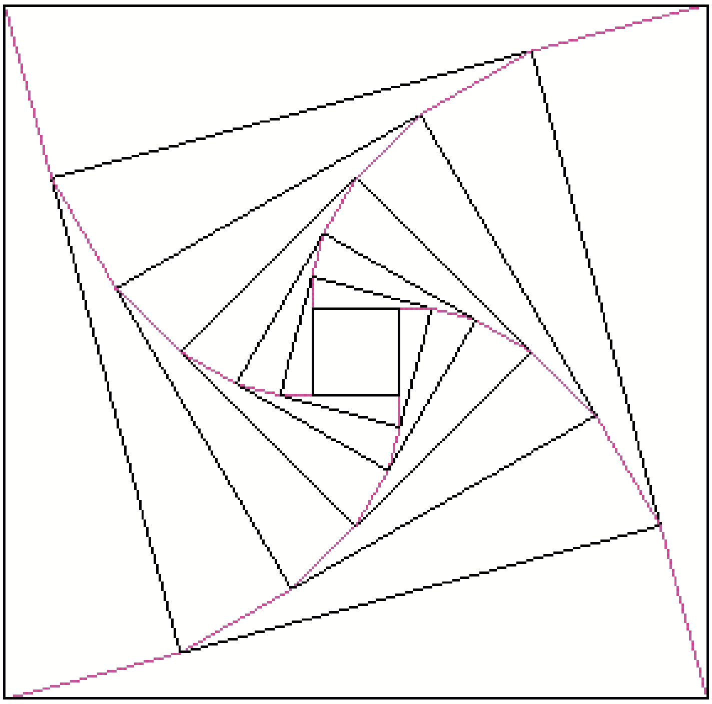
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 85
JUNIO DE 2010

ÍNDICE

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando y Eugenio Roanes Lozano

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse
a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

Página web de la Sociedad "Puig Adam":
`http://www.sociedadpuigadam.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2010 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 10 de abril de 2010, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil diez.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea de 18 de abril de 2009, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad

Se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 82, 83 y 84 del boletín. Boletines dedicados a homenajear al profesor Eugenio Roanes Macías con motivo de su jubilación. El Presidente informa sobre los concursos *Puig Adam* e *Intercentros,* y sobre la fase regional de la *Olimpiada Matemática Española*:

Concurso Puig Adam. El XXVII Concurso "Puig Adam" de Resolución de Problemas se celebró el 13 de junio de 2009, con buena participación, unos 90 estudiantes. Los resultados se publicaron en el boletín 83. Este año el XXVIII Concurso "Puig Adam" se celebrará el 12 de junio de 2010.

Concurso Intercentros. Al igual que otros años, se celebró el penúltimo sábado de noviembre en la Facultad de Matemáticas de la UCM con una participación de 45 centros, 55 equipos y 330 estudiantes de nuestra Comunidad. En el boletín nº 84 aparece una reseña de los resultados del IX Concurso "Intercentros".

Olimpiada Matemática Española. También informa que en el boletín nº 84 aparecen los problemas de la Fase Local de la XLVI Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid.

También se informa que el próximo sábado 24 de abril se celebrará el XIV Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid y que está teniendo un gran éxito como en años anteriores. Este año participarán más de 3200 alumnos en la 2ª fase del Concurso que se celebra en la Facultad de Matemáticas de la UCM, y más de 32.000 alumnos en sus centros en la primera fase. Hay que destacar que algunos miembros del equipo organizador del Concurso son miembros de la Sociedad.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Se someten a aprobación las cuentas desde el 19 de abril de 2009 hasta el 10 de abril de 2010. Pasando a la votación quedan aprobadas por unanimidad.

A la vista de las cuentas aprobadas, y de la situación de tesorería de la Sociedad, se propone el mantenimiento de la cuota, regularizando su cobro a primeros del mes de octubre para ajustarlo al curso académico.

4. Elección de nuevos cargos directivos

El Presidente manifiesta que según el acta de la Asamblea del año 2006 procede el cese de los siguientes cargos de la Junta Directiva de la Sociedad por haber cumplido sus mandatos:

Presidente D. José Javier Etayo Gordejuela
Vicepresidentes D. Eugenio Roanes Macías y D. Vicente Mendiola-Muñoz Morales
Vocal D. Enrique Rubiales Camino
Vicesecretaria Dª María Gaspar Alonso-Vega
Tesorero D. Alberto Aizpún López

A continuación se pasa a la elección de los cargos que han quedado vacantes con el siguiente resultado:

Presidente D. José Javier Etayo Gordejuela
Vicepresidentes D. Eugenio Roanes Macías y D. Vicente Mendiola-Muñoz Morales
Vocal D. Enrique Rubiales Camino
Vicesecretaria Dª María Gaspar Alonso-Vega
Tesorero D. Alberto Aizpún López

5. Asuntos de trámite

No hubo.

6. Ruegos y preguntas

La Federación nos envía 10 ejemplares de cada número de la Revista Suma. Su finalidad es que no se quede ninguno de nuestros socios sin recibirla. Si alguien no la recibe, debe comunicárnoslo.

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce horas y cuarenta y ocho minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente El Secretario

XLVI Olimpiada Matemática Española

Fase Nacional (celebrada en Valladolid)

La organización de la fase nacional de la XLVI Olimpiada Matemática Española ha correspondido, en este curso 2009 – 2010, a la Universidad de Valladolid. En ella participaron los ganadores de las diferentes fases locales, acompañados por sus profesores.

La representación madrileña estuvo compuesta por los estudiantes Moisés Herradón Cueto, Byoung-Tae Bae, Jesús María Sánchez Díaz, Pablo Boixeda Álvarez, Francisco Criado Gallart, Santiago Cubillo Esteban, Alberto Merchante González, Ignacio Lescano Carroll y Jaime Mendizábal Roche, acompañados por la Profesora María Moreno Warleta, del IES Alameda de Osuna.

Los problemas propuestos este año han sido los siguientes.

Primera sesión, viernes 26 de marzo de 2010

Problema 1

Una sucesión *pucelana* es una sucesión creciente de dieciséis números impares positivos consecutivos, cuya suma es un cubo perfecto. ¿Cuántas sucesiones pucelanas tienen solamente números de tres cifras?

Media de todos: 4,07 *Media oros:* 6

Problema 2

Sean $N0$ y Z el conjunto de todos los enteros no negativos y el conjunto de todos los enteros, respectivamente. Sea $f : N0 \to Z$ la función que a cada elemento n de $N0$ le asocia como imagen el entero $f(n)$ definido por

$$f(n) = -f\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor - 3\left\{ \frac{n}{3} \right\},$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera del número real y $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ su parte decimal. Determina el menor entero n tal que $f(n) = 2010$.

NOTA: la parte entera de un número real x, denotada por $\lfloor x \rfloor$, es el mayor entero que no supera a x. Así, $\lfloor 1{,}98 \rfloor = 1$, $\lfloor -2{,}001 \rfloor = -3$ y $\lfloor 7\pi - 8{,}03 \rfloor = 13$.

Media de todos: 1,73 *Media oros:* 6,5

Problema 3

Sea *ABCD* un cuadrilátero convexo. Sea *P* la intersección de *AC* y *BD*. El ángulo $\angle APD = 60$. Sean *E*, *F*, *G* y *H* los puntos medios de los lados *AB*, *BC*, *CD* y *DA* respectivamente. Halla el mayor número real positivo *k* tal que

$$EG + 3HF \geq kd + (1 - k)s,$$

siendo *s* el semiperímetro del cuadrilátero *ABCD* y *d* la suma de las longitudes de sus diagonales. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Media de todos: 0,15 *Media oros:* 1,33

Segunda sesión, sábado 27 de marzo de 2010

Problema 4

Sean *a*, *b*, *c* tres números reales positivos. Demuestra que

$$\frac{a+b+3c}{3a+3b+2c} + \frac{a+3b+c}{3a+2b+3c} + \frac{3a+b+c}{2a+3b+3c} \geq \frac{15}{8}$$

Media de todos: 1,24 *Media oros:* 6,83

Problema 5

Sea *P* un punto cualquiera de la bisectriz del ángulo *A* en el triángulo *ABC*, y sean *A'*, *B'*, *C'* puntos respectivos de las rectas *BC*, *CA*, *AB*, tales que *PA'* es perpendicular a *BC*, *PB'* es perpendicular a *CA* y *PC'* es perpendicular a *AB*. Demuestra que *PA'* y *B'C'* se cortan sobre la mediana *AM*, siendo *M* el punto medio de *BC*.

Media de todos: 0,30 *Media oros:* 4

Problema 6

Sea *p* un número primo y *A* un subconjunto infinito de los números naturales. Sea *fA*(*n*) el número de soluciones distintas de la ecuación

$$x_1 + x_2 + ... + x_p = n, \text{ con } x_1, x_2, ..., x_p \in A.$$

¿Existe algún número natural *N* tal que *fA*(*n*) sea constante para todo *n* > *N* ?

Media de todos: 0,11 *Media oros:* 2,16

El solemne acto de entrega de premios, presidido por el Rector de la Universidad de Valladolid, se celebró a última hora de la tarde del sábado, en el Palacio Ansúrez. Recibieron Medalla de Oro los estudiantes que a continuación se relacionan:

Ander Lamaison Vidarte (2º de Bachillerato, Navarra)
Moisés Herradón Cueto (2º de Bachillerato, Madrid)
Byoung-Tae Bae (1º de Bachillerato, Madrid)
Xavier Fernández-Real Gerona (2º de Bachillerato, Cataluña)
Pablo Boixeda Álvarea (1º de Bachillerato, Madrid)
Guillem Alsina Oriol (2º de Bachillerato, Cataluña)

Byoung-Tae, de nacionalidad coreana, no puede formar parte del equipo español en la próxima Olimpiada Internacional, que tendrá lugar próximamente en Astaná (Kazjastán). Así, el sexto estudiante español será el alumno que obtuvo la primera de las doce Medallas de Plata, el gallego Óscar Rivero Salgado, que cursa 4º de ESO.

Esta será la tercera vez que Moisés Herradón represente a España en la IMO: ya lo hizo en Madrid en 2008, obteniendo Mención de Honor, cuando estudiaba 4º de ESO, y el año pasado en Bremen, donde obtuvo Medalla de Bronce. Por esta razón recibió la Insignia de Plata de la Olimpiada de manos de Luis Hernández Corbato, que al igual que él participó en tres olimpiadas: Washington (2001), Glasgow (2002) y Tokio (2003).

Los resultados de los chicos madrileños han sido excelentes. A las tres medallas de oro obtenidas por Moisés, Byoung-Tae y Pablo, hay que sumar otras cuatro de plata (Ignacio Lescano, Francisco Criado, Alberto Merchante y Jesús María Sánchez, todos de 2º de Bachillerato), y dos de bronce, para Santiago Cubillo, de 2º de Bachillerato, y Jaime Mendizábal, de 4º de ESO. Al igual que el año pasado, los nueve obtuvieron medalla.

Vaya para todos ellos, y para los antiguos olímpicos madrileños (David Alfaya, Gabriel Furstenheim y Teresa Rodrigo) nuestra felicitación y nuestro agradecimiento.

Joaquín Hernández Gómez

XIV Concurso de Primavera de Matemáticas

"Profesor, dentro de poco tiene que ser ya el Concurso de Primavera. Que no se le olvide avisarnos".

Cuando Iván, alumno de 3º ESO, me recordó esto, allá por el mes de febrero, nosotros ya teníamos preparados los cien problemas (25 en cada uno de los cuatro niveles) para la 1ª fase. Igual que Iván, 32500 estudiantes de 425 centros educativos de la Comunidad de Madrid se quedaron una hora y media más en sus colegios o institutos y se enfrentaron a esos problemas con la esperanza de ser seleccionados y así, poder acudir a la Complutense.

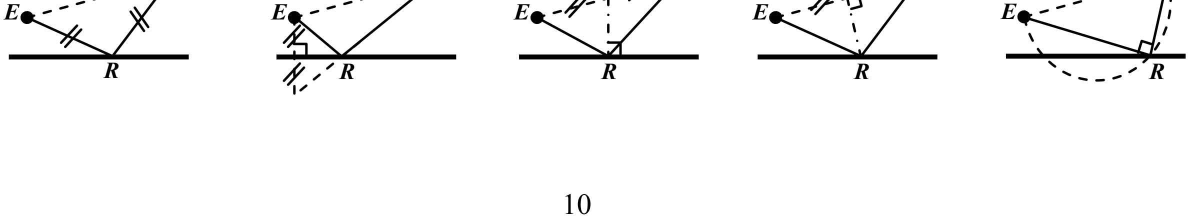
Iván se clasificó para ir a la 2ª fase y me dijo que había algunos problemas bastante complicadillos. "Por la tarde los hice en casa pero algunos no me salieron. ¿Cómo se hacía este del triángulo rectángulo?".

> *Los lados de un triángulo rectángulo son números enteros menores que 100. ¿En cuántos de estos triángulos se cumple que el cateto mayor y la hipotenusa son números consecutivos?*
> *A) 6* *B) 7* *C) 8* *D) 9* *E) 10*

El sábado 24 de abril se celebró la 2ª fase del XIV Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Allí estaba Iván pero no estaba solo. Sus padres, sus profesores y 2950 adolescentes acompañados también por sus familiares y profesores, habían elegido madrugar ese fin de semana para participar en esta gran fiesta de las matemáticas.

A la salida, Iván enseñó la prueba a su madre y le dijo: "Mamá, mira qué problema tan chulo nos han puesto":

> *Esteban está en un campamento base de subida al Aconcagua, en el punto* E*, cerca de Joaquín (punto* J*). Cada mañana le visita porque Joaquín está lesionado, pero se acerca antes al río, punto* R*, para llevarle agua. Cinco veces determina el punto* R *de forma diferente. ¿Cuál es el trayecto más corto? (los segmentos marcados con // son de igual longitud)*



Iván no quedó seleccionado entre los 150 premiados pero el lunes volvió al ataque y me preguntó por varios problemas.

Como siempre, os damos las gracias a todos los profesores que habéis sabido motivar a vuestros estudiantes, que les habéis acompañado y que les animáis a participar. Sin la implicación de vosotros, un concurso de este tipo estaría condenado al fracaso más absoluto.

Para terminar esta breve reseña queremos rendir un homenaje a los verdaderos protagonistas de esta cita, a todos los *ivanes*, a esa legión de chicas y chicos que con sus ganas y con su esfuerzo nos están pidiendo a gritos que continuemos un año más. En representación de todos ellos, aquí va la lista de los ganadores:

PRIMER NIVEL (5º y 6º de Primaria)
1. Alberto Alonso González. 6º de Primaria. Colegio SEK El Castillo
2. Elena Fernández Rodríguez. 5º de Primaria. CP Miguel de Cervantes
3. Daniel Puignau Chacón. 6º de Primaria. CP Ciudad de Guadalajara

SEGUNDO NIVEL (1º y 2º ESO)
1. Miguel Barrero Santamaría. 2º ESO. IES Alameda de Osuna
2. Álvaro Robledo Vega. 1º ESO. Colegio Peñalar
3. Ángel Prieto Naslin. 2º ESO. Lycée Français de Madrid

TERCER NIVEL (3º y 4º ESO)
1. Lorenzo Esteban de la Iglesia. 4º ESO. Colegio Fray Luis de León
2. Paula Sardinero Meirás. 3º ESO. Colegio Virgen de Europa
3. Federico Espósito Bacigalupo. 4º ESO. Colegio Alemán de Madrid
3. Víctor García Herrero. 4º ESO. IES Ortega y Gasset

CUARTO NIVEL (1º y 2º Bachillerato)
1. Javier García Gómez. 2º Bachillerato. IES Ramiro de Maeztu
2. Daniel Henry Mantilla. 1º Bachillerato. Lycée Français de Madrid
3. Alberto Merchante González. 2º Bachillerato. IES Ramiro de Maeztu

Toda la información está a vuestra disposición en nuestra página web, en la que encontraréis las pruebas de este año y años anteriores:

`www.mat.ucm.es/~conprim/`

Esteban Serrano Marugán
Miembro del Comité Organizador del
Concurso de Primavera de Matemáticas

Cómo obtener curvas con formas predeterminadas a partir de circunferencias

M.J. de la Puente
Dpto. de Algebra UCM
mpuente@mat.ucm.es

Resumen

We produce several algebraic curves, some well–known, some new, out of circles, by means of two classical (mutually reciprocal) algebraic methods: blow–down and blow–up.

1. Introducción

Una mirada atenta a nuestro alrededor nos revela que vivimos en un mundo poblado de curvas. En los fenómenos naturales aparecen curvas de distinta índole: se forman *circunferencias* concéntricas al arrojar una piedra a una masa de agua en calma, las órbitas planetarias son *elipses* y las caracolas son *espirales*. El arco iris, de delicados colores, es otro ejemplo fascinante de arco de curva. Vemos curvas en la ciudad: un chorro de agua que surge con una cierta inclinación describe una *parábola*, una cadena o un cable que cuelga de dos puntos colocados a la misma altura dibuja una *catenaria*, el reflector sobre el borde de una rueda de bicicleta describe una *cicloide*. El espirógrafo, juguete diseñado por D. Fisher, que data de 1965, no traza espirales sino hermosas *trocoides* (por lo que, más bien, debería llamarse *trocoidógrafo*). En la ciencia física nos topamos con más curvas: la *braquistócrona* (o curva de descenso más rápido), la *tautócrona* (o curva en la que el tiempo de caída a su punto más bajo no depende del punto inicial), las curvas de los problemas predador–presa, etc. También abundan las curvas en las ciencias sociales. En este caso se trata de las gráficas de las distribuciones de las variables aleatorias, siendo la *campana de Gauss* la más habitual. No nos debe extrañar la ubicuidad de las curvas pues, como decía Galileo, "el Universo está escrito en lenguaje matemático, siendo las letras triángulos, circunferencias y otras figuras geométricas ..."

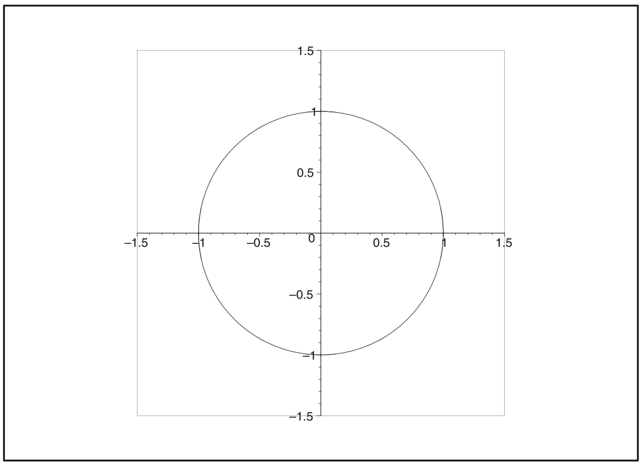


Figura 1: Circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

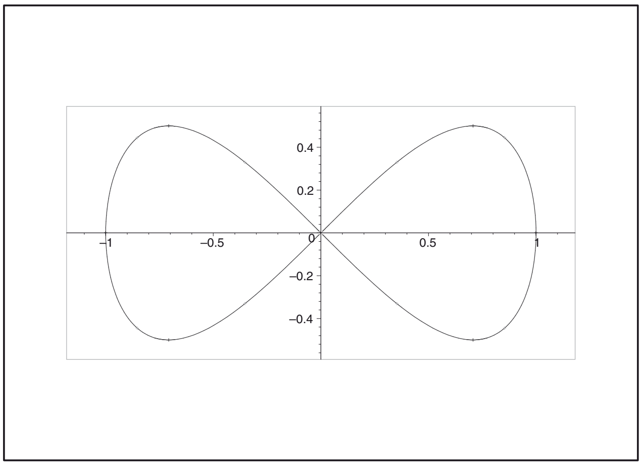


Figura 2: Lemniscata de Huygens.

El atractivo de ciertas curvas hace que sean usadas como marcas, en publicidad: tres elipses tangentes en Toyota y una en Ford, Kia, Hyundai o Lexus, una parábola en Thyssen o tres circunferencias secantes en Krupp. Por otro lado, hacemos uso práctico de algunas curvas, por sus propiedades. Así, la manguera de un extintor de incendios o una cinta cassette están enrolladas en espiral y el perfil de un tornillo, un solenoide o un cable antiguo de teléfono tienen forma de *hélice*.

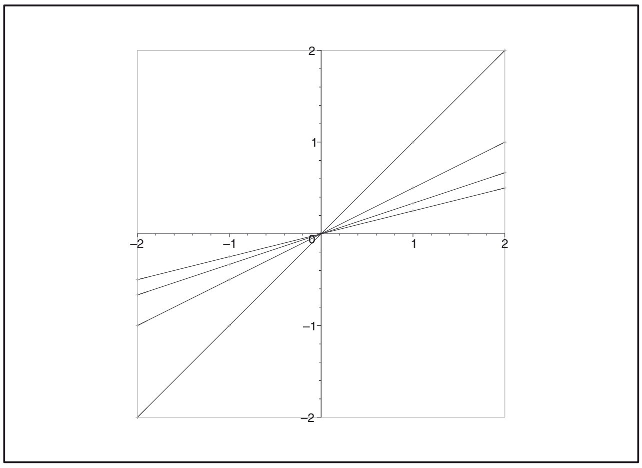


Figura 3: Rectas que pasan por el origen.

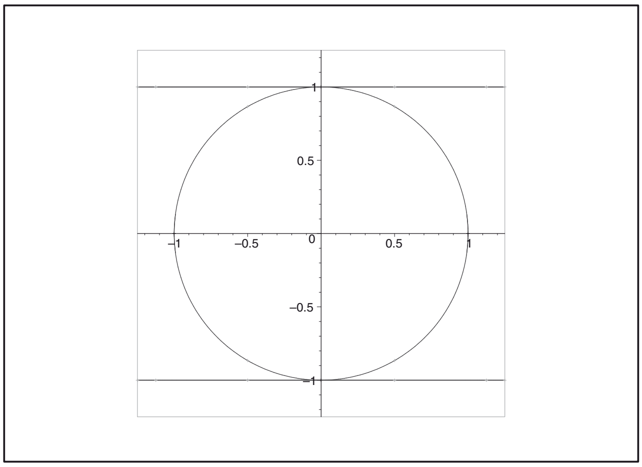


Figura 4: Rectas tangentes a la circunferencia en los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$.

Sin duda alguna, la *circunferencia* es, tras la recta, la curva más elemental. Bastan un punto, llamado *centro*, y una cantidad positiva, llamada *radio*, para describirla. Sabemos que la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro O y radio uno es el conjunto de los puntos P del plano que distan de O una unidad.

