo uso de las expresiones de las coordenadas, en función de $c1, c2$, obtenidas en el punto anterior. En el siguiente enunciado se consideran propiedades de ese tipo.

Enunciado 2: *De acuerdo con la notación utilizada hasta aquí, se verifican (Fig. 7):*

- vii) D, E, F son los respectivos puntos medios de los lados $M'N', N'P', P'M'$ del triángulo $M'N'P'$
- viii) D', E', F' son los respectivos puntos medios de los lados MN, NP, PM del triángulo MNP
- ix) el área (orientada) de ABC es igual a la suma algebraica de las áreas de los triángulos de Napoleón MNP (exterior) y $M'N'P'$ (interior)
- x) el área (orientada) de ABC es cuatro veces la suma algebraica de las áreas de los triángulos FDE (exterior) y $F'D'E'$ (interior).

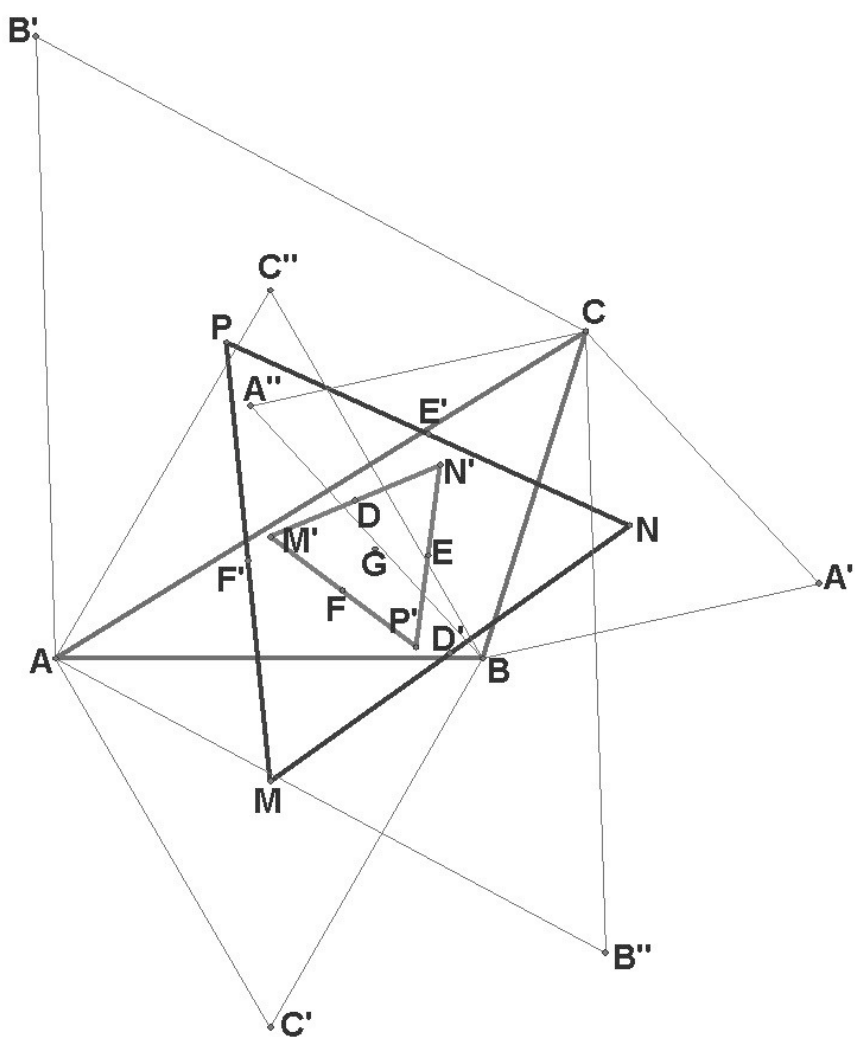


Fig. 7: Propiedades que relacionan a ambos triángulos de Napoleón

Demostración

vii) Se prueba mediante anulación de ambas coordenadas en las tres expresiones siguientes, relativas a vectores de posición de puntos:

$$\begin{aligned}(M' + N') - 2 \cdot D &\longrightarrow [0, 0] & (D \text{ es punto medio del lado } M'N') \\(N' + P') + 2 \cdot E &\longrightarrow [0, 0] & (E \text{ es punto medio del lado } N'P') \\(P' + M') + 2 \cdot F &\longrightarrow [0, 0] & (F \text{ es punto medio del lado } P'M')\end{aligned}$$

viii) Se prueba de modo similar a la del apartado anterior:

$$\begin{aligned}(M + N) - 2 \cdot D' &\longrightarrow [0, 0] & (D' \text{ es punto medio del lado } MN) \\(N + P) + 2 \cdot E' &\longrightarrow [0, 0] & (E' \text{ es punto medio del lado } NP) \\(P + M) + 2 \cdot F' &\longrightarrow [0, 0] & (F' \text{ es punto medio del lado } PM)\end{aligned}$$

ix) Aplicando la expresión habitual del área orientada del triángulo de vértices dados por sus coordenadas, mediante un determinante de orden 3, se comprueba la anulación de la expresión:

$$\text{area}(N, P, M) + \text{area}(N', P', M') - \text{area}(A, B, C) \longrightarrow 0$$

x) De modo similar, se comprueba la anulación de la expresión siguiente:

$$\text{area}(A, B, C) - 4 \cdot (\text{area}(F', D', E') + \text{area}(F, D, E)) \longrightarrow 0$$

4 Una dificultad superable: condición de tesis algebraicamente inseparable

En algunos problemas, al traducir las condiciones geométricas de hipótesis a términos algebraicos, resulta que estas implican otra, u otras, condiciones de tesis algebraicamente ligadas a la condición de tesis prevista en principio. Mas precisamente, el ideal generado por los polinomios de hipótesis no incluye al polinomio de tesis, pero sí a su producto por otro polinomio o polinomios (entonces el polinomio de tesis no es irreducible y el ideal generado por él ya no es primo). En tal caso, al ejecutar la demostración automática resultan distintas las dos bases de Groebner. Afortunadamente se trata de una dificultad superable. Basta considerar como polinomio de tesis al producto de los correspondientes a cada una de las condiciones que aparecen algebraicamente ligadas a la que se pretendía considerar inicialmente.

Veámoslo reflejado en un problema clásico: el Teorema de Euler relativo a la distancia incentro-circuncentro de un triángulo (Fig. 8).

Enunciado: Siendo R y r los respectivos radios de las circunferencias circunscrita e inscrita en un triángulo, la distancia, d , entre su incentro y su circuncentro viene dada por la relación $d^2 = R(R - 2r)$.

Coordenadas de los puntos considerados inicialmente

Vértices del triángulo ABC : $A = [0, 0]$, $B = [b, 0]$, $C = [c1, c2]$

Incentro I de ABC y sus proyecciones ortogonales, U, V, W , sobre los lados de ABC (puntos de contacto de los lados con la circunferencia inscrita):

