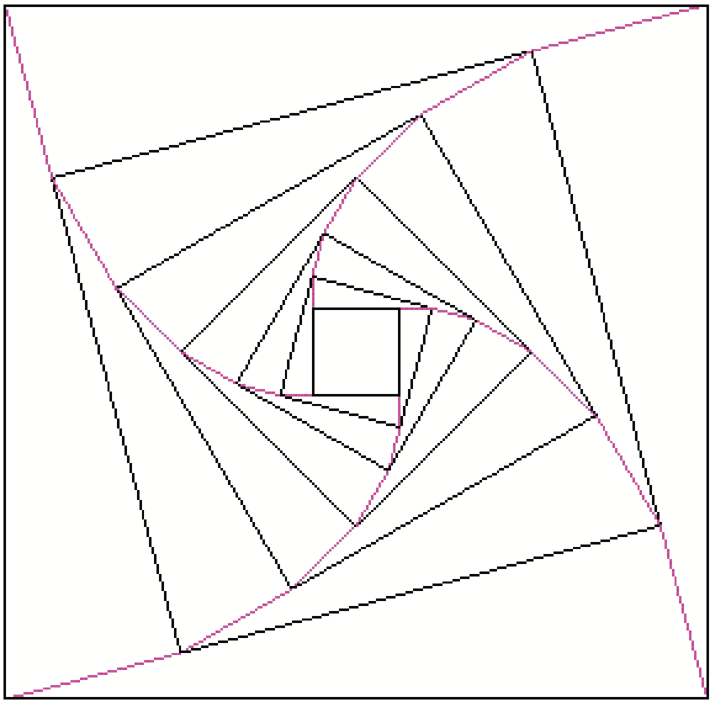
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 86
OCTUBRE DE 2010

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando y Eugenio Roanes Lozano

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

Página web de la Sociedad "Puig Adam":
`http://www.sociedadpuigadam.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

XXVIII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Como cada año, desde 1983, nuestra Sociedad y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, han celebrado su *Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas,* que en 2010 ha tenido lugar por vigésimo octava vez.

El Concurso de este año, convocado en nuestro Boletín nº 84 (en el que aparecen las Bases), se celebró en la mañana del sábado 12 de Junio de 2010. Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en el mismo lugar.

La concurrencia, fue parecida a la de años anteriores: 86 alumnos que, según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 7 puntos.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de enhorabuena a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a todos los que han contribuido al éxito del Concurso.

Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

NIVEL I (3º ESO)

1. **Ander Martínez de la Orden.** IES Ramiro de Maeztu.
2. **Lucas Maraj. IES Gaspar Sanz** (Meco).
3. **Jaime Ferrer Velasco.** IES Sos Baynat (Comunidad Valenciana)
4. **Izar Alonso Lorenzo.** IES Diego Velázquez (Torrelodones)
   y **Heng Xuan Ying Xu.** IES León Felipe (Getafe)

NIVEL II (4º ESO)

1. **Lorenzo Esteban de la Iglesia.** Colegio Fray Luis de León.
2. **Federico Espósito Bacigalupo.** Colegio Alemán.
3. **Antonio Mejías Gil.** Colegio Padre Manyanet.
4. **Sofía Lescano Carroll.** Liceo Frances.
5. **Mateo Galdeano Solans.** IES La Estrella.

NIVEL III (1º Bachillerato)

1. **Juan Martínez Olando.** Colegio Santa María del Pilar.
2. **Aitor Alonso Lorenzo.** IES Diego Velázquez.
3. **Daniel Henry Mantilla.** Liceo Frances.
4. **Kostadin Ivanov Kostadinov.** IES Ramiro de Maeztu.
5. **Diego Peña Castillo.** Colegio Santa María del Yermo.

Nuestra enhorabuena a todos los premiados, al resto de los participantes y a los padres y profesores que los han preparado y animado a participar.

Finalmente, mostrar nuestro agradecimiento a la Profesora Almudena Mejías, esposa de nuestro Presidente, por tomar las fotos que aparecen en esta crónica.

Víctor Manuel Sánchez y Joaquín Hernández

Problemas propuestos en el XXVIII Concurso

NIVEL I (3º de E.S.O.)

Problema 1º

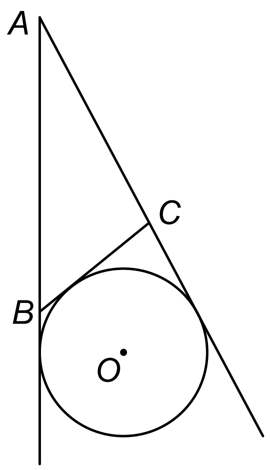
Consideremos en un círculo dos diámetros perpendiculares entre sí. Con centro en un extremo de uno de ellos trazamos un arco que pasa por los extremos del otro diámetro. Calcula el cociente entre el área de la región mayor y el área de la región menor en las que este arco divide al círculo.

Problema 2º

Los dígitos de un entero n de cuatro cifras son cuatro enteros consecutivos que están en orden decreciente cuando se lee de izquierda a derecha. ¿Cuál es la suma de todos los restos posibles de la división de n entre 37?

Problema 3º

En la figura se observa un triángulo ABC y una circunferencia de centro O tangente al lado BC y a las prolongaciones de los lados AB y AC. Si el ángulo en A es de 22º, calcula el valor del ángulo $B\hat{O}C$.



Problema 4º

El director de una banda de música observa que si pone a todos sus músicos, que son más de 40, formando el mayor cuadrado posible, le sobran 5 músicos, pero, en cambio, si los pone en disposición rectangular, con 7 filas más que columnas, puede colocarlos a todos. Calcula el número de músicos de la banda.

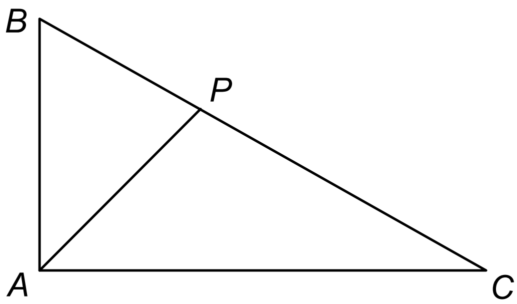
NIVEL II (4º de E.S.O.)

Problema 1º

Encuentra razonadamente todas las soluciones enteras de la ecuación $x! + 24 = y^2$

Problema 2º

En el triángulo rectángulo *ABC*, sea *P* el punto común a la hipotenusa *BC* y a la bisectriz del ángulo Â. Si $AP = 20\sqrt{2}$, calcula la suma de los inversos de las longitudes de los catetos.

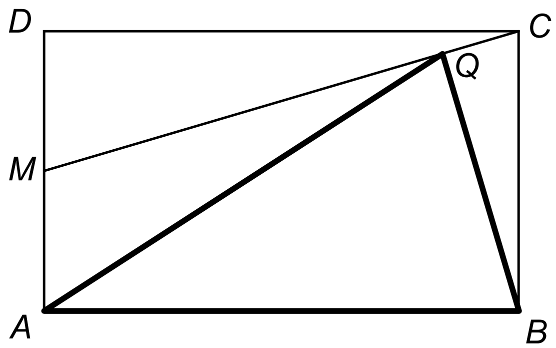


Problema 3º

Sea *n* un entero positivo. Demuestra que el máximo común divisor de los números $(3n – 1)$ y $(2n – 3)$ es múltiplo de 7 si al dividir *n* entre 7 se obtiene de resto 5 y que en cualquier otro caso, $(3n – 1)$ y $(2n – 3)$ son primos entre sí.

Problema 4º

En el rectángulo *ABCD*, sea *M* el punto medio del lado *AD* y *Q* el punto del segmento *MC* tal que *BQ* es perpendicular al segmento *MC*. Demuestra que el triángulo *AQB* es isósceles.



NIVEL III (1º de Bachillerato)

Problema 1º

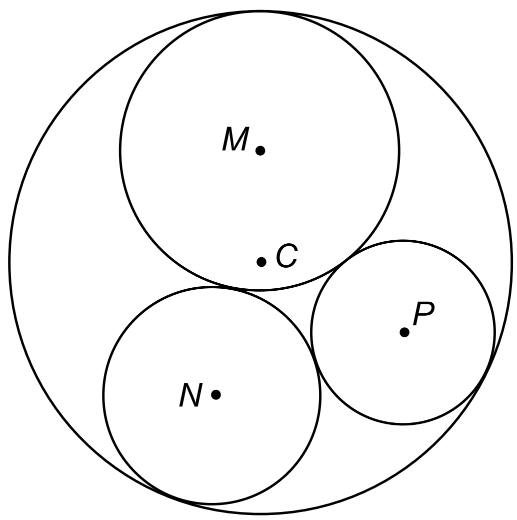
Encuentra todos los enteros positivos *m* y *n*, con *n* impar, tal que $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$.

Problema 2º

En el triángulo *ABC* con *AB* = 6, *BC* = 4 y *AC* = 3, las bisectrices interior y exterior del ángulo Â cortan a la recta *BC* en los puntos *P* y *Q*. Calcula el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo *APQ*.

Problema 3º

En la figura observas tres circunferencias de centros, *M, N* y *P*, tangentes exteriores dos a dos y otra circunferencia de centro *C* tangente a las tres y que las contiene. Demuestra que los triángulos *CMN, CMP* y *CNP* tienen todos de perímetro 2*r*, siendo *r* el radio de la circunferencia de centro *C*.



Problema 4º

Una persona visita el Casino de juego en las ciudades por las que pasa. Destina 20 € en cada visita como cantidad máxima a perder. Lo hace en la ruleta a PAR-IMPAR (con probabilidad 1/2 de ganar en cada jugada). Procede así: Apuesta sus 20 € y si pierde se retira a pasear. Si gana, apuesta los 40 € y si los pierde se retira a pasear, pero si vuelve a ganar se juega 60 de los 80 € que ha reunido. Ahora, si gana, se retira con los 140 € que tiene y si pierde está como al principio, con 20 €. Así procede hasta que o bien pierde los 20 € o bien sale con 140 €. ¿Cuál es la probabilidad de salir del Casino con 140 €?
Explica si, a la larga, esta persona ganará o perderá dinero.

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 86 (Octubre 2010)

Interactive Geometric Constructions in the Virtual Space

Heinz Schumann
University of Education Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

Abstract

Skills in the generation of geometric constructions using analogue and/or digital tools are just as important as skills in the common arithmetic, numeric and algebraic algorithms as part of the methodological competence taught in general mathematical instruction. Geometric constructions are both a mathematical subject in their own right and a precondition for problem solving in the geometry classroom. The introduction of dynamic geometry systems brought about an enhancement of the method of construction in synthetic geometry of the plane. Adequate three-dimensional constructions, on the other hand, were impracticable except as mental constructions; for visualization, they had to be reduced to practicable constructions in the plane using the methods of descriptive geometry. Now, however, the intuitive prototypic tool Cabri 3d, which was developed primarily for school geometry, opens up the possibility of performing three-dimensional constructions in the virtual space, which gives us a completely new access to synthetic spatial geometry. This contribution will therefore develop elements of a didactics of interactive geometric construction in a virtual space: definition of the concept of spatial geometric construction", discussion of basic spatial geometric constructions, an outline of the available options for spatial geometric construction in Cabri 3d, many exemplary applications, and an attempted preliminary didactic assessment.

Dedicated to Eugenio Roanes Macías,
at the occasion of his retirement.

Resumen

Las destrezas en la generación de construcciones geométricas haciendo uso de herramientas analógicas y/o digitales son tan importantes como las destrezas en la aritmética usual y en los algoritmos numéricos y algebraicos, como parte de las competencias enseñadas en la instrucción matemática general. Las construcciones geométricas son tanto una disciplina matemática por propio derecho como un prerrequisito para la resolución de problemas en la clase de geometría. La introducción de los sistemas de geometría dinámica trajo consigo una mejora de los métodos de construcción en geometría sintética en el plano. Por otra parte, las construcciones tridimensionales apropiadas eran impracticables, excepto como construcciones mentales; para visualizarlas, habían de ser reducidas a construcciones planas, usando métodos de geometría descriptiva. Ahora, sin embargo, la herramienta intuitiva prototípica Cabri 3d, que fue desarrollada inicialmente para geometría elemental, abre la posibilidad de realizar construcciones geométricas tridimensionales en el espacio virtual, proporcionándonos un modo de acceder a la geometría sintética en el espacio completamente nuevo. Así pues, esta contribución desarrollará elementos de una didáctica de la construcción geométrica interactiva en un espacio virtual: definición del concepto de "construcción geométrica espacial", discusión de construcciones geométricas espaciales básicas, un resumen de las opciones disponibles para las construcciones geométricas espaciales en Cabri 3d, muchos ejemplos de aplicaciones, y un bosquejo preliminar de evaluación didáctica.

1. Introduction

Although synthetic spatial geometry has been a mathematical and school subject since the time of Euclid, 3d constructions were possible only in the mind. For any real construction, an auxiliary two-dimensional drawing and a solution of the 3d problem were required (see Diagram 1) – usually in parallel projection in order to support spatial perception.

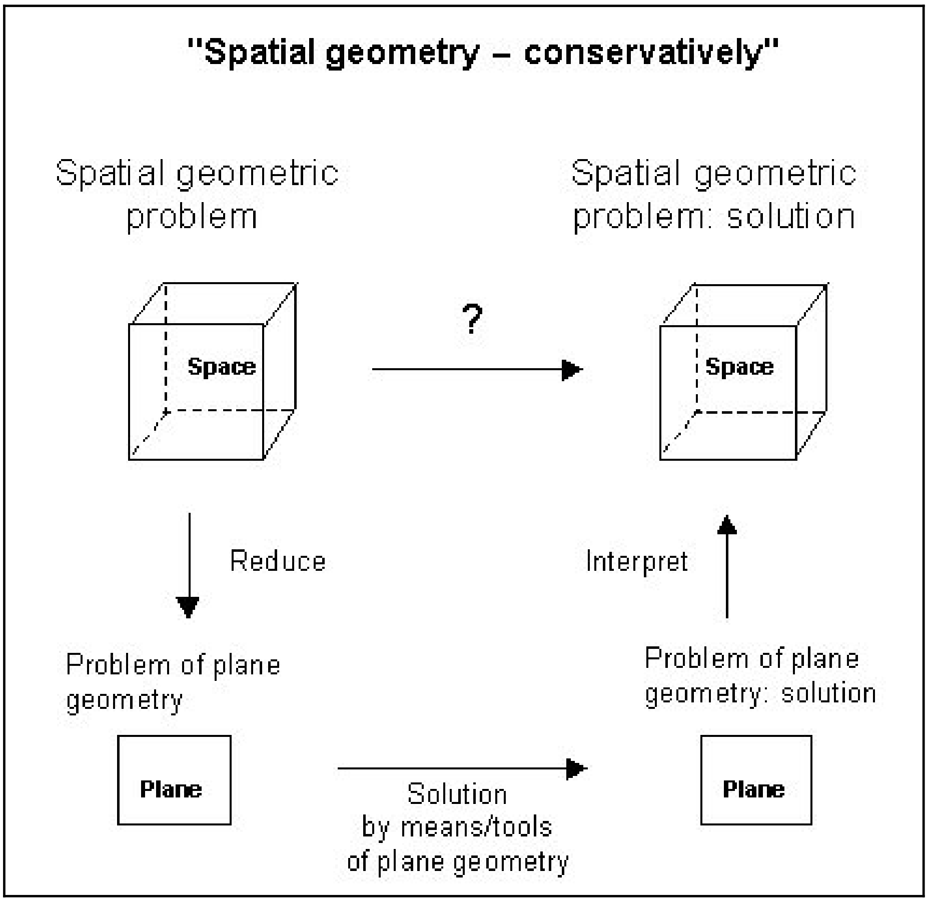


Diagram 1: *Conservative treatment of 3d construction problems*

Knowing this, it is understandable that 3d constructions were commonly neglected in school curricula – after all, students must be capable of using specific methods of descriptive geometry (see, e.g. Graf/Barner 1964) in order to solve 3d construction problems. Apart from the skills in spatial perception that are required, the manner of representation in drawings is not the same as learned in synthetic geometry in the plane. – In consequence, the time-consuming and difficult-to-manage three-dimensional physical models of 3d constructions as a rule were confined to very simple examples – although their real advantage is the possibility of a holistic view.

The solution to this problem is found in interactive construction in a specially provided virtual space using a tool that offers sufficient geometric and content-related sophistication and software ergonomy and also supports spatial perception (see Diagram 2). In commercial 3d-CAD systems, this manner of construction has been in practical use for some time. Students acting in the virtual environment of 3d computer games have practical experience in using virtual space and so should not be afraid to face them in the classroom. Of course, appropriate use of this tool requires some knowledge of spatial geometry, which may be provided by a competent teacher demonstrating and explaining the tool.

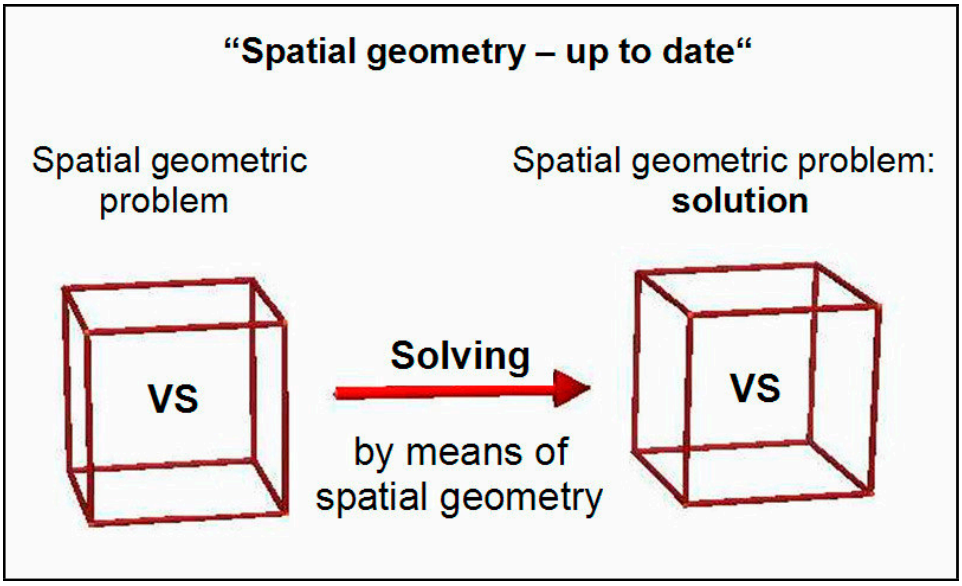


Diagram 2: *Up to date Treatment of 3d construction problems*

In this text, we shall use the concept of ‘virtual space’ to describe an appropriate parallel or central projection of the three-dimensional real Euclidean space represented in the system in the form of ‘world coordinates’, or a cuboid part thereof, onto the two-dimensional screen (which means that the descriptive geometry is hidden 'inside the screen'!). This virtual space is perceived as three-dimensional. The dynamic spatial geometry system Cabri 3d, Version 2.0, is a tool that gives us the following options:

– realizing 3d constructions on the computer screen with virtual depth
– visualizing 3d configurations by assigning them various object attributes and viewing them from all sides with the aid of the *Virtual Sphere Device*, i.e. by embedding configurations in a directly referenceable sphere,
– varying 3d configurations by distortion as in two-dimensional geometric constructions.

In the section 2, we are going to discuss our concept of spatial geometric constructions. Section 3 will present the key options for spatial geometric constructions in Cabri 3d, and some exemplary construction problems will be solved using Cabri 3d. Finally, we are going to present some didactic reflections. – We confine ourselves to the aspect of 3d constructions, not regarding extended facilities of Cabri 3d e. g. calculations. For a more general use of Cabri 3d see Schumann 2007.

2. Spatial geometric constructions

In contrast to two-dimensional geometric constructions, which are discussed from the mathematical view in the standard textbook "Theorie der geometrischen Konstruktionen" (Theory of geometric constructions, Bieberbach 1952), from the didactic view, e.g. in "Handbuch der Schulmathematik" (Manual of school mathematics, Wolff et al. 1966), and from the view of computer use, e.g. in "Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer" (School geometric construction, Schumann 1991) and in "Geometrie für die Sekundarstufe" (Geometry for secondary level, Holland 1996), a systematic presentation of spatial geometric construction is contained only in „Geometrie in Ebene und Raum" (Geometry in plane and space, Quaisser/ Sprengel 1989), as far as the author was able to find in the German-language literature on geometry. No comprehensive didactic theory has been developed yet for spatial geometric constructions, owing to their lack of practicability.

In the next paragraph, we are going to present a redundant list of elementary constructions. We shall not discuss the corresponding propositions of existence and uniqueness on which they are based, and we will leave out all special cases. Anticipatory to Section 3, Cabri 3d will be used for computer-graphic illustration or modelling of the constructions. (The original constructions were in colour; they are presented here in shades of grey with some loss of clearness).

Let us imagine a "construction space" as a model of the real Euclidean space in a synthetic interpretation. In Cabri 3d, this space is limited to a cuboid at whose edges the object parts that 'stick out' are clipped off. This means that a plane may be represented as a special hexagon, pentagon, trapezoid, parallelogram, rectangle, square, or triangle. In this space, we may select or generate a finite number of points which help us with the following "three-dimensional" constructions:

(1) Construction of a straight line through two points. (*Construction of a connecting line using a line ruler*)

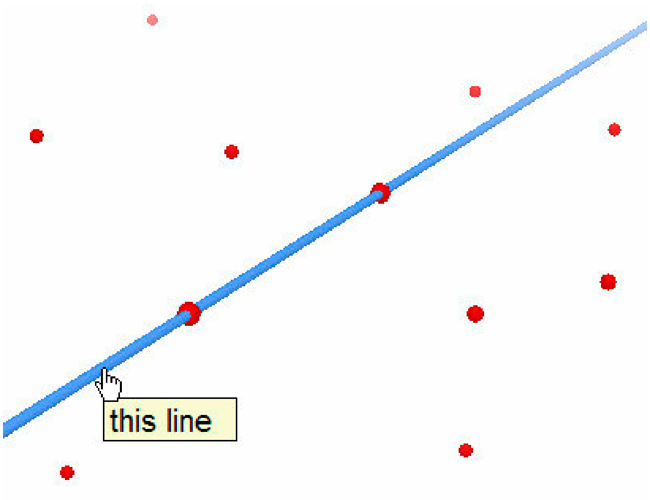


Fig. 1: *Line by two points*

(2) Construction of a plane through three points not located on a line.
(*Construction of a connecting plane using a plane ruler*)

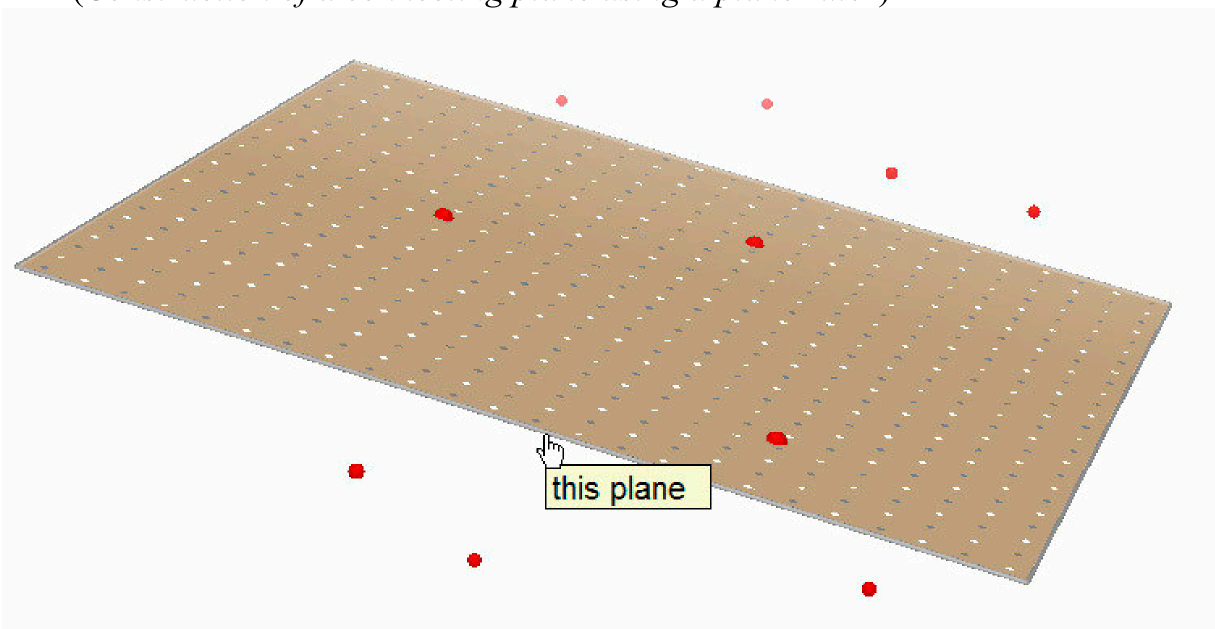


Fig. 2: *Plane by three points*

(3) Construction of a sphere around a centre point through a point of the sphere.
(*Construction of a sphere using a spherical compass*).