Si dotamos al plano de un sistema cartesiano de coordenadas y hacemos que el centro O coincida con el origen de coordenadas $(0, 0)$, entonces $\mathcal{C}$ será el conjunto de los puntos $P(x, y)$ que satisfacen la igualdad $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, ver

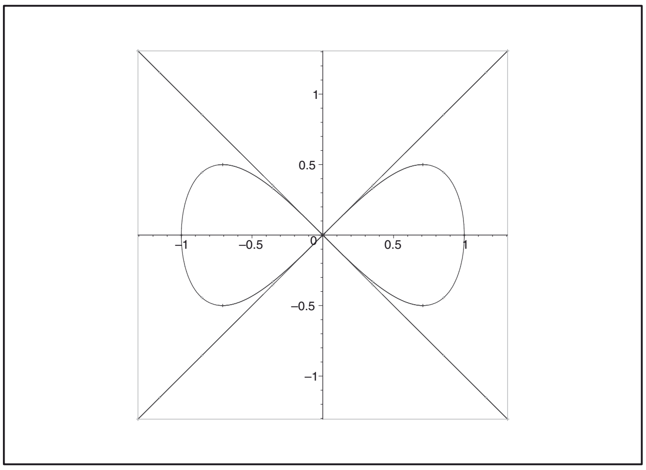


Figura 5: Rectas tangentes a la lemniscata en el origen.

figura 1. Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado y pasando todos los términos al primer miembro, obtenemos una condición equivalente

$$x^2 + y^2 - 1 = 0. \tag{1}$$

Como las coordenadas (x, y) de los puntos de $\mathcal{C}$ satisfacen la *relación algebraica* (1), diremos que la circunferencia es una *curva algebraica*. No debemos creer que todas las curvas mencionadas más arriba son algebraicas: por ejemplo, la cicloide, la catenaria, las espirales y algunas trocoides no lo son. Tampoco son algebraicas la braquistócrona ni la tautócrona, que resultan ser cicloides invertidas.

A la elegante belleza de las curvas algebraicas se suma la simplicidad de su presentación: un polinomio en dos variables (x, y en el caso anterior), es todo lo que necesitamos para describir una tal curva. En otras palabras, en el polinomio (sumas y productos de potencias de x e y) está resumida toda la geometría de la curva.

El programa de ordenador *MAPLE*, paquete *algcurves*, dibuja una curva algebraica con gran precisión, a partir, exclusivamente, de su polinomio. Con él hemos producido las figuras de estas notas.

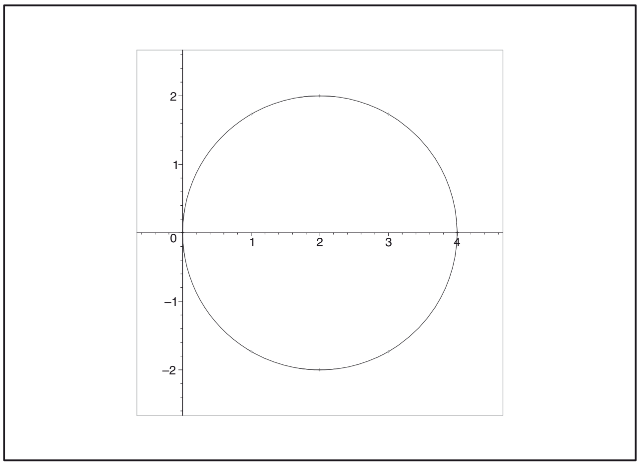


Figura 6: Circunferencia $x^2 - 4x + y^2 = 0$.

2. Implosión y explosión

A continuación vamos a *obtener curvas algebraicas, con formas predeterminadas, a partir de circunferencias u otras curvas conocidas,* mediante dos procesos algebraicos: *la implosión y la explosión.* Con ello obtendremos, en primer lugar, algunas curvas famosas (la *lemniscata de Huygens* y la curva *piriforme*), para posteriormente obtener curvas nuevas. En efecto, las curvas con formas de *labios, corazón, punta de flecha* y *pisciforme* se presentan en estas notas por vez primera, esto es, hasta donde sabemos, dichas curvas no aparecen en los tratados sobre curvas al uso.

Comencemos con la circunferencia (1). Tomamos una variable nueva, z, y sustituimos y por z/x en la ecuación (1), obteniendo $x^2 + \left(\frac{z}{x}\right)^2 - 1 = 0$. Multiplicando por x^2, para quitar denominadores, llegamos a la ecuación

$$x^4 + z^2 - x^2 = 0. \tag{2}$$

La curva $\mathcal{L}$ asociada a la ecuación (2) se conoce como *lemniscata de Huygens*, ver figura 2. *Cristiaan Huygens* (1629–1695) fue un matemático holandés entre cuyos logros está la patente del primer reloj de péndulo. Es fácil formar una lemniscata (que significa curva en forma de ocho) con las manos. Tomamos una cinta circular, sosteniéndola con cuatro dedos de una mano y, con el pulgar y el índice de la mano libre, pegamos dos puntos de la cinta. Este pegado se traduce al lenguaje matemático en la sustitución

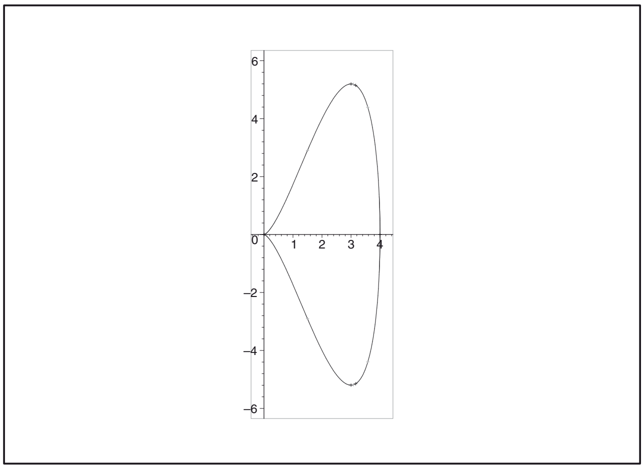


Figura 7: Curva piriforme.

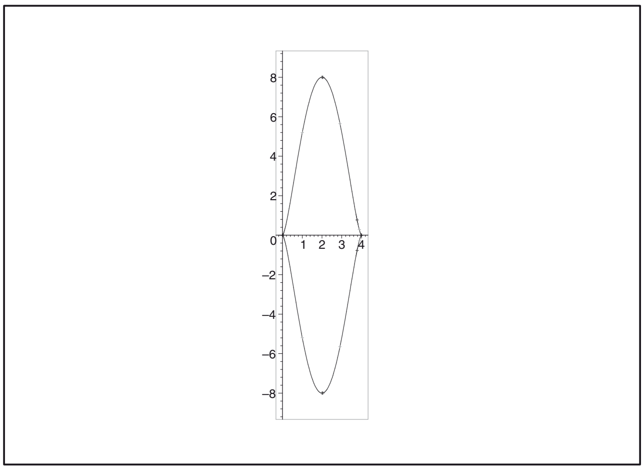


Figura 8: Curva en forma de labios.

de y por z/x, proceso conocido como *implosión* (*blow–down*, en inglés). Si $y = z/x$ entonces $z = yx$, lo que, en el plano coordenado XZ, proporciona las ecuaciones de *todas* las rectas que pasan por el origen: cada recta corresponde a un valor de y (que es la pendiente de dicha recta), ver figura 3.

Tras la implosión, los puntos $(0, 1)$ y $(0, -1)$ de $\mathcal{C}$ vienen a coincidir en el punto $(0, 0)$ de $\mathcal{L}$. Asimismo, la recta $y = 1$, tangente a $\mathcal{C}$ en el punto $(0, 1)$, se transforma en la recta $z = x$, mientras que la recta $y = -1$, va a parar a la recta $z = -x$, ver figuras 4 y 5. No es extraño, pues $z = x$ y $z = -x$ son las rectas tangentes a $\mathcal{L}$ en el origen $(0, 0)$.

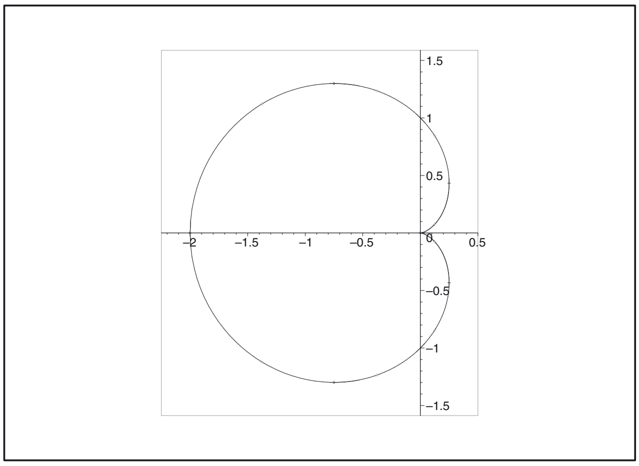


Figura 9: Cardioide.

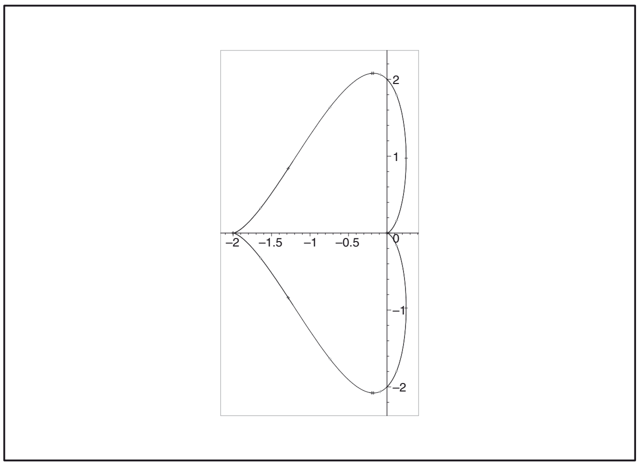


Figura 10: Curva en forma de corazón.

El proceso contrario a la implosión se denomina *explosión* (*blow–up*). Se trata de sustituir z por el producto xy, pasando pues del plano XZ al plano XY. Si efectuamos el cambio $z = xy$ en la ecuación (2) obtenemos $x^4 + (xy)^2 - x^2 = 0$, o equivalentemente, a

$$x^2(x^2 + y^2 - 1) = 0. \tag{3}$$

Que el producto de x^2 por x^2+y^2-1 sea nulo, significa que uno de los dos factores debe anularse. Por consiguiente, cada punto (x, z) de $\mathcal{L}$ con x distinto de cero (esto es, cada punto de $\mathcal{L}$, salvo el origen) se transforma en un punto

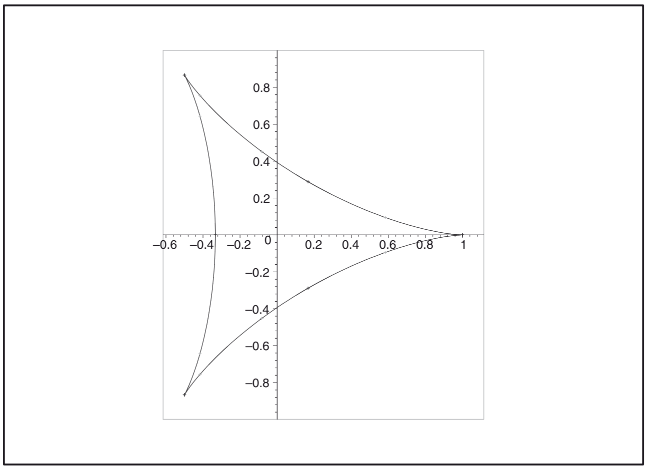


Figura 11: Curva tricúspide.

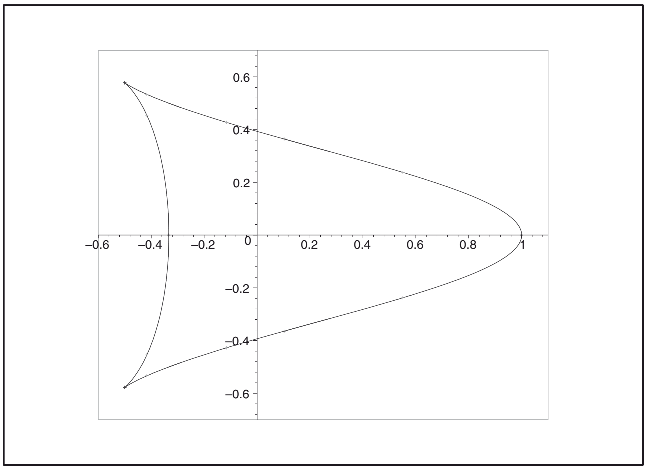


Figura 12: Curva en forma de punta de flecha.

de la circunferencia $\mathcal{C}$. Además, el punto $(0,0)$ de $\mathcal{L}$ *explota*, convirtiéndose en dos puntos de $\mathcal{C}$, que son $(0,1)$ y $(0,-1)$. Mediante esta explosión, las rectas $z = x$ y $z = -x$, que se cortan en el origen, se transforman en las rectas $y = 1$ e $y = -1$, que no se cortan. Este modo de *eliminar un punto de auto–intersección en una curva plana* es habitual en nuestras ciudades: mediante la construcción de pasos subterráneos, los arquitectos municipales eliminan las intersecciones de vías, para conseguir un tráfico más fluido. En resumen: hemos *explotado* el origen de coordenadas del plano XZ y, recíprocamente, hemos *implosionado* los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ del plano XY.

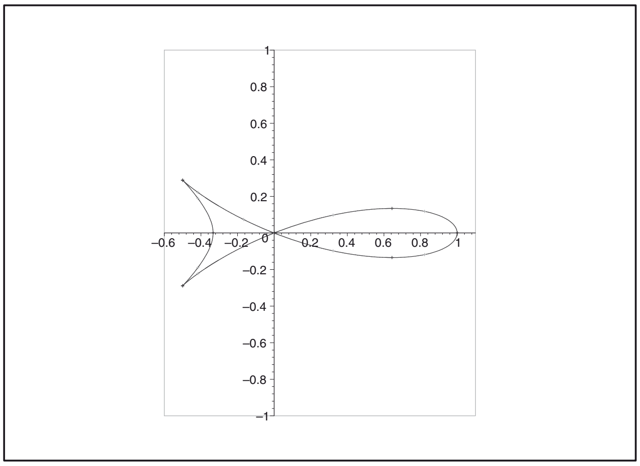


Figura 13: Curva pisciforme.

Consideremos ahora la circunferencia $\mathcal{D}$ de centro $(2, 0)$ y radio 2, ver figura 6. Sus puntos (x, y) satisfacen la igualdad $\sqrt{(x-2)^2 + (y-0)^2} = 2$. Elevando al cuadrado ambos miembros, desarrollando los cuadrados y pasando todo al primer miembro, obtenemos la siguiente ecuación de $\mathcal{D}$

$$x^2 - 4x + y^2 = 0. \tag{4}$$

El origen pertenece a $\mathcal{D}$, ya que $(0, 0)$ satisface la ecuación (4). ¿En qué se transformará $\mathcal{D}$ mediante la implosión del origen? Veamos: en (4), sustituimos y por z/x y multiplicamos ambos miembros de la igualdad por x^2, para quitar denominadores, obteniendo

$$x^4 - 4x^3 + z^2 = 0. \tag{5}$$

Se trata de una curva *piriforme* $\mathcal{P}$ (curva en forma de pera, aunque, a juzgar por la gráfica, se parece más a un queso gallego), ver figura 7. La piriforme fue estudiada por vez primera por J. Wallis en 1685. Como resultado de la implosión, en $\mathcal{P}$ ha aparecido un punto de curioso aspecto *cuspidal*, algo así como la comisura de unos labios. Si ahora implosionamos el punto $(4, 0)$ de $\mathcal{P}$, ¿conseguiremos el contorno de unos labios? Veamos: en (5), sustituimos z por $t/(x-4)$, obteniendo $x^4 - 4x^3 + \left(\frac{t}{x-4}\right)^2 = 0$. Quitando denominadores, operando y simplificando, llegamos a la ecuación

$$x^6 - 12x^5 + 48x^4 - 64x^3 + t^2 = 0, \tag{6}$$

que describe una curva algebraica del plano XT con la forma de labios (pronunciando la u francesa) buscada, ver figura 8.

La curva *cardioide* (en forma de corazón) fue considerada por O.C. Roemer, en 1676, y P. de la Hire en 1708, ver figura 9. Se trata de la trayectoria de un punto colocado sobre una circunferencia $\mathcal{E}$ que rueda sin deslizamiento alrededor de otra circunferencia fija $\mathcal{E}'$, de idéntico radio. Es fácil visualizar esta curva, usando dos monedas de igual valor. En el borde de una de ellas marcamos un punto. Dejando fija la moneda no pintada, hacemos girar una sobre otra y el punto describirá una *cardioide* $\mathcal{C}$. Su ecuación es

$$(x^2 + y^2 + x)^2 - x^2 - y^2 = 0. \tag{7}$$

A pesar de su nombre, $\mathcal{C}$ no se parece mucho a la silueta de corazón del imaginario colectivo, pues el punto $(-2, 0)$, que pertenece a $\mathcal{C}$, debería ser cuspidal. ¿Conseguiremos la forma de corazón deseada efectuando una implosión del punto $(-2, 0)$? Veamos: sustituimos y por $z/(x + 2)$, obteniendo $\left(x^2 + \left(\frac{z}{x+2}\right)^2 + x\right)^2 - x^2 - \left(\frac{z}{x+2}\right)^2 = 0$, donde, operando y simplificando llegamos a la larga expresión siguiente, cuya curva está representada en la figura 10,

$$\begin{aligned} x^8 + 10x^7 + 40x^6 + 80x^5 + 2x^4z^2 + 80x^4 + 32x^3 \\ +10x^3z^2 + 15x^2z^2 + 4xz^2 + z^4 - 4z^2 = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

La curva *hipocicloide de tres puntas* o *deltoide* (por su parecido con la letra griega delta mayúscula) fue estudiada en profundidad por L. Euler (1707–1783) y J. Steiner (1796–1863). Es la trayectoria de un punto colocado sobre una circunferencia $\mathcal{E}$ que rueda sin deslizamiento por el interior de otra circunferencia fija $\mathcal{E}'$, cuando el radio de $\mathcal{E}$ es la tercera parte del de $\mathcal{E}'$. Podemos ver esta curva usando dos monedas, una de las cuales debe tener un radio tres veces mayor que la otra. También se denomina *tricúspide*, por poseer tres puntos cuspidales, ver figura 11. Su ecuación es

$$3(x^2 + y^2)^2 + 8x(3y^2 - x^2) + 6x^2 + 6y^2 - 1 = 0. \tag{9}$$

A partir de la tricúspide $\mathcal{T}$, vamos a encontrar una curva *pisciforme*, esto es, en forma de pez. Primero explotamos en $\mathcal{T}$ el punto $(1, 0)$, (¿sabrías hacerlo, lector?) obteniendo una curva $\mathcal{F}$ en forma de *punta de flecha redondeada*, de ecuación

$$3x^2z^4 + 6x^2z^2 + 3x^2 - 6xz^4 + 24xz^2 - 2x + 3z^4 + 6z^2 - 1 = 0, \qquad (10)$$

ver figura 12. A continuación, implosionamos dos puntos de esta curva, haciendo $z = t/x$ y obtenemos la ecuación

$$3x^6 - 2x^5 + 6x^4t^2 - x^4 + 24x^3t^2 + 3x^2t^4 + 6x^2t^2 - 6xt^4 + 3t^4 = 0, \qquad (11)$$

cuya curva es la *pisciforme* buscada, ver figura 13.

3. Conclusiones

Ahora dispones, lector, de una doble herramienta (la implosión y la explosión) para crear nuevas curvas a partir de curvas conocidas, según tu propio gusto.

Agradecimientos

Este artículo ha sido redactado con el apoyo del proyecto investigador UCM 910444.

Referencias

[1] José M. Álvarez. *Curvas en la historia, 2 vols.* Nivola, Madrid, 2006.

[2] Robert Bix. *Conics and cubics: a concrete introduction to algebraic curves.* Springer–Verlag, Nueva York, 1998.

[3] Carl B. Boyer. *A history of mathematics.* John Wiley and sons, Inc., NY, 1968.

[4] Egbert Brieskorn and Horst Knörrer. *Plane algebraic curves.* Birkhäuser Verlag, Basilea, 1986. Traducción de John Stillwell al inglés del original alemán de 1981.

[5] Julian L. Coolidge. *A treatise on algebraic plane curves.* Dover Phoenix editions, Mineola, NY, 2004. Publicado por primera vez en 1931 por Oxford University Press, republicado en 1959 por Dover.

[6] Gerd Fischer. *Plane algebraic curves.* AMS, Providence, RI, 2001. Traducción de Leslie Kay al inglés del original en alemán de 1994.

[7] Percival Frost. *An elemetary treatise on curve tracing.* Dover Phoenix editions, Mineola, NY, 2004. Republicación de la quinta edición (1960) de la obra publicada por primera vez en 1872 por Chelsea Publishing Company.

[8] William Fulton. *Curvas algebraicas.* Editorial Reverté S.A., Barcelona, 1971.

[9] Christopher G. Gibson. *Elementary geometry of algebraic curves: an undergraduate introduction.* Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[10] Wendy Hawes. Wendy's picture book: geometry of algebraic curves. Colección de gráficos de curvas algebraicas, curso 2MP65 (1992–93), Departament of Pure Mathematics, Universidad de Liverpool.

[11] Dennis Lawrence. *A catalogue of special plane curves.* Dover publications, Inc., Nueva York, 1972.

[12] Xah Lee. Visual dictionary of special plane curves. World Wide Web, `http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/specialPlaneCurves.html`.

[13] Ricardo Moreno. *Plücker y Poncelet. Dos modos de entender la geometría.* Nivola, Madrid, 2005.

[14] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. The Mac Tutor History of Mathematics archive. World Wide Web, `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html`.

[15] María Jesús de la Puente. *Curvas algebraicas y planas.* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cádiz, Cádiz, 2007.

[16] Eugene V. Shikin. *Handbook and atlas of curves.* CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[17] Dirk J. Struik. *A concise history of mathematics.* Dover publications, Inc., Nueva York, 1967. 3^a edición revisada.

[18] Israel Vainsencher. *Introduçao às curvas algébricas planas.* IMPA, Rio de Janeiro, 1996.

[19] Robert J. Walker. *Algebraic curves.* Springer–Verlag, Nueva York, 1950.

La escalera que se desliza

Juan Tarrés Freixenet
Universidad Complutense de Madrid
tarres@mat.ucm.es

Abstract

We study the trajectory of a fixed point on linear segment that slides along a wall and we see that the area of the region contained into it depends only on the two parts in which the given linear segment is divided.

Introducción

Una escalera de mano es un armazón que sirve para que se pueda ascender o descender a lugares inaccesibles por encontrarse a una altura superior a la que se puede alcanzar sin ayuda.

Uno de los peligros de tales objetos está en el hecho de que puede deslizarse, bien a causa de la pared en la que se apoya, bien por resbalar en el suelo en el que se encuentra apoyada. Si se fija un punto de la misma, e imaginamos que la escalera se va deslizando desde la posición vertical, adosada a la pared, hasta la posición horizontal manteniéndose apoyada a la pared y al suelo, se trata de analizar el lugar geométrico del punto dado a lo largo del deslizamiento.

1. El resultado principal

Supondremos que la escalera es el segmento AB de la Figura 1 y que el suelo y la pared forman los ejes OX y OY respectivamente; el proceso tiene lugar en los cuatro cuadrantes determinados por tales ejes. En estas condiciones, vamos a determinar el lugar geométrico del punto P que divide el segmento AB en dos partes AP y PB.

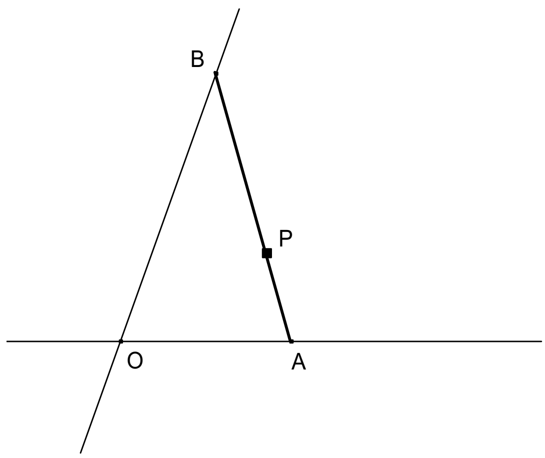


Figura 1

Estudiaremos los casos en que los ejes son perpendiculares u oblicuos y, en cada situación, si P es, o no, el punto medio de AB. Se tiene entonces:

Proposición. *El lugar geométrico descrito por el punto P al deslizarse el segmento AB a lo largo de los ejes OX y OY es una circunferencia (cuando los ejes son perpendiculares y P, el punto medio de AB) o una elipse en los casos restantes. En todos ellos, el área del recinto acotado determinado bien por la circunferencia, bien por las diferentes elipses, depende solamente de la posición del punto P y su valor es*

$$\text{Área} = \pi .\ AP.\ PB$$

Éste es un resultado conocido, consecuencia de los teoremas de van Schooten[1] y Steiner[2] (véase [1], págs 1065-1066, donde se da una demostración sintética de estos resultados). En este trabajo realizamos un estudio analítico del mismo analizando los diferentes casos que hemos indicado.

---

1 Frans van Schooten (1615-1660), geómetra holandés, llevó a cabo numerosas aplicaciones del método analítico de Descartes. A él se debe también el teorema de la bisectriz.

2 Jakob Steiner (1796-1863), geómetra alemán, publicó una importante serie de trabajos geométricos, tanto en geometría euclídea como en geometría proyectiva.

Caso 1. *Los ejes son perpendiculares y P es el punto medio de AB.*

Si la longitud de AB es $2l$ y $AP=PB=l$ y P tiene coordenadas (x,y) respecto de los ejes OX , OY se tiene (Figura 2):

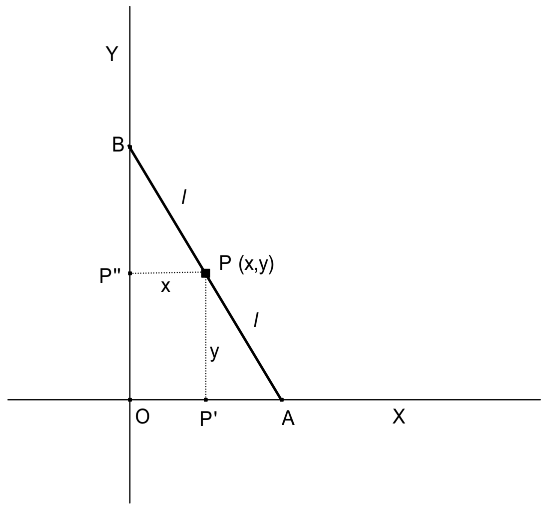


Figura 2

$$AP = PB = l$$

$$OP' = P'A = x \qquad OP'' = P'P = y$$

Se verifica entonces:

$$x^2 + y^2 = l^2$$

con lo que el lugar geométrico descrito por el punto P al deslizarse el segmento AB en las condiciones dadas es una circunferencia de centro O y radio $l = AP$. El área del círculo encerrado por la misma es, pues

$$\text{Área} = \pi \,.\, AP^2 = \pi \,.\, AP.\, PB$$

Caso 2. *Los ejes son perpendiculares y P divide al segmento AB en dos partes desiguales (AP≠ PB).*

Sean $AP = l_1$, $PB = l_2$ (Figura 3); la semejanza de los triángulos *AP'P* y *PP''B* nos asegura que es:

$$\frac{l_1}{x'} = \frac{l_2}{x}$$

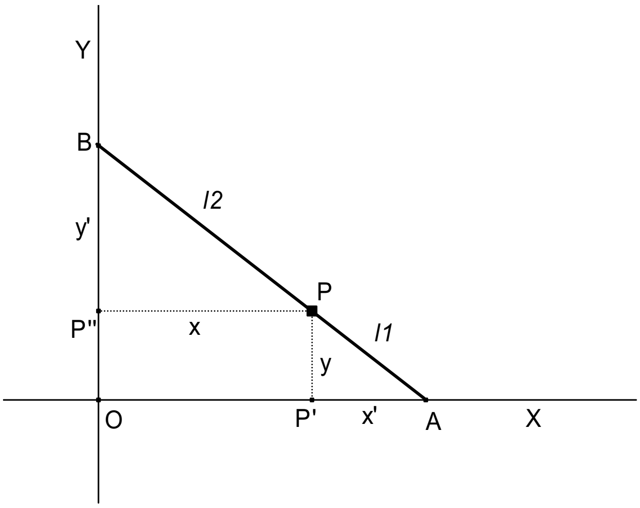


Figura 3

por lo que

$$OA = x + x' = x + \frac{l_1}{l_2}x = \frac{(l_1 + l_2)x}{l_2}$$

y análogamente

$$OB = y + y' = y + \frac{l_2}{l_1}y = \frac{(l_1 + l_2)y}{l_1}$$

Ahora

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\frac{(l_1 + l_2)^2 x^2}{l_2^{\,2}} + \frac{(l_1 + l_2)^2 y^2}{l_1^{\,2}} = (l_1 + l_2)^2$$

$$\frac{x^2}{l_2^{\,2}} + \frac{y^2}{l_1^{\,2}} = 1$$

En consecuencia, el lugar geométrico buscado es una elipse de centro O y semiejes l_2 y l_1. El área del recinto limitado por la misma es, pues:

Área = $\pi \, . \, l_1 \, . \, l_2 = \pi \, . \, AP. \; PB$

Caso 3. *Los ejes no son perpendiculares y P divide al segmento AB en dos partes iguales (AP= PB).*

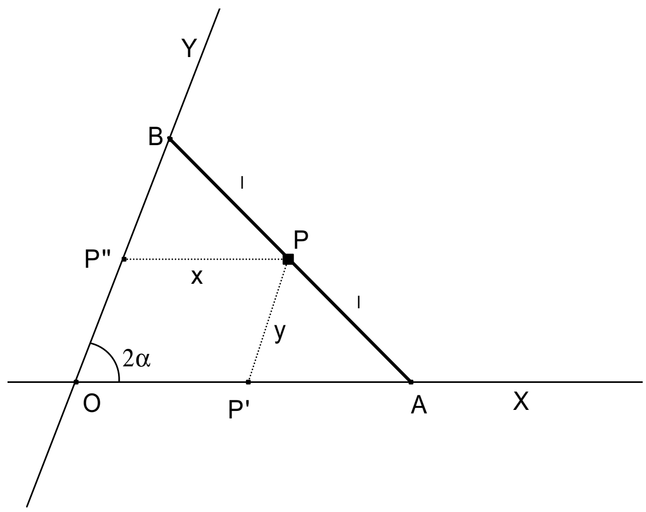


Figura 4

Si los ejes forman entre si un ángulo $2\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}$ y *P* es el punto medio del segmento *AB* se tiene la disposición de la Figura 4.

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo *AOB* se tiene:

$$4x^2 + 4y^2 - 8xy\cos 2\alpha = 4l^2$$

es decir,

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos 2\alpha = l^2 \tag{1}$$

Esta ecuación representa una elipse real centrada en *O* (ver, por ejemplo, [3]): En efecto, la matriz asociada a la misma es

$$M = \begin{pmatrix} -l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\cos 2\alpha \\ 0 & -\cos 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

y los invariantes asociados a ella son

$$\det(M) = -l^2(1 - \cos^2 2\alpha) = -(l\, sen 2\alpha)^2 < 0$$

$$A_{00} = \begin{vmatrix} 1 & -\cos 2\alpha \\ -\cos 2\alpha & 1 \end{vmatrix} = sen^2 2\alpha > 0$$

$$tr(M) = 2 > 0$$

Como det(*M*).*tr*(M) < 0, la ecuación (1) representa, efectivamente, una elipse real centrada en *O*.

La ecuación reducida de (1), respecto de unos ejes no necesariamente ortogonales, será de la forma

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 = a_{00}$$

donde

$$a_{00} = -\frac{\det(M)}{A_{00}} = l^2$$

y a_{11}, a_{22} son los autovalores de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -\cos 2\alpha \\ -\cos 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$, es decir, las raíces de la ecuación

$$\lambda^2 - 2\lambda + sen^2 2\alpha = 0$$

que son

$$a_{11} = 1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha$$
$$a_{22} = 1 - \cos 2\alpha = 2sen^2\alpha$$

Así pues, la ecuación reducida de la elipse (1) es

$$(2\cos^2 \alpha) x^2 + (2sen^2\alpha) y^2 = l^2$$

Observemos que para $2\alpha = \frac{\pi}{2}$ (ejes perpendiculares) se obtiene la circunferencia del caso 1.

Para calcular el área encerrada por la elipse (1) vamos a determinar los ejes de la misma, $y = mx$, $y = m'x$:

Sabemos (ver [2]) que si la ecuación de una cónica con centro en *O*, respecto de unos ejes de coordenadas *OX, OY* que forman entre sí un ángulo 2α, es de la forma

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{00} = 0$$

las pendientes *m* y *m'* de sus ejes verifican las ecuaciones

$$a_{22}\, mm' + a_{12}(m + m') + a_{00} = 0$$
$$1 + mm' + (m + m')\cos 2\alpha = 0$$

En el caso de la elipse (1) será:

$$mm' - \cos 2\alpha (m + m') + 1 = 0$$
$$mm' + \cos 2\alpha (m + m') + 1 = 0$$

de donde se obtiene $mm' = -1$, $m + m' = 0$, con lo que es $m = 1$, $m' = -1$ y los ejes de (1) son las rectas $y = x$, $y = -x$.

Las intersecciones de (1) con los ejes nos van a dar las longitudes de los semi-ejes de de la elipse (Figura 5):

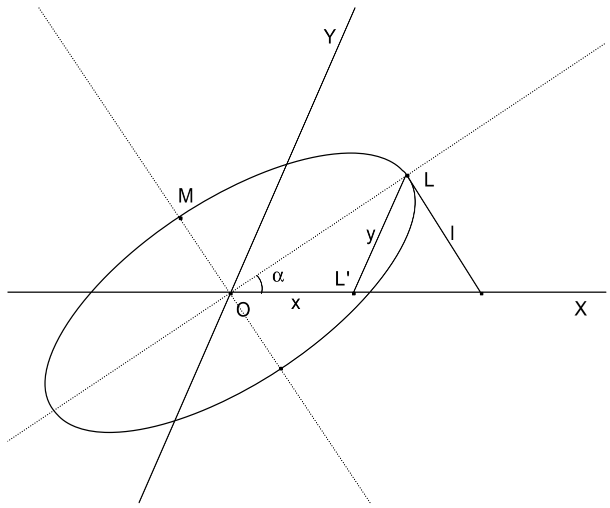


Figura 5

$$x^2 + y^2 - (2\cos 2\alpha)\, xy = l^2$$
$$y = x$$

Resolviendo, se obtiene $x = y = \dfrac{l}{2sen\alpha}$. Ahora, en el triángulo *OL'L* se tiene

$$OL^2 = \frac{l^2}{4\,sen^2\alpha} + \frac{l^2}{4\,sen^2\alpha} + \frac{2l^2\cos 2\alpha}{4\,sen^2\alpha} = \frac{2l^2(1+\cos 2\alpha)}{4\,sen^2\alpha} = \frac{4l^2\cos^2\alpha}{4\,sen^2\alpha} = \frac{l^2}{tg^2\alpha}$$

En consecuencia, el semieje *OL* es igual a $\dfrac{l}{tg\,\alpha}$. De manera análoga se obtiene el otro semieje:

$$OM = l\,tg\,\alpha$$

El área encerrada por la elipse (1) es, pues,

$$\text{Área} = \pi\,\frac{l}{tg\,\alpha}\,l\,tg\,\alpha = \pi\,l^2 = \pi\;AP.\,PB$$

Otra manera de obtener el área encerrada por la elipse (1) es la que exponemos a continuación. El método será de utilidad para la determinación del área en el caso 4.

La ecuación (1) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
&x^2 + y^2 - (2\cos 2\alpha)\,xy + y^2\cos^2 2\alpha - y^2\cos^2 2\alpha = l^2\\
&(x - y\cos 2\alpha)^2 + (1-\cos^2 2\alpha)y^2 = l^2\\
&(x - y\cos 2\alpha)^2 + (y\;sen\;2\alpha)^2 = l^2
\end{aligned}$$

La afinidad del plano dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x' = x - y\cos 2\alpha \\ y' = y\;sen 2\alpha \end{cases}$$

transforma la ecuación anterior en

(2) $$x'^2 + y'^2 = l^2$$

que representa una elipse, cuya área se puede determinar siguiendo el mismo procedimiento usado en el caso de la elipse (1) y que resulta ser

$$A' = \pi l^2 sen 2\alpha$$

Por otra parte, si A es el área de la región encerrada por la elipse (1) se verifica (ver [2], pág. 294):

$$A' = \begin{vmatrix} 1 & -\cos 2\alpha \\ 0 & sen 2\alpha \end{vmatrix} A = A sen 2\alpha$$

de donde

$$\text{Área} = \pi l^2 = \pi \ AP.PB$$

Caso 4. *Los ejes no son perpendiculares y P divide al segmento AB en dos partes desiguales (AP$\neq$ PB).*

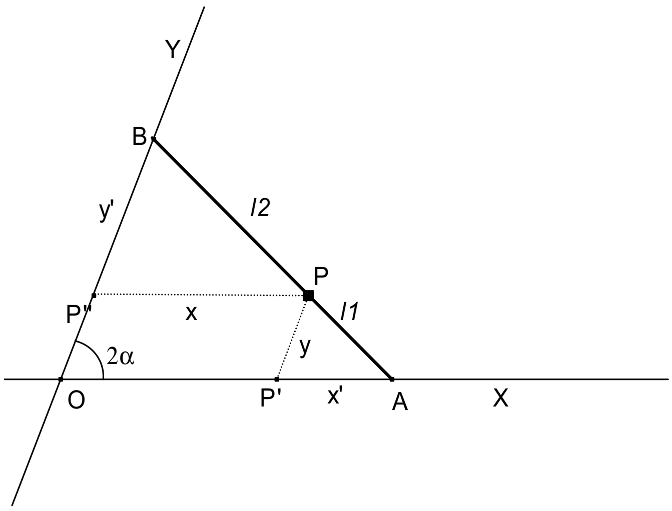


Figura 6

Si los ejes forman entre si un ángulo $2\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ y P divide al segmento AB en dos partes desiguales $AP = l_1$, $PB = l_2$ se tiene la disposición de la Figura 6.

La semejanza de los triángulos $AP'P$ y $PP''B$ nos asegura que es

$$\frac{l_1}{x'} = \frac{l_2}{x}$$

por lo que

$$OA = x + x' = x + \frac{l_1}{l_2} x = \frac{(l_1 + l_2)x}{l_2}$$

y análogamente

$$OB = y + y' = y + \frac{l_2}{l_1} y = \frac{(l_1 + l_2)y}{l_1}$$

Aplicando el teorema del coseno en el triángulo AOB se tiene:

$$\frac{(l_1 + l_2)^2 x^2}{l_2^2} + \frac{(l_1 + l_2)^2 y^2}{l_1^2} - 2\frac{(l_1 + l_2)^2}{l_1 l_2} xy \cos 2\alpha = (l_1 + l_2)^2$$

y simplificando

(3) $$l_1^2 x^2 - 2(l_1 l_2 \cos 2\alpha) xy + l_2^2 y^2 = (l_1 l_2)^2$$

que es la ecuación de una elipse real de centro O, como puede comprobarse con facilidad siguiendo los métodos usados en el caso anterior.

Para calcular el área encerrada por la elipse (3) observemos que su ecuación puede escribirse como

$$l_1{}^2x^2-(2l_1l_2\cos 2\alpha)\,xy+(l_2\cos^2 2\alpha)\,y^2+l_2{}^2y^2-(l_2\cos^2 2\alpha)\,y^2=(l_1l_2)^2$$
$$[l_1x-(l_2\cos 2\alpha)\ y]^2+l_2(1-\cos^2 2\alpha)y^2=(l_1l_2)^2$$
$$[l_1x-(l_2\cos 2\alpha)\ y]^2+((l_2\ sen\ 2\alpha)\ y)^2=(l_1l_2)^2$$

La afinidad del plano dada por las ecuaciones

$$\begin{cases} x'=l_1x-(l_2\cos 2\alpha)\ y \\ y'=(l_2\ sen\ 2\alpha)\ y \end{cases}$$

transforma la ecuación anterior en

$$x'^2+y'^2=(l_1l_2)^2$$

que, respecto de unos ejes oblicuos, representa una elipse, cuya área se puede calcular siguiendo el mismo procedimiento usado en el caso de la elipse (2) del caso 3 y que resulta ser

$$A'=\pi\,(l_1l_2)^2\,sen 2\alpha$$

Por otra parte, si A es el área de la región encerrada por la elipse (1) se verifica (ver [2], pág. 294):

$$A'=\begin{vmatrix} l_1 & -l_2\cos 2\alpha \\ 0 & l_2 sen 2\alpha \end{vmatrix} A=A\ (l_1l_2)\,sen 2\alpha$$

de donde

$$\text{Área}=\pi\ (l_1l_2)=\pi\ AP.PB$$

Referencias

[1]. F.G.M. *Exercices de Géométrie*. Tours-Paris, 1912.
[2]. Rey Pastor, J.; Santaló, L.A.; Balanzat, M. *Geometría Analítica*. (5ª Edición). Ed. Kapelusz. Buenos Aires. Argentina, 1969.
[3]. Xambó, S. *Geometría.* Edicions UPC. Barcelona, 1977

Suma de las *k*-ésimas potencias

Xenaro García Suárez
I.E.S Álvaro Cunqueiro, Vigo
xenarogs@mundo-r.com

Abstract

This paper deals with an approach to sums of k-th powers, different from the well-known Pascal recursion formula (1654). Our approach, while being also recursive, does not involve a greater difficulty in its aplication that Pascal's formula and it is also very easy to memorize.

Queremos obtener la suma $S_n^k = \sum_{k=1}^{n} i^k$, que coincide con la de las celdas resaltadas en negrita en el siguiente cuadrado *n*×*n:*

1	1	1	...	1	1
$\mathbf{2^{k-1}}$	$\mathbf{2^{k-1}}$	2^{k-1}	…	2^{k-1}	2^{k-1}
$\mathbf{3^{k-1}}$	$\mathbf{3^{k-1}}$	$\mathbf{3^{k-1}}$	...	3^{k-1}	3^{k-1}
...	**...**	**...**	**...**	...	…
$\mathbf{i^{k-1}}$	$\mathbf{i^{k-1}}$	$\mathbf{i^{k-1}}$	**..**	$\mathbf{i^{k-1}}$	…
...	**...**	**...**	**...**	**...**	…
$\mathbf{n^{k-1}}$	$\mathbf{n^{k-1}}$	$\mathbf{n^{k-1}}$	**...**	$\mathbf{n^{k-1}}$	$\mathbf{n^{k-1}}$

Sumando todas las columnas, obtenemos nS_n^{k-1}. Si sumamos los números resaltados en negrita, obtenemos S_n^k , precisamente la suma que pretendemos calcular. Sumando las restantes casillas, obtenemos: $S_1^{k-1} + S_2^{k-1} + ... + S_{n-1}^{k-1}$. Entonces:

$$nS_n^{k-1} = S_n^k + S_1^{k-1} + S_2^{k-1} + ... + S_{n-1}^{k-1} \; (*)$$

Desde el siglo XVII (Fermat, 1636, Cf. Edwards, pp. 111-113) se sabe que la suma $S_n^{k-1} = \sum_{i=1}^{n} i^{k-1}$ puede expresarse mediante el polinomio

$$S_n^{k-1} = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_1 n$$

Tenemos entonces:

$S_{n-1}^{k-1} =$	$a_k (n-1)^k + a_{k-1}(n-1)^{k-1} + ... + a_1 (n-1)$
$S_{n-2}^{k-1} =$	$a_k (n-2)^k + a_{k-1}(n-2)^{k-1} + ... + a_1 (n-2)$
....	.....
$S_2^{k-1} =$	$a_k 2^k + \quad a_{k-1} 2^{k-1} + ... \quad + a_1 2$
$S_1^{k-1} =$	$a_k 1^k + \quad a_{k-1} 1^{k-1} + ... \quad + a_1 1$
Suma	$a_k S_{n-1}^k + \quad a_{k-1} S_{n-1}^{k-1} + ... \quad + a_1 S_{n-1}^1$

con lo cual

$$\boxed{S_1^{k-1} + S_2^{k-1} + ... + S_{n-1}^{k-1} = a_k S_{n-1}^k + ... + a_1 S_{n-1}^1 \qquad (**)}$$

Utilizando la notación $F_{n-1}^{k-1} = a_k S_{n-1}^k + a_{k-1} S_{n-1}^{k-1} + ... + a_1 S_{n-1}^1$, tenemos:

$$F_{n-1}^{k-1} = a_k S_n^k + a_{k-1} S_n^{k-1} + ... + a_1 S_n^1 - a_k n^k - a_{k-1} n^{k-1} - .... - a_1 n =$$
$$= F_n^{k-1} - S_n^{k-1}$$

Teniendo en cuenta (*) y (**), $nS_n^{k-1} = S_n^k + F_n^{k-1} - S_n^{k-1}$, por lo tanto

$$\boxed{S_n^k = (n+1) S_n^{k-1} - F_n^{k-1}}$$

F_n^{k-1} se obtiene sustituyendo *"formalmente" n* por S_n en el polinomio de grado *k* que da la suma de las *n* primeras potencias naturales de orden *k-1.* La anterior igualdad no deja de ser una interpretación de la fórmula recursiva de Pascal (1654):

$$\binom{k+1}{k} S_n^k + \binom{k+1}{k-1} S_n^{k-1} + ... + \binom{k+1}{1} S_n^1 = (n+1)^{k+1} - n - 1$$

Para calcular la suma de determinado orden, en ambas expresiones hay que conocer las de órdenes anteriores. Al aplicarlas, las dos son de complejidad semejante, pero la aquí presentada parece más fácil de memorizar. Además, nos sorprende gratamente la "mordedura de cola" que aparece al efectuar el cálculo.

Aplicación para K=1

$$S_n^1 = (n+1)S_n^0 - F_n^0 = (n+1)n - S_n^1 \Rightarrow S_n^1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

Aplicación para K=2

$$S_n^2 = (n+1)S_n^1 - \frac{S_n^2 + S_n^1}{2} = (n+1)\frac{n(n+1)}{2} - \frac{S_n^2 + \frac{(n+1)n}{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$$

Aplicación para K=3

$$S_n^3 = (n+1)S_n^2 - \frac{2S_n^{\ 3} + 3S_n^{\ 2} + S_n^1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}$$

Procediendo de la misma manera se pueden conseguir las sumas sucesivas. A título de ejemplo, para *k=10* :

$$S_n^{10} = \frac{6n^{11} + 33n^{10} + 55n^9 - 66n^7 + 66n^5 - 33n^3 + 5n}{66}.$$

Bibliografía

Boyer, Carl B. *Historia de las Matemáticas.* Alianza Universidad. Madrid. 1986

Edwards, C.H. *The Historical Development of the Calculus.* Springer-Verlag. New York. 1979.