$I = [i1, i2]$, $U = [u1, 0]$, $V = [v1, v2]$, $W = [w1, w2]$

Circuncentro del triángulo ABC : $O = [o1, o2]$

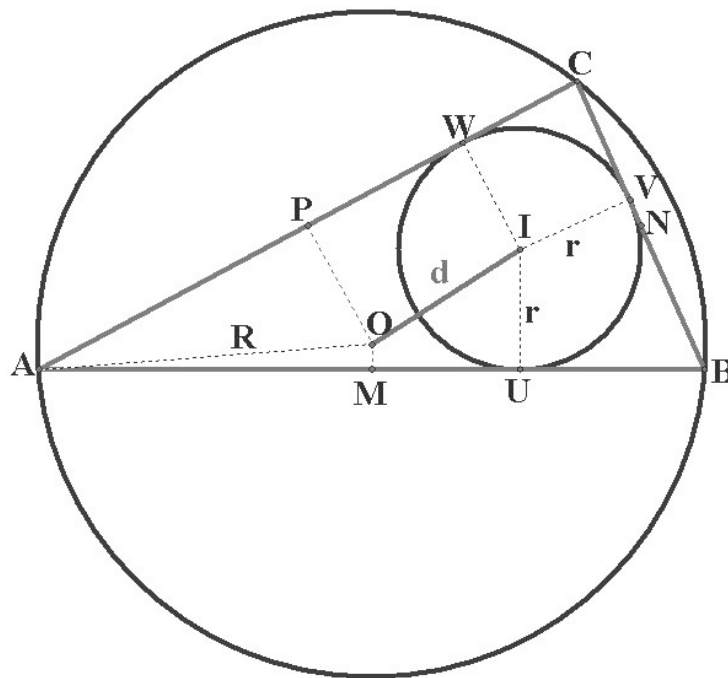


Fig. 8: Distancia d del incentro I al circuncentro O

Condiciones de hipótesis y sus correspondientes polinomios de hipótesis

Como venimos haciendo, denotaremos por $H_1, H_2, H_3, \dots$ a las condiciones de hipótesis y por $h_1, h_2, h_3, \dots$ a sus correspondientes polinomios de hipótesis.

El circuncentro de ABC equidista de A y B y también equidista de A y C :

$$H_1) \overline{IB} = \overline{IA}$$

$$H_2) \overline{IC} = \overline{IA}$$

Los puntos V, W están en los respectivos lados BC, CA del triángulo ABC :

H_3) V, B, C son colineales

H_4) W, C, A son colineales

(La condición de alineación de U, A, B es consecuencia de la anulación de la segunda coordenada de U)

Los puntos U, V, W son proyecciones ortogonales del incentro sobre los respectivos lados AB, BC, CA del triángulo ABC :

H_5) IU y AB son ortogonales

H_6) IV y BC son ortogonales

H_7) IW y CA son ortogonales

Por estar el incentro en la bisectriz del ángulo A , ha de ser $AU = AW$, y por estar también en la bisectriz del ángulo B , ha de ser $BU = BV$:

H_8) $\overline{AU} = \overline{AW}$

H_9) $\overline{BU} = \overline{BV}$

Al radio OA de la circunscrita lo denotamos por R , al radio IU de la inscrita lo denotamos por r y a la distancia OI la denotamos por d :

H_{10}) $\overline{AO} = R$

H_{11}) $i2 = r$

H_{11}) $\overline{IO} = d$

Lista de polinomios de hipótesis:

$listaH = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}] =$
 $[b^2 - 2 \cdot b \cdot o1, c1^2 - 2 \cdot c1 \cdot o1 + c2^2 - 2 \cdot c2 \cdot o2, b \cdot c2 - b \cdot v2 - v1 \cdot c2 + v2 \cdot$
 $c1, -w1 \cdot c2 + w2 \cdot c1, b \cdot u1 - b \cdot i1, c1 \cdot v1 - c1 \cdot i1 - b \cdot v1 + b \cdot i1 + c2 \cdot v2 - c2 \cdot$
 $i2, c1 \cdot w1 - c1 \cdot i1 + c2 \cdot w2 - c2 \cdot i2, u1^2 - w1^2 - w2^2, u1^2 - 2 \cdot b \cdot u1 - v1^2 + 2 \cdot b \cdot$
 $v1 - v2^2, o1^2 + o2^2 - R^2, i2 - r, o1^2 - 2 \cdot o1 \cdot i1 + i1^2 + o2^2 - 2 \cdot o2 \cdot i2 + i2^2 - d^2]$

Parámetros y variables

Parámetros (coordenadas libremente elegibles): $b, c1, c2$

Variables (coordenadas ligadas): $var = o1, o2, u1, v1, v2, w1, w2, i1, i2, R, r, d$

Anillo de polinomios de la configuración:

$\mathbf{A} = \mathbb{R}(b, c1, c2)[o1, o2, u1, v1, v2, w1, w2, i1, i2, R, r, d]$

Condiciones y polinomios de tesis

Como venimos haciendo, denotaremos por T_1 a la condición de tesis:

T_1) $d^2 = R(R - 2r)$

y por t_1 a su correspondiente polinomio de tesis: $t_1 = R \cdot (R - 2 \cdot r) - d^2$

Lista de polinomios de hipótesis y tesis:

$$listaHT = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, t_1]$$

Intento fallido de demostración por Bases de Groebner iguales

Denotemos por $GB1$ a la Base de Groebner del ideal generado por $ListaH$ y por $GB2$ a la del ideal generado por $ListaHT$. Respecto del orden lexicográfico de la sucesión var , se obtienen sendas listas de polinomios, que omitimos por su longitud excesiva. Realmente, basta que el SCA calcule ambas bases de Groebner, no siendo preciso que exhiba los resultados, bastando realizar la evaluación de la igualdad $GB1 = GB2$. En nuestro caso, el resultado es *negativo*, es decir, $GB1 \neq GB2$.

Buscando la causa del fracaso

¿Es que no es cierto el Teorema de Euler relativo a la distancia incentro-circuncentro? Para responder a esta cuestión, consideremos, en particular, el triángulo ABC de datos $b = 3, c_1 = 2, c_2 = 1$. Resolviendo, con ayuda del SCA , en este caso particular, el sistema de las nueve primeras condiciones de hipótesis (excluyendo las tres últimas, las que definen R, r, d), respecto de las nueve primeras variables $o_1, o_2, u_1, v_1, v_2, w_1, w_2, i_1, i_2$, se obtienen 4 soluciones, cuyas expresiones son demasiado largas para ser transcritas aquí, pero cuya evaluación aproximada con 3 dígitos resulta ser:

$$[o_1 = 1.50, o_2 = -.500, u_1 = 1.08, v_1 = 4.33, v_2 = -1.38, w_1 = -1.01, w_2 = -.504, i_1 = 1.08, i_2 = -4.67], [o_1 = 1.50, o_2 = -.500, u_1 = 1.92, v_1 = 2.16, v_2 = .84, w_1 = 1.82, w_2 = .89, i_1 = 1.92, i_2 = .6], [o_1 = 1.50, o_2 = -.500, u_1 = 3.32, v_1 = 2.9, v_2 = .1, w_1 = 2.8, w_2 = 1.5, i_1 = 3.32, i_2 = .6], [o_1 = 1.50, o_2 = -.500, u_1 = -.325, v_1 = .626, v_2 = 2.35, w_1 = .287, w_2 = .144, i_1 = -.325, i_2 = 1.42]$$

Fácilmente se comprueba que corresponden a la inscrita y las 3 excritas. ¿Por qué? La causa de haber obtenido las excritas junto a la inscrita parece clara. El punto I se ha determinado no a partir de $AU = AW$ y $BU = BW$, sino a partir de $AU^2 = AW^2$ y $BU^2 = BW^2$, que también conviene a los tres excentros, además del incentro.

Distancia excentro-circuncentro para una excrita

Un *Sistema de Geometría Dinámica* puede ayudarnos a relacionar fácilmente los radios de una circunferencia excrita y de la circunscrita con la distancia entre sus centros. En la Fig. 9 se muestra que, para el triángulo fijo con-

siderado en ella, no sólo se verifica la fórmula de Euler, sino también una relación parecida entre la distancia, d' , del circuncentro O a un excentro, E , y los radios R y r' de la circunferencia circunscrita y la excrita de centro E . Concretamente, en ese triángulo se verifican: $R^2 - d'^2 - 2r \cdot R = 0$ y $R^2 - d'^2 + 2r' \cdot R = 0$. ¿Será ello cierto en general para la inscrita y para las tres excritas?

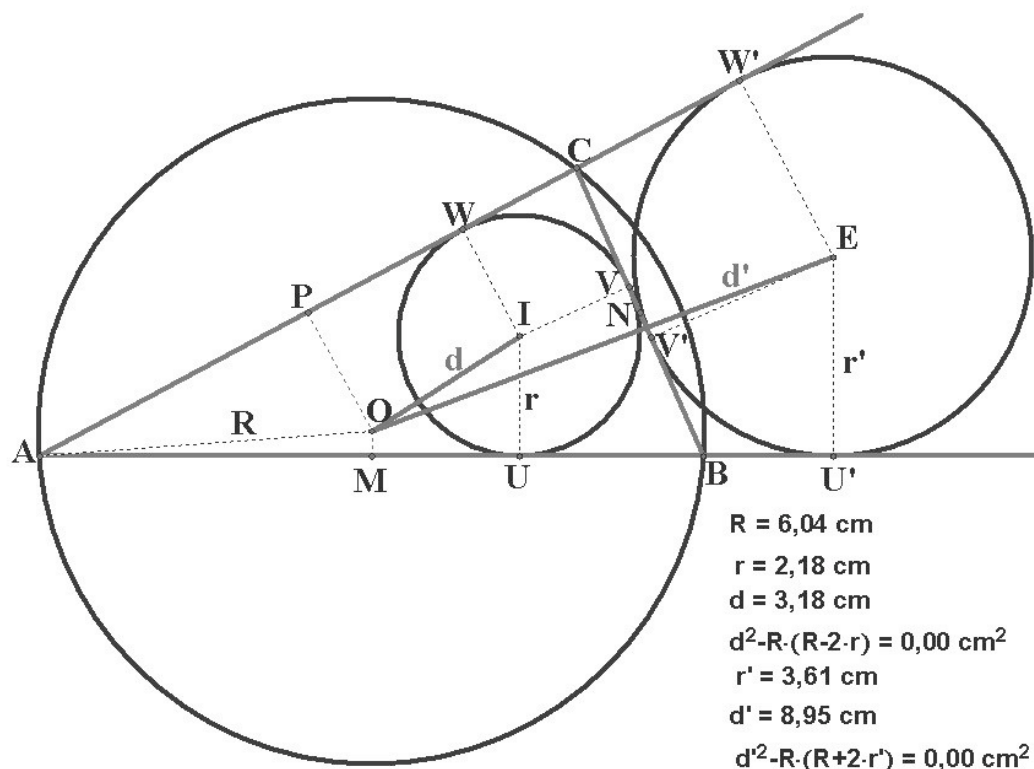


Fig. 9: Distancia d' del excentro E al circuncentro O

Nueva expresión para el polinomio de tesis

Como ya se ha comentado, los métodos algebraicos de demostración automática sólo admiten expresiones polinómicas, por lo que se han de considerar cuadrados de distancia, en vez de distancias. Como consecuencia, al pasar de las condiciones geométricas $AU = AW$ y $BU = BW$, a las correspondientes expresiones polinómicas, no hemos podido separar el incentro de los excentros.

Ello nos invita a considerar simultáneamente las dos relaciones obtenidas en el ejemplo anterior para d y d' , lo que induce a probar como polinomio de tesis el producto de ambos polinomios. Así pues, denotando también por r y d al radio de la excrita y la distancia excentro-circuncentro, respectivamente, tal polinomio de tesis será:

$$t_2 = (R^2 - d^2 - 2rR) \cdot (R^2 - d^2 + 2rR) = (R^2 - d^2)^2 - 4r^2R^2$$

y la nueva lista de polinomios de hipótesis y tesis:

$$listaHT2 = [h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_{12}, t_2]$$

Nueva demostración por Bases de Grebner iguales

Denotando por $GB3$ a la Base de Groebner del ideal generado por $ListaHT2$, tras la evaluación booleana de la igualdad $GB1 = GB3$, el resultado es *afirmativo*, es decir, $GB1 = GB3$.

Notemos finalmente que, de este modo, se han probado simultáneamente las relaciones $d^2 = R(R - 2r)$ y $d^2 = R(R + 2r)$, para las distancias del circuncentro al incentro y a los excentros, respectivamente.

5 Otra dificultad superable con una potencia entera del polinomio de tesis

En el siguiente problema se manifiesta otra de las dificultades que pueden surgir al tratar de ejecutar una demostración automática. Que en el problema geométrico subyacente, exista un punto, P , definido por dos líneas con un contacto de orden mayor que 1 en P . Ello implica un incremento del grado en el correspondiente polinomio de hipótesis (que ya no genera un ideal primo, sino primario, dicho en términos algebraicos).

Afortunadamente se trata de una dificultad también superable, consistente en sustituir el polinomio de tesis por una potencia del mismo de exponente entero suficientemente grande.

Para mayor sencillez, veámoslo reflejado sobre un problema muy simple, relativo a dos circunferencias tangentes entre sí y su punto común, en el que tienen un contacto de orden 2.

Enunciado: *El punto de intersección de dos circunferencias tangentes exteriormente está en su recta de centros (Fig. 10).*

Coordenadas de los puntos considerados

Centros, A y B , de las circunferencias y punto P de tangencia:

$$A = [a, 0], \quad B = [b, 0], \quad P = [p1, p2]$$

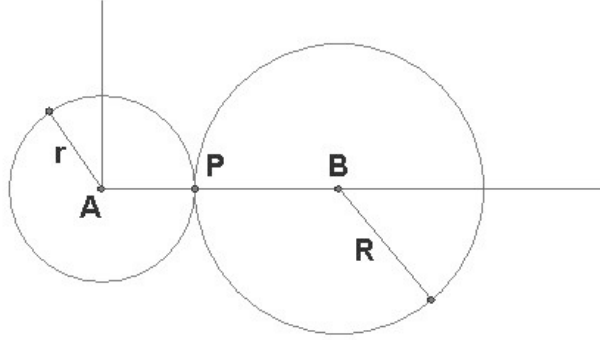


Fig. 10: *Circunferencias tangentes exteriormente*

Condiciones de hipótesis y sus correspondientes polinomios de hipótesis

Como venimos haciendo, denotaremos por H_1, H_2, H_3 a las condiciones de hipótesis y por h_1, h_2, h_3 a sus correspondientes polinomios de hipótesis.

H_1) P está en la circunferencia de centro A y radio r : $h_1 = \text{dist2}(P, A) - r^2$

H_2) P está en la circunferencia de centro B y radio R : $h_2 = \text{dist2}(P, B) - R^2$

H_3) La distancia entre centros es $r + R$: $h_3 = \text{dist2}(A, B) - (R + r)^2$

Lista de polinomios de hipótesis: $\text{ListaH} = [h_1, h_2, h_3] = [a^2 - 2 \cdot a \cdot p1 + p1^2 + p2^2 - r^2, b^2 - 2 \cdot b \cdot p1 + p1^2 + p2^2 - R^2, b^2 - 2 \cdot b \cdot a + a^2 - R^2 - 2 \cdot R \cdot r - r^2]$

Parámetros y variables

Parámetros (coordenadas libremente elegibles): a, r, R

Variables (coordenadas ligadas): $\text{var} = b, p1, p2$

Anillo de polinomios de la configuración: $\mathbf{A} = \mathbb{R}(a, r, R)[b, p1, p2]$

Condiciones y polinomios de tesis

Como venimos haciendo, denotaremos por T_1 a la condición de tesis y por t_1 a su correspondiente polinomio de tesis:

T_1) El punto P está en la recta de centros, AB : $t_1 = p2 \cdot b - p2 \cdot a$

Lista de polinomios de hipótesis y tesis: $\text{listaHT} = [h_1, h_2, h_3, t_1]$

Intento fallido de demostración por Bases de Groebner iguales

Denotemos por $GB1$ a la Base de Groebner del ideal generado por ListaH

y por $GB2$ a la del ideal generado por $ListaHT$. Respecto del orden lexicográfico de la sucesión var , se obtienen sendas listas de polinomios:

$$GB1 = [p2^2, -r^2 + p1^2 - 2 \cdot a \cdot p1 + a^2, R \cdot a + b \cdot r + (-R - r) \cdot p1]$$

$$GB2 = [p2, -r^2 + p1^2 - 2 \cdot a \cdot p1 + a^2, R \cdot a + b \cdot r + (-R - r) \cdot p1]$$

De un vistazo se observa que difieren en su primer elemento, $p2^2 \neq p2$ (o, si se prefiere, ejecutar con el SCA la evaluación booleana de la igualdad de bases, el resultado es *negativo*, es decir, $GB1 \neq GB2$).

Buscando la causa del fracaso

Geoméricamente el punto P está en la recta AB . Entonces, ¿por qué han resultado distintas las Bases de Groebner? El hecho de que las dos circunferencias tengan un contacto de orden 2 en P se traduce algebraicamente en aumento del grado de uno de los polinomios de hipótesis.

Pero geoméricamente P, A, B deben ser colineales. Esta condición se va a traducir algebraicamente, no en que t_1 pertenezca al ideal que generan los polinomios de hipótesis, sino en que pertenezca alguna de sus potencias enteras. Concretamente, en nuestro ejemplo, va a bastar elevar t_1 al cuadrado. En efecto, tomando como lista de polinomios de hipótesis y tesis:

$$listaHT2 = [h_1, h_2, h_3, (t_1)^2]$$

y denotando por $GB3$ a la Base de Groebner del ideal generado por $ListaHT2$, respecto del orden lexicográfico de la sucesión var , resulta inmediatamente $GB3 = GB1$, y en consecuencia $h_1 = 0, h_2 = 0, h_3 = 0$ implican $(t_1)^2 = 0$. Ahora bien, por ser $\mathbb{R}(a, r, R)[b, p1, p2]$ dominio de factorización única, y por tanto dominio de integridad, $(t_1)^2 = 0$ implica $t_1 = 0$.

En resumen, en caso de algún contacto de orden mayor que 1, basta sustituir la condición $t_1 = 0$ por $(t_1)^n = 0$, para algún exponente entero suficientemente grande, $n > 1$.

Nota: Para ampliar información sobre la cuestión considerada en esta sección, puede verse [9].

6 Anexo: automatización de cálculos con un SCA

En la práctica, las demostraciones por el método de Bases de Groebner iguales se ha de realizar con la ayuda de un SCA que permite automatizar los cálculos y, en especial, calcular Bases de Groebner.

Para que sirva de ejemplo, en esta sección vamos a transcribir el código correspondiente al problema tratado en la Sección 1, usando el SCA Maple.

Pero antes, comencemos definiendo los procedimientos auxiliares correspondientes a las operaciones geométricas consideradas en la sección 2, los cuales permiten traducir a términos algebraicos las condiciones de hipótesis y tesis con comodidad (aunque, naturalmente, pueden no ser usados).

Procedimientos auxiliares

Procedimiento *cuadrado de distancia* entre dos puntos, U y V :

```
dist2:=proc(U,V)
  (V[1]-U[1])*(V[1]-U[1])+(V[2]-U[2])*(V[2]-U[2])
end:
```

Procedimiento de *equidistancia* entre los puntos U y V y los puntos W e Y , es decir, $\text{dist}(U,V)=\text{dist}(W,Y)$:

```
equiDist:=proc(U,V,W,Y)
  expand( dist2(U,V)-dist2(W,Y) )
end:
```

Procedimiento de *paralelismo* de las rectas UV y WY :

```
paral:=proc(U,V,W,Y)
  (Y[2]-W[2])*(V[1]-U[1])-(Y[1]-W[1])*(V[2]-U[2])
end:
```

Procedimiento de *ortogonalidad* de las rectas UV y WY :

```
ortog:=proc(U,V,W,Y)
  (Y[1]-W[1])*(V[1]-U[1])+(Y[2]-W[2])*(V[2]-U[2])
end:
```

Procedimiento de *colineación* de tres puntos, M , N y P :

```
colinea:=proc(M,N,P)
  (N[1]-M[1])*(P[2]-M[2])-(N[2]-M[2])*(P[1]-M[1])
end:
```

Procedimiento *simétrico* del punto U respecto del V (rotación de 180):

```
simetr:=proc(U,V)
  2*V-U
end:
```

Procedimiento *transporte o igualdad de ángulos orientados* $\widehat{UVW} = \widehat{x^+OP}$, mediante la traducción algebraica de la igualdad $\tan(\widehat{UVW}) = \tan(\widehat{x^+OP})$:

```

equiAng:=proc(U,V,W,P)
  local v,w,tg1,tg2:
  v:=-P[2]/P[1]:
  if U[1]=V[1] then RETURN( (W[2]-V[2])+(W[1]-V[1]) ) fi:
  tg1:=(U[2]-V[2])/(U[1]-V[1]):
  if W[1]=V[1] then RETURN( (U[2]-V[2])-(U[1]-V[1]) ) fi:
  tg2:=(W[2]-V[2])/(W[1]-V[1]):
  w:=normal( (tg2-tg1)/(1+tg1*tg2) ):
  expand( numer(v)*denom(w)-numer(w)*denom(v) )
end:

```

Procedimiento *area de triángulo* de vértices los puntos M, N, P (que requiere la carga previa del paquete de Algebra Lineal):

```

with(LinearAlgebra):
areatri:=proc(M,N,P)
  (1/2)*Determinant(<< 1,M[1],M[2]>|< 1,N[1],N[2]>|< 1,P[1],
  P[2]>>)
end:

```

Ejecución de los cálculos del problema de la Sección 1

Reinicio del sistema:

```
restart:
```

Coordenadas de los puntos considerados:

```
A:=[0,0]: B:=[b,0]: C:=[c1,c2]: U:=[u1,u2]: V:=[v1,v2]:
```

Polinomios de hipótesis, denotados $h_1, h_2, \dots$:

```

h1:=paral(U,C,A,B):
h2:=paral(A,U,B,C):
h3:=colinea(A,C,V):
h4:=colinea(B,U,V):
listaH:=[h1,h2,h3,h4]:

```

Variables:

```
var=u1,u2,v1,v2
```

Polinomios de tesis, denotados t_1, t_2 :

```

t1:=dist2(V,A)-dist2(V,C):
t2:=dist2(V,B)-dist2(V,U):
listaHT:=[h1,h2,h3,h4,t1,t2]:

```

Comparación de ambas Bases de Groebner:

```
with(Groebner):  
GB1 := Basis( listaH, plex(var) ):  
GB2 := Basis( listaHT, plex(var) ):  
evalb(GB1 = GB2);  $\longrightarrow$  true
```

Al ser afirmativa la respuesta a la evaluación de la igualdad $GB1 = GB2$ (con el comando `evalb`), la demostración ha concluido con éxito.

Nota: Los autores ofrecen a los lectores interesados el código Maple de todos los problemas desarrollados en este artículo.

Conclusiones

El método desarrollado es una versión elemental muy fácil de aplicar. Consiste en comparar la base de Groebner del ideal generado por los polinomios de hipótesis y tesis con la del ideal generado solo por los polinomios de hipótesis y permite verificar simultáneamente numerosas condiciones de tesis, de manera automática.

Ha sido aplicado a probar simultáneamente varias propiedades de la configuración de Napoleón, la mayoría bien conocidas y algunas novedosas.

En principio, el método parece no aplicable en casos en que las condiciones de tesis se traduzcan algebraicamente en ideales no primos, pero en las secciones 4 y 5 se explica como superar esas dificultades.

El método es también aplicable a problemas propios de espacios euclídeos de dimensión mayor que 2, como los considerados en [10].

Referencias

- [1] S-C. Chou (1988), *Mechanical Geometry Theorem Proving*. Reidel.
- [2] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (1994), *Nuevas tecnologías en Geometría*. Editorial Complutense, págs. 173-220.
- [3] D. Cox, J. Little, D. O'Shea (1997), *Ideals, Varieties and Algorithms*. Srpinge, págs. 286-309.