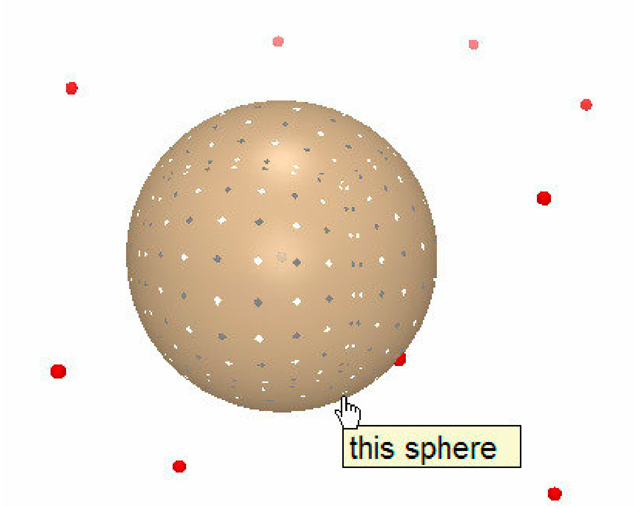


Fig. 3: *Sphere by centre and spherical point*

In the following constructions, new points are generated as objects of intersection in the construction space:

(4) Construction of the point of intersection of a straight line with a plane not parallel to that straight line. (*Construction of the point of intersection line/plane*)

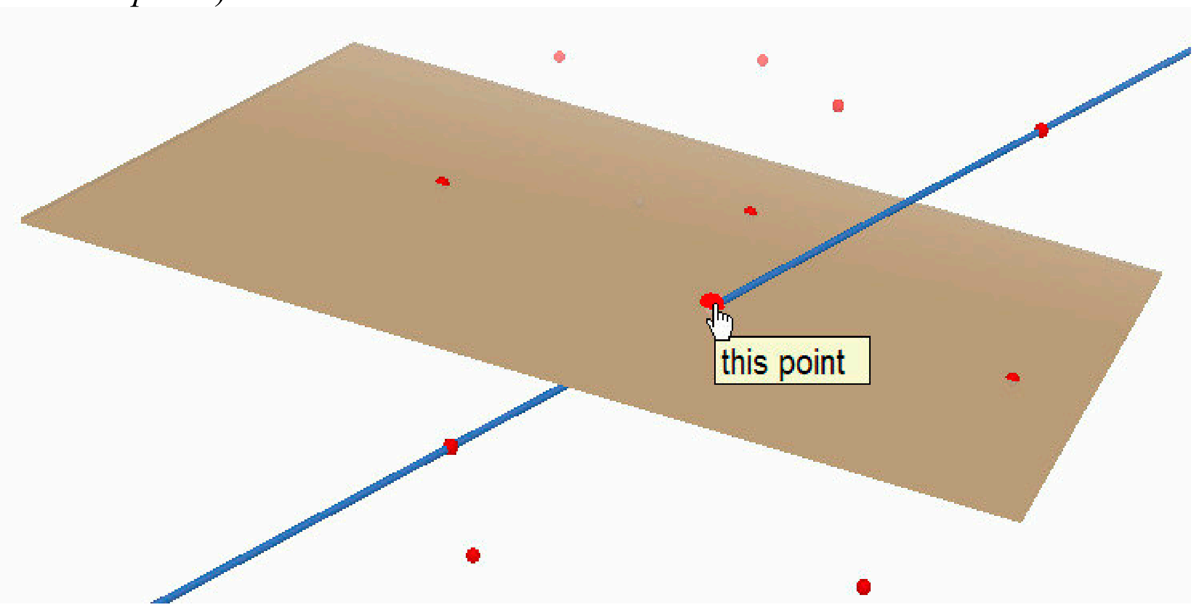


Fig. 4: *Point of intersection from line and plane*

(5) Construction of the points of intersection of a straight line and a sphere (*Construction of points of intersection line/sphere*)

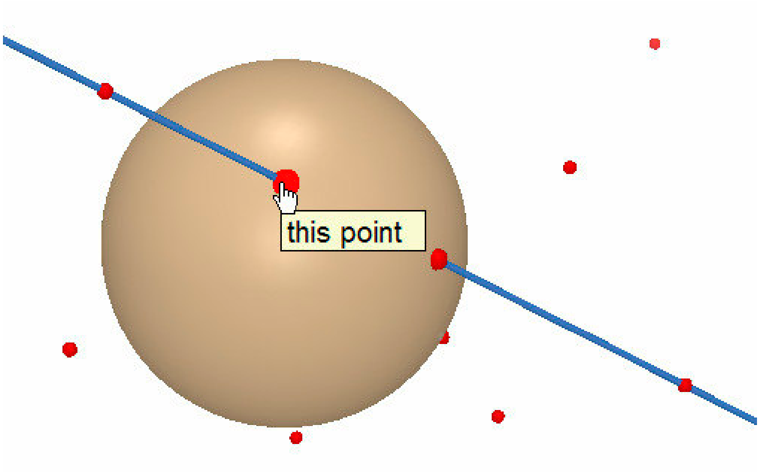


Fig. 5: *Points of intersection from line and sphere*

(6) Construction of the line of intersection of two non-parallel planes. (*Construction of the line of intersection plane/plane*)

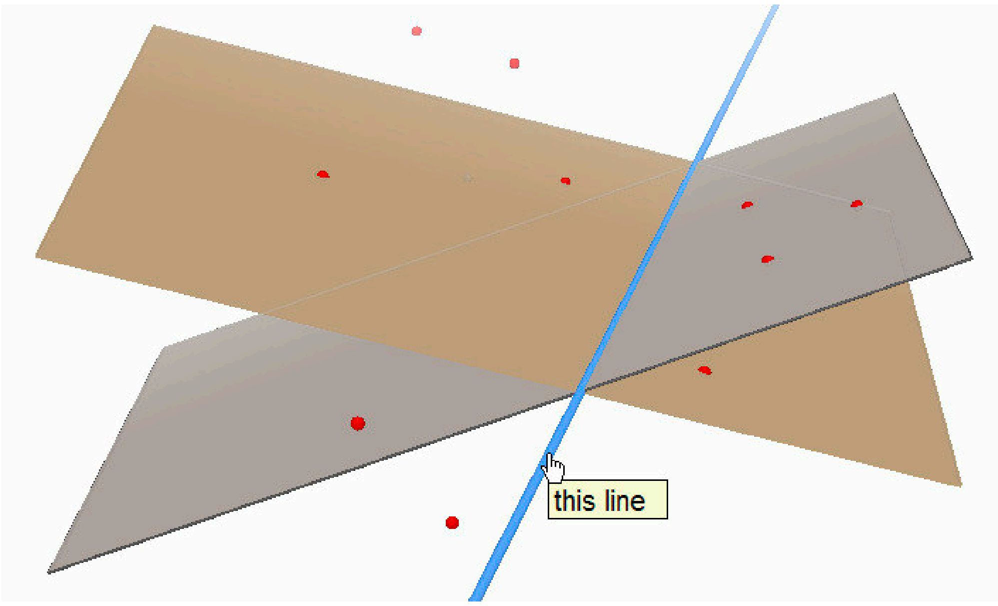


Fig. 6: *Line of intersection from two planes*

(7) Construction of the circle of intersection of a plane and a sphere. (*Construction of the circle of intersection plane/sphere*)

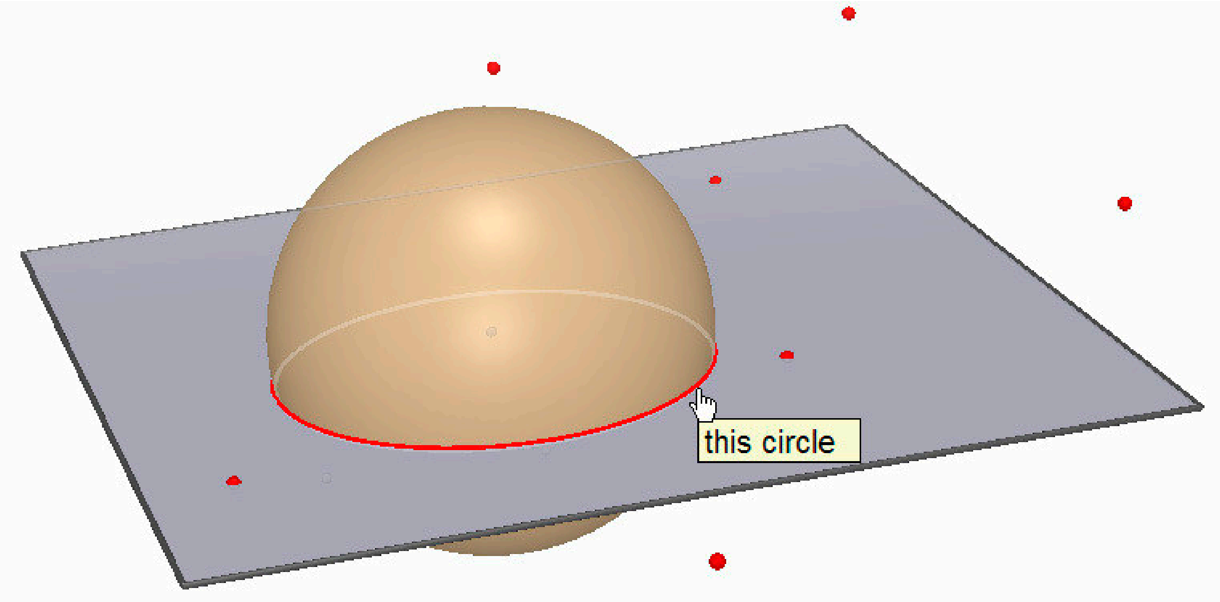


Fig. 7: *Circle of intersection from plane and sphere*

(8) Construction of the circle of intersection of a sphere with another sphere. (*Construction of the circle of intersection sphere/sphere*)

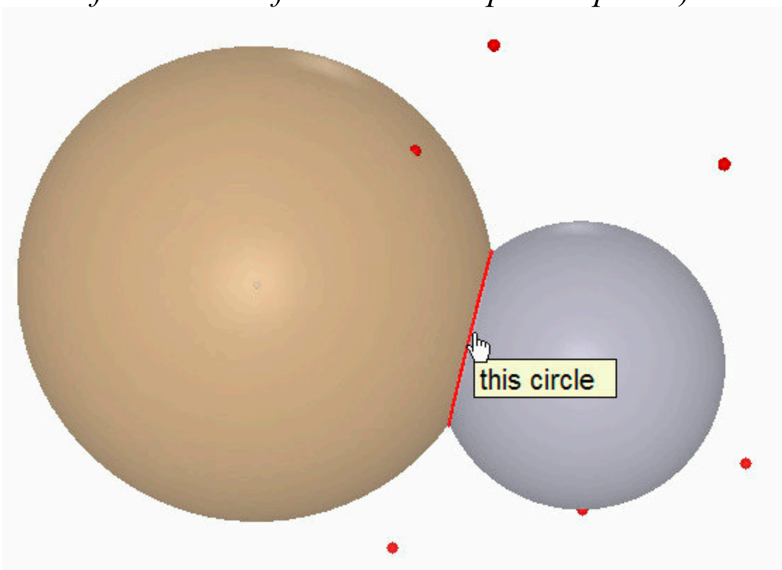


Fig. 8: *Circle of intersection from two spheres*

On the constructed objects, a finite number of points can be selected or generated as auxiliary points for further constructions.

In any given or constructed plane of the space, a finite number of points can be generated or selected for constructing the following “two-dimensional” constructions:

(9) Construction of a straight line through two different points. (*Construction of a connecting line on a plane using a line ruler*)

(10) Construction of a circle around a centre point and through a different point of that circle. (*Construction of a circle using a spherical circular compass*).

(11) Construction of the point of intersection of a line with another, non-parallel line.
(*Construction of the point of intersection of two straight lines*)

(12) Construction of the points of intersection of a line with a circle. (*Construction of the points of intersection line/circle*)

(13) Construction of the points of intersection of a circle with another circle. (*Construction of the points of intersection circle/circle*).

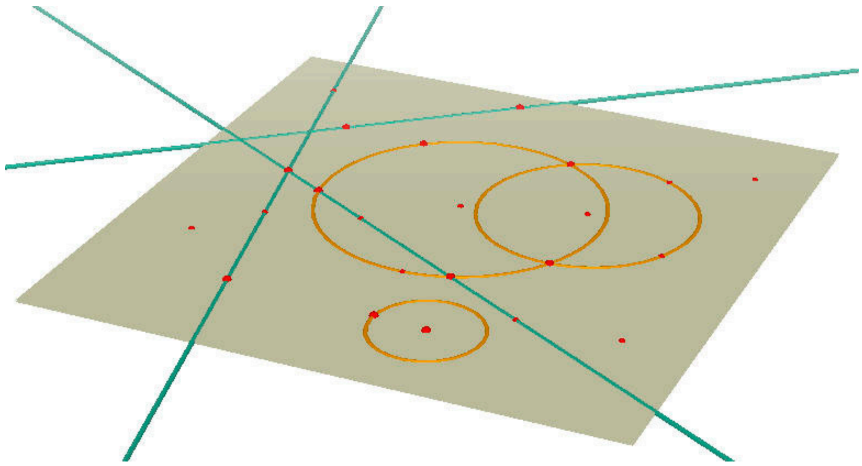


Fig. 9: *Elementary constructions in a plane*

Again, a finite number of points can be selected or constructed on the constructed two-dimensional objects as auxiliary points for further constructions.

We now can define the so-called “method of spatial geometric loci” depending on the tools to be applied:

To solve a construction problem in space with compass (circular or spherical compass) and ruler (line or plane ruler), a finite number of the construction steps (1) – (13) is applied to the objects involved in order to construct the required points as points of intersection of geometric loci (straight lines, planes, spheres). This is why this method of solution is known as “Method of Spatial Geometric Loci”.

Note: Apart from the more or less heuristic question of how a certain construction problem can be solved using the tools presented here, there is also the question of how to characterize problems that can be solved (in theory) using these construction tools. An analytical-geometric description of the solution to a given construction problem using the permissible tools in a 3d system of Cartesian coordinates will give us the analytical dependence of the coordinates of the desired points on the coordinates of the given points, which will also provide an analytical description of other given objects. Due to the intersection of objects with circles or spheres, the terms of the coordinates of the desired points may be square root terms of the coordinates of the given points, i.e. terms derived from the coordinates of the given points by means of the four basic arithmetic operations and by squaring the root. It is only for those such 3D construction problems for which this type of coordinate representation can be proved that a solution using the permissible set of tools does indeed exist.

The solution of construction problems is simplified by the so-called “basic constructions”, which can be reduced to the elementary constructions.
In a construction plane, the following constructive modules can be executed using the elementary constructions (9) – (13), or other elementary constructions:

Constructing the mid-perpendicular of two points
Constructing the centre of two points
Constructing the perpendicular to a line from a point
Constructing the perpendicular to a plane from a point of the plane
Constructing a parallel straight line through a point of a straight line
Constructing the bisectrix
Constructing a circle from three given points

In the construction space, further basic constructions are possible using the elementary constructions (1) – (8):

Constructing a plane from a point and a line

Constructing a plane from two non-skew lines
Constructing the point of intersection of three planes
Constructing the mid-perpendicular plane of two points
Constructing the centre of two points
Constructing the perpendicular to a plane in a point of that plane
Constructing the perpendicular from a point to a plane
Constructing a parallel plane through a point of a plane
Constructing the perpendicular plane to a line through a point
Constructing a circle around an axis through a point on the sphere
Constructing the bisecting plane between two (half) planes
Constructing a sphere from four given points
Constructing the points of intersection of two circles in a spatial position
Constructing the points of intersection of three spheres

We are now going to illustrate and explain these basic constructions.

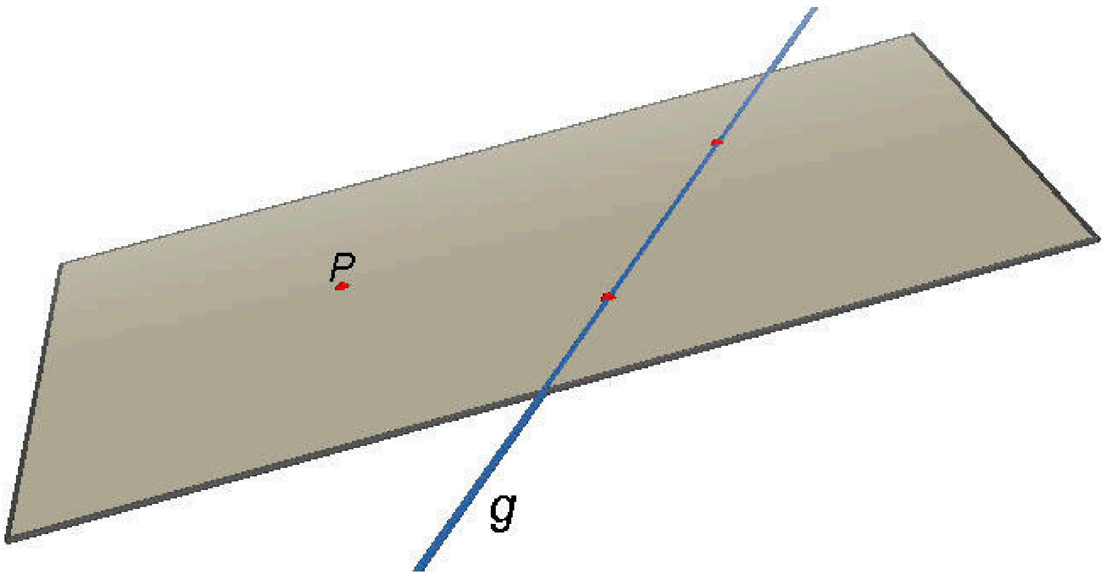


Fig. 10: *Plane from point and line*

Construction "Plane from a point and a line": We define two points on a line. According to (2), a plane can be constructed through three points.

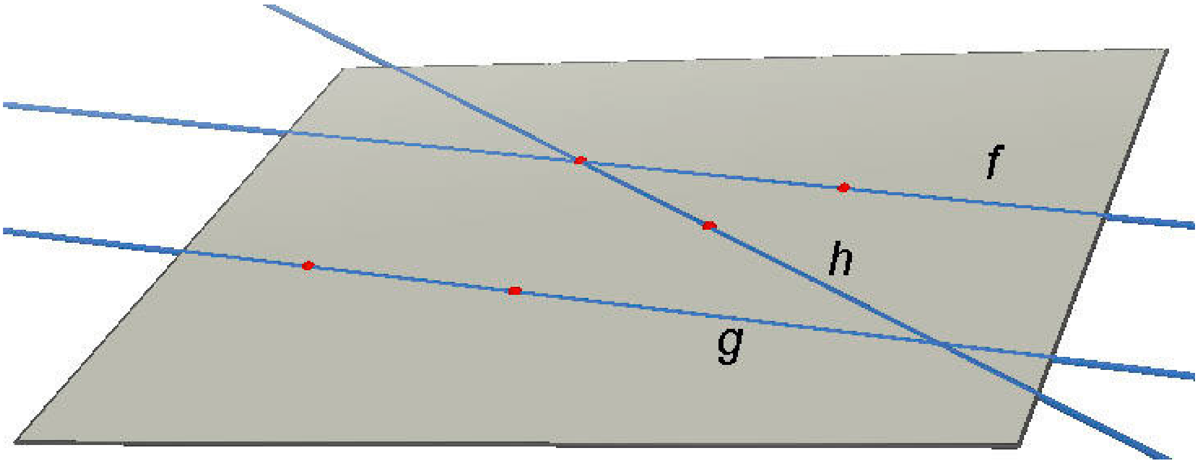


Fig. 11: *Plane from two non-skew lines*

Construction "Plane from two non-skew lines": Non-skew lines are located on one plane. After selecting appropriate auxiliary points on straight lines, an enthaltende plane can be constructed according to (2) both for intersecting and for parallel lines.

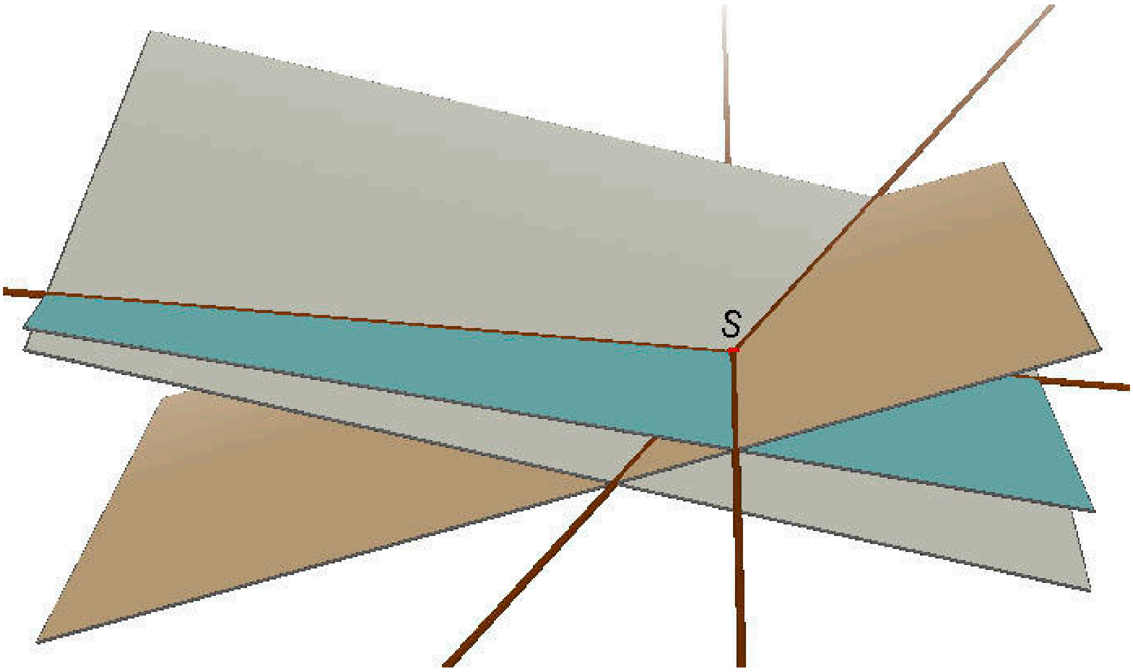


Fig. 12: *Point of intersection from three planes*

Construction “Point of intersection of three planes“: For two each of the three planes, one constructs the line of intersection according to (6). Then, a point of intersection for two each of these lines of intersection is constructed according to (11). These points of intersection are identical with the point which is common to all three planes.

Of the following three-dimensional basic constructions, several can be constructed analogous to the corresponding constructions using a circular compass and line ruler.

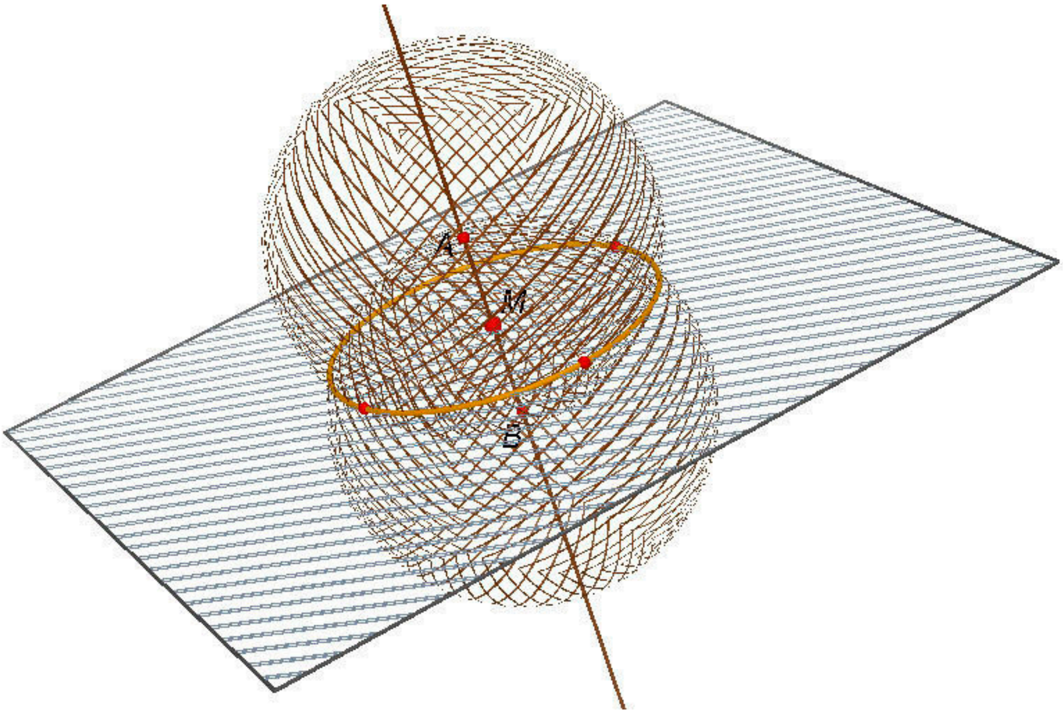


Fig. 13: *Mid-perpendicular plane from two points*

Construction “Mid-perpendicular plane of two points“: There are two given points. According to (3), we construct two spheres, each of which has its centre in one of the points. For the two spheres, we construct the sphere of intersection according to (8); the plane of that sphere can then be constructed according to (2). The point of intersection between the plane and the connecting line of the two points is the *centre point*.

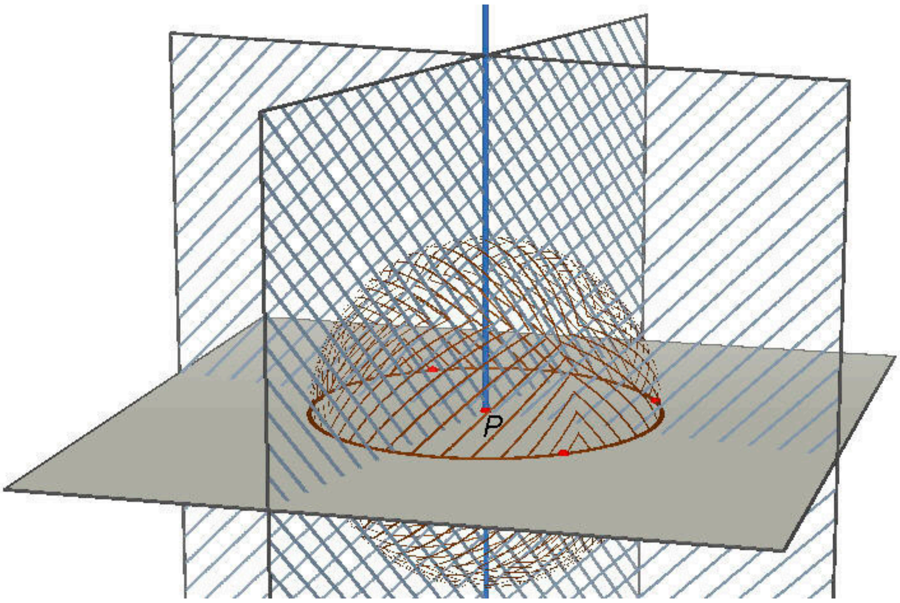


Fig. 14: *Perpendicular line to a plane in a point of the plane*

Construction "Perpendicular to a plane in a point of the plane": Around the given point, we construct a sphere through another, randomly chosen point according to (3). The sphere of intersection of the sphere with the plane is constructed according to (7). After this, the line of intersection of two mid-perpendicular planes of points on the circle will give us the desired perpendicular according to (6).

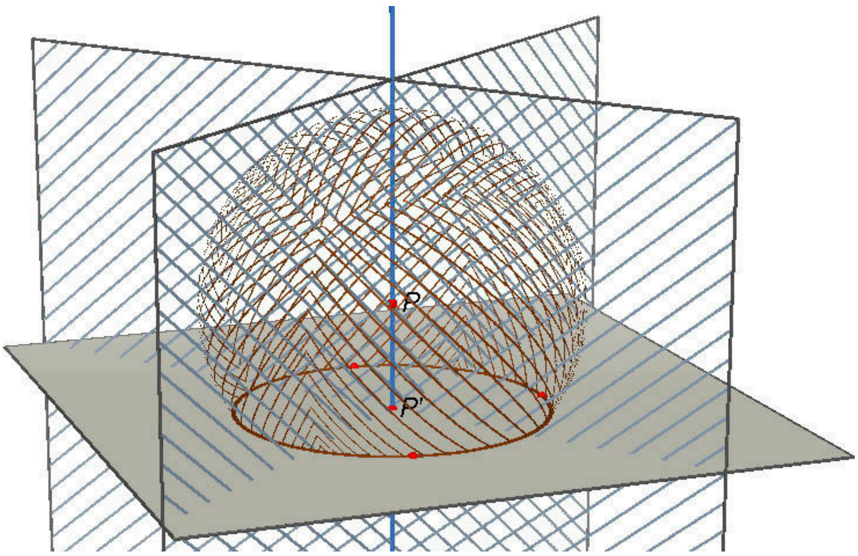


Fig. 15: *Perpendicular line to a plane through a point outside the plane*

Construction "Dropping the perpendicular line to a plane from a point": According to (3), we construct a sphere around the given point through a point of the given plane. The sphere of intersection is constructed according to (7), and two mid-perpendicular planes are constructed on it whose line of intersection according to (6) is the desired perpendicular.