La curva… ¿de Rosillo?

Nicolás Rosillo Fernández
IES Máximo Laguna. Santa Cruz de Mudela. Ciudad Real
nicolasrosillo@gmail.com

Abstract

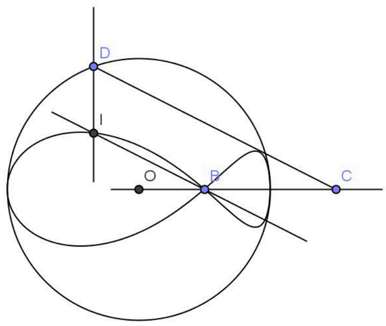
Following processes related to automated geometry theorem proving, we obtain a curve, named as Rosillo curve by Robert Ferreol (http://www.mathcurve.com).

Introducción

Siguiendo los procesos descritos por F. Botana [1], en relación a la eliminación de variables de un conjunto de condiciones, con vistas a la obtención de lugares geométricos en el plano o en el espacio, se procede a buscar el siguiente lugar geométrico, caso particular del genérico en que B y C pueden ser puntos cualesquiera, salvo condiciones de degeneración.

1. Descripción

Sean una circunferencia de centro O y radio R y dos puntos B(b,0) y C(c,0) sobre una recta que pasa por O. Si D es un punto variable sobre la circunferencia, la perpendicular por D a OX y la paralela por B a CD se cortan en I. Hallar la ecuación del lugar geométrico de I al variar D sobre la circunferencia.



2. Obtención del lugar geométrico

$$y = \pm \frac{(b-x)\sqrt{R^2 - x^2}}{(c-x)}$$

```
A = {0, 0}; P = {c, 0}; B = {b, 0}; Q = {r, s}; X = {x, y};
```

```
OnCircle[Q, A, R]
```

$\sqrt{r^2 + s^2} == R$

```
Parallel[B, X, P, Q]
```

$-s\ (b - x) == -(c - r)\ y$

```
Perpendicular[A, P, X, Q]
```

$-c\ (-r + x) == 0$

```
Eliminate[Sqrt[r^2 + s^2] == R && -s (b - x) == -(c - r) y && -c (-r + x) == 0, {r, s}]
```

$c\ (b^2 x^2 - 2\,b\,x^3 + x^4 + c^2 y^2 - 2\,c\,x\,y^2 + x^2 y^2) == c\,R^2\ (b^2 - 2\,b\,x + x^2)$

```
ec1 = %
```

$c\ (b^2 x^2 - 2\,b\,x^3 + x^4 + c^2 y^2 - 2\,c\,x\,y^2 + x^2 y^2) == c\,R^2\ (b^2 - 2\,b\,x + x^2)$

```
ec2 = Factor[First[ec1] - Last[ec1]] / c
```

$-b^2 R^2 + 2\,b\,R^2 x + b^2 x^2 - R^2 x^2 - 2\,b\,x^3 + x^4 + c^2 y^2 - 2\,c\,x\,y^2 + x^2 y^2$

```
ec3 = ec2 /. y^2 → z
```

$-b^2 R^2 + 2\,b\,R^2 x + b^2 x^2 - R^2 x^2 - 2\,b\,x^3 + x^4 + c^2 z - 2\,c\,x\,z + x^2 z$

```
Solve[ec3 == 0, z]
```

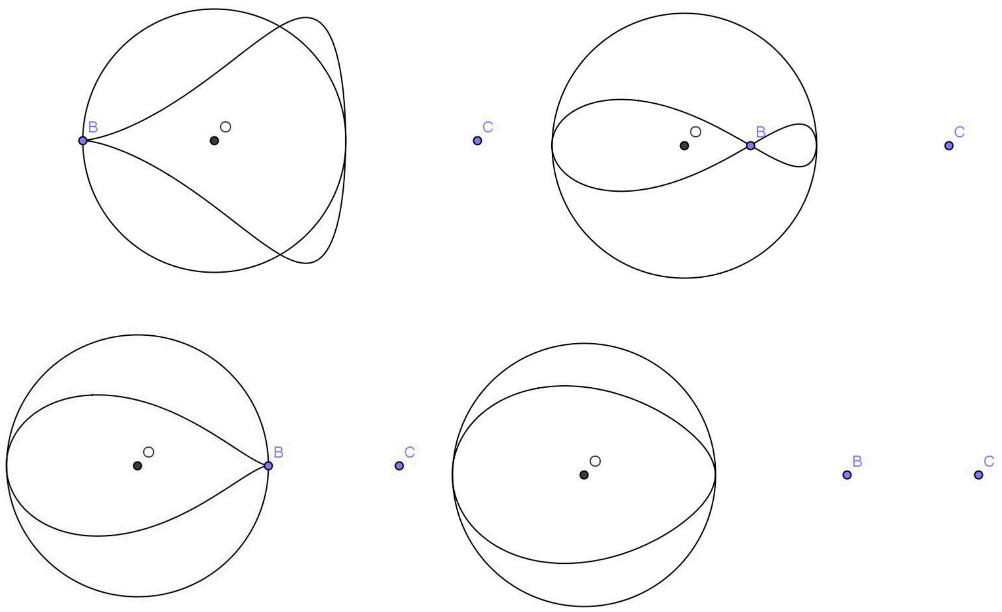
$\left\{\left\{z \to \frac{b^2 R^2 - 2\,b\,R^2 x - b^2 x^2 + R^2 x^2 + 2\,b\,x^3 - x^4}{(c-x)^2}\right\}\right\}$

```
Factor[b^2 R^2 - 2 b R^2 x - b^2 x^2 + R^2 x^2 + 2 b x^3 - x^4]
```

$(b - x)^2\ (R - x)\ (R + x)$

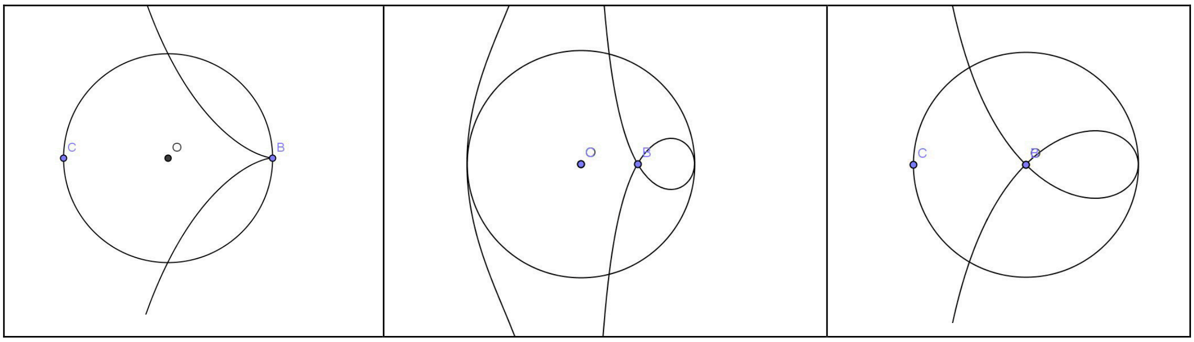
Con el sistema de cómputo algebraico *Mathematica* se definen los puntos y las condiciones que se desea cumplan entre ellos. Acto seguido se procede a eliminar las variables ligadas, manipulando por último la expresión hallada a fin de obtener la factorización de ésta si es posible.

La ecuación descrita tiene por dominio [-R, R] y asíntota en x=c, por lo que la curva formada por las dos ramas será cerrada si c>R.



3. Casos particulares contenidos en la curva

c=-R y b=R Cisoide de Diocles $y=\pm x\sqrt{\dfrac{x}{a-x}}$	c=0 Concoide de Nicomedes $y=\pm\dfrac{x\sqrt{b-(x-a)^2}}{(x-a)}$	c=-R y b=0 Estrofoide recta $y=\pm x\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$



4. Obtención del lugar geométrico genérico

Si B(a,b) y C(c,d), se obtiene $y = \dfrac{bc - ad - bx + dx \pm (a-x)\sqrt{R^2 - x^2}}{(c-x)}$

```
A = {0, 0}; M = {1, 0}; P = {c, d}; B = {a, b}; Q = {r, s}; X = {x, y};

OnCircle[Q, A, R]
```

$\sqrt{r^2 + s^2} == R$

```
Parallel[B, X, P, Q]
```

$(d - s)\ (a - x) == (c - r)\ (b - y)$

```
Perpendicular[A, M, X, Q]
```

$r - x == 0$

```
Eliminate[Sqrt[r^2 + s^2] == R && (d - s) (a - x) == (c - r) (b - y) && r - x == 0, {r, s}]
```

$b^2 c^2 - 2abcd + a^2 d^2 - 2b^2 cx + 2abdx + 2bcdx - 2ad^2 x +$
$a^2 x^2 + b^2 x^2 - 2bdx^2 + d^2 x^2 - 2ax^3 + x^4 - 2bc^2 y + 2acdy + 4bcxy - 2adxy -$
$2cdxy - 2bx^2 y + 2dx^2 y + c^2 y^2 - 2cxy^2 + x^2 y^2 == R^2 \left(a^2 - 2ax + x^2\right)$

```
ec1 = %
```

$$b^2 c^2 - 2 a b c d + a^2 d^2 - 2 b^2 c x + 2 a b d x + 2 b c d x - 2 a d^2 x + a^2 x^2 + b^2 x^2 - 2 b d x^2 + d^2 x^2 - 2 a x^3 + x^4 - 2 b c^2 y + 2 a c d y + 4 b c x y - 2 a d x y - 2 c d x y - 2 b x^2 y + 2 d x^2 y + c^2 y^2 - 2 c x y^2 + x^2 y^2 == R^2 \left(a^2 - 2 a x + x^2\right)$$

```
Solve[ec1, y]
```

$$\Bigg\{\Bigg\{y \to \frac{1}{c^2 - 2 c x + x^2} \Big(b c^2 - a c d - 2 b c x + a d x + c d x + b x^2 - d x^2 - \sqrt{\left(a^2 c^2 R^2 - 2 a^2 c R^2 x - 2 a c^2 R^2 x - a^2 c^2 x^2 + a^2 R^2 x^2 + 4 a c R^2 x^2 + c^2 R^2 x^2 + 2 a^2 c x^3 + 2 a c^2 x^3 - 2 a R^2 x^3 - 2 c R^2 x^3 - a^2 x^4 - 4 a c x^4 - c^2 x^4 + R^2 x^4 + 2 a x^5 + 2 c x^5 - x^6\right)}\Big)\Bigg\},$$

$$\Bigg\{y \to \frac{1}{c^2 - 2 c x + x^2} \Big(b c^2 - a c d - 2 b c x + a d x + c d x + b x^2 - d x^2 + \sqrt{\left(a^2 c^2 R^2 - 2 a^2 c R^2 x - 2 a c^2 R^2 x - a^2 c^2 x^2 + a^2 R^2 x^2 + 4 a c R^2 x^2 + c^2 R^2 x^2 + 2 a^2 c x^3 + 2 a c^2 x^3 - 2 a R^2 x^3 - 2 c R^2 x^3 - a^2 x^4 - 4 a c x^4 - c^2 x^4 + R^2 x^4 + 2 a x^5 + 2 c x^5 - x^6\right)}\Big)\Bigg\}\Bigg\}$$

$$\mathbf{Factor}\left[a^2 c^2 R^2 - 2 a^2 c R^2 x - 2 a c^2 R^2 x - a^2 c^2 x^2 + a^2 R^2 x^2 + 4 a c R^2 x^2 + c^2 R^2 x^2 + 2 a^2 c x^3 + 2 a c^2 x^3 - 2 a R^2 x^3 - 2 c R^2 x^3 - a^2 x^4 - 4 a c x^4 - c^2 x^4 + R^2 x^4 + 2 a x^5 + 2 c x^5 - x^6\right]$$

$$(a - x)^2 \ (c - x)^2 \ (R - x) \ (R + x)$$

$$\mathbf{Factor}\left[b c^2 - a c d - 2 b c x + a d x + c d x + b x^2 - d x^2\right]$$

$$(c - x) \ (b c - a d - b x + d x)$$

Bibliografía

[1] Botana, Francisco: *Automatic determination of algebraic surfaces as loci of points*, LNCS 2657 (2003) 879-886

[2] Yates, Robert C: *Curves and Their Properties*, NCTM (1974)

[3] `http://www.mathcurve.com/courbes2d/rosillo/rosillo.shtml`

Enheduanna, Teano y Aglaonike, precursoras de Hipatia

Juan Núñez, Alba V. Olivares, Estrella Rodríguez, Marithania Silvero
Dpto. de Geometría y Topología, Fac. de Matemáticas, Univ. de Sevilla
jnvaldes@us.es, alba_3_3_@hotmail.com,
estrellarodlor@gmail.com, sylnova@hotmail.com

Abstract

Most researchers on the History of Science, as well as historians trying to popularize Mathematics among wide audiences tend to believe that Hipatia of Alexandria (century IV B.C.) is the first woman to have been a first-rate mathematician in the ancient world. However, the authors of this paper remind the figure of three women living in earlier times than those of Hipatia, who could well deserve an analogous consideration as forerunners of female mathematics, namely Enheduanna (century XXV B.C.), Theano of Croto (century VI B.C.) and Aglaonike (century III B.C.).

El buen carácter se gana la benevolencia,
incluso de los enemigos.
Teano

Introducción

Coincidiendo en el tiempo con la elaboración de este artículo (último trimestre del año 2009), el estreno en España de la película *Ágora*, dedicada a la figura de Hipatia de Alejandría, unido a la aparición relativamente reciente de numerosos libros y ensayos sobre ella (véanse [5] y [6], por ejemplo) ha provocado un auténtico boom en la sociedad española. Pueden consultarse biografías completas sobre Hipatia en [1, 2, 3 y website10].

Para muchos investigadores en Historia de las Ciencias en general, y en Historia de las Matemáticas en particular, Hipatia de Alejandría (siglo IV d.c.) fue *la primera mujer matemática de la antigüedad* [4]. Aunque esta opinión está muy generalizada y en honor a la verdad no puede decirse que carezca de fundamento, también es cierto que muchísimo tiempo antes de Hipatia (casi 24 siglos antes, en el caso de algunas de ellas), existieron mujeres que pueden discutirle esta supremacía, de una forma totalmente objetiva y fundamentada.

Así, Enheduanna, Teano y Aglaonike, en este orden, vivieron en una época muy anterior a la de Hipatia y entre el legado que han dejado para la posteridad se encuentran numerosas obras matemáticas que hacen que, cuanto menos, puedan discutirle a Hipatia la condición de ser *la primera mujer matemática de la antigüedad.*

Por todo ello, el propósito principal de este artículo es el de sacar a la luz la vida y obra de estas mujeres, con el objetivo de darlas a conocer no sólo a la comunidad científica y matemática, sino también al lector interesado, sin la intención por nuestra parte de avivar ningún tipo de polémica sobre esta supremacía.

1. Enheduanna

Enheduanna (en otros textos aparece escrito Hedu'anna u otras caligrafías parecidas), nacida alrededor del año 2300 a.C., era hija de Sargón I el Grande (o *el Viejo),* Rey de Akad que unificó Mesopotamia por primera vez (? 2334/2370 - ? 2314/2279 a. C.), al unir Sumeria y Acadia.

Figura 1. *Enheduanna*

Este parentesco permitió a Enheduanna tomar parte desde una edad muy temprana en la actividad política desarrollada por su padre, por lo que pudo asumir un papel estratégico en el espacio religioso como Gran Sacerdotisa vinculada a Nanna (diosa de la luna) y a Inanna (diosa del cielo y de la fecundidad) en la ciudad de Ur. Esta posición le permitió controlar los conocimientos matemáticos y astronómicos de Sumeria y Babilonia, haciendo construir observatorios dentro de los templos, elaborando los primeros mapas sobre movimientos celestes y creando el primer calendario religioso (por cierto, todavía en uso por algunas religiones).

Para algunos investigadores, Enheduanna es *la primera mujer registrada en la historia de la ciencia* y también *la primera persona que firma sus escritos*. Este hecho se debe seguramente a que casi todos los escritos de aquella época los realizaban los escribas por encargo de sus amos, por lo que no firmaban la autoría; sin embargo, la posición de autoridad de Enheduanna le permitió firmar sus escritos, convirtiéndose por ello en la primera persona en ostentar esta característica (véase la excelente página [website5], de la que también se han extraído numerosas referencias para este artículo).

La existencia de Enheduanna se conoce gracias a la inscripción encontrada al dorso de un disco de alabastro descubierto en 1926 y fechado alrededor de 1900 a.C., que ahora se encuentra en el museo universitario de Filadelfia; en la parte posterior de este disco hay una inscripción en la que se explica que ella es hija de Sargón de Akkad, al que le estaba permitido dar altos cargos a miembros de su familia, iniciando esta tradición con Enheduanna.

Figura 2. *Inscripción en disco de alabastro*

De ella se conservan más de cuarenta poemas en tablillas cuneiformes, siendo el Nimesara el más conocido de ellos (véase [website1]). Sin embargo, para un mejor entendimiento de la actividad de Enheduanna como científica y como matemática, es necesario tener conocimiento del papel que desempeñaban las mujeres en la sociedad de Mesopotamia.

En general, los hombres y las mujeres mesopotámicas no tenían los mismos derechos, si bien es cierto que en periodos tempranos las mujeres podían comprar, vender, atender a asuntos legales en ausencia de los hombres, tener sus propias propiedades, prestar y pedir prestado e incluso realizar negocios por sí mismas.

Entre los derechos de las mujeres había grandes diferencias entre las de alto y bajo estatus: las mujeres de estatus privilegiado, en donde estaban incluidas las sacerdotisas (como es el caso de Enheduanna), aprendían a leer y escribir para poder ejercer así una autoridad administrativa considerable, al contrario que las de bajo estatus, a las que no les estaba permitido.

Esta concesión de privilegios a las mujeres de alto estatus es precisamente la que permite a Enheduanna denunciar la injusticia que se comete cuando, después de la muerte de su padre, el nuevo gobernante la releva de su posición como suma sacerdotisa; esta denuncia se recoge en uno de sus poemas, cuya traducción vendría a decir lo siguiente:

"A mí, que una vez me senté triunfante, él me ha apartado del santuario. Como una bocanada de aire me hizo volar por la ventana, mi vida se consume. Me alejó de la corona apropiada para el desempeño del sacerdocio. Me dio la daga y la espada- "te pertenece"- me dijo".

Desde el punto de vista estrictamente matemático, Enheduanna fue capaz de resolver ecuaciones de grado tres, a partir de unas tablillas en las que aparecían la suma del cuadrado y el cubo de gran cantidad de números naturales. De ahí que no sea descabellado considerarla, como hacen varios autores, no sólo la primera mujer científica de la antigüedad, sino también la primera mujer matemática de la historia.

2. Teano

Teano, nacida en Crotona, en el s. VI a.C., más concretamente en el año 546, es para muchos autores la primera mujer matemática de la antigüedad, a pesar de que junto a ella también estudiasen otras mujeres en la escuela de los pitagóricos (en la "Vida de Pitágoras" del historiador Giamblico, aparece un listado de estudiantes de esta escuela en el que figuran 17 mujeres).

Figura 3. *Teano de Crotona*

Según algunas fuentes [website2, por ejemplo], Teano fue hija de Milón, un hombre muy rico que valoraba la importancia de las artes y las ciencias hasta el punto de ser mecenas de Pitágoras. Según otras, fue hija del físico Brontino, que pertenecía al grupo religioso de los órficos [website4], o bien hija de Pitonacte (la única referencia que se tiene de este personaje la proporciona el léxico de Suda que lo menciona como padre de Teano, en [website3]). No obstante, en la mayor parte de las fuentes sobre Teano [website3, por ejemplo] se indica que apenas se tienen referencias de ella y que las que existen son contradictorias, aunque parece haber coincidencia en considerarla miembro de la escuela pitagórica). La mayoría de estas fuentes sí coinciden en que Teano fue discípula de Pitágoras y se casó con él cuando éste ya era viejo, a pesar de la diferencia de edad (unos 30 años). Aunque Diógenes Laercio pensaba que ella era hija de Brontino y mujer de Pitágoras (véase la primera parte del libro octavo de vidas de los filósofos más ilustres de Diógenes Laercio, en [website3]), para otros doxógrafos, Teano era mujer de Brontino y discípula de Pitágoras (Doxografía: ciencia de recopilar, de diversas maneras, las opiniones de terceros autores). Como se ve, una verdadera confusión, que en parte puede ser explicada por el secretismo que Pitágoras exigía a los miembros de su escuela, lo que hizo que no se pudiese transmitir ninguna información fiable tanto sobre los mismos, como sobre sus obras científicas.

Con su descendencia, ocurre igual que con su matrimonio: sigue existiendo una gran confusión al respecto. Para algunos autores, su matrimonio con Pitágoras dio lugar a tres hijas, Damo, María y Arignote [website6]. Otras fuentes [website8, por ejemplo] no hacen mención de todos sus hijos, sólo de una hija llamada

Pintis, mientras que en [website7] se afirma que sólo tuvo dos hijas, cuyos nombres no se indican. En [website4] se dice que Teano tuvo una hija llamada Damo, así como un hijo llamado Telauges, pero sin embargo hay otras dos corrientes de historiadores que discrepan: mientras una de ellas afirma que Pitágoras y Teano fueron padres de tres hijas (Damo, Myria y Arignote) y de dos hijos, la otra [website2, por ejemplo] sostiene que el matrimonio procreó tres hijos: dos varones y una mujer.

En la época de Teano, la mujer estaba marginada de las actividades científicas, pero en la escuela pitagórica no existían prejuicios ni discriminaciones y se recibía por igual a hombres que a mujeres. Teano estudió mucho y trabajó con gran dedicación, por lo que, al cabo de unos años se convirtió en maestra.

Teano fue considerada un modelo de mujer, madre, esposa y filósofa para las demás mujeres; escribió numerosos tratados sobre matemáticas, física y medicina, y fue precursora de la investigación científica.

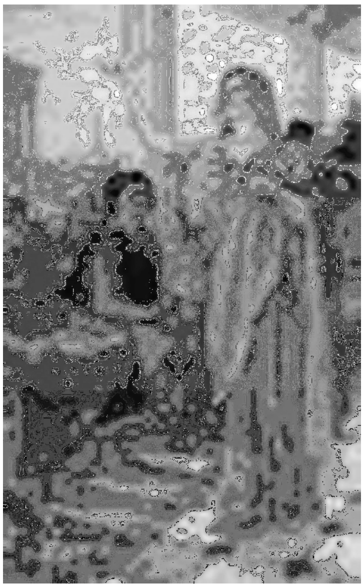


Figura 4. *Teano enseñando en la escuela*

Al igual que el resto de los pitagóricos, Teano pensaba que el Universo estaba regido por el número, ya que en él reside el orden esencial. Sólo admitían la existencia de los números naturales. Para la escuela el número era la esencia del universo. Todo esto junto a su búsqueda de la perfección y de la armonía en las formas y las proporciones llevó a Teano a trabajar en el número áureo.

Así, el principal trabajo que se le atribuye versa sobre la famosa proporción áurea. Como la constante geométrica π, el número de oro Φ (denotado así en honor al escultor griego Fidias) es un número irracional que aparece con mucha frecuencia en la naturaleza y cuyo valor aproximado es 1.6180. Quizás fuese el número de oro el primer número irracional que conocieron los griegos. Cuando los pitagóricos descubrieron que existían números irracionales, es decir, números que no podían escribirse como cociente de dos números enteros, quedaron consternados, ya que este hecho rompía muchos de sus teorías filosóficas. Por ello decidieron guardar este descubrimiento en secreto. Según una leyenda, Hipaso de Metaponte lo reveló y fue castigado ahogándose en un naufragio [website6].

En geometría, un rectángulo áureo es aquel cuyos lados están en proporción áurea, por ejemplo, 13:8. Tanto en la Grecia Antigua como en Egipto, se usó esta proporción para construir numerosos edificios (el Partenón, las pirámides, etc.). Actualmente conocemos que algunos patrones de crecimiento observados en la naturaleza siguen la proporción áurea como, por ejemplo, las espirales de la concha del *Nautilus* y en la espiral doble de las flores de girasol.

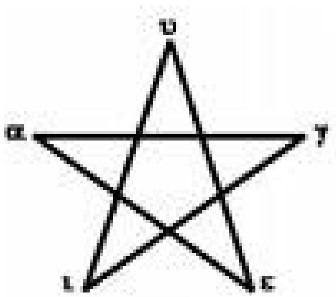


Figura 5. *E Plentagrama*

Este número llegó al conocimiento de Teano de la siguiente forma. El signo de la escuela pitagórica era el *pentagrama,* a saber, una estrella de cinco puntas que se forma uniendo los vértices de un pentágono regular dejando uno en medio. Pues bien, dividiendo la longitud de la diagonal entre la longitud del lado del pentágono, el resultado que se obtiene es el número áureo [website5].

La proporcionalidad fue el eje en torno al que se desarrolló la mayor parte de la producción de la escuela pitagórica. Los pitagóricos descubrieron que había magnitudes conmensurables e inconmensurables, a las que se refirieron con números que llamaron, respectivamente, racionales e irracionales. Así, Teano conoció las ocho formas de una proporción y su propiedad fundamental.

Sin embargo, debido a que todos los trabajos realizados por los miembros de la escuela eran escritos bajo el nombre de Pitágoras, resulta difícil determinar quiénes fueron realmente sus autores. Los trabajos escritos por los pitagóricos no se conservan en papel y los conocemos gracias a los escritos de otros autores como Platón y Herodoto. Con estas premisas, las principales obras que se le atribuyen a Teano son una biografía de Pitágoras, un teorema sobre la proporción áurea, varias aportaciones a la teoría de números, a la teoría de poliedros regulares, a la cosmología, al origen del Universo, a la Física, la Medicina, a la Psicología infantil y un trabajo "Sobre la Piedad" del que se conserva el fragmento siguiente en el que hace una disquisición sobre el número:

"*He oído decir que los griegos pensaban que Pitágoras había dicho que todo había sido engendrado por el Número. Pero esta afirmación nos perturba: ¿cómo nos podemos imaginar cosas que no existen y que pueden engendrar? Él dijo no que todas las cosas nacían del Número, sino que todo estaba formado de acuerdo con el Número, ya que en el Número reside el orden esencial, y las mismas cosas pueden ser nombradas primeras, segundas, y así sucesivamente, sólo cuando participan de este orden*".

Por otro lado, en un tratado sobre la construcción del universo, Teano expone que éste está formado por diez esferas concéntricas: el Sol, la Luna, Saturno, Júpiter, Marte, Venus, Mercurio, la Tierra, la Contra-Tierra, y las estrellas. Las siete primeras describen una órbita en torno a un fuego central. Las estrellas están fijas y se consideran inmóviles. En su teoría, las distancias entre las esferas y el fuego central están en la misma proporción que los intervalos en las escalas musicales. Teano escribió muchas cartas a amigos y conocidos, en las que exponía parte de su sabiduría adquirida. Así, al respecto de la Música, en una carta que Teano le dirige a la joven Calixto puede leerse:

"Ya sabes, querida, por comparación con los instrumentos musicales, que éstos suenan mejor cuando están algo destensados, y en cambio, cuando están tensados en demasía, revientan. Lo mismo sucede en relación con las sirvientas: es cierto que mucho relajamiento produce un efecto contrario a la obediencia, pero una vigilancia estricta desata las fuerzas instintivas de la naturaleza. Por todo ello es necesario ser prudentes: la medida es lo mejor en todo. Pórtate bien".

Finalmente, la comunidad pitagórica llegó a tener tanto poder en Crotona que la población se rebeló contra ella. En una revuelta contra el poder de la escuela, Pitágoras perdió la vida y fue Teano quien se hizo cargo de su dirección en el exilio, con ayuda de dos de sus hijas o de las tres, Damo, María y Arignote [website8], consiguiendo difundir los conocimientos matemáticos y filosóficos por Grecia y por Egipto.

3. Aglaonike

El conocimiento que se tiene de la vida de Aglaonike (siglo V a. C.) está lleno de sombras y misterios. Es sabido que Aglaonike, cuyo nombre significa *"victoria de la luz*", nació entre el año 200 y el 400 a.C. en Tesalia, Grecia. Su padre Hegetor de Tesalia, fue quien le permitió adentrarse en los conocimientos de la astronomía a pesar de su condición de mujer, lo cual en la sociedad de aquella época era un hecho totalmente infrecuente.

¡Error! 

Figura 6. *Aglaonike*

A Aglaonike se la considera *la primera mujer astrónoma de la antigüedad*, si bien, y como en este mismo artículo se refleja, pudieron ser muchas mujeres las que la precedieron, cuyas historias fueron ignoradas.

Debido a su destreza en matemáticas y su capacidad para predecir eclipses, conocimiento que probablemente obtuvo estudiando los saros babilónicos, Aglaonike era considerada por sus contemporáneos como una bruja capaz de hacer desaparecer la luna a su antojo. Era tal la situación de la mujer en aquella época, que los hombres prefirieron tildarla de hechicera antes que admitir que poseía conocimientos matemáticos y que era capaz de entender y estudiar esta materia. Esto llevó a la creación de una leyenda en torno a Aglaonike que la cataloga como la malvada hechicera sacerdotisa de Hécate, cuya serpiente venenosa acaba matando a la Eurídice del mito de Orfeo, y que nos recuerda un proverbio griego popular en aquellos tiempos: "*Sí, tanto como la luna obedece a Aglaonike*".

Figura 7. *La Diosa Hécate*

Permítasenos un inciso para comentar brevemente que Hécate fue originalmente una diosa de las tierras salvajes y los partos, encumbrada primero en la Grecia micénica o en Tracia, pero originada entre los carios de Anatolia. Hécate permaneció como Gran Diosa hasta tiempos históricos, siendo muy abundantes los monumentos en su honor en Frigia y Caria. Los cultos populares que la veneraban como diosa madre hicieron que fuese integrada en la mitología griega, adquiriendo en la Alejandría ptolemaica sus connotaciones de diosa de la hechicería y su papel como "Reina de los Fantasmas", bajo cuyo aspecto triplicado fue transmitida a la cultura post-renacentista.

Aglaonike alcanzó gran popularidad en Grecia, más por la maldad divulgada acerca de ella que por sus méritos científicos, llegando a aparecer en escritos de Platón, Apolonio de Rodas, Horacio y Virgilio entre otros, lo que contribuyó a granjearle el desprecio de sus coetáneos. Sin embargo, parece que Aglaonike pudo usar este temor infundado hacia su persona como manera de manipular, siendo así respetada por miedo a sus posibles conjuros que hacían desaparecer los astros del cielo. "*Quien podía hacer desaparecer la Luna*" era el apelativo con que se conocía a Aglaonike, un "sobrenombre" que denotaba más temor que admiración.

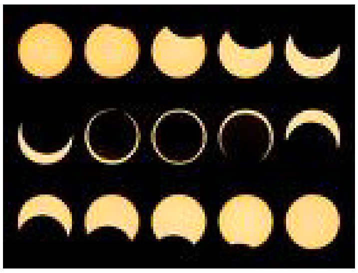


Figura 8. *La "desaparición" de la Luna*

Los misterios que envuelven a Aglaonike no terminan aquí, pues según algunas fuentes, una tal Aglanice (nombre por el que también es conocida Aglaonike) pudo haber vivido entre el 1900 y el 1800 a.C. en Egipto, siendo hija del faraón Sesostris. Aglanice habría estudiado la posición exacta de las estrellas y planetas, contribuyendo así con sus conocimientos a la arquitectura y ritos egipcios de la época. En cualquier caso, es difícil saber con seguridad si estas dos mujeres fueron una misma, o bien si Aglanice fue otra mujer sabia cuya historia otros se apresuraron a esconder.

Considerada como la primera mujer astrónoma, Aglaonike fue capaz de predecir eclipses. Es muy posible que "*conociera los ciclos de eclipses de Saros, descubierto por los caldeos",* y por eso, como dice Carolina Herschel a la que seguidamente nos referiremos, *"puede ser calificada como una astrónoma de la antigüedad",* aunque pasó a la posteridad como visionaria más que como científica, a diferencia de Thales de Mileto, por ejemplo, que, aunque también predijo eclipses, pasó a la posteridad como científico o filósofo natural. A Aglaonike se le atribuye el conocimiento del año cíclico lunar (el saros). "Saros es un período caldeo de 223 lunas, lo que equivale a 6.585,32 días (algo más de 18 años y 10 u 11 días), tras el cual la Luna y la Tierra regresan aproximadamente a la misma posición en sus órbitas, y se pueden repetir los eclipses".

La anteriormente citada Carolina Herschel, nacida en Hannover en 1750, ha sido una de las mujeres astrónomas más importantes de la historia. Carolina vivió durante 97 años, y a pesar de que durante una gran parte de su vida fue la ayudante de su hermano Williams, astrónomo real, y que por su falta de autoestima y los prejuicios que en esta época había hacia las mujeres, sólo al final de su vida fue reconocido su trabajo, ha sido sin duda la mujer que más ha contribuido al avance de la astronomía de todos los tiempos. En una carta escrita por ella a una de sus hermanas, carta que se conserva en "The Caroline Herschel Visitor Program", del Instituto Científico del Telescopio Espacial (Hubble), cuyo objetivo es incentivar la participación de la mujer y las minorías de cualquier parte del mundo en proyectos científicos de la institución, Carolina se refiere a Aglaonike, al igual que a otras mujeres matemáticas, en los siguientes términos (véase [website 9]):

"A veces, cuando estoy sola en la oscuridad, y el universo revela otro secreto más, digo los nombres de mis antiguas, perdidas y olvidadas hermanas en los libros que registran nuestra ciencia – Aglaonice de Tesalia , Hypatia, Hildegarda, Catalina Hevelius, María Agnesi - como si las mismas estrellas pudieran recordar. ¿Sabías que Hildegarda propuso un universo heliocéntrico 300 años antes que Copérnico? ¿Que escribió sobre la gravitación universal 500 años antes que Newton? ¿Pero quién la escuchó? Sólo era una sirvienta, una mujer.

¿En qué edad nos encontramos, si aquella era la edad oscura? Y lo es también para mi nombre, que también será olvidado, si no soy acusada de ser una hechicera, como Aganice, y los cristianos no amenazan con arrastrarme hasta la iglesia, con asesinarme, como le hicieron a Hypatia de Alejandría, la elocuente y joven mujer que ideó los instrumentos empleados para medir con precisión la posición y movimiento de los cuerpos celestes".

4. A modo de conclusión

Los autores pensamos que afirmar con rotundidad quién fue la *primera mujer matemática de la antigüedad* no es objetivamente posible. Cierto es que en la mayoría de los recientes trabajos sobre mujeres matemáticas (de muy buena calidad casi todos ellos), los investigadores conceden tal honor a Hipatia de Alejandría, aunque, como hemos mostrado en este artículo, esa afirmación es, cuanto menos, discutible. Es verdad que debido a este hecho, o como consecuencia del mismo, Hipatia es la mujer que actualmente goza de tal consideración, ya que es la que tiene mayor popularidad y a la que se le han dedicado más libros y estudios que a las demás, pero en nuestra opinión, eso no es objetivo.

No obstante, es cierto también que nosotros no podemos caer en el error de considerar a las mujeres objeto de este artículo más importantes o dignas de mayor reconocimiento que Hipatia, ya que probablemente investigaciones y estudios posteriores hagan caer por tierra esta consideración. Una de las cosas que sí puede afirmarse con certeza es que, y esto sí es objetivo, todas ellas son muy anteriores a Hipatia.

En cualquier caso, lo único que hemos pretendido los autores con este artículo es dar a conocer la vida y obra de algunas mujeres matemáticas claramente anteriores a Hipatia en el tiempo, sin desear entrar en comparaciones de importancia o de dignificación; esperemos haberlo conseguido.

Referencias

[1] Dzielska, M. (2004): *Hipatia de Alejandría*. Traducción española de José Luis López Muñoz. Siruela Editorial. Madrid.

[2] Knorr, R. (1989): *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry*. Birkäuser. Boston.

[3] Mataix, S. (1999): *Matemáticas es nombre de mujer*. Rubes Editorial S.L.

[4] Osen, L. M. (1975): *Women in Mathematics*. Math. Pr. Publisher.

[5] Russel, D, (2007): *Hipatia, mujer y conocimiento*. KRK Ediciones.

[6] Salesas Pla, F. (2009): *Hipatia la Maestra*. Editorial El Rompecabezas. Madrid.

[website1] *http://www.cddc.vt.edu/feminism/enheduanna.html* (sobre la vida de Enheduanna)

[website2] *http://hypatia.morelos.gob.mx /* (página web de la revista Hipatia, de la Universidad de Morelos (México)).

[website3] *http://www.raco.cat/index.php/index/raco/* (página web de revistas catalanas de acceso abierto).

[website4] *http://www.divulgamat.net/*(sobre biografías de matemáticos).

[website5] *http://www.rsme.es/comis/mujmat/mujer-ciencia/* (Sobre mujeres matemáticas. RSME).

[website6] *http://matematicas.lunadelasierra.org/mujeres/* (sobre mujeres matemáticas).

[website7] *http://www.cienciaonline.com/* (sobre divulgación matemática).

[website8] *http://ilce.edu.mx/v5/index.html* (página web del Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa).

[website9] *http://extempforaneo.net/wordpress/archives/280* (sobre Carolina Herschel).

[website10] *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/BiogIndex.html* (sobre Hipatia de Alejandría).

San Agustín y las matemáticas

Pablo Martín Prieto
Departamento de Historia Medieval
Universidad Complutense de Madrid
pablomartinprieto@ghis.ucm.es

Abstract

The aim of this paper is to offer a brief account of some interesting attitudes toward mathematics, mathematical discourse, numerology and akin matters, by one of the foremost early fathers of Christianity. The authority of St. Augustine as one of the chief grounders of Christian dogma ensures wide acceptance to his views on numbers and mathematics throughout the Middle Ages and therefore conveys an outstanding starting point to a better understanding of medieval mathematics.

Introducción

A San Agustín de Hipona (354-430), el gran padre de la Iglesia occidental por antonomasia y uno de los más originales forjadores del dogma católico, se debe la que probablemente puede considerarse como la contribución personal más decisivamente influyente en la formación y evolución ulterior de la cultura medieval en Occidente, donde su influjo no deja de latir, omnipresente. Sólo se comenzará a debilitar su huella con el gran movimiento de recepción de la ciencia y la filosofía griegas, por medio de las traducciones, especialmente a partir del siglo XII. Así, puede afirmarse sin exageración que toda la cultura altomedieval, desde el siglo V hasta el XI, habrá sido, esencialmente, agustiniana. En buena medida, lo que sucede en general con la cultura altomedieval se puede aplicar concretamente al desarrollo de las ciencias matemáticas, muchos de cuyos autores y orientaciones fundamentales se remontan y apoyan en parte sobre las ideas que Agustín concibió en este campo. No se trata, por supuesto, de que el tratamiento agustiniano de las matemáticas, influyente pero en todo caso de naturaleza tangencial y alcance restringido, haya preestablecido el guión de la especulación y de la investigación matemáticas para la totalidad de los tiempos altomedievales; pero sí puede afirmarse sin sombra de exageración que un preciso conocimiento de aquél ayuda a esclarecer y contextualizar el quehacer matemático de tantos autores de aquellos tiempos fuertemente influidos por la lectura de la obra agustiniana.

1. Idealismo platónico y matemáticas

Es ya un lugar común de la crítica, sólidamente establecido sobre una firme evidencia, ponderar la corriente de platonismo filosófico, más o menos patente, que subyace el pensamiento de los principales padres de la Iglesia orientales y occidentales. También resultan evidentes los íntimos lazos que, desde su primera formulación en la antigua Grecia, la doctrina platónica y sus derivados mantienen con la filosofía de las ciencias matemáticas. Tal vez, la realidad que más incuestionablemente sirve de apoyo a la especulación del idealismo platónico sea la verdad y la fuerza eternas de los inteligibles matemáticos: de ahí las conexiones del mismo Platón con las escuelas pitagóricas, una de cuyas señas de identidad más constantes fue el cultivo de los saberes matemáticos, y también la querencia filomatemática que con mayor o menor intensidad más tarde han venido mostrando todos los pensadores platónicos o platonizantes hasta nuestro tiempo.

Brevemente, el corazón de la doctrina platónica postula el dualismo entre este mundo físico, fenoménico, que nos es dado conocer por el testimonio de los sentidos, y otro mundo, mucho más real, formado por las ideas o arquetipos eternos e inmutables. Las ideas o formas platónicas constituyen el paradigma o modelo incorruptible de las realidades físicas. La mente puede elevarse a conocer estas ideas eternas, por generalización y abstracción a partir de las realidades del mundo físico, pero las ideas mismas son realidades exteriores a la mente e independientes del pensamiento: existen con toda realidad, aun antes de que el hombre llegue a conocerlas (o re-conocerlas). De inmediato se comprende la estrecha relación que puede establecerse entre esta doctrina idealista y la experiencia del matemático, acostumbrado a trabajar con conceptos, objetos y teoremas objetivos, que aparecen como verdaderos e inmutables, con independencia de que el hombre llegue o no a conocerlos y enunciarlos. En tiempos modernos, esta convicción, profundamente arraigada entre insignes matemáticos, se descubre tras afirmaciones como las siguientes:

"*Los verdaderos sabios son modestos. Cuando se ha tenido la fortuna de hacer un descubrimiento, ¿qué valor puede tener la satisfacción de darle nombre, al lado de la alegría de haber contemplado la verdad frente a frente?*" (Poincaré)

"*La ciencia matemática es un estudio que nada debe a la observación, nada a la experiencia, nada a la inducción y nada a la casualidad*" (Huxley).

2. El platonismo de Agustín expresado a través de las matemáticas

Espíritu curioso e insaciable, ardiente en su búsqueda vehemente y un tanto ingenua de la verdad, antes de convertirse definitivamente al Cristianismo, Agustín recaló en varias de las escuelas filosóficas y religiosas de su tiempo, desde el estoicismo hasta el maniqueísmo, pasando por el pitagorismo y el platonismo. Realmente, lo que acabó de decidir su opción por el platonismo como fondo filosófico general de su pensamiento, fue la reflexión sobre la esencia de los conceptos matemáticos. En muchos lugares de su extensa y variada obra, Agustín vuelve una y otra vez a emplear ejemplos matemáticos para convencer al lector de la verdad del sistema platónico. Sin duda, fue éste el camino que él mismo llegó para adoptar el platonismo: el argumento más sólido que dota de credibilidad a la teoría platónica de un mundo ideal se obtiene sin duda mediante la reflexión matemática.

Analizando el conocimiento que poseemos en nuestra mente, encontramos una distinción fundamental entre contenidos formados por generalización y abstracción a partir del dato que los sentidos suministran de la realidad física, y por otra parte, el conocimiento innato deducido dentro de la propia mente a partir de nociones ya insertas en ella, sin origen en los sentidos. Para ilustrar esta diferencia, Agustín se refiere en primer lugar al origen del conocimiento de la forma cuadrada, abstrayendo este concepto general a partir de los numerosos objetos cuadrados de los que los sentidos ofrecen experiencia. Sin embargo, continúa, existen objetos matemáticos cuyo conocimiento no puede proceder de la experiencia sensorial, porque nadie ha visto tal cosa, y pone como ejemplo la infinita divisibilidad del espacio: el espacio entre dos radios aparentemente contiguos de un círculo infinitamente pequeño es a su vez indefinidamente divisible. Como veremos, Agustín recurría con frecuencia en sus reflexiones a la noción de la infinitud, que lo impresionaba especialmente:

> "*A. Quid si nobis quisquam dicta secundum id eam iudicare, quod videre oculis solet? R. Quare ergo iudicat, si tamen bene erudita est, quantamvis pilam veram vera planicie puncto tangi? Quid tale unquam*

oculis vidit? [...] Annon hoc probamus, cum etiam minimum circulum imaginando animo describimus, et ab eo lineas ad centrum deducimus? Nam cum duas duxerimus inter quas quasi acu vix pungi possit, alias tam in medio non possumus. Ipsa cogitatione imaginaria ducere, ut ad centrum sine ulla commixtione perveniant: cum clamet ratio innumerabiles posse duci, nec sese in illis incredibilibus angustiis nisi centro posse contingere, ita ut in omni earum intervalio scribi etiam circulus possit" / "*A. ¿Y qué si cualquiera nos dice que ella [la mente] juzga de acuerdo con lo que ven los ojos? R. ¿Entonces, cómo juzga, si, estando bien instruida, sabe que una esfera perfecta sólo toca un plano ideal en un único punto? ¿Quién ha visto tal cosa con sus propios ojos?* […] *¿Y no experimentamos lo mismo si nos representamos un círculo mínimo y en él llevamos los radios al centro? Pues si trazamos dos, separados por una distancia en que apenas pueda insertarse el filo de una aguja, ya no podemos [imaginar] trazar otros hasta el centro. Pero la misma razón nos enseña que sin dificultad pueden llevarse al centro, por increíbles angosturas, e incluso inscribir nuevos círculos en los espacios entre unos [radios] y otros*".

Soliloquia, II, 20, 35.

Agustín recurre con frecuencia a las matemáticas para presentar a sus lectores ejemplos incuestionables de verdades objetivas, absolutas, eternas e inamovibles, independientes del enunciador y del conocimiento humano:

"*Sed unum ad duo vel duo ad quatuor verissima ratio est: nec magis heri fuit ista ratio vera quam hodie, nec magis cras aut post annum erit vera, nec si omnis iste mundus concidat, poterit ista ratio non esse*" / "*Pero que uno es a dos lo que dos es a cuatro es una razón certísima: ni fue más verdadera ayer que hoy, ni dejará de serlo mañana ni el año que viene, ni aunque este mundo desaparezca*".

De ordine, II, 19, 50.

Sin duda, la armonía de los números sugiere a Agustín la nostalgia de un mundo más bello, puramente racional, liberado del encadenamiento de las pasiones, con verdades tan claras como la recién citada. Sin duda, las verdades, relaciones y objetos matemáticos constituyen su ejemplo preferido para referirse al conocimiento innato, independiente del mundo físico y del testimonio de los sentidos; en particular, Agustín precisa que, cuando nombramos una cosa física, a la mente acude la imagen de dicha cosa, pero si pensamos en un número, no es la imagen del número lo que la mente concibe, sino *el número mismo*:

> "*Item continet memoria numerorum dimensionumque rationes et leges innumerabiles, quarum nullam corporis sensus impressit, quia nec ipsae coloratae sunt aut sonant aut olent aut gustatae aut contractatae sunt*" / "*También la memoria contiene las innumerables razones y leyes de los números y dimensiones, ninguna de las cuales ha sido suministrada por los sentidos corporales, ya que ni tienen color, ni suenan, ni huelen, ni se las puede saborear o tocar*".
>
> *Confesiones*, X, 12, 19.

> "*Nomino quippe lapidem, nomino solem, cum res ipsae non adsunt sensibus meis; in memoria sane mea praesto sunt imagines eorum* […]. *Nomino numeros, quibus numeramus; en adsunt in memoria mea non imagines eorum, sed ipsi*" / "*Nombro, en efecto, una piedra, nombro el sol, cuando estas cosas no están presentes en mis sentidos, y a mi memoria acuden presto las imágenes de ellas* […]. *Nombro los números con los que contamos, y he aquí que en la memoria no [aparecen] sus imágenes, sino ellos mismos*".
>
> *Confesiones*, X, 15, 23.

Parte de este platonismo que descubrimos en la actitud de Agustín hacia el saber matemático se refleja en su consideración de la naturaleza en último término numérica de todo cuanto existe. Se trata, por demás, de una noción de origen pitagórico, avalada para el pensamiento cristiano por la autoridad de la sagrada escritura: "*Omnia in mensura et numero et pondere disposuisti*" / "*Has dispuesto todo según número y medida*" (*Sabiduría* XI, 21) y de los padres de la Iglesia orientales (así, Ireneo - *Adv. Haer.* IV, 4 - aclara que nada hay que no tenga su número; y Orígenes - *Periarch.* II, 9 - explica que no sólo los seres corporales están sometidos al número, sino todos los seres creados, incluidos los espirituales).

3. Numerología agustiniana

Otro camino de aproximación a la realidad matemática en la obra de Agustín, muy extendido entre los primeros pensadores cristianos, es una suerte de numerología sacra, o intento de analizar y comprender el sentido místico o significado oculto de los números que aparecen en el texto bíblico. La idea de que las propiedades de un número pueden esconder un sentido profundo relacionado con la estructura de la realidad o las verdades de la revelación se remonta a los filósofos paganos pitagóricos y estoicos, y quedará incorporada a la exégesis cristiana de la sagrada escritura por los padres orientales, como un elemento lindero con la superstición. En particular, Agustín alerta sobre la necesidad de tomarse muy en serio los números que aparecen en la Biblia ("*Ratio numeri contemnenda non est*" / "*No ha de tomarse a la ligera el sentido de los números*": *De lib. arb.* II, 16, 42), que nadie debe tener por gratuitos, ya que en verdad su aparición contiene un saber profundo ("*Non enim frustra in sanctis libris sapientiae coniunctus est numerus*" / "*No en vano incluyen el número los santos libros de la sabiduría*": *De lib. arb.* II, 8, 24) que el exégeta cristiano debe emplearse en desentrañar, cuidando de purificar este conocimiento místico de los números "*sacratissimi et mysteriorum plenissimi*" / "*sagradísimos y llenísimos de misterios*" (*In Pent. q.*, 152) de todo rastro atribuible a la tradición pagana de adivinación astral (*De doctr. christ.* II, 28, 42).

En particular, Agustín se detiene en considerar algunos ejemplos relevantes de esta consideración especial que los números de la sagrada escritura merecen al lector cristiano. Su intención es proporcionar una guía del sentido o los sentidos menos evidentes que estos números pueden esconder en la mente del autor sobrenatural de los textos bíblicos. En su tratado sobre la Trinidad (*De Trinitate*, IV, 4, 7), Agustín muestra un ejemplo muy significativo de esta dedicación exegética del número en sentido cristiano basado en el análisis del seis. Se trata, explica, de un número importante, pues constituye la suma del uno (la divinidad), más el dos (dualidad cuerpo-alma en el hombre, relación de la divinidad con su creación), más el tres (las tres personas de la Trinidad); es, además, un número perfecto, pues dividido por el uno da seis, por el dos da tres, y por el tres da dos. Adentrándose en su significado profundo con relación a la sagrada escritura, Agustín recuerda que la creación fue obra de seis días, y que el nacimiento de Cristo inaugura la sexta edad del mundo:

> "*Qui numerus propterea perfectus dicitur quia partibus suis completur: habet enim illas tres, sextam, tertiam, dimidiam* […]*; Sexta ergo eius unum est; tertia, duo; dimidia, tria. Unum autem et duo et tria consummant eumdem senarium. Cuius perfectionem nobis sacra scriptura commendat, in eo maxime quod Deus sex diebus perfecit opera sua, et sexto die factus est homo ad imaginem Dei. Et sexta aetate generis humani, Filius Dei venit et factus est filius hominis*" / "*El cual número se llama perfecto porque es completo en sus partes: en efecto, encierra en*

sí la sexta parte, la tercera y la media […]*; la sexta de él es uno; la tercera, dos; la media, tres. Por otra parte, uno más dos más tres dan el mismo seis, cuya perfección nos recomienda la misma sagrada escritura, sobre todo porque Dios consumó su obra en seis días, y en el sexto fue hecho el hombre a imagen de Dios. Y en la sexta edad del género humano vino Dios Hijo y fue hecho hijo del hombre*".

De Trinitate, IV, 4, 7.

En los *Evangelios* se habla de una mujer que estuvo enferma 18 años, y 18 multiplicado por 12 meses que tiene el año da seis al cubo; también aparece una higuera que llevaba tres años sin dar fruto: 3 multiplicado por los 12 meses del año es igual a seis al cuadrado. Son este tipo de ejemplos un tanto rebuscados los que Agustín y otros de los primeros autores cristianos se complacían tanto en rastrear a lo largo del texto bíblico, creyendo hallar en ellos una confirmación de su idea previa acerca del sentido profundo de ciertos números relevantes en la composición de dicho texto. Según un elaborado cómputo, Agustín halla que desde la concepción de Cristo hasta su nacimiento transcurrieron exactamente 276 días, y se emociona al comprobar que 276 es igual a 6 multiplicado por 46, siendo 46 precisamente el número de años que, según la tradición hebrea, tardó en edificarse el Templo de Jerusalén (*De Trinitate*, IV, 5, 19): el sentido profundo de esta rebuscada relación se comprende, desde un punto de vista cristiano, si se recuerda que, antes de su pasión, Cristo comparó su persona con el Templo, cuando vino a decir que si destruían el Templo, él lo reedificaría en tres días (y luego, según el relato evangélico, resucitó al tercer día).

Pero estas "pruebas" del sentido profundo y especial relevancia del número seis extraídas de la historia sagrada reciben una confirmación más universal a través de las relaciones de la astronomía. Así, Agustín considera un año de 12 meses con 30 días cada uno: un año con 360 días, esto es, un año cuya sexta parte son 60 días. Pero para completar el año solar faltan aún cinco días y cuarto, más o menos. Si se redondea esta cifra al alza, según la costumbre romana con las magnitudes no enteras, se tendría un resto de 6 días. Claro que, por otra parte, 5 días son la sexta parte de un mes de 30, y un cuarto de día (lo que los romanos llamaban un "cuadrante") son 6 horas (*De Trinitate*, IV, 4, 8). Hétenos aquí que, nuevamente, Agustín halla el seis por todas partes, mientras busca confirmar la importancia de este número, que ya percibía como protagonista de la sagrada escritura, también en distintas relaciones astronómicas. Estos análisis de la perfección y misterio ocultos en el seis serán recurrentes en la obra agustiniana, como uno de sus ejemplos preferidos para abrir a sus lectores la puerta a un conocimiento místico de la realidad a través del número (así, por ejemplo, en *De civitate Dei*, XI, 30).

La conclusión de Agustín al respecto es muy rotunda (quizás expresada con vehemencia, un poco a la defensiva frente a cualquier juicio escéptico): es imposible pasar por alto el sentido místico de los números que figuran en la sagrada escritura, y yerra gravemente quien piense que aparecen en ella por casualidad:

> "*Et horum quidem numerorum causas, cur in scripturis sanctus positi sint, potest alius alias indagare, vel quibus istae quas ego reddidi, praeponendae sint, vel aeque probabiles, vel istis etiam probabiliores: frustra tamen eos esse in scripturis positos, et nullas causas esse mysticas cur illic isti numeri commemorentur, nemo tam stultus ineptusque contenderit*" / "*Y otro puede indagar otras causas por las que todos estos números han sido puestos en las sagradas escrituras, o proponer, frente a estas que yo he encontrado, otras igual de probables, o incluso más probables [que las mías]; pero nadie habrá tan estúpido e inepto que llegue a afirmar que no existen causas místicas por las que estos números figuran [en la sagrada escritura]*".
>
> *De Trinitate*, IV, 6, 10.

Basándose, entre otros, en la autoridad de Agustín, así como en la fuerte inclinación platónica que da aliento a la especulación matemática y numerológica de los tiempos altomedievales, autores posteriores avanzarán un punto más allá en sus conclusiones al respecto: así, por ejemplo, el ilustre pensador Rabano Mauro (784-856), uno de los más conspicuos representantes del llamado Renacimiento carolingio, llegará a afirmar que la perfección del número seis no viene de que Dios creara el mundo en seis días, sino que, al contrario, Dios creó el mundo en seis días *precisamente* debido a la perfección del seis (*De clericorum institutione*, III, 22). Lo cual constituye, sin duda, desde un punto de vista filosófico y teológico, una afirmación aún más comprometida e interesante.

4. El vértigo del infinito

Pero quizás lo más revelador y propio de la actitud de Agustín hacia los números y las matemáticas se cifra en un aspecto de su personalidad que aún no hemos analizado. A lo largo de su vida, queda claro que este pensador, tan original e imaginativo, mantuvo una duradera pasión por los números. Llevado de un temperamento ardiente y emotivo en su búsqueda de la verdad, exploró numerosas escuelas filosóficas y sectas religiosas antes de recalar definitivamente en el Cristianismo, pero aunque durante ese proceso de búsqueda intelectual llegó a acumular notables conocimientos en una variedad de ramas del saber (ejerció como profesor de retórica, la disciplina fundamental de los estudios romanos), no parece que llegara a estar muy adelantado en las matemáticas. Sin duda, se nota que la materia le interesaba, pero por razones simbólicas, numerológicas, platonizantes o como tópico de discurso para convencer a sus lectores de otras ideas no propiamente matemáticas; así, sus ejemplos (como hemos tenido ocasión de apreciar) son muy básicos y no revelan haber alcanzado gran comprensión de la materia. Tal vez la razón de este desfase entre sus conocimientos especializados en otros campos y sus conocimientos básicos de matemáticas hay que buscarla en un motivo personal, muy revelador: y es que a Agustín las matemáticas se le atragantaron desde niño, de manera que nunca llegó a avanzar demasiado en ellas, a pesar de su contacto con matemáticos competentes insertos en la exigente tradición pitagórica y platónica. Él mismo nos suministra esta clave personal en un pasaje crucial de su autobiografía intelectual, cuando al referirse a su educación infantil reconoce que le entraban mal los números:

> "*Iam vero unum et unum duo, duo et duo quattuor, odiosa cantio mihi erat*" / "*Ya en efecto me resultaba odiosa la cantilena de uno y uno dos, dos y dos son cuatro*".
>
> *Confesiones*, I, 14, 22.

Con todo, aunque no pudiera expresarlo con propiedad por la índole superficial de sus conocimientos matemáticos, a este hombre a quien de niño se le habían atragantado los números, lo que más le impresionaba de Dios (pues así lo expresa recurrentemente), por encima de otros atributos o características de la divinidad, era su capacidad de abarcar todo el infinito de una sola ojeada. Parece que a Agustín le fascinaban la sugestión y las paradojas del infinito, a las que alude una y otra vez en distintos pasos de su obra. Y en los momentos más emotivos, cuando se dirige en segunda persona a la divinidad, de manera inconsciente el elogio de Dios que acude a su pluma está relacionado con esa capacidad de trascender y comprender el infinito:

> "*Magnus es, Domine, et laudabilis valde, magna virtus tua et sapientiae tuae non est numerus*" / "*Grande eres, Señor, y laudable en verdad, grande es tu virtud, y para tu sabiduría no existe el número*".
>
> *Confesiones*, I, 1 (invocación inicial de la obra).

> "*Tu vero, cui numerati sunt capilli nostri* […]" / "*Tú, en verdad, [Señor], que tienes numerados los cabellos de nuestra cabeza* […]"
>
> *Confesiones*, I, 12, 19.

No es difícil acumular los ejemplos de tales invocaciones referidas a Dios como capaz de abarcar el infinito de un solo vistazo, extraídos de las distintas obras de Agustín (en su comentario al salmo 146, capítulo 5, 11, se pregunta si tienen número los granos de arena, y se responde: no para nosotros, pero sí para Dios). Naturalmente, estas invocaciones tan ingenuas responden a esquemas retóricos; su intención es ponderar y exaltar ante el lector la inmensidad y omnipotencia de Dios (por supuesto, Agustín era consciente de que tanto el número de cabellos en una cabeza – o en todas – , como el de granos de arena del mundo, son finitos). Pero con estos ejemplos retóricos buscaba expresar esa fascinación que él sentía por la noción matemática del infinito, y de ahí que admirara tanto en Dios la posibilidad de abarcarlo.

Conclusiones

En este artículo hemos pretendido ofrecer una introducción al papel que los números y las matemáticas desempeñaron en la especulación y en la obra de este importante escritor, cuyas autoridad como padre de la Iglesia y posición al comienzo de los tiempos medievales le asegurarían una recepción privilegiada y una poderosa influencia en el pensamiento posterior. Agustín ni era matemático ni muy versado en este campo, pero se interesaba vivamente por los números, tanto como erudito platonizante, como llevado de un interés supersticioso por la numerología, o al sentirse fascinado por las inmensidades y paradojas del infinito, que de un modo curioso lo conducían hacia el Dios cristiano.

Bibliografía

Agustín de Hipona, *Obras de san Agustín*, edición de la B.A.C., volúmenes 1- 16, Madrid, 1979-1988.

G. Beaujouan, "Le symbolisme des nombres à l'époque romane", *Cahiers de civilisation médiévale* 4 (1961) 159-169.

P. Brown, *Augustine of Hippo*, Londres-Berkeley, 1967.

A. C. Crombie, *Histoire des sciences de saint Augustin à Galilée*, París, 1959.

É. Gilson, *La philosophie au Moyen Âge*, París, 1944.

V. F. Hopper, *Medieval number symbolism: its sources, meaning and influence on thought and expression*, Nueva York, 1938.

A. Knappitsch, *St. Augustins Zahlenmystik*, Graz, 1935.

H. de Lubac, *Exegese médièvale*, París, 1959-1964.

S. Poque, “L’invocation de Dieu dans les Confessions”, *Augustiniana* 41 (1991) 927-935.

A. Schmitt, "Mathematik und Zahlenmystik", in M. Grabman – J. Mausbach (eds.) *Aurelius Augustinus. Festschrift der Görres-Gesellschaft zum 1500. Todestage des heiligen Augustinus*, Colonia, 1930, pp. 353–366.

P. M. Vélez, “El número agustiniano: fragmento de un estudio”, *Religión y Cultura* 15 (1931) 139-196.

La Escuela Politécnica de París

María Paz Bujanda de Goicoechea
Depto. de Álgebra, Universidad Complutense de Madrid (Ret.)
arcocha10@yahoo.es

Resumen

Desde hace años, el tema de la Escuela Politécnica de París me ha atraído mucho. Entre sus características, las que más me gustaron fueron estas dos: la obligación que se impuso a los profesores desde sus primeros momentos de escribir libros con los contenidos de sus clases y el hecho de que, en sus mejores representantes, la docencia y la investigación estuvieran unidas.

Abstract

Among the various particulars of teaching at the renowned Paris Polytechnic School, at least two deserve special consideration: teachers were usually asked to write textbooks on the content of their classes, and the best-known of them were actively involved in both teaching and research activities.

Pienso que en el profesor Eugenio Roanes Macías se han dado estas dos buenas condiciones en un grado muy digno. Ello me ha movido a reflexionar sobre el tema y a escribir este modesto artículo como homenaje a Eugenio Roanes Macías, gran profesor e investigador, aun mejor amigo. Mis mejores deseos para esta etapa de su vida, en la que sin duda seguirá investigando sobre matemáticas e interesándose por su enseñanza, pese a sus dificultades familiares.

1 Las grandes escuelas francesas

El sistema de educación superior francés, está formado por las universidades y otras instituciones, englobadas bajo el título de “Grandes Escuelas”. Las Grandes Escuelas constituyen el principal canal para la educación en ingenierías, gestión y ciertos campos científicos, como por ejemplo, las ciencias de la vida.

El ingreso en una Gran Escuela no se consigue de la misma manera que el ingreso en otras instituciones de la educación superior. Los aspirantes tienen que hacer un examen muy difícil y ello implica pasar por una de las 200 Escuelas Preparatorias que se dedican a ese menester. Un futuro alumno de una Gran Escuela deberá estudiar en una de Escuelas durante dos años (ó más) sobre los temas contenidos en un programa fijo a escala nacional que contiene cuestiones teóricas y prácticas sobre matemáticas, física y química. Estos cursos preparatorios existen muy raramente en otros países fuera de Francia.

Las ingenierías en las Grandes Escuelas tienen en común varios puntos específicos:

- Un tamaño reducido: Una Gran Escuela tiene normalmente el tamaño de un Departamento universitario, con un número de graduados por año comprendido entre 300 ó 500 alumnos.
- Un proceso de admisión muy duro: los estudiantes son admitidos después de haber aprobado un examen a nivel nacional ó bien, en virtud de referencias académicas excelentes.
- Hay una jerarquía no escrita: las Grandes Escuelas son muy competitivas ente sí. La jerarquía resultante es bastante estable porque el sistema de admisión es muy competitivo también, las instituciones más prestigiosas atraen a los mejores estudiantes que normalmente alcanzan las más altas posiciones en sus respectivas carreras.
- Los largos estudios.; unos cinco años de duración.
- Una orientación con base en los fundamentos, con un fuerte énfasis en matemáticas y física y un alto nivel de abstracción.
- Algunas Grandes Escuelas ofrecen además estudios de doctorado.
- Un fuerte “espíritu de cuerpo” y un consenso básico entre los formadores de estudiantes de cada particular Gran Escuela.
- Las Grandes Escuelas han establecido un comité de coordinación, la “Conferencia de las Grandes Escuelas”, a través de la cual pueden obtener una mayor información.

En Francia existen 160 Grandes Escuelas que dan el titulo de ingeniero.

2 La Escuela Politécnica de París

Una de las Grandes Escuelas, quizá la más importante y de una gran influencia en Francia y en el mundo es la Escuela Politécnica de París.

De acuerdo con el espíritu competitivo existente entre las Grandes Escuelas, al que acabamos de referirnos, existen estudios de prestigiosos medios de comunicación como *L´Éxpress, L´étudiant, Le nouvel Économiste, Challenges*,… que dan el primer puesto en Francia a la Escuela Politécnica; *Point* le da el segundo, después de la Escuela de Minas de París.

Buena prueba de esta consideración la constituye el hecho de que La Escuela Politécnica acoge en su primer año a los estudiantes entre los candidatos de mayor nivel.

Actualmente la Escuela se ocupa de la formación de promociones de 500 alumnos, reclutados cada año por medio de uno de los concursos de ingreso más antiguos y más difíciles. Desde 1937 el diploma que se obtenía después de pasar los tres primeros cursos es el de "Diplomado de la Escuela Politécnica". A partir de 2004, la formación politécnica se desarrolla en cuatro años y al final de ellos se recibe el Título.

Además de la formación de los "Politécnicos", la Escuela asegura también la formación de doctorandos y de alumnos de masters.

Como salidas profesionales, los politécnicos se integran mayoritariamente en las empresas privadas tanto en Francia como en el plano internacional y sobre el 20% de ellos eligen, cuando lo permite su clasificación al terminar sus estudios, integrarse en los Grandes Cuerpos del Estado (Cuerpos Civiles de: Ingenieros de minas, de puentes y caminos, de telecomunicaciones y agrónomos; Cuerpo de Administradores, de control de los seguros; oficiales del ejército, ingenieros de armamento).

La situación actual de la Escuela Politécnica, se comprende y valora mejor si se considera su evolución histórica.

3 Creación y evolución histórica

3.1 Nacimiento

La Escuela Politécnica nace a partir de los problemas planteados por el sangriento y debatido acontecimiento francés que tuvo una inmensa proyección nacional e internacional: la Revolución Francesa.

Ya a principios de 1794, Francia había pasado de los entusiasmos y algaradas iniciales de la Revolución de 1789 a la constatación de los grandes problemas a los que se enfrentaba. Esencialmente eran de dos tipos: los derivados del caos interno y los procedentes de la lucha con otros países. Y para resolver estos problemas había que tener en cuenta los siguientes hechos:

Con la Revolución se había producido la deserción de numerosos oficiales, lo que hacía que su ejército fuera muy débil y poco eficiente.

La mala situación de su red de transportes (descuidada desde hacía muchos años) exigía importantes obras y la construcción de nuevas estructuras,

El cierre de la Universidades como consecuencia de un decreto de la Convención Nacional…

En estas graves circunstancias y por iniciativa de algunos sabios de ideas revolucionarias, como el matemático Monge y el químico Fourcroy, el Comité de Salud Pública creó por un decreto de fecha 11 de marzo de 1994 la "Comisión de Trabajos Públicos". En esta Comisión estuvo el origen de la Escuela Politécnica.

El ingeniero Jacques Lamblardie y los matemáticos Gaspar Monge y Lazare Carnot fueron los encargados de organizar una nueva "Escuela Central de trabajos Públicos". El 28 de septiembre de 1794 se creó oficialmente esta Escuela Central de Trabajos Públicos, la futura Escuela Politécnica.

Y el 21 de diciembre del mismo año, se inaugura la Escuela, instalada en el Palais Bourbon. Empieza con 272 alumnos y algunas destacadas personalidades como Lagrange y Fourcroy forman parte del grupo de profesores. Después de una sesión de examen la primera promoción de 400 alumnos tenía que seguir una instrucción en matemáticas, física y química por un período de tres años.

Sin embargo, surgieron muchas dificultades: los laboratorios no estaban preparados, algunos profesores fueron mediocres y los primeros cursos se daban a veces para menos de treinta alumnos. Claude Prieur, ingeniero y amigo de Carnot, decidió reformar la recién nacida Escuela. En septiembre de 1795, se le cambió el nombre por el de "Escuela Politécnica" y se la trasladó al Hotel de Lassay. Hay que notar que aparece por primera vez para la Escuela el adjetivo "*politécnica*" que había aparecido por primera vez en un documento publicado por Prieur "*Programmes de l´enseignement polytechnique de l´École centrale des Travaux publics*". El adjetivo había sido elegido para simbolizar la pluralidad de las técnicas enseñadas.

Para que la cuestión económica no fuera un obstáculo para los que fueran considerados dignos por sus conocimientos y su inteligencia para entrar en la nueva Escuela, los futuros alumnos recibían para dirigirse a París los gastos de un artillero de primera clase, esto es 15 "sous" diarios y debían percibir un salario anual de 900 francos. Los alumnos eran externos y alojados en casas de "buenos ciudadanos", recomendados como tales por las secciones de los comités próximos al Palacio Bourbon (estos "buenos ciudadanos" estaban encargados de velar por sus pensionistas como por sus propios hijos). Además, la Escuela seguía muy de cerca las relaciones entre sus alumnos y sus alojantes, llamados "los padres sensibles". Muestra de ello es la frecuencia con la que el director de los estudios Gardeur- Lebrun, acompañado del médico de la Escuela, solía visitar a las familias de acogida.

Desde su creación, la Escuela ve su misión claramente definida: dar a sus alumnos una sólida formación científica, apoyada en las matemáticas, la física y la química y prepararles adecuadamente para entrar en las escuelas especiales de los servicios públicos del Estado, como la Escuela de aplicación de la artillería y la estrategia, la Escuela de Minas ó la de Puentes y Caminos.

3.2 Con Napoleón

De 1794 a 1804, los alumnos de la Escuela llevan una vida estudiosa y buena prueba de ello son los eminentes sabios que salen de sus filas: los matemáticos Poisson y Poinsot, los físicos Biot, Fresnel, el químico Gay Lussac y el astrónomo Arago, muy querido alumno de Monge.

La excelencia de la recién nacida Escuela, explica que Napoleón llevara a Egipto en su "*expedición científica y militar*" a los profesores Monge (con quien siempre mantuvo una sólida amistad) y Berthollet, así como a cuarenta destacados alumnos, recién salidos ó a puntos de salir de la Escuela.

No obstante, cuando Napoleón, escalando posiciones, acaba convirtiéndose en Emperador, los alumnos de la Escuela se muestran indisciplinados al exterior, en la medida en que este giro tomado por el régimen político no les convencía demasiado. Para retomar la Escuela, Napoleón decidió dotarla de un régimen militar y acuartelar a los alumnos. La Escuela se instaló sobre la Montaña Santa Genoveva, en los antiguos Colegios de Navarra, Tournai y Goncourt, en pleno centro de París. También hay un cambio muy importante en la selección de alumnos. Considerando, pese a sus comienzos revolucionarios, que *"es peligroso dar una escolaridad avanzada a personas no procedentes de familias ricas*", puso fin a la gratuidad inicial de los estudios imponiéndoles tasas elevadas y modificó las pruebas del concurso de ingreso a fin de que fuera indispensable el paso por las escuelas preparatorias, escuelas de pago, reservadas normalmente a los hijos de la burguesía.

A Napoleón se deben también la creación de la bandera de la Escuela y su divisa “Pour la Patrie, les sciences et la gloire”, que aun permanecen en vigor.

3.3 Con la Restauración borbónica

El Imperio no llegó a atraer realmente a los alumnos a su causa. Sin embargo en 1814, cuando las tropas aliadas hicieron su entrada en París, los alumnos que apenas habían seguido algunos cursos de Artillería, defendieron con un extraordinario valor la barrera del Trono. Aunque su acción fue brillante, no consiguieron impedir la invasión.

Una bella estatua situada en el patio de honor de la Escuela recuerda esta participación de los politécnicos en 1814.

Cuando Napoleón abdica y vuelve del exilio el futuro rey Luis XVIII en el año 1824, los alumnos retoman sus clases.

Luis XVIII, era hermano del rey Luis XVI y tenía el título de conde de Provenza. En muchas ocasiones criticó la política de Luis XVI y agitó la corte.

En 1793, después de la ejecución de su hermano, el futuro Luis XVIII se proclama “regente del delfín”, el hijo de Luis XVI, que es considerado fututo rey ó delfin de modo simbólico, con el nombre de Luis XVII, ya que el niño está prisionero en el Temple. Luis XVII muere en el Temple en 1795 a la edad de diez años. Entonces su tío se hace depositario de los derechos de la corona y toma el nombre de Luis XVIII. Todo ello de cara a los legitimistas que eran una exigua minoría en el país.

La llegada de Napoléon frena su entusiasmo. No obstante, cuando la estrella de Napoleón declina, el autoproclamado Luis XVIII recobra la esperanza del retorno. Finalmente, tras la derrota de Napoleón, se reúnen los aliados en el Congreso de Viena y acuerdan, después de muchas deliberaciones, instalar a Luis XVIII en el trono de Francia. El 24 de marzo de 1814 Luis XVIII desembarca en Calais, otorga una Carta Constitucional y se convierte en Rey de Francia.

Se conoce como “los Cien días”, el período de la historia de Francia comprendido entre el 1 de marzo de 1815 (regreso de Napoleón desde su exilio en la isla de Elba) y el 18 de junio de 1815 (su derrota final en Waterloo y exilio definitivo en la isla de Santa Helena). Los alumnos aclamaron el retorno del Emperador al comienzo de este periodo.

Durante los Cien días, Luis XVIII se exilia de nuevo y solamente la derrota de Waterloo lo reinstala en el trono de Francia. Luis XVIII reinó desde 1815 hasta su muerte en 1824.

Luis XVIII aparece como un rey moderado, que lleva una vida burguesa, demasiado a ojos de algunos. Otros no olvidan que ha llegado al trono de Francia de mano de extranjeros. Sus relaciones con la Escuela no fueron buenas.

Algunas medidas torpes, como la expulsión de Monge, gran matemático, padre de la Geometría Descriptiva, excelente profesor y muy querido por sus alumnos, exasperaron a los estudiantes que manifestaron su oposición con disturbios y actos de indisciplina. El 13 de abril de 1816, como consecuencia de unos disturbios, el Rey licenció a toda la Escuela. Entre los estudiantes licenciados, estaba Augusto Compte, alumno de la promoción 1814. Los cursos se retomaron en 1817 para casi la mitad de los alumnos. La Escuela cambia su nombre por el “Escuela Real Politécnica”; más tarde, durante el Segundo Imperio, cambia de nuevo el nombre al hilo de la situación y pasará a denominarse “Escuela Imperial Politécnica”

La Escuela tomó un nuevo estatuto: ya no era militar; el uniforme se hizo civil, los alumnos estaban en régimen de internado. La disciplina llegaba hasta el detalle de imponer obligaciones religiosas como la oración y la Misa. No obstante, la primera vocación de la Escuela, formar cuadros científicos jóvenes para el servicio del Estado, se mantuvo.

A la muerte de Luis XVIII, le sucede su hermano, conde Artois, con el nombre de Carlos X, ultramonárquico y de talante poco conciliador. Al final de unos años con muchos más errores que aciertos, tuvo que huir del país y abandonar el trono en 1830. Su coronación en la Catedral de Reims, fue la última coronación de un rey en Francia.

Durante todo el reinado de Luis XVIII y todavía más en el de su sucesor Carlos X, los estudiantes estaban en una clara oposición al régimen. La dura intervención del rey se tradujo en una disciplina cada vez más rigurosa.

A pesar de ello, continuaron trabajando bajo la dirección de prestigiosos profesores como Arago, Cauchy, Petit, Dulong y Gay Lusac.

Sin embargo, no fue de extrañar verles tomar partido por el pueblo de París en 1830. El 29 de julio, una cincuentena de estudiantes salió de la Escuela y se puso al lado de los insurgentes. El alumno Vaneau murió en la toma de Babylone: el pueblo insurrecto estaba admirado por los jóvenes sabios capaces de dar su vida por la libertad.

A Carlos X, después de un golpe de estado revolucionario, le sucedió Luis Felipe de Orleans, hijo de Felipe Igualdad, que siempre había simpatizado con las ideas revolucionarias. Fue “Rey de los Franceses”, no Rey de Francia, con el nombre de Luis Felipe I. Tuvo el apoyo social de la burguesía y se benefició de un buen momento económico que permitió a Francia incorporarse plenamente en la Revolución Industrial. Pese al dato positivo, con esta situación aumentaron las diferencias sociales entre la burguesía y el proletariado. Las barricadas le apartaron del poder y dieron paso a la II República. Luis Felipe I fue el último rey francés.

3.4 Con Napoleón III

Luis Napoleón Bonaparte (1808-1879), sobrino de Napoleón, fue el Primer Presidente de la República francesa. En 1848 fue elegido Presidente por sufragio universal masculino (en aquella época las mujeres no votaban) y una amplia mayoría de votos cercanos al 75%. Prestó juramento a la Asamblea Constituyente el 20 de diciembre de 1848 y se instaló en el Eliseo.

Como la Constitución establecía que el cargo de Presidente tenía una duración de cuatro años y el Presidente no podía ser reelegido, la única forma de continuar en el poder fue conseguir el cambio de la Constitución. Mediante un golpe de estado sinuoso el 7 de noviembre de 1852 se restablece el Régimen Imperial y el 2 de diciembre del mismo año, el Príncipe Luis Napoleón se convierte en Napoleón III (el hijo de Napoleón hubiera sido Napoleón II).

Desde los años 1852 a 1870 fue el tercer y último Emperador de Francia con el nombre de Napoleón III. Fue a la vez el primer presidente y el último monarca de los franceses.

Basó su política en las ideas napoleónicas y en el deseo de eliminar la pobreza; fue una mezcla de romanticismo, liberalismo autoritario y socialismo utópico.

Entre los aspectos positivos de su mandato, está el de haber favorecido a los investigadores y conseguido que Francia se recuperara de su retraso económico e industrial, sobre todo frente a Inglaterra.

Su caída llegó como consecuencia de haber perdido la guerra que había declarado juntamente con Gran Bretaña a Rusia en Crimea en 1870. Capituló en Metz y fue hecho prisionero. Entonces se declaró la segunda Republica en Francia el 8 de septiembre de 1870.

A la derrota de 1870, siguió la represión sangrante de la Comuna de París. Ante el avance alemán, la Escuela se marchó de París a Burdeos y después a Tours.

Las relaciones de Napoleón III con la Escuela no fueron de una gran simpatía; los estudiantes no le manifestaron respeto pese a las fuertes presiones de autoridades militares. No obstante, ya había acabado la época de los disturbios violentos y los alumnos se consagraron a sus estudios. Naturalmente, tenían sus opiniones políticas, pero no las afirmaron tan abierta ni violentamente como en el pasado. Intentaron crear espacios de libertad a través de su “folklore” y otros rituales iniciáticos que se desarrollaron mucho después de 1860.

Una vez establecida la paz, La Escuela participa activamente en la reconstrucción nacional. El ejército refuerza su posición de empleador principal de los politécnicos, pero no se abandonan las ciencias: la promoción 1873 cuenta entre sus filas a Fayolle, que llegará a ser mariscal de Francia y a Henri Poincaré, uno de los más ilustres matemáticos de todos los tiempos. Hay politécnicos en todas las actividades del país: desarrollo de los ferrocarriles, creación de nuevas industrias, modernización de ciudades, conquista y organización de un vasto imperio colonial…

3.5 La Escuela y las dos guerras mundiales.

La guerra de 1914 afectará profundamente a la Escuela, como al resto del país. Durante las hostilidades, se movilizan los alumnos y la Escuela se convierte en un Hospital. La Escuela puede enorgullecerse de haber formado a los cuatro mariscales de Francia: Foch, Joffre, Fayole y Maunoury que le llevaron a la victoria final. Más de novecientos alumnos de todas las promociones perdieron la vida en los combates. La bandera de la Escuela recibe la Legión de Honor por su contribución a la victoria.

La sangría fue también dramática en las otras Grandes Escuelas y entre los estudiantes de la Universidad. Se puede pensar que esta hecatombe de jóvenes talentos llenos de porvenir privó al país de una parte de sus fuerzas vivas, que tanta falta hicieron en la crisis económica de los años 1930 y en la defensa del territorio en 1940.

En la segunda Guerra Mundial, después del armisticio de 1940, La Escuela se replegó en Lyon, en zona libre, y se convirtió en civil, por lo menos en apariencia; el Gran Uniforme y sus paradas militares se mantuvieron en el recinto de la Escuela. Las corrientes de opinión que desgarraron el país no la afectaron sino que continuó pagando un pesado tributo en los combates, en la Resistencia y en los campos nazis. Más de cuatrocientos politécnicos murieron por Francia en la segunda guerra mundial.

Después de la tormenta, la Escuela retoma su misión al servicio del país. Se desarrollan las actividades de investigación científica y la enseñanza se adapta a las nuevas necesidades de la sociedad.

4 La Escuela en la actualidad

4.1 Avances y fidelidad a sus principios fundacionales

Indicamos brevemente los pasos seguidos en su adaptación a las nuevas circunstancias sociales, científicas y de globalización.

Las mujeres son admitidas en la Escuela en 1972 y ocupan cargos de importancia en ella.

En el año 1976, la Escuela abandona con pesar su sede en la Montaña de Santa Genoveva y se instala en los locales más extensos de Palaiseau, al sur de París.

En el año 1994 se celebra el bicentenario de la Escuela; los actos conmemorativos fueron presididos por el presidente Mitterand.

La Escuela Politécnica se implica resueltamente en el camino internacional. El crecimiento de los alumnos extranjeros y de Politécnicos especializándose en el extranjero son los dos ejes prioritarios en este camino.

Después de doscientos años de existencia, la Escuela mantiene las directrices que expresa en su apartado " Misiones" de su página Web en el año 2008:

- *La Escuela Politécnica tiene por misión formar hombres y mujeres capaces de concebir y llevar a cabo actividades complejas e innovadoras al más alto nivel mundial, apoyándose sobre una cultura científica de una extensión, profundidad, y nivel excepcionales, así como sobre una fuerte capacidad de trabajo y animación.*
- *Fiel a su historia y a su tradición, la Escuela forma futuros responsables de alto nivel, con fuerte cultura científica, destinados a jugar un papel motor en el progreso de la sociedad, por sus funciones en las empresas, en los servicio del Estado y en la investigación.*
- *Nuestro proyecto pedagógico es formar hombres y mujeres de carácter, equilibrados, aptos para el trabajo en equipo, rigurosos, abiertos a la escucha de los otros, libres de espíritu, dotados de una capacidad excepcional*
- *Esta formación descansa sobre un programa educativo y realiza un equilibrio entre:*
  - *a) Una enseñanza científica, pluridisciplinar y de muy alto nivel.*
  - *b) Una apertura hacia las disciplinas literarias y artísticas y la práctica de lenguas extranjeras.*
  - *c) Una formación ética, humana y deportiva.*

- *Esta tarea se realiza asociando a un cuerpo de docentes del más alto nivel, un centro investigación internacionalmente reconocido y un cuadro militar al que se le confía la formación ética, humana y deportiva.*
- *De acuerdo con los valores y la tradición que son los suyos desde hace más de 200 años, la Escuela es accesible a todos sin distinción de origen ó de condición social; el único criterio de admisión es la selección por concurso de los estudiantes más capacitados para realizarse en este proyecto.*

4.2 Los alumnos

La Escuela constituye el apogeo del sistema francés de enseñanza superior meritocrática: todos los alumnos , cualquiera que sea su situación financiera pueden acceder a las clases preparatorias de las grandes escuelas y después a las mejores formaciones de la enseñanza superior. Cuando se creó la Escuela, el concurso de entrada lo había diseñado la Convención para evitar el favoritismo y la transmisión de derechos, de modo que se hacía "el reclutamiento de base por concurso sobre la base de méritos individuales" para ser "perfectamente conforme al ideal republicano".

Sin embargo, existe una correlación positiva entre el triunfo de los alumnos en la educación y el seguimiento de estudios largos y el medio social de sus padres. Esta correlación se explica por diferentes factores: condiciones de estudio, cultura del esfuerzo, etc.

Como uno de los elementos de mayor prestigio del sistema de enseñanza superior francés, la Escuela recibe críticas de sociólogos que evocan un mecanismo de reproducción social: Pierre Bourdieu hablaba de la "nobleza de estado" refiriéndose a los alumnos que integran los grandes Cuerpos del Estado. Los jacobinos en la época de la creación de las Escuelas creadas por las Convención ya veían en ellas "un germen para la reconstitución fatal de una casta privilegiada".

En cuanto a la formación que reciben de la Escuela, es de una fuerte cultura científica que forma parte de una larga tradición y mantienen una relación militar. Durante los cuatro años de estudio, los alumnos ingenieros franceses son alumnos oficiales en el primer año de su formación, después aspirantes hasta el fin de su escolaridad. Salen de la Escuela con el grado militar de subteniente.

El ciclo de formación de ingeniero se desarrolla en cuatro años sobre las siguientes componentes:

<u>Año 1º</u>

- Formación humana y militar de septiembre a abril.

- Tronco común de mayo a mitad de julio.

Año 2º

- Formación multidisciplinar.
- Estadio de contacto humano (antiguamente estadio obrero)

Año 3º

- Profundización científica de septiembre a abril, con la elección de una materia dominante.
- Estadio de investigación.

Año 4º

- Especialización: en una Escuela Partenaire

5 Algunos politécnicos célebres

Para poner de relieve la excelencia de su formación y también la amplitud de sus intereses, la Escuela en su página web de 2008, cita a personalidades que fueron alumnos de la Escuela, clasificados en cinco grandes grupos:
- científicos
- personalidades políticas
- industriales y PDG (Presidente Director General)
- militares
- otros politécnicos célebres

así como a algunos candidatos que no fueron admitidos.

Hay una extensa relación de personajes que cualquier entidad formativa se mostraría orgullosa de poder presentar. Elegimos por razones evidentes de brevedad solamente algunos de los nombres que aparecen en esta relación.

5.1 Científicos

Louis Poinsot (X1794)[1], matemático.

Agustín Louis de Cauchy (X1805), uno de los mejores matemáticos de su tiempo, según algunos el primero de los grandes matemáticos franceses cuyo pensamiento pertenece claramente a la edad moderna. Una de sus principales aportaciones fue la introducción del rigor en el análisis matemático. Su "Curso de Análisis" escrito en 1821, tuvo una inmensa influencia; según la tradición de la Escuela, el Curso recopiló las conferencias que impartió a sus alumnos.

[1] La X indica la promoción (se detalla en la sección 6).

Henri Becquerel (X1872), uno de los tres descubridores de la radioactividad, premio Nobel de Física en 1903.
Henri Poincaré (X1873), matemático y físico, creador de la topología y uno de los fundadores de la teoría de la relatividad restringida, uno de los más grandes matemáticos de su época.

5.2 Personalidades políticas

Sadi Carnot (X1857), nieto de Lazare Carnot, uno de los fundadores de la Escuela, fue Presidente de la República.
Valéry Giscard d´Estaing (X1944), ministro de Economía y después Presidente de la República Francesa.
Chakib Benmoussa (X1979), ministro del Interior de Marruecos.

5.3 Industriales y PDG

Fulgence Bienvenüe (X1870) padre del metro de París.
André Citroën (X1898) fundador de la Citroën.
Didier Lombard (X1963), PDG (Presidente Director General) de France Télécom.
Carlos Ghosn (X1974), PDG de Nissan y Renault.

5.4 Militares

Joseph Joffre (X1869), Mariscal de Francia.
Ferdinand Foch (X1871) Mariscal de Francia.
Robert Fayolle (X1873) generalísimo durante la Primera Guerra mundial.
Albert Dreyfus (X1878) oficial francés acusado falsamente de alta traición en 1894.
Caroline Aigle (X1994), comandante, primera mujer francesa piloto de caza, muerta en el año 2007.

5.5 Otros politécnicos célebres

Augusto Comte entró entre los primeros en la Escuela Politécnica en 1814. En el año 1816, según ya sabemos, la Escuela fue cerrada por indisciplina. En 1817 la Escuela se reabrió, se organizó un nuevo concurso y Augusto Comte no pudo reintegrarse después de ese concurso.
Ives de Manoir (X1924), aviador y jugador de rugby. Muy dotado para el rugby, se integra en la selección francesa en 1925. Fue nombrado mejor jugador francés y

seleccionado en ocho ocasiones, en una de las cuales fue capitán. Murió en un accidente de avión a los 23 años. El campo de honor de la Escuela Politécnica lleva su nombre.

5.6 Algunos candidatos que no fueron admitidos

El más conocido de ellos fue *Evariste Galois*, quizá el matemático más brillante de su tiempo, fracasó dos veces en el oral (concursos de 1828 y 1829) y no vaciló en tirar el borrador a la cabeza de su examinador en matemáticas, por ser incapaz de entender su demostración.

El matemático *Charles Hermite* fue admitido, pero luego rechazado por una deformidad que tenía en un pie.

El ingeniero e industrial *Gustav Eiffel***,** admisible en 1852, fracasó en las pruebas orales. No obstante, tuvo una gran trayectoria profesional como ingeniero y empresario. Especializado en las estructuras metálicas, a él se deben muchas y grandes obras extendidas a lo largo del mundo. La más famosa es la Torre Eiffel, verdadero reto que ninguna empresa aceptó, y que él construyó entre los años 1887 y 1889 para la Exposición Universal que se celebró en París en 1989. La Torre sigue siendo un emblema para la ciudad de París.

6 Algunas tradiciones de la Escuela

Enumeramos algunas de las más conocidas y que aun hoy siguen vigentes.

Su divisa propuesta por Napoleón: ”Por la Patria, las ciencias y la gloria”, expresa la vinculación de la Escuela Politécnica con el servicio al Estado y con la excelencia científica.

El símbolo de la Escuela: la X, que vale tanto para designar a los estudiantes como a la propia Institución. Hay dos versiones: la primera coloca su origen con el cruce de dos cañones. Es la postura más aceptada incluso en el seno de la Escuela, pero no está confirmada por fuentes verificables. Según otra explicación, los politécnicos son llamados X por su competencia en matemáticas y la casi omnipresencia de la letra x en los estudios de análisis.

La promoción a la que pertenece un politécnico corresponde, a diferencia de lo que ocurre en casi todas las escuelas y en las universidades, al año de entrada en la Escuela. Para citarlo anteponen al año el símbolo de la Escuela. Así *André Citroen*, fundador de las empresas Citroen, es un X1898; esto es, ingresó en la Escuela Politécnica en el año 1898. *Alfred Dreyfus*, el famoso oficial francés acusado por error de alta traición era X1878 y declaró en su defensa el matemático *Poincaré* X1873.

Normas de cortesía entre politécnicos: Una antigua regla establece que el tuteo se dé entre antiguos alumnos que pertenecen a promociones de menos de diez años de diferencia ó a iniciativa del más antiguo en casos de diferencias mayores.

El baile de la X: Todos los años, la Sociedad de Antiguos Alumnos de la Escuela Politécnica organiza, junto con los alumnos, el baile de la X. El baile tiene lugar en los Dorados de La Ópera Garnier y se organiza bajo el alto patrocinio del Presidente de la República. Es un acontecimiento importante de la vida nocturna parisina que atrae cada año a numerosas personalidades.

Terminamos con el reclamo que "En el rincón del estudiante" de `www.polytechnique.fr`, versión española:

Si eres

ESTUDIANTE CON ALTO NIVEL

en el ámbito científico,

Si quieres

AMPLIAR TUS CONOCIMIENTOS EN UNA UNIVERSIDAD PRESTIGIOSA,

Y

VIVIR UNA EXPERIENCIA ESTUDIANTIL ÚNICA...

..la Ecole Polytechnique te ofrece estos objetivos, sea cual sea tu perfil académico.

~ Los estudiantes que deseen recibir una formación completa tras cursar 2-3 años de estudios universitarios, pueden escoger el programa de titulación en ingeniería.

> Modalidad 1
> Modalidad 2

~ Para los estudiantes que deseen completar su formación con un programa académico no conducente a titulación, tras 3-4 años de estudios universitarios.

> Erasmus
> Unitech
> Estudiantes en movilidad libre

~ Para los estudiantes que deseen completar su formación tras 4-5 años de estudios universitarios:

> Master

> Tesis doctoral

Si deseas formular preguntas o cuestiones específicas, no dudes en ponerte en contacto con nosotros

Referencias bibliográficas

C. Boyer: “Historia de las Matemáticas”. Alianza Editorial, 2001.

E. T. Bell: “Los grandes matemáticos”. Editorial Losada S.A. Buenos Aires, 1948.

H. Poincaré. “La valeur de la Sciencie”. Editorial Flammarion. Paris, 1970.

URL: www.polytecnique.fr

URL: www.imprimerie.polytechnique.fr_EnLignes_Files_Rap_Activ_08.pdf

Exposición matemática

Javier Peralta
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid
javier.peralta@uam.es

Abstract

The aim of this paper is to offer a brief description of the exhibition "Human face of Mathematics", which was held by The Royal Spanish Mathematical Society under the general program "2007 Year of Science" and financed by The Spanish Science and Technology Foundation.

A pesar de la mala imagen que para la sociedad generalmente tienen las Matemáticas, es indudable que han desempeñado desde siempre un importante papel en el desarrollo de la humanidad. Sorprende, pues, el rechazo hacia una ciencia en cuyo lenguaje, como ya dijo Galileo, está escrita la naturaleza.

Si echamos un vistazo a lo largo de la historia, resulta evidente que las Matemáticas han sido -y son- imprescindibles para el desarrollo de las Ciencias experimentales, la Ingeniería o la Arquitectura, y que incluso son necesarias para la evaluación o interpretación de no pocos aspectos de las Ciencias sociales; de hecho, sin las Matemáticas no sería imaginable nuestra vida cotidiana ni existirían muchos de los instrumentos tecnológicos contemporáneas (la televisión, internet, el TAC, el microondas…). Pero aun con ser relevante ese papel de la que es considerada "*reina y a su vez criada de las ciencias*", su importancia no sólo se reduce a su utilidad, sino que es además, en sí misma, una extraordinaria creación del espíritu humano; razón por la cual ha sido conceptuada a través de los siglos como una de las componentes fundamentales en la formación intelectual del individuo y un elemento crucial en la evolución del pensamiento.

En otro orden de ideas, parece natural considerar que los hechos científicos, o incluso no pocas manifestaciones de la creatividad humana, puedan comprenderse mejor si se conocen su historia y algo de sus autores. Así, posiblemente resulte más atractivo aprender el principio de Arquímedes si se presenta acompañado de la anécdota que la tradición atribuye a su descubrimiento; de igual modo, la belleza desgarradora del cuadro *El tres de mayo*, de Goya, adquiere aún mayor realce si se ha leído un poco acerca de la sublevación de Madrid ante la invasión napoleónica o sobre la vida de su autor, especialmente en relación con este lienzo (que, sin duda, es el mismo se tengan o no esos conocimientos, aunque si se poseen, seguramente mejore la visión del cuadro); etc.

Pero volvamos de nuevo al primer argumento. Es probable que una de las causas de la antipatía hacia las Matemáticas radique en la manera en que habitualmente suelen mostrarse: como una materia fría, abstracta, exigente y deshumanizada, sin vinculación a los problemas concretos que originaron el nacimiento de los conceptos y teorías y sin saber nada de los principales autores que impulsaron su desarrollo. Sin la perspectiva crítica dada por la historia, las nociones matemáticas se desnaturalizan, se desconceptualizan y se alejan de la causa que motivó su aparición; razones que dificultan su aprendizaje y a su vez producen esa sensación de alejamiento y rechazo a la que nos hemos referido. Por lo tanto, parece una buena idea tratar de propiciar el conocimiento de la historia y de los protagonistas que influyeron en su evolución, de sus rasgos personales y de las dificultades y anécdotas que surgieron en los procesos de descubrimiento, mostrando un aspecto más amable que permita acercar las Matemáticas a la sociedad: así posiblemente consigamos una mayor familiaridad con esta Ciencia.

Con ese objetivo, la Real Matemática Española en el Año de la Ciencia 2007, con la financiación de la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología, ha desarrollado el proyecto *El rostro humano de las Matemáticas*, consistente en la realización de una exposición centrada en las Matemáticas que hemos heredado, necesarias para el progreso de la civilización y para el desarrollo del pensamiento humano. Por medio de ella se ha tratado de poner de relieve que la Historia de las Matemáticas, además de su innegable interés en sí misma, tampoco puede separarse de la Historia de la Humanidad; y que sus protagonistas también han sido miembros de una comunidad de la que han formado parte, privadamente, con sus circunstancias personales, sus virtudes y sus defectos.

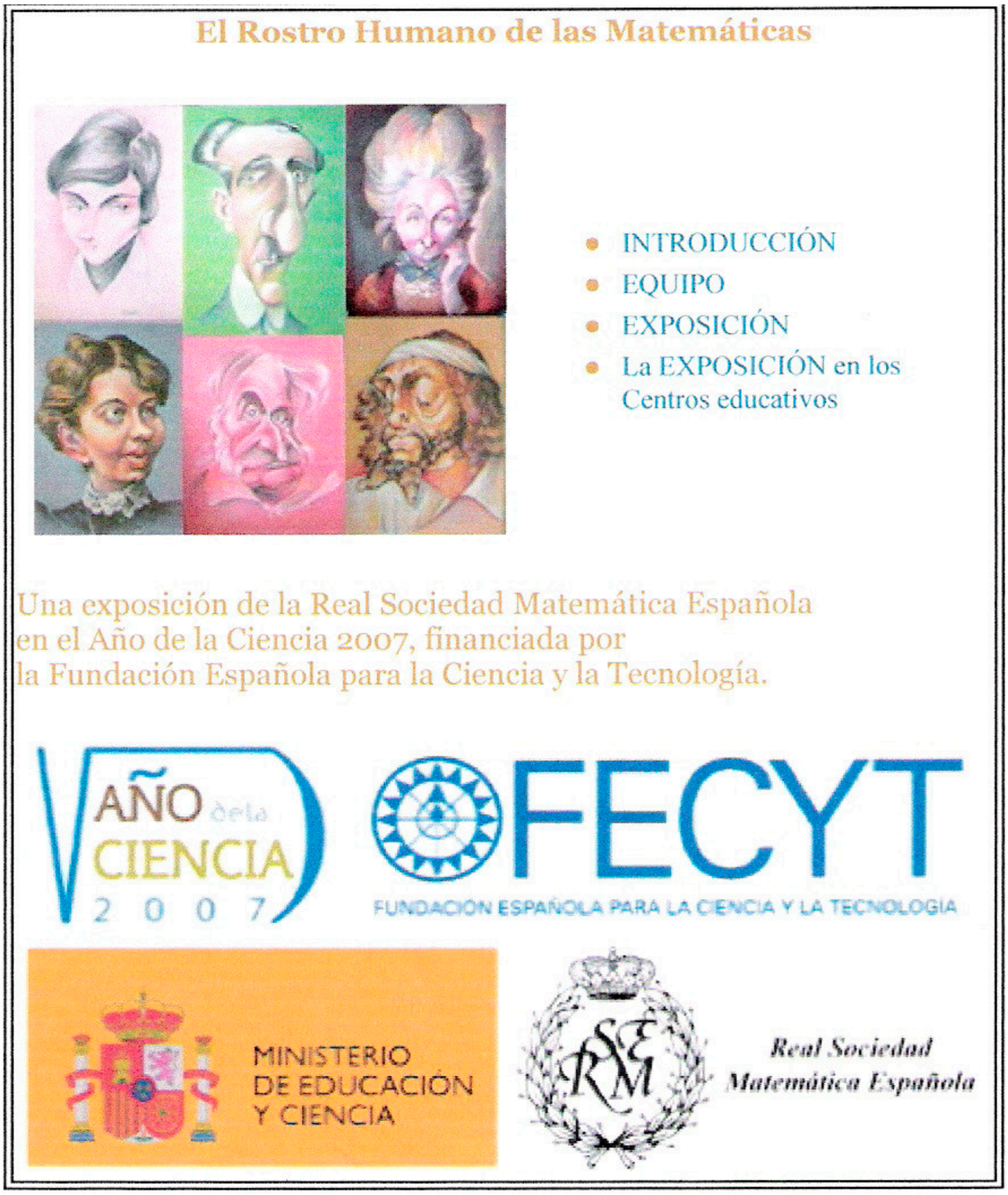
La exposición original lleva ya dos años de rodaje, y se exhibe de manera itinerante en diferentes museos de la ciencia, salas de exposiciones, universidades… de toda España. Su primer destino fue la Casa de las Ciencias de La Coruña, y continuó su periplo, entre otros, por el Miramon Kutxaespacio de la Ciencia de San Sebastián, el Planetario de Pamplona, el Parque de las Ciencias de Granada, el Museo de Logroño, la Casa de las Ciencias de la Rioja, el Centro de Profesorado y Recursos de Gijón, la Facultad de Ciencias de Salamanca, etc.; de lo cual se han hecho eco diversos periódicos, como El Diario Vasco, El Norte de Castila, Diario de Ávila, El Correo, La Nueva España, La Voz de Galicia, El Periódico de Aragón…

La exposición va dirigida no sólo a los estudiantes, sino asimismo a sus padres y profesores y a la sociedad en general; y con esa finalidad se ha tratado de adecuar el vehículo de transmisión de la información. En concreto, se presentan treinta y una de las figuras más importantes de las Matemáticas a través de los siglos (cinco de las cuales son mujeres y otras cinco son matemáticos españoles), mediante su caricatura y una breve biografía. El arte gráfico de las caricaturas, realizadas por dos reputados dibujantes, ha tratado de acercar a los jóvenes y al público en general una imagen visual de sus protagonistas; mientras que las biografías, escritas en un lenguaje claro, sencillo y no excesivamente académico (puede ser relativamente fácil explicar la ciencia de manera difícil, pero ¡qué difícil es hacerlo de un modo fácil!), hacen hincapié en los aspectos humanos de la vida de los matemáticos correspondientes, sin olvidar, claro está, su trascendencia científica ni alguno de sus descubrimientos más notables. Asimismo, a cada una de las biografías se le ha añadido una imagen final, que generalmente ha consistido en una figura, diagrama, fórmula, publicación… relacionada muy especialmente con su persona, explicada en pocas palabras, que trata de destacar un elemento fundamental de su obra; lo que supone igualmente otro reclamo gráfico interesante para lograr el objetivo propuesto con la exposición. Por otra parte, el texto en castellano ha sido traducido además a los otros idiomas del Estado: catalán, euskera, gallego y valenciano, con el fin de hacerlo más cercano a algunos ciudadanos.

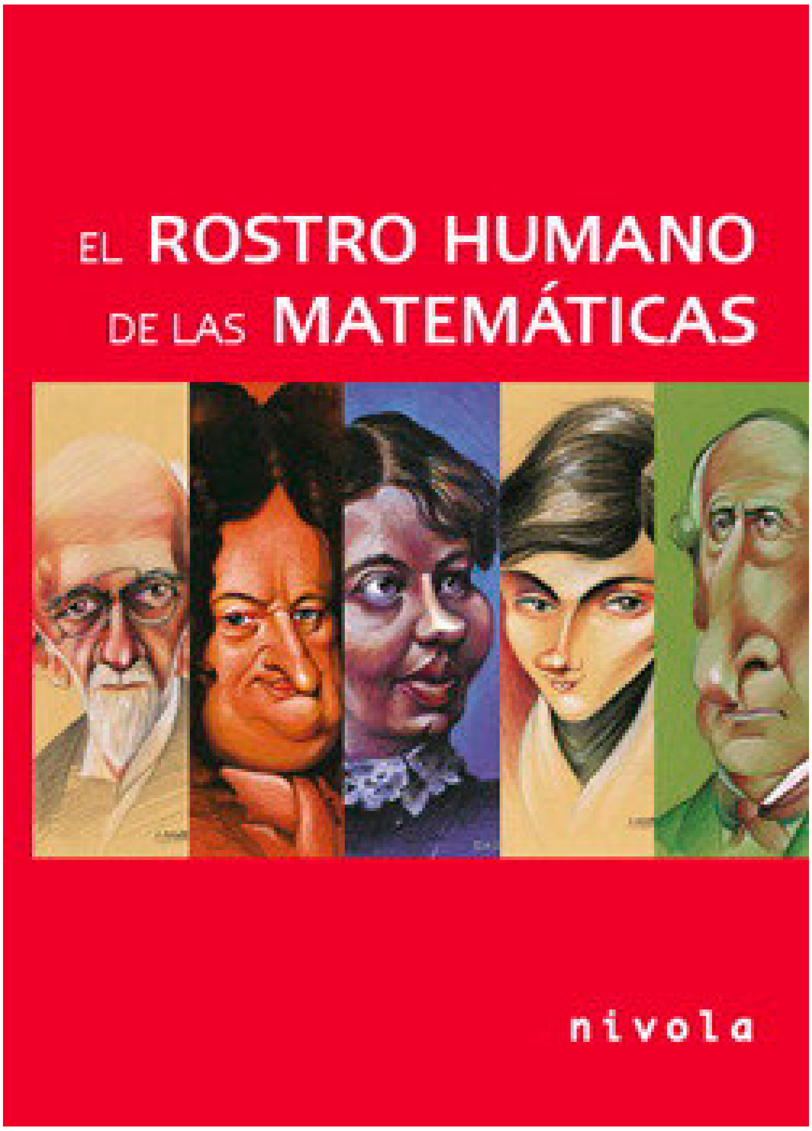
Existe también una exposición ligera, para lo cual se han hecho tres copias en posters plastificados fáciles de trasladar, manejar y exponer, para ser exhibida en centros educativos de secundaria, universidades, centros de formación de profesores… que lo soliciten. Ya han disfrutado de ella distintos institutos, colegios y centros universitarios; en Madrid, por ejemplo, ha pasado por la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos de la Universidad Politécnica, la Sala de Exposiciones de la Universidad Autónoma, el I.E.S. Salvador Dalí, el I.E.S. Beatriz Galindo, etc. Aunque de igual modo se ha presentado en otros centros de toda España, como los siguientes institutos: Sant Josep de Calassanç (Barcelona), Francisco Cascales (Murcia), Sixto Marco (Elche), Río Duero (Tudela de Duero), Bernaldo de Quirós (Mieres), Benjamín Jarnés (Fuentes de Ebro)…, entre otros muchos.

Se puede contemplar además como exposición virtual en la página web: `www.divulgamat.net` (portal de divulgación de las Matemáticas de la Real

Sociedad Matemática Española, financiado por el CSIC), que es la página matemática en español más consultada del mundo (con unas 9000 visitas al año).



Por otra parte, la editorial Nivola, en colaboración con la Real Sociedad Matemática Española, ha plasmado la exposición en el libro *El rostro humano de las Matemáticas* (ISBN 978-84-96566-95-8) en una edición muy cuidada que reproduce las caricaturas en láminas de gran calidad a todo color.



Los matemáticos biografiados son los siguientes: Pitágoras (ca. 585-500 a.C.), Euclides (ca. 325-265 a.C.), Arquímedes (ca. 287-212 a.C.), Apolonio (ca. 262-190 a. C.), Hipatía (¿?-415), Al-Jwarizmi (s. IX), Fibonacci (ca. 1175-1250), Tartaglia y Cardano (ca. 1499-1557; 1501-1576); Descartes (1596-1650); Fermat (1601-1665); Newton (1642-1727); Leibniz(1646-1716); Madame de Châtelet (1706-1749); Euler (1707-1783); Lagrange (1736-1813); Sophie Germain (1776-1831); Gauss (1777-1855); Cauchy (1789-1857); Abel (1802-1829), Galois (1811-1832); Riemann (1826-1866); Sonia Kovaleskaia (1850-1891); Poincaré (1854-1912); Hilbert (1862-1943); Ventura Reyes y Prósper (1863-1922); Emmy

Noether (1882-1935); Rey Pastor (1888-1962); Puig Adam (1900-1960); Luis Santaló (1911-2001) y Miguel de Guzmán (1936-2004).

Para que el lector se haga una mejor idea de la exposición, mostramos como ejemplo la caricatura y el poster de la biografía de uno de los personajes: quien da precisamente el nombre a nuestra Sociedad.

PEDRO PUIG ADAM 1900 - 1960

Nace en Barcelona en el seno de una familia hondamente catalana. Licenciado y doctor en Ciencias Exactas, a los 25 años es catedrático de Matemáticas del Instituto San Isidro de Madrid. Luego termina la carrera de Ingeniería Industrial, que había iniciado antes.

Es también catedrático de Extensión de Cálculo en la Escuela de Ingenieros Industriales de Madrid y desempeña la cátedra de Metodología de su universidad. Asimismo, forma parte del grupo encargado de la formación educativa de D. Juan Carlos I.

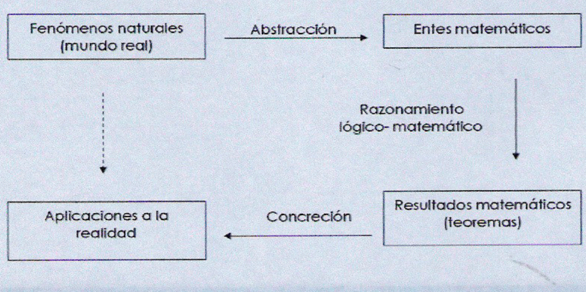
Es un hombre polifacético que además escribe versos, pinta y compone música. Académico de Ciencias, Gran Cruz de Alfonso X el Sabio..., Puig Adam da nombre a una sociedad de profesores de matemáticas, una Medalla de reconocimiento a ingenieros ilustres...

Desde su formación científica y técnica adquiere una doble visión de la Matemática: pura y aplicada. En la primera, destacan sus trabajos relativos a fracciones continuas de coeficientes incompletos diferenciales. Y como matemático aplicado, aborda la estabilidad del movimiento de las palas del autogiro (problema que le propone Juan de la Cierva), el tratamiento matemático de distintos fenómenos físicos, Mecánica relativista, Cibernética; inventa un ingenio eléctrico para la resolución de problemas de lógica formal...

Aunque lo más importante son sus aportaciones a la Pedagogía Matemática, en donde propicia una reforma de los métodos de enseñanza. Son especialmente reseñables su Decálogo de la didáctica matemática media, su metodología esencialmente activa y heurística, sus materiales, los renovadores libros de texto escritos con Rey Pastor, sus manuales universitarios... Es miembro de la Comisión Internacional para el estudio y mejora de la Enseñanza Matemática y, en España, se le encarga la reforma de la Matemática en el bachillerato.

Puig Adam, ser de gran humanidad, en el que se conjugan aspectos muy diversos de una desbordante personalidad: matemático, ingeniero, pedagogo y artista, es un adelantado de su tiempo y, posiblemente, el mejor didacta de la matemática español.

La Matemática es un filtro a través del cual estudiamos los fenómenos naturales:



Sobre la enseñanza:

Enseñar bien no es transmitir bien, sino saber guiar al alumno es su acción de aprendizaje.

Los autores de las caricaturas son Enrique Morente y Gerardo Basabe, licenciados en Bellas Artes y con una amplia experiencia artística y en el mundo de la ilustración de libros. Mientras que el equipo de matemáticos que ha seleccionado los personajes, ha buscado el material gráfico, ha escrito el texto y ha diseñado la imagen final, con el aval científico y humano de la Real Sociedad Matemática Española lo forman siete profesores, que llevan muchos años trabajando en Didáctica e Historia de la Matemática y tienen una larga trayectoria como divulgadores de esta Ciencia. Por cierto, es fácil imaginar que en este proceso han sucedido varias anécdotas; valga como muestra que, en los pocos casos en que existían fotografías de los autores, salvo de los matemáticos más modernos -lógicamente- todas eran en blanco y negro y no se podían apreciar algunos rasgos (los dibujantes preguntaban, por ejemplo, cuál era el color de los ojos de D. Pedro Puig Adam; cuestión que trasladé a nuestro compañero Joaquín Hernández, de quien enseguida se recibió respuesta: eran verdes).

El coordinador del grupo ha sido el profesor Raúl Ibáñez, vicepresidente segundo de la Real Sociedad Matemática Española y presidente de su Comisión de Divulgación cuando se realizó el proyecto y hasta hace poco; y los seis miembros restantes: Santiago Fernández (Coordinador de Matemáticas del Berritzegune de Bilbao), Pedro González Urbaneja (Catedrático del I.E.S. Sant Josep de Calassanç de Barcelona), Vicente Meavilla (Catedrático del I.E.S. Francés de Aranda de Teruel y Profesor Asociado de la Universidad de Zaragoza), Antonio Pérez (Catedrático del I.E.S. Salvador Dalí de Madrid), Adela Salvador (Profesora Titular de la Universidad Politécnica de Madrid) y el autor de estas líneas.

Reseña de libros

ANDRÉS RAYA, ALFONSO RÍDER, RAFAEL RUBIO: *Álgebra y Geometría cuadrática* (396 págs). ISBN: 978-84-9745-171-0. Editorial Netbiblo. Oleiros (La Coruña), 2007. www.netbiblo.com

Este manual, de los mismos autores que el *Álgebra y Geometría lineal,* reseñado en el núm. anterior del Boletín, es naturalmente continuación de aquel, sin el cual no se concibe. Como en aquel, los autores han conseguido organizar y presentar de modo original unos temas expuestos en numerosos tratados.

Por ejemplo, hay cierta originalidad (o, más bien, "modernidad") en el tratamiento del producto mixto como antesala del producto vectorial, que además se trata en dimensión arbitraria. Además, se ha llegado hasta el final de los "teoremas espectrales", aplicándolos luego al estudio de las isometrías tanto lineales como afines. Los autores no han olvidado que el origen de la geometría nace en la necesidad de realizar mediciones, llegando a desarrollar la geometría euclídea real y su equivalente en el caso complejo, la geometría unitaria.

Tras una introducción a conceptos básicos, se desarrollan los temas usuales relativos a álgebra y geometría cuadráticas, como muestra su índice general: conjugación y semilinealidad, formas sesquilineales y congruencia de matrices, representación en el espacio dual, ortogonalidad en formas hermíticas, diagonalización y clasificación de formas hermíticas, espacios vectoriales euclídeos, morfismos euclídeos y semejanzas lineales, algunos espacios euclídeos notables, espacios euclídeos finito-dimensionales, longitudes, áreas y volúmenes, productos mixto y vectorial, ángulos no orientados, ángulos orientados, espacios vectoriales herméticos, adjunción de operadores, operadores normales, teorema espectral, teoremas espectrales en espacios euclídeos, clasificación de las isometrías lineales reales, geometrías ortogonales, geometría afín, espacios afines y su expresión analítica, morfismos afines, afinidades, algunos morfismos notables, espacios afines euclídeos, semejanza e isometrías afines, clasificación de las isometrías afines.

La presentación es muy clara y elegante y la edición muy cuidada, con cubierta dura. Este original manual, orientado a profesores y alumnos de grados en ciencias (Matemáticas, Físicas e Ingenierías superiores), puede ser de gran utilidad tanto a alumnos que deseen complementar las clases presenciales, como a profesores que deseen presentar la disciplina organizada en sentido actual.

Eugenio Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` ,o bien en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

De otro modo, también pueden enviarse dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84 y 85.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia.*