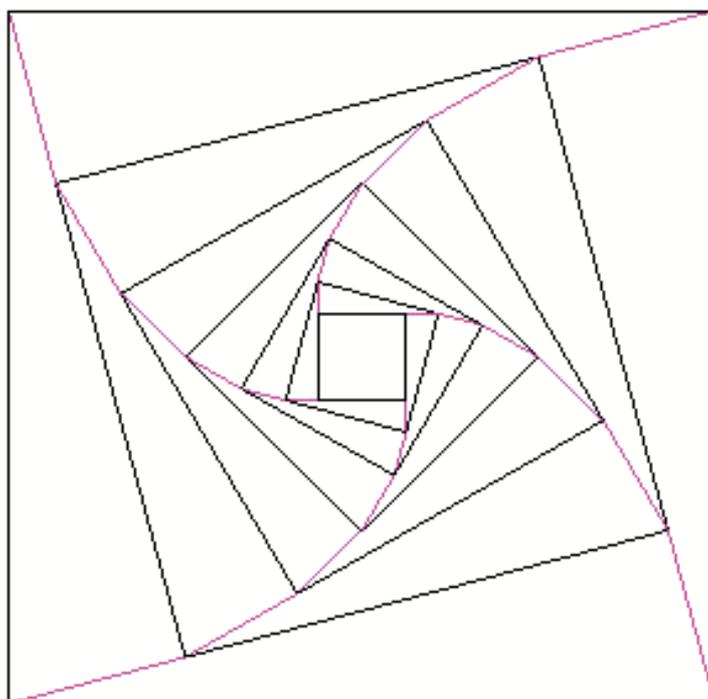


SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



**BOLETÍN N.º 84
FEBRERO DE 2010**

Número especial dedicado al Profesor Eugenio Roanes Macías

ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2010	4
Nota sobre el recibo anual	4
XXVIII Concurso de Resolución de Problemas	5
IX Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, por <i>Joaquín Hernández Gómez</i>	6
Problemas Propuestos en la Fase Local de la XLVI Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid	7
Calculo de volúmenes con la fórmula del prismoide, por <i>Julio Castiñeira Merino</i>	9
Escaleras deslizantes flexibles: Un repaso actualizado y específico al puente entre Geometría Dinámica y Álgebra Computacional, por <i>Francisco Botana y José Luis Valcarce</i>	27
Problemas de álgebra y teoría de números, por <i>Juan-Bosco Romero Márquez</i>	37
Una caja informática de herramientas matemáticas, por <i>Alfonsa García, Francisco García, Gerardo Rodríguez, Victoria Rodríguez y Agustín de la Villa</i> ,	52
El Modulor de Le Corbusier: un instrumento de medida, por <i>M^a Francisca Blanco Martín</i>	63
One Locus – Three Challenges, por <i>Josef Böhm</i>	81
Reseña de libros	93
Instrucciones para el envío de originales	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción	96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando y Eugenio Roanes Lozano

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).

Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
<http://www.sociedadpuigadam.es>

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

ENRIQUE RUBIALES CAMINO

(Relaciones Institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

(Actividades y concursos)

Secretario:

JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:

BEATRIZ BARRERO DÍAZ

CAROLINA BRAVO SANZ

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2010

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2010 para el sábado *día 10 de abril de 2010*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

Nota sobre el recibo anual

Durante el presente curso 2009-2010, el recibo anual del curso se ha pasado en noviembre de 2009, porque la Federación de Sociedades Matemáticas requiere cerrar cuentas antes de fin del año 2009.

Recordamos a nuestros socios que, como ya se dio cuenta en el Acta de la Asamblea 2009, publicada en el nº 82 de nuestro Boletín, la cuota global anual de 49€ ya incluye los 30€ correspondientes a la Sociedad (por la que se recibe nuestro Boletín), y los 19€ correspondientes a la Federación (por la que se recibe la revista Suma).

La Junta Directiva

XXVIII Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

**la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y el
Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias**

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

- a) *Primer nivel:* alumnos de 3º de E.S.O.
- b) *Segundo nivel:* alumnos de 4º de E.S.O.
- c) *Tercer nivel:* alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *12 de junio del 2010* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 12 de Mayo del 2010, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

*Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid Fax: 91 394 4662
Correo electrónico : jetayo@mat.ucm.es*

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2009-2010.

IX Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

El penúltimo sábado de Noviembre, como viene siendo así ya durante nueve años, la Facultad de Matemáticas de la UCM volvió a vivir uno de esos días que levantan la moral incluso a los más escépticos con los derroteros que está llevando la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país: 330 estudiantes se juntaban para pasar más de 4 horas de una mañana de sábado pensando, discutiendo, disfrutando, haciendo Matemáticas. El IX Concurso Intercentros echaba a andar.

Ante la propuesta de algunos centros, habíamos decidido permitir que los centros que quisieran presentaran 2 equipos, recordad, cada equipo de 6 estudiantes. Ello hizo que aumentara el número de equipos a 55. Aunque el número de centros, 45, también aumentó con respecto al año pasado.

Los centros y estudiantes ganadores son los que figuran a continuación.

Centros Ganadores

- 1º. Colegio Alemán de Madrid
- 2º. IES Ramiro de Maeztu
- 3º. Liceo Francés

Estudiantes Ganadores

Primer Nivel (1º y 2º de E.S.O.)

- 1º. Guillermo Pascual Pérez (Colegio Fray Luis de León)
- 1º. Miguel Barrero Santamaría (IES Alameda de Osuna)

Segundo Nivel (3º y 4º de E.S.O.)

- 1º. Lorenzo Esteban de la Iglesia (Colegio Fray Luis de León)
- 2º. Almudena Carrera (Colegio Ntra Sra de las Maravillas)
- 2º. Javier Pliego García (IES San Juan Bautista)

Tercer Nivel (Bachillerato)

- 1º. Pablo Boixeda (Colegio Alemán de Madrid)
- 2º. Moisés Herradón Cueto (IES San Juan Bautista)

Relación de los 10 centros con mayor puntuación

- 1º. Colegio Alemán de Madrid 52,1
- 2º. IES Ramiro de Maeztu. Equipo A51,67
- 3º. Liceo Francés.....50,4

4º. Colegio Fray Luis de León. Equipo A	47,97
5º. IES San Juan Bautista. Equipo A	42,8
6º. Colegio Ntra Sra de las Maravillas.....	41,9
7º. Colegio San José del Parque. Equipo A.....	39,3
8º. Colegio Brains. Equipo B.....	30,5
9º. Colegio Retamar.....	29,77
10º. IES Alameda de Osuna. Equipo A.....	29,4
10º. Colegio Brains. Equipo A	29,4

Nuestra enhorabuena a todos los participantes y nuestra especial felicitación a todos los ganadores.

Para más información, tanto del concurso de este año como de los anteriores – ganadores, enunciados, etc...- podéis consultar: www.sociedadpuigadam.es

Nos vemos el próximo año. Penúltimo sábado de noviembre.

Joaquín Hernández.

Problemas propuestos en la Fase Local de la XLVI Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid

En la tarde del viernes 15 y en la mañana del sábado 16 de enero se celebró en la Facultad de Matemáticas de la UCM la fase local de la XLVI Olimpiada Matemática Española. Participaron algo más de cien estudiantes, entre los que se encontraba alguno de 3º de ESO. En el próximo Boletín daremos a conocer los nombres de los nueve ganadores, representantes de la Comunidad de Madrid en la Fase Nacional de la Olimpiada, que tendrá lugar en Valladolid el último fin de semana de marzo.

Problema 1

Determina todos los posibles números de seis cifras distintas $abcdef$, formados con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6, que tienen la propiedad de que los números de tres cifras abc , bcd , cde y def son divisibles por 4, 5, 3 y 11 respectivamente.

Problema 2

Determina los lados del triángulo rectángulo del que se conocen el perímetro, $p = 96$, y la altura sobre la hipotenusa, $h = \frac{96}{5}$.

Problema 3

Dado el polinomio $P(X) = X^4 + \square X^3 + \square X^2 + \square X + \square$, en el que cada cuadrado representa un hueco donde se colocará un coeficiente, se plantea el siguiente juego entre dos jugadores: alternativamente, el primer y el segundo jugador eligen un hueco vacío y colocan en él un entero no nulo hasta rellenar todos los huecos. Si el polinomio resultante tiene al menos dos raíces enteras gana el segundo jugador, en otro caso el ganador es el primero. Prueba que, eligiendo la estrategia adecuada, el primer jugador siempre puede ganar.

Problema 4

Se consideran un triángulo ABC , de perímetro 18cm, y su circunferencia inscrita K . La tangente a K paralela al lado AC corta a los lados AB y BC en puntos D y E , respectivamente. Si $DE = 2$ cm, determina los posibles valores de la medida de AC .

Problema 5

Supongamos que tenemos un tablero con dieciséis casillas dispuestas en cuatro filas y cuatro columnas.

- (a) Prueba que se pueden colocar siete fichas, nunca dos en la misma casilla, de forma que al eliminar dos filas y dos columnas cualesquiera siempre quede alguna ficha sin eliminar.
- (b) Prueba que si se colocan seis fichas, nunca dos en la misma casilla, siempre se pueden eliminar dos filas y dos columnas de forma que todas las fichas sean eliminadas

Problema 6

Decimos que un conjunto E de números naturales es *especial* cuando al tomar dos elementos cualesquiera distintos $a, b \in E$ se tiene que $(a - b)^2$ divide al producto ab .

- (a) Encuentra un conjunto especial formado por tres elementos.
- (b) ¿Existe algún conjunto especial formado por cuatro números naturales que estén en progresión aritmética?

La fórmula del prismatoide y el cálculo de volúmenes

Julio Castiñeira Merino

IES Marqués de Lozoya, Cuéllar (Segovia)

julio cmrr@gmail.com

Abstract

The aim of this paper is to show the prismatoid formula and its application to calculation of volumes of different bodies: wedge, frustum, disphenoid, antiprism, Platonic and Archimedean solids, the rhombic polyhedra of Kepler and several Johnson solids including cupolas, pentagonal rotunda, bilunabirota and triangular hebesphenorotunda.

Dedicado a Eugenio Roanes Macías,
con motivo de su jubilación académica.

1. La fórmula del volumen del prismatoide

Un *prismatoide* es un poliedro cuyos vértices pertenecen a dos planos paralelos. Las caras laterales son triángulos o trapecios. Ejemplos de prismatoides son los prismas, pirámides, troncos de pirámide, disfenoides, cuñas, antiprismas y cúpulas.

Los polígonos de las caras paralelas se llaman bases y la distancia entre las bases altura. En las pirámides la base superior se reduce a un punto y en las cuñas a un segmento. En los disfenoides las dos bases se reducen a dos segmentos.

La fórmula del volumen del prismatoide [1, 4, 6, 7, 10, 11 y 14] es

$$V = \frac{h}{6}(B + 4M + T)$$

donde h es la altura del prismatoide, B y T las áreas de las bases inferior y superior y M el área de la sección media.

Esta fórmula generaliza la del volumen del prisma $V = B \cdot h$ y la del volumen de la pirámide $V = B \cdot h/3$. En el caso del prisma, $B = M = T$, y en el caso de la pirámide, $B = 4M$ y $T = 0$.

Demostración. Sea O un punto de la sección media del prismatoide. Descomponemos el prismatoide en las pirámides que proyectan desde el punto O a las caras del prismatoide. El volumen de la pirámide cuya base es la inferior del prismatoide es

$$V = \frac{1}{3} B \frac{h}{2} = \frac{1}{6} B \cdot h$$

y el de la pirámide cuya base es la base superior del prismatoide es análogamente

$$V = \frac{1}{6} T \cdot h$$

El resto de las pirámides son tetraedros con el vértice común O .