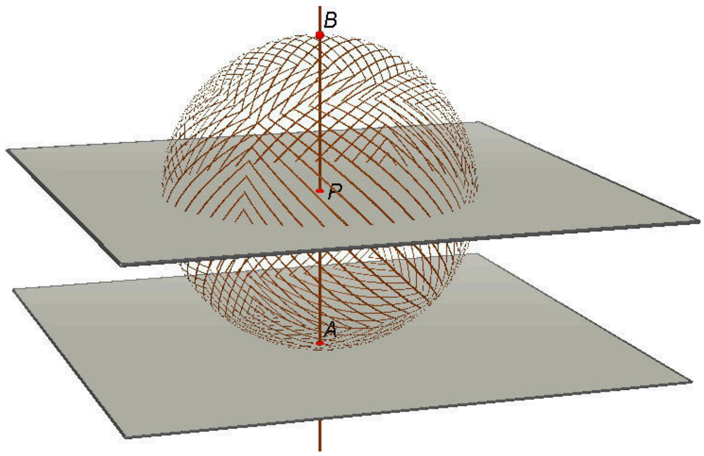


Fig. 16: *Parallel plane to a plane through a point*

Construction "Parallel plane through a point of a plane": We drop the perpendicular to the plane from the given point. The foot of the perpendicular is obtained according to (5). A sphere constructed according to (3) around the given point and through the foot of the perpendicular intersects with the perpendicular in another point according to (5). The desired parallel plane is obtained as the mid-perpendicular plane of that point and the foot of the perpendicular.

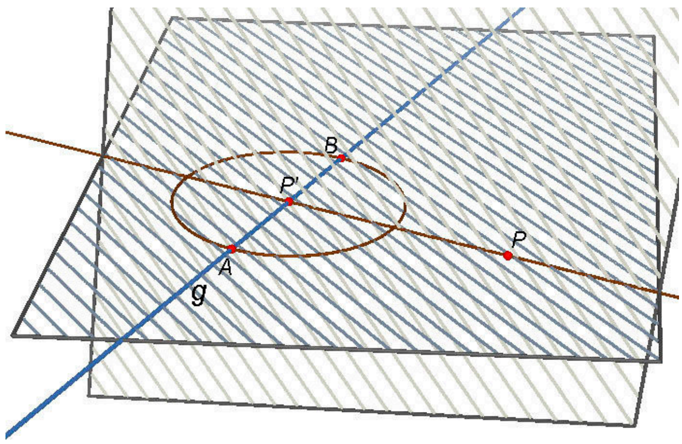


Fig. 17: *Perpendicular plane to a line from a point*

Construction "Perpendicular plane to a line from a point": First, the connecting plane is constructed from the given point and the given straight line. Then, we drop the perpendicular in that plane to a line from the given point. The perpendicular plane is the mid-perpendicular plane of the points of intersection with the given line of the circle around the foot of the perpendicular.

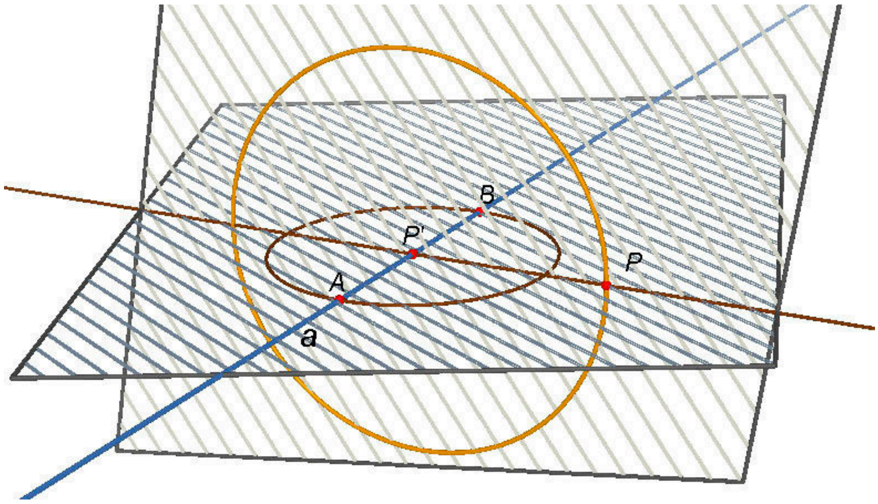


Fig. 18: *Circle around an axis through a point*

Construction "Circle around an axis through a point": We enhance the above basic construction by constructing, in the mid-perpendicular plane, a circle around the foot of the perpendicular through the given point.

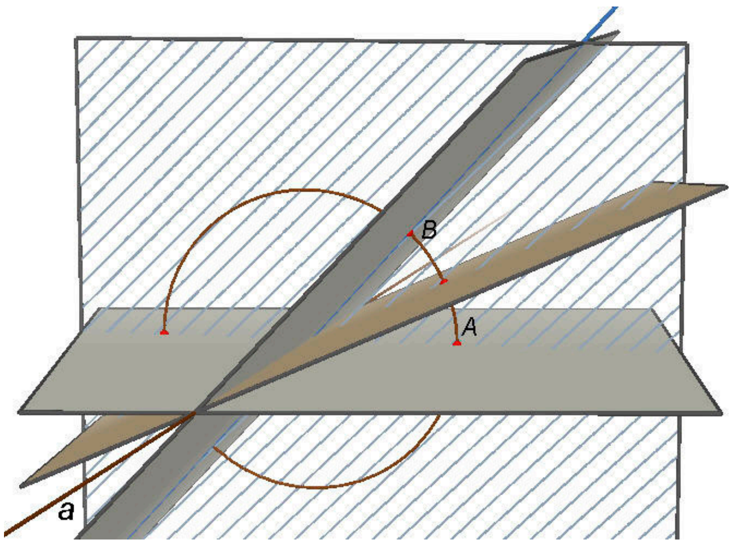


Fig. 19: *Bisecting plane between two (half) planes*

Construction "Bisecting plane between two (half) planes": We start by constructing the line of intersection of the two planes according to (6). This line is the axis around which we construct a circle through a randomly chosen point on one of the two given planes. The circle plane intersects with the other plane in a straight line. The mid-perpendicular plane of the point of intersection of this line with the circle and the original point of the circle is the bisecting plane.

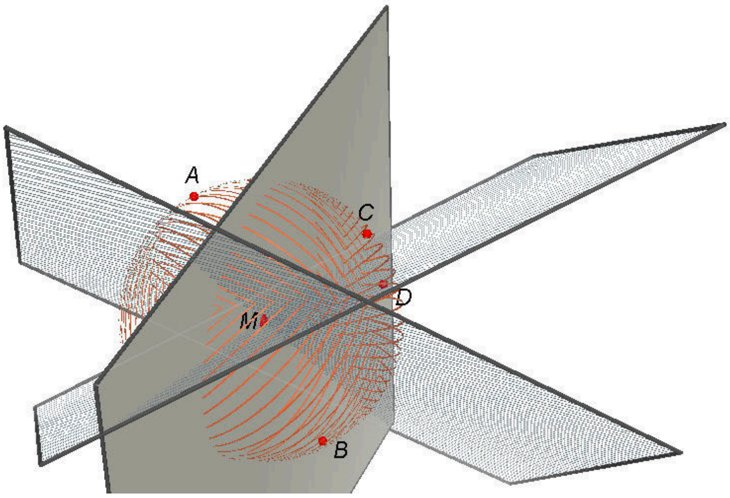


Fig. 20: *Sphere from four given points*

Construction "Sphere from four given points": The point of intersection of three mid-perpendicular planes, constructed randomly from two each of four points not located on a single plane becomes the centre of the sphere.

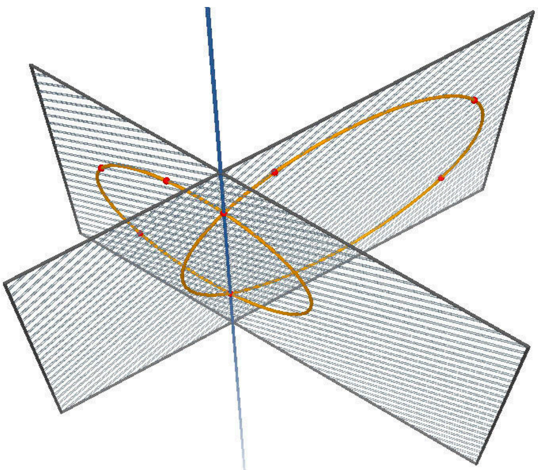


Fig. 21: *Points of intersection of two circles in a spatial position*

Construction "Points of intersection of two circles in a spatial position": Each of the circles defines a plane whose line of intersection intersects with the circles in the assumedly existing centre points of the circle.

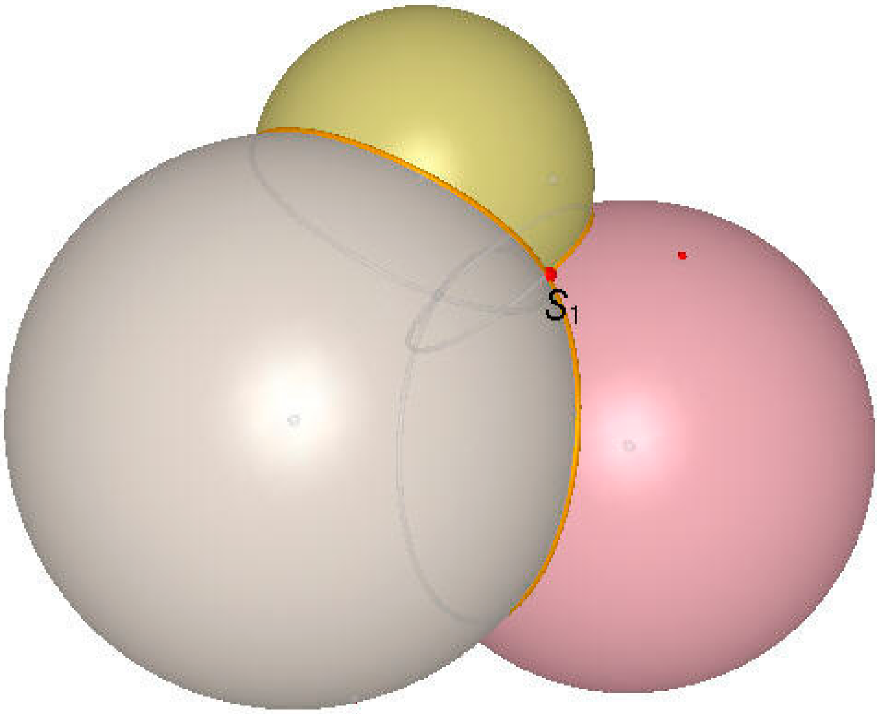


Fig. 22: *Points of intersection of three spheres*

Construction "Points of intersection of three spheres": For two each of the spheres, the circle of intersection is constructed. Any two of the three circles of intersection intersect with each other in two points. These points of intersection are the common points of the three spheres.

3. Constructive options and their applications in Cabri 3d

In the following, we are going to attempt a general outline of the constructive options offered by Cabri 3d. Some of the possibilities will be illustrated by selected constructions. We shall see that these options are far beyond our 'manual' capabilities.

3.1 Basic and elementary constructions in Cabri 3d

The first four toolboxes of Diagram 3 provide an outline of the available constructive options. Options concerning vectors are omitted.

The options are "polymorphic", i.e. an object is constructed according to the determining objects that were selected. For example, the option "plane" can be constructed from three points, or from a point and a line, or from two non-skew lines. The order in which the objects are chosen is not relevant.

For constructing simple two-dimensional objects like angles and polygons (including reflex polygons), we need first to construct *half lines* resp. *rays* und *line segments*, which are partial objects of the lines containing the segment. In the construction space, there are further objects which are partial objects of planes: *half-planes*, e.g. for constructing an edge angle, *polygons,* e.g. as faces of polyhedra, *angle sectors* for constructing three-dimensional corners, *circular arcs* etc. Cabri 3d comprises the necessary tools. Intersections of cylinder faces or conical surfaces with a plane generate conics, which are objects that can be referenced in Cabri 3d, i.e. they can be treated in virtual space (see Schumann 2005c). Cabri 3d is also capable of generating *conics* from five points on a plane (option "Conics").

Point …	**Line – Circle …**	**Plane–Sphere**	**Perpendicular - Parallel Line/Plane**
Point Intersection Point(s)	Line Segment Ray Circle Arc Conic Intersection Curve	Plane Triangle Polygon Half Plane Sector Cylinder Cone Sphere	Perpendicular Parallel Perpendicular Bisector Bisector plane Midpoint Measurement Transfer Trajectory

Diagram 3: *Elementary and basic constructions inside Cabri 3d*

We are now going to use the above construction tools. – Explanatory statements for the individual construction steps will be omitted as we are interested only in the phenomenological aspects of constructions in a virtual space.

The first points, or the first objects defined by points, are always generated starting from a reference plane. Spatial constructions project out of the reference plane. This involves the generation of points outside the reference plane, construction of the perpendicular in a point of the reference plane, construction of a perpendicular plane on a line, and construction of a circle around an axis on the reference plane.

Example 1: Euclid's construction of the perpendicular

We are going to start with Euclid's first three-dimensional constructions as presented in his first book on spatial geometry XI - XIII, i.e. construction of the perpendicular line to a plane from a point (Book XI, proposition 11).

Construction description using the Cabri 3D options:

1) Point in space: A (“Point“)
2) Point in plane: B (“Point“)
3) Point in plane: C (“Point“)
4) Line: BC (“Line“)
5) Ebene: ABC (“Plane“)
6) Perpendicular from A to line BC (“Perpendicular line“)
7) Point of intersection from this perpendicular with line BC: D (“Point of intersection“)
8) Perpendicular line in D onto BC (“Perpendicular line“)
9) Point on this perpendicular line: E (“Point“)
10) Plane: ADE (“Plane“)
11) Perpendicular line from A to line DE (“Perpendicular line“)
12) Point of intersection from this perpendicular with line DE: F (“Point of intersection“)

Possible abbreviation with option: “plane“ from point and line.

Fig. 23: *Euclid's construction of the perpendicular*

The construction generated according to the description in figure 23 (Fig. 24) can be viewed from all sides (Fig. 25). Varying of parameter objects, as we have done here by moving point A, is an experimental way of checking the correctness of a construction (Fig. 26). In principle, all constructions should follow the sequence of “Construction – Visualization – Variation“, but in this text we are going to focus on mere construction, with only a few illustrations to show the results of individual construction steps.

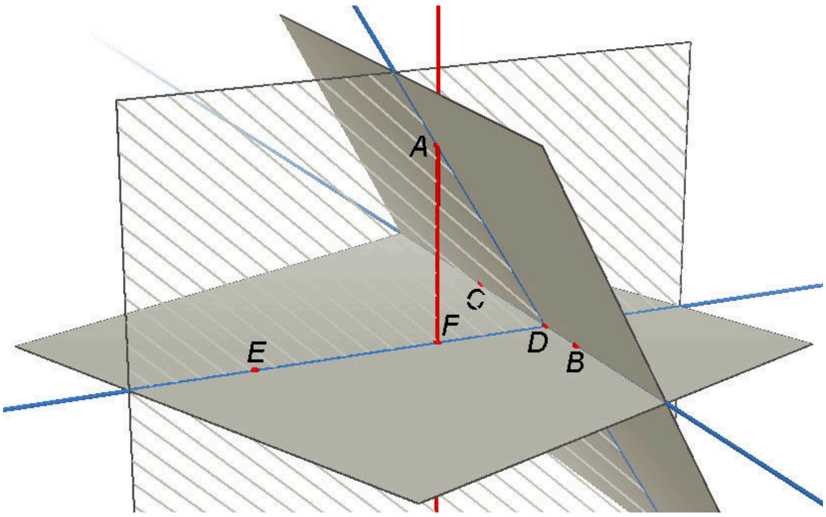


Fig. 24: *Construction (result)*

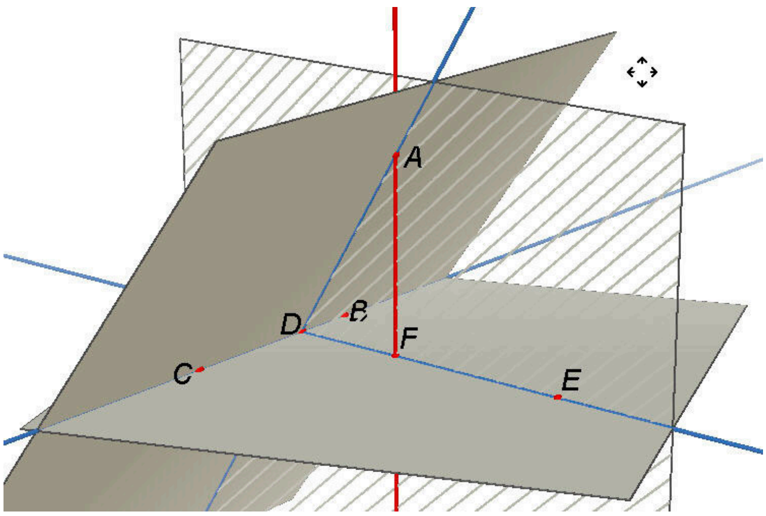


Fig. 25: *Construction (visualization)*

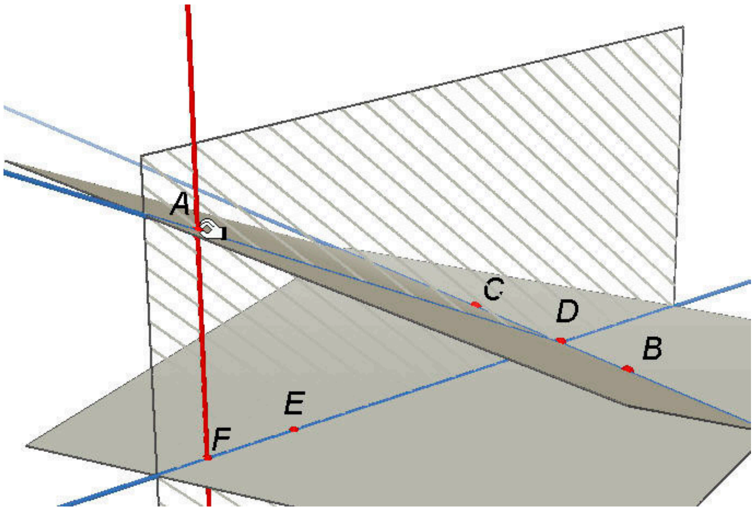


Fig. 26: *Construction (variation)*

Example 2: Perpendicular of two skew lines

As an exemplary positional problem, we are going to construct the perpendicular of two skew lines g, h. – One of the available options is the following: Through a random point G on g, we construct the parallel to h and the plane resulting from this parallel and h (Fig. 27). From a given point H on the line h, we drop the perpendicular on the plane to obtain the foot of the perpendicular I (Fig. 28).

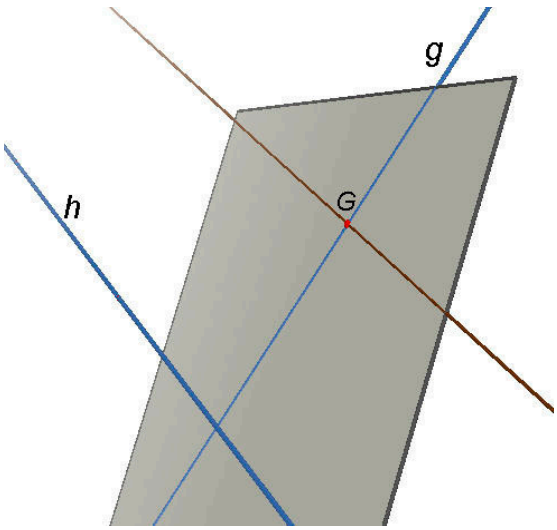


Fig. 27

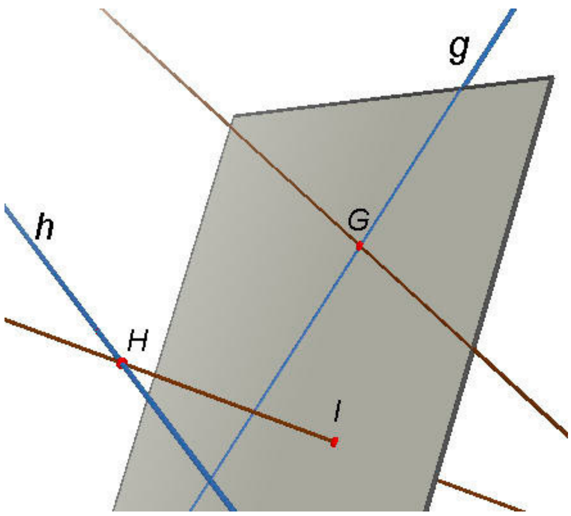


Fig. 28

By moving H, we can manipulate the position of I towards the straight line. This will give us an experimental solution for the desired points on g and h (Fig. 29). To construct these points, a parallel to h is drawn through I, which intersects with g in Lg (Fig. 30). The perpendicular in Lg perpendicular to the plane meets h in Lh. The connecting line of the two points is the line which is perpendicular to both g and h. The connecting line segment LgLh is the shortest distance between the points of the two lines.

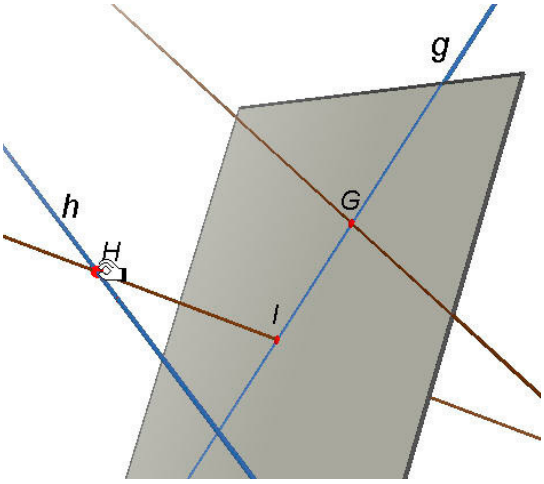


Fig. 29

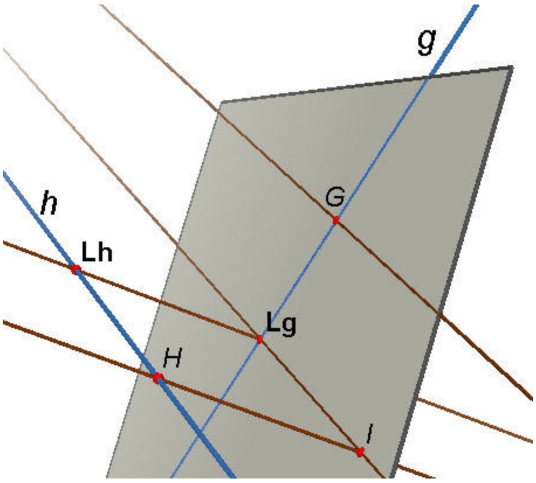


Fig. 30

<u>Example 3: Substitute for the orthocentre of the tetrahedron</u>

We construct a tetrahedron from four points not located on a plane. Only three faces are represented here in order to give us an inside view. We are now going to drop the perpendicular on the opposite tetrahedron face from each of the four corner points. Further, in the orthocentres of the triangular faces we are going to construct the perpendiculars perpendicular to the faces (Fig. 31). This will give us four pairs of parallel lines. For each of these pairs, we construct the “Mid-parallel“. We find that the four Mid-parallels intersect in one point. This fact of a point of intersection remains invariant if we vary the shape of the tetrahedron. The point of intersection H* (Monge's point) is a substitute for the non-existant orthocentre (Monge, 1746-1818); it is located on a line together with the centre point of the circumsphere M and the centre of gravity S of the tetrahedron; this line is the Eulerian line of the tetrahedron (Fig. 32). This example is an illustration of the the method of establishing a theorem by constructing and varying (for further examples see Schumann 2004a).

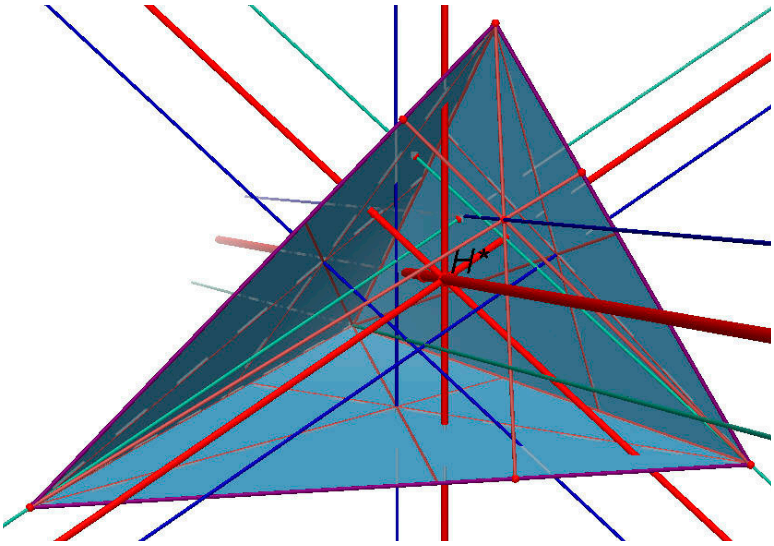


Fig. 31

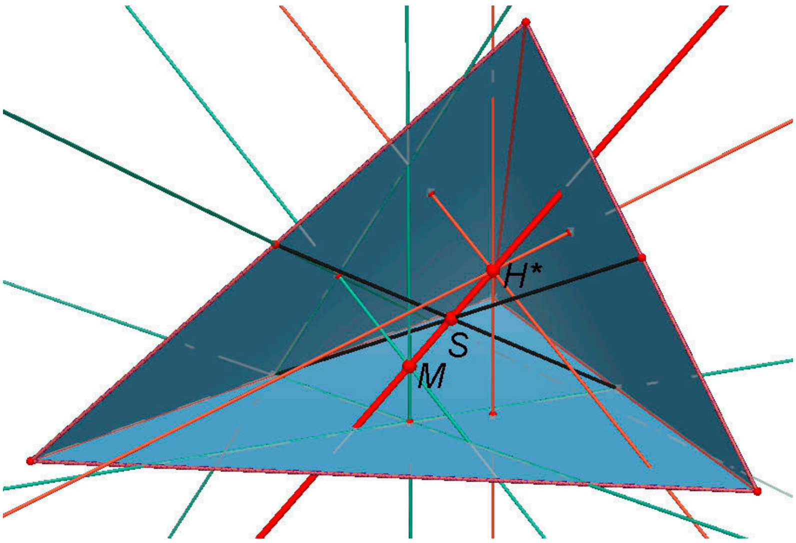


Fig. 32

Example 4: Regular octahedron with circumsphere and insphere

In analogy to Euclid's construction of an octahedron in his 13th book of elements, we construct, in a reference plane, the diametrical circle of a sphere and two orthogonal diametrical lines along with their points of intersection (Fig. 33). On this basis, we construct the sphere and, in its centre M, the perpendicular to the plane. The latter intersects with the sphere in the two missing corners of the octahedron. We draw six of the eight triangular faces and, from M, construct the perpendicular to one of the faces. The sphere around M through the foot of the perpendicular is the insphere of the octahedron (Fig. 34). Its size can be varied by moving the point that defines the circle radius.

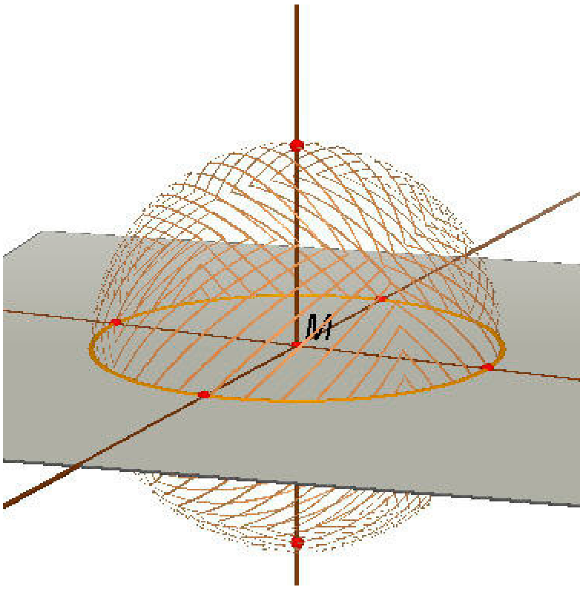


Fig. 33

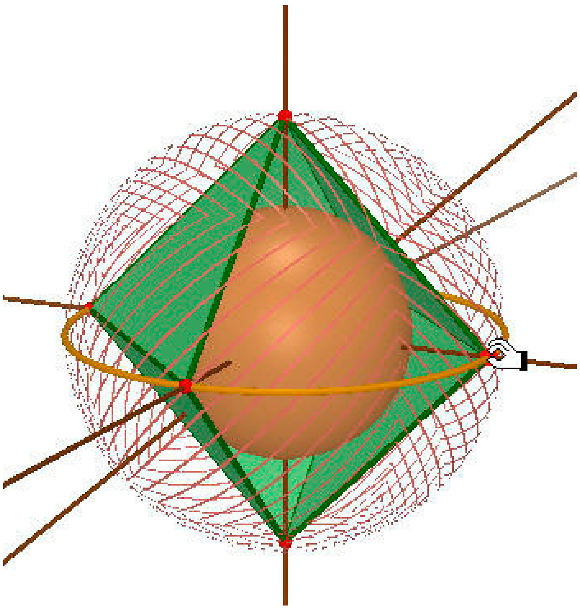


Fig. 34

<u>Example 5: Hexahedron of the circumsphere with quadrangular faces</u>

On a sphere, we define four points A, B, C, F as in Fig. 35. Through A, B, C through A, B, F, and through B, C, F we construct a circle each (Fig. 35). On the circle ABC, we define the point D, on the circle ABF, the point E, and on the circle BCF, the point G. The circles AED, CDG and EFG intersect (!) in the missing eighth corner H of the hexahedron (Fig. 36), whose quadrangular faces can now be drawn (Fig. 37, with one face missing to give us an 'open window' for a better view). Conclusion of the construction: A hexahedron of the circumsphere with quadrangular faces is defined by a three-dimensional corner of three inscribed tetragons.

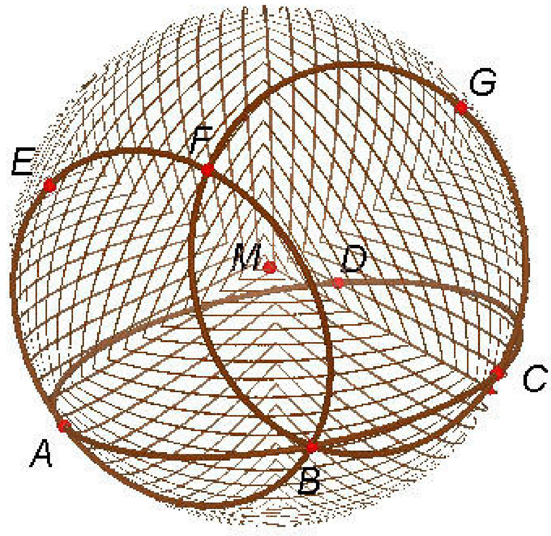


Fig. 35

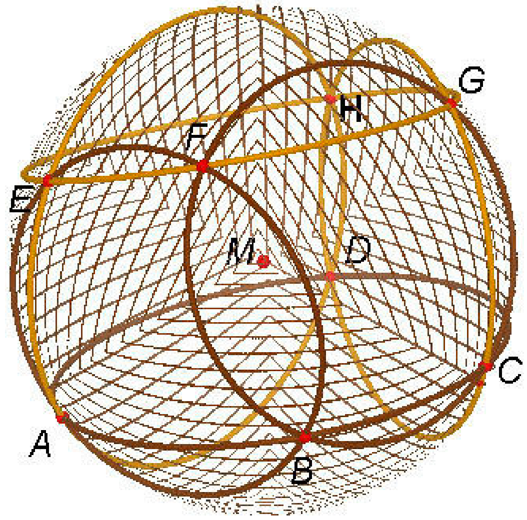


Fig. 36

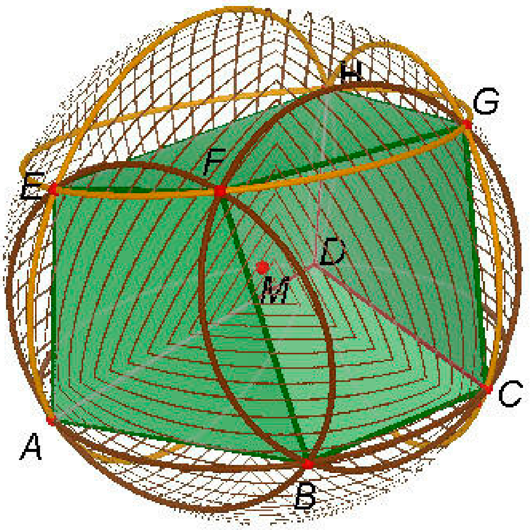


Fig. 37

Example 6: Special lines and points of a spherical triangle

We have three given points on a sphere A, B, C, which are not located on a plane. We construct the circles of intersection of the sphere with the planes formed by the sphere centre and two points each. These circles (great circles) form the spherical triangle ABC. The mid-perpendicular planes of two points each intersect with the sphere in the so-called "mid-perpendiculars" of the spherical triangle, because the great circles intersect with the central points of the circular arcs and are perpendicular to the latter (Fig. 38). These mid-perpendiculars intersect with each other in the point M. The perpendicular dropped from M on the plane through A, B, C intersects with that plane in M‘. M‘ is the centre point of the circumscribed circle of the planar triangle ABC, which circle is also the circumcircle of the spherical triangle (Fig. 39). In contrast to the planar triangle, the analogously constructed point of intersection of the mid-perpendicular M, the median S and the height H are not located on a great circle comparable to the Eulerian line of a planar triangle (Fig. 40).

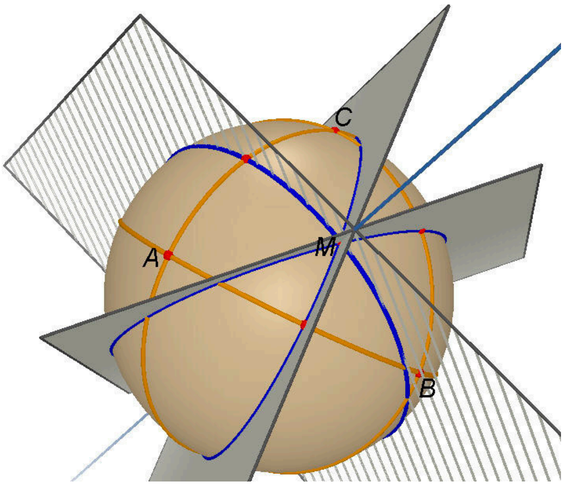


Fig. 38

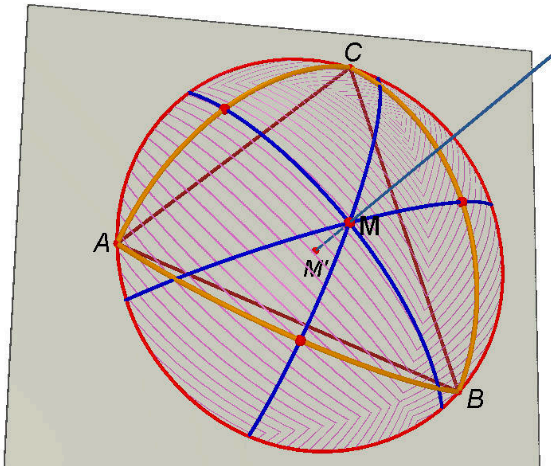


Fig. 39

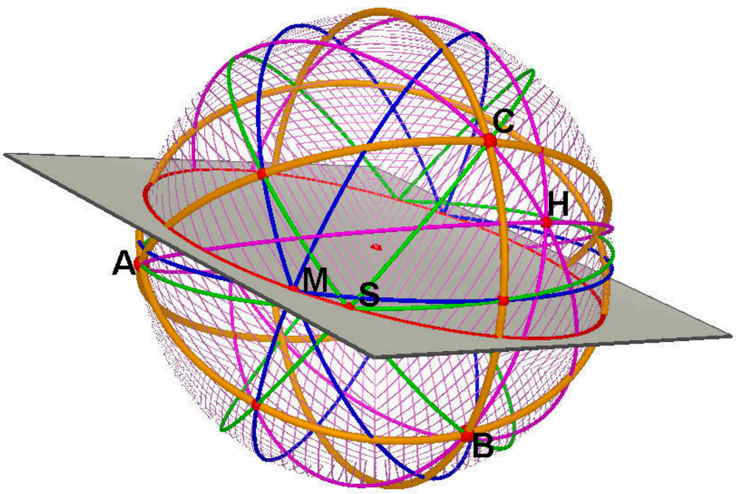


Fig. 40

Example 7: Regular tetrahedron constructed from 3 spheres

Also a further example of a three-dimensional analogy we are going to construct, in a plane parallel to the screen, an equilateral triangle according to Euclid's first construction. This is done by defining two points and drawing, in each point, a circle through the other point etc. (Fig. 41). This plane is now tilted backwards in horizontal position. Around each of the three corners of the equilateral triangle, we construct a sphere through another of the corners. The circles of intersection of two each of the three spheres intersect with each other in the vortex of the regular tetrahedron whose basis is the equilateral triangle (Fig. 42).

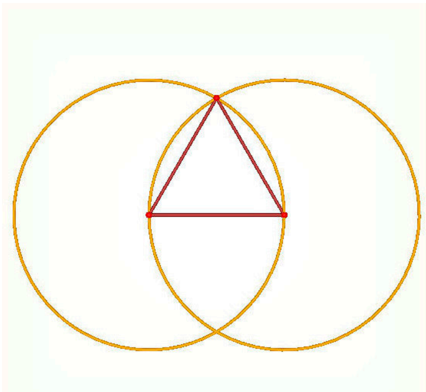


Fig. 41

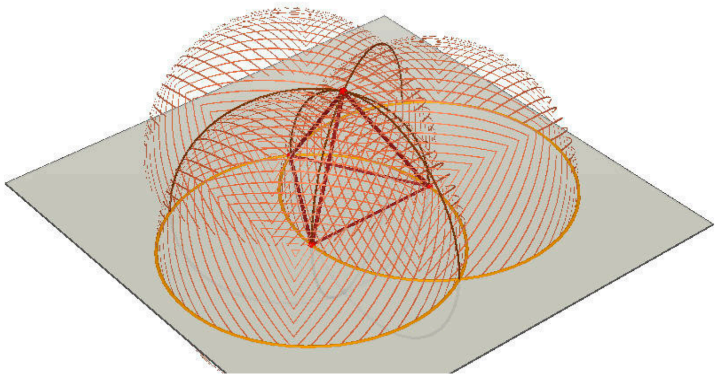


Fig. 42

3.2 Constructions involving congruent mapping

Duplication of objects is an effective construction aid in graphics tools. In Cabri 3d, the following congruent mappings are implemented which enable conditioned duplication of objects: Point symmetry, line symmetry (half-rotation around an axis), plane symmetry, parallel displacement, and rotation (around an axis at an angle). This gives us elegant solutions to construction problems, i.e. by duplicating objects like points, lines, planes, polygons and polyhedra using all options of point symmetry, axial symmetry, plane symmetry and displacement symmetry. Rotationally symmetrical figures, or parts thereof, are obtained by rotation around an axis at an angle of 360°/n, n=2, 3, ... Constructions are made even more flexible by using several of these options, one after the other. There are no options for Schub- und Drehspiegelungen and for screw displacement. However, the enhanced version of Cabri 3d enables user-defined macros for point mapping. Congruent spatial figures of identical orientation and/or direction of screw displacement can be mapped on each other by parallel displacement, rotation or screw displacement, i.e. by 2 or 4 subsequent reflections in the plane; these mappings describe the changes of position obtained by moving the spatial figures. For congruent spatial figures with different directions of screw displacement, either a reflection in the plane is required or translational resp. rotational reflections, i.e. three reflections in the plane; the spatial point symmetry Figs. 43 – 47 illustrate the use of congruence mapping in Cabri 3d, using the example of a pyramid of equal edge length whose basis is a regular pentagon.

Beyond these congruent mappings in Cabri 3d are implemented the similarity mapping and the spherical reflection.

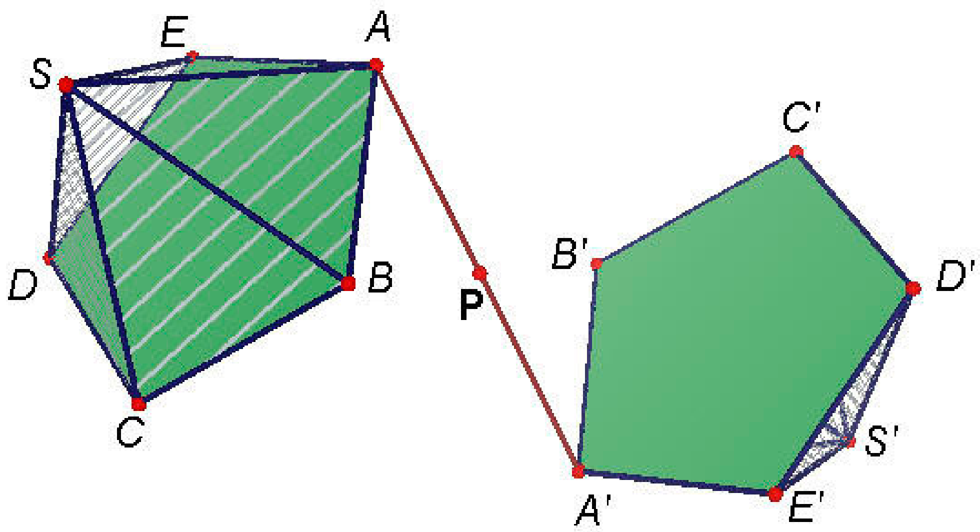


Fig. 43: *Point symmetry*

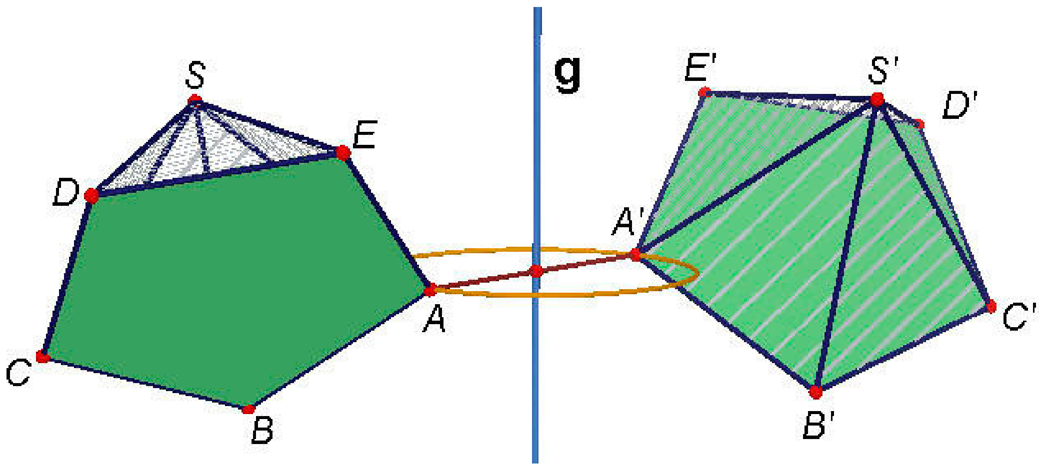


Fig. 44: *Line symmetry (half-rotation around an axis)*

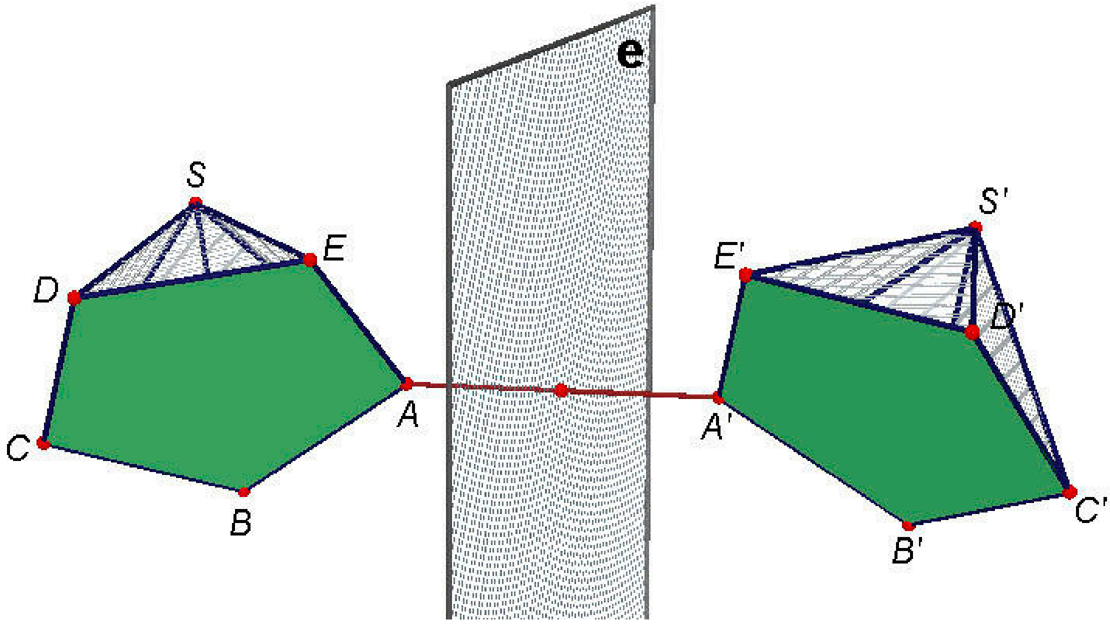


Fig. 45: *Plane symmetry*

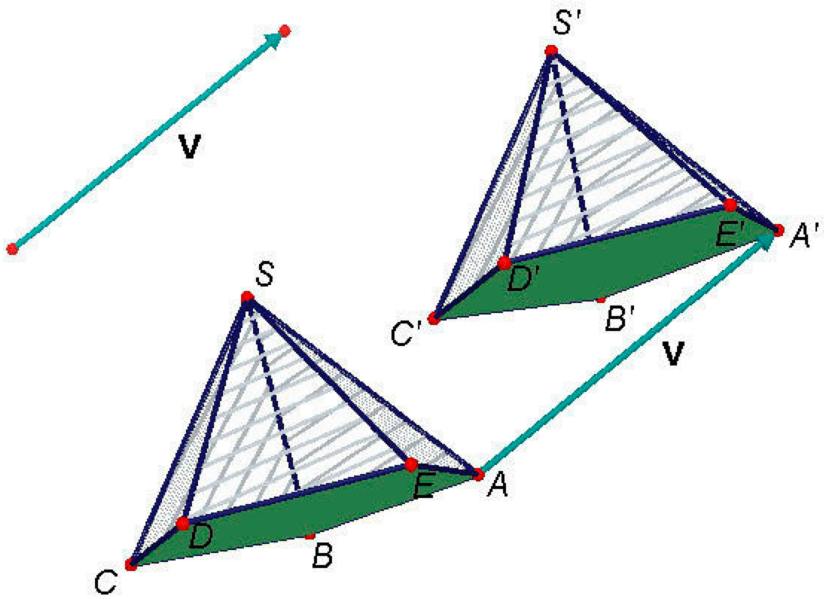


Fig. 46: *Translation*

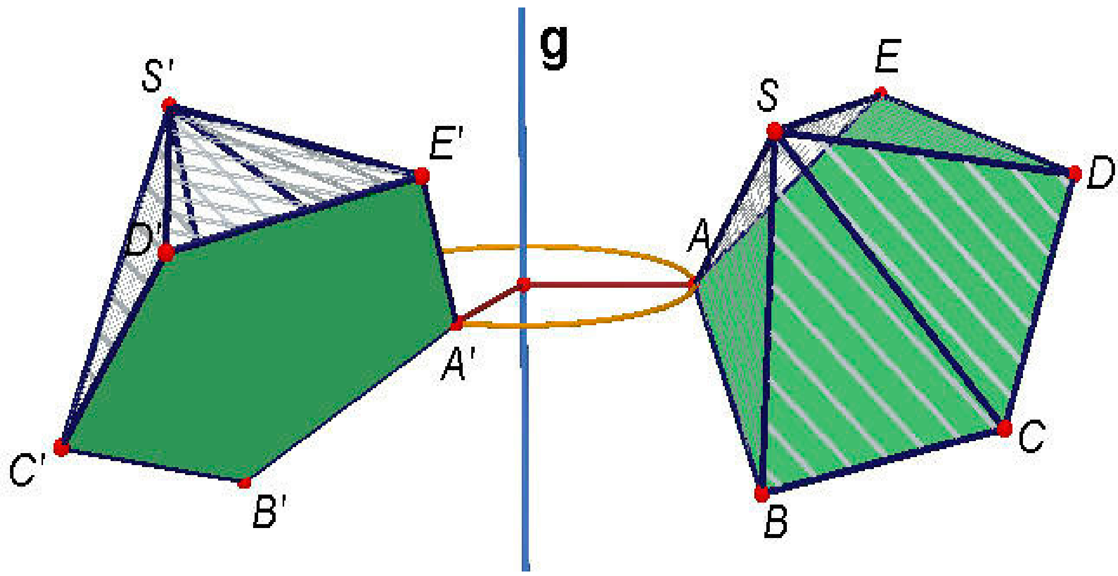


Fig. 47: *Rotation around an axis*

3.3 Constructions involving regular polygons

Inside Cabri 3d the available two-dimensional modules for constructing regular polygons permit constructions of polyhedra whose faces are regular polygons (Diagram 5; with information on module parameters). In the convex case, the faces of such polyhedra can only be equilateral triangles, squares, regular pentagons, hexagons, octogons, decagons, or dodecagons. From these, the so-called Johnson's solids can be generated by congruent mapping (see, e.g. http://home.aanet.com.au/robertw/Glossary.html). Users who are less familiar with spatial geometry may not know that there are no such polyhedra whose faces are regular heptagons, nonagons, hendecagons, etc. This leads us to ask if the tool is self-explanatory enough as far as geometry contents are concerned. For constructing star polyhedra, in particular regular star polyhedra according to Kepler-Poinsot (see above), the implemented pentangle and six-pointed star may be used.

To show how a solid can be constructed using two-dimensional modules and congruent mappings, we are going to present for an example the construction of an regular icosahedron in accordance with Euclid's construction in the 13th Book of his Elements".

Example 8: Regular icosahedron

In this example, we start by constructing the pentagonal antiprism with congruent edges, onto which suitable 5-sided pyramids with congruent edges will be constructed. The sequential construction algorithm is described in some detail here (there are constructional alternatives).

Construction of the antiprism

1) Construction of a circle from a centre point and a circle point in the reference plane (“circle“)
2) Construction of an inscribed regular pentagon (“regular pentagon“): Lower surface of the antiprism
3) Point symmetry of the regular pentagon in the circle centre (“point symmetry“) - Fig. 48

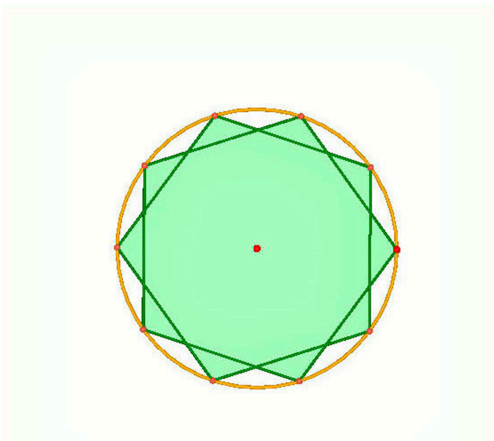


Fig. 48

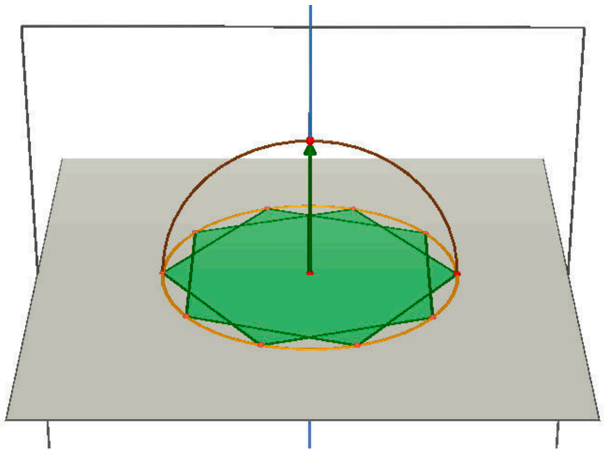


Fig. 49

4) Construction of the perpendicular to the reference plane in the circle centre (“perpendicular“) - Fig. 49
5) Construction of an auxiliary plane through the circle centre and perpendicular (“plane“) - Fig. 2
6) Construction of the circle around the circle centre through one of the corner points in order to mark off the circle radius on the perpendicular (“circle“) - Fig. 49
7) Construction of the point of intersection of the perpendicular and circle (“point of intersection“) - Fig. 49
8) Construction of the displacement vector from the foot of the perpendicular to the point of intersection - Fig. 49
9) Displacement of the rotated pentagon with this vector (“parallel displacement“): Upper surface of the antiprism - Fig. 50

10) Construction of five triangular faces by connecting each displaced corner point with the neighbouring corner points of its original position (“triangle“) - Fig. 50
11) Construction of five further triangular faces by point symmetry (“point symmetry“) in the centre point (“centre point“) of the centre points of the lower and upper surface resp. the displacement vector – Fig. 51, with one face hatched for an inside view.

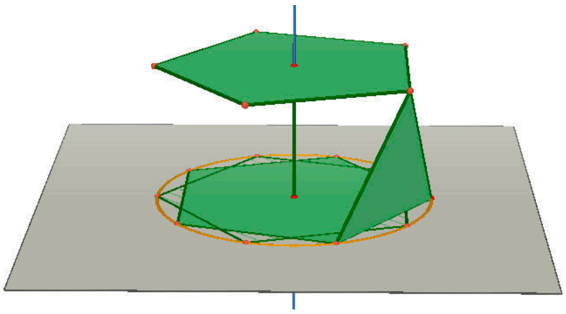


Fig. 50

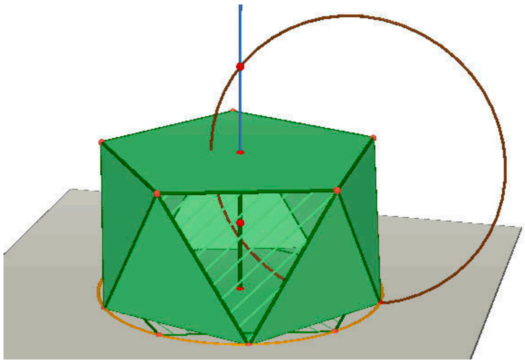


Fig. 51

Construction of the pyramids

12) Construction of a circle around one of the edges of the upper surface as an axis through the opposite corner point of the lower surface (“circle“) – Fig. 51
13) Construction of the point of intersection of this circle with the perpendicular dropped through the centre of the upper and lower surface (“point of intersection“: Vortex of the pyramid – Fig. 51
14) Construction of five triangles as faces of the pyramid whose basis is the upper surface by connecting the vortex with the corner points (“triangle“). Alternatively, the pyramid can also be constructed using the tool ”convex pyramid“.
15) Construction of the second pyramid by point symmetry of objects in the centre of the respective segment of the perpendicular – Fig. 52, with hatched faces for an inside view and with pentagons omitted.

The construction can be finished by defining the dodecahedron as a referenceable object (“convex polyhedron“ as convex Hull of its corner points – see next section), which may be used for further operations or mappings.

The spatial module of the Platonic solids already available in Cabri 3d (see Diagram 6, on the right) can be constructed ”bottom-up“ using regular polygons and symmetries, as shown above for the example of the icosahedron. This will make these ”black-box modules“ transparent and comprehensible.

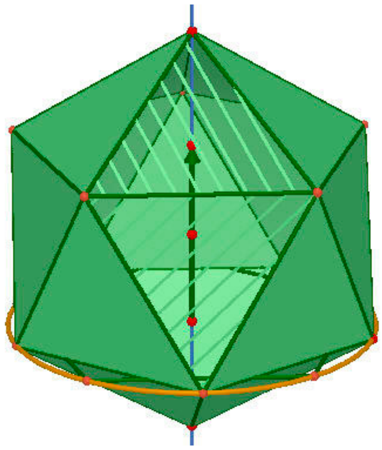


Fig. 52

3.4 General constructions involving polyhedra

The tetrahedron, the cuboid (as a box), the convex prism, the convex pyramid and the convex polyhedron (as a convex hull of a finite number of corner points and/or line segments and/or plane polygons and/or convex polyhedra) can be generated as a three-dimensional module (Diagram 4). These referenceable solids are available in Cabri 3d as surface or wireframe models (Cabri 3d is not “solid modelling“!). – In addition the option “Cut Polyhedron“ enables us to intersect a convex polyhedron with a plane to generate polyhedral sections of a polyhedra as referenceable objects (see Schumann 2001). With the option “Open Polyhedron“ any convex polyhedron can be defolded into its net. This option is an interface to the physical world because a print out of the net can be folded up to a physical surface model of the convex polyhedron constructed in the virtual space.

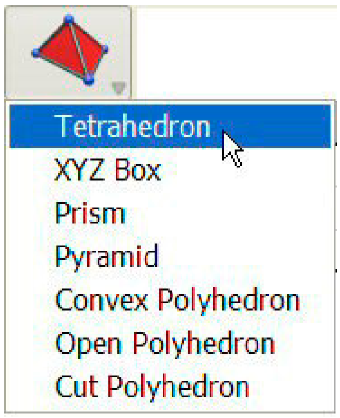


Diagram 4: *General constructions involving polyhedra*

As an example of the module ”convex prism“, we are now going to construct a model of the Castel del Monte (see Götze 1991).

Example 9: Castel del Monte

First, let us construct the plan (Fig. 53), on which we construct fitting edge models of an inner and an outer octagonal prism (Fig. 54). Then, we construct one of the corner towers. This corner tower is multiplied by rotation, and the towers are completed by line reflections (Fig. 55). After this, the upper surface is constructed using appropriate polygons. Finally, an intersecting plane is constructed to separate the ground floor from the first floor (Fig. 56). Fig. 57 shows the model from above, with a view of the inner courtyard.

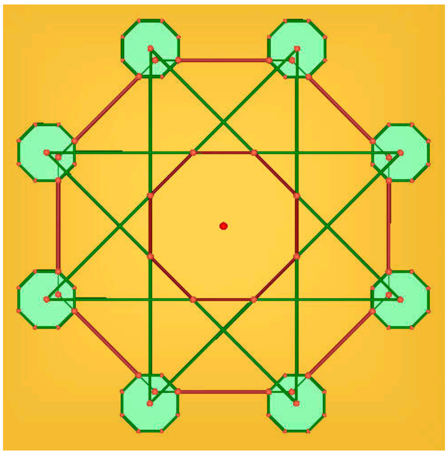


Fig. 53

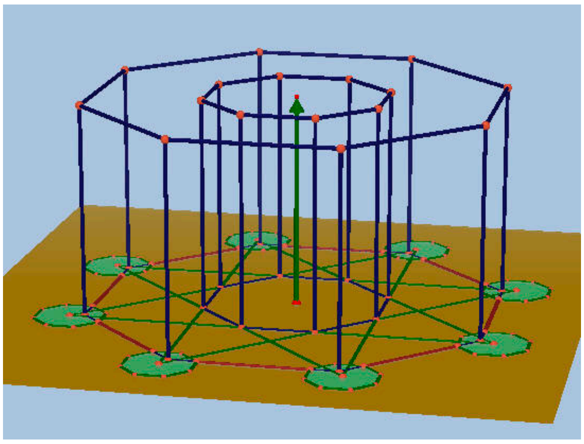


Fig. 54

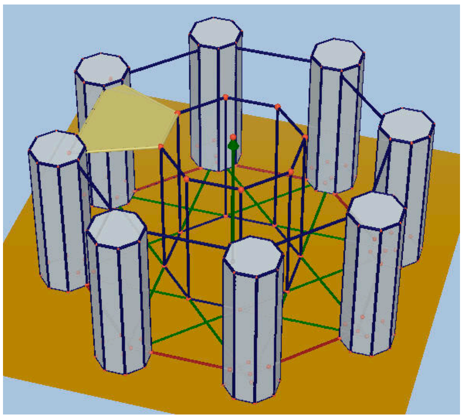


Fig. 55

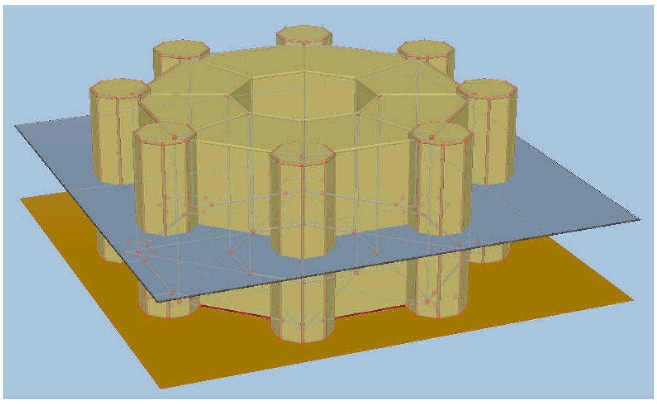


Fig. 56

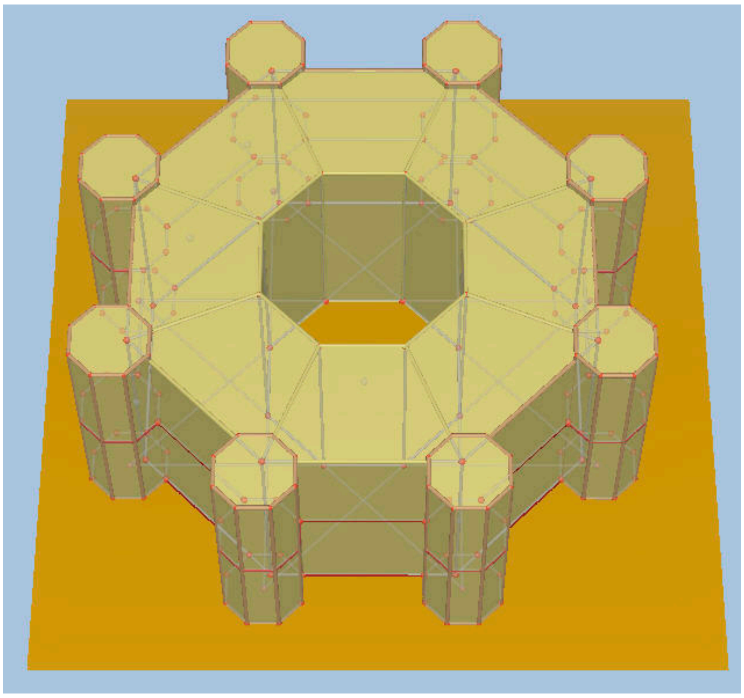


Fig. 57

Further exemplary models are described in ”Interactive modelling in virtual space“ (Schumann 2005b).

Platonic solids implemented in Cabri 3d, as a special group of three-dimensional modules, should not be omitted. They provide a wealth of geometric information and are starting points of many derived and agglomerated forms, which can only be mentioned in passing here (see. Schumann 2004b).

Example 10: From a cube section to the truncated octahedron

Inside a cube, let us construct a regular hexagon (Fig. 58) and make a section defined by the plane going through the hexagon (Fig. 59). The referenceable half of the cube is reflected several times in one of its triangular faces (Fig. 60), until a concave cuboid is obtained (Fig. 61). This convex cuboid encloses a gestumpftes octahedron, one of the Archimedean solids, like a casting mould or a negative form. The gestumpfte octahedron can now be constructed as convex Hull of its corner points (Fig. 62). Of course, as the name suggests we could also have constructed the truncated octahedron by clipping the corners of an octahedron in the kantenhalbierendes Abschneiden.

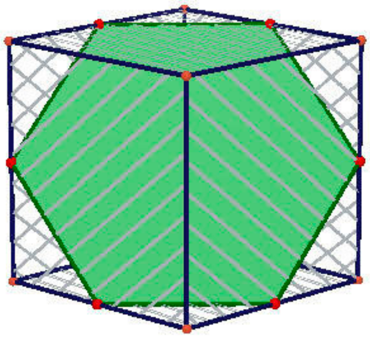


Fig. 58

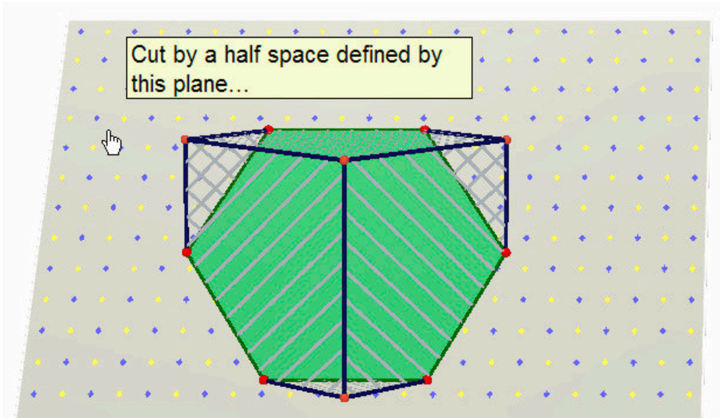


Fig. 59

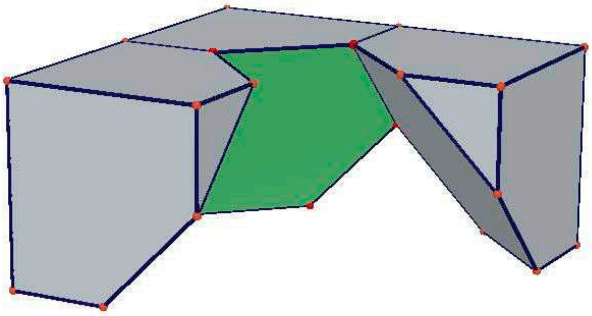


Fig. 60

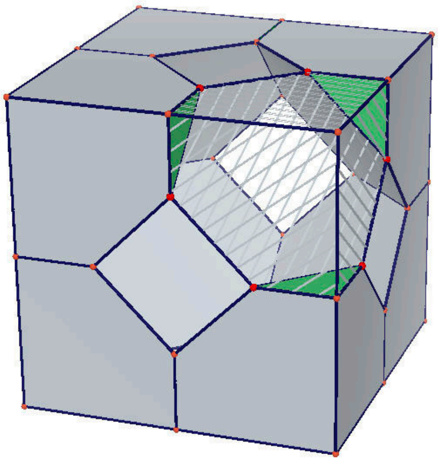


Fig. 61

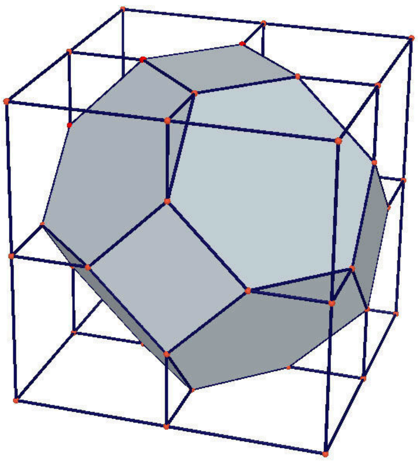


Fig. 62

Example 11: A compound from four cubes

After constructing all central axes of the faces of a cube (Fig. 63), we are going to rotate the cube around its vertical axis by a bisected right angle as rotary angle and duplicate it (Fig. 64). Let us repeat the procedure for the two other axes. We have now constructed a solid of four intersecting cubes, a so-called quadruple of a cube (Fig. 65). What are the symmetry characteristics of this solid as compared to the original cube? – In addition we construct the solid which is the common intersection of all the four cubes (Fig. 66). It is the rhomb-cube-octahedron, a specific Archimedean solid.

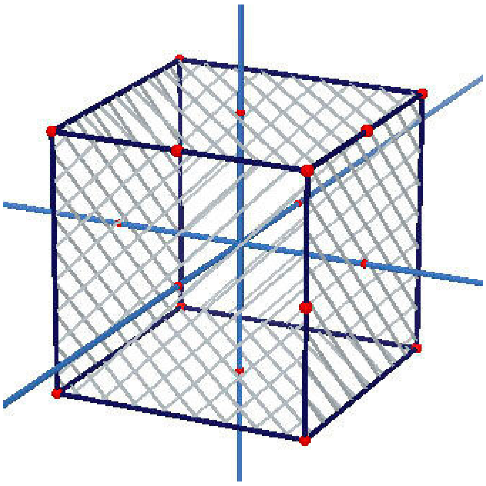


Fig. 63

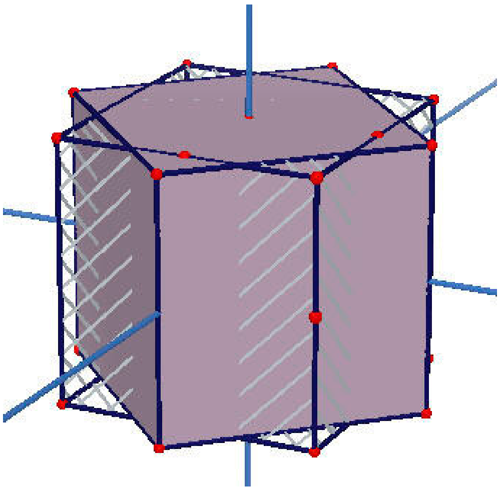


Fig. 64

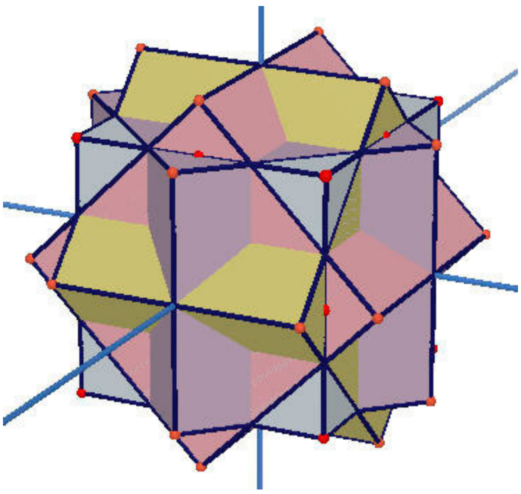


Fig. 65

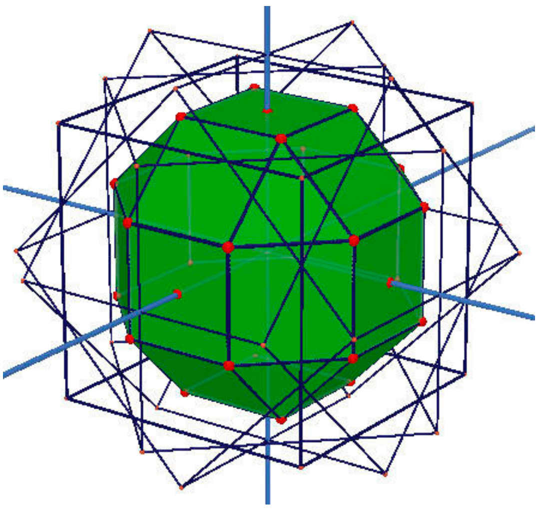


Fig. 66

Example 12: A toroid

A possible solution of the open problem of constructing toroids of Platonic and Archimedean solids is the point-symmetrical polyhedron consisting of regular octahedra and icosahedra with a central "hole" (Fig. 67). There are several more of such toroids of octahedra and icosahedra. Solutions by systematic experimentation are supported by interactive construction using the three-dimensional module. Construction of different multiples of polyhedra, e.g. multiples of platonic solids, is an interesting and amusing task.

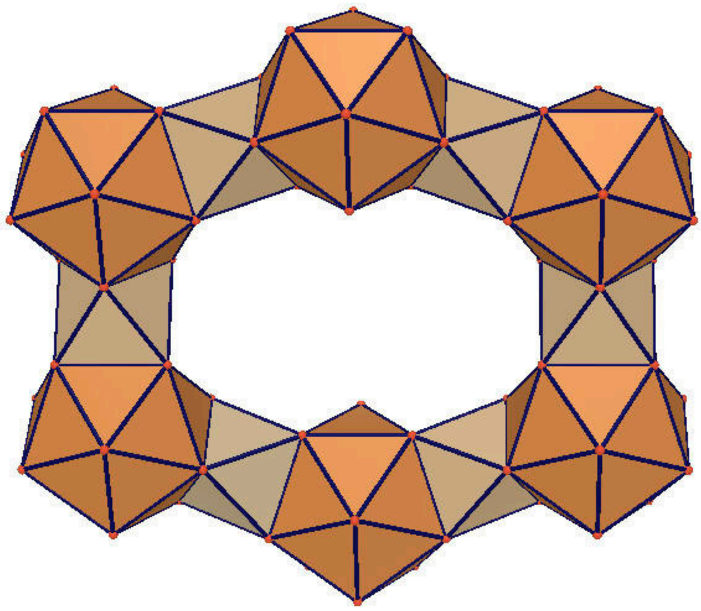


Fig. 67

4. Didactic assessment of interactive three-dimensional geometric construction

How will the new and digital media influence mathematics teaching, in particular school subjects, methodology and intentions (Diagram 5)?

In our case, we must ask: In what respects may a spatial construction tool like Cabri 3d influence 3d geometry teaching?

We can only attempt a preliminary answer here:

Geometric constructions in the virtual space will bring about a re-assessment and re-evaluation of the following traditional subjects of spatial geometry in the geometry classroom (Schumann, H. (2005a):

– Solids, in particular the geometry of polyhedra (e.g. of Platonic solids and derived solids)

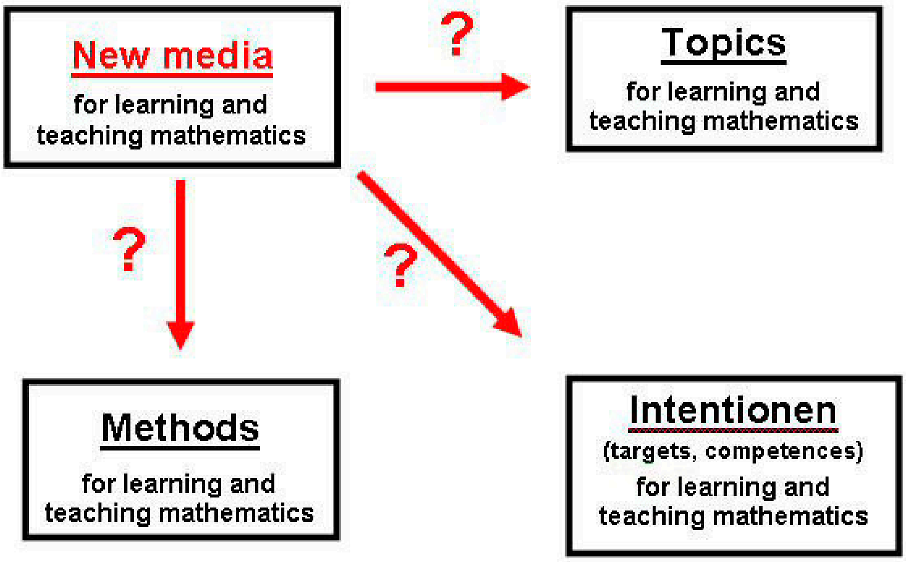


Diagram 5: *New media – topics – intentions – methods*

- Creation of concepts und relations of position of 3d geometric objects (e.g. points, lines, planes)
- Spatial analogisation of concepts, theorems and methods of geometry in the plane (e.g. analogisation of the geometry of the triangle to obtain the geometry of the tetrahedron)
- Conics in three-dimensional representation
- Descriptive geometry
- Geometry of the sphere
- Application-oriented modelling using synthetic spatial geometry

Further, the interactive use of virtual spatial geometry may be a valuable tool for a more varied and illustrative presentation of mathematical concepts (e.g. as a preparatory step on the way to three-dimensional analytical geometry).

Interactive three-dimensional constructions and their applications may help to make the guiding concept of "space and shape" more concrete and more attractive and to develop spatial perception skills.

In using the cognitive tool Cabri 3d for interactive constructions the in virtual space, we aim to achieve, among others, the following general teaching goals for the geometry classroom:

- Training of geometric vision (the "geometric eye") and experiencing the virtual space as a space of action (Teaching goals relating to perceptional phenomenology).

– Appreciating the usefulness of spatial geometry. (affective teaching goal)
– Acquiring, applying and enhancing knowledge of spatial geometry (concepts, theorems, methods); training spatial perception (cognitive teaching goals)
– Experimental exploration of geometrizeable spatial phenomena and analysis of such phenomena using heuristic strategies (metacognitive teaching goals)
– Acquisition of skills in the use of a 3d graphical tool (technical teaching goal)

The use of Cabri 3d can support general methods and working strategies, similar to those used already in dynamic 2d geometry systems. In particular, the following general methods of obtaining knowledge may be enhanced:

– *Visualisation* of static and dynamic spatial geometry information (e.g. for visualization of three-dimensional geometry problems)
– *the inductive method* (e.g. generation of a multitude of examples by variation of a figure)
– the *analogy method* (e.g. for analogisation between geometry in the plane on the one hand and spatial geometry on the other hand)
– *integration and/or fusioning* of plane and three-dimensional geometry (e.g. in the case of proofs)
– the *operative method* (e.g. by invariance studies)
– *experimentation* (as a propedeutic method of working in geometry)
– *reduction of complexity* (e.g. by omitting objects)
– *modular working* (e.g. by using modules)
– *backtracking* (e.g. by using the Undo and Redo functions).

The existing skills in using computer tools for constructing geometric figure in the plane must be extended to spatial geometry in order to give the students the methodological competence required today in the context of general mathematics teaching.

We consider geometric constructions in the virtual space as a milestone on the way to the general use of computers in the teaching and learning of spatial geometry.

Literature

Bainville, E., Laborde, J.-M. (2006): Cabri 3d 2.0. (Software). Grenoble: Cabrilog.

Bieberbach, L. (1952): Theorie der geometrischen Konstruktionen (The theory of geometric construction). Basel: Birkhäuser

Graf, U. (1964): Darstellende Geometrie (Descriptive geometry). Bearbeitet von M. Barner. Heidelberg: Quelle & Meyer

Götze, H. (1991): Die Baugeometrie von Castel del Monte (Building geometry of Castel del Monte). München: Prestel

Heath, Th. L (Ed.) (1956): Euclid: The Thirteen Books of The Elements. Vol. 3. New York: Dover Publications

Holland, G. (1996): Geometrie in der Sekundarstufe (Geometry for the secondary level). Heidelberg: Spektrum

Quaisser, E. ; Sprengel, H.-J. (1989): Geometrie in Ebene und Raum (Geometry in plane and space). Berlin: DVW

Wolff, G. (Hrsg.) (1966): Handbuch der Schulmathematik (Manual of school mathematics). Hannover: Schroedel

Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer (School geometric construction with the computer). Stuttgart: Teubner-Metzler

Schumann, H.; Green, D. (1994): Discovering Geometry with a Computer. Bromley/Kent: Chartwell-Bratt

Schumann, H. (2001): Raumgeometrie-Unterricht mit Computerwerkzeugen (Spatial geometry instruction with computer tools). Berlin: Cornelsen

Schumann, H. (2004a): Entdeckung von Analogien mit Cabri 3d am Beispiel „Dreieck – Tetraeder“ (Discovering analogies with Cabri 3d at the example “triangle – tetrahedron“. In: mathematica didactica 27, issue 1, p. 82-99

Schumann, H. (2004b): Konstruktion von Polyedermodellen mit Cabri 3d im Umfeld der platonischen Körper (Construction of polyhedra models with Cabri 3d in the environment of the Platonics. In: Beiträge zum Computereinsatz in der Schule. 18, issue 2, p. 3-48

Schumann, H. (2005a): Dynamische Raumgeometrie (Dynamic spatial geometry). In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Hildesheim: Franzbecker, p. 533-536

Schumann, H. (2005b): Introduction to Conics with Cabri 3D. Boletín Sociedad de Profesores de Matemáticas, Madrid, N.° 70, Junio, 18-33.

Schumann, H. (2005c): Interactive Geometric Modelling in the Virtual Space. EduMath. An Official Publication of the Hong Kong Mathematics Association for Education, v. 20, Nr. 12, p. 27-42.

Schumann, H. (2007): Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum (Geometry in the virtual space for school geometric activities). Berlin: Franzbecker.[3]. Xambó, S. *Geometría.* Edicions UPC. Barcelona, 1977

Del teorema Π al axioma de las conjeturas razonadas

Andrés Martínez de Azagra Paredes[a], Valentín Pando Fernández[b] y Jorge del Río San José[c]

[a] Departamento de Ingeniería Agrícola y Forestal
ETSIIAA (Universidad de Valladolid)
amap@iaf.uva.es

[b] Departamento de Estadística e Investigación Operativa
ETSIIAA (Universidad de Valladolid)
vpando@eio.uva.es

[c] Servicio Territorial de Medio Ambiente de Valladolid
Junta de Castilla y León
riosanjo@jcyl.es

Abstract

In this paper, the Vaschy & Buckingham Pi Theorem is extended with two new corollaries. A broader generalization of this theorem leads to the reasoned conjectures axiom. The hypothesis that human reasoning is governed by such an axiom is put forward. According to this hypothesis, the human mind operates as a function of functions in constant transformation, changing perspective as time elapses. Among the functions to be considered, a new type, known as divagada function, is presented here, along a brief discussion of its origin. The mathematical concept of idea is developed and a number of sound reasons underlying the main hypothesis of the paper are advanced as well.

Resumen

Con el presente trabajo se amplía y generaliza el teorema Π de Vaschy & Buckingham. En primer lugar y por medio de dos corolarios, se dota al teorema original de una mayor versatilidad a la hora

de obtener monomios (productos) con significación física. En segundo lugar, generalizamos el teorema Π con lo que llegamos al axioma de las conjeturas razonadas. Se plantea la hipótesis de que el razonamiento humano se rija por el mencionado axioma. Conforme a esta hipótesis, nuestra mente opera como una función de funciones que va transformándose (o cambiando de perspectiva) según el transcurrir del tiempo. Entre las funciones a considerar aparece un nuevo tipo, que hemos denominado funciones divagada y cuya génesis se esboza. Se desarrolla el concepto matemático de idea y se aducen razones de peso en favor de la hipótesis principal del trabajo.

Introducción

El teorema Π de Vaschy, Riabouchinski & Buckingham [1, 2, 3] trata sobre el análisis dimensional de las fórmulas físicas. Es un teorema muy atractivo, sorprendente y útil en numerosos campos de la Física y de la Ingeniería. Como todo teorema, es fruto del pensamiento humano pero –a su vez y en este caso– constituye un modelo sencillo sobre la forma de pensar que tiene el propio ser humano. Es esto lo que le confiere un interés muy especial, como vamos a comprobar en este artículo.

El teorema Π define un cambio de perspectiva en la observación de un fenómeno físico, permitiendo su simplificación al reducir el número de variables implicadas en él (símbolo: *R!*, de reducción). Se llega por análisis dimensional a un número de monomios (o productos) sin dimensiones que describen el fenómeno físico de partida con la misma precisión que el planteamiento inicial, sólo que con menos variables. De una forma abreviada podemos resumir el teorema mediante la siguiente expresión o transformación:

$$F(a,b,c,d,........)=0 \qquad \xrightarrow{R!} \qquad \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.......)=0 \qquad (1)$$

con F y φ funciones, a, b, c, d variables dimensionales y π_1, π_2 , π_3 variables adimensionales.

Se trata de un procedimiento preciso y estricto a la hora de cambiar de perspectiva: cada monomio (π_i) se obtiene a partir del producto de unas variables de referencia elevadas a unos exponentes que hagan al monomio adimensional [4].

Tanto por su utilidad práctica en el ámbito de la Física como por su enorme atractivo matemático y hasta filosófico, el teorema Π ha sido objeto de numerosos estudios y revisiones. Al respecto, merecen citarse los excelentes trabajos de Görtler (1975 a y b) [5, 6], de Carneiro (1992) [7], de Szirtes (1998) [8], de González Redondo (2000, 2001, 2002) [4, 9, 10] en esta misma revista, y de Pobedrya & Georgievskii (2006) [11]. También conviene citar los trabajos de Martinot-Lagarde (1948) [12], Birkhoff (1950) [13], Boyling (1979) [14] y Curtis *et al.* (1982) [15], en donde el lector puede encontrar diferentes desarrollos matemáticos que conducen a su demostración.

El teorema Π también ha sido objeto de varias generalizaciones en diferentes sentidos. Desde el punto de vista formal y matemático pueden citarse los trabajos de Hainzl (1968) [16] (usando la teoría de los grupos de Lie) o de Carlson (1978) [17] (usando el Álgebra clásica). A su vez, Sonin (2004) [18] propone una generalización de índole física: Al distinguir entre constantes y variables a la hora de describir un fenómeno físico, el mencionado autor concluye que se puede llegar a una reducción mayor del número de monomios adimensionales que con el teorema original. Por su parte, algunos investigadores (Rudolph (1998, 2002) [19, 20] y Schmidt *et al.* (2005) [21]) sugieren que el tan mencionado teorema Pi tiene aplicación dentro del apasionante mundo de la inteligencia artificial. Ello les aproxima mucho a nuestra línea de pensamiento.

1 Ampliaciones y generalización del teorema Pi

El procedimiento matemático descrito en el teorema original resulta plenamente satisfactorio (a la vez que muy útil) pero puede parecer innecesariamente estricto, al ser la función F una función genérica y desconocida. Dicho de otra manera: cabe concebir otros muchos cambios de perspectiva diferentes sin necesidad de acudir al procedimiento rígido de los monomios adimensionales.

En un artículo sobre infiltración publicado en la revista Ecología (Martínez de Azagra *et al.*, 2006 [22]) no se aplica el teorema Π, sino una noción del mismo consistente en hacer intervenir a todas las variables conectando todas entre sí a través de los coeficientes (o monomios) sin que ninguna quedara aislada, ajena del resto. Esta solución se obtiene directamente sin utilizar el procedimiento matemático concreto definido por Vaschy & Buckingham en su teorema, lo que sugiere la posibilidad de ampliarlo y/o generalizarlo (con posterioridad hemos llegado al corolario I, que autoriza formalmente a realizar tal cambio de perspectiva). En este apartado vamos a desarrollar dos corolarios de demostración trivial pero que conviene explicitar para hacer al teorema *Π* más versátil a la hora de obtener relaciones físicas de interés (tanto productos adimensionales [primer corolario] como productos dimensionales [segundo corolario]). Con posterioridad, plantearemos la generalización del teorema *Π* en lo que constituye el axioma de las conjeturas razonadas, para pasar después a interpretarlo y aplicarlo.

1.1 Corolario I

Se propone aplicar el procedimiento de obtención de monomios adimensionales utilizando magnitudes de referencia cambiantes (sustituyendo las magnitudes físicas iniciales por otras nuevas en mitad del proceso de cálculo). Es decir: el método consiste en aplicar el teorema original parcialmente, obteniendo ciertos monomios adimensionales π_1, π_2, π_3 llegando a una función intermedia: $\varphi(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \chi, \delta, \varpi, ...) = 0$, para después volver a aplicar el teorema con χ, δ, ϖ como nuevas magnitudes físicas de referencia.

Dada la función $F_1(Q_1, Q_2, ..., Q_r) = 0$ a la que se puede aplicar el teorema *Π*, esta función $F_1(...)$ se puede transformar en una función equivalente

$$F_2(f_1(Q_1), f_2(Q_2), ..., f_n(Q_n), Q_j, ..., Q_r) = 0,$$

siendo $f_m(Q_m) = \pi_m = Q_m \cdot Q_i^{\alpha} \cdot Q_k^{\beta} \cdot ... Q_l^{\eta}$ un monomio adimensional cualquiera, convirtiendo tantas magnitudes Q_m en otros tantos monomios adimensionales como se desee, con tal de que se sigan satisfaciendo las condiciones de aplicación del teorema en la función equivalente $F_2(\pi_1, ..., \pi_n, Q_j, ..., Q_r)$ con las magnitudes Q_j a Q_r restantes.

En efecto: Si la función $f_m(Q_m) = Q_m \cdot Q_i^{\alpha} \cdot Q_k^{\beta} \cdot ... Q_l^{\eta}$ no fuese una transformación lícita para el problema inicial tampoco lo sería el procedimiento usado en el propio teorema *Π* de Vaschy & Buckingham, que es coincidente con el planteado con la función $f_m(Q_m)$.

Este corolario permite una gran flexibilidad en la obtención de monomios adimensionales lo que puede facilitar su posterior interpretación física. El lector que desee ver el corolario aplicado con detalle a un caso concreto puede consultar el trabajo de Martínez de Azagra *et al.* (2007)[23].

1.2 Corolario II

Supongamos que tenemos un fenómeno físico que se describe mediante la ecuación:

$$F(a,b,c,d,.....)=0$$

siendo *a*, *b*, *c*, *d* ,… las variables dimensionales de partida que intervienen en el fenómeno físico estudiado, y *F* la función que liga dichas variables entre sí para describir el problema.

Este mismo fenómeno físico queda igualmente descrito mediante la función φ_1:

$$\varphi_1(\pi_1,\pi_2,\pi_3,...)=0$$

siendo π_i monomios dimensionales (con igual dimensión, por ejemplo: todos l (longitud), o t (tiempo), o m (masa), o l/t,…). Puede tratarse de monomios unidimensionales (l, o t, etc.), bidimensionales (l/t, o m/t^2, o m/l^3, etc.), tridimensionales,…

$$F(a,b,c,d,.....)=0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi_1(\pi_1,\pi_2,\pi_3,...)=0 \qquad (2)$$

La reducción (*R!*) del número de variables es en este caso menor que en el teorema clásico Pi, en donde resulta máxima. En vez de *n* la reducción será (*n*–1), o (*n*–2), en general: (*n* – *i*), siendo *n* la característica de la matriz $\left\| a_{jk} \right\|$ e *i* la dimensión de los monomios obtenidos en el cambio de perspectiva planteado (consúltese el anexo I del trabajo de Martínez de Azagra *et al.* [23]).

En efecto: La expresión $\varphi_1(\pi_1,...)=0$, al incluir variables dimensionales, permite una ulterior simplificación aplicando el teorema clásico Pi con lo que se obtiene la ecuación $\varphi_2(\pi_1^*,...)=0$ en la que todos los monomios (π_j^*) ya sí son adimensionales. Esta reducción adicional del número de variables es la que falta en el cambio de perspectiva propuesto por el corolario II.

$$\varphi_1(\pi_1,\pi_2,\pi_3,...)=0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi_2(\pi_1^*,\pi_2^*,..)=0 \quad (3)\equiv(1)$$

A su vez y aplicando el primer corolario, pueden obtenerse dentro de la expresión $\varphi_1(\pi_1,\pi_2,\pi_3,...)=0$, monomios con dimensiones diferentes (p.ej.: uno l, otro t, otro m) de manera que los cambios de perspectiva que pueden alcanzarse son múltiples, pudiendo ser alguno muy ventajoso a la hora de profundizar en la comprensión o en la descripción de un fenómeno físico dado. Por poner un ejemplo bien conocido por todos, el segundo principio de Newton se enuncia de forma dimensional (sumatorio de fuerzas exteriores = masa por aceleración absoluta: $\sum \overline{F} = m{\cdot}\overline{a}$) y no mediante monomios adimensionales:

$$\pi_N = 1 = \frac{\sum F}{m{\cdot}a}.$$

2 Axioma de las conjeturas razonadas

Vamos a exponer un sencillo razonamiento que nos conduce al axioma, para después enunciarlo de dos formas diferentes y complementarias.

Adviértase que, por motivos didácticos, en este apartado seguimos el camino inverso de las demostraciones matemáticas habituales: partimos de un teorema y llegamos a un axioma.

Sean tres investigadores (A, B, y C) que se plantean el mismo fenómeno físico para su descripción (resolución) llegando a tres funciones de partida genéricas y diferentes (F_A, F_B y F_C) , siendo los tres planteamientos correctos y completos. El primero consigue reducir el número de variables aplicando el teorema *Π*; el segundo no llega a reducir su problema y el tercero consigue la reducción sin aplicar el teorema *Π* estricto pero sí una noción del mismo. Pues bien: esta situación (muy común en investigación, sobretodo la (5)) evidencia la posible existencia de generalizaciones al teorema. La pregunta inmediata que surge es: ¿qué otras formas cabe concebir para cambiar de perspectiva eficazmente sin tener que acudir a la intuición, como hace el físico C?

A plantea:

$$F_A(a,b,c,d,........)=0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi_A(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.......)=0 \qquad (4)$$

B plantea:

$F_B(f_1(a), f_2(b), f_3(c,d),........)=0 \quad \xrightarrow{?}$ No llega a reducir el problema. (5)

C plantea:

$$F_C(a,b,c,f_4(d),........)=0 \qquad \xrightarrow{R!} \qquad \varphi_C(\pi_1^{\ *},\pi_2^{\ *},\pi_3,.......)=0 \qquad (6)$$

siendo $f_i(x,y,...)$ funciones genéricas.

El físico C llega a la solución reducida sin poder aplicar el teorema *Π* estricto, pero sí una noción del mismo. Luego deben existir generalizaciones al teorema Pi.

Una pregunta importante es: ¿Qué propiedades tienen que tener las funciones internas $f_i(x,y,...)$ para poder aplicar un teorema *Π* generalizado?

Como planteamiento general estas funciones podrán ser de cuatro tipos:

$f_i(x,y,...) \rightarrow$ funciones matemáticas clásicas (operadores, etc.): símbolo *f*

$f_i(x,y,...) \rightarrow$ funciones de distribución: símbolo *g*

$f_i(x,y,...) \rightarrow$ funciones neuronales (con aprendizaje / memoria): símbolo *n*

$f_i(x,y,...) \rightarrow$ funciones divagada (un salto intuitivo, imprevisible, en total libertad, erróneo o acertado): símbolo *ñ*. En el apartado cuarto se retoma la cuestión.

Conviene indicar, que en un planteamiento más general, las propias funciones del problema (simbolizadas por *F*, F_A, F_B, F_C) pueden pertenecer a cualquiera de los cuatro tipos señalados.

Si el problema planteado incluye únicamente funciones internas de los tres primeros tipos (*f*, *g*, *n*) podrá existir un teorema *Π* generalizado que simplifique la cuestión. Si, además, incorpora alguna función divagada (*ñ*), es el axioma de las conjeturas razonadas quien puede resolver el problema. Para cambiar de perspectiva hemos de acudir al axioma de las conjeturas razonadas, que podemos enunciar así:

"Ante cualquier situación siempre se puede cambiar de perspectiva." Dicho de una manera más positiva (aunque restrictiva): Ante un problema siempre se puede cambiar de perspectiva razonadamente hasta llegar a entrever su solución. Sin embargo, el cambio de perspectiva también puede conducirnos a problemas más complejos, es decir: no siempre conseguiremos una reducción del problema (símbolo: *R!*) sino que podemos estar ampliando la complejidad inicial del planteamiento (símbolo: *A!*), lo que –en algunos casos– puede resultar esclarecedor. {Nota: Se sobrentiende que el cambio de perspectiva también pueda mantener el nivel de complejidad (símbolo *I!*). Esta circunstancia trivial no se refleja en la notación que empleamos para el axioma.}

$$F(a,b,f_1(c,d),f_2(e),.......)=1 \xrightarrow{R!\ \acute{o}\ A!} \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.......)=1 \qquad (7)$$

siendo $f_i(x,y,...)$ funciones matemáticas (*f*), funciones de distribución (*g*), funciones neuronales (*n*) y/o funciones divagada (*ñ*), y π_i un monomio (dimensional o adimensional) genérico.

Nota: Monomio, en su acepción habitual, es una expresión algebraica que consta de un solo término. En la generalización que proponemos tiene un significado mucho más amplio, pudiendo identificarse con cualquier entidad o ente que constituya una unidad (tanto física como anímica).

Este axioma es indemostrable pero a la vez evidente por lo que no requiere de demostración. Puede parecer a primera vista una perogrullada pero tiene su interés, pues encierra al menos una buena parte del razonamiento del cerebro humano (si no todo él) y el de muchos animales. El cambio de perspectiva que postula ocurre en nuestro cerebro tanto voluntaria como involuntariamente con el transcurso del tiempo.

Las conjeturas pueden estar bien o mal razonadas (pues pueden deberse a cambios erróneos, a funciones divagada equivocadas), de manera que son en gran medida imprevisibles. Hay en ellas un importante grado de incertidumbre, imprecisión y error. Véase la figura 1.

Esta figura 1 contempla siete cambios de perspectiva diferentes (atendiendo a su veracidad y precisión). La mente recorre estos siete caminos incesantemente, pero sólo valora de manera positiva los cambios que conducen a planteamientos acertados (a, d, f). Las otras cuatro opciones las desdeñamos pese a ser inherentes a la forma de pensar que tiene el propio cerebro. El camino (d) se suele enunciar como un principio (omitiendo el origen -poco decoroso- que ha llevado a su descubrimiento). El camino (e) es -con mucho- el más frecuente en la mente humana. El camino (f) es el de la lógica borrosa cuando se apunta un tanto dentro de las matemáticas clásicas.

El axioma enunciado, como cualquier axioma, no requiere de demostración (en este caso concreto y entre otras razones, por encerrar en sí mismo divagadas). No ocurre lo mismo con los teoremas previos que conducen a él, que habrán de ser demostrados uno a uno.

La forma más sencilla de expresar este axioma es con palabras, pues no en vano las palabras (el lenguaje) son la expresión del funcionamiento del cerebro humano.

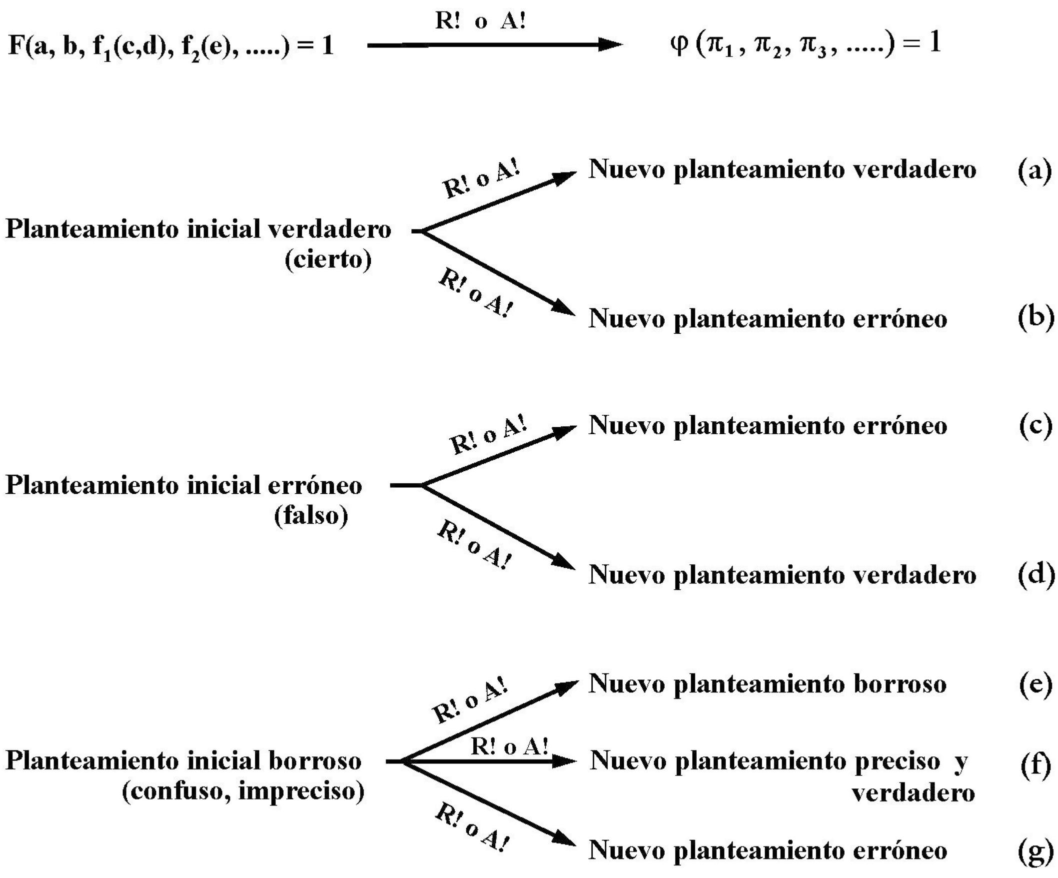


Figura 1

Se trata de un axioma bastante abstracto, pero es que estamos tratando de describir el funcionamiento de la mente humana, que en modo alguno es precisa ni predecible.

Como segundo enunciado alternativo y complementario del axioma de las conjeturas razonadas proponemos el siguiente: "Nuestro cerebro (y el del resto de animales) es un contenedor y un transformador continuo y libérrimo de ideas."

Nota: El adjetivo 'libérrimo' resulta muy exagerado. En rigor, se trata de una transformación aparentemente libre. A buen seguro que es un proceso bioquímico con muchos grados de libertad, pero en modo alguno infinitos. Los cambiadores elementales de perspectiva y sus posibilidades pueden ser numerosos pero no son ilimitados. Otra restricción muy importante a esta supuesta libertad se comenta más adelante: se trata de una libertad fuertemente condicionada por la especie.

Este segundo enunciado, por lo demás, irrefutable, se deja matematizar en lo que constituye el axioma de las conjeturas razonadas. Se trata de una expresión que resulta algo más compleja que una reacción química habitual. De hecho, refleja una reacción bioquímica. Y es que ha de existir y producirse tal reacción bioquímica elemental en nuestras neuronas para que pensemos, para que razonemos. No puede ser de otra manera: Existe una reacción bioquímica elemental (o un conjunto de reacciones bioquímicas elementales) estable(s) y de muy poco gasto energético que constituye(n) la base misma del pensamiento humano. En un futuro no muy lejano algún investigador describirá dicha reacción (o reacciones) al igual que se ha conseguido con la reacción que explica la transmisión de la información genética.

Nota: Nos referimos a reacción bioquímica en sentido amplio: una reacción molecular (intracelular y/o intercelular; en la neurona y/o entre neuronas).

a) Reacción química genérica:

$$\pi_1 + \pi_2 + \ldots \xrightarrow{(T,p,pH\ldots)} \pi_1^* + \pi_2^* + \ldots$$

siendo π_i y π_i^* compuestos químicos (o reactivos)

Conviene señalar que se han de concretar las condiciones del medio en que se produce la reacción química (temperatura, presión, luz, catalizadores, enzimas, pH,…) para que su camino sea conocido, unívoco.

Como mejor ejemplo de reacción química podemos citar a la fotosíntesis, que es sostén indispensable de nuestra propia vida, al procurarnos el oxígeno que respiramos.

$$CO_2 + 2{\cdot}H_2O \xrightarrow{luz} CH_2O + H_2O + O_2$$

b) Axioma de las conjeturas razonadas (↔ versión general de una reacción bioquímica genérica ↔ en un enfoque mucho más amplio: transformaciones cualesquiera del Mundo o principio elemental del cambio).

$$F(\pi_1,\ldots,\pi_i,\ldots)=1 \xrightarrow{R!\ ó\ A!} \varphi(\pi_1^*,\ldots,\pi_i^*,\ldots)=1 \qquad (8)\equiv(7)$$

con π_i y π_i^* entes (monomios) dimensionales anímicos (como, por ejemplo, las ideas) o físicos (como, por ejemplo, todas las variables físicas)

F y φ funciones matemáticas en sentido amplio (pues incluimos a las funciones divagada), funciones cerebrales, neuronales; funciones físicas

Como expresión matemática general para el axioma de las conjeturas razonadas proponemos la siguiente:

$$F(a,b,f_1(c,d),f_2(e),...)=1 \quad \xrightarrow{R!\ o\ A!} \quad \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,...)=1 \quad (9)\equiv(8)\equiv(7)$$

Conviene utilizar el símbolo $\xrightarrow{R!\ o\ A!}$ en vez de $\xrightarrow{R!\ ó\ A!}$ cuando el cambio de perspectiva no sea concreto (línea sinuosa en vez de línea recta). No obstante y al no existir tal opción en el editor de ecuaciones matemáticas que manejamos, vamos a utilizar el símbolo $\xrightarrow{R!\ ó\ A!}$ indistintamente.

Un apunte de índole menor se refiere al cambio numérico realizado, si comparamos la expresión resumida del teorema Pi con la del axioma de las conjeturas razonadas. Se pasa de igualar la función a cero (en el teorema) a igualarla a uno (en el axioma). Es para denotar que se produce un salto cualitativo y cuantitativo importante; pero podríamos haber mantenido la igualdad a cero sin ningún inconveniente.

Teorema: $F(a,b,c,d,........)=0 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.......)=0 \quad (1)$

Axioma: $F(a,b,f_1(c,d),f_2(e).....)=1 \xrightarrow{R!\ o\ A!} \varphi(\pi_1,\pi_2,\pi_3,.....) = 1 \quad (9)$

3. Cambiador general de perspectiva

Un cambiador de perspectiva, en su versión más general, no debe ser un procedimiento concreto sino que ha de ser genérico. Para plantear y resolver la cuestión hay que proseguir con la brillante abstracción del propio teorema Pi en la que las funciones (F, φ, …) son genéricas. Así pues, el transformador (o cambiador) general de perspectiva (τ) se define como una función de funciones que incluye las cuatro funciones básicas (f, g, n y $\tilde{n}$) con cuatro operadores del tipo sí/no (actúa/no actúa). Esta función de funciones combina monomios entre sí formando nuevos monomios (en mayor, menor o igual número). Así pues:

$$\tau(\pi_j,\pi_k,\pi_l)=\pi_k^*,\pi_m^* \quad (10)$$

$$\tau(\pi_j,\pi_k,\pi_l)=\alpha f\left(\beta g\left(\phi n\left(\lambda \tilde{n}(\pi_j,\pi_k,\pi_l)\right)\right)\right)=\pi_k^*,\pi_m^* \quad (11)$$

en donde: α, β, ϕ, λ son operadores sí/no que hacen que la función actúe (transforme) o no (en cuyo caso se convierte en la función identidad) sobre los monomios.

f es una función matemática
g es una función aleatoria
n es una función neuronal
$\tilde{n}$ es una función divagada

Nota: El orden de actuación de *f*, *g*, *n*, *ñ* debe concebirse arbitrario, es decir: la función divagada (*ñ*) puede ser tanto la primera como la última en actuar, y así – respectivamente – con las otras tres funciones.

π_j, π_k, π_l son 0, 1, 2, 3 ó más monomios de partida (iniciales)
π_k^*, π_m^* son 0, 1, 2, 3 ó más monomios de llegada (finales), resultado del cambio de perspectiva motivado por el transformador τ

Nota: La no coincidencia del número inicial con el número final de monomios explica el hecho de que con el cambio de perspectiva pueda producirse una reducción (*R!*) o un aumento (*A!*) del número de variables.

Un caso particular de cambiador de perspectiva es el que propone el teorema Pi. Se trata de una función matemática (*f*) muy sencilla: la multiplicación de unas variables (o magnitudes) físicas elevadas a unos exponentes que logran una mejora o síntesis en la comprensión del fenómeno físico estudiado (*R!*), merced a llegar a unos números adimensionales.

Otra situación particular interesante se refiere al modelo de funcionamiento que proponemos para nuestro propio cerebro. Los monomios son en este caso ideas individuales, es decir: magnitudes anímicas que se transforman por la intervención de los cambiadores de perspectiva (τ), dando lugar a un caso particular del axioma de las conjeturas razonadas.

Así pues, cualquier transformación (o cambio de perspectiva) queda descrito mediante las dos expresiones siguientes:

$$F(\pi_1,\pi_2,\ldots\ldots,\pi_n)=1 \quad \xrightarrow{R! \text{ ó } A!} \quad \varphi(\pi_1^*,\pi_2^*,\ldots\ldots,\pi_m^*)=1 \quad (8)\ (\text{ó } (7) \text{ ó } (9))$$

$$\tau(\pi_j,\pi_k,\pi_l)=\alpha f\left(\beta g\left(\phi n\left(\lambda \tilde{n}(\pi_j,\pi_k,\pi_l)\right)\right)\right)=\pi_k^*,\pi_m^* \quad (11)$$

El modelo general que formulamos con estas dos expresiones deberá ser concretado en próximos estudios: ¿Con qué funciones puede trabajar un transformador τ de forma estable? ¿Con qué funciones opera nuestro cerebro y el del resto de animales? ¿Son las mismas funciones para todas las especies? ¿Son muchas? ¿Cuántas y cuáles son?

Para estas importantes cuestiones no tenemos respuestas seguras aún. Sabemos que se trata de funciones matemáticas con base biológica que habrán de obtenerse por la vía deductiva y por la vía experimental. Además, estamos en condiciones de aventurar que las funciones biológicas que buscamos van a ser pocas (pero versátiles) y muy similares (por no decir iguales) en todos los seres vivos con sistema nervioso.

El axioma de las conjeturas razonadas requiere un mínimo de cuatro funciones (una función matemática (f), una estadística (g), una neuronal (n) y una divagada ($\tilde{n}$)) para ser operativo y completo. Pero los sistemas biológicos pudieran estar operando con menos funciones: como caso extremo, una única función que –al ser entrelazada consigo misma– logre los distintos efectos, significados y utilidades requeridos por las neuronas.

Como funciones matemáticas básicas precisamos de la unión (pero no entendida como una suma o multiplicación rígida de números y funciones; más bien: una combinación en sentido amplio y reversible) y de la fragmentación (pero no una mera división de números). A su vez, hemos de considerar una o dos funciones de distribución (a ser posible sencillas: por ejemplo, una discreta y otra continua), una función neuronal (p.ej.: la de una neurona estándar) y una función divagada (p.ej.: la descrita en el apartado cuarto, combinación de una función neuronal y una función de distribución). El modelo, para que no se dispare y evolucione erróneamente, debe ser completado con una función de distancia que mida cada cierto tiempo la diferencia entre las ideas y la realidad (entre los números y relaciones del modelo, y los números y relaciones reales). Para eso están nuestros sentidos, que nos ofrecen una noción bastante aproximada y continua de la realidad que nos rodea.

El modelo propuesto no puede evolucionar libremente sino que ha de ser dirigido, de lo contrario se descontrola y disparata. Eso mismo ocurre al aplicar el teorema Pi de Vaschy & Buckingham de forma automatizada y al obtener todos los monomios adimensionales posibles (Sheppard, 2007) [24]. Con el transformador elemental del teorema Pi se obtienen muchísimos monomios, de los cuales sólo algunos tienen sentido físico. Las "ideas" obtenidas con el transformador Pi se confrontan con la realidad para admitir algunos resultados y rechazar otros por carecer de sentido físico.

En los seres vivos muchos cambios de perspectiva (τ) no son en modo alguno libres. Están dirigidos con toda precisión a través de la información genética que posee la propia especie. Así quedan fijados los comportamientos instintivos y específicos de cada animal. Este hecho puede explicarse con el modelo que propugnamos si concebimos que los cambios de perspectiva iniciales se deben a transformaciones matemáticas rígidas en las que no caben variables aleatorias ni funciones divagada. El conjunto de información que conforma el comportamiento de una especie viene a corresponderse con el sistema operativo de un ordenador y viene definido en su código genético. Posteriormente, cada individuo vive y se desenvuelve en un medio concreto que le exige conductas y decisiones adecuadas, acertadas. Los animales más evolucionados (verbigracia: los mamíferos, en general, y el hombre, en particular) tienen una gran capacidad de aprendizaje individual a través de su experiencia personal y por medio de la educación. Es en esta fase de la vida cuando entran en juego las funciones estadísticas y las funciones divagada. Pero, insistimos, el aprendizaje inicial es muy estricto (específico) y está dirigido genéticamente o –dicho en otras palabras– el transformador τ no puede evolucionar libremente hasta que no posea mucha información de partida que lo haga estable. De lo contrario generará continuos disparates: números y funciones erróneas, sin aplicación práctica alguna.

A la hora de definir y programar cambiadores de perspectiva (cerebros artificiales τ) se debe empezar por los más sencillos: aquéllos que sólo incluyan unas pocas funciones matemáticas de combinación y fragmentación más una función estadística elemental (como lo son los operadores sí/no [α, β, ϕ, λ], que pueden actuar con más o menos frecuencia). Posteriormente, se pueden ir complicando los modelos hasta desembocar en un modelo general que incluya los cuatro tipos de funciones. Algunos transformadores τ serán muy estables, prudentes, monótonos y poco creativos. En el extremo opuesto estarán los modelos fuertemente inestables, desequilibrados, "locos" que conducen a resultados imprevistos y erróneos en muy pocas transformaciones y aún partiendo de una información amplia y precisa. Y, como siempre, en el medio estará la virtud: habrá que buscar y encontrar cerebros artificiales rápidos, sensatos y creativos para que piensen con y por nosotros. La tarea no parece fácil pero sí muy atractiva.

4. Funciones divagada

Un punto que parece endeble en todo nuestro desarrollo matemático se refiere al concepto de función divagada, pero en realidad no es así. Resulta evidente que no se pueden concretar estas funciones, pues al hacerlo dejan de ser tales. Sin embargo conviene apuntar tan siquiera cuál puede ser su génesis.

La combinación de una función neuronal (n) con una función de distribución (g) da lugar a una función divagada ($\tilde{n}$). Basta con que los recintos aprendidos de la función neuronal queden modificados por funciones de azar para tener funciones divagada. El procedimiento más directo consiste en multiplicar los términos de ciertas curvas o rectas frontera por números aleatorios (ξ) extraídos de funciones de distribución, dando a los nuevos recintos plena validez.

El origen de una función divagada lo encontramos en ciertas neuronas excitadas (en contraposición a neuronas estables) y cuyo estado denominamos "divagante". Una neurona divagante cambia de perspectiva, alterando –de forma voluntaria y aleatoria– alguno de sus pesos sinápticos mediante un valor numérico ξ extraído de una función de distribución cualesquiera. Con ello modifica su comportamiento (es decir: su función de salida) de forma impredecible y –en algunas ocasiones– de forma ventajosa.

Si el valor ξ se obtiene, por ejemplo, de una función de distribución normal con media igual a uno ($\mu_e = 1$) cabe esperar un cambio gradual de perspectiva. En cambio, si $\mu_e \neq 1$ el salto esperable será brusco. A su vez, si la varianza (σ_e) es pequeña la divagación puede calificarse de prudente mientras que si σ_e es grande la divagación puede pronosticarse de imprudente.

Cualquier neurona estable puede excitarse en un momento dado, pasando a ser una neurona divagante que da lo aprendido por incierto tratando de descubrir por azar una nueva realidad, siendo más o menos prudente en la divagada merced a la función de distribución utilizada a la hora de extraer el valor numérico ξ.

Interesa recalcar, que una función divagada ($\tilde{n}$) es el resultado final (el efecto) que producen las distintas neuronas divagantes al interactuar con las neuronas estables de la capa neuronal que las asocia. En consecuencia, no debe identificarse función divagada con neurona divagante. Esta última supone únicamente el origen, la explicación formal al hecho de que el razonamiento pueda incluir divagadas, mutaciones voluntarias a la lógica.

Un desarrollo más detallado del concepto de neurona divagante puede encontrarse en el anexo III del trabajo de Martínez de Azagra *et al.* (2007) [23].

5 Aproximación matemática al concepto de idea

De acuerdo con el axioma de las conjeturas razonadas, una idea es una combinación de ideas previas.

Como expresión general de idea (π_k^*) podemos escribir:

$$\pi_k^* \ (\cup \ \pi_m^*) = \tau(\pi_j, \pi_k, \pi_l) \quad (12)$$

$$\pi_k^* \ (\cup \ \pi_m^*) = \alpha f\left(\beta g\left(\phi n\left(\lambda \tilde{n}\left(\pi_j, \pi_k, \pi_l\right)\right)\right)\right) \quad (13)$$

siendo estas dos expresiones equivalentes a las dos precedentes (10 y 11).

Esta definición matemática, aunque rigurosa, es demasiado abstracta para satisfacer la inquietud de un lector exigente: Pero ¿qué es una idea? ¿Qué unidades tiene? ¿Cómo puede concretarse matemáticamente? …

La cuestión no es baladí, desde luego: Por reducción al absurdo se llega a que las ideas son entes unitarios (monomios) anímicos: Pues, en efecto, ninguna idea pesa 5 kg, ni tiene 50 ha de superficie, o 17 A de corriente eléctrica, ni posee 10 candelas de luz, ni está constituida por 33 moles de materia pensante. Pensamos que nadie, en su sano juicio, puede afirmar tales cosas (salvo que esté de broma).

Llegados a este punto, se comprende la necesidad de definir unas magnitudes anímicas equivalentes a las siete magnitudes físicas fundamentales manejadas en la actualidad (masa, longitud, tiempo, temperatura, intensidad de corriente eléctrica, intensidad luminosa y cantidad de materia). Sólo así se podrá avanzar. Sólo así se podrá concretar el concepto de idea, una cuestión tan crucial como escurridiza y evitada por la Ciencia hasta la fecha.

Va siendo hora de corregir tan importante carencia. Creemos estar en condiciones de poderlo hacer, pero el reducido espacio de un artículo nos obliga a posponer la cuestión para un próximo trabajo. ¡Tiempo al tiempo, amigo lector!

6 Acerca de la teoría unificada

No resulta fácil encontrar ejemplos convincentes sobre que el axioma de las conjeturas razonadas constituya un modelo potente y completo de cómo funciona el cerebro humano. Tal vez uno, bastante atractivo, pueda ser el de la teoría unificada que buscan los físicos afanosamente:

Dependa la teoría cuántica de las constantes, variables y funciones siguientes: a, b, $f_1(c,d)$, e, etc. y dependa la teoría de la relatividad de A, $F_1(B,C,D)$, E, etc.

Pues bien: la teoría unificada queda definida por:

$$\varphi_1\left(a, b, f_1(c,d), e, ..., A, F_1(B,C,D), E, ...\right) = 1 \quad (14)$$

siendo φ_1 una función genérica a concretar por experimentación y/o por desarrollos matemáticos.

El problema planteado se resolverá aplicando el axioma de las conjeturas razonadas, es decir: cambiando de perspectiva de forma eficiente (o dicho de otra manera: razonando). Escrito matemáticamente:

$$\varphi_1\big(a,b,f_1(c,d),e,...,A,F_1(B,C,D),E,...\big)=1 \quad \xrightarrow{R!} \quad \varphi_2\big(\pi_1,\pi_2,...\big)=1 \quad (15)\equiv(7)$$

Un primer intento puede consistir en aplicar el teorema Π de Vaschy & Buckingham o la generalización propuesta por Sonin [18] y que agrupa el problema en variables y constantes.

Un segundo intento para resolver la cuestión consiste en aplicar el teorema Pi con su primer corolario. Aparecerán monomios adimensionales cuya expresión e interpretación puede ayudar a profundizar en la conexión entre ambas teorías.

Como tercera posibilidad contamos con el corolario II del teorema Π, que considera monomios dimensionales.

En último término, es el axioma de las conjeturas razonadas quien resolverá el problema planteado. En tal caso, habrá que esperar a que un Genio dé con la solución merced a un hallazgo (a una función divagada clarificadora). Pero entretanto y de forma genérica, lo podemos dar por resuelto con ayuda del axioma (ecuación 15), lo que pone de manifiesto que se trata de un modelo sobre el funcionamiento de la mente humana.

C.Q.F.D.

Referencias

[1] Vaschy, A. (1892): “Sur les lois de similitude en physique”. *Annales Télégraphiques,* 19: 25 – 28

[2] Riabouchinski, D.P. (1911): “Méthode des variables de dimension zéro”. *L'Aérophile*, 19 : 407 – 408

[3] Buckingham, E. (1914): “On physically similar systems. Illustrations of the use of dimensional equations”. *Physical Review,* 4: 345 – 376

[4] González Redondo, F.A. (2000): “El teorema Π de Buckingham: núcleo del Análisis Dimensional”. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 55: 67 – 75

[5] Görtler, H. (1975 a): “Zur Geschichte des Pi – Theorems”. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM)*, 55: pp. 3 – 8

[6] Görtler, H. (1975 b): *Dimensionsanalyse. Theorie der physikalischen Dimensionen mit Anwendungen.* Springer (Berlin, Alemania)

[7] Carneiro, F.L.L.B. (1992): “A evolução da Análise Dimensional de Vaschy (1890) a Buckingham (1914): O teorema de Pi”. Seculo XIX: O nascimento da Ciencia Contemporanea. UNICAMP, Campinas (Brasil): 328 – 348

[8] Szirtes, T. (1998): *Applied Dimensional Analysis and Modeling.* McGraw-Hill (EEUU)

[9] González Redondo, F.A. (2001): “Génesis y primera formulación del Teorema *Π*.” *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 59: 83 – 93

[10] González Redondo, F.A. (2002): “El teorema *Π* entre Vaschy y Buckingham: el método de las variables de dimensión cero”. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 60: 71 – 81

[11] Pobedrya, B.E. & Georgievskii, D.V. (2006) : “On the Proof of the Π-Theorem in Dimension Theory”. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 13 (4): 431 – 437

[12] Martinot-Lagarde, A. (1948): *Analyse Dimensionelle : Applications à la Mecanique des Fluides.* Groupement des Recherches Aeronautiques (Lille, Francia)

[13] Birkhoff, G. (1950): *Hydrodynamics: A Study in Logic, Fact and Similitude.* Universidad de Princeton (EE.UU.)

[14] Boyling, J.B. (1979): “A Short Proof of the Pi Theorem of Dimensional Analysis”. *Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP)*, 30: 531 – 533

[15] Curtis, W.D.; David Logan, J. & Parker, W.A. (1982): “Dimensional Analysis and the Pi Theorem”. *Linear Algebra and its Applications*, 47: 117 – 126

[16] Hainzl, J. (1968): “Verallgemeinerung des Π - Theorems mit Hilfe spezieller Koordinaten in Lieschen Transformationsgruppen”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 30: 321 – 344

[17] Carlson, D.E. (1978): “On some new results in dimensional analysis”. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 68 (3): 191 – 210

[18] Sonin, A.A. (2004): “A generalization of the Π-theorem and dimensional analysis”. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 101 (23): 8525 – 8526

[19] Rudolph, S. (1998): “On the context of dimensional analysis in artificial intelligence”. *Proceedings of the International Workshop on Similarity Methods* (Universidad de Stuttgart, Alemania) : 147 – 161

[20] Rudolph, S. (2002): *Übertragung von Ähnlichkeitsbegriffen*. Institut für Statik und Dynamik der Luft- und Raumfahrtkonstruktionen. Universidad de Stuttgart (Alemania)

[21] Schmidt Castañeda, J.W. ; Sandoval, F.J. & Dorantes González, D.J. (2005): “A comparison and application of pattern recognition techniques in materials selection using dimensionless numbers”. *Proceedings of the 5th International Conference on Technology and Automation (ICTA ’05). Paper nr. 26*

[22] Martínez de Azagra Paredes, A.; Pando Fernández, V.; del Río San José, J. & Navarro Hevia, J. (2006): “Aproximación al conocimiento de la infiltración a través del análisis dimensional”. *Ecología*, 20: 471 – 491

[23] Martínez de Azagra Paredes, A.; Pando Fernández, V. & del Río San José, J. (2007): *Generalizaciones al teorema π de Buckingham con algunas aplicaciones*. Número de Asiento Registral 00 / 2007 / 4703 (solicitud P-12-07) del Registro General de la Propiedad Intelectual. Disponible en http://www.oasificacion.com (22-3-2007 en adelante)

[24] Sheppard, M. (2007): *Systematic search for expressions of dimensionless constants using the NIST database of physical constants.* Disponible en https://www.msu.edu/~sheppa28/constants/constants.html (1-10-2008)

Cálculo mental en el aula

Mª Ortiz Vallejo
Dpto. de Análisis matemático y Didáctica de la matemática. Univ. de Valladolid
mortiz@am.uva.es

Abstract

The present paper is a summary of a book written by the author. It first deals with a small study on the influence of emotions in the process of mathematical teaching and learning, then presents the advantages of a specific line of work on mental calculus in a classroom environment and finally it conveys a discussion on selecting the more adequate didactical contents and methodology to be considered in order to help students improve their emotional behavior while dealing with mathematical learning.

Con este resumen de mi libro, va mi homenaje al profesor Eugenio Roanes Macías, que me puso en contacto con la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a través de sus excelentes libros. Y que para mi ha sido siempre un ejemplo, no sólo como trabajador e investigador infatigable en el mundo de las Matemáticas, sino también como el de una excelente persona, que tiene muchísima gente que le apreciamos, le admiramos y que le deseamos todo lo mejor.

"Las emociones descontroladas pueden convertir en estúpida a la gente más inteligente"
(David Goleman, 1999, "Emotional intelligence" p.44)

1. Las matemáticas y las emociones

Desde hace casi tres décadas se están llevando a cabo numerosas investigaciones, en las que se empieza a tener en cuenta en el proceso enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, no sólo los logros académicos de naturaleza cognitiva, sino el reconocimiento del papel esencial que conlleva la dimensión afectiva en todo este proceso; en concreto, la vertiente emocional de la inteligencia y su importancia en el aprendizaje de las Matemáticas. De hecho, dentro del colectivo de profesores, cada vez está más presente la necesidad de desentrañar aspectos emocionales del conocimiento, en los que puede encontrarse el origen de los numerosos fracasos de la educación.

Son muchos los investigadores que creen en la importancia del afecto en el desarrollo mental de las personas. Por ejemplo, para Piaget (1977), el afecto es un aspecto esencial en el funcionamiento de la inteligencia, ya que, para él sin afecto no hay interés, necesidad y motivación para el aprendizaje y sin éstos no hay desarrollo mental. Para Henri Wallon (1984) el afecto interviene en la construcción tanto de la persona como del conocimiento. Mc Leod (1989) establece que la relación entre dominio afectivo y aprendizaje es bidireccional, ya que *"los afectos condicionan el comportamiento y la capacidad de aprender y el proceso de aprendizaje provoca reacciones afectivas"* Bazán y Aparicio (2006)[1] y Alsina (2000)[2] señalan que las matemáticas están relacionadas tanto con la mente "racional", como con la inteligencia "emocional", aseverando el segundo autor, que: *"las clases de matemáticas han provocado, a menudo, emociones más negativas que positivas".*

En esta dimensión, en la que se integra una perspectiva afectiva, destacamos a algunos investigadores, sobre todo a la profesora Gómez Chacon I. (2000), que cita a distintos autores, como, DÁmbrosio, (1985), Bishop (1988), Mellin-Olsen (1987), McLeod (1988, 1992, 1994), etc., los cuales coinciden en señalar la influencia que tienen las cuestiones afectivas sobre el proceso de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Un primer problema a despejar para comprender las cuestiones afectivas en dicho proceso, es encontrar una definición clara de lo que es el *afecto o el dominio afectivo*; para lo cual nos quedamos con la definición que recoge Gómez Chacon I. (2000)[3] de McLeod (1989, 1992), Krathwohl y otr. (1973):

"El término dimensión afectiva comprende un extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) *que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición"*

Gómez Chacon, amplia la definición de forma que no sólo considera los sentimientos y las emociones, sino también las creencias, las actitudes, los valores y las apreciaciones.

---

[1] Bazán y Aparicio (2006)

[2] Alsina, C. (2000)

[3] Gómez Chacón, I. (2000)

Veamos, de forma muy resumida, lo que entiende la autora por algunas de estos componentes, desde el punto de vista de su relación con las matemáticas:

- Las *creencias* matemáticas, forman parte del conocimiento subjetivo implícito del individuo, sobre las matemáticas y su enseñanza-aprendizaje. Cita a McLeod que distingue dos categorías que pueden incidir en este aprendizaje:

a) Creencias acerca de las matemáticas como disciplina, en donde existe poca componente afectiva, aunque es en donde se desarrolla una parte importante del afecto.

b) Creencias del estudiante (y del profesor) acerca de si mismo y su relación con la materia. Existe en este caso una fuerte componente afectiva relacionada con la confianza, el autoconcepto, y el atribuirse el éxito o fracaso escolar.

- La *actitud*, la entiende como una predisposición, que puede ser positiva o negativa que determina las intenciones personales y por tanto influye en los comportamientos.

Para el caso de que el objeto sea las matemáticas, distingue dos categorías (NCTM, 1989, Callejo, 1994):

- Actitudes hacia la Matemática: relacionada con la valoración y aprecio por esta disciplina y al interés hacia su aprendizaje. Subrayan el componente afectivo más que el cognitivo.

- Actitudes matemáticas: el carácter es marcadamente cognitivo, y relacionado con la manera de utilizar capacidades generales, como: el espíritu crítico, la apertura mental, flexibilidad de pensamiento, etc.

Estas dos categorías vemos que se contemplan en los Estándares de la NCTM (2003)[4] y en los currículos oficiales tanto para E. Primaria M.E.C. (2007)[5], como para Educación Secundaria M.E.C. (2007)[6].

- Las *emociones*, para Gómez Chacón (2000): *"son respuestas organizadas más allá de la frontera de los sistemas psicológicos, incluyendo la fisiológico, cognitivo, motivacional y el sistema experiencial"*.

Emanan de la respuesta a un suceso, que puede ser interno o externo, y tienen una carga significativa positiva o negativa para el individuo. Las creencias de los estudiantes pueden influir en gran manera en las emociones, siendo estas un aspecto muy importante en la estructuración de lo que se enseña y aprende.

[4] NCTM (2003)

[5] M.E.C. E. Primaria (2007)

[6] M.E.C. E. Secundaria (2007)

2. Consecuencias de los afectos sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Numerosos investigadores, como hemos señalado anteriormente, coinciden en afirmar que los afectos de los estudiantes tienen un papel clave en la comprensión de cómo se comportan respecto a las matemáticas. Los más destacables son:

. En cómo aprenden y utilizan las matemáticas. Porque establecen el contexto personal en el que se encuentran los recursos, estrategias heurísticas y el control al trabajar la matemática.

. En la estructura del autoconcepto como aprendiz de matemáticas.

. En las interacciones con el sistema cognitivo.

. En la influencia sobre la estructuración de la realidad social del aula.

. En obstáculos para un aprendizaje eficaz, puesto que los que tienen creencias negativas acerca de las matemáticas y de su aprendizaje, tienden a memorizar más que a comprender.

De forma que siempre se establece una relación cíclica entre los afectos (emociones, actitudes y creencias) y el aprendizaje; puesto que el estudiante adquiere una *experiencia en el aprendizaje* en la que recibe una serie de estímulos (relacionados con la materia, con el profesor, el ambiente de la clase, etc.), le provoca distintas reacciones que van a influir en la formación de sus *creencias.* Al mismo tiempo, estas creencias van a tener una consecuencia directa en sus *emociones* (que están condicionadas por sus creencias acerca de si mismo y acerca de las matemáticas y su experiencia de aprendizaje), todo lo cual coopera a generar una determinada *actitud* ante las situaciones de aprendizaje y por tanto influirá en su capacidad para aprender. Si las experiencias de aprendizaje se repiten de forma similar y le siguen produciendo al individuo la misma clase de reacciones afectivas, nos encontramos con que se puede automatizar la reacción emocional (satisfacción, frustración, etc.) y pasando un tiempo, su actitud ante el proceso siempre será similar.

Veamos el siguiente cuadro, que resume lo expuesto en el párrafo anterior:

EXPERIENCIA EN EL APRENDIZAJE

CREENCIAS
Acerca de las Matemáticas y acerca de uno mismo respecto a estas

EMOCIONES
Reacciones positivas y/o negativas hacia un nuevo estímulo asociado con las matemáticas

ACTITUDES
Positivas y/o negativas hacia las matemáticas o partes de las mismas

Todos, en especial los profesores, conocemos casos de alumnos que se sienten incapaces ante las Matemáticas; algunos, se encuentran traumatizados de tal manera, que cuando se tienen que acercar a esta materia están totalmente bloqueados. Repetidas veces oímos a nuestros alumnos más flojos, comentarios relacionados con las mismas, achacando que no se les da bien o que no les gustan y atribuyéndolo inmediatamente a distintos motivos que podemos distribuir en tres grupos: Unos, razones de tipo epistemológico, alusivas a las características que tiene la materia, como: comprensión, jerarquización, abstracción, rigor, lenguaje matemático, etc. Otros, relacionados con el entorno académico, en donde el profesor es el que se lleva la peor parte como protagonista del proceso de enseñanza, y por último aquellos motivos en donde la culpa recae sobre el alumno, aduciendo razones, como: se les da mal esta asignatura, son de letras, no les gusta, etc. ¿será una consecuencia el tercer aspecto del segundo?...

En esta línea, Alsina C.[7] comenta que si se trabajase para que los alumnos tuvieran sentimientos y emociones positivas hacia las matemáticas, el alumnado llegaría a la no experimentación de un bloqueo de la “mente racional” y de esta

7 Alsina, C. (2000)

manera, avanzaría en dicho campo. Según él, se debería trabajar sobre las emociones negativas y positivas del siguiente modo:

- Combatiendo emociones negativas como ira, tristeza, miedo, aversión,..

- Fomentando emociones positivas como: alegría (diversión a la hora de hacer matemáticas), sorpresa (sorprender, aumentar la atención), confianza (favorecer la confianza en uno mismo, dominar los conceptos, adquirir habilidades, recursos y estrategias, etc.)

Creemos por tanto, que como profesores de matemáticas, nuestro papel, no tiene que ser el de un simple transmisor de conocimientos, sino también el de ocuparnos en saber desarrollar una metodología para el proceso de enseñanza-aprendizaje, capaz de generar experiencias positivas, con el objetivo de que el alumno adquiera confianza en si mismo y modifique sus creencias y con ello se produzcan emociones y actitudes positivas. Tengamos presente, que si somos capaces de que en nuestra materia cooperemos para que los alumnos puedan gestionar sus emociones e impulsos, estarán más capacitados para pensar con claridad y concentrarse ante cualquier reto, indistintamente de que estén presionados o no. Seguro que el lector estará de acuerdo con todo lo expuesto en este párrafo, aunque al mismo tiempo estará haciéndose más de una pregunta, por ejemplo: *¿de qué manera?* Nosotros proponemos una.

3. El papel del cálculo mental en el aula. Contribución al desarrollo de competencias básicas

Recordemos lo que asevera Gómez Chacón I.: "*La asunción progresiva de responsabilidad del alumno en la planificación, en el control del proceso de aprendizaje y en la evaluación, supone necesariamente tener en cuenta la regularización de los sentimientos, actitudes y creencias*".

Como dice la autora, se trata de regular los sentimientos actitudes y creencias, para lo cual proponemos que una herramienta interesante podría ser un programa de intervención en el aula, a través del trabajo diario del *Cálculo Mental***.** Este tipo de cálculo con una metodología adecuada, creemos que puede responder a las expectativas señaladas, puesto que puede desarrollar una serie de capacidades que inciden en las creencias, emociones y actitudes. Todo lo cual, supondría en principio, la mejora de la actitud hacia el cálculo numérico y por tanto hacia todos aquellos contenidos que estén relacionados con el número y las operaciones. ¿Y por qué no, con esta base, ante el resto de las matemáticas? Por supuesto, esta cuestión habría que demostrarla, lo que podría ser el tema central de estudios más profundos. Nosotros, hemos hecho pequeños estudios en trabajos de investigación tutelada en la Universidad y en experiencias personales a través de cursos de formación de profesores sobre este tema, que nos han servido para comprobar algunas de estas aseveraciones.

A continuación, vamos a intentar justificar nuestra propuesta; para lo cual, independientemente de los contenidos, que describiremos posteriormente, nos parece muy importante la metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje. El planteamiento que seguimos procede de los resultados de las investigaciones en este campo, de nuestras experiencias didácticas, y de los comentarios expresados por los profesores que trabajan en sus aulas el cálculo mental. Resultando de todo esto, presentamos una serie de *pautas*, que consideramos pueden favorecer las creencias y por tanto, mejorar actitudes. Como son:

· *El trabajo en el aula debe ser participativo*, en donde el alumno puede aprender de los procedimientos del resto de compañeros y al mismo tiempo defender, argumentando, los suyos; lo que le obliga a ser reflexivo y fijar los conocimientos.

· *El trabajo del aula debe se atractivo*, lo cual se puede llevar a cabo a través de distintas actividades, como: ejercicios, competiciones y juegos en pequeños y grandes grupos.

· *El alumno debe sentirse cómodo y seguro*, de forma que, el profesor, no debe primar velocidades de respuesta hasta que lo considere oportuno, puesto que pueden provocar inseguridades en los alumnos más lentos.

· *La aplicación de los cálculos a la vida cotidiana*. El alumno debe encontrar la aplicabilidad de su esfuerzo; ya sea a través de los contenidos del curso o a través de la resolución de problemas reales de la vida cotidiana. Se debe intentar que adelanten las soluciones de forma aproximada.

· *Atención a la diversidad*. Hay que tener presente, que dentro del grupo de clase, existirán distintas velocidades de aprendizaje, ya que no todo el mundo está igual capacitado y es el profesor el que debe ser flexible y respetar esta diversidad para que no experimenten inseguridad y rechazo. Importante hacer uso entonces de material de autoayuda.

· *El alumno debe descubrir y entender los procedimientos* que le muestra el profesor, antes de practicarlos. Sin embargo el profesor debe respetar la originalidad de las estrategias personales.

· *Las sesiones de cálculo mental deben ser breves y diarias***.** Como se requiere gran concentración y tensión, cansa rápidamente, de forma que si se trabaja mucho tiempo, la atención disminuye y los resultados empeoran. Por lo tanto, recomendamos sesiones cortas, de diez a quince minutos,

· *Es mejor enseñar el CM con una variedad de contextos y aplicaciones*, en lugar de enseñarlo aisladamente. Si después de un periodo planificado de adiestramiento, siguen los alumnos sin prever el resultado de una operación, si siguen utilizando la calculadora o el lápiz y papel para hacer cálculos sencillos, es un síntoma claro de no haberse alcanzado unos objetivos mínimos de capacitación de los alumnos.

· Finalmente señalar que la experiencia muestra que, normalmente, *la persona hábil en cálculo mental es la persona que lo practica.*

Para nosotros, en el aula, el *Cálculo Mental*, debe ser *un cálculo basado en la exploración y reflexión, práctico, motivador, relajado, respetando el protagonismo y autonomía de cada individuo, con flexibilidad de acción, diálogo, y en donde no debe primar la velocidad de respuesta.*

Con estas pautas, entendemos que el alumno puede desarrollar una serie de *habilidades-capacidades*, como las siguientes:

· *Planificación*: puesto que debe programar los pasos del procedimiento elegido.

· *Concentración*: las distracciones durante el procedimiento potencian los errores.

· *Rigurosidad*: en cada paso del procedimiento, para no fallar en la exactitud del resultado.

· *Razonamiento*: puesto que implica reflexionar sobre el procedimiento y sobre cada paso que se elije.

· *Reacción al estímulo–respuesta*: al tener que responder lo demandado por el profesor, en un tiempo concreto.

· *Saber tomar decisiones*: por el hecho de tener que elegir un procedimiento determinado frente a otros varios.

· *Flexibilidad*: puesto que puede alterar los datos de la forma que más le facilite la resolución, dependiendo el caso, ya sea: descomponiendo, cambiando el orden, los datos, etc.

· *Memoria*: ya que debe recordar hechos, a corto y largo plazo. A corto plazo, cuando se debe recordar resultados intermedios del proceso. A largo plazo: tablas, propiedades, fórmulas, equivalencias (1/4 = 0,25 = 25/100 = 25%), etc.

· *Autonomía*: puesto que el procedimiento que sigue el alumno es estrictamente personal y lo tiene que resolver sin ninguna ayuda externa.

· *Seguridad psicológica*: Como consecuencia de esta autonomía, entre otros aspectos, el alumno "sabe que es capaz" de resolver situaciones relacionadas con las Matemáticas.

4. Contribución al desarrollo de competencias básicas

Siguiendo las directrices del MEC para Educación Primaria y Secundaría, el trabajo del cálculo mental en el aula puede desarrollar las siguientes competencias:

· Los contenidos del cálculo mental y las destrezas, por sus características, garantizan el desarrollo de la *competencia matemática* (Carrol y Porter, 1994).

· El cálculo mental y aproximado contribuye al desarrollo de la *competencia en el conocimiento e interacción* con el mundo físico, porque hace posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno. En este caso, por ejemplo, a través de los problemas se logra un mejor conocimiento de la realidad y se aumentan las posibilidades de interactuar con ella y de transmitir informaciones cada vez más precisas sobre aspectos cuantificables del entorno.

· El *tratamiento de la información y competencia digital* en varios sentidos. Por una parte, porque proporcionan destrezas asociadas al uso de los números, tales como la comparación, la aproximación; por otra parte, las relaciones entre las diferentes formas de expresarlos, facilitando así la comprensión de informaciones que incorporan cantidades o medidas. La calculadora puede ser un recurso eficaz para la autoevaluación.

· La *autonomía e iniciativa personal*, bien mediante la resolución de problemas, por ejemplo, estrategias de estimación en cálculo y en media, o bien mediante la posible mejora de actitudes, asociadas con la confianza en la propia capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones inciertas en las que tiene que usar todo tipo de estrategias.

· La de *aprender a aprender* por el contenido instrumental del cálculo mental, puesto que su uso está relacionado con la autonomía, la perseverancia y el esfuerzo para abordar situaciones de creciente complejidad, la sistematización, la mirada crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo. Así como la verbalización del proceso seguido, ayuda a la reflexión sobre qué se ha aprendido, qué falta por aprender, cómo y para qué, lo que potencia el desarrollo de estrategias que facilitan el aprender.

· Su metodología fomenta el desarrollo de la competencia en *comunicación lingüística*, bajo dos vertientes, por una parte la incorporación de lo esencial del lenguaje matemático a la expresión habitual y la adecuada precisión en su uso. Por otra parte, es necesario incidir en los contenidos asociados a la descripción verbal de los razonamientos y de los procesos. Se trata tanto de facilitar la expresión, como de propiciar la escucha de las explicaciones de los demás, lo que desarrolla la propia comprensión, el espíritu crítico y la mejora de las destrezas comunicativas.

· Con una metodología adecuada, puede existir aportación a la competencia *social y ciudadana* se refiere al trabajo en equipo que en cálculo mental adquiere una dimensión singular si se aprende a aceptar otros puntos de vista distintos al propio, en particular a la hora de utilizar estrategias personales de resolución de ejercicios, problemas y juegos.

5. Contenidos y actividades relacionados con el cálculo mental

Si preguntamos a un grupo de personas sobre el proceso que han seguido para resolver un determinado cálculo aritmético y que nos concreten los pasos que han tenido que hacer para llegar al resultado, nos podemos encontrar un abanico de respuestas. Estas cuestiones las hemos ido pasando a lo largo de los últimos años a diversos colectivos: maestros, alumnos de la E.U.E y alumnos de doctorado. Veamos algunos ejemplos de respuestas más habituales correspondientes a la resolución de la siguiente suma:

58 + 97 : 8 y 7 = 15, 5 y 9 = 14, me llevo 1, 155
= (58 + 90) + 7 = 148 + 7 = 155
= (50 + 90) + 8 + 7 = 140 + 15 = 155
= (58 + 2) + (97 - 2) = 60 + 95 = 155
= 97, 107, 117, 127, 137, 147 + 8 = 155
= 58 + (97 + 3) - 3 = (100 + 58) - 3 = 155 (Pablo, 9 años)
= (58 – 3) + (97 + 3) = 55 + 100 = 155 (Diego, 8 años)

Analizando cada uno de estos procedimientos, observamos que unos resuelven la operación como si estuvieran haciendo el algoritmo escrito, otros, para facilitarse los cálculos, descomponen uno o dos de los sumandos y posteriormente los asocian, otros perciben y calculan lo que queda para la decena más próxima y suman - restan complementando al número que les interesa, otros van sumando de diez en diez, etc. Al mismo tiempo que todos se sirven de conocimientos, como: valor relativo de los números, tablas, manejo de propiedades, etc.

Vemos, por tanto, que cada procedimiento va a depender, en gran medida, del dominio de una serie de cálculos elementales que podemos señalar como básicos, y que son los que van a influir en la elección de la estrategia de resolución. Cada individuo tenderá, consciente o inconscientemente, a hacer uso de aquellas componentes básicas que mejor domine o le resulten más fáciles o manejables y obtenga más rápidos resultados. De esta manera, el profesor puede influir en el éxito de aplicar una determinada estrategia, si facilita determinadas bases, por ejemplo, si su objetivo es enseñar una estrategia basada en la utilización de la línea numérica para la adición[8], es bueno que practiquen antes ejercicios en los que se les pida que sumen de 10 en 10. Si se les quiere introducir en estrategias que conlleven descomposiciones de los sumandos, sería recomendable que se empiece trabajando actividades de descomposición. Si van a tener que hacer uso de propiedades, facilitarles la comprensión de las mismas, etc.

Con estas premisas, entendemos que, para tener buenos resultados en la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental, el alumno debe dominar primeramente una serie de conocimientos, como son: el número y su valor relativo, las operaciones y sus propiedades y conocer una serie de estrategias que le faciliten la resolución de operaciones. Por otra parte, este trabajo estaría incompleto si no se aplica al entorno más próximo al niño. Teniendo en cuenta lo indicado, hemos dividido el trabajo en el aula en dos grandes grupos de actividades:

a) Actividades de adiestramiento, cuyo objetivo es la puesta en práctica de la teoría, a través de la resolución de ejercicios. Conocimientos teóricos.

b) Actividades de aplicación a la realidad, a través de la resolución de los problemas relacionados con los contenidos matemáticos que conlleva cada curso, teniendo muy presente el entorno real. Aplicaciones del cálculo mental.

5.1 Conocimientos teóricos

Aquí presentamos los contenidos que son indispensables para poder desarrollar la práctica del cálculo mental en el aula. Por tanto, presentaremos: los conocimien-

---

[8] 3.1.3 Estrategias más habituales

tos básicos relacionados con el número, con las operaciones y por último presentaremos una serie de estrategias que son más habituales. El tamaño de los números, para la resolución de operaciones, lo limitaremos a dos cifras, puesto que trabajar con más rebajaría la eficacia del mismo al incrementarse las dificultades. No obstante, si los números son manejables para el nivel del aula, no hay ningún inconveniente.

5.1.1 Conocimientos básicos relacionados con el número

En este apartado nos ocupamos de las actividades que facilitan la profundización en el número natural, así como las relaciones entre distintos campos numéricos.

a) Numeración. La comprensión del valor relativo, es un proceso laborioso que presenta muchas facetas y las investigaciones prueban que algunas son difíciles de aprehender (errores de concepto afecta también a los alumnos de secundaria); de aquí que debe ser su enseñanza un proceso de larga duración que exige una progresión larga y cuidadosamente concebida.

Buena parte de la base del C.M. descansa en este conocimiento, ya que no se puede concebir ninguna modificación del número para optar por cualquier estrategia, sin conocerle en profundidad; de hecho, vemos cómo en los ejemplos de resolución propuestos, se modifican las cantidades numéricas iniciales a base de: descomposiciones, compensaciones, sustituciones, etc.

Entre las actividades que facilitan el aprendizaje del número, vamos a describir las que consideramos más importantes y que deben trabajarse, sobre todo en los primeros cursos. Las hemos agrupado en los siguientes grupos: 1. Lectura y escritura, 2. Contar, 3. Relacionar, que comprende: comparar, intercalar, ordenar, seriar y 4. Componer, 5. Descomponer.

b) Equivalencias. Cuando se trabaja con determinadas operaciones, el mundo de las equivalencias puede facilitar extraordinariamente la consecución de resultados, ya que permite sustituir, cuando es necesario, unos números por otros de distintos campos numéricos.

- Fracciones a decimales: 1/3 = 0,33, 1/4 = 0,25, 1/3 = 0,33, 2/3 = 0,6, 1/5 = 0,20, 1/6 = 1/2×1/3 = 1/2×0,333 = 0,167, 1/8 = 1/2×1/4 = 1/2×0,25 = 0,125…
- Números enteros por fracciones: 5 = 10/2, 25 = 100/4, 50 = 100/2, 75 = 3/4×100, 15 = 10 + 10/2. 25 = 10×2 + 10/2...
- Números decimales por fracciones: 0,1 = 1/10, 0,5 = 1/2, 0,25 = 1/4, 0,2 = 2/10, 0,125 = 1/8, 0,75 = 3/4, 1,25 = 5/4, 1,5 = 3/2, 2,5 = 10×0,25 =10/4…

· Porcentajes por fracciones o decimales: 10% = 1/10 = 0,1, 25% = 1/4 = 0,25, 50% = 1/2 = 0,5, 75% = 3/4 = 0,75, 80% = 0,8 = 4/5…

5.1.2 Conocimientos básicos relacionados con las operaciones

En este apartado incluimos el resto de conocimientos básicos que hacen posible la resolución de las operaciones y la aplicación de estrategias, como son: la memorización de las tablas aditivas y multiplicativas, la de algunos productos notables y la comprensión y memorización de una serie de propiedades básicas.

a) Las tablas. Entendemos por tablas a las 11×11 combinaciones aritméticas básicas que se pueden realizar con los 10 dígitos. Hay autores que recomiendan la memorización de las tablas hasta el 12[9], lo que nos parece interesante, puesto que son hechos fáciles de recordar y facilitan numerosos cálculos.

b) Las propiedades. Si desarrollamos cualquier cálculo podemos darnos cuenta de las numerosas veces que hacemos uso de alguna o algunas propiedades, consciente o inconscientemente. Las más usuales para las dos operaciones son: la identidad, la conmutativa, la asociativa, la invariancia, la distributiva y la simplificativa.

c) Productos notables. A la hora de hacer determinados cálculos, puede ser muy útil recordar una serie de resultados y fórmulas que pueden ayudar a facilitar el proceso de resolución. Recordemos la “biblioteca de memoria”, que recomienda Hope para ser un buen “resolutor” de operaciones. Por tanto sería interesante, a partir de un nivel determinado, memorizar una serie de hechos, como: Dobles, mitades, triples, cuadrados…, de los primeros números, Fórmula del binomio, Fórmula de la suma por diferencia de cuadrados, etc.

5.1.3 Estrategias más habituales

Existen numerosas estrategias que facilitan la resolución mental de las distintas operaciones; abarcando, según el nivel, los distintos campos numéricos. Con el trabajo en el aula de estos procedimientos, el alumno procede a “aprender” o hacer suyas aquellas que más se adapten a su esquema mental, sin necesidad de tener que descubrirlas personalmente, algo que la mayoría del alumnado tardaría mucho tiempo en realizar.

---

[9] Alfred Hope, J. 1984

Respecto a este aspecto, hay dos corrientes, las de aquellos que defienden que los niños desarrollen sus propios métodos y trabajen sólo con estrategias informales, como ocurre en numerosos países, y la de aquellos en donde se les "imponen" aquellos procedimientos estándares más formales que seleccione el profesor. Coincidimos con Caroll (1996) y corroboramos con nuestra investigación[10], en que al principio el alumno no tiene recursos suficientes para crear tales estrategias y, por tanto, es positivo presentar aquéllas que sean más eficaces y más sencillas que las propias de los algoritmos estándares, y que den paso a posibles creaciones de nuevas estrategias por los propios alumnos. De acuerdo con ello, pensamos que el niño, primeramente, debe conocer aquellos contenidos básicos relacionados con el cálculo y que a partir de este momento se le proporcionen en el aula las estrategias relacionadas, sin desechar nunca aquellas que él mismo descubra. Este tipo de estrategias que el niño descubre de forma intuitiva y que a veces nos sorprenden; si son correctas y sencillas, son las primeras que el profesor debe tener en cuenta como favoritas.

La eficacia de las estrategias enseñadas, una vez comprendidas, con la práctica las hará suyas si son aprendizajes significativos. Nosotros hemos seleccionado aquellas que nos han parecido no ofrecían demasiada dificultad y eran las más habituales; después el profesor, de todas ellas, es el que debe decidir las que entienda sean más interesantes para su grupo de trabajo. Las hemos dividido en dos grupos, teniendo en cuenta el carácter aditivo y multiplicativo.

5.1.3.1 Estrategias aditivas

Las hemos dividido en sumas y restas. Dentro de cada operación, las hemos graduado de menor a mayor dificultad; el criterio que hemos escogido ha sido teniendo presente diferentes aspectos que pensamos pueden influir en la dificultad de la resolución, como: sumar resulta más fácil que restar, el número de pasos necesarios para llegar a la solución, las propiedades de las que se hace uso y el tipo de tratamiento que hacemos de los datos. Si algún lector está interesado en entender esta graduación, en el libro hacemos una descripción detallada.

---

[10] Proyecto de investigación y curso de cálculo mental. Dirigido a profesorado de Primaria y Secundaria. C.P.R. de Valladolid. (1999-2000).

a) Sumas

0. Estrategias elementales. Están pensadas para sumar un número de una sola cifra a una determinada cantidad. Por ejemplo, a un número dado, sumarle 10; sumarle 9 (19, 29,..); sumarle 11(21, 31,..); sumarle 8 (18, 28,..)

1. Artificios. Siguiendo los pasos del algoritmo.

2. Línea numérica o saltos de diez. Se trata de resolver sumas de forma gradual:

$$57 + 26: 57 \rightarrow 67 \rightarrow 77 + 6 = 83$$

3. Descomposiciones (uso de cantidades menores que las dadas): De un dato. De un dato a complementar. De un dato por defecto. De los dos datos

4. Recolocación. Se trata de recolocar mentalmente los números para agruparlos según las familias de la unidad seguida de ceros.

b) Restas

0. Estrategias elementales. Están pensadas para sumar un número de una sola cifra a una determinada cantidad. Por ejemplo: Restar a un número el 10. Restar a un número el 9 (19, 29,..). Restar a un número el 11(21, 31,..). Restar a un número el 8 (18, 28,..)

1. Artificios. Siguiendo los pasos del algoritmo.

2. Línea numérica o saltos de diez. Se trata de resolver restas de forma gradual:

$$51 – 23: 23 \rightarrow 33 \rightarrow 43 \rightarrow 51- 43 = 28$$

3. Descomposiciones (uso de cantidades menores que las dadas): De un dato. De un dato segregando. De un dato haciendo la misma terminación

4. Compensaciones. Mediante el incremento de uno o de los dos datos compensando adecuadamente el resultado

5. Sumas y restas de números terminados en ceros. Se suman (restan) las cantidades sin los ceros y posteriormente se añaden.

5.1.3.2 Estrategias multiplicativas

Si observamos estas estrategias suelen presentar: descomposiciones numéricas en sumas, restas y productos, uso de propiedades como la distributiva y la invariancia (para compensar) y sustituciones de unos números por otros mediante equivalencias.

Las de la primera parte son más sencillas, puesto que nos referimos a los casos en los que se multiplica una determinada cantidad por una sola cifra.

0. Estrategias elementales: Están pensadas para multiplicar un número de una sola cifra a una determinada cantidad. Por ejemplo: Multiplicar un número por 2, por 3, por 4, por 5, por 6, 7, 8, 9, 10. Para ello, equivale a sumar dos veces (×2), añadir a dicho número el doble (×3), doblar el doble (×4), sustituir el 5 por 10 y dividir por 2 (×5), usando la propiedad distributiva (6, 7, 8, 9), añadir un cero a la derecha del número (×10)

1. Artificios: Multiplicación de números cuyas cifras están formadas por 11, 111, 101, 1001, etc.

2. Descomposiciones.

2.a Aditivas. Se trata de aplicar la propiedad distributiva. Ejemplos:
· utilizar cuadrados: $25\times26 = 25\times (25 + 1) = 25\times25 + 25 = 625 + 25 = 650$
· descomponer el factor decimal en cuartos y mitades
· multiplicar por 5, 15, 25, 35,.. y por un número impar.

2.b Multiplicativas. Mediante la descomposición en factores:
· multiplicar por 12, 15, 22, 33,…
· dividir descomponiendo el divisor en factores.
· dividir descomponiendo el dividendo en factores.

3. Compensaciones. Multiplicar y dividir por un mismo número.

4. Sustituciones. Sustituir números teniendo presente equivalencias numéricas:
· multiplicar por 5 (10/2), 25 (100/4), 75(3/4.100), 125 (1000/8), etc, es decir, cuando el denominador sea divisor de algún dato.
· multiplicar por 0,5 (1/2), 0,25 (1/4), 0,2 (2/10), 0,125 (1/8), 0,75 (3/4), 1,25 (5/4), 1,5 (3/2), 2,5 (10/4) , es decir, cuando el denominador sea divisor de algún dato.

· dividir por: 5(10/2), 25(100/4), 75(3/4.100), 125(1000/8), etc, es decir, cuando el divisor es múltiplo o parte alícuota de 10, 100, 1000.
· dividir por 0,5 (1/2), 0,25 (1/4), 0,2 (2/10), 0,125 (1/8), 0,75 (3/4), 1,25 (5/4), 1,5 (3/2), es decir, cuando el denominador sea divisor de algún dato.
· Calcular porcentajes: 10% (1/10 = 0,1), 20% (1/5 = 0,20), 25% (1/4 = 0,25), 50% (1/2 = 0,5), 75% (3/4 = 0,75), 80%(4/5=0,8)
· elevar a potencias: utilizando propiedades de las potencias.

5.2 Aplicaciones del cálculo mental

Una vez que se trabajan los ejercicios de cálculo mental, pasamos a la aplicación del mismo, que es donde se encuentra el verdadero sentido de este cálculo; ya que el hecho de aplicar estos conocimientos en distintos contextos, es lo que le va a proporcionar al alumno el que encuentre utilidad a la teoría ejercitada. Lo hacemos a través de tres opciones que nos parecen interesantes para su aplicación y que justificamos y explicitamos en el libro, como son: una primera a través de la *estimación*, tanto para el cálculo numérico como para la medida; otra segunda, en la que el cálculo mental se aplica para *la resolución de ejercicios y problemas relacionados con los contenidos de los que consta cada curso* y una tercera opción, a través de distintos *juegos y material didáctico*.

En el libro, los dos últimos capítulos, están dedicados a describir las actividades para los tres ciclos de la Enseñanza Primaria y para el primer ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria. En el desarrollo de los mismos, seguimos las líneas presentadas, aunque adaptándolo todo a cada nivel educativo. Las actividades vienen explicitadas para cada uno de los cursos que componen cada ciclo; las hemos agrupado en dos grandes apartados:

a) actividades de carácter teórico que sirven para poder conocer y trabajar el cálculo mental (actividades de entrenamiento) y

b) actividades de aplicación del cálculo mental, que concretamos en dos líneas de trabajo: la estimación en cálculo y medida y la resolución de ejercicios y problemas que conllevan los contenidos de cada curso.

Hemos intentado a lo largo de cada ciclo, presentar una panoplia extensa de distintos tipos de actividades, con el objetivo de que el profesor pueda escoger fácilmente la que le interese trabajar en el aula cada día, así como regular el nivel de dificultad de la misma.

Referencias

- BAZÁN, J. L. Y APARICIO, A. S (2006): "Las Actitudes hacia la Matemática-Estadística dentro de un Modelo de Aprendizaje". Revista Semestral del Departamento de Educación Vol XV. Nª 28, Marzo 2006.

- ALSINA, C. (2000): "La Matemática hermosa se enseña con el corazón". Conferencia, OMA, Buenos aires.

- GÓMEZ CHACÓN, I. M. (2000). "Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático." Edit. Narcea, s.a. de ediciones. Madrid.

- N.C.T.M (2003): "Principios y Estándares para la Educación Matemática". Sociedad andaluza de Educación Matemática Thales. Granada.

- M.E.C. E.P. (2007): "Ordenación de la Educación Primaria. Matemáticas. Orden ECI/2211/2007, de 12 de julio.

- M.E.C. E.S. (2007): "Ordenación de la Educación Secundaria. Matemáticas. Orden ECI/2220/2007, de 12 de julio.

- ALFRED HOPE, J. (1984) "Characteristics of unskilled, skilled and highly skilled mental calculators" The University of British Columbia.

- ORTEGA, T. Y ORTIZ, M. (2000). "Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula". Rev. Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. Vol. 5. Núm.3. noviembre 2002, pp. 271-292. México.

- ORTIZ VALLEJO, M. y ORTEGA DEL RINCÓN, T. (2009). "Cálculo mental. Primer ciclo de Educación Primaria". Edit. @becedario. Badajoz. I.S.B.N. 978-84-92669-09-7.

- ORTIZ VALLEJO, M. (2010). "Cálculo mental en el aula". Edit. CCS. Madrid. En proceso de imprenta.

Reseña de libros

ROMO SANTOS, CONCEPCIÓN: *Mujeres Matemáticas* (156 págs,). ISBN: 978-84-9923-302-4. Editorial: Cultura Libros (Colección Autor, nº 86). Madrid, 2010.

La discriminación de la mujer en la vida laboral, y también en el ámbito educativo, ha sido prácticamente constante a lo largo de la historia. Así, incluso en parte del siglo XX, en muchas universidades no se permitía la presencia de mujeres, y menos aún en una carrera científica. Por ello resulta más meritoria la labor realizada por las mujeres matemáticas en el pasado, y siempre es bienvenida una obra que nos aproxime a las más relevantes hasta mediados del siglo XX.

El ensayo que se comenta consta de cinco capítulos, correspondientes a los periodos en los que la autora ha dividido la historia y en los que se ubican las protagonistas; además de la Introducción, otro capítulo de Conclusiones y la Bibliografía. A mi juicio, los aspectos más importantes que presenta el libro son los siguientes.

En primer lugar, que no se reduce al estudio de las matemáticas más famosas (Hipatia, madame de Châtelet, S. Germain, A. Byron, S. Kovalevskaya, E. Noether…), sino que se extiende a más de cuarenta, muchas de las cuales -aunque generalmente astrónomas- son desconocidas por la mayoría. Así, creo que la obra podría ser también considerada como una especie de catálogo o fuente inicial para, en su caso, profundizar luego en algunas biografías con referencias complementarias, para lo cual puede ser útil la extensa bibliografía que aparece al final del texto.

Un segundo aspecto destacable es la propia organización del libro y de cada capítulo, que permite adquirir una visión cronológica general de la ubicación de las mujeres matemáticas a lo largo de la historia. Con todo, lo que más me ha gustado, es la larga Introducción, en la que se puede contemplar en su conjunto la evolución de la educación de las mujeres y sus contribuciones matemáticas; como asimismo, posteriormente, el desarrollo de la educación en España.

La obra está escrita por Concha Romo, catedrática de Álgebra de la UCM, que no solo es una especialista en su área de conocimiento, sino que a raíz de otros trabajos sobre Historia de la matemática, y del interesante libro que ahora presenta, demuestra que también cultiva este último campo con gran profesionalidad.

Javier Peralta

ROANES LOZANO, EUGENIO ET AL: *Desarrollo de competencias básicas a través de las matemáticas* (309 págs). ISBN: 978-84-369-4756-4. Ediciones del Instituto de Formación del Profesorado, Investigación e Innovación Educativa del Ministerio de Educación, Serie Ciencias (Formato CD). Madrid, 2010.

Compendio del curso titulado *Desarrollo de competencias básicas a través de las matemáticas,* celebrado en julio de 2008, en el marco de los *Cursos de Verano de El Escorial*, en la sección *Cursos de Formación para el Profesorado de Enseñanza Secundaria*, organizados por el Ministerio de Educación y Ciencia y la Universidad Complutense de Madrid.

Contiene el desarrollo de los seis temas, basados en conferencias impartidas en dicho curso, que se explicitan a continuación.

Algunas reflexiones sobre modas y tendencias educativas en matemáticas: de los cuadernos escolares de problemas al ordenador, por Eugenio Roanes Lozano, Dpto. de Álgebra, Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid.

Las TIC y las competencias básicas, hacia un aprendizaje colaborativo en la enseñanza de las matemáticas, por Mª. Dolores Rodríguez Soalleiro, profesora de matemáticas de Educación Secundaria, Instituto Superior de Formación y Recursos en Red para el Profesorado MEPSYDE.

Sistemas de geometría dinámica y aprendizaje por vía experimental en matemáticas de Secundaria, por Eugenio Roanes Macías, Dpto. de Álgebra, Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid.

Adquisición de competencias básicas transversales a partir de un modelo geométrico, por Mª Francisca Blanco Martín, E.T.S. de Arquitectura de la Universidad de Valladolid.

La evaluación de las competencias matemáticas: factores escondidos, por Tomás Recio, Dpto. de Matemáticas, Estadística y Computación, Facultad de Ciencias de la Universidad de Cantabria.

La tecnología en la enseñanza de conceptos fundamentales de cálculo en Secundaria, por Antonio R. Quesada, Department of Theoretical & Applied Mathematics, The University of Akron, Akron, Ohio, EEUU.

Eugenio Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta puigadam@mat.ucm.es ,o bien en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

De otro modo, también pueden enviarse dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85 y 86.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia.*