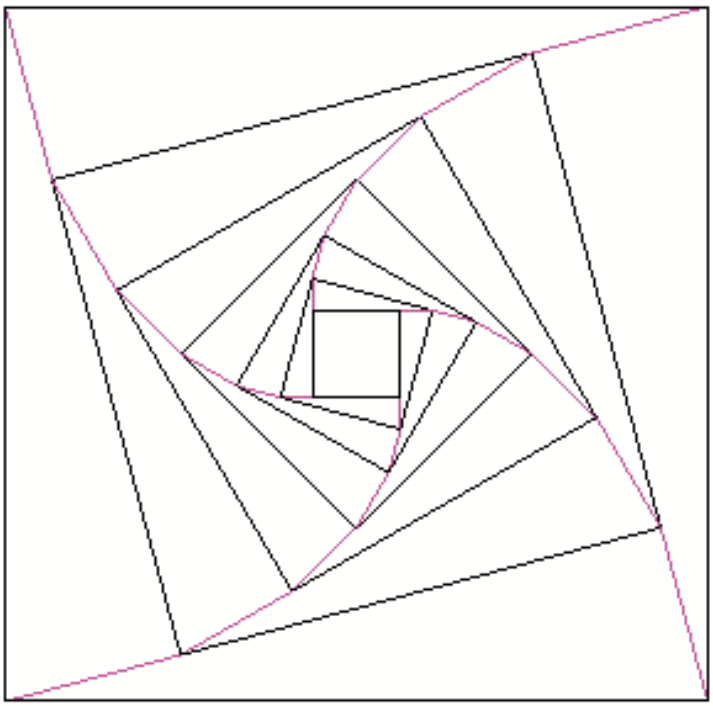
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 87
FEBRERO DE 2011

ÍNDICE

Págs.

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2011 4
Nota sobre el recibo anual 4
XXIX Concurso de Resolución de Problemas 5
X Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid,
por *Joaquín Hernández Gómez* 6
Fase Local de la de la XLVII Olimpíada Matemática Española en los distritos de Madrid,
por *María Gaspar* 8
Una introducción a la estructura de grupo de tipo finito a partir de unos rosetones grecorromanos,
por *Eugenio Roanes Macías* 10
Sobre algunos errores en libros de texto de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato,
por *Aurel Muntean* 30
Algunos límites en Geometría y en Análisis,
por *Juan-Bosco Romero Márquez* 54
Estimación de la influencia del carácter inconexo de una red de transporte por ferrocarril,
por *Eugenio Roanes Lozano y Antonio Hernando* 69
Distribución del número de elementos invariantes en las permutaciones,
por *Pedro Pescador Díaz* 78
Figuras geométricas en madera: curvas, cónicas y cono de Apolonio,
por *Francisco Treceño Losada* 85
Reseña de libros 93
Instrucciones para el envío de originales 94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín 95
Boletín de inscripción 96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
`http://www.sociedadpuigadam.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:
JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO (Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ (Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Convocatoria de la
Asamblea General Ordinaria de 2011

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2011 para el sábado *día 14 de mayo de 2011*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.

5. Asuntos de trámite.

6. Ruegos y preguntas.

Nota sobre el recibo anual

Al igual que el pasado curso, durante el presente curso 2010-2011, el recibo anual del curso se ha pasado en noviembre de 2010, porque la Federación de Sociedades Matemáticas requiere cerrar cuentas antes de fin del año.

Recordamos a nuestros socios que, como ya se dio cuenta en el Acta de la Asamblea 2009, publicada en el nº 82 de nuestro Boletín, la cuota global anual de 49€ ya incluye los 30€ correspondientes a la Sociedad (por la que se recibe nuestro Boletín), y los 19€ correspondientes a la Federación (por la que se recibe la revista Suma).

La Junta Directiva

XXIX Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *11 de junio del 2011* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 20 de Mayo del 2011, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid *Fax: 91 394 4662*
Correo electrónico: `jetayo@mat.ucm.es`

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2010-2011.

X Concurso Intercentros de Matemáticas

El penúltimo sábado de noviembre de cada año es una fecha importante en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Si alguien quiere observar simultáneamente talento, entusiasmo, nerviosismo y alegría, debería pasarse ese día por la Facultad. No es muy común ver a más de 400 adolescentes derrochando todo eso.

Todo ello es posible gracias a la actitud encomiable de muchos profesores que, además de preparar a sus estudiantes durante el curso para estas actividades, dedican toda la mañana del sábado a vigilar las pruebas, sin reconocimiento alguno por parte de la Administración, ni puntos para sexenios ni traslados ni, ciertamente, ningún sobresueldo por echar horas fuera de su horario.

La Sociedad Puig Adam organiza, junto con la Facultad de Matemáticas de la UCM, desde hace 10 años el Concurso Intercentros. Como ya ocurrió el año pasado, se permite que los centros que lo deseen puedan presentar dos equipos, es decir, un total de 12 estudiantes. En la última edición, celebrada el 20 de noviembre de 2010, nos juntamos 72 equipos, pertenecientes a 52 centros, es decir, 432 estudiantes pasaron la mañana del sábado pensando y disfrutando con las Matemáticas.

En nuestra página podéis ver los enunciados de los problemas que se les propusieron. Hubo un problema que se les resistió. Era del nivel de Bachillerato (Nivel III), y eso que había estudiantes especialmente brillantes, algunos "medalla de oro" en la última edición de la Olimpiada Matemática Española.

Por si tenéis curiosidad, ahí va:

> *Cuatro vehículos A, B, C y D parten desde puntos diferentes, y cada uno de ellos con velocidad constante, por la misma carretera. Los vehículos A, B y C van en el mismo sentido mientras que D circula en sentido contrario.*
>
> *Si A pasa a B a las 8:00 y a C a las 9:00, D se cruza con A a las 10:00, con B a las 12:00 y con C a las 14:00, ¿a qué hora adelantó B a C?*

Al final, como siempre, unos lo hicieron mejor que otros. Aquí tenéis la lista de centros y estudiantes ganadores.

He aquí los 10 primeros Centros:

1	Colegio Alemán A	**56,5**
2	IES San Juan Bautista B	**49,9**
3	IES Ramiro de Maeztu B	**47,6**
4	Liceo Francés A	**41**
5	Colegio SEK Ciudalcampo A	**40,5**
6	Colegio Retamar A	**40,1**
7	Colegio Fray Luis de León A	**39,8**
8	Colegio San José del Parque A	**37,2**
9	IES Alameda de Osuna B	**37**
10	IES Ramiro de Maeztu A	**36,3**

Ganadores individuales:

Nivel I (1º, 2º ESO)		
PRIMERO	**Roberto Nares Alcalá**	2º ESO IES Herrera Oria
SEGUNDO	**Carlos Caro Álvarez**	2º ESO SEK El Castillo
Nivel II (3º, 4º ESO)		
PRIMERO	**Miguel Barrero**	3º ESO IES Alameda de Osuna
SEGUNDO	**Guillermo Pascual Pérez**	3º ESO Colegio Fray Luis de León
Nivel III (Bachillerato)		
PRIMERO	**Xi Chen**	1º Bach. IES Vallecas 1
SEGUNDO	**Pablo Boixeda**	2º Bach. Colegio Alemán

Y el año que viene, a disfrutar otra vez. Penúltimo sábado de noviembre.

Joaquín Hernández
Comité organizador del Concurso Intercentros

Fase Local de la XLVII Olimpíada Matemática Española en los distritos de Madrid

por María Gaspar

En el fin de semana del 21 y 22 de enero tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas de la UCM la *fase local* de la XLVII Olimpiada Matemática Española. En ella participaron ciento treinta estudiantes, previamente seleccionados en la *fase cero*, celebrada a finales del pasado mes de noviembre. En el próximo número del Boletín daremos a conocer los nombres de los nueve ganadores, representantes de la Comunidad de Madrid en la Fase Nacional de la Olimpiada, que tendrá lugar en Pamplona el último fin de semana de marzo.

Primera sesión: viernes 21 de enero de 2011

Problema 1

Los vértices del cuadrilátero convexo $ABCD$ son puntos de una circunferencia de centro O. Las diagonales AC y BD del cuadrilátero son perpendiculares. Demuestra que los cuadriláteros $AOCD$ y $ABCO$ tienen la misma área.

Problema 2

Determina todos los números enteros a, b y c tales que $a^2 = 2b^2 + 3c^2$.

Problema 3

Un cuadrado C se recubre completamente con un número entero de cuadrados de lado unidad, sin solapamientos. Si uno coloca dentro del cuadrado tantos cuadrados de área 2 como sea posible con los lados paralelos a los lados de C, se pueden cubrir las 8 novenas partes del área del cuadrado. Determina todas las posibles dimensiones de tales cuadrados C.

Segunda sesión: sábado 22 de enero de 2011

Problema 4

Consideramos un alfabeto de n letras con el que formaremos palabras. Diremos que una palabra contiene un palíndromo si un trozo de esa palabra, de más de una letra, se lee igual al derecho que al revés. Por ejemplo, la palabra OLIMPIADA contiene el palíndromo ADA. Siendo k un entero mayor que 2, determina cuántas palabras de longitud k se pueden formar, con nuestro alfabeto de n letras, que no contengan ningún palíndromo de longitud impar.

Problema 5

Se ordenan los números naturales en forma de tabla triangular, es decir:

			1			
		2	3	4		
	5	6	7	8	9	
10	11	12	13	14	15	16

Diremos que la posición de un número N en la tabla viene dada por dos "coordenadas": el primer número de la fila en que está N y el primer número de la columna en que está N. Por ejemplo, si $N = 15$, su posición es (10,9). Cuando un número N, en la posición (n, m) verifica $N = n + m$ diremos que N está *bien colocado* en la tabla; así 12 y 14 están bien colocados y 15 no lo está. ¿Está 2^{2011} bien colocado?

Problema 6

El punto I es el incentro del triángulo ABC. La recta r que pasa por I y es paralela a AB corta a los lados AC y CB en los punto A_1 y B_2, respectivamente; la recta s que pasa por I y es paralela a CB corta a los lados BA y AC en puntos B_1 y C_2 respectivamente; la recta t que pasa por I y es paralela a CA corta a los lados CB y BA en los puntos C_1 y A_2 respectivamente. Determina el valor de

$$\frac{A_1B_2}{AB}+\frac{B_1C_2}{BC}+\frac{C_1A_2}{CA}$$

Una introducción a la estructura de grupo de tipo finito a partir de unos rosetones grecorromanos

Eugenio Roanes Macías
Facultad de Educación, Dpto. de Algebra UCM
roanes@mat.ucm.es

Abstract

On the base of some dilation invariant Roman mosaic rosettes, found in Merida (Spain), simple examples of finitely generated groups are considered. Some of the groups considered are abelian. In the latter, the meaning of torsion coefficients and Betti number appear in a simple and intuitive way. The computational simulation of those rosettes is also treated. Executing these simulations increases the interest of students in form preserving transformation when they are applied to rosettes generated by repeated dilations.

A la memoria del Prof. Dr. D. Andrés León Maroto, quien con sus magníficos textos (de coautor el Prof. Dr. D. Miguel Catalán), sus eficaces clases y su calidad humana, supo trasmitirnos, a sus alumnos de Bachillerato, interés por el descubrimiento científico.

Introducción

Mi afición a la arqueología viene de los tiempos en que estudiaba bachillerato en el Instituto de Mérida. Me encantaba colaborar en las fichas de catalogación de hallazgos arqueológicos con mi profesor de griego, por aquel entonces, Director de Excavaciones Arqueológicas de Mérida. Con su hijo, José Mª Álvarez Martínez, Director del Museo Nacional de Arte Romano, fui coautor de un artículo [1], publicado en el número 37 de nuestro Boletín, sobre modelos de grupos de simetría encontrados en mosaicos romanos (o, mejor dicho, grecorromanos, por ser habitualmente realizados por artesanos griegos pagados por patricios romanos).

Para ir de la casa en que residía con mis tíos al Instituto recorría yo un sendero, que atravesaba un trigal, rodeando al Teatro Romano. En el lugar de ese sendero se encuentra hoy el Museo Nacional de Arte Romano y la Casa del Anfiteatro, en que se hallan los rosetones punto de partida en este artículo.

Un análisis de los rosetones cíclicos invariantes por homotecias nos llevará a considerar grupos abelianos de tipo finito, en que aparecen, de modo simple e intuitivo, los conceptos algebraicos de coeficiente de torsión y número de Betti.

Los rosetones cíclicos y diedrales ya fueron considerados en la última sección del citado artículo [1], pero bajo otro aspecto y con otros objetivos.

La simulación computacional de rosetones, tratada al final del presente artículo, permite generar rápidamente rosetones con coeficientes de torsión y motivos pictóricos preestablecidos. En nuestra experiencia, esta actividad motiva a los alumnos a interesarse por las transformaciones que los dejan invariantes.

1 Unos rosetones romanos con homotecias aparecidos en Mérida

Las figuras 1 y 2 muestran fotos de los restos de dos rosetones romanos que se encuentran en la Casa del Anfiteatro de Mérida.

Figura 1

Figura 2

En ambos rosetones se aprecia un motivo pictórico, que aparece reiterado por rotaciones o giros alrededor del centro del rosetón y también por sucesivas dilataciones de centro el del rosetón. Además, en el rosetón de la Figura 2 es simétrico por reflexiones de ejes que pasan por el centro del rosetón, lo que no ocurre con el de la Figura 1.

Estos dos rosetones son representativos de los dos tipos de rosetones existentes, pero en ellos es incómodo apreciar propiedades, por ser tricolores y por tener demasiados sectores, además de por su mal estado de conservación.

Por ello, vamos a partir de otros dos rosetones con menor número de sectores y bicolores. Dos simplificaciones que no afectan al análisis geométrico de los rosetones, como se apreciará más adelante.

En realidad se trata de las simulaciones informáticas de otros dos rosetones invariantes por homotecias reiteradas encontrados en Mérida. En el de la Figura 3, el motivo pictórico aparece reiterado por rotaciones alrededor del centro del rosetón y por homotecias sucesivas de centro el del rosetón (como ocurre para el de la Figura 1) y en el de la Figura 4, además de por las mencionadas rotaciones y

homotecias, se aprecian también reflexiones de ejes que pasan por el centro del rosetón (como ocurre para el de la Figura 2).

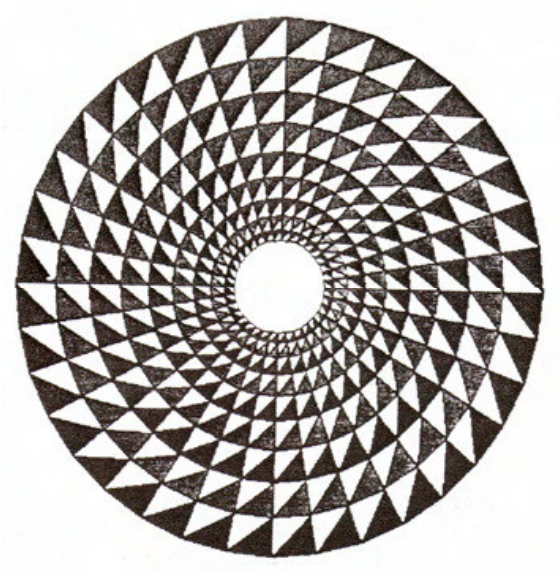


Figura 3

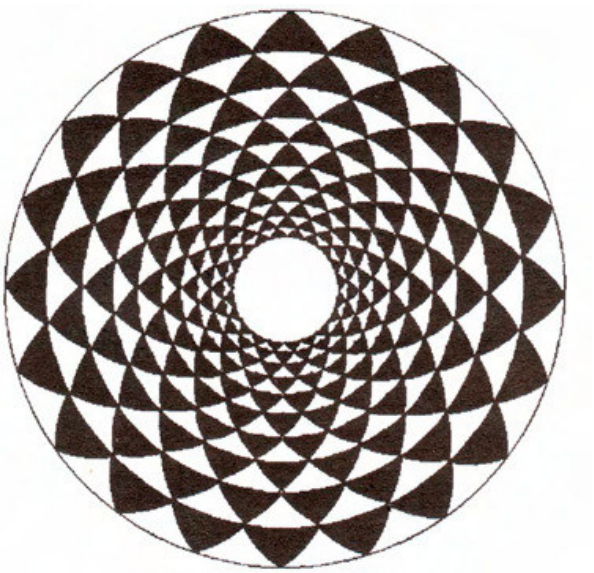


Figura 4

Las simulaciones de los rosetones de las figuras 3 y 4 han sido realizadas con el paquete informático *Tort-Decó* de generación diseños geométricos periódicos, cuya descripción abreviada, publicada previamente [2] en el número 37 de nuestro Boletín, y posteriormente, como capítulo de libro [3] y como artículo [4], resumiendo la Tesis Doctoral del Prof. M. Garbayo Moreno, dirigida por el Prof . E. Roanes Lozano.

2 Dominio y célula de los rosetones con homotecias

Las observaciones mencionadas a propósito del rosetón de la Figura 3 inducen a considerar una "región mínima" conteniendo el motivo pictórico, que se reitera por rotaciones y homotecias sucesivas, dando lugar a todo el rosetón. Dicha región mínima podemos considerar que es un trapecio mixtilíneo consistente en el sector de corona circular resultante de la intersección de un sector circular y una corona circular, ambas de centro el punto centro, O, del rosetón. A dicha región mínima se la denomina *célula* del rosetón (región oscura en la Figura 5).

En el caso del rosetón de la Figura 3, el motivo pictórico de la célula consiste simplemente en colorear una de las dos partes en que el trapecio mixtilíneo de su célula queda dividido por una de sus diagonales (Figura 6).

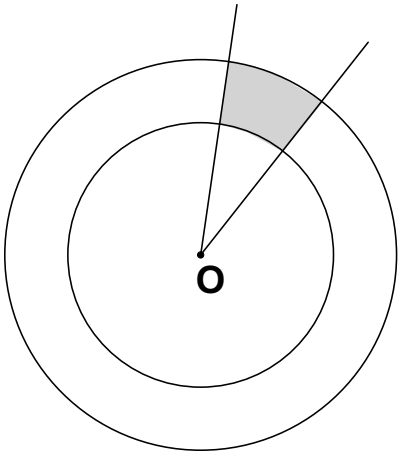


Figura 5

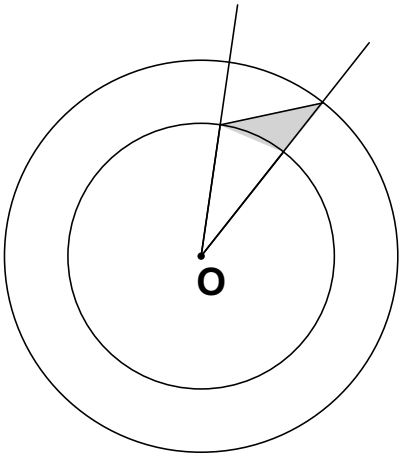


Figura 6

Dicha célula se reitera girando alrededor del centro del rosetón, hasta completar una corona circular completa. Naturalmente, el ángulo del sector circular de que procede la célula ha de ser divisor entero del ángulo completo (en el sentido de que su medida ha de ser divisor entero de 360).

Finalmente la corona circular completa se reitera formando sucesivas coronas, por homotecias de centro el del rosetón, de modo que dos coronas sucesivas solo tienen en común una de sus dos circunferencias borde.

En cambio, en el caso del rosetón de la Figura 4, el motivo pictórico de la célula admite un eje de simetría, la bisectriz del ángulo del sector circular originario de la célula (Figura 7). De este modo, basta elegir un motivo pictórico en una de las dos partes en que la célula queda dividida por su eje de simetría y luego obtener su imagen en la reflexión cuyo eje es el de la citada simetría.

A la mínima región a partir de la cual es posible generar el rosetón aplicando isometrías del plano, se la suele llamar *dominio* del rosetón. Así pues, en el rosetón de la Figura 4 la célula consta de dos dominios simétricos respecto de una recta que pasa por el centro del rosetón, mientras que en el rosetón de la Figura 3 su dominio coincide con la célula.

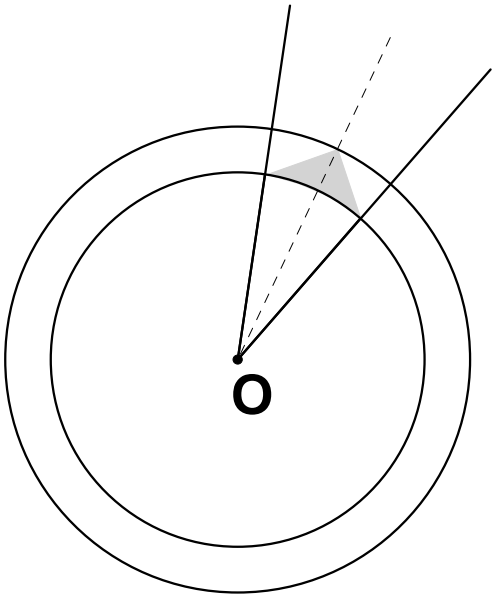


Figura 7

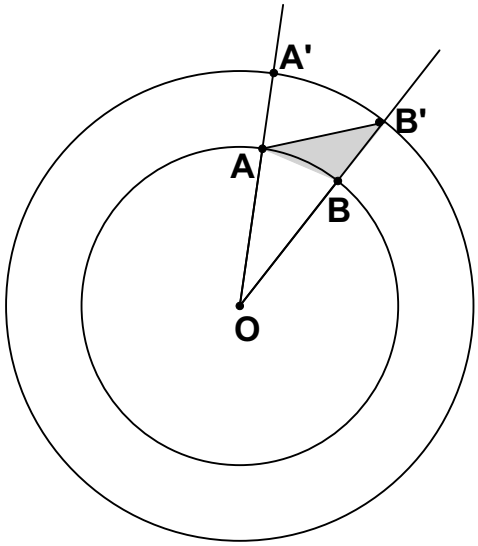


Figura 8

3 Rosetones completos con homotecias

Hasta aquí se han considerado rosetones reales, construidos sobre el suelo de la habitación de una villa romana o dibujados sobre un papel. Su número de coronas es finito.

Pasando ahora del mundo real al geométrico, imaginemos un rosetón para cuya generación se dispone de todo el plano euclídeo. Entonces las coronas del rosetón se podrían reiterar indefinidamente, y no solo hacia el exterior, también hacia el centro del rosetón. Se lograría así recubrir el plano euclídeo, con sólo considerar añadido el punto centro del rosetón. Al rosetón así completado lo llamaremos *rosetón completo con dilatación*.

Así pues, fijada una célula inicial ABB'A' (Figura 8), para generar un rosetón completo con dilatación, cuyas coronas constan de n células, se podría comenzar aplicando a la célula inicial las $n-1$ rotaciones de centro O y amplitudes respectivas $2j\pi$; $j=1,...,n-1$, para completar la corona inicial.

A continuación, para generar la segunda corona hacia el exterior, se aplicaría a la corona inicial la homotecia de centro O y de razón de homotecia la razón de radios externo e interno de la célula, es decir, la razón de segmentos $k=OA'/OA$.

Del mismo modo, para generar las siguientes coronas hacia el exterior, se aplicaría esa misma homotecia a la última corona obtenida.

De modo similar, para generar las sucesivas coronas hacia interior (hacia el centro *O*), a partir de la corona inicial, se aplicarían reiteradamente, de modo análogo, homotecias de razón *1/k=OA/OA'*.

En caso de rosetón con simetrías axiales, una vez dibujado el motivo pictórico sobre el dominio elegido como inicial, la célula que lo incluye se completaría aplicando al dominio la reflexión de eje la bisectriz del sector correspondiente a esa célula (Figura 7), siendo el resto del proceso el mismo descrito para el caso anterior.

Sólo existen esos dos tipos de rosetones completos, los *cíclicos* (sin simetrías axiales) y los *diedrales* (con simetrías axiales). La demostración, es inmediata consecuencia de la existencia de sólo esos dos tipos de rosetones usuales (sin homotecias), como puede verse en tratados de Geometría ([5-8], por ejemplo).

4 Transformaciones que dejan invariantes los rosetones completos

4.1 Caso de rosetón completo cíclico con homotecias

Consideremos, en concreto, el rosetón cíclico de la Figura 3, supuesto completo, que consta de *36* sectores.

Aplicándole la rotación o giro, *g*, de centro O y amplitud *2π/36*, es decir *10* grados, cada célula se transforma en una contigua, a su izquierda o derecha, dependiendo del sentido de giro elegido. Por tanto, todo el rosetón es invariante por *g*. En consecuencia es también invariante por aplicaciones reiteradas de *g*, es decir, por las isometrías del grupo de rotaciones que *g* genera:

$$<g> = \{ I , g , g^2 , g^3 , \dots , g^{34} , g^{35} \}$$

donde $I= g^0$ es la transformación idéntica o identidad.

Por otra parte, fijada una célula inicial, al aplicar al rosetón la homotecia *h* de centro *O* y razón la razón de radios externo e interno de la célula, es decir, la razón de segmentos *k=OA'/OA* (Figura 8), cada corona del rosetón se transforma en su contigua externa. De este modo, todo el rosetón es invariante por *h*. En consecuencia es también invariante por aplicaciones reiteradas de *h*, es decir, por las isometrías del semigrupo $\{h^j \mid j\in\mathbb{N}\}$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales, incluido el cero (entendiendo que $h^0=I$).

Pero, además, al aplicar al rosetón la homotecia h^{-1}, inversa de *h*, cada corona del rosetón se transforma en su contigua interna. De este modo, todo el rosetón es

invariante por h^{-1}. En consecuencia, es también invariante por aplicaciones reiteradas de h^{-1}. En resumen, el rosetón es invariante por las isometrías del grupo de homotecias que h genera:

$$<h> = \{h^j \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros.

Por tanto, este rosetón es invariante por cualquiera de las semejanzas directas (que conservan el sentido en el plano euclídeo) que resultan de componer cualquier rotación de $<g>$ con cualquier homotecia de $<h>$.

Además, puede probarse que no existe ninguna otra transformación del grupo equiforme (esto es, que conserva la forma) en la que este rosetón sea invariante. Por lo que puede concluirse que el grupo de semejanzas en las que este rosetón cíclico es invariante resulta ser

$$<g> \text{ Å } <h>$$

donde Å es el símbolo de suma directa (ya que I es el único elemento común de los subgrupos $<g>$ y $<h>$).

En términos algebraicos, diremos que se trata de un grupo abeliano de tipo finito, ya que es conmutativo y está generado por los elementos g y h.

4.2 Caso de rosetón completo diedral con homotecias

Consideremos ahora el rosetón diedral de la Figura 4, supuesto completo, que consta también de *36* sectores circulares.

Comencemos haciendo notar que este rosetón también es invariante por todas las transformaciones equiformes mencionadas en la anterior Subsección 4.1. Por tanto, de acuerdo con la notación utilizada allí, el rosetón diedral de la Figura 4 es invariante, tanto por las *36* rotaciones del subgrupo $<g>$, como por las infinitas homotecias del subgrupo $<h>$.

Ahora bien, como se indicó en la Sección 2, en el rosetón de la Figura 4 la célula consta de dos dominios simétricos respecto de la recta bisectriz de la célula, que pasa por el centro O del rosetón (Figura 7). De ello se sigue que todo el rosetón resulte ser invariante en la reflexión de eje dicha recta bisectriz de uno de sus sectores circulares y, en consecuencia, lo mismo ocurre para los demás sectores circulares del rosetón.

Por otra parte, como se visualiza en la Figura 9, es bien conocido que el producto de dos reflexiones, s y s', de ejes secantes, r y r', es una rotación, g, de

centro el punto *O* de intersección de ambos ejes y amplitud doble del ángulo orientado de la recta *r* hacia la *r'*.

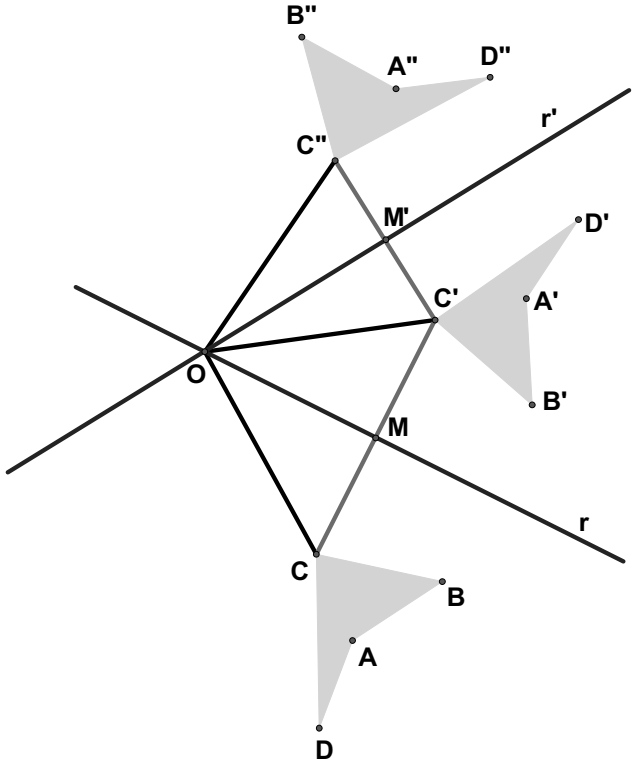


Figura 9

Por tanto, siendo *s* la reflexión de eje la bisectriz de uno sectores del rosetón y *s'* la reflexión de eje una de sus rectas borde, la composición o producto de ambas resulta ser la rotación *g*, antes mencionada.

Ahora bien, siendo el rosetón invariante tanto por la reflexión *s* como por la rotación *g*, en consecuencia también será invariante por su transformación producto

$$g \circ s = (s' \circ s) \circ s = s' \circ (s \circ s) = s' \circ I = s'$$

es decir, el rosetón es también invariante por la reflexión cuyo eje, s', es recta borde de un sector.

Como el mismo razonamiento es válido para cualquier sector del rosetón, resulta que el rosetón es también invariante por las 36 reflexiones cuyos ejes son rectas bordes de los sectores del rosetón, además de por las 36 reflexiones cuyos ejes son bisectrices de los sectores del rosetón.

En consecuencia, el rosetón es invariante por las *72* reflexiones mencionadas y por las *36* rotaciones del subgrupo <*g*>, pudiendo probarse fácilmente que ninguna otra isometría lo deja invariante.

Por tanto y como consecuencia de lo indicado anteriormente, el subgrupo de isometrías que dejan invariante al rosetón resulta ser el subgrupo <*s,g*>, generado por *s* y por *g*, o bien, por dos reflexiones de ejes consecutivos (grupo finito del punto *O* de orden *72+36*).

Finalmente, el subgrupo de transformaciones equiformes que dejan invariante al rosetón será pues el de las composiciones de esas isometrías con las homotecias anteriormente consideradas, es decir, el subgrupo de tipo finito <*s,g*> Å <*h*>.

Este subgrupo no es abeliano, ya que el producto de reflexiones no es conmutativo. Las reflexiones tampoco conmutan con las rotaciones (distintas de *I*), pero si con las homotecias, por ser el centro *O* de las homotecias incidente con los ejes de las *72* reflexiones.

5 Coeficiente de torsión y número de Betti de mosaicos romanos

Como es bien conocido, todo grupo abeliano de tipo finito es isomorfo (*teorema de estructura*) a un grupo de la forma

$$\mathbb{Z}^b \text{ Å } \mathbb{Z}_{t1} \text{ Å } \mathbb{Z}_{t2} \text{ Å } \ldots \text{ Å } \mathbb{Z}_{ts}$$

donde cada *ti* es divisor del siguiente *t(i+1)*. El entero *b* se llama *número de Betti* y los enteros *t1, t2, ..., ts* se llaman *coeficientes de torsión* del grupo.

En el caso del rosetón completo considerado en la Subsección 4.1, al ser <*g*> isomorfo al grupo de clases residuales $\mathbb{Z}_{36}$ y ser <*h*> isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}$ de los enteros, el grupo de transformaciones equiformes por las que este rosetón cíclico es invariante, resulta ser isomorfo al grupo $\mathbb{Z}_{36}$Å$\mathbb{Z}$, o lo que es equivalente, al grupo $\mathbb{Z}$Å$\mathbb{Z}_{36}$, lo que, en términos algebraicos, se expresa diciendo que este grupo abeliano de tipo finito tiene *coeficiente de torsión* 36, siendo *b=1* su *número de Betti.*

Notemos como el número de rotaciones que dejan invariante al rosetón con dilatación completo cíclico analizado en la Subsección 4.1 justifica el acierto con el nombre dado a tal coeficiente (de *torsión*) de los grupos abelianos de tipo finito.

Analicemos otros ejemplos extraídos de la rica decoración pictórica reiterativa grecorromana.

Figura 10

La Figura 10 muestra un friso romano encontrado en Mérida, donde aparece bordeando varios mosaicos. El correspondiente friso completo (con motivo reiterado indefinidamente hacia ambos lados) es invariante por la traslación, t, que transforma el vértice superior de un triángulo negro en el de otro contiguo y, en consecuencia, por todas las traslaciones resultantes de componer reiteradamente t y su inversa, t^{-1}, es decir, por todas las traslaciones del grupo $<t>=\{t^j \mid j\in\mathbb{Z}\}$, isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Como este friso no es invariante por ninguna otra isometría, se trata de un grupo abeliano de tipo finito *sin torsión*, siendo *1* su *número de Betti.*

.

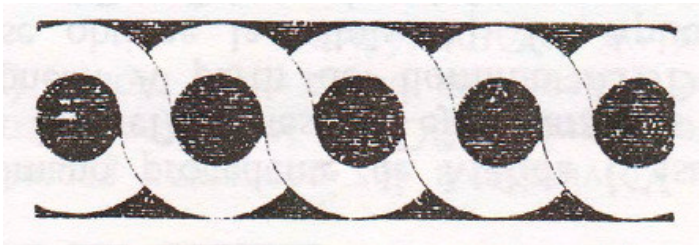


Figura 11

La Figura 11 muestra otro friso romano aparecido en Mérida (y en otras ciudades romanas). El correspondiente friso completo (con motivo reiterado indefinidamente hacia ambos lados) es invariante por la traslación, t, que transforma el centro de cada círculo negro en el de otro contiguo y, en consecuencia, invariante por todas las traslaciones resultantes de componer reiteradamente t y su inversa, t^{-1}, es decir, por todas las traslaciones del grupo $<t>=\{t^j \mid j\in\mathbb{Z}\}$, isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}$. Pero este friso es también invariante por la rotación g, de 180º alrededor del centro O de uno de los círculos negros. En consecuencia, también es invariante por la composición o producto de g por t, que resulta ser la rotación g' de 180º alrededor del punto medio del segmento de extremos O y el centro de un círculo negro adyacente, ya que $g'\circ g = t$ y ,por tanto,

$$t \circ g = (g' \circ g) \circ g = g' \circ (g \circ g) = g' \circ I = g'$$

Es claro que el subgrupo de isometrías por las que este friso es invariante es $<t,g>$ y cabe preguntarse si es, o no, isomorfo a $\mathbb{Z}$Å$\mathbb{Z}_2$. La respuesta es negativa, ya que g y g' no conmutan, luego no se trata de un grupo abeliano, por lo que no ha lugar a aplicar el teorema de estructura mencionado al comienzo de esta Sección *5*. De otro modo, el subgrupo $<t,g>$ es distinto de la suma directa de $<t>$Å$<g>$, ya que este último no contiene a g', por ejemplo.

Los frisos y mosaicos invariantes por reflexiones, al no conmutar estas transformaciones, no son abelianos, por lo que tampoco ha lugar a considerar sobre ellos el mencionado teorema de estructura.

De entre los siete tipos de frisos bicolor existentes (según se prueba en [5-8] y se ejemplifica en [1]), los únicos cuyos grupos de isometría son abelianos son los invariantes sólo por traslaciones (como el de la Figura 10).

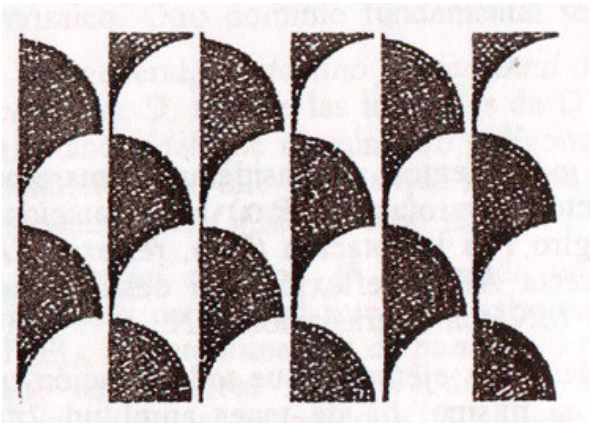


Figura 12

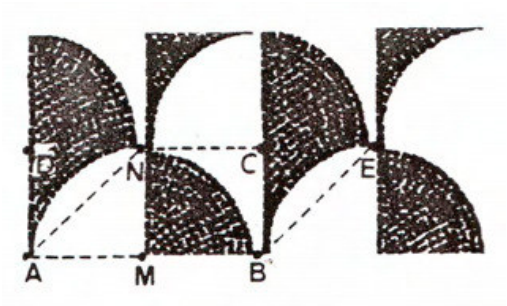


Figura 13

La Figura 12 muestra un mosaico periódico romano de Mérida. El correspondiente mosaico periódico completo (con motivo reiterado indefinidamente, a derecha e izquierda y hacia arriba y abajo) es invariante por dos traslaciones, *t1* y *t2*, definidas respectivamente por los vectores *AB* y *AN* indicados en la Figura 13, por sus inversas, y, naturalmente, por todas las traslaciones resultantes de componerlas reiteradamente, es decir, por todas las traslaciones del grupo $<t1,t2>$, isomorfo al grupo aditivo $\mathbb{Z}^2$.

Como este mosaico no es invariante por ninguna otra isometría, se trata de un grupo abeliano de tipo finito *sin torsión*, siendo *2* su *número de Betti.*

Los mosaicos invariantes por reflexiones no son abelianos, al no conmutar estas transformaciones, por lo que tampoco ha lugar a considerar sobre ellos el teorema de estructura mencionado al comienzo de esta Sección 5.

Lo mismo ocurre con los mosaicos invariantes por rotaciones de centros distintos o por reflexiones con deslizamiento.

De entre los diecisiete tipos de mosaicos periódicos bicolor existentes (lo que se prueba en [5-8] y se ejemplifica en [1]), los únicos cuyos grupos de isometría que son abelianos son los invariantes sólo por traslaciones (como el de la Figura 12).

Por tanto, de entre los frisos, mosaicos y rosetones periódicos o reiterativos los únicos cuyos grupos de isometrías son abelianos de tipo finito con torsión son los rosetones cíclicos con dilatación.

Analicemos finalmente un último modelo grecorromano de decoración, que sugiere otro ejemplo de interés.

Figura 14

La Figura 14 muestra una fotografía de la *Columna de Trajano* (esta vez de Roma, situada al Norte del Foro Romano) decorada con un friso helicoidal de 23 vueltas, representativo de hazañas bélicas de este emperador.

Imaginemos que se tratara de una columna completa (ilimitada tanto hacia arriba como hacia abajo), con cada vuelta de friso dividida en 4 células (sin simetrías), todas de las mismas dimensiones y con el mismo motivo pictórico, e iguales todas las vueltas de friso. Tal columna completa sería invariante por el movimiento helicoidal, *H,* resultante de la rotación de eje el del cilindro-columna y de amplitud $\pi/2$ y la traslación de vector paralelo a las generatrices del cilindro-columna y de módulo *1/4* del paso de rosca del friso helicoidal.

El subgrupo de transformaciones equiformes que dejarían invariante tal friso completo sería pues el de movimientos helicoidales $<H>$, obviamente isomorfo a Z, luego se trataría de un grupo abeliano de tipo finito con número de Betti *1* y sin torsión.

6 Generación computacional de rosetones con homotecias

La simulación computacional del proceso reiterativo del dibujo del motivo del rosetón facilita la posibilidad de generar rápidamente rosetones con coeficientes de torsión y motivos pictóricos preestablecidos.

Además, de acuerdo con mi experiencia, esta actividad motiva a los alumnos a interesarse por la composición de transformaciones del grupo equiforme que dejan invariantes a los rosetones con homotecias.

Algoritmo de generación de rosetones cíclicos con homotecias

Input: número n de sectores,
razón k de homotecia inicial,
número $n1$ de coronas exteriores a la inicial,
número $n2$ de coronas interiores a la inicial.

Output: rosetón cíclico con homotecias de n sectores y $1+n1+n2$ coronas

Steps:

1. Elegir el centro O del rosetón.
2. Trazar una semirrecta a de origen O.
3. Elegir en la semirrecta a un punto A, distinto de O.
4. Trazar la circunferencia c de centro O y que pase por A.
5. Fijar sobre c el punto B, tal que el ángulo orientado AOB mida $2\pi/n$ radianes.
6. Trazar la semirrecta b de origen O y que pase por B.
7. Trazar sobre la semirrecta a el punto A' tal que $OA'/OA=k$.

8. Trazar la circunferencia *c'* de centro *O* y que pase por *A'*.
9. Determinar sobre la semirrecta *b* el punto $B'=b \cap c'$.
10. Dibujar en la célula *ABB'A'* un motivo pictórico, sin simetrías respecto de ejes incidentes con O (Figura 8).
11. Aplicar *n-1* rotaciones consecutivas de centro *O* y amplitud *AOB* al motivo pictórico de la célula *ABB'A'* (y, opcionalmente, a la semirrecta *OB*), para completar la corona circular elegida como inicial.
12. Aplicar a los *n* motivos de la corona circular inicial (y opcionalmente a la circunferencia *c'*) *n1* homotecias consecutivas de centro *O* y razón *k*.
13. Aplicar a los *n* motivos de la corona circular inicial (y opcionalmente a la circunferencia *c*) *n2* homotecias consecutivas de centro *O* y razón *1/k*.

Nota 1: En la práctica, el paso 11 se abrevia aplicando al motivo ya obtenido sobre *m* células consecutivas ($m<n$) rotaciones de amplitud $m \cdot AOB$ (hasta llegar a generar toda la corona circular elegida como inicial).

Nota 2: Análogamente, el paso 12 se abrevia aplicando al motivo ya obtenido sobre *p* coronas consecutivas homotecias de razón k^p (hasta llegar a generar las *n1* coronas exteriores a la inicial). Otro tanto puede hacerse para abreviar el paso 13 (hasta llegar a generar las *n2* coronas interiores a la inicial).

<u>Algoritmo de generación de rosetones diedrales con homotecias</u>

Input: los mismos que para rosetones cíclicos.
Output: rosetón diedral con homotecias de *n* sectores y *1+n1+n2* coronas.
Steps:

1 a 9. Los mismos que en el algoritmo anterior para rosetones cíclicos.
10. Trazar la semirrecta bisectriz *v* del ángulo *AOB*.
11. Dibujar en uno de los dominios en que *v* divide a la célula *ABB'A'* (Figura 7) un motivo sin simetrías respecto de ejes incidentes con O.
12. Obtener la imagen del motivo pictórico en la reflexión de eje *v*.

13 a 15. Son los mismos pasos 11 a 13 del algoritmo anterior.

Nota: En la práctica, una vez dibujado el motivo pictórico sobre *m* sectores consecutivos ($m<n$), los pasos 13 al 15 se abrevian aplicando a la unión de los *m* sectores, la reflexión de eje una de las rectas que contiene a la semirrecta borde del sector unión de esos *m* sectores. Esta operación puede repetirse hasta llegar a grabar el motivo pictórico sobre los *n* sectores del rosetón con homotecias. En particular, una vez generados *n/2* sectores consecutivos (si *n* par) o uno mas la parte entera de *n/2* (si *n* impar), bastaría aplicar una sola reflexión

Implementación

De los algoritmos anteriores se desprende que para generar con sencillez rosetones con homotecias, es preferible disponer de un sistema computacional en que sea cómodo efectuar rotaciones, reflexiones y homotecias.

Por ello, un modo cómodo y rápido de generación de rosetones con homotecias consiste es utilizar el paquete *Tort-Decó*, mencionado al final de la Sección 1. Pero, tiene el inconveniente de que, al ser automático, no permite al usuario intervenir en el proceso creativo de la generación.

Otro modo de generar rosetones con homotecias es aprovechar la Geometría de la Tortuga o "Turtle Geometry", descrita exhaustivamente en [9] e implementada en diversos sistemas:

i) en múltiples versiones de *Logo*, muchas de ellas de dominio público, como *FMSLogo* [10];
ii) en varios dialectos de *Prolog,* como *SWI-Prolog* [11];
iii) en *Turbo-Pascal*, desarrollada por el autor de este artículo como coautor [12];
iv) en *Maple,* desarrollada también por el autor de este artículo como coautor, incluida como paquete en *Maple V.5* [13], publicada como "reprint" en [14] y aplicada posteriormente en[15]. (La ejecución de transformaciones se abrevia utilizando el paquete *Geometry* de Maple o bien como se describe detalladamente en [16]);
v) en *Mathematica*, incluido en el *Wolfram Demostration Project* [17];
vi) en *DERIVE,* desarrollada por el autor de este artículo como coautor [18];
vii) en *REDUCE*, con una *interface* desarrollada por C. Cotter y publicada en [19], donde se cita [14] como bibliográfica.

Por último, los *Sistemas de Geometría Dinámica* (SGD), que hoy están muy difundidos y apenas requieren aprendizaje para su utilización, también permiten generar con sencillez rosetones con homotecias. Sobre todo si disponen de comandos para aplicar directamente rotaciones, reflexiones y homotecias.

En la siguiente Figura 15 se muestra un ejemplo de rosetón con homotecias obtenido a partir de la célula inicial *ABB'A'*, para $n=24$, $n1=2$ y $n2=6$. Ha sido generado con el SGD *The Geometer Sketchpad* [20], que ofrece directamente la posibilidad de ejecutar esas transformaciones sobre las figuras elegidas, de entre las existentes en el espacio de trabajo.

Hay otros muchos SGD con los que se pueden simular rosetones con homotecias, siendo preferible utilizar el que se está mas acostumbrado a manejar. Entre

los mas difundidos están los siguientes: *Cabrí* [21], *Geogebra* [22], *Cinderella* [23] y *Geometry Expressions* [24].

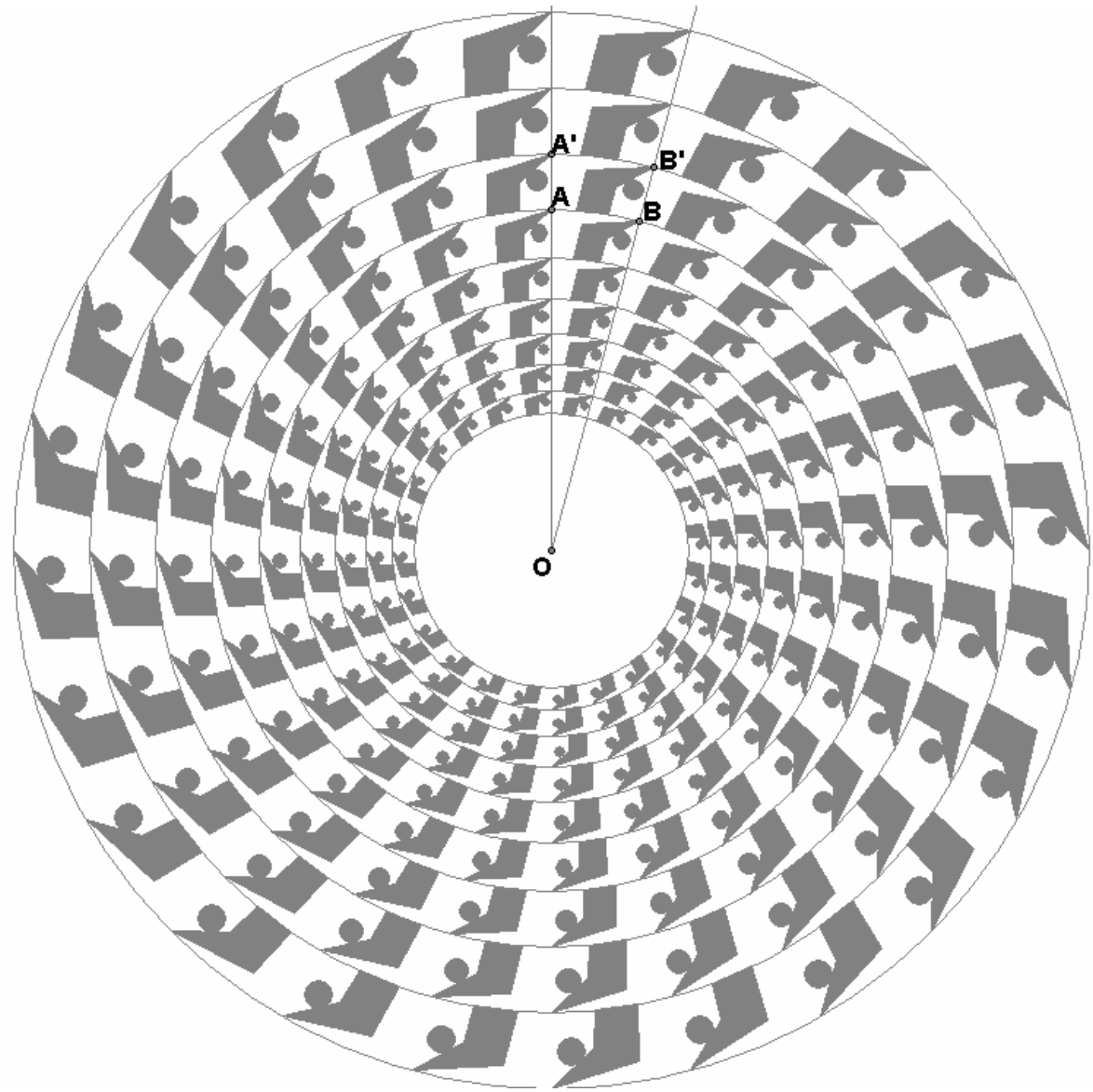


Figura 15

Conclusiones

De entre los frisos, mosaicos y rosetones periódicos (con motivos pictóricos reiterativos), los únicos, tales que las transformaciones equiformes que los dejan invariantes tienen estructura de grupo abeliano de tipo finito *con torsión,* son los rosetones cíclicos con dilatación.

Las generación computacional de rosetones con dilatación es muy cómoda con un SGD que disponga de comandos que permitan ejecutar fácilmente rotaciones, reflexiones y homotecias.

Además, según mi experiencia, esa generación computacional motiva especialmente a los alumnos a interesarse por las transformaciones del grupo equiforme y por su composición o producto.

Notemos finalmente que el tema tratado en este artículo ha sido motivo de estudio bajo otros puntos de vista diferentes, como ya se hizo en [25] y mas recientemente en una parte de [26], y que es generalizable a dimensión cualquiera (grupo ortogonal), pero tales consideraciones caen fuera de nuestro propósito de ilustración de un concepto algebraico.

Referencias

[1] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano y José Mª Alvarez Martínez: Simetría en mosaicos romanos. *Bol. de la Soc. Puig Adam* **37**, págs 29-60, 1994.

[2] M. Garbayo Moreno, E. Roanes Lozano: Implementaci¢n de un paquete de dibujo de rosetones (Grupos de Leonardo). *Bol. de la Soc. Puig Adam* **37**, págs 87-96, 1994.

[3] M. Garbayo, E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías: Experimenting drawing periodic geometric designs with the package Tort-Decó. *In: Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics,* págs 119-121, John Wiley & Sons, 1998.

[4] M. Garbayo, E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías: Tort-Decó: A "Turtle Geometry"-Based Package for Drawing Periodic Designs. *Mathematical and Computer Modelling*, ***33***, págs 321-340, 2001.

[5] A. Armstrong: *Groups and Symmetry.* Springer, 1988.

[6] M.Berger: *Geometry*. Springer, 1987.

[7] G. E. Martin: *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry.* Springer, 1982.

[8] H. Weyl: *Symmetry*. Princeton University Press, 1980

[9] H. Abbelson, A. diSessa: *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics.* M.I.T., 1981.

[10] URL: http://www.fmslogo.org/index2.html

[11] URL: http://lakk.bildung.hessen.de/netzberg/faecher/informatik/swiprolog/turtle.html

[12] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: Desarrollo de una implementación mejorada y flexible de la "Turtle Geometry". *III Encuentro de Geometría Computacional.* Univ de Zaragoza, págs 117-130, 1992.

[13] E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías: "Turtle Graphics" in Maple V. *In: R. J. Lopez, editor: Maple V: Mathematics and Its Applications.* Birkhäuser, págs 1-12, 1994.

[14] E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías: An Implementation of "Turtle Graphics" in Maple V. *Maple Technical Newsletter, MapleTech. Special Issue*, págs 82-85, 1994.

[15] E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías: An Implementation of "Turtle Graphics" in Maple V. *Computer Algebra Netherland,* ***12***, págs 43-48, 1994.

[16] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano: Transformaciones lineales con sistemas de cómputo algebraico. *Bol. de la Soc. Puig Adam,* ***42***, págs 28-46, 1997.

[17] URL: http://demostrations.wolfram.com/TurtleGraphics

[18] J. Lechner, E. Roanes Lozano, E. Roanes Macías, J. Wiesenbauer: An Implementation of "Turtle Graphics" in Derive 3. *The Bulletin of the DERIVE User Group*, ***25***, págs 15-22, 1997.

[18] URL: http://www. zib.de/Symbolik/reduce/moredocs/turtle.pdf

[20] URL: http://www.keypress.com/

[21] URL: http://www.cabri.com/

[22] URL: http://www.geogebra.org/

[23] URL: http://doc.cinderella.de/

[24] URL: http://www.geometryexpressions.com/

[25] M. Abellanas Oar, E. Roanes Lozano: Voronoi Diagrams for Infinite Sets Generated by Consecutive Stretches. *In: Proc. of the 11th European Workshop on Computational Geometry*, 1995.

[26] M.N. Kolountzakis, M. Matolcsi: Teselaciones por traslación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol ***13***, nº ***4***, págs. 725-746, 2010.

Sobre algunos errores en libros de texto de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato

Aurel Muntean
IES Severo Ochoa de Alcobendas
Doctor en Matemáticas por la Univ. "Babes-Bolyai" de Cluj-Napoca, Rumanía
aurelmuntean@yahoo.com

Abstract

The errors, as they appear in the mathematical textbooks of the secondary school were analyzed. The present article introduces corrections and remarks on a certain number of mistakes detected in some mathematical textbooks.

Introducción

Un libro de texto es un recurso que se suele considerar el depósito del conocimiento correcto y certificado. Sin embargo, resulta sorprendente comprobar la abundancia de errores detectados en algunos de los textos educativos.

Junto a planteamientos generales sobre los errores y su tratamiento hay que considerar que la visión del error y su superación es distinta por parte de distintos profesores.

En muchos casos, el profesor se percata de que el libro de texto presenta ciertos errores, pero no hace el esfuerzo, o no dispone de formación para corregir o mejorar la información que genera conflictos cognitivos.

En otros casos, aún después de muchos años de su ejercicio profesional, el docente no toma conciencia del error, pues no cuestiona la información que da el libro de texto, permitiendo que esos errores formen parte de un aprendizaje que va a ser la base sobre la cual se construirán otros conocimientos, con las consabidas consecuencias.

También es bueno tener presente las consecuencias de los errores que derivan de la confianza que los estudiantes tienen en los libros de texto que utilizan. En cualquiera de los casos resulta crucial el diseño cuidadoso de los contenidos de los libros de texto.

El presente artículo, cuyo contenido se ciñe a la materia de Matemáticas en la Educación Secundaria y Bachillerato, pretende aportar correciones y comentarios e incluso fomentar la posterior consulta por parte de los profesores de la excelente bibiografía existente y un uso selectivo de la misma, "repensando" algunos temas para adaptarlos a sus alumnos.

El artículo, queda a un nivel que algunos pueden juzgar "elemental", demasiado basado en ejemplos, pero es el que se necesita para llamar la atención sobre algunos errores más frecuentes que nos permita evitarlos.

Con una visión también concreta y breve, en las sugerencias didácticas tan solo se esboza una base más firme sobre cuestiones notables, lo que se podría ampliar afinando de manera prudente conocimientos básicos. Nos centraremos en la faceta de los contenidos, sean gráficos o textuales, dejando de lado su aspecto.

Ya sabemos que los autores lo saben, pero hay que extremar el cuidado en lo que se presupone cuando se escribe un libro de texto.

1 ¿Qué tipo de errores se cometen?

Antes de emitir juicios de valor tajantes, planteamos sin pretensión de proporcionar una lista exhaustiva, unas categorías de los errores en los libros de texto. Dichos errores se dan en varios aspectos:

- Simplificación excesiva hasta el error
- Falta de rigor de los contenidos
- Conceptos dados de forma errónea
- Errores de procedimientos
- Uso de términos no definidos
- Terminología equívoca
- Notaciones matemáticas ambiguas

2 Simplificación excesiva hasta el error

2.1 Uso de las estrategias de omisión de condiciones

El uso de las estrategias de reducción de condiciones cuando se intentan explicar algunas estructuras más difíciles se da por razones de que el aprendizaje se produzca con "éxito". Pero difícilmente será posible hacerlo si se carece de ellas, como por ejemplo:

En [21] pág. 15: "Dada la fracción $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$, su inversa es la fracción $\frac{b}{a}$ ", sin mencionar la condición $a \neq 0$.

En [21] pág. 17 sorprende la afirmación: "todo número racional $\frac{a}{b}$ posee un inverso, que llamaremos $(\frac{a}{b})^{-1} = \frac{b}{a}$ ", sin hacer ninguna restricción sobre el conjunto al que pertenecen las variables: $a \neq 0$, $b \neq 0$.

En [20] pág. 17: $(\forall)\, a \in \mathbb{Q},\ (\exists)\, a^{-1}(inverso) \in \mathbb{Q},\ tal\ que\ a{\cdot}a^{-1} = a^{-1}{\cdot}a = 1$

En [22] pág. 14: "Siendo a y b no nulos, $a \leq b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$"

En rigor, $0 < a \leq b \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

2.2 Simplificación excesiva hasta el error en *las potencias*

Es un problema que se da frecuentemente con respecto a las *propiedades de las potencias*. Podemos encontrar varios ejemplos de este tipo en [21] págs. 30 –31:

"Todo número elevado a 0 es 1: $a^0 = 1$", sin mencionar la condición: $a \neq 0$.

$$(a : b)^n = a^n : b^n\ ,\ a^{-1} = \frac{1}{a}\ ,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ ,\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}\ ,\ \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}\ ,$$

sin mención alguna sobre las condiciones a cumplir: $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Cada propiedad debe ir acompañada por unas condiciones a cumplir, firmemente asentadas.

3 Falta de rigor de los contenidos

3.1 Falta de rigor en el concepto de *función par* e *impar*

La podemos ver claramente reflejada en [6] pág. 123 y en [18] pág. 190.

Obsérvese que, para que una función sea *par* no basta con la condición $f(-x) = f(x)$. Por ejemplo, la función $f : [-2, 6) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ no es par.

Entonces, comencemos definiendo una noción previa:

Un conjunto $D \subset \mathbb{R}$ se llama *conjunto simétrico respecto del origen* si

$$(\forall)\ x \in D \ \Rightarrow\ -x \in D$$

Si $D \subset \mathbb{R}$ es un conjunto simétrico respecto del origen y $f : D \to \mathbb{R}$, entonces:

f es una *función par* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(-x) = f(x), \quad (\forall)\ x \in D$

f es una *función impar* $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $f(-x) = -f(x), \quad (\forall)\ x \in D$

Se trata de un error persistente que se reproduce una y otra vez pues los autores de un libro de texto se inspiran en otros libros de texto y así sucesivamente. No obstante, una definición correcta aparece, por ejemplo, en [16] pág. 55.

3.2 Falta de rigor acerca del concepto de *derivabilidad*

Veamos ahora una situación contradictoria, haciendo notar que en la "función", el conjunto de salida no coincide con el dominio.

Enunciado original, [18] pág. 262: "Cuando f es derivable en x, podemos asociar a x su correspondiente derivada $f'(x)$. De esta forma podemos considerar dos funciones: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f(x)$

$$f' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x)$$

de manera que si $Dom\ f$ es el dominio de la función dada, $Dom\ f'$ es el conjunto donde la función f es derivable".

Enunciado que proponemos: Sea $f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f(x)$ una función derivable en todo su dominio de definición.

Denotamos con $D_{f'} = \{\ x \in D \mid \exists\ f'(x)\ \ y\ \ f'(x) \in \mathbb{R}\ \}$. Entonces se puede definir la función $f' : D_{f'} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow f'(x)$ que es la *función derivada* de f .

Tomemos otro ejemplo de [3] pág. 130, en cuanto a la derivada del producto de funciones:

"La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda, más la primera por la derivada de la segunda", sin ninguna referencia a la condición de ser funciones derivables, ni dónde están definidas dichas funciones. Y así sigue con la derivada del cociente de funciones y la derivada de funciones compuestas, sin atender a las condiciones a cumplir dichas funciones.

4 Conceptos dados de forma errónea

Veamos como algunos **errores conceptuales** y **operacionales** detectados en libros de texto de Educación Secundaria se arrastran hasta cursos de Bachillerato.

4.1 Errores en el concepto de *raíz cuadrada*

Centrémonos ahora en un error bastante frecuente en los libros de texto de enseñanza preuniversitaria, el principal concepto de discusión: *la raíz cuadrada*. En este sentido cabe señalar el planteamiento de algunos autores para construir el concepto de *raíz cuadrada* en diversos niveles educativos y el modo en que se acomete su enseñanza:

- En [4] pág. 110: "Un número puede tener dos raíces cuadradas, una o ninguna", tratando de inculcar la práctica de la raíz cuadrada de la siguiente forma: $\sqrt{25} = \pm 5, \quad \sqrt{9} = \pm 3, \quad \sqrt{49} = \pm 7.$

- En [5] pág. 54: "Los números positivos tienen dos raíces cuadradas opuestas".

- En [20] pág. 72: "Si el índice de la raíz n es par, para todo número $a > 0$, tendremos dos raíces n-simas: $\sqrt[n]{a} = +b$ y $\sqrt[n]{a} = -b$".

- En [22] pág. 19: "Siendo $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, la raíz n-sima del *número natural* A es otro u otros números reales, r, definidos así: $\sqrt[n]{A} = r \Leftrightarrow r^n = A$.

  No siempre es posible la radicación. Cuando se puede hacer, la raíz es única unas veces, y otras son dos números opuestos, $\pm r$, según indica el siguiente cuadro ...".

Sin embargo, en estas hipótesis cabe la situación $n = 1$ por una parte, y queda fuera el caso más frecuente cuando $A \in \mathbb{R}_+$, por otra parte. Además dicho cuadro no concuerda con los ejemplos proporcionados (pág. 20), como: $\sqrt[12]{16} = \sqrt[3]{2}$.

- En [17] págs. 44–45, para resolver en el cuerpo de los números complejos la ecuación $x^2 + 36 = 0$ "se despeja el valor de x y se obtiene $x = \sqrt{-36} = \pm 6\sqrt{-1} = \pm 6i$."

- Veamos ahora la nota [20] pág. 73: "Observa las siguientes expresiones radicales: $3 = \sqrt{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[5]{243}$ "

En cálculos, la confusión está naufragando en contradicciones, puesto que se comprueba que la definición de la que se parte no es la adecuada, y entonces se viene aplicando el convenio:

- En [4] pág. 110: "En las operaciones con radicales de índice par, la raíz toma el signo que lleve el radical. $\sqrt{49} = +7$ "

- En [5] pág. 55: "Aunque *los números positivos tienen 2 raíces cuadradas opuestas* se utilizará la raíz positiva para realizar los cálculos (...)".

  El uso del convenio debería ser inequívoco en su aplicación. Sin embargo, los distintos ejemplos aducidos presentan usos mudables: por un lado,

  $$\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{36} = \pm 6, \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = \pm 2,$$

  y por otro lado, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ y $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

  Los autores incurren en la incoherencia de no respetar la regla que proponen, pues en [4] pág. 111 ofrecen los ejemplos:

  $$\sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5, \quad \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

- En [6] pág. 20 se ofrece el ejemplo de $\sqrt[4]{81} = \pm 3$, aunque también aparecen: $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ y $\sqrt{50} = 5\sqrt{2}$.

- Puede despistar la ambigüedad del libro [19] pág. 18, donde se destaca: "**Ten en cuenta**: Por ejemplo, $\sqrt[3]{27} = 3$, pero si se halla un radical equivalente como $\sqrt[6]{27^2}$, se tienen, en principio dos valores para la raíz: ± 3. De estos dos, sólo sería válido 3".

- Otro error que puede generar en el estudiante concepciones erróneas se relaciona con la simplificación de radicales, como podemos observar en [22] pág. 20:
$$\sqrt[4]{a^2 + b^2 - 2ab} = \sqrt[4]{(a-b)^2} = \sqrt{a-b},$$
siendo $\sqrt{|a-b|}$ el resultado correcto.

Las polémicas se desatan ahora: ¿Por qué es preciso introducir esta discriminación, en la práctica? Si en algunos tratamientos aparecen más de un valor, ¿no existiría tampoco relación entre el número de raíces y el índice del radical?

Por último, decir que en algunos casos, todavía más equívocos por el impacto que provocan, procedimientos incorrectos pueden llevar a resultados correctos. Citamos casos de:

- [4] pág. 143: $\frac{9}{x} = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{36} = \pm 6$
- [5] pág. 89: $\frac{4}{x} = \frac{x}{49} \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{196} = \pm 14$

Como es de sobra conocido, hay una distinción entre resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = a,\ a \geq 0$ y calcular la raíz cuadrada $\sqrt{a}$. Al caso, $x^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$.

Este tipo de error nos remite a una dificultad conceptual, ya que bajo tal punto de vista, las consecuencias son varias:

> Por una parte, hay una razón de peso: obsérvese que lo anterior hace imposible definir luego la *función raíz cuadrada*. Para $f(x) = \sqrt{x}$, por ejemplo, $f(9)$ requiere un único valor.
>
> Por si las razones anteriores no fuesen suficientes, hay, además, otra faceta calculística: los resultados mostrados en la situación anterior ponen en duda la fiabilidad de los cálculos realizados con una calculadora científica. Y de ahí no podríamos salir, gracias a la evolución de la computación.

4.2 Errores en el concepto de *función*

Es preciso hacer hincapié en el concepto de *función* y señalar algunos errores en la definición de dicho concepto.

Nos llama la atención [21] pág. 206: "Toda correspondencia es una función, pero no toda función es una correspondencia".

Pero llama la atención el no saber qué es una correspondencia, y el querer saberlo ...

El término de *correspondencia* del lenguaje ordinario es sinónimo de asociación: sea A el conjunto de los seres humanos de la Tierra y $\mathcal{R}$ la relación de conacionalidad, es decir: $a\ \mathcal{R}\ b \Leftrightarrow a\ y\ b\ son\ conacionales.$ Análogamente se puede considerar la relación de amistad, con lo que a cada persona le podrán corresponder varias personas, una o, en el peor caso, ninguna.

En ocasiones, notamos una confusión de los conceptos de *correspondencia* y *función*. Éste es el caso del siguiente ejemplo, extraído de [22] pág. 200:

"Función de A en B es una correspondencia de A en B en la cual todos los elementos del conjunto A forman parte a lo sumo de un par y nunca de más de uno".

"*Ejemplo:* Estudia cuántos pares tiene la función $f(x) = -x$ considerada como función de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ e indica el dominio y el recorrido.

Solución: $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tiene un único par $\{(0,\ 0)\}$, Dominio= $\{0\}$, Recorrido= $\{0\}$ ".

El ejemplo anterior trata de una correspondencia, no de una función.

Una correspondencia del conjunto A en el conjunto B , tal que cada elemento $a \in A$ tiene exáctamente una imagen $f(a) = b \in B,$ se dice que es una *aplicación (función)*.

Es aquí donde la manera equivocada de definir la raíz cuadrada, en [4] pág. 110, llega a otra dificultad, puesto que no permite definir la función raíz cuadrada, sino que una correspondencia.

La existencia de errores en el concepto de *función*, puede llegar hasta algunos cursos universitarios. Veamos un ejemplo que justifica la consideración anterior, en un texto universitario, que cuenta con varias ediciones, [24] pág. 5: "En la función $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ *a cada valor* de $x \in [-1, 1]$ le corresponden *dos valores* de y. Así para $x = \frac{3}{5},\ \ y = \pm\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$".

4.3 Errores acerca de las *funciones trigonométricas*

Nos asombra la existencia de graves errores en un texto universitario, que "pretende ayudar a los profesores y alumnos de estas asignaturas y, en general, a cualquier estudiante universitario", un "excelente libro, cuya calidad podrán comprobar los lectores a los que va dirigido", aunque "sus autores tienen una larga experiencia docente en ambos niveles educativos, bachillerato y universidad, y se encuentran por tanto en una posición privilegiada para detectar y remediar las carencias (...), tarea que (...) han llevado a cabo brillantemente" (véáse [17] Prólogo).

Las podemos ver claramente reflejadas en la siguiente muestra seleccionada del libro de nivel universitario [17] pág. 35:

Podemos entonces considerar las funciones trigonométricas

$$sen : \mathbb{R} \to [-1,\ 1], \quad cos : \mathbb{R} \to [-1,\ 1], \quad \boxed{tg : \mathbb{R} \to \mathbb{R}}.$$

Estas funciones no son biyectivas, pero si consideramos como conjunto origen, en vez de toda la recta real, el intervalo $[-\pi,\ \pi]$, que es lo que hacen las calculadoras, ya sí son biyectivas y es posible definir las funciones trigonométricas inversas

$$\boxed{arc\, sen : [-1,\ 1] \to [-\pi,\ \pi]}, \boxed{arc\, cos : [-1,\ 1] \to [-\pi,\ \pi]}, \boxed{arc\, tg : \mathbb{R} \to [-\pi,\ \pi]}$$

4.4 La polémica sobre el concepto de *continuidad de una función*

Se trata de una confusión ampliamente extendida acerca de los conceptos de continuidad/discontinuidad de funciones, que consiste en que algunos autores consideran como "discontinuidades" puntos fuera del dominio de existencia de las funciones, donde carece de sentido que tengan aquellas cualidades, es decir, no son ni continuas ni discontinuas. Por razones evidentes de espacio nos limitaremos a exponer y comentar, a modo de ejemplo, algunos casos.

- ¿La función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ es continua o no?

  Tanto en [21] pág. 208, como en [12] pág. 91 y en [2] pág. 76, se expone de un modo informal e intuitiva la idea de continuidad. Pero obsérvese que todos los ejemplos de dicontinuidad dados son puntos que no pertenecen al dominio de existencia de las funciones.

  Del mismo modo, tanto en [2] pág. 101, como en [13] pág. 274 y [18] pág. 238 se considera que la función $y = \frac{1}{x}$ presenta una discontinuidad en $x = 0$.

En [13] pág. 275 incluso se destaca: "**Ten en cuenta**: Las funciones

$$y = \frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{(x-2)^2}; \quad y = \frac{x^2 - 2x}{x - 2}$$

solo son discontinuas en los puntos donde no estan definidas." y además, "...observar que los ejemplos de funciones con discontinuidades ... no están definidas en el punto en que son discontinuas".

Del mismo modo, al respecto, el libro de texto [6] pág. 140 señala:

"las funciones racionales son discontinuas en los valores de x que son raíces del denominador".

En [18] pág. 234 se considera que la función $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ es discontinua en $x = 0$ y del mismo modo $f(x) = x^2 \cdot sen\frac{1}{x}$ es discontinua en $x = 0$.

En [18] pág. 238 y en [8] pág. 125: se considera $f(x) = sen\frac{\pi}{x}$ presenta una discontiniuidad no evitable en $x = 0$. En realidad, esta última función no presenta discontinuidades, sino que es continua en todo su domínio de existencia $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

Errores como éste son bastante frecuentes en los libros de matemáticas editados por editoriales españolas, incluidos algunos textos universitarios, por ejemplo, [10] págs. 108–109, ej. 7.3, [24] págs. 32–34, ejs. 19-21.

Cabe aquí hacer una necesaria aclaración: atribuimos ciertas cualidades a un objeto físico, siempre que dicho objeto existe. También cabe decir que otro objeto existente no las tiene si fuese lo contrario. Pero no se le exige al último objeto que tenga aquellas cualidades si no existiera.

Contrariamente a ideas y prácticas muy extendidas, resaltemos la siguiente observación:

- A diferencia del problema del límite, que se plantea sobre los *puntos de acumulación* del dominio de una función (que pueden o no pertenecer al dominio), *el problema de la continuidad* o *discontinuidad de una función no tiene sentido fuera del dominio de existencia.*

  Es como decir que la función $f(x) = ln\ x$ es discontinua en $x = -1$, cuando ni siquiera existe para valores negativos (y el cero).

Por ejemplo, para la función $f : (a,\ b) \to \mathbb{R}$, se puede plantear el problema del límite de f en los puntos a y b, pero no tiene sentido el problema de la continuidad de f en los puntos a y b.

Como un mal ejemplo, tomemos este enunciado parecido al del [13] pág. 275, ej. 1:

> Dada la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, indica cuáles son los puntos de discontinuidad y qué tipo de discontinuidad presenta.

Puntos de discontinuidad de una función real $f : D \to \mathbb{R}$, son aquellos puntos, donde aunque f está definida, la función no es continua. Es decir, una función $f : D \to \mathbb{R}$, que no es continua en un punto $x_0 \in D$, es *discontinua* en dicho punto.

Así, la función $f(x) = \frac{1}{x-1}$ *es continua*, ya que *sólo tiene sentido evaluar la continuidad de la función sobre su dominio de definición* $\mathbb{R} - \{1\}$, y *no donde no está definida*, al caso en $x = 1$.

El procedimiento de obtención de funciones discontinuas consiste básicamente en considerar funciones definidas "a trozos". Así la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1}, & \text{si } x \neq 1 \\ 2011, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

presenta una *discontinuidad inevitable* en $x = 1$. O, similarmente, la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ \sqrt{3}, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

presenta una *discontinuidad inevitable* en $x = 0$.

- La función $f : [-2,\ 3] \cup \{\ 5\ \} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [-2,\ 3] \\ 2011, & \text{si } x = 5 \end{cases}$$

es una función continua en $x = 5$.

5 Errores de procedimientos

5.1 Errores en la aplicación de la regla de l'Hôpital.

Con el fin de facilitar el cálculo, en [25] pág. 261, [18] pág. 295 y [26] pág. 81 se utiliza la regla de l'Hôpital "a ciegas" para obtener el límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{senx}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{cos\ x}{1} = 1.$$

Hay que advertir que *no se debe usar la regla de L'Hôpital* para obtener el límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x} = 1$, ya que este límite se utiliza para demostrar que $(sen\ x)' = cos\ x$, y lo demostrado no se puede usar en la demostración.

Para ilustrar la frecuencia de este tipo de error en algunos textos universitarios, remitimos al lector, por ejemplo, al [17] págs. 122–123 y [15] pág. 145.

Tampoco se debe usar la regla de L'Hôpital para obtener el límite muy importante $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = ln\ a$. Al hilo de esto, incluimos ejemplos de [25] pág. 250, ej. 3, donde se propone, de manera incorrecta, el uso de la definición de la derivada para obtener el límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$.

En el siguiente ejemplo, extraído de [17] págs. 123–124, los autores deducen:

$$\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x\ ln(1+\frac{1}{x})} \overset{\text{L'H}}{=} e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}}} = e$$

aplicando aquí la regla de L'Hôpital, aunque el límite $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$ sirve justamente para demostrar que $(ln\ x)' = \frac{1}{x}$, entrando así en un círculo vicioso, como ya se ha señalado.

6 Uso de términos no definidos

A pesar de que en [5] se introducen los números irracionales, no se aprovecha esta oportunidad para introducir el concepto de *número real* y, sin embargo, en la pág. 152 se hace referencia a términos como: "raíces reales", "soluciones reales".

Cabe notar que en [22] pág. 106 se refiere al *producto cartesiano* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, aunque requeriría ser explicado el concepto. No basta con que aparece un ejercicio

posterior en las págs. 175–176, actividad 1, a modo de repaso de algo no definido en ninguna otra parte.

Aún podemos ir más lejos. Las presentaciones de [20] págs. 10, 16, no son más que planteamientos que surgen de conceptos básicos de la Teoría de conjuntos, pues se trabaja con relaciones de equivalencia. Sin embargo, los conceptos de *clases de equivalencia* y *conjunto de clases de equivalencia* que aparecen, no se hallan definidos en el texto, de manera explícita.

7 Terminología equívoca o inapropiada

Desde el punto de vista cognitivo, es importante destacar, que se hace necesario desarrollar la construcción de una idea o noción, de manera que no genere falsos conceptos.

7.1 Uso de términos equivocados en el concepto de *raíz cuadrada*

En [5] pág. 55 se explica la "raíz cuadrada entera", lo que puede ocasionar confusión y ambigüedad, ya que dentro de un mismo campo conceptual conviven dos términos que significan cosas distintas (no es sólo un problema de matices). En realidad se trata del *valor aproximado de una raíz cuadrada*, que por lo general, no es un número entero, sino que un número racional.

7.2 Terminología equívoca acerca del concepto de *función*

Destaquemos [13] pág. 248: "f es una **función de** $\mathbb{R}$ **en** $\mathbb{R}$ si a cada número real, $x \in Dom$ le hace corresponder otro número real, $f(x)$:

$$Dom \subset \mathbb{R} \qquad Dom \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow f(x)\text{"}$$

conduce a pensar que existe una diferencia entre el *conjunto de salida* y *dominio de definición* de una función.

En principio, se debería distinguir entre *función*, *relación funcional* y su *gráfica*. No obstante, en [5] págs. 207, 209, ej. 79, nos pide "hallar la pendiente de las funciones lineales $y = \frac{4}{5}x$, ...". Del mismo modo, en [2] pág. 110, ej. 3 se habla de "una función lineal de pendiente 4".

En rigor, el término de *pendiente* corresponde a las rectas.

7.3 Terminología equívoca acerca del concepto de *límite de una función*

En [18] págs. 222–223, se hace uso incorrecto de la terminología de indeterminaciones en situaciones de imposibilidad de tipo $\frac{K}{0}$.

En [18] pág. 212 se presentan las "Propiedades de las *funciones convergentes*", haciendo confusión en el concepto de convergencia, propiedad que poseen algunas sucesiones de tender a un límite, y no las funciones. En estos términos se enuncia la propiedad: "Si una *función* es *convergente* o tiene límite en un punto, éste es único".

7.4 Terminología equívoca acerca del concepto de *derivación*

Tradicionalmente, en libros de texto, los autores españoles suelen emplear el término de "crecimiento / decrecimiento de una función en un punto", aunque a un punto del dominio corresponde una única imagen de la función en el codominio, siendo más apropiado el término de *crecimiento / decrecimiento de una función en un intervalo*. Por ello, aunque pueda producir una disonancia cognitiva, cabe plantearse emplear el término alternativo propuesto.

Así, en el ejemplo extraído de [8] pág. 154, el uso equívoco o inapropiado de dicho término dificulta que el enunciado del teorema que establece la relación entre el signo de la derivada de una función en un intervalo y la monotonía de la función sea suficientemente claro:

Enunciado original, [8] pág. 154:

1. Si $f'(a) > 0 \implies f$ estrictamente creciente en $x = a$
2. Si $f'(a) < 0 \implies f$ estrictamente decreciente en $x = a$

Enunciado que proponemos: Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo I.

1. Si $f'(x) > 0, \ (\forall)\, x \in I \implies f$ estrictamente creciente en I
2. Si $f'(x) < 0, \ (\forall)\, x \in I \implies f$ estrictamente decreciente en I

8 Enunciados dados de forma errónea

Otro aspecto que no debemos pasar por alto son unas características que se podrían interpretar como error en el enunciado de algunos problemas.

¿Es correcto un planteamiento como el que encontramos en [21] pág. 207?

"Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función radical definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

Para calcular el dominio de definición de esta función nos damos cuenta que no existen raíces cuadradas de números negativos, por tanto

$$Dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} = [0, +\infty)\text{"}$$

Este tipo de planteamiento encierra un serio inconveniente, ya que en su formulación, se incluye el dominio de definición de la "función". En efecto, la correspondencia $x \longrightarrow \sqrt{x}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ no define una función, ya que, por ejemplo para $x = -4$, la expresión $\sqrt{-4}$ no existe en $\mathbb{R}$.

Verdaderamente, con mucha frecuencia debemos hallar el dominio de existencia de una función, dada su expresión analítica. Al caso, el enunciado podría revisarse planteandolo de la siguiente forma:

Sea $D \subset \mathbb{R}$ y la función $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sqrt{x}$. Hallar el dominio máximo de existencia de f.

Para ilustrar la frecuencia de este tipo de error, incluimos otro ejemplo de la sección de actividades resueltas del mismo [21] pág. 207: "Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función racional definida por $f(x) = \frac{1}{x-3}$. Calcula su dominio".

Cabe mencionar, de paso, que este tipo de error queda reflejado en textos universitarios, precisamente en [17] pág. 58: "Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función. Se llama dominio de definición de la función f, representado por $Dm\ f$ al conjunto de los números reales x para los que puede hallarse $f(x)$:

$$Dm\ f = \{x \in \mathbb{R} :\ puede\ calcularse\ f(x)\}.\text{"}$$

De la misma manera, para funciones de varias variables, en el libro de nivel universitario [1] pág. 13, ej. 3; pág. 14, ej. 4; pág. 28, ej. 15; pág. 29, ej. 16; pág. 34, ej. 2, se identifican enunciados de problemas donde se pide hallar el dominio de definición de varias funciones, definidas sobre $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

Carece de claridad lo que plantea el enunciado [18] pág. 200, ej. 1; pág. 203, ej. 10; pág. 205, ej. 22: "*Estudia* el dominio de definición de las funciones $f(x) =$ (...)", aunque baste con cambiar una sola palabra para apreciar la diferencia.

[18] pág. 356 pretende que: "Por el principio de inducción matemática o inducción completa, se puede obtener fácilmente la expresión:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + h^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$$

que da la suma de los cuadrados (...)".

Desgraciadamente, un enunciado equivocado hallamos en [20] pág. 205: "Una función $y = f(x)$ que tiende a $\pm\infty$, cuando x tiende a un número a, se dice que tiene una asíntota vertical de ecuación $x = a$. Se representa por:

$$f(x) \to \pm\infty \quad cuando \quad x \to a, \quad a \in \mathbb{R}\text{"}$$

Basta fijarse en el siguiente contraejemplo para probar que la afirmación no se cumple siempre.

La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 3, & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

tiene una asíntota vertical de ecuación $x = 1$, y sin embargo,

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 5$ y $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$.

9 Notaciones matematicas ambiguas

9.1 Ambiguedades de notación en relación a números y funciones

Es bien sabido que, en libros de texto, las notaciones han de elegirse cuidadosamente, de modo que tengan mayor coherencia. Esto se consigue sin más que atenerse a las notaciones más usuales en revistas de matemáticas más prestigiosas de la actualidad. Veamos ahora un caso donde hay mucha ambigüedad de la notación.

Enunciado original, [5] pág. 23, ej. 70:

Halla el valor de la cifra **x** para que el número 45x sea divisible entre 2.

Enunciado que proponemos: Halla el valor de la cifra c para que el número

$$\overline{45c} \quad sea\ divisible\ entre\ 2.$$

Enunciado original, [5] pág. 23, ej. 71:

Halla el valor de la cifra **x** para que el número 6x9 sea divisible entre 3.

Enunciado que proponemos: Halla el valor de la cifra c para que el número

$$\overline{6c9} \quad sea\ divisible\ entre\ 3.$$

Veamos ahora otro caso donde se emplea una notación inadecuada.

Enunciado original, [18] pág. 196:

Producto de funciones f y g. $[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x) \ \ \forall\, x \in Dom\ f \mid Dom\ g$

Cociente de dos funciones f y g. $\left[\frac{f}{g}\right](x) = \frac{f(x)}{g(x)} \ \ \forall\, x \in Dom\ f \mid Dom\ g$ con $g(x) \neq 0$

Enunciado que proponemos: Sean $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : D_g \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$(f \cdot g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \cdot g(x),\ (\forall)\ x \in D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)},\ (\forall)\ x \in D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\ \}$$

Es notorio que a falta de consenso hay varias notaciones para logaritmos: el logaritmo neperiano de x se representan por Lx en [6], por $ln\ x$ en [13], y por $log\ x$ en [16]. Es interesante mencionar que en [22] la función logarítmica se escribe asì: $y = L_b(x)$.

Llama la atención por el impacto que producen las notaciones diferentes con el mismo significado, en [17]:

pág. 52: $y = f(x) = x - lnx + e^x$ y $y = f(x_1, x_2, x_3) = Lx_1x_2x_3$.

pág. 72: $f(x) = lg_3(x + 3)$

pág. 85: $f(x) = log_a x$

Existen abundantes fuentes acreditadas que indican la preferencia por ln para designar los logaritmos neperianos y log para los logaritmos decimales.

En cuanto a los conjuntos podemos señalar en [22] pág. 9 una notación incompleta, e incluso errónea: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b}\} \quad a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

En [13] pág. 28, [22] pág. 11 y en [18] pág. 184 se denota por $\mathbb{I}$ al conjunto de los números irracionales. Esta notación es ambigua, puesto que es tan apropiada para designar al conjunto de números irracionales como al conjunto de números

imaginarios puros, lo cual puede crear confusión. Entonces, la falta de notación del conjunto de los números irracionales se suple por $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

En [18] pág. 197 se denota por i la función identidad. Esta notación es ambigua, ya que se utiliza para designar la unidad imaginaria, $i = \sqrt{-1}$, lo cual puede crear confusión. Entonces proponemos:

$$1_E : E \to E, \quad 1_E(x) = x$$

9.2 Notaciones inadecuadas relacionadas con el límite

Señalemos aquí unas ambigüedades que se producen cuando en un libro de texto se atribuyen significados diferentes, de manera tácita o explícita por medio de reglas de designación, a símbolos que usualmente no requieren ser explicados cada vez que se utilizan.

Expresiones extrañas que dan lugar a ambigüedades, además de agrupar dos fórmulas en una, veremos en [3] pág. 178:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3^-$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = \begin{cases} 0^+ \\ 0^- \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1+|x|} = \begin{cases} 1^- \\ -1^+ \end{cases}$$

Bajo la denotación " ∞ " existen en [9] pág. 251, ej. 3: $\lim\limits_{x \to 2} \frac{5x+5}{x^2-x-2} = \frac{15}{0} = \infty$ y en [9] pág. 245, ej. 1; pág. 247, ej. 1: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, presentando confusión y ambigüedad. Sin embargo, el texto [**?**] pág. 106 justifica que: "el símbolo ∞ engloba también los casos en los que el resultado del límite sea $+\infty$ o $-\infty$ ".

Según [23] pág. 256, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty, \; si \; \lim\limits_{x \to a} |f(x)| = +\infty$.

Veamos porqué desde el punto de vista notacional, prescindir del signo de los límites infinitos no es muy acertado.

En Análisis real, se consideran dos elementos, $-\infty$ y $+\infty$ no pertenecientes a $\mathbb{R}$, y se representa por $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \; +\infty\}$, prolongándose la estructura de orden de $\mathbb{R}$, mediante $-\infty < x < +\infty, \quad (\forall) \; x \in \mathbb{R}$. Los dos elementos son no

privilegiados y les asignamos un signo. Escribimos en ocasiones ∞ en lugar de $+\infty$, que no es más que una extensión del convenio ampliamente usado: cuando un número real no lleva signo, suponemos que es positivo. En tanto nos movemos en la recta real, esta identificación no ofrece peligro.

En Análisis complejo empleamos un único símbolo ∞ , pues el conjunto de los números complejos carece de orden compatible con las operaciones ususales definidas en él.

En cualquier caso, tal convenio de notación por ∞, empleado en los textos citados anteriormente, es sin duda innecesario, ya que puede evitarse empleando límites laterales.

10 Sugerencias didácticas

10.1 Sugerencia didáctica sobre *las potencias*

Aunque, obviamente, hay varias modalidades de realizar las sucesivas ampliaciones de las potencias, en principio se podrá realizar de la siguiente manera que proponemos, de forma esquemática, a continuación.

Potencias de exponente natural: Para $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se definen:

$$a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ \ldots,\ a^n = a^{n-1} \cdot a$$

Potencias de exponente entero: Para $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$ se definen:

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}, \quad 0^0 = \ no\, existe.$$

Potencias de exponente racional: Para $a \in \mathbb{R},\ a > 0$, se define:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad (\forall)\ m,\ n \in \mathbb{Z},\ n \geq 2$$

Para $a < 0$ y $a \in \mathbb{Q}$, la potencia a^r es ambigua. Por ejemplo: $(-1)^{\frac{1}{2}}$ no existe en $\mathbb{R}$, mientras que $(-1)^{\frac{1}{3}}$ sí que existe en $\mathbb{R}$.

Si $r > 0$, entonces $0^r = 0$, pero si $r < 0$, entonces 0^r nu existe. Por ejemplo: $0^{\frac{2}{3}} = 0$, pero $0^{-\frac{1}{3}}$ no existe.

Potencias de exponente real: Por supuesto haciendo las concesiones necesarias, y empleando la ideea del *truncamiento* de un número irracional, se podría admitir que $(\forall)\ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y $(\forall)\ a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad (\exists)\ a^x,$ es decir que tiene sentido, por ejemplo $2^{\sqrt{3}}$ o π^{π}.

10.2 Sugerencia didáctica sobre *la raíz cuadrada*

Para conseguir resultados fiables en la práctica, debemos dejar claros los conceptos. Como una simple guía de lo mínimo indispensable, nos limitaremos a exponer las ideas fundamentales acerca de la *la raíz cuadrada*.

I. En la ESO. A este nivel, tratamos la *raíz cuadrada real*. Aceptamos la siguiente definición, de importancia capital para nuestros propósitos, ya que permitirá definir luego el concepto de *función raíz cuadrada*.

La *raíz cuadrada* de un número real positivo a, es *el único número real positivo* b , tal que $b^2 = a$.

Remitimos al lector, por ejemplo, al [16] pág.6, [11] pág.435, o [7] pág. 61.

Es decir, denotando por $\sqrt{a}$, la raíz cuadrada de a se cumplen las relaciones:

$$\sqrt{a} \geq 0, \quad (\sqrt{a})^2 = a, \quad (\forall)\ a \geq 0$$

Una vez dada la definicion, vamos a concentrarnos en algunas operaciones específicas de la raíz cuadrada:

$$\sqrt{a \cdot b} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}\,, & \text{si} \quad a,\ b \geq 0 \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}\,, & \text{si} \quad a,\ b < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,, & \text{si} \quad a \geq 0, \quad b > 0 \\ \\ \frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}\,, & \text{si} \quad a < 0, \quad b < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Entonces es fácil ver la *extracción de factores de un radical* $\sqrt{a^2 \cdot b} = |a| \cdot \sqrt{b}$ y la *introducción de factores en un radical*

$$a \cdot \sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2 \cdot b}\,, & \text{si} \quad a \geq 0, \quad b \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 \cdot b}\,, & \text{si} \quad a < 0, \quad b \geq 0 \end{cases}$$

II. En el Bachillerato. Dado que a este nivel se estudian las raíces de números complejos, cabe insistir en la diferencia que hay entre la *raíz cuadrada real* y la *raíz cuadrada compleja*.

A diferencia de la *raíz cuadrada real* de un número real positivo, que es un número real, la *raíz cuadrada compleja* de un número real positivo es un conjunto de 2 números reales.

Por lo tanto, para un número real positivo a , en $\mathbb{C}$, tenemos:

$$\sqrt{a} = \{-b,\ b\}, \quad con\ b \in \mathbb{R}, \quad tal\ que \quad b^2 = a\ .$$

Por ejemplo: $\sqrt{16} = 4,\ en\ \mathbb{R} \quad y \quad \sqrt{16} = \{-4,\ 4\},\ en\ \mathbb{C}.$

10.3 Sugerencia didáctica sobre la *función raíz cuadrada*

La función $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)\ ,\ g(x) = x^2$ no es una función inyectiva, y por lo tanto, no es inversible. Pero admite la restricción

$$f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)\ , \quad f(x) = x^2,$$

que es una biyección, y por tanto, será posible definir su aplicación inversa.

La aplicación inversa $f^{-1} : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ de f, se deduce a partir de:

$$f^{-1} \circ f = 1_{[0,+\infty)} \quad y \quad f \circ f_{-1} = 1_{[0,+\infty)}$$

Verdaderamente tenemos:

$$(\forall)\ x \in [0, +\infty) \quad \Rightarrow \quad f\big(f^{-1}(x)\big) = x \quad \Rightarrow \Big(f^{-1}(x)\Big)^2 = x \quad \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt{x} \in [0, +\infty)$$

11 Conclusiones

Reflexionando sobre la matemática encontrada en los libros de Educación Secundaria y Bachillerato se desvela un proceso de abandono del rigor en los planteamientos que constituye la “marca de la casa“ matemática. Una actitud que trata de imponer una excesiva “simplificación“ y un estilo de exposición dirigido sólo al alumno medio, ha llevado a cometer un grave error metodológico.

Como las citas acerca de errores puede perjudicar al libro de texto citado, téngase en cuenta que, por desgracia, estos no son los únicos que ofrecen una concatenación de errores, y que pueden desorientar a muchos estudiantes y profesores, lo cual es triste y lamentable.

¿Por qué los errores de los libros de texto se parecen tanto? Los autores de los libros de texto acuden a otros libros de texto, que a su vez se inspiran en otros y así sucesivamente, una práctica favorecedora de la reproducción de errores.

Los libros de texto han sido y continúan siendo el material curricular más utilizado para la enseñanza de las ciencias en todos los niveles educativos.

Los libros de ciencias exactas, como los de matemáticas, deberían ser la clase de libros que menos errores deberían incluir en sus páginas. En tal sentido, los libros de texto de matemáticas merecen críticas sustantivas para detectar y remediar las carencias a las que hemos hecho referencia anteriormente. A fin de que se cuide mejor la calidad e incorpore contenidos con un adecuado rigor científico, creemos conveniente plantearse si no podrían instituir una Comisión Nacional de Evaluación, autorizada para aprobar los libros de texto que cumplen las condiciones necesarias para ser usados legalmente en colegios e institutos.

Bibliografía

[1] Albaladejo Pina, Isabel Pilar; Lafuente Lechuga, Matilde; Martínez García, Pilar; María del Mar Sánchez de la Vega. *Problemas de Cálculo para la Economía y la Empresa*, Editorial Tébar, Madrid, 2001.

[2] Amigo, Carlos; Peña, Pilar; Pérez, Antonio; Rodríguez, Ana; Sivit, Fernando. *Matemáticas*, libro de texto de 4° de ESO, Opción A, Editorial McGraw-Hill, Madrid, 1995.

[3] Anzola González, Máximo; Vizmanos Buelta, José Ramón. *Algoritmo. Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*, libro de texto de 2° de Bachillerato, Editorial SM, 2003.

[4] José María Arías Cabezas, Ildefonso Maza Sáez. *Matemáticas*, libro de texto de 1° de ESO, Grupo Editorial Bruño, Madrid, 2007.

[5] José María Arías Cabezas, Ildefonso Maza Sáez. *Matemáticas*, libro de texto de 2° de ESO, Grupo Editorial Bruño, Madrid, 2008.

[6] José María Arías Cabezas, Ildefonso Maza Sáez. *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*, libro de texto de 1° de Bachillerato, Grupo Editorial Bruño, Madrid, 2008.

[7] Berthold, G., et ál. *Pequeña Enciclopedia de Matemáticas*, Ediciones Pagoulatos, Atenas, 1982.

[8] A. Biosca Selga, M. J. Espinet Asensio, M. J. Fandos Tello, M. Jimeno Jiménez, J. Villagrá Barrio. *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*, libro de texto de 2° de Bachillerato, Editorial EDEBÉ, 1999.

[9] Bobillo Ares, Nilo Carlos; García Muñiz, Maria Antonia. *Orbita: Matemáticas Ciencias de la Naturaleza y de la Salud*, Editorial Santillana, 2000.

[10] Cámara Sánchez, Ángeles; Garrido Abia, Raquel; Tolmos Rodríguez-Piñero, Piedad. *Problemas resueltos de Matemáticas para Economía y Empresa*, Editorial Paraninfo, 2007.

[11] Christopher Clapham, James Nicholson. *The Concise Oxford Dictionary of Mathematics*, Oxford University Press, 2005.

[12] Colera Jiménez, José; Oliveira González, María José; Gaztelu Albero, Ignacio; Martínez Alonso, María del Mar. *Matemáticas*, libro de texto de 4° de ESO, opción B, Editorial Anaya, Madrid, 2008.

[13] Colera Jiménez, José; Oliveira González, María José; García Pérez, Rosario; Santaella, Elizabeth. *Matemáticas I*, libro de texto de 1° de Bachillerato, Editorial Anaya, Madrid, 2008.

[14] *Diccionario de Matemáticas*, Editorial Cultural, 2000.

[15] García Celayeta, Berta; Higueras Sanz, Inmaculada; Roldán Marrodán, Teodoro. *Análisis Matemático y Métodos Numéricos*, Universidad Pública de Navarra.

[16] García, Alfonsa; García, Fernando; Gutiérrez, Andrés; López, Antonio ; Rodríguez, Gerardo; de la Villa, Agustín. *Cálculo I: Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*, CLAGSA. Madrid, 1994.

[17] García Pineda, María Pilar; Antonio Núñez del Prado, José; Sebastián Gómez, Alberto. *Iniciación a la Matemática Universitaria. Curso 0 de Matemáticas*, Ediciones Paraninfo, Madrid, 2007.

[18] González García, Carlos; Llorente Medrano, Jesús; Ruiz Jiménez, María José. *Matemáticas 2*, libro de texto de 2° de Bachillerato, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud / Tecnología, Editorial Editex, 2003.

[19] Hernández Gómez, Joaquín; Alcaide Guindo, Fernando; Vizmanos Buelta, José Ramón. *Matemáticas*, libro de texto de 1° de Bachillerato, Ciencias y Tecnología, Madrid, Editorial SM, 2008.

[20] Jiménez López, Pedro; Lozano Pato, Francisco; Miñano Sánchez, Antonio; Nortes Checa, Andrés; Ródenas Martínez, José Antonio. *Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales 1*, Ed Santillana. Equipo Arrixaca, 1996.

[21] Margallo Toral, José. *Matemáticas*, libro de texto de 3° de ESO, Editorial Editex, Madrid, 2007.

[22] Negro Fernández, Adolfo; Benedicto Martín, César; Martínez Pérez, Mariano; Nevot Luna, Antonio. *Matemáticas Grupo Azúl 21*, libro de texto de 1° de Bachillerato, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, Editorial Santillana, Madrid, 1996.

[23] Ramírez Fernández, Antonio J.; Esteve Arolas, Rodolfo;Montesinos, Pascual; Deusa Francés, Maribel. *Matemáticas 1, Bachillerato*, Editorial ECIR, Madrid, 2002

[24] Rodríguez Ruiz, Julián. *Matemáticas aplicadas a la Economía y Empresa*, Volumen 2, *Cálculo Diferencial. Teoría*, Ediciones Académicas S. A., Madrid 2003.

[25] Rodríguez, R.; Soler, J.; Nevot, A. *Matemáticas 2, Bachillerato*, Editorial McGraw-Hill, Madrid, 2003.

[26] Vigneron Tenorio, Alberto; Beato Sirvent, Jesús. *Cuestiones resueltas de matemáticas básicas*, Universidad de Cádiz, Servicio de Publicaciones, 2009

Algunos límites en Geometría y en Análisis

Juan-Bosco Romero Márquez
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid
jbromeroma@gmail.com

Abstract

Some problems about limits in Geometry and Analysis, published elsewhere, are revisited in this article.

Introducción

En este artículo se expone mi visión de diversos problemas sobre límites, que han sido publicados en las revistas que se dan como referencia, y que pueden ser encuadrados dentro del marco de la Geometría y del Análisis.

A. Límites en los que intervienen elementos de un triángulo

Problema A1

Procedencia: Apareció propuesto en *Elem. Math.* **52** (1997) **1**, 37-42 (nº 1117) y solucionado en *Elem. Math.* **53** (1998) **1**, 41.

Enunciado: *Consideremos los puntos A(-a,0), B(a,0) y C(0,b) referidos a un sistema de coordenadas cartesiano como los vértices de un triángulo isósceles con a>0, fijo y b>0 variable. Denotando* y_U, y_H, y_S, y_I, *a las respectivas ordenadas del circuncetro, ortocentro, baricentro e incentro del triángulo ABC, calcular*

$$\lim_{b\to a\sqrt{3}} \frac{y_I - y_H}{y_I - y_S} : \frac{y_U - y_H}{y_U - y_S}.$$

Solución

Con el sistema de coordenadas elegido para el triángulo ABC, es claro que, al ser éste isósceles, todos los puntos indicados están situados sobre el eje OY y teniendo en cuenta que el circuncentro, ortocentro, y baricentro verifican la relación de Euler, será

$$\frac{y_U - y_H}{y_U - y_S} = 3.$$

Por otra parte, mediante un cambio de escala podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a = 1$. Tenemos entonces que

$$y_H = \frac{1}{b},$$

y como

$$\frac{y_I}{b - y_I} = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}.$$

obtenemos

$$y_I = \frac{\sqrt{1+b^2} - 1}{b}.$$

Si llamamos k(b), a la expresión cuyo límite buscamos, será:

$$k(b) = \frac{\sqrt{1+b^2} - 2}{3\sqrt{1+b^2} - 3 - b^2}.$$

Multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{1+b^2} + 2$, y suprimiendo el factor común $b^2 - 3$, de obtiene

$$k(b) = \frac{1}{1 - \sqrt{1+b^2}},$$

y por tanto, es inmediato que

$$\lim_{b \to \sqrt{3}} k(b) = -1$$

lo que soluciona el problema y permite interpretarlo como que los puntos *H, S, I, U* (que en el límite coinciden, al convertirse el triángulo en equilátero) pueden interpretarse como una *cuaterna armónica infinitesimal*.

Problema A2

<u>*Procedencia*</u>: Apareció propuesto en *Crux Mathematicorum*, Vol. 28, Nov. N.9, pág. 286, y la solución, fue dada en Vol. 29, Nov. 9, págs. 320-321.

<u>*Enunciado*</u>: *Sea ABC un triángulo isósceles con lados constantes a = b y lado variable c. Denotemos por m ,w y h la mediana, la bisectriz y la altura medidas desde A al lado opuesto, respectivamente. Hallar*

$$\lim_{c\to a}\frac{m-h}{w-h}.$$

<u>*Solución*</u> *(del estudiante Theodore Choronis).*
Notemos primero que

$$\lim_{c\to a}\frac{m-h}{w-h}=\lim\left(\frac{m^2-h^2}{w^2-h^2}.\frac{w+h}{m+h}\right)=\lim\frac{m^2-h^2}{w^2-h^2}$$

ya que

$$\lim_{c\to a}\frac{m+h}{w+h}=1$$

(pues si $a = b = c$, es $m = w = h$). Ahora, sustituyendo las expresiones de *m, h*, y *w*, en función de los lados *a, b* y *c*, de un triángulo, y teniendo en cuenta que *a* = *b*, se llega a

$$m^2-h^2=\frac{(a^2-c^2)^2}{4a^2}$$

y

$$w^2-h^2=\frac{c^2(2a+c)^2(a-c)^2}{4a^2(a+c)^2}.$$

Sustituyendo estas expresiones en lo anterior, llegamos a :

$$\lim_{c\to a}\frac{m-h}{w-h}=\lim_{c\to a}\frac{m^2-h^2}{w^2-h}=\frac{(2a)^4}{a^2(3a)^2}=\frac{16}{9}.$$

Nota: F. Bellot, hace dos comentarios sobre dos problemas parecidos en la revista Gazeta Matemática de Rumanía, en 1993 y en 1994.

Problema A3

<u>*Procedencia*</u>: Apareció propuesto en *Crux Mathematicorum*, Vol.30, nº 5, Sep. 2004, págs. 298-300, y resuelto en Vol. 31. nº 5, Sept.2005, págs. 347-348.

<u>Enunciado</u>: Sea ABC un triángulo isósceles variable con lados constantes a = b y variable el lado c. Denotamos la mediana, la bisectriz y la altura medidas desde A a su lado opuesto, por m, w y h respectivamente. Hallar:

$$\lim_{b\to c}\frac{m-h}{w-h}.$$

<u>*Solución*</u> *(de Li Zhou)*

La condición con que se propuso inicialmente este problema, que el triángulo fuese isósceles, no es necesaria. Se supone en lo que sigue que los lados verifican a>b>c, donde c es fijo.

Trazando desde el vértice A al lado BC, la mediana *m*=AM, la bisectriz *w*=AE, y la altura *h* =AD, esta última descompone a ABC en dos triángulos rectángulos. Aplicando ahora el Teorema de Pitágoras, resulta:

$$m^2 - h^2 = MD^2$$

y por tanto

$$m - h = \frac{MD^2}{m+h} \quad .$$

De modo similar, $w^2 - h^2 = ED^2$.. lo que implica

$$w - h = \frac{ED^2}{w+h}.$$

Además

$$MB = \frac{a}{2}, \qquad EB = \frac{ac}{b+c}, \qquad BD = cCosB = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a},$$

luego

$$MD = MB - BD = \frac{(b-c)(b+c)}{2a},$$

$$ED = EB - BD = \frac{(b-c)((b+c)^2 - a^2)}{2a(b+c)}.$$

y por consiguiente

$$\frac{m-h}{w-h}=\frac{MD^2(w+h)}{ED^2(m+h)}=\frac{(b+c)^4(w+h)}{((b+c)^2-a^2)^2(m+h)}.$$

y como

$$\lim_{b\to c} m=\lim_{b\to c} w= h$$

resulta

$$\lim_{b\to c}\frac{m-h}{w-h}=\frac{(2c)^4}{\left((2c)^2-a^2\right)^2}.$$

En el caso de ser Â = 90, resulta

$$\lim_{b\to c} a=c\sqrt{2};$$

y por tanto

$$\lim_{b\to c}\frac{m-h}{w-h}=4.$$

Problema A4

<u>*Procedencia*</u>: Apareció propuesto en *CMJ,* Vol. 28, **1**, enero 1996, pág. 68, nº 595, y resuelto en Vol. 29, **1**, enero 1998, págs. 70-71.

<u>*Enunciado*</u>: *En un triángulo rectángulo cuyos lados son a (fijo), b (variable) y c (hipotenusa), denotamos por* m_a, m_b, *y* θ_a, θ_b, *a las medianas y a las bisectrices correspondientes a los lados a y b, respectivamente. Calcular*

$$\lim_{b\to a}\frac{m_b-m_a}{\theta_b-\theta_a}$$

<u>*Solución*</u> *(de Philip Oppenheimer)*

Eligiendo un sistema de coordenadas tal que sean A =(-1,0), B=(1,0) , C=(*x,y*), donde $x^2+y^2=1$, y $c=2$, se tiene

$$a = \sqrt{(1-x)^2 + y^2} = \sqrt{2-2x}, \qquad b = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} = \sqrt{2+2x},$$

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3+x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10+6x}}{2},$$

$$m_b = \sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{3-x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10-6x}}{2},$$

$$Cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+2x}}}{2}, \qquad Cos\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2-2x}}}{2},$$

$$\theta_b = \frac{2\sqrt{2-2x}}{\sqrt{2+\sqrt{2-2x}}}, \qquad \theta_a = \frac{2\sqrt{2+2x}}{\sqrt{2+\sqrt{2+2x}}}.$$

Decir que b tiende a a es equivalente a decir que x tiende a cero. Como resulta un caso de indeterminación del tipo 0/0, se puede aplicar la regla de L'Hopital. Considerando las funciones

$$f(x) = m_b - m_a, \qquad y \qquad g(x) = \theta_b - \theta_a,$$

y hallando sus derivadas primeras, evaluadas para $x = 0$, se tiene:

$$\lim_{b \to a} \frac{m_b - m_a}{\theta_b - \theta_a} = \frac{f'(0)}{g'(0)} \approx 0.78164.$$

Problema A5

<u>*Procedencia*</u>: Apareció propuesto en *CMJ*, Vol. 31, **1** (enero 2000), págs 62-63, y solucionado en el Vol. 32, **1** (enero 2001), pág. 67 (nº 670).

<u>*Enunciado*</u>: *Sean a y b dos números reales positivos y fijos tales b > a/2, y sea ABC un triángulo cualquiera donde los lados son a=BC, b = AC. Denotamos por h la distancia desde el vértice A a la recta BC, con w la longitud del segmento desde A al lado BC que biseca al ángulo BAC. Ya que a y b son números*

reales fijos, podemos interpretar a ambas w y h como funciones del lado variable c. Con esta interpretación, determinar

$$\lim_{c \to b} \quad \frac{w-h}{(c-b)^2},$$

como una expresión algebraica en a y b.

<u>*Solución*</u> *(de Li Zhou)*
Denotando por D el pie de la altura desde A a la recta determinada por el lado BC y por E el punto de intersección de la bisectriz de BAC y BC, sean

x = BE, y = EC, z = ED

Suponiendo c > b (argumento análogo se haría para el caso c < b), se tiene:

$$a = x + y, \qquad y = \frac{b}{c}x, \qquad z^2 = w^2 - h^2, \qquad b^2 = (y-z)^2 + h^2.$$
$$c^2 = (x+z)^2 + h^2.$$

De estas relaciones se deduce que

$$(c-b)(c+b) = c^2 - b^2 = (x+y)(x-y) + 2(x+y)z =$$
$$= a(x - \frac{b}{c}x) + 2az = \frac{a}{c}(c-b)x + 2az.$$

y de ahí,

$$z = \frac{(c-b)(c^2+bc-ax)}{2ac} \ y \ \frac{w-h}{(c-b)^2} = \frac{z^2}{(c-b)^2(w+h)} = \frac{(c^2+bc-ax)^2}{4a^2c^2(w+h)}.$$

Como $c \to b, \quad x \to \frac{a}{2}.$ y tanto w como h tienden a

$$\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}.$$

En definitiva,

$$\lim_{c \to b} \frac{w-h}{(c-b)^2} = \frac{(4b^2-a^2)^2}{16a^2b^2\sqrt{4b^2-a^2}} = \frac{\sqrt{(4b^2-a^2)^3}}{(4ab)^2}.$$

B. Límites en Análisis

En esta sección exponemos soluciones de problemas sobre límites en Análisis, publicados en distintas revistas.

Problema B1

<u>Procedencia</u>: Apareció propuesto en la *AMM,* Vol. 101, **7**, ago-sep 2001, pág. 664, y solucionado en *AMM*, Vol. 104, **7**, págs. 664-665 (nº 10607).

<u>Enunciado</u>: *Calcular*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2^x + 4^x + ... + (2n)^x}{1^x + 3^x + ...(2n-1)^x} \right)^n \quad para\ x > 0.$$

<u>Solución</u> *(proponemos una composición de las soluciones enviadas por David Beckwith y John N. Fitch).*

La suma $S_K = 1^x + 2^x + 3^x + ... + k^x$ se transforma en una suma de Riemann para la integral de $f(t) = t^x$ en el intervalo de integración [0,1], como sigue:

$$\frac{S_k}{k^{x+1}} = f(\frac{1}{k}).\frac{1}{k} + f(\frac{2}{k}).\frac{1}{k} + f(\frac{3}{k}).\frac{1}{k} + ... + f(1).\frac{1}{k} =$$

$$= \int_0^1 f(t)dt + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}\right)\left[f(1) - f(0) + O(\frac{1}{k}) \right] = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

De aquí

$$S_n = n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

y

$$S_{2n} = 2^{x+1}\ n^{x+1}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Por consiguiente, después de operar se llega a:

$$\left(\frac{2^x+4^x+...+(2n)^x}{1^x+3^x+...+(2n-1)^x}\right)^n=(\frac{2^xS_n}{S_{2n}-2^xS_n})^n=\left(1+\frac{z}{n}\right)^n,$$

donde

$$z=z(n)=\frac{x+1}{2}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

con lo que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^x+4^x+....+(2n)^x}{1^x+3^x+....+(2n-1)^x}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z(n)}{n}\right)^n=e^{\lim\limits_{n\to\infty} z(n)}=e^{\left(\frac{x+1}{2}\right)}.$$

que es la solución del problema propuesto.

Comentario: Se han dado además otras tres soluciones de este problema, que suponen generalizaciones. Así, Preben Alsholm añade que el límite propuesto es 1, si x=0, y es 0, si x < 0. Por otra parte, Julio Kuplinnsky y Gregory Keselman demuestran independientemente que siendo *a,b,p,q,x* números reales*; p,q,x* positivos; *a+p* y *b+q* no negativos, resulta:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(a+p)^x+(a+2p)^x+.....+(a+np)^x}{(b+q)^x+(b+2q)^x+.....+(b+nq)^x}\right)^n=\begin{cases}0 & si \quad p<q\\ e^{(x+1)/2(a-b)} & si \quad p=q\\ \infty & si \quad p>q\end{cases}$$

Problema B2

<u>*Procedencia*</u>: Apareció propuesto en *CMJ*, Vol. 23, nº 2 (marzo 2002), pág. 150, y solucionado en Vol. 34, nº 2 (marzo 2003), págs. 155-156.

<u>*Enunciado*</u>: *Hallar las ternas de números reales (p,q,r) con p>0 y r distinto de cero tales que*

$$\left[\frac{x^p-x^q}{\ln x}\right]^{\frac{1}{x^r-1}}$$

tenga, o bien un límite finito a la izquierda, o bien un límite finito a la derecha en x=1, y para cada terna calcular el valor del límite.

Solución (de William Seaman)
Siendo $f(x)$ la expresión dada, se van a demostrar las tres afirmaciones:

(a) $Si \quad \dfrac{\ln(p-q)}{r} < 0, \; entonces \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 0 \quad y \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty.$

(b) $Si \quad \dfrac{\ln(p-q)}{r} > 0, \; entonces \quad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad y \quad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0.$

(c) $Si \quad \dfrac{\ln(p-q)}{r} = 0, \; (es \; decir \, p-q=1) \; entonces \quad \lim\limits_{x\to 1} f(x) = e^{\frac{p+q}{2r}} \quad .$

Para ello se considera el cambio de variable $x = e^y$, definiendo la función

$$g(y) = \frac{\ln\left(\dfrac{e^{py} - e^{qy}}{y}\right)}{e^{ry} - 1} \quad ,$$

con lo cual se tiene

$$f(x) = e^{g(\ln x)}.$$

El comportamiento de $f(x)$, para x suficientemente cerca de 1 (a uno u otro lado) está determinado por el comportamiento de $g(y)$ para y suficientemente cerca de 0 (a uno u otro lado).
Ahora, sabemos que

$$\ln(1+z) = z + O(z^2)$$

y que

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + O(z^3)$$

con lo que

$$g(y) = \frac{\ln\left[(p-q) + (p^2 - q^2).y/2 + O(y^2)\right]}{ry + O(y^2)} \quad .$$

De ese desarrollo, si $p - q \neq 1$, se deduce

$$\lim_{y\to 0} y.g(y) = \frac{\ln(p-q)}{r} \quad ,$$

que no es cero, y de aquí (a) y (b) se siguen de inmediato.

Si $p - q = 1$,

$$g(y) = \frac{(p^2 - q^2).y/2 + O(y^2)}{ry + O(y^2)} = \frac{(p+q)/2 + O(y)}{r + O(y)}.$$

y de lo anterior,

$$\lim_{y\to 0} .g(y) = \frac{p+q}{2r}$$

probando así (c).

Problema B3

<u>*Procedencia*</u>: Apareció propuesto en la revista de la *OEI*, *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática*, esto es, la OIM, nº 23, 2005, problema nº 111, y resuelto en el nº 24, 2005.

<u>*Enunciado*</u>: *Si $x_1, x_2, \ldots, x_m$, y son números reales estrictamente positivos, $m \geq 2$, natura y si $x>1$, real, calcular*

$$L = \lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{\frac{(\sum_{i=1}^{m} x_i)^x - \sum_{i=1}^{m} (x_i)^x}{m^x - m}}$$

<u>*Solución*</u> *(de José Carlos García Barro)*
Sea L el límite buscado. Se va a acotar el radicando, superior e inferiormente, con expresiones que tengan el mismo límite, pero que se pueda calcular fácilmente.
Acotación superior: Puesto que los números x_i son todos estrictamente positivos y $x > 1$, se tiene la desigualdad

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m} (x_i)^x \leq \left(\sum x_i\right)^x.$$

Como, $m > 1$ y $x > 1$, el denominador se acota como sigue:

$$m^x - m \geq m^x - m^{x-1} = m^{x-1}(m-1).$$

Teniendo en cuenta estas dos desigualdades, resulta

$$\sqrt[x]{\frac{(\sum_{i=1}^{m} x_i)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{m^x - m}} \leq \sqrt[x]{\frac{(\sum_{i=1}^{m} x_i)^x}{m^{x-1}(m-1)}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i}{m^{\frac{x-1}{x}} \sqrt[x]{(m-1)}},$$

y pasando al límite, cuando x tiende a infinito , se obtiene

$$L \leq \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_i.$$

Acotación inferior: Sacando factor común y operando, se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x - \sum_{i=1}^{m} (x_i)^x = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x \left[1 - \frac{\sum_{i=1}^{m} (x_i)^x}{\left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x}\right] =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right)^x \left[1 - \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{x_i}{\sum_{ij=1}^{m} x_j}\right)^x\right]$$

Entonces, como obviamente $m^x - m \leq m^x$, resulta:

$$\sqrt[x]{\frac{(\sum_{i=1}^{m} x_i)^x - \sum_{i=1}^{m}(x_i)^x}{m^x - m}} \geq \frac{1}{m}(\sum_{i=1}^{m} x_i)\sqrt[x]{1 - \sum_{i=1}^{m}(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j})^x}.$$

Ahora bien, el radicando del segundo miembro de la desigualdad anterior es un número real comprendido entre 0 y 1, que además tiende a 1 cuando x tiende a más infinito, debido a que, para cualquiera de los x_i,

$$0 < \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j} < 1$$

y si $x' > x > 1$, entonces

$$0 < \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j}\right)^{x'} < \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j}\right)^{x} < \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{\sum_{j=1}^{m} x_j} = 1.$$

de donde resulta

$$L \geq \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i,$$

lo que, unido a la desigualdad obtenida anteriormente, implica

$$L = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} x_i,$$

es decir, el límite pedido es la media aritmética de los números reales x_i .

Problema B4

<u>*Procedencia*</u>: Apareció propuesto en la revista *L´insegnamento Della matematica e delle scienze integrate*, Vol. 23 B, nº 4, 2000, y resuelto en el Vol. 24B, nº 5, octubre 2001.

<u>*Enunciado*</u>: *Demostrar que*

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a+x)(1+ax)} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(a+x)(1+ax)}$$

con a > 0, un número real y calcular su límite cuando a tiende a 1.

<u>*Solución*</u> *(de di Stefano Antoniazzi (Treviso))*
Siendo

$$f(x) = \frac{1}{(a+x)(1+ax)};$$

una sustitución directa demuestra que se tiene

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f(x).$$

y el segundo integrando se puede poner en la forma

$$g(x) = \frac{1}{(1+x^2)(a+x)(1+ax)} = \frac{1}{1+x^2} f(x) = f(x) - \frac{x^2}{1+x^2} f(x) \qquad (*)$$

Se trata de probar que

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = 2\int_0^{+\infty} g(x)dx.$$

Teniendo en cuenta (*),

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx - \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} f(x)dx. \qquad (**)$$

La función en cuestión nos garantiza la convergencia de la integral escrita. Sustituyendo

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 f(x) \ ,$$

la segunda integral del segundo miembro se convierte en la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx.$$

Haciendo ahora el cambio de variable z=1/x la integral anterior se transforma en

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} f\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{+\infty}^{0} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} f(z)\left(-\frac{1}{z^2}\right) dz = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+z^2} f(z) = \int_0^{+\infty} g(z)dz.$$

Ahora de (**) se llega a

$$\int_0^{+\infty} g(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx - \int_0^{+\infty} g(x)dx$$

que es lo que se deseaba probar.

El límite se puede calcular directamente sin dificultad, por el método de descomposición en fracciones simples de una función racional. Se tiene pues

$$I_a = 2\frac{\ln a}{a^2 - 1}$$

y ahora, aplicando la regla de L´Hopital, resulta

$$\lim_{a \to 1} I_a = 1$$

Agradecimientos

Le doy las gracias, una vez más, al Prof. Julio Fernández Biarge, por la revisión y las aportaciones que ha hecho para mejorar la presentación de este artículo.

Bibliografía

Elemente der Mathematik, European Mathematical Society, Suiza.

CM: *Crux Mathematicorum* with Mayhem, CMS, Canadá.

AMM: *America Mathematical Monthly*, MAA,USA.

CMJ: *College Mathematical Journal*, MAA, USA.

REOIM: *Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana*, España.

Estimación de la influencia del carácter inconexo de una red de transporte por ferrocarril

Eugenio Roanes Lozano[a]
Antonio Hernando[b]

[a] *Dpto. de Álgebra, Facultad de Educación*
Universidad Complutense de Madrid
eroanes@mat.ucm.es

[b] Dpto. de Sistemas inteligentes Aplicados,
E.U. de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
ahernando@eui.upm.es

Abstract

Our line of research is focused on the applications of computer algebra in artificial intelligence, transportation engineering, geometry and education. Regarding math education, we believe that connecting the mathematical contents to real world topics is a key issue so that students feel interested in the subject. We present here an application of graph theory to railway networks that can be used in the classroom as illustration of the utility of graph theory in real life: evaluating the impact of having an unconnected network versus having a connected one.

1 Introducción

La enseñanza secundaria en España se está organizando en los últimos tiempos en torno al desarrollo de competencias básicas y se está potenciando claramente la orientación pragmática de las asignaturas de matemáticas [1].

En nuestra opinión, tanto el enfocar la asignatura de un modo utilitario, como el ilustrarla con ejemplos tomados del mundo real, es altamente positivo, pues refuerza el interés del alumno por la asignatura a todos los niveles educativos. En concreto, en enseñanza secundaria, pocos de esos alumnos serán matemáticos de adultos, pero seguro que todos se verán en la vida real ante situaciones en que tienen que usar sus conocimientos matemáticos. El mundo que nos rodea está cada vez más tecnificado y en él cada vez se tiene acceso a más información.

Nuestra línea de investigación está enfocada a las aplicaciones del álgebra computacional en inteligencia artificial, ingeniería del transporte, geometría y educación. Con motivo de la reciente inauguración de la línea de alta velocidad *Madrid-Valencia* (18 Diciembre 2010), nos ha parecido oportuno presentar este ejemplo de aplicación de *teoría de grafos*.

2 La red de ferrocarriles de ancho ibérico en España

2.1 Antecedentes históricos de la red de ferrocarriles de ancho ibérico

En algunos países como España, la red de ferrocarriles es esencialmente radial. Comenzaremos con unas brevísimas pinceladas sobre los antecedentes históricos de la red de ferrocarriles de ancho ibérico, que enmarquen tal situación en un contexto cronológico.

En los comienzos del ferrocarril en España [2] (segunda mitad del siglo XIX) las líneas se conceden a particulares. No existe una planificación en función de la demanda esperada y menos aún una coordinación entre los distintos esfuerzos constructivos (salvo en imponer el ancho ibérico, algo mayor que el denominado *estándar*, el común a EEUU y todos los países europeos allende los Pirineos, con la excepción de Finlandia y los países que constituían la antigua URSS).

En esa época se contemplan los ferrocarriles de vía estrecha como un complemento de la red principal de ancho ibérico, más económico de construir.

La falta de visión de la red en su conjunto desaparece con el *Plan Guadalhorce*, iniciado durante la dictadura del general Primo de Rivera, pero cuyo completo desarrollo fue interrumpido por la guerra civil. No se llevó a cabo el desarrollo completo del que pretendía completar la red ferroviaria de ancho ibérico con diversas líneas [3], varias de las cuales eran transversales (Santander-Mediterráneo, Baeza a Lérida por Albacete, Talavera de la Reina a Villanueva de la Serena,…) y de las cuales sólo unas pocas se inauguraron (Figura 1).

Además, varias de estas líneas en obras (concluidas o casi concluidas) no fueron terminadas o inauguradas (!), pues un préstamo del Banco Mundial, necesario para proceder a la dieselización de *Renfe*, venía condicionado por no poner en servicio más líneas presuntamente deficitarias.

Figura 1: Red de Ferrocarriles en España, 1941
(Fuente: Fundación de los Ferrocarriles Españoles)

Los cierres de líneas del año 1985 [4] supusieron el final para varias de las pocas líneas transversales que aún subsistían.

Todos estos avatares han influido negativamente en la ya escuálida red española de ancho ibérico (Figura 2) [3]. Un estudio de la evolución de la conectividad de la red española de ancho ibérico 1956-2006 puede encontrarse en [5,6].

Figura 2: Red de Ferrocarriles en España, 2006
(Fuente: Fundación de los Ferrocarriles Españoles)

2.2 Las redes radiales de ferrocarriles interpretadas como un grafo

Una red puramente radial (conexa) es, desde el punto de vista de la t*eoría de grafos* [7,8], un *árbol*, en el que las *hojas* del grafo son los destinos periféricos y el nodo central es la *raíz* del árbol.

3 La red de ferrocarriles de alta velocidad en España

A veces, en una gran ciudad existe más de una estación, y dependiendo del destino, se tiene que partir de una estación u otra (Viena, París, Madrid, Londres,...).

Pero un caso extremo lo constituye la situación actual de la línea de alta velocidad de ancho estándar del noroeste de España, con cabecera en Madrid Chamartín, que está aislada del resto de la red de alta velocidad de ancho están-

dar (con cabecera en Madrid Atocha y destinos a Sevilla, Barcelona, Valencia), pues los dos túneles existentes entre las dos grandes estaciones madrileñas son de ancho ibérico y están próximos a su saturación (no existiendo tampoco vía de circunvalación en ancho estándar).

Cuando se prolonguen las líneas previstas en ancho estándar, se tendrá una conexión entre ambas subredes por el sur de Francia (!), vía Port-Bou, Cerbere, Hendaya, Irún (o viceversa), esto es, recorriendo de lado a lado los Pirineos al otro lado de la frontera. Aunque desde el punto de vista topológico ambas subredes quedarán conectadas, desde el punto de vista del mantenimiento y la explotación, este enlace no es en absoluto útil. Imaginemos, por ejemplo, enviar un lento tren amolador por ese itinerario desde Atocha a Chamartín.

Análogamente, este camino es inútil para un pasajero de un recorrido *transversal*, al que obviamente le interesa más transbordar a un cercanías o al metro para ir a de una estación de Madrid a la otra, aunque pierda mucho tiempo en comparación con los tiempos de viaje en los trayectos de alta velocidad, que realizar la conexión por el otro lado de los Pirineos...

3.1 La red española de alta velocidad interpretada como un grafo

Más precisamente, según la t*eoría de grafos,* la red española actual de alta velocidad sería pues un *bosque* que consta en dos árboles (sus respectivas raíces se sitúan en dos puntos alejados de la misma ciudad: Madrid).

Y, es claro que, tanto desde el punto de vista del servicio al cliente como del de la explotación, no basta que el grafo de la red sea *conexo* para poder asegurar que se ofrece un buen servicio (esto es, no sólo interesa que se obtengan *caminos* en el grafo, sino que se obtengan caminos "razonables").

Los transbordos en la ciudad central no afectan a los recorridos radiales, pues se entiende que el pasajero se dirige directamente a la estación correspondiente, pero sí afectan gravemente a parte de los recorridos transversales (los que tienen que pasar por ambas raíces de los árboles, esto es, los que tienen que cambiar de estación).

3.2 Solución trivial al carácter no conexo de la red española de alta velocidad

La opción de encauzar los trenes de alta velocidad transversales por los saturados túneles existentes entre Atocha y Chamartín implicaría dedicar trenes de ancho variable para todos los trayectos transversales e instalar cambiadores de ancho a ambos lados de los túneles existentes.

Sin entrar a considerar los costes económicos de su construcción, la solución ideal sería obviamente la de contar con un túnel en ancho internacional entre las estaciones de Atocha y Chamartín, que no mejoraría los servicios radiales, pero sí los transversales (y facilitaría el transvase de material y por tanto el mantenimiento de la infraestructura y del material móvil).

4 Una conexión directa entre los dos árboles de ancho internacional

4.1 Modelo de estimación del valor añadido de la conexión directa

Estimaremos a continuación el valor añadido que genera, desde el punto de vista del usuario, una nueva conexión corta, como la comentada, entre las respectivas raíces de los dos subgrafos de tipo árbol de que consta la red actual de alta velocidad española.

Sean:

- k el porcentaje de los desplazamientos que son radiales en la red de alta velocidad (el $100-k$ por ciento restante será pues transversal),
- c el porcentaje de desplazamientos transversales que tienen que realizar transbordo de la raíz de uno de los árboles a la raíz del otro árbol,
- $\Delta t1$ el tiempo de transbordo de la raíz de uno de los árboles a la raíz del otro árbol,
- $\Delta t2$ el tiempo de paso de la raíz de uno de los árboles a la raíz del otro árbol, en caso de que los trenes de alta velocidad en recorridos transversales fueran pasantes por ambas estaciones
- mr la media ponderada de tiempo de recorrido de desplazamientos radiales,
- mt la media ponderada de tiempo de recorrido de los desplazamientos transversales (excluyendo el tiempo de conexión entre estaciones, si éste existiera).

La mejora de tiempos en la conexión entre las raíces de los dos árboles del bosque de tiempo $\Delta t1$ (transbordo) a $\Delta t2$ (conexión directa pasante) podría estimarse como la disminución de la media ponderada de tiempos medios:

$$T1 = (k/100) \cdot mr + (1-(k/100)) \cdot (mt + (c/100) \cdot \Delta t1)$$

a:

$$T2 = (k/100) \cdot mr + (1-(k/100)) \cdot (mt + (c/100) \cdot \Delta t2)$$

o, en porcentaje:

$$100 \cdot ((T2 - T1) / T1)$$

4.2 Ejemplo de aplicación del modelo de estimación del valor añadido de la conexión directa

Consideremos un planteamiento realista, estimado aproximadamente:

- el *70%* de desplazamientos son radiales,
- el *40%* el porcentaje de los desplazamientos transversales tienen que realizar transbordo,
- *1h* es el tiempo de transbordo,
- *0.25h* es el tiempo perdido de estación a estación (raíz de un árbol a raíz del otro) por trenes pasantes,
- *2.5h* es la media ponderada de tiempo de recorrido de desplazamientos radiales,
- *4.5h* es la media ponderada de tiempo de recorrido de los desplazamientos transversales.

Substituyendo estos valores en las ecuaciones de *T1* y *T2* de la Subsección 4.1, resultan las medias ponderadas de tiempos medios:

$$T1 = 3.22$$

$$T2 = 3.13$$

y el porcentaje de mejora de tiempos medios para todos los trayectos resulta un nada despreciable: -2.795 %

5 Conclusiones

En nuestra opinión, el realizar un enfoque pragmático de la matemática puede hacerla menos árida y más atractiva. Hay multitud de ejemplos que, sin necesitar de técnicas matemáticas complejas, permiten presentar casos reales interesantes.

Nota

Queremos subrayar que todos los comentarios relativos a la red ferroviaria y las estimaciones introducidas en el ejemplo se han llevado a cabo con la mejor voluntad de ser imparciales y a partir de la bibliografía citada y los conocimientos de los autores. No obstante, no podemos asegurar la inexistencia de errores involuntarios. Este trabajo tiene una orientación exclusivamente didáctica (como ejemplo de utilidad de la matemática en la vida real).

Agradecimientos

Deseamos expresar nuestro agradecimiento a Juan Manuel Jiménez Aguilar, Alberto García Álvarez y Miguel Jiménez Vega, de la Fundación de los Ferrocarriles Españoles, por la información proporcionada y el permiso para reproducir los mapas aquí incluidos.

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos *TIN2009-07901* (Gobierno de España) y *UCM2008-910563* (UCM–BSCH Gr. 58/08, Grupo de Investigación *ACEIA*).

Bibliografía

[1] E. Roanes Lozano (ed.): *Desarrollo de competencies básicas a través de las Matemáticas* (CD-ROM). Ministerio de Educación. Secretaría General Técnica, Madrid, 2010.

[2] F. Wais, *Historia de los ferrocarriles españoles*, 2ª edición. Editorial Nacional, Madrid, 1974.

[3] V. Machimbarrena: La mejora y ampliación de la red ferroviaria española. Revista d*e Obras Públicas* 2550 (1930) 273-276. Disponible en: URL: http://ropdigital.ciccp.es/pdf/publico/1930/1930_tomoI_2550_01.pdf

[4] M. Jiménez: En 1985 se cerraron más de 900 kilómetros de líneas altamente deficitarias. *Vía Libre* 484 (1985) 86-87. Disponible en: URL: http://www.vialibre-ffe.com/noticias.asp?cs=hist&not=1158

[5] E. Roanes Lozano, L. M. Laita, E. Roanes Macías, M. J. Wester, J. L. Ruiz, C. Roncero: Evolution of Railway Network Flexibility: the Spanish Broad Gauge Case. *Mathematics and Computers in Simulation* 79 (2009) 2317-2332.

[6] E. Roanes Lozano, L. M. Laita, E. Roanes Macías, M. J. Wester, J. L. Ruiz, C. Roncero: Estudio matemático de la evolución de la topología de la red Española de ancho ibérico 1956-2006 (resumen de [2]). *Via Libre. Investigación Ferroviaria* s/n (2009) 1-7. Disponible en:
URL: http://www.tecnica-vialibre.es/ficha_art.asp?art=51

[7] M. Abellanas, D. Lodares: *Análisis de Algoritmos y Teoría de Grafos*. Ed. Ra-Ma, Madrid, 1990.

[8] G. Chartrand: *Introductory Graph Theory*. Dover, New York, 1985.

Distribución del número de elementos invariantes en las permutaciones

Pedro Pescador Díaz
I.E.S. "Juana de Pimentel"
pmpescador@gmail.com

Abstract

A classroom experience about properties of the number of invariant elements of permutations is described in this article.

Introducción

Mi instituto participa junto con otros y un colegio de la zona en la organización de una *Gymkhana* matemática para alumnos de primer ciclo de la E.S.O. y los profesores intentamos aportar ejercicios que les puedan motivar y hacer pensar. Con este posible fin didáctico se estudia el siguiente juego:

- En una bolsa se introducen bolas numeradas del 1 al 3. Se sacan sin reemplazo y consecutivamente y se gana si aparece una bola cuyo número coincide con su orden de extracción.
- Después de ver con qué frecuencia ocurre esto se podría hacer lo mismo aumentando el número de bolas.

Si consideramos la variable aleatoria ξ = "Número de coincidencias de la bola con su orden de extracción" entonces se gana cuando $0 < \xi$.

Tras observar que la mencionada variable es también "Número de elementos invariantes en las permutaciones de orden *n*" se estudia su función de distribución. Es decir $p(n,k) = p(\xi = k)$ en las permutaciones de orden n. Por ejemplo, en la permutación (2 4 3 1 5) el orden es $n = 5$ y los elementos invariantes son el 3 y el 5, en este caso pues $k = 2$.

Naturalmente en todo lo que sigue $1 \leq n$, pues el orden de la permutaciones es siempre mayor o igual a 1. Por generalizar las fórmulas, en alguna ocasión será $n = 0$.

1 Probabilidad de que al menos un elemento sea invariante

Si suponemos que el número de bolas es $n = 4$ entonces

$$p(0<\xi)=\frac{C_{4,1}\cdot 3! - C_{4,2}\cdot 2! + C_{4,3}\cdot 1! - C_{4,4}\cdot 0!}{4!}=\frac{1}{1!}-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}$$

En general para n bolas es

$$p(0<\xi) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{i!} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i!}$$

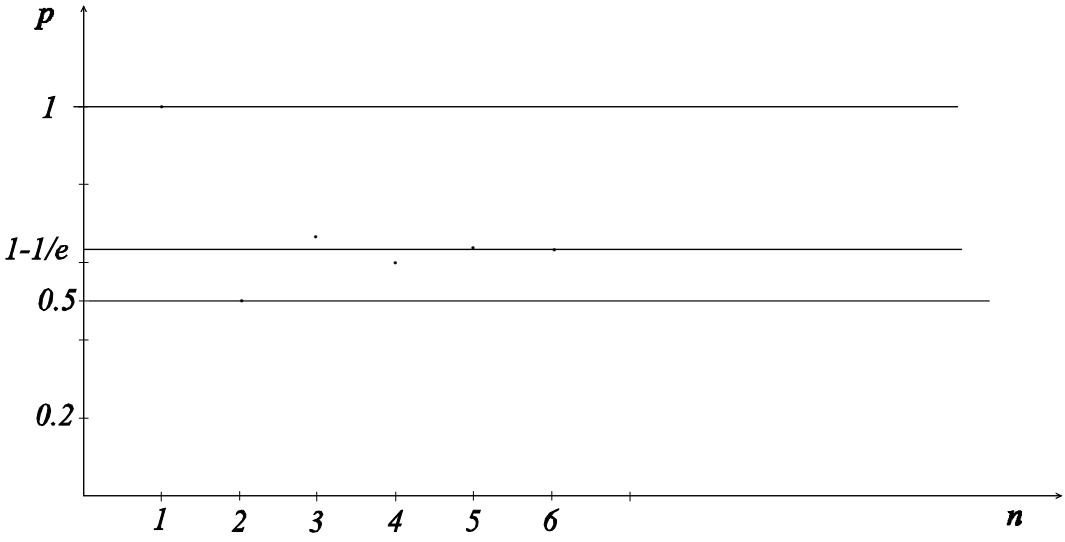
Y la probabilidad del suceso contrario es

$$p(\xi=0) = 1-p(0<\xi) = 1-\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i!}\right) = 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i!} = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i!}$$

Éste es el desarrollo limitado a $n + 1$ términos de e^{-1} .

Hallemos unos cuantos valores de $p(0 < \xi)$ y representemos gráficamente:

n	1	2	3	4	5	6	...
$P(0 < \xi)$	1	½	2/3	15/24	76/120	455/720	...



La probabilidad de que haya algún invariante verifica las siguientes propiedades:

I) <u>*Oscilante*</u>

De

$$p(\, n, 0 < \xi \,) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i!}$$

resulta

$$p(\, n, 0 < \xi \,) \;=\; p(\, n-1, 0 < \xi \,) + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \qquad 1 < n$$

II) <u>*Acotada*</u>

$$p(1, 0 < \xi) = 1, \quad p(2, 0 < \xi) = \frac{1}{2} \quad y \quad \frac{1}{2} < p(n, 0 < \xi) < 1 \;\; si \;\; 2 < n$$

III) <u>*Relaciones de orden según la paridad*</u>

La probabilidad es mayor para permutaciones de orden impar que par.

$$p(\, 2n-1, 0 < \xi \,) \;>\; p(\, 2n', 0 < \xi \,)$$

Los probabilidad decrece para permutaciones de orden impar

$$p(\, 2n-1, 0 < \xi \,) \;>\; p(\, 2n+1, 0 < \xi \,)$$

Los probabilidad crece para permutaciones de orden par

$$p(\, 2n, 0 < \xi \,) \;<\; p(\, 2n+2, 0 < \xi \,)$$

IV) <u>*Convergente*</u>

Como se ve en la gráfica, para $n > 4$ prácticamente los puntos están sobre la línea $p = 1 - 1/e$ lo que indica una convergencia muy rápida.

$$p(\, n, 0 < \xi \,) \;\approx\; 1 - \frac{1}{e} \qquad 4 < n \qquad \text{(prácticamente constante)}$$

$$\lim_{n\to\infty} p(n,\, 0 < \xi \,) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - p(n, \xi = 0 \,) \right) \;=\; 1 - \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^{i}}{i!} = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}$$

2 Probabilidad de que el número de elementos invariantes sea k

Supongamos ahora: $0 \leq k < n$

El número de casos en que habrá k elementos invariantes elegidos de entre n es $C_{n,k}$ por el número de maneras de que el resto de elementos no sea invariante $p(n-k, 0)\cdot(n-k)!$

El número de casos posibles es $n!$.

La probabilidad es pues

$$p(n,k) = \frac{C_{n,k}\cdot p(n-k,0)\cdot(n-k)!}{n!}$$

$$= \frac{\frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}\cdot p(n-k,0)\cdot(n-k)!}{n!}$$

$$= \frac{p(n-k,0)}{k!}$$

$$= \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(-1)^i}{i!}$$

Si $k = n$, entonces:

- si $0 = k = n$, entonces las igualdades

$$p(0,0) = \frac{p(0-0,0)}{0!}$$

$$= \frac{1}{0!}\sum_{i=0}^{0-0}\frac{(-1)^i}{i!}$$

son ambas válidas, definiendo $p(0,0) = 1$;

- si $0 < k = n$, entonces es sabido que $p(n, n) = \dfrac{1}{n!}$

y con la definición admitida, $p(0, 0) = 1$, es válida la igualdad

$$p(n, n) = \frac{p(0, 0)}{n!}$$

Como, por otro lado, también resulta correcta la igualdad

$$p(n, n) = \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n-n} \frac{(-1)^i}{i!}$$

se tiene

$$p(n, k) = \frac{p(n-k, 0)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \quad \text{para} \quad 0 \leq k \leq n$$

<u>*Casos particulares*</u>

I) De

$$p(n, 0) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} \quad ,$$

resulta

$$p(1, 0) = \sum_{i=0}^{1} \frac{(-1)^i}{i!} = \frac{(-1)^0}{0!} - \frac{(-1)^1}{1!} = 0$$

que corresponde obviamente al caso en que sólo hay un elemento (numerado con el 1) en cuyo caso es imposible que no aparezca el primero.

II) También es imposible que sean $n - 1$ los elementos invariantes y en efecto

$$p(n, n-1) = \frac{p(1, 0)}{(n-1)!} = \frac{0}{(n-1)!} = 0$$

3 Propiedades

I) *Es una función de distribución*

FD 1) La probabilidad es siempre positiva o nula $p(\ n, k\ ) \geq 0$

FD 2) La suma de las probabilidades es la unidad $\sum_{k=0}^{n} p(\ n, k\ ) = 1$

II) *Parámetros estadísticos*

La media de la variable es $\overline{\xi_n} = 1$

La media del cuadrado de la variable es

$$\overline{\xi_n^2} = \begin{cases} 1 & si \quad n = 1 \\ 2 & si \quad 1 < n \end{cases}$$

lo que lleva a una varianza

$$\sigma_n^2 = \overline{\xi_n^2} - \left(\overline{\xi_n}\right)^2 = \begin{cases} 0 & si \quad n = 1 \\ 1 & si \quad 1 < n \end{cases}$$

y la desviación típica coincide en este caso con su varianza

$$\sigma_n = \sigma_n^2$$

III) *Aproximaciones*

Ya hemos visto que $p(\ n, 0 < \xi\ ) \approx 1 - \frac{1}{e} \qquad 4 < n$

lo que podemos aprovechar para asegurar que

$$p(\ n, 0 = \xi\ ) = 1 - p(\ n, 0 < \xi\ ) \approx \frac{1}{e} = e^{-1} \qquad 4 < n$$

y también que

$$p(\ n, k\ ) = \frac{p(\ n - k, 0\ )}{k!} \approx \frac{e^{-1}}{k!} \qquad si \quad n - k > 4$$

que es la función de distribución de Poisson

$$p(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \text{con} \quad \lambda = 1$$

4 Aplicación didáctica

No parece posible estudiar el juego propuesto en una actividad como la *Gymkhana* en la que cada prueba dispone de unos quince minutos de tiempo.

Para alumnos de cuarto de la E.S.O. si puede pedirse que el grupo halle por experimentación la tabla de valores de $p(0 < \xi)$ y hacer su representación gráfica y describir a su modo las propiedades enunciadas en la sección 1, tras asumir que la frecuencia $f(0 < \xi)$ es una aproximación a la probabilidad $p(0 < \xi)$, si se ha repetido el experimento un número suficientemente grande de veces.

Para alumnos aventajados de Bachillerato y si hay tiempo, se pueden estudiar las secciones 1 y 2 y las aproximaciones de la sección 3.

Demostrar las propiedades que se enuncian en la sección 3, requiere de cálculos largos con las fórmulas de la combinatoria y es mejor esperar hasta tener el nivel adecuado para leer la bibliografía en donde se verá o se adquirirá la capacidad de hacerlo de forma más breve, precisa y elegante.

Bibliografía

[1] Arthur Engels: *Les certidudes du hasard.* Ed. Aleas. Lyon, 1990.

[2] Miguel Jerez Juan: *Fundamentos matemáticos de la estadística y de la información.* Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales. Madrid, 1972.

Figuras geométricas en madera: curvas, cónicas y cono de Apolonio

Francisco Treceño Losada

C/ Dominicos, 24 47100 Tordesillas (Valladolid)
info@artmadera.com

Abstract

The construction of certain geometric figures in wood is described: dynamic paradoxes and conic sections of the cone of Apollonius.

Introducción

Dice el dicho que "*la madera es algo vivo*" para referirse a su naturaleza cambiante según el grado de humedad ambiental; todos hemos oído o dicho eso de que "*se ha hinchado la puerta*" o aquello de que "*el cajón no entra*". Pero la expresión adquiere tintes palmarios cuando vemos girar en el torno un bloque de madera cualquiera, ya sea más o menos cilíndrico o poliédrico.

Figura 1

A nuestro ojo todo cuerpo sólido girando a 3300 revoluciones por minuto se convierte en algo cilíndrico –o mejor dicho curvo- y cuando aproximas la gubia, los cortes dados parecen trazos tridimensionales que provocan la aparición de conos, cilindros, esferas, formas troncocónicas, elipsoidales, de casquete esférico o hemisférico…. Es la magia del torneado artesano de la madera.

Y ese es mi oficio; soy un tornero manual de madera que tengo un Taller Artesano en la provincia de Valladolid en el que trabajo yo sólo, por lo que la producción es muy limitada y alejada de las tiradas industriales.

Los redactores del *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas* consideraron oportuno invitarme a publicar breves apuntes de alguna de mis figuras geométricas y acepté con la humildad propia de un tornero de madera en un ámbito científico tan alejado de mis quehaceres habituales entre virutas. Espero sepan disculpar mis limitaciones.

Centraré mi exposición en el llamado Cono de Apolonio y las secciones cónicas y a vuelapluma trataré de otra pieza que conjuga matemáticas y física, la llamada *paradoja mecánica* o *paradoja dinámica*. Empezaremos por esta última.

1 "Paradoja mecánica" o "paradoja dinámica".

El doble cono que "cae hacia arriba" o que "sube bajando" por un plano inclinado. La sensación es que el doble cono asciende por el plano inclinado vulnerando las leyes de la física, pero en realidad su centro de gravedad cae.

Figura 2

Consiste en un doble cono torneado de madera unido por la base, un cilindro torneado y dos listones unidos formando un plano inclinado. Al hacer la demostración comprobamos que mientras el cilindro desciende tal y como suponemos a lo largo del plano inclinado, el doble cono no sólo no desciende en el mismo sentido que el cilindro, sino que sube la rampa, infringiendo aparentemente las leyes de la dinámica[1]. En realidad en ambos casos el baricentro del cuerpo en movimiento desciende.

La paradoja de esta pieza, que en apariencia tiene más que ver con la física y las leyes gravitatorias que con otra cosa, debe a la geometría del montaje su efecto. La "V" que forman los dos listones del plano inclinado interactúa con la otra "V" que diseña el doble cono unido por la base; pero su centro de gravedad va cayendo.

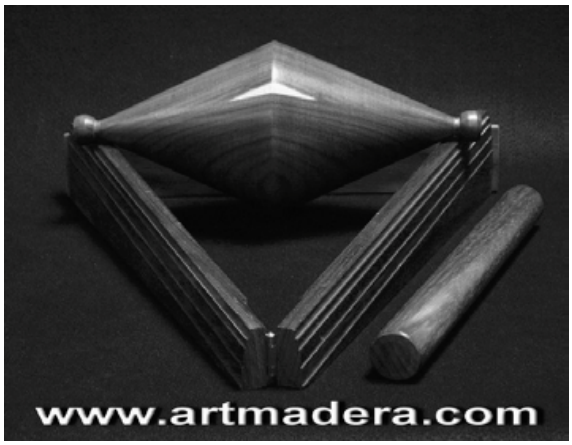


Figura 3a

Figura 3b

Poco cabe reseñar de su elaboración técnica, pues la dificultad máxima radica exclusivamente en las medidas de la inclinación del plano y en la longitud y diámetro máximo del doble cono. Si todas son exactas, el efecto dinámico es óptimo. Se manufacturan en maderas densas para que el peso del centro de gravedad sea el adecuado: Roble, Castaño, Olmo o Palo Rojo.

---

[1] Puede verse un video demostrativo en la página:
`http://www.artmadera.com/video-paradoja-mecanica`.

2 El Cono de Apolonio. Las secciones cónicas.

Esta figura de madera, puesta de relevancia tras el estreno de la película Ágora de A. Amenábar, que trata sobre la vida de Hipatia, hija de Teón, matemática y astrónoma, formaba parte del elenco didáctico de nuestras escuelas del siglo pasado. Me puso tras la pista un cliente, arquitecto de profesión, quién me comentó que él ya conoció ese tipo de cono en la escuela cuando era niño; se trataba de un cono equivalente a éste –pero no idéntico- con el que se hacían prácticas en las escuelas; junto a él había otras figuras como el cilindro, la esfera, el cubo, prismas, pirámides, etc. Era el "*maletín de las figuras geométricas de madera*". Más tarde, gracias a una eminente astrofísica catalana que posee uno de estos "*conos de Apolonio*" de madera, pude conocerlos y me fue más fácil rastrear su existencia, dado que antiguamente en casi todos los colegios había uno.

Figura 4

A raíz de la proyección de la película y de la aparición, en dos escenas, del cono que había construido la protagonista Hipatia, un estudiante de matemáticas, pidió a través de un foro de torneros de madera en Internet[2], que si alguien sabía donde se podría comprar un objeto como ése, o si alguien era capaz de hacerlo, porque llevaba mucho tiempo buscándolo y no lo encontraba en ningún sitio. A raíz de esa intervención en el foro se sucedieron los comentarios e hipótesis técnicas de su construcción. Yo simplemente quedé fascinado de la sencillez formal de la pieza y de su potencia estética como elemento decorativo e instructivo. Así que un día de camino al taller, sopesé la idea de hacer un intento para ver las dificultades técnicas y me puse manos a la obra. Y conseguí hacerlo correctamente en ese primer intento, pese a que técnicamente es una pieza muy difícil de hacer, a la par que laboriosa. Todo esto ocurrió en el mes de diciembre del año 2009, y hasta hoy.

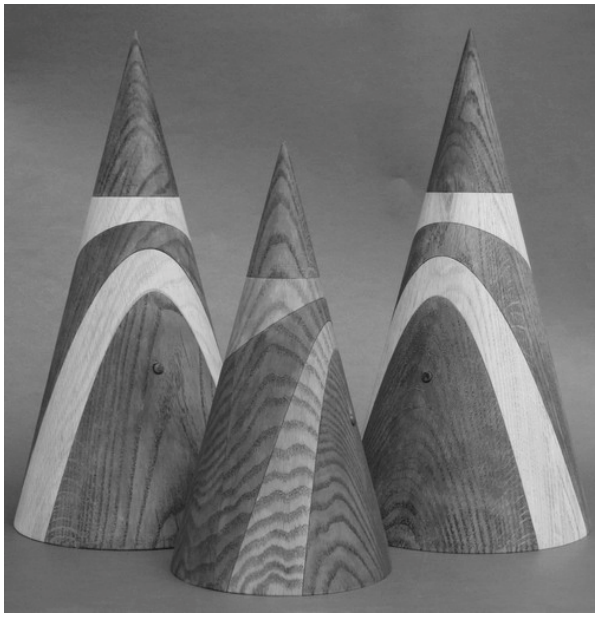


Figura 5a

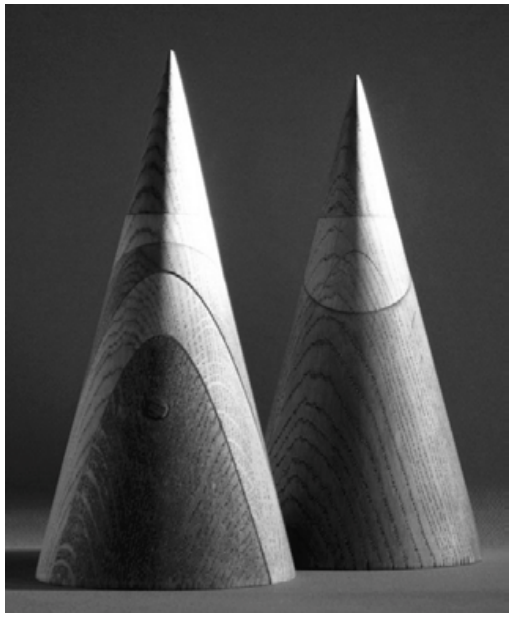


Figura 5b

Unas consideraciones sobre las maderas que empleo en los conos. Los conos son de una única madera, porque de ese modo mantienen el veteado desde la base hasta el vértice, lo que los hace estéticamente más vistosos. Van tintados el cuer-

[2] Foro de la Asociación Ibérica de Torneros Artesanos de Madera –AITAM–.

po del cono, el círculo y la rama de la hipérbola, y la parábola y la elipse quedan en madera cruda y van levemente enceradas con cera virgen de abeja. Pero sólo levemente, porque si después del lijado lo puliera en exceso, lo convertiría en un objeto demasiado escurridizo.

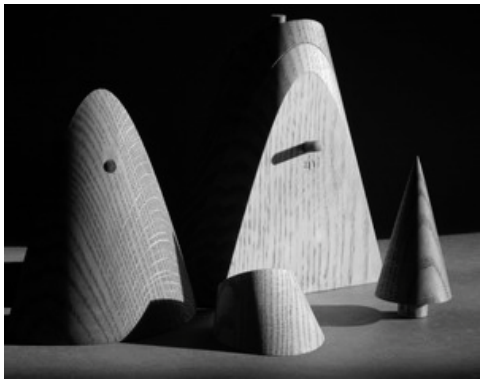


Figura 6a

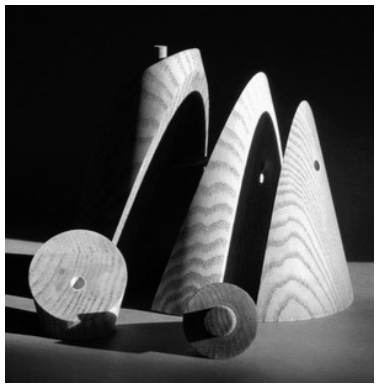


Figura 6b

Figura 6c

Utilizo principalmente las maderas de Roble, Castaño y Nogal. Los de madera de Castaño tienen un veteado algo más marcado que los de Roble, y son más ligeros de peso. Los de Roble tienen a favor, que es una madera mucho más dura y pesada y por lo tanto más resistente a los golpes. Un cono de Roble de 40 cms. de alto viene a pesar unos 3600 gramos (1300 gramos más que uno de Casaño). El nogal es mejor madera: grano más fino, veteado más homogéneo, mejor acabado, más densa. Pero para el Cono de Apolonio el roble y el castaño tienen a su favor que al presentar tonos más claros, el contraste entre la elipse y la parábola con el resto de piezas del cono es más llamativo, y lo mismo ocurre con el veteado, que por ser más flamígero, se hace más vistoso sobre una superficie cónica.

Sobre el montaje, todas las piezas van con espigas interiores. Al tornear el círculo, ya le dejo un espigo que une con la elipse a la que después hago un taladro para que se produzca el encaje. La elipse a su vez va sujeta de arriba a bajo a la parábola. Luego en otra espiga que va cogida a la parte trasera, van sujetas la parábola y la hipérbola. Esta espiga tiene un sentido de abajo arriba, de tal manera que cuando encajas las dos piezas las empuja hacia sí[3].

---

[3] Puede verse un video demostrativo en la página:
`http://www.artmadera.com/video-cono-de-apolonio.php`

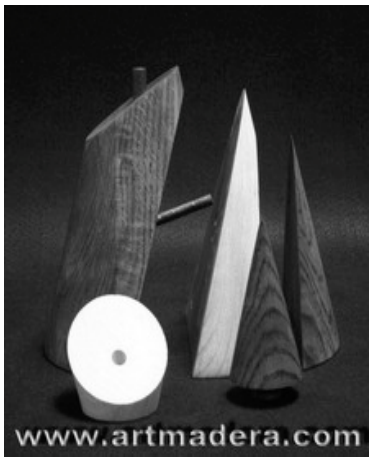


Figura 7a

Figura 7b

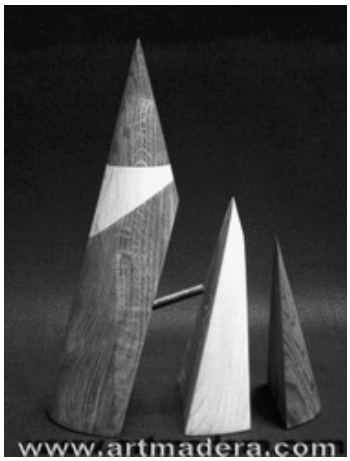


Figura 7c

Figura 7d

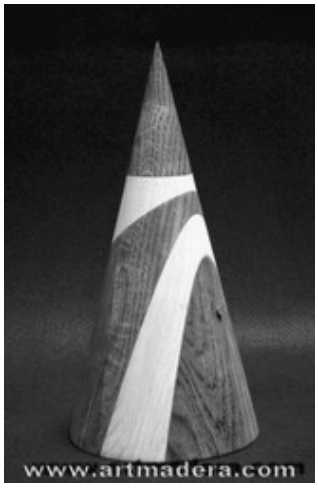


Figura 7e

Sería muy extenso explicar los pasos necesarios que hay que dar para elaborar un cono, ya que son muchos y muy precisos, tanto en su dibujo como a la hora de su torneado. Apuntar brevemente a modo de ejemplo, el hecho de que a la hora de su torneado se han de combinar varios factores como las dimensiones del cono, las revoluciones por minuto en que se trabaja esta pieza, y el avance manual de la gubia; si al eje de giro le aplicas mil revoluciones por minuto, nunca mantiene la misma velocidad de giro una forma cónica en ninguna de sus partes, ya que se

multiplica en la base y se va reduciendo paulatinamente según llegas al vértice. Luego está el retorneado final, que te obliga a que los cálculos iniciales sean exactos para que las secciones cónicas mantengan los ángulos correctos tras el retorneado final….. Lo dicho, ¡un trabajo artesanal!

Nota: Para conocer pormenores del taller o del trabajo puede visitarse la web: `www.artmadera.com`

Reseña de libros

CAPÓ DOLZ, MIGUEL: *Juega con los números* (156 págs,). ISBN: 978-84-329-2062-2. Ediciones CEAC. Grupo Planeta. Barcelona, 2010.
www.editorialceac.com

El autor, Licenciado en Matemáticas y Profesor de Secundaria, ha publicado ya otros libros de juegos matemáticos y de ingenio, tanto para niños como para adultos. Su colección mas conocida, "El país de las mates", ha sido editada en España y en Méjico.

Este nuevo libro contiene una recopilación de 200 juegos matemáticos de ingenio, cuyo nivel de dificultad es muy variado, desde muy simples a los que requieren aguzar el ingenio, pero ninguno requiere conocimientos matemáticos especiales.

Y por si el lector se atasca en el proceso de resolución de algún juego, en las páginas finales se ofrecen las soluciones de todos los juegos, pues muchos de ellos son de tipo acertijo.

Los juegos propuestos son variadísimos, entre otros: cuadrados mágicos, torres numéricas, Masterminds, Sudokus, serpientes numéricas, colecciones de números que guardan una disposición geométrica determinada, frases a completar, sentencias lógico-matemáticas a completar, etc.

La descripción de los juegos es muy clara y elegante. La mayoría de ellos incluyen una, o más, figuras, que ayudan a abreviar los enunciados de los juegos propuestos.

Casi todas las soluciones, que ocupan aproximadamente la segunda mitad del paginado total, incluyen una figura, que ayuda a entender la respuesta de un golpe de vista.

La edición muy cuidada, con cubierta en colores y tamaño de letra suficientemente grande, apto para lectores con dificultades de visión.

El libro no va dirigido a lectores de una determinada edad o nivel de conocimientos, sino más bien para todos los públicos. Como se indica en la cubierta, "un libro divertido para toda la familia" (no embrutecida por ciertos programas televisivos).

Eugenio Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el Boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` ,o bien en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

De otro modo, también pueden enviarse dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86 y 87.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025–0006–24–1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia.*