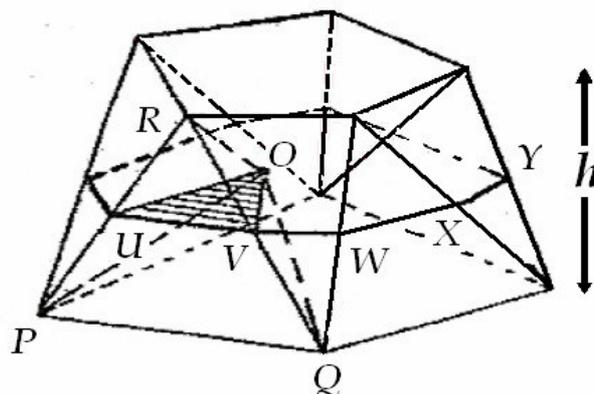


Figura 1. *Prismatoide*

Representemos por $[OPQR]$ el volumen del tetraedro de vértices O, P, Q y R , y representemos por $[PQR]$ el área del triángulo de vértices P, Q y R . Se cumple que $[OPQR] = 4[OUVR]$, pues ambos tetraedros tienen la misma altura que es igual a la distancia del punto O al plano PQR y sus bases están relacionadas por $[PQR] = 4[UVR]$. Por tanto,

$$[OUVR] = \frac{1}{3}[OUV] \cdot \frac{h}{2} = \frac{h}{6}[OUV] \Rightarrow [OPQR] = 4 \frac{h}{6}[OUV]$$

y la suma de los volúmenes de los tetraedros cuyas bases son las caras laterales del prismoide es

$$4 \frac{h}{6}[OUV] + 4 \frac{h}{6}[OVW] + 4 \frac{h}{6}[OWX] + \dots = 4 \frac{h}{6}M$$

Añadiendo los volúmenes de las pirámides superior e inferior, obtenemos el volumen del prismoide

$$V = \frac{h}{6}(B + 4M + T).$$

Veamos algunos ejemplos de esta fórmula. Conviene recordar aquí la fórmula del área del polígono regular de n lados de longitud l :

$$A_n(l) = \frac{n}{4}l^2 \cot \frac{\pi}{n}$$

2. Cuñas

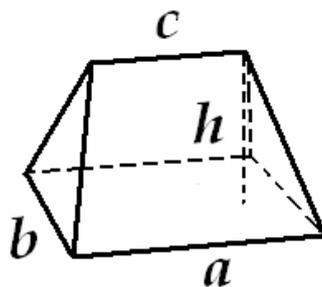


Figura 2. *Cuña*

Para una cuña (Figura 2), se tiene: $B = a \cdot b$, $M = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b}{2}$ y $T = 0$. Por tanto

$$V = \frac{h}{6}b \cdot (2a + c).$$

3. Troncos de pirámide

Si la pirámide es cuadrada (Figura 3), se tiene:

$$B = a^2, M = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ y } T = b^2$$

y por tanto

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + a \cdot b)$$

Ahora, para una pirámide de base cualesquiera (por el principio de Cavalieri), tendremos

$$V = \frac{h}{3}(B + T + \sqrt{B \cdot T})$$

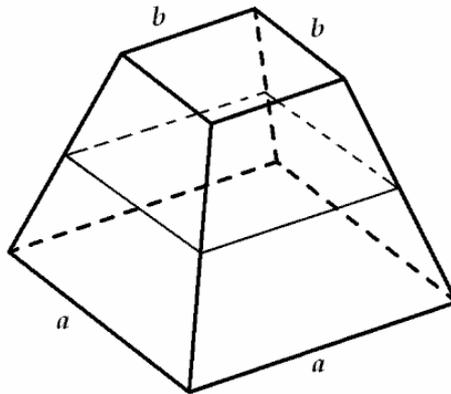


Figura 3. Tronco de Pirámide

4. Lingote o prismoide rectangular

Un *prismoide* es un prismatoide cuyas bases tienen el mismo número de vértices y las caras laterales son trapecios o paralelogramos. Por tanto (Figura 4), se tiene

$$V = h \cdot \left[\frac{(a + a') \cdot (b + b')}{4} + \frac{(a - a') \cdot (b - b')}{12} \right]$$

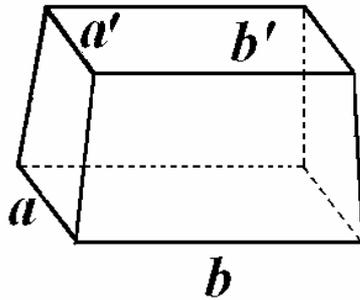


Figura 4. *Prismoide rectangular*

5. Disfenoides

Un *disfenoide*, también llamado *tetraedro isósceles*, es una pirámide triangular cuyas caras son triángulos congruentes. Sus caras son triángulos acutángulos escalenos o acutángulos isósceles (Figura 5). Se tiene pues:

$$B = 0, M = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \text{ y } T = 0 \Rightarrow V = \frac{h}{6} b^2$$

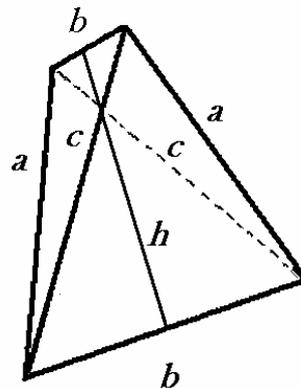


Figura 5. *Disfenoide*

6. Antiprismas

Un *antiprisma* es un prismatoide cuyas bases son dos polígonos regulares de n lados congruentes y las caras laterales son $2n$ triángulos equiláteros. Los antiprismas fueron estudiados por vez primera por Kepler [2]. El antiprisma triangular es el octaedro. Si n es 2, el antiprisma es el tetraedro regular.

Si a es la arista, n es el número de lados de la base, s la sagita (segmento entre el punto medio del arco y la cuerda) de un lado de la base a su circunferencia circunscrita y h la altura del antiprisma se cumple la relación

$$h^2 + s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$$

Como $s = \frac{a}{2} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)$, tenemos que $h = \frac{a}{2} \sqrt{3 - \tan^2 \frac{\pi}{2n}}$ y por tanto

$$V = \frac{h}{6} \left(A_n(a) + 4 \cdot A_{2n}\left(\frac{a}{2}\right) + A_n(a) \right).$$

Operando obtenemos $V = \frac{n}{48} \cdot \frac{(3 - \tan^2 \varphi)^{3/2}}{\tan \varphi} \cdot a^3$, siendo $\varphi = \frac{\pi}{2n}$. Algunos

casos interesantes se muestran en la tabla siguiente:

N	Volumen antiprisma	n	Volumen antiprisma
2	$\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$	5	$\frac{1}{6} (5 + 2\sqrt{5}) a^3$
3	$\frac{\sqrt{2}}{3} a^3$	6	$\sqrt{2 + 2\sqrt{3}} a^3$
4	$\frac{1}{3} (\sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{8}) \cdot a^3$	8	$\frac{2}{3} \sqrt{4 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{146 + 103\sqrt{2}}} a^3$

7. Cúpulas

Las *cúpulas* son prismatoides cuya base superior es un polígono regular de n lados y la base inferior un polígono de $2n$ lados. Las caras laterales son triángulos equiláteros y cuadrados que se alternan. Para $n = 2$ la cúpula es el prisma regular triangular.

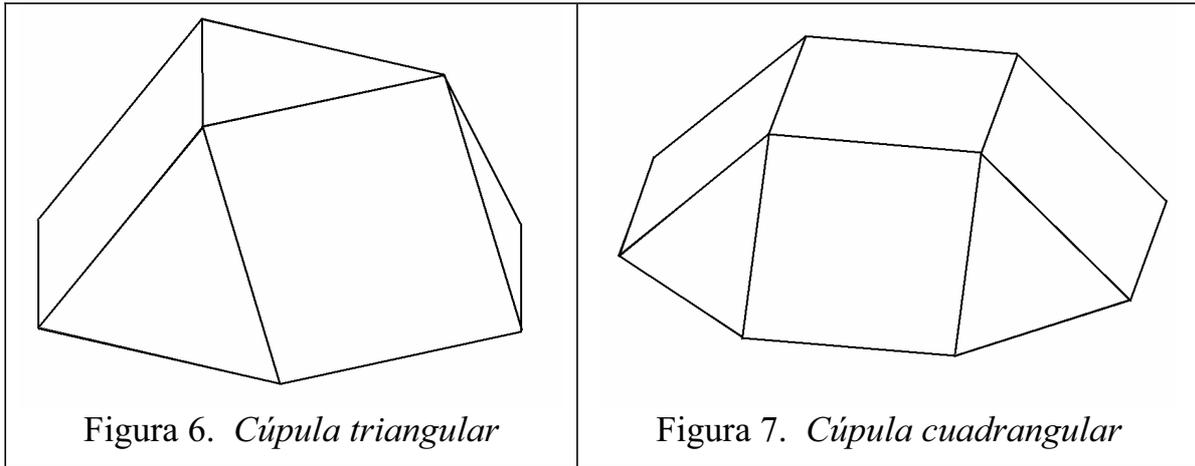


Figura 6. *Cúpula triangular*

Figura 7. *Cúpula cuadrangular*

Si a es la arista, la altura de la cúpula es

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3 - \cot^2 \frac{\pi}{n}}, \quad B = A_{2n}(a), \quad T = A_n(a)$$

y la sección media M se descompone en los siguientes polígonos: un polígono congruente a la base superior T , n triángulos isósceles de base $a/2$ y altura

$$c = \frac{a}{4} \cot \frac{\pi}{n} \quad \text{y } n \text{ rectángulos de base } a \text{ y altura } d = \frac{a}{4} \csc \frac{\pi}{n}$$

Aplicando la fórmula del prismaoide y operando obtenemos

$$V = \frac{n}{24} \cdot \frac{3 + 4 \cos \varphi}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \sqrt{3 - 4 \cos^2 \varphi}, \quad \varphi = \frac{\pi}{n}, \quad n = 2, 3, 4, \text{ y } 5.$$

Obtenemos así la tabla:

N	Volumen	n	Volumen	N		n	Volumen
2	$\frac{\sqrt{3}}{4} a^3$	3	$\frac{5\sqrt{2}}{6} a^3$	4	$\frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} a^3$	5	$\frac{5 + 4\sqrt{5}}{6} a^3$

8. Cuerpos que se descomponen en prismatoides

El icosaedro y el dodecaedro se pueden descomponer en prismatoides. El icosaedro es la unión de un antiprisma pentagonal y dos pirámides regulares pentagonales. El volumen del icosaedro es por tanto:

$$V = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{6} a^3 + 2 \frac{5 + \sqrt{5}}{24} a^3 = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12} a^3 = \frac{5(1 + \Phi)}{6} a^3.$$

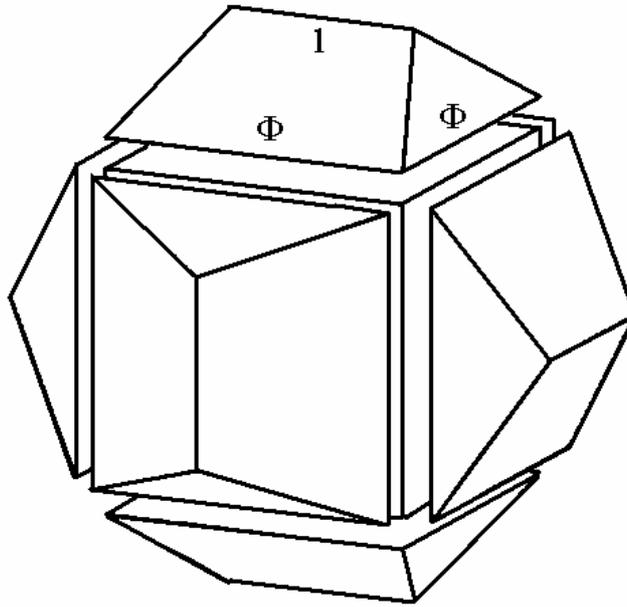


Figura 8. *Diseción del dodecaedro*

El dodecaedro de arista unidad se descompone en un cubo arista Φ , donde $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ es la razón áurea, y 6 cuñas de dimensiones $a = b = \Phi$, $c = 1$,

$h = 1/2$. El volumen de la cuña es $V = \frac{2 + 3\Phi}{12}$ y el del dodecaedro de arista unidad es

$$V = \Phi^3 + 6 \frac{2 + 3\Phi}{12} = \frac{4 + 7\Phi}{2} = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}.$$

9. Sólidos arquimedianos

Siete de los sólidos arquimedianos se obtienen cortando una pirámide regular alrededor de todos los vértices de cada uno de los poliedros regulares de tal forma que las caras resultantes sean polígonos regulares. Para cada poliedro regular esto se puede hacer de dos maneras. La primera cortando por el punto medio de cada arista y la segunda a una distancia conveniente para que cada cara de n lados genere una cara de $2n$ lados.

Los volúmenes de estos cuerpos se calculan fácilmente con las fórmulas de los volúmenes de los poliedros regulares y la fórmula del volumen de una pirámide n -regular de arista a en la base y arista lateral g , que es

$$V = \frac{n}{12} a^2 \cot \varphi \sqrt{g^2 - \frac{a^2}{4 \operatorname{sen}^2 \varphi}},$$

siendo $\varphi = \frac{\pi}{n}$.

Ilustremos esta técnica con el dodecaedro. Cortando el dodecaedro de arista $2\Phi - 1$ a una distancia $\Phi - 1$ de cada vértice obtenemos el dodecaedro truncado de arista unidad y volumen

$$V = \frac{4 + 7\Phi}{2} \cdot (2\Phi - 1)^3 - 20 \cdot \frac{2 - \Phi}{12} = \frac{5}{6} (26 + 47\Phi) = \frac{5}{12} (99 + 47\sqrt{5}).$$

Cortando por los puntos medios de las aristas de un dodecaedro de arista $2/\Phi$ obtenemos el icosidodecaedro de arista unidad. Su volumen es, por tanto

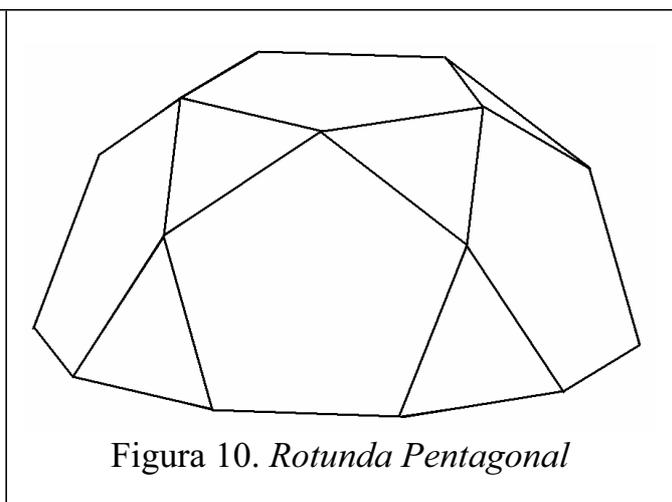
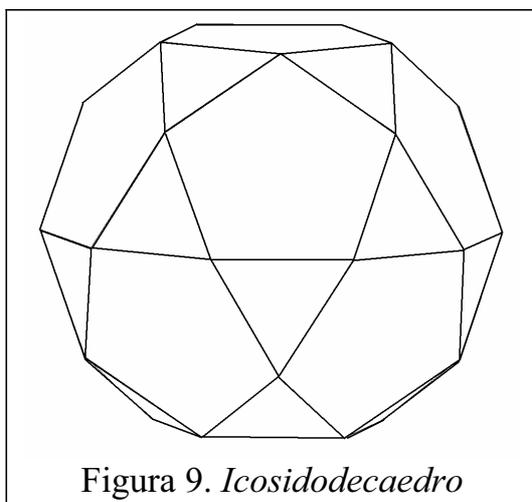
$$V = \frac{4 + 7\Phi}{2} \cdot \left(\frac{2}{\Phi}\right)^3 - 20 \cdot \frac{\sqrt{3 - \Phi^2}}{12\Phi} = \frac{1}{3} (14 + 17\Phi) = \frac{1}{6} (45 + 17\sqrt{5}).$$

Es un ejercicio interesante repetir esta técnica con el resto de poliedros regulares.

Los resultados se resumen en la tabla siguiente.

Poliedro	Volumen	Poliedro	Volumen
Tetraedro truncado	$\frac{23\sqrt{2}}{12}$	Icosaedro truncado	$\frac{1}{4}(125 + 43\sqrt{5})$
Cubo truncado	$\frac{7}{3}(3 + 2\sqrt{2})$	Cuboctaedro	$\frac{\sqrt{2}}{24}$
Octaedro truncado	$\frac{\sqrt{2}}{6}$	Icosidodecaedro	$\frac{1}{6}(45 + 17\sqrt{5})$
Dodecaedro truncado	$\frac{5}{12}(99 + 47\sqrt{5})$		

La mitad de un icosidodecaedro se llama *rotunda pentagonal*. Es el sólido de Johnson J_6 y su volumen es $V = \frac{1}{12}(45 + 17\sqrt{5})$.



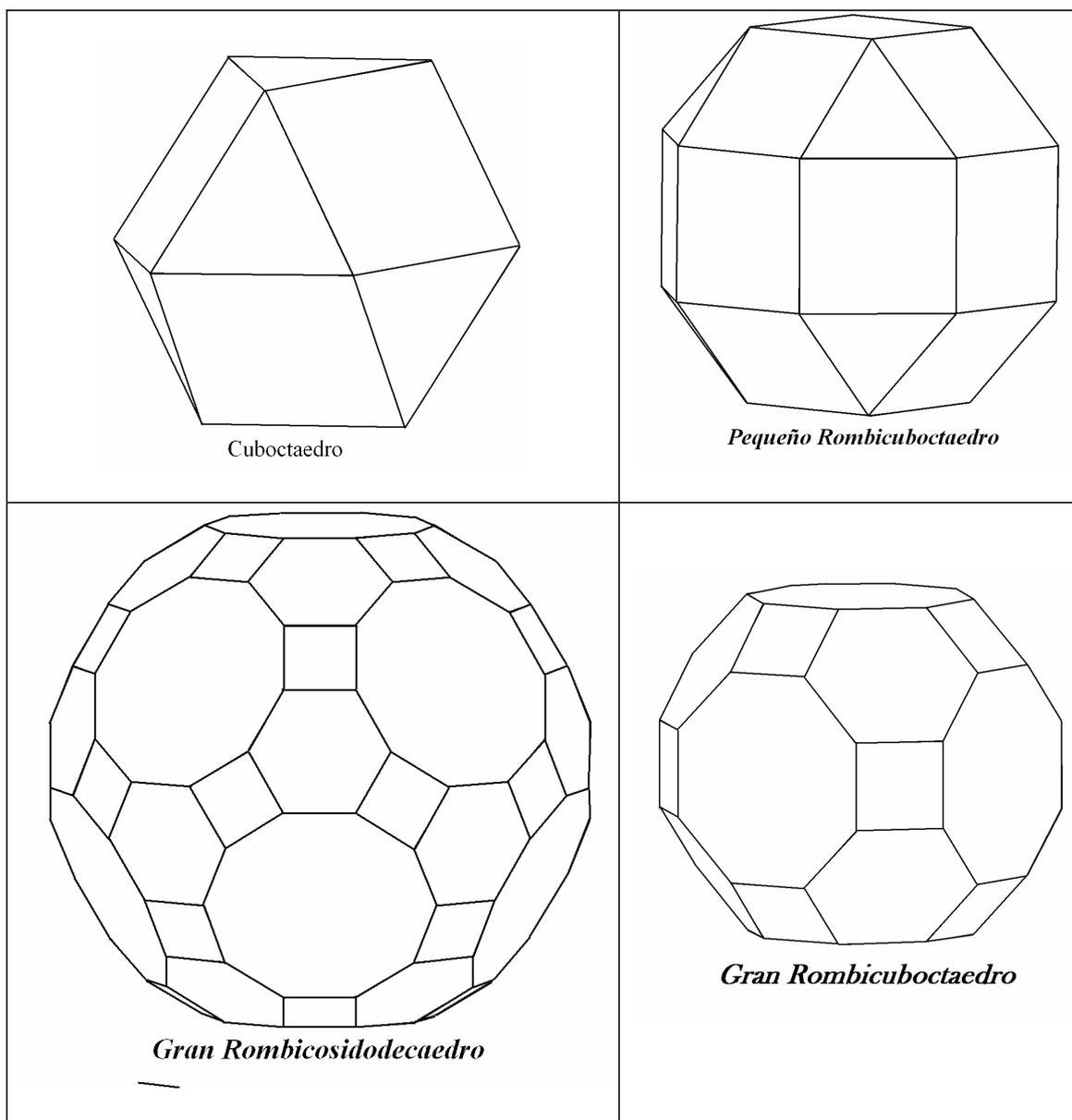


Figura 11. *Poliedros arquimedianos*

El *cuboctaedro* está formado por dos cúpulas triangulares y el pequeño rombi-cuboctaedro por dos cúpulas cuadradas más un prisma octogonal. Sus volúmenes son:

Cuboctaedro	$\frac{5\sqrt{2}}{3}a^3$	Rombicuboctaedro	$\frac{12+10\sqrt{2}}{3}a^3$
-------------	--------------------------	------------------	------------------------------

El gran rombicuboctaedro de arista unidad se puede descomponer en un prisma octogonal de lados alternos 1 y $1+2\sqrt{2}$ y altura unidad, y cuatro prismatoides de dos tipos de bases octogonales irregulares. Todas las áreas son fáciles de calcular pues son octógonos inscritos en cuadrados. El volumen del prisma es $8+4\sqrt{2}$ y los prismatoides $4+\frac{10}{3}\sqrt{2}$ y $3+\frac{5}{3}\sqrt{2}$. El volumen del gran rombicuboctaedro es, por tanto, $V = (22+14\sqrt{2}) \cdot a^3$.

El *gran rombicoidodecaedro* de arista unidad se descompone en 30 pirámides cuadrangulares de altura $\frac{3}{2}+\sqrt{5}$, 20 pirámides hexagonales de altura $\sqrt{3}+\frac{\sqrt{15}}{2}$ y 12 pirámides decagonales de altura $\frac{1}{2}\sqrt{25+10\sqrt{5}}$. Su volúmenes son, respectivamente, $\frac{1}{6}(3+2\sqrt{5})$, $\frac{3}{4}(2+\sqrt{5})$ y $\frac{25}{12}(2+\sqrt{5})$. El volumen del gran rombicoidodecaedro de arista a es $(95+50\sqrt{5}) \cdot a^3$.

10. Los poliedros rómbicos de Kepler

Análogamente a la descomposición del dodecaedro en un cubo y seis cuñas, tenemos la descomposición del dodecaedro rómbico en un cubo y seis pirámides cuadradas y la descomposición del triacontaedro rómbico en un cubo y seis prismatoides.

Estos hechos permiten calcular las fórmulas de los volúmenes de ambos sólidos.

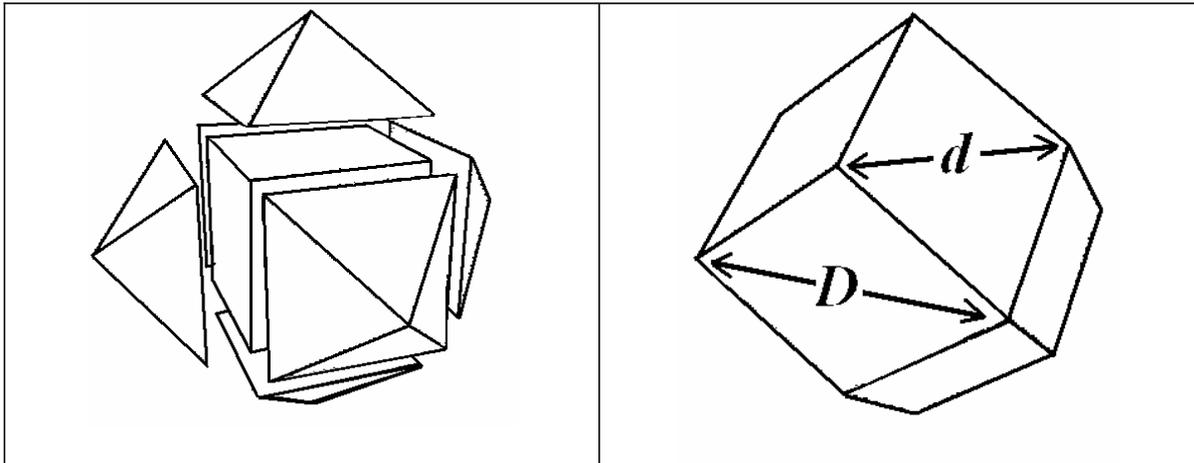


Figura 12. *Dodecaedro rómbico*

Sean D y d las diagonales mayor y menor de una de las caras del dodecaedro rómbico. Es fácil comprobar que $D = \sqrt{2}d$. Cada pirámide tiene por base d y altura $d/2$; siendo, por tanto, su volumen $V = d^3 + 6 \cdot \frac{1}{3}d^2 \cdot \frac{d}{2} = 2d^3$.

La arista a verifica la relación $2a = \sqrt{3}d$ y el volumen es $V = \frac{16\sqrt{3}}{9}a^3$

En el caso del triacontaedro, si D y d son las diagonales de cualquiera de las 30 caras rómbicas, resulta que $D = \Phi \cdot d$, siendo Φ la razón áurea.

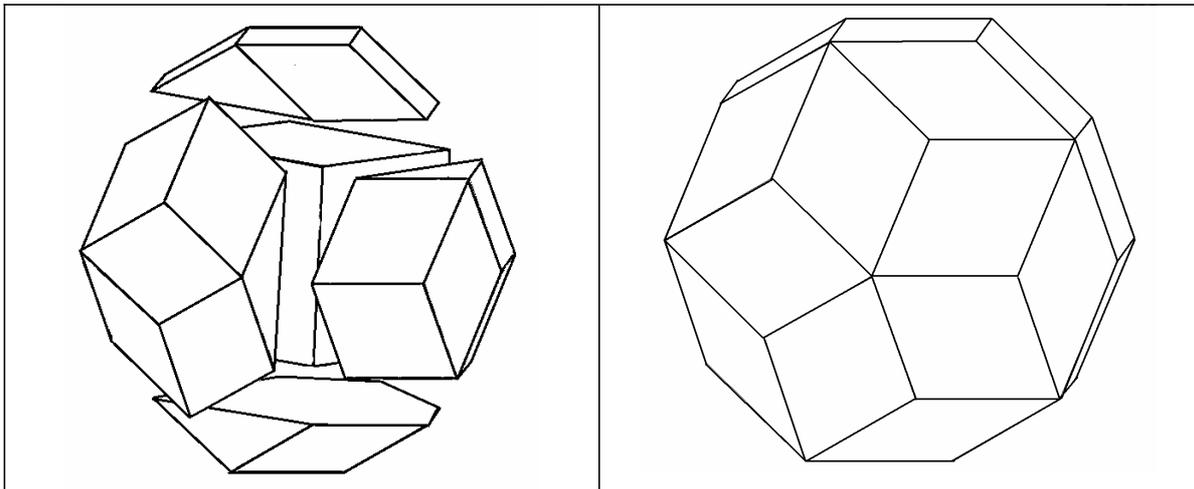


Figura 13. *Triacontaedro rómbico*

El prismatoide tiene por altura $d/2$, por base inferior un hexágono irregular de lados opuestos paralelos de longitudes D y a , siendo a la arista del triacontaedro. La base superior es una cara del triacontaedro. El área de la base se calcula fácilmente descomponiendo el hexágono en un rombo y 4 paralelogramos y mide

$$B = \frac{1}{2}(2D^2 + dD), \text{ la sección media es } M = \frac{1}{2}(D^2 + dD) \text{ y la superior}$$

$$T = \frac{1}{2}dD. \text{ Aplicando la fórmula del prismatoide obtenemos que el volumen de}$$

éste es $\frac{1}{4}dD(d + D)$. Por tanto, el volumen del triacontaedro es

$$V = D^3 + 6 \frac{1}{4}dD(d + D) = \frac{5 + 10\Phi}{2}d^3$$

y expresado en función de la arista, a , queda así: $V = 4\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}a^3$.

11. El pequeño rombicosidodecaedro

Truncando adecuadamente el triacontaedro rómbico obtenemos un sólido arquimedeo el pequeño *rombicosidodecaedro*. El volumen del rombicosidodecaedro de arista unidad se obtiene fácilmente truncando un triacontaedro de arista

$\frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$ a una distancia $\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$ de los doce vértices de valencia cinco y a

una distancia $\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ en los veinte vértices de valencia tres (la *valencia* de un

vértice es el número de aristas que concurren en él). Los volúmenes de cada pirámide son respectivamente

$\frac{1}{48}(5 + 3\sqrt{5})$ y $\frac{1}{48}(3 - \sqrt{5})$. El volumen del pequeño

rombicosidodecaedro es

$$V = 4\sqrt{5 + 2\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}}{2} \right)^3 - 12 \cdot \frac{(5 + 3\sqrt{5})}{48} - 20 \cdot \frac{(3 - \sqrt{5})}{48} = 20 + \frac{29}{3}\sqrt{5}$$

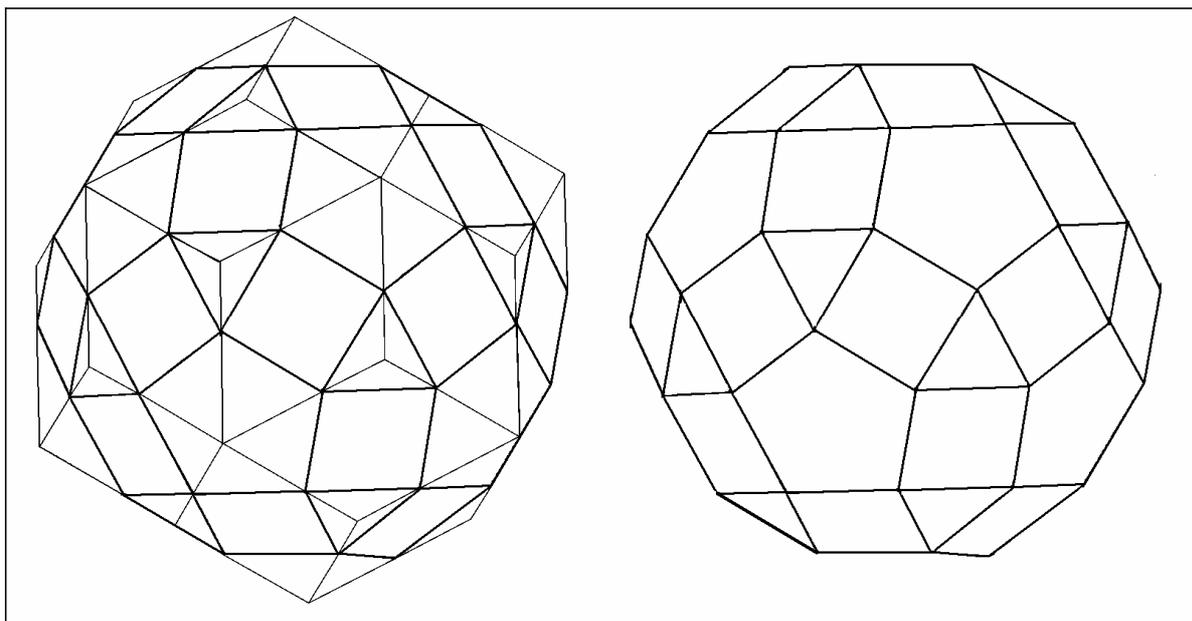


Figura 14. *Truncando el triacontaedro y el pequeño rombicosedodecaedro.*

12. Sólidos de Johnson

Los *sólidos de Johnson* son los poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares y no son poliedros uniformes.

Los primeros 83 sólidos de Johnson son partes de poliedros uniformes o uniones de estos. Entre los primeros están las pirámides cuadrangular (J1) y pentagonal (J2), que son partes del octaedro y del icosaedro respectivamente. Las cúpulas triangular (J3), cuadrangular 8 (J4) y pentagonal (J5) que son trozos del cuboctaedro, rombicuboctaedro y pequeño rombicosedodecaedro. La rotunda pentagonal es la mitad del icosidodecaedro. El *icosaedro tridisminuido* (J63) es un icosaedro del que se han eliminado tres pirámides pentagonales. J83 es un pequeño rombicosedodecaedro del que se han eliminado tres cúpulas pentagonales. Entre los sólidos que son uniones están el *girobifastigium* (J26) que es unión de dos prismas triangulares, el J40 que es unión de una rotunda pentagonal, un prisma decagonal y una cúpula pentagonal, etc..

Los nueve últimos sólidos de Johnson son más complejos. Apliquemos la fórmula del prismatoide para calcular el volumen de dos de ellos el J91 (*biluna birotunda*) y el J92 (*hebesfenorotunda triangular*).

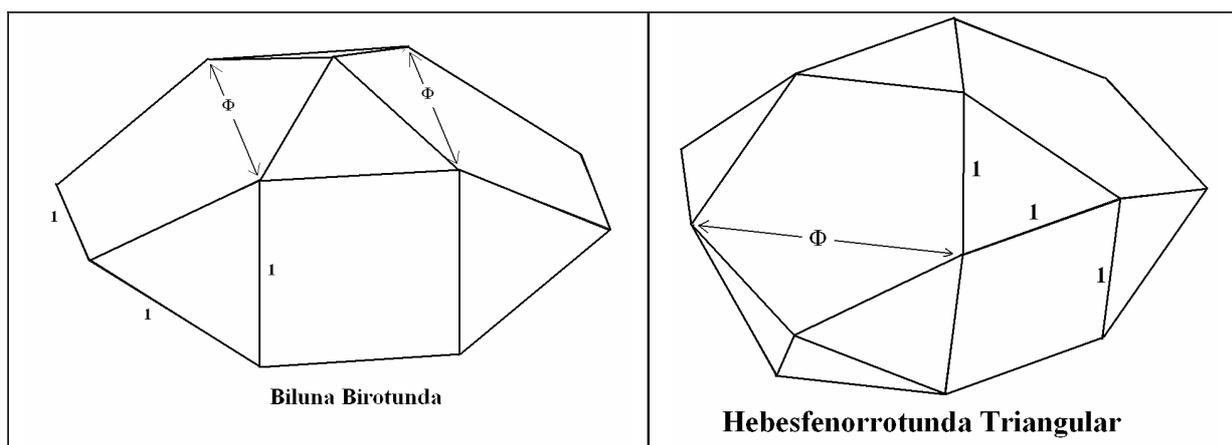


Figura 15. Dos sólidos de Johnson

La biluna birotunda de arista unidad se descompone en un prisma de base cuadrada de lado 1 y altura Φ , dos cuñas de dimensiones $a = \Phi$, $b = c = 1$, y $h_c = \Phi/2$ y dos pirámides cuya base es un rectángulo de dimensiones $1 \times \Phi$ y altura $h_p = 1/\Phi$. Los volúmenes del prisma, la cuña y la pirámide son, respectivamente,

$$\Phi, \frac{\Phi}{6 \cdot 2} (2 \cdot \Phi \cdot 1 + 1 \cdot 1), \text{ y } \frac{1}{3} \Phi \cdot 1 \cdot \frac{1}{\Phi}.$$

El volumen de la biluna birotunda de arista unidad es:

$$V = \Phi + 2 \frac{2 + 3\Phi}{12} + 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4 + 9\Phi}{6} = \frac{17 + 9\sqrt{5}}{12}.$$

El sólido de Johnson J92 llamado también *hebesfenorrotuna triangular* se descompone en tres pirámides de base trapezoidal y altura $h_p = \sqrt{\frac{3 - \Phi}{5}}$ y dos prismatoides. Cada pirámide tiene un volumen $\frac{3 + \sqrt{5}}{24}$. El prismaoide inferior es un hexágono regular de base unidad y base superior un hexágono irregular de lados 1 y Φ alternados. Su altura es $\frac{\sqrt{3}}{3} \Phi$ y su volumen es $\frac{35 + 19\sqrt{5}}{24}$. El

prismatoide superior tiene este hexágono como base inferior y un triángulo equilátero de lado unidad como base superior. Su altura es $\frac{\sqrt{3}}{3}$ y su volumen

$\frac{8+3\sqrt{5}}{12}$. El volumen de la hebesfenorrotuna triangular de arista unidad es

$$V = \frac{35+19\sqrt{5}}{24} + \frac{8+3\sqrt{5}}{12} + 3\frac{3+\sqrt{5}}{24} = \frac{15+7\sqrt{5}}{6} = \frac{4+7\Phi}{3}.$$

13. Reseña histórica

La fórmula del volumen de la pirámide cuadrangular era conocida por los babilonios y los egipcios [3, 6]. Entre los griegos, *Demócrito de Abdera* fue el primero que enunció las fórmulas del volumen de cualquier pirámide y del cono, fórmulas que, según Arquímedes, fueron demostradas rigurosamente por *Eudoxo* [3]. El libro XII de los elementos de Euclides está dedicado íntegramente a la medida de áreas y volúmenes usando el método de exhaución de Eudoxo [5].

La fórmula del tronco de cono aparece en el Papiro de Rhind. Los babilonios usaban la fórmula errónea $V = \frac{h}{2}(a^2 + b^2)$, por analogía con la fórmula del área de un trapecio [9]. La fórmula del prismoide rectangular aparece por primera vez en el libro II de la Métrica de Herón. Este libro estuvo perdido hasta 1896 cuando se encontró una copia de él en Estambul. La fórmula del prismatoide se debe a E. F. August, en 1849 [12].

Kepler estudió los poliedros convexos con caras regulares y vértices iguales, distinguiendo cuatro familias: los poliedros regulares, los prismas regulares, los antiprismas y los sólidos arquimedianos [2, 3]. N.W. Johnson catalogó y estudió los poliedros convexos con caras regulares cuyos vértices no son *todos* iguales [8]. Los catalogó y estudió conjeturando que la lista de 92 cuerpos era completa. Son los llamados actualmente sólidos de Johnson. Victor Zallager [15] demostró que la lista estaba completa. Una mirada rápida a los sólidos de Johnson puede verse en [13].

14. Conclusiones

Con las fórmulas del prismatoide y de la pirámide hemos calculado el volumen de todos los poliedros regulares, once de los trece poliedros arquimedianos, los po-

lledros rómbicos de Kepler y los poliedros básicos para calcular la mayoría de los sólidos de Johnson.

La fórmula del prismoide se generaliza aplicando cálculo integral a todos los cuerpos cuya sección paralela a un plano fijo tiene un área que se expresa como $ax^3 + bx^2 + cx + d$, siendo x la distancia de la sección paralela a dicho plano.

Esto nos permite poder aplicar la fórmula del prismoide a cuerpos como el cilindro, el cono, la esfera, el elipsoide, etc..., pero esto es otra historia.

Referencias

- [1] Abellanas Cebollero, Pedro. *Introducción a la Matemática*. C. Bermejo impresor, Madrid 1960.
- [2] Aiton, E.J., Duncan A.M., Field J.V., *The Harmony of the World*. Diane Publishing, 1997.
- [3] Cromwell, P. R., *Polyhedra*. Cambridge University Press. Cambridge, 1997.
- [4] Edwards, George Cunningham, *Elements of Geometry*, BiblioBazaar, LLC, 2009.
- [5] Euclides, *Elementos*. Biblioteca Clásica Gredos. Madrid 1991.
- [6] Eves, Howard. *Estudio de las Geometrías*, Volumen I. Unión tipográfica editorial hispano americana, Mexico 1969. (págs. 40-41)
- [7] Hull, G., *Elements of Geometry*. Butler 6 C0. Filadelfia 1897.
- [8] Johnson, N.W., *Convex Polyhedra with Regular Faces*. Canadian Journal of Mathematics, 18, 1966.
- [9] Maxfield, John E. & Coolidge, Julian L., *A History of Geometrical Methods*. Dover Publications, 2003.
- [10] Palmer, Claude Irwin & Bibb, Samuel Fletcher & Jarvis, J. A. & Mrachek, A., *Matemáticas Prácticas*. Editorial Reverté, 2003.
- [11] Puig Adam, Pedro, *Curso de Geometría Métrica*, Volumen I. Gómez Puig Ediciones, Madrid 1979.
- [12] Smith, David Eugene, *The Teaching of Elementary Mathematics*. The Macmillan company; Macmillan & co., New York, 1900.
- [13] Weisstein, Eric W., *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. CRC Press
- [14] Wentworth, George, *Solid Geometry*. Ginn and Company. Boston, 1911.
- [15] Zalgaller, Viktor A., *Convex Polyhedra with Regular Faces*. Consultants Bureau, 1969.

Escaleras deslizantes flexibles: Un repaso actualizado y específico al puente entre Geometría Dinámica y Álgebra Computacional

Francisco Botana[†], José L. Valcarce[‡]

[†] Depto. de Matemática Aplicada I, Universidad de Vigo

[‡] Departamento de Matemáticas, IES Pontepedriña, Santiago

fbotana@uvigo.es ; ppvalcarce@gmail.com

Abstract

We use a recent generalization of the slidding ladder to illustrate the advantages of combining dynamic geometry and computer algebra systems. The envelopes of ladders of variable length are studied within the computer algebra system Sage: we use GeoGebra for obtaining an graphical approach to these envelopes, and Singular for performing a simple elimination process that returns the envelope equation.

1 Introducción

Tomando como pretexto una reciente generalización, debida a Apostol y Mnatsakian [1], de la bien conocida escalera deslizante, la escalera flexible, se hace un breve repaso del cálculo de la primera en diferentes sistemas de geometría y cálculo simbólico. Se calculan las envolventes para escaleras flexibles gobernadas por variadas curvas algebraicas. Las envolventes se obtienen mediante dos aproximaciones: i) utilizando GDI, un entorno de geometría simbólico–dinámica en el que el proceso es transparente para el usuario, y ii) remotamente, a través del *notebook* de Sage, donde conviven GeoGebra y Singular.

Las aproximaciones tomadas subrayan una tarea por completar en el ámbito del software matemático: la deseada fusión entre los paradigmas de la geometría dinámica y la demostración automática en geometría. En esta tarea el profesor Roanes y su equipo han desempeñado un papel muy relevante dentro de la Matemática española.

2 La escalera deslizante

Consideremos una escalera en posición vertical apoyada contra una pared. Si la escalera empieza a caer de manera que su extremo superior se desliza sobre la pared y el extremo inferior lo hace sobre el suelo, ¿qué trayectoria describe el punto medio de la escalera? Si bien la experimentación puramente mental del problema conduce frecuentemente a conjeturas erróneas, el usuario con acceso a un programa de geometría dinámica obtendrá fácilmente que la trayectoria buscada parece ser un cuarto de circunferencia. La configuración más frecuente consiste en definir un segmento desde el origen hasta $(a, 0)$, construir un punto sobre el segmento, que será el pie de la escalera, y, con ayuda del compás, trazar la circunferencia de centro el pie y radio a . El punto de corte superior de esta circunferencia con el eje Y será la cima de la escalera. Aquí variaremos ligeramente la construcción, ilustrada en la Figura 1. Partiendo de un cuarto de circunferencia c y un punto C sobre él, los extremos de la escalera, F y G , son sus proyecciones sobre los ejes, y el punto H es el punto medio de la escalera. Cuando C recorre el cuarto de circunferencia, la escalera se desliza entre la pared (eje Y) y el suelo (eje X), manteniendo su longitud constante, y el punto H describe un cuarto de circunferencia.

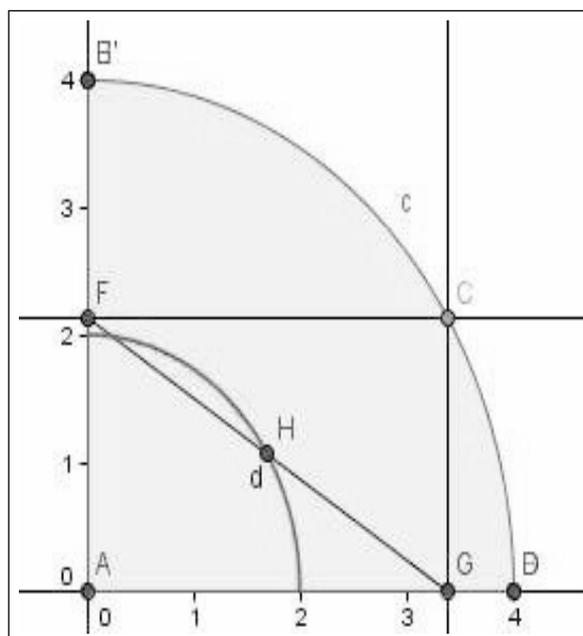


Figura 1: La escalera deslizante en un entorno genérico de geometría dinámica.

La pregunta inmediata entraña considerar otro punto distinto del medio. La trayectoria es en este caso elíptica, como sugiere la traza del punto en un programa

de geometría dinámica (aunque posiblemente las respuestas en una clase se distribuirían entre parábola y elipse). Si usamos Cabri y pedimos la ecuación del lugar podremos comprobar (Figura 2) que efectivamente es una elipse. Pero este procedimiento encierra una mala práctica y, en ocasiones, un peligro: Cabri no garantiza la exactitud de sus cálculos al devolver ecuaciones de objetos construidos, debido al método aproximado que emplea para obtenerlas.

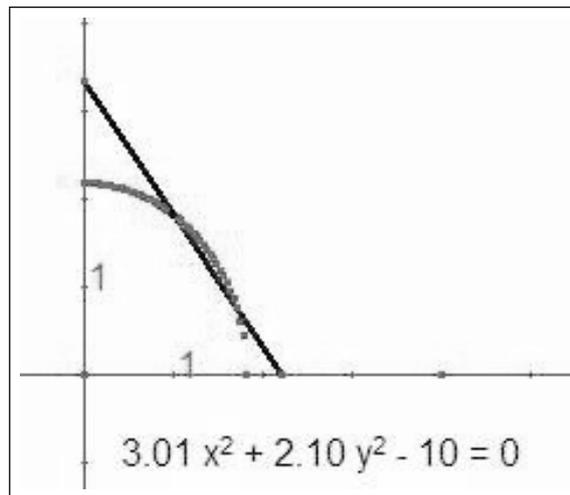


Figura 2: El lugar de un punto cualquiera de la escalera deslizante con Cabri.

Si queremos certeza en cuanto a la exactitud de la ecuación del lugar geométrico podemos recurrir a GDI [2], un prototipo de geometría dinámica que utiliza métodos correctos para calcular ecuaciones de lugares. Utilizando este entorno la especificación del problema cambia ligeramente, pues no se construye explícitamente el punto H sino que se describen las condiciones que debe cumplir (téngase en cuenta que esta vía permite calcular lugares geométricos de puntos no construibles). Si, por ejemplo, H divide al segmento FG en tres partes iguales, se introducen como condiciones definitorias del lugar

- $\text{Aligned}(H, F, G)$
- $\text{distance}(H, F) * 3 = \text{distance}(G, F)$

La respuesta relativa a la ecuación del lugar del punto H se muestra en la Figura 3. El resultado, a primera vista sorprendente, no lo es si se piensa que para cada posición de C en la circunferencia hay dos puntos que verifican las condiciones dadas: uno dentro del segmento y otro fuera de él, sobre la recta soporte. GDI, con vocación de exactitud y generalidad, muestra gráficamente ambas elipses (Figura 4), ya que incorpora características que permiten un paso más allá del tratamiento puramente

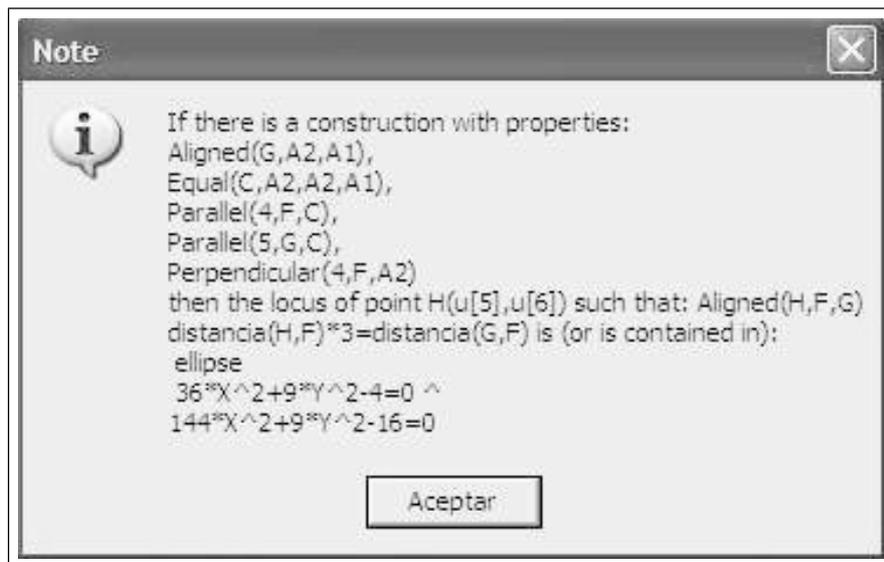


Figura 3: Ecuación dada por GDI para el lugar del punto H .

algebraico de las construcciones: en este caso la representación gráfica correcta se logra añadiendo como tercera condición a las que definen el lugar

- $\text{OnSegment}(H, F, G)$.

Sería ingenuo y pretencioso por nuestra parte sugerir la sustitución de herramientas consolidadas como, por ejemplo, Cabri por un prototipo como GDI, a pesar de su mayor eficiencia en tareas como la que aquí se discute. Con el ánimo de superar limitaciones y garantizar resultados correctos a programas estándar de geometría dinámica, se desarrolló LADucation [3], una herramienta de acceso remoto para el procesamiento simbólico de tareas geométricas. LADucation acepta construcciones en Cabri, The Geometer's Sketchpad o Cinderella relativas a lugares geométricos y demostraciones y devuelve conclusiones matemáticamente verdaderas. Para la construcción Cabri arriba mencionada la respuesta de LADucation es a primera vista desconcertante, “*El lugar es todo el plano (o contiene un conjunto abierto 2-dimensional)*”.

Una mirada atenta a la construcción hará comprensible la respuesta: si el usuario se limitó a crear un punto sobre la escalera, éste no es uno fijo sobre el segmento, sino que puede ser cualquiera. Debido a ello, la trayectoria que describe es realmente una parte bidimensional del plano, que puede visualizarse activando la traza de la escalera completa (Figura 5). El lector atento habrá imaginado la astroide, generada como curva tangente en cada uno de sus puntos a una de las trayectorias de los puntos que

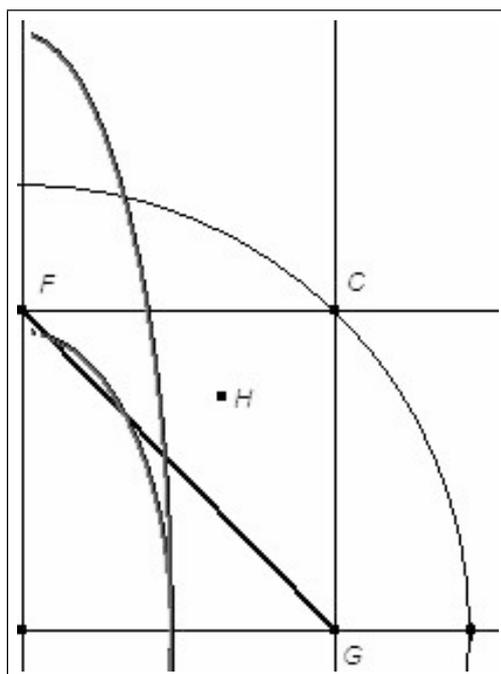


Figura 4: Dos elipses posibles para H en GDI.

forman la escalera. En otras palabras, la astroide es la envolvente de las rectas que contienen a la escalera en cada posible posición. Distintos programas de geometría dinámica permiten el cálculo de envolventes de familias de rectas o segmentos que dependen de otro objeto, y lo hacen usualmente mediante la misma herramienta que para los lugares geométricos. Por ejemplo, Cinderella (Figura 6, izquierda) traza limpiamente la parte de la astroide en el primer cuadrante a partir de la escalera deslizante, mientras que Cabri (Figura 6, derecha) sugiere la astroide como frontera de todas las elipses trazadas por los puntos de la escalera. Además, Cabri devuelve la ecuación (¡incorrecta!) del lugar obtenido refiriéndose a la astroide y no a todo lo que identifica como lugar geométrico.

3 La ecuación de la envolvente de una familia de curvas

Si $F(x, y, \alpha) = 0$ es una familia de curvas que dependen de un parámetro α , se define la envolvente de la familia F como sigue: Si se reemplaza un α dado por $\alpha + \Delta\alpha$ en la ecuación de la familia $F(x, y, \alpha) = 0$, obtenemos una nueva curva implícitamente definida por $F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) = 0$. El conjunto de puntos que pertenecen a ambas

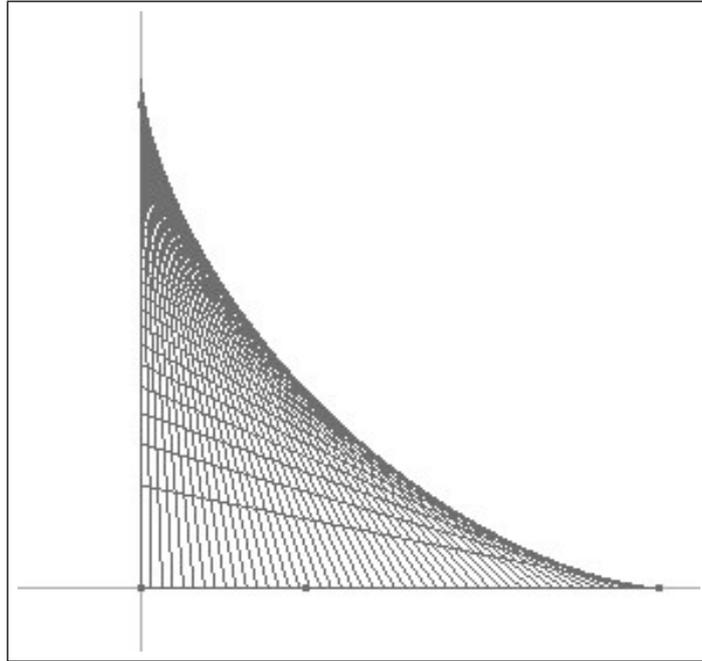


Figura 5: Todas las posibles posiciones de un punto cualquiera de la escalera cuando ésta se desliza.

curvas satisface

$$F(x, y, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, \alpha) = 0.$$

Si F es derivable con respecto a α y si esta variable α puede ser eliminada en el sistema

$$\begin{aligned} F(x, y, \alpha) &= 0 \\ \frac{\partial F(x, y, \alpha)}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

la curva resultante implícitamente definida por $f(x, y) = 0$ se llama la envolvente de la familia de curvas $F(x, y, \alpha) = 0$.

Si la familia de curvas está definida biparamétricamente por $F(x, y, \alpha, \beta) = 0$, donde los parámetros están relacionados por $g(\alpha, \beta) = 0$, la eliminación de α y β se hace en el sistema

$$\begin{aligned} F(x, y, \alpha, \beta) &= 0 \\ g(\alpha, \beta) &= 0 \\ \frac{\partial F(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \beta} - \frac{\partial F(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \frac{\partial g(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= 0, \end{aligned}$$

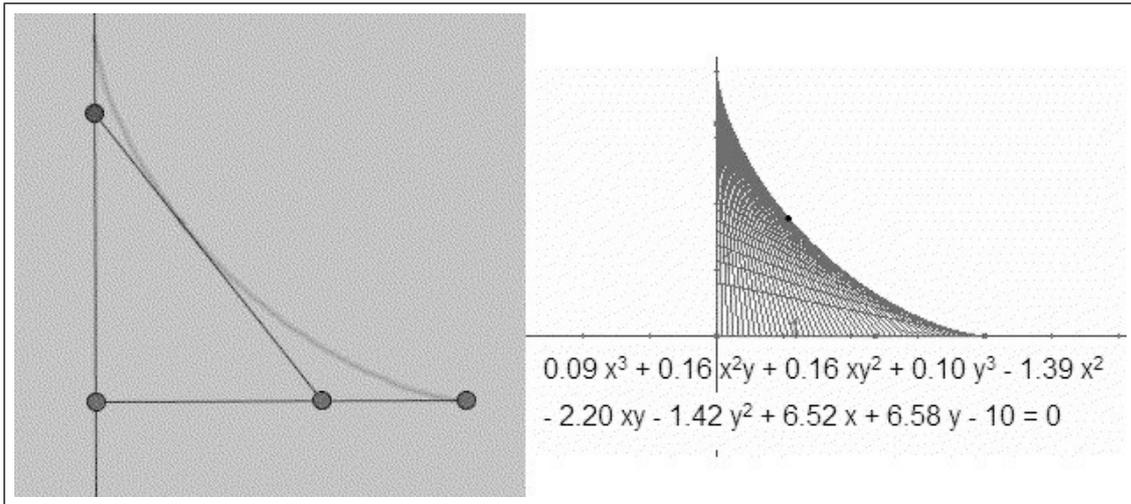


Figura 6: Envolvente de la escalera deslizando en Cinderella (izq.) y Cabri.

donde F y g son diferenciables.

4 La escalera flexible

La escalera deslizando tiene un tamaño constante e igual al radio de la circunferencia que sirve de guía para su construcción, porque el punto C sobre la que se construye pertenece a una circunferencia. ¿Qué sucede si C recorre una elipse, una parábola o cualquier curva? En este caso la longitud de la escalera no es constante y Apostol y Mnatsakanian definen la escalera flexible.

Veamos en detalle el caso en que la curva que recorre C es la hipérbola rectangular $y = \frac{1}{x}$. Al estar la curva recorrida por C definida por dos parámetros se trata de eliminarlos en el sistema

$$\begin{aligned} \beta x + \alpha y - \alpha\beta &= 0 \\ \alpha\beta - 1 &= 0 \\ (y - \beta)\alpha - (x - \alpha)\beta &= 0, \end{aligned}$$

GDI automatiza la obtención de esta envolvente: seleccionando la escalera flexible y el punto C , llama, de manera transparente para el usuario, a CoCoA donde se hace la eliminación. CoCoA devuelve $\text{Ideal}(2x * y - 1/2)$, que GDI interpreta como la hipérbola rectangular $4xy - 1 = 0$. Nótese que puesto que en GDI todos los elementos en una construcción son algebraicamente conocidos, la curva recorrida por C puede

ser cualquier línea construible en el sistema. La Figura 7 muestra la envolvente de una escalera flexible gobernada por la parábola de ecuación $31329 - 2500x^2 + 17700y$ obtenida como un lugar geométrico.

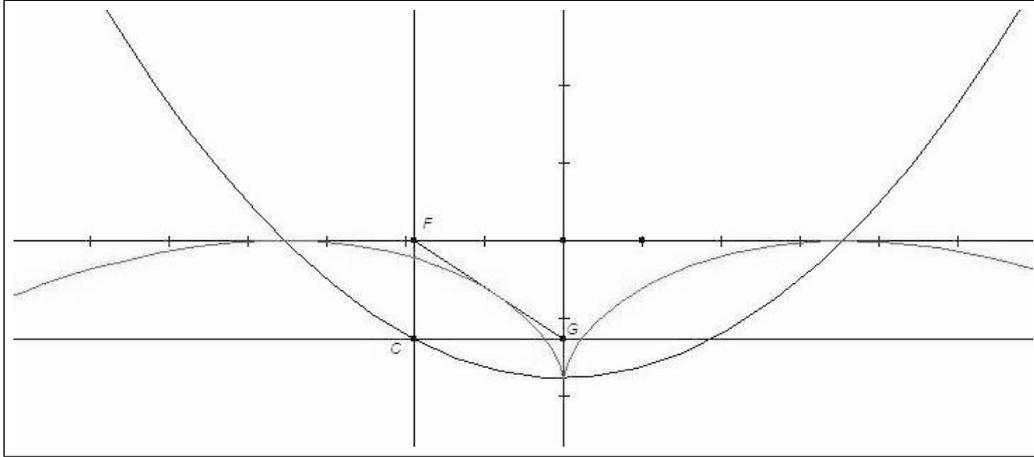


Figura 7: La envolvente cuando la curva que gobierna es un lugar geométrico

Para el estudio de las envolventes de escaleras flexibles puede optarse por software libre más accesible. Usando el *notebook* de Sage [5] mostramos como este sistema permite albergar amigablemente herramientas de geometría dinámica y recursos de cálculo simbólico. En la hoja de trabajo “Escalera Flexible” [4] ilustramos cómo la incorporación de applets en el notebook y los interfaces de Sage permiten estudiar las escaleras flexibles de manera sencilla.

La estructura de la hoja de trabajo es simple: la primera celdilla descarga GeoGebra desde su sitio web y una construcción de los autores (Figura 8). En GeoGebra el usuario puede construir cualquier escalera flexible gobernada por una función $y = g(x)$ y visualizar su envolvente activando su traza. Las celdillas siguientes usan el interfaz de Sage con Singular para llevar a cabo la eliminación. Se define el anillo de los polinomios en cuatro variables x, y, u, v sobre los racionales

```
R = singular.ring(0, '(u,v,x,y)', 'dp')
```

los polinomios f, g, h que definen el ideal I

```
I=singular.ideal(f,g,h)
```

y se eliminan los dos parámetros que definen la curva que gobierna la escalera flexible

```
singular.eliminate(I, 'uv')
```

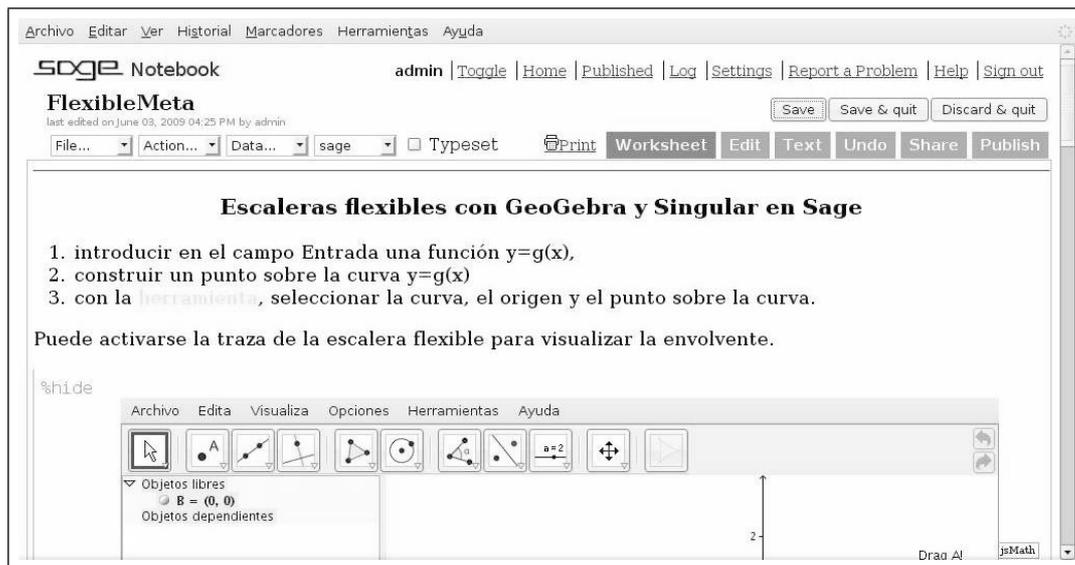


Figura 8: Inicio de la hoja de trabajo en el notebook de Sage

Nótese que si bien hay que evaluar todas las celdillas sólo se requiere la definición de g para realizar los cálculos. El polinomio devuelto por la eliminación es la envolvente de la escalera flexible. Finalmente, usando las rutinas de dibujo de Sage se representa la envolvente (Figura 9).

5 Conclusiones

La colaboración entre GeoGebra y Singular por medio de Sage facilita notablemente el estudio del problema presentado y, con seguridad, puede resolver muchos otros en los que la sola funcionalidad de los sistemas de geometría dinámica y los de álgebra computacional no es suficiente cuando sus potencialidades no se utilizan conjuntamente. Pero este arreglo está lejos de constituir una completa integración entre ambos, que sólo se logrará cuando se disponga de un entorno de geometría dinámica que incorpore en su núcleo las rutinas de álgebra computacional necesarias para llevar a cabo la deducción automática en geometría. GDI, prototipo que incorpora algunas de esas estrategias a través de CoCoA y Mathematica constituyó un primer paso para lograrlo. Esperamos que el modo en que aquí se ilustra la colaboración entre GeoGebra y Singular sea también un acicate para lograr la completa integración de ambos paradigmas.

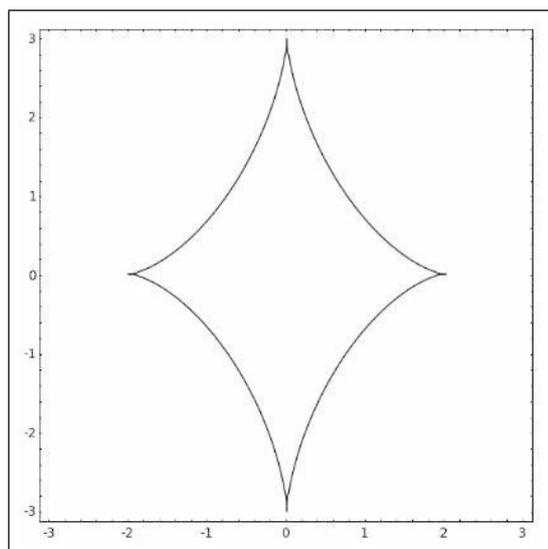


Figura 9: La envolvente de la escalera flexible gobernada por la elipse $(x/2)^2 + (y/3)^2 = 1$

Referencias

- [1] T.M. Apostol, M.A. Mnatsakanian, A New Look at the So-Called Trammel of Archimedes, *Am. Math. Month.* 116(2) (2009) 115–133
- [2] F. Botana, J.L. Valcarce, A software tool for the investigation of plane loci, *Math. Comput. Simul.* 61(2) (2003) 141–154
- [3] <http://nash.sip.ucm.es/LAD/LADucation.html>
- [4] <https://kimba.mat.ucm.es:9000>
- [5] <http://www.sagemath.org>

Problemas de álgebra y teoría de números

Juan Bosco Romero Márquez

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Valladolid

Abstract

In this paper, we show some of the problems which I have proposed and published in several journals.

Dedicado a *Eugenio Roanes Macías*,
con motivo de su reciente jubilación.

Introducción

Nuestro trabajo de proponer y resolver problemas, en la Gaceta Matemática, en colaboración con el Prof. T. Recio, comenzó en 1971, cuando era a la vez, profesor de la Universidad Complutense de Madrid y becario del Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Otras responsabilidades de ambos, eran las de corregir las soluciones que se enviaban, y dar el visto bueno final a algunos de los artículos que se publicaban. La mayoría de los problemas que se proponían en aquellas fechas en dicha revista no eran originales.

En esta sección presentamos algunos problemas y cuestiones que versan sobre el título de este artículo y que han sido publicados en las revistas que se citan.

1. Problemas de Álgebra

Problema 1. Es relativamente frecuente que enviemos para su publicación problemas cuya solución completa no conocemos y en los cuales algunas de sus partes son conjeturas, como el enunciado que aparece en la revista *Function*, Vol.15, Parte 2 (abril 1991), p. 61, como problema 15.2, y cuya solución aparece en el Vol.16, Parte 2 (abril 1992):

Sea $f(n) = 1 + 2 + 3 + \dots + n$. Calcular:

(a) $(-1)^{f(n)}$.

(b) $i^{f(n)}$. donde i denota la unidad imaginaria.

(c) $\omega_p^{f(n)}$, donde ω_p es la p -ésima raíz de la unidad, es decir, un número complejo cuya potencia de exponente p , es igual a 1.

(Notemos que (a) y (b) son casos particulares de (c), en que $p=2,4$, respectivamente).

En el Vol. 19, Parte 1 (Febrero 1995), p. 29, el Editor de problemas, Prof. Lausch, comenta en el apartado “*More on some earlier problems*” que el Prof. Keith Anker de Monash University da una solución que no se incluye aquí por ser demasiado larga. Anker prueba que la sucesión de valores de $\omega_p^{f(n)}$ es periódica, de periodo p , si p es impar, y de periodo $2p$, si p es par.

Problema 2. El problema que consideramos a continuación encaja dentro de la Aritmética Elemental. En él, se usan sistemas de numeración en cualquier base y progresiones geométricas. Fue experimentado en el Aula, como un problema de creatividad dentro del marco de la Enseñanza Secundaria. El problema se propuso en *Function: A School Mathematics Journal*, Vol. 21, Parte 4 (agosto 1997), págs 139-140, apareciendo resuelto en el Vol. 22, Parte 1, págs. 32-33, sección (21.4.4):

Hallar todos los posibles conjuntos de seis números con dos dígitos, $M=xy$, $N=yz$, $P=zu$, $M'=yx$, $N'=zy$, $P'=uz$ (donde x, y, z, u son sus dígitos respectivos en la base decimal), tales que cada terna M, N, P y M', N', P' sean dos progresiones geométricas con la misma razón.

Solución. En la notación usual en la base 10 los números dados se escriben: $M = 10x + y$, $N = 10y + z$, $P = 10z + u$, $M' = 10y + x$, $N' = 10z + y$, $P' = 10u + z$. Si r es la razón común de ambas progresiones geométricas, obtenemos las ecuaciones siguientes:

$$r = \frac{10y + z}{10x + y} = \frac{10z + y}{10y + x} \tag{1}$$

$$r = \frac{10z + u}{10y + z} = \frac{10u + z}{10z + y} \tag{2}$$

Operando en (1) y (2) de forma apropiada, llegamos respectivamente a:

$$y^2 = xz \quad (3)$$

$$z^2 = yu \quad (4)$$

La relación (3) nos dice que xz es un cuadrado perfecto; por tanto, para cada valor posible de x , desde 1 a 9, podemos determinar los correspondientes valores admisibles de z . Es obvio que, además de $z=x$, existen otros pares (x,z) que nos dan un cuadrado perfecto: $(1, 4)$, $(1, 9)$, $(2, 8)$, $(4, 1)$, $(4, 9)$, $(8, 2)$, $(9, 1)$ y $(9, 4)$. Para cada par anterior, calculamos y, u , utilizando (3) y (4). Después de excluir los pares que nos den fracciones o que den superior a 9, obtenemos las siguientes soluciones $(x,y,z,u)=(1,2,4,8)$ y $(x,y,z,u)=(8,4,2,1)$. Las soluciones triviales corresponden al caso $x=y=z=u$. Por todo lo anterior, las soluciones no triviales son dos: $M=12, N=24, P=48, M'=21, N'=42, P'=84$ y $M=21, N=42, P=84, M'=12, N'=24, P'=48$.

Problema 3. En la revista *L'insegnamento della Matematica e delle scienze integrate*, se propone el siguiente problema en el Volumen 22 B (agosto 1999), que se resuelve en el Volumen 23 B (febrero 2000), sección 99.06:

Sean $N = \underline{a} \underline{b}$ no cero, y $N' = \underline{b} \underline{a}$, dos números de dos cifras, a y b , en el sistema decimal. Sea $S(X)=a+b$ la suma de las cifras del número X y sean C_X y r_X el cociente y resto entero de dividir X por $S(X)$. Probar que:

- i) $C_N + C_{N'} = 10$ si N y N' no son divisibles por $S(N)$.
- ii) $C_N + C_{N'} = 11$ si N o N' es divisible por $S(N)$.

Solución.

ii) Supongamos, por ejemplo, que N es divisible por $S(N)=a+b$. De la definición de cociente entero del número natural resulta $10a + b = C_N(a + b)$, mientras que de la división de N' por $(a+b)$ resulta $10b + a = C_{N'}(a + b) + r$, donde el resto, r , verifica $r < a + b$.

Sumando miembro a miembro las ecuaciones precedentes y operando, se llega a

$$11(a + b) = (C_N + C_{N'})(a + b) + r,$$

y, dividiendo por $a + b$ (distinto de cero), resulta

$$11 = C_N + C_{N'} + \frac{r}{a+b} \quad (1)$$

Puesto que $C_N, C_{N'}, a, b, r$ son números naturales, de (1) resulta que r debe de ser múltiplo de $(a+b)$ o nulo. Pero, como $r < a + b$, se tiene que $r = 0$.

i) Si $a+b$ no es divisor ni de N ni de N' , se tiene que

$$10a + b = C_N(a + b) + r, \quad \text{y} \quad 10b + a = C_{N'}(a + b) + r', \quad (2)$$

donde r y r' son los restos no nulos de las divisiones. Como

$$0 < r < a + b, \quad 0 < r' < a + b, \quad 0 < r + r' < 2(a + b) \quad (3)$$

sumando miembro a miembro las igualdades (2) y operando adecuadamente, podemos deducir que

$$11(a + b) - (C_N + C_{N'})(a + b) = r + r' \quad (4)$$

De (3) resulta $0 < 11(a + b) - (C_N + C_{N'})(a + b) < 2(a + b)$, luego dividiendo por $a + b$ distinto de cero, se obtiene

$$0 < 11 - (C_N + C_{N'}) < 2$$

Y puesto que $C_N, C_{N'}$ son números naturales, resulta $11 - (C_N + C_{N'}) = 1$ de la que se obtiene $C_N + C_{N'} = 10$, como queríamos demostrar.

Observación: De la misma forma se demuestra un resultado análogo cuando el número natural dado está escrito en base n distinto de 10.

Como consecuencia de este problema, podemos resolver el siguiente.

Problema 4. En las condiciones del problema anterior, tenemos que $S(N)$ divide a N si y sólo si $S(N)$ divide a N' . O lo que es equivalente: $S(N)$ no divide a N si y sólo si $S(N)$ no divide a N' .

En la solución distinguimos dos casos:

i) Si N tiene nula una de sus cifras, $b = 0$, por ejemplo, entonces $N = \underline{a} \underline{0}$, y $N' = \underline{0} \underline{a}$, distinto de cero, $a = 1, \dots, 9$. Entonces $S(N) = S(N') = a$, y es obvio que $N = 10a$, y $N' = a$, siendo ambos números divisibles por a . Además, la suma de los cocientes es igual a 11.

ii) Supongamos ahora que $N = a \cdot b$; $a, b = 1, 2, \dots, 9$, y que $S(N) = a+b$ divide a N , pero no a $N' = b \cdot a$. De aquí se tiene que:

$$N = 10a + b = (a + b)C_N,$$

$$N' = ba = 10b + a = (a + b)C_{N'} + r_{N'},$$

con $r_N = 0$, $0 < r_{N'} < a + b$, (1) y, de acuerdo con el problema anterior,

$$C_N + C_{N'} = 10. \quad (2)$$

Ahora bien, sumando las dos expresiones obtenidas para N y N' , y teniendo en cuenta (1) y (2), llegamos a:

$$N + N' = 11(a + b) = (a + b)(C_N + C_{N'}) + r_{N'} = 10(a + b) + r_{N'},$$

luego $a + b = r_{N'}$, que contradice a (1). Por lo tanto, $S(N)$ divide a N si y sólo si $S(N)$ divide a N' . Más aún, hemos probado también que:

$S(N)$ no divide a N si y sólo si $S(N)$ no divide a N' . Y, en este caso, la suma de los restos de la división por $S(N)$, es igual a $S(N)$.

Problema 5. En la Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana (OIM), en su nº 15 (sep-oct. 2004), pág. 54, aparece propuesto el siguiente problema (nº 73), resuelto en el nº 16 (nov-dic 2004), pág.32:

Resolver la ecuación en diferencias

$$u_{n+2} = \frac{u_{n+1} - u_n}{1 + u_{n+1}u_n}, n \geq 1$$

con las condiciones iniciales $u_1 = 1, u_2 = a$, siendo a un número real distinto de -1 .

Solución:

Utilizando la ecuación en diferencias, definida por su fórmula de recurrencia, calculando u_{n+3} , y, sustituyendo u_{n+2} , después de operar y simplificar adecuadamente, llegamos a la sucesión periódica : $u_{n+3} = -u_n, n \geq 1$, y como consecuencia : $u_{n+6} = -u_{n+3}, n \geq 1$.

Se tiene, por tanto, la siguiente solución, donde k es un número natural arbitrario.

$$\begin{aligned}
u_n &= 1 & \text{si } n &= 6k \\
u_n &= a & \text{si } n &= 6k + 1 \\
u_n &= \frac{a-1}{a+1} & \text{si } n &= 6k + 2 \\
u_n &= -1 & \text{si } n &= 6k + 3 \\
u_n &= -a & \text{si } n &= 6k + 4 \\
u_n &= -\frac{a-1}{a+1} & \text{si } n &= 6k + 5
\end{aligned}$$

Problema 6. En la Revista *Mathematical School* (2006) aparece propuesto el siguiente problema (n° 4959):

Hallar todos los números $N = \underline{a} \underline{b}$, donde $a, b = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, tales que $[S(N)]^2 = S(N^2)$, donde $S(N)$ es la suma de los dígitos. Por ejemplo:

$$N = 12, N^2 = 144, S(N) = 3, S(N)^2 = 9, [S(N)]^2 = S(N^2)$$

La solución, publicada en “*A School Science and Mathematics*” (octubre 2007), se debe a tres estudiantes, dos de forma conjunta, y otro por separado:

Veamos las posibilidades que existen para N . Como hay 10 posibilidades para a y para b , tenemos 100 posibilidades para N . Veamos que no es necesario analizarlas una por una, por poder excluir la mayoría de los 100 casos posibles.

Si $S(N) \geq 6$, entonces $[S(N)]^2 \geq 36$, lo que significa que si la propiedad dada para N es cierta, $S(N^2) \geq 36$ también. Pero esto requería que $N^2 \geq 9999$. Esto conduce a contradicción, porque el valor mayor posible de N es 99, y en este caso es sólo $N^2 = 99^2 = 9801 < 9999$. Por consiguiente, no necesitamos buscar cualquier N , tal que $S(N) \geq 6$. Más precisamente, no es necesario buscar las soluciones del problema con N en los intervalos $[6,9]; [15,19]; [24,29]; [33,39]; [42,49]; [51,99]$. Así, quedan sólo 21 casos en los que es fácil comprobar si son solución o no. Después de analizar estos casos separadamente, hallamos que sólo 13 de ellos, tienen la propiedad de que $[S(N)]^2 = S(N^2)$. Las 13 soluciones resultan ser:

$$N = 00, 01, 02, 03, 10, 11, 12, 13, 20, 21, 22, 30, 31.$$

2. Ecuaciones Diofánticas

Presentamos en esta sección algunas de las ecuaciones diofánticas de tipo elemental que fueron publicadas.

2.1 Ecuaciones diofánticas algebraicas

Problema 7. El primer problema original que me fue publicado en la revista *Cruce Mathematicorum*, fue en 1989, Volumen 15, nº 4 (abril 1989), pág.110, con el número 1435. La solución de C. Festraest-Hamoir, indicada a continuación fue publicada en el Volumen 15, nº 10 (diciembre 1989), págs. 185-186.

Hallar todos los pares de enteros x, y tales que

$$(xy - 1)^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2.$$

Solución. Es claro que la ecuación dada es simétrica en las variables x, y . Haciendo el cambio de variables $X = x + 1, Y = y + 1$, la ecuación queda así:

$$(XY - X - Y)^2 = X^2 + Y^2,$$

$$XY(XY - 2X - 2Y + 2) = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X = 0 \\ 0 \\ Y = 0 \\ 0 \\ XY - 2X - 2Y + 2 = 0 \end{array} \right\}$$

(1) $X = 0 \Rightarrow x = -1, y \in Z,$

(2) $Y = 0 \Rightarrow y = -1, x \in Z,$

(3) $XY - 2X - 2Y + 2 = 0, \Leftrightarrow Y = \frac{2X - 2}{X - 2} = 2 + \frac{2}{X - 2}.$

Ahora bien:

$$Y \in Z \Leftrightarrow X - 2 = \pm 1 \text{ ó } X - 2 = \pm 2 \Leftrightarrow X = 3 \vee X = 1 \vee X = 4 \vee X = 0.$$

Para $X = 3$, obtenemos $Y = 4$; $x = 2, y = 3$;
 para $X = 1$, “ $Y = 0$; (véase (2));
 para $X = 4$, “ $Y = 3$; $x = 3, y = 2$;
 para $X = 0$, “ $Y = 0$; (véase (1))

Problema 8. En *Function*, Vol. 20, Parte 4 (agosto 1996), pág. 144 aparece propuesto el problema siguiente, con el n° 20.4.4. La siguiente solución, debida al Editor de la sección de problemas de dicha revista, apareció en su Vol. 21, Parte 1 (febrero 1997), pág.36.

Hallar las soluciones en enteros positivos de la ecuación

$$x + y + xy = x^2 + y^2.$$

Este problema puede ser tratado de distintas maneras. Una es esta. Hagamos el cambio de variables, $u = x + y$ y $v = x - y$. Entonces, siendo u es un número natural y v es un número entero, se tiene $x = \frac{u+v}{2}, y = \frac{u-v}{2}$. Sustituyendo en

la ecuación dada, operando y simplificando, llegamos a $4u = u^2 + 3v^2$. Completando cuadrados con respecto a u , esta ecuación, queda

$$4 = (u - 2)^2 + 3v^2.$$

De ahí deducimos que $3v^2 \leq 4$, y por tanto $v^2 \leq \frac{4}{3}$. Ya que v es un entero, v es

igual a $-1, 0$ ó 1 . Si $v = -1$ entonces o bien $u = 1$, que hace que $x = 0, y = 1$, o bien $u = 3$, que nos da la solución $x = 1, y = 2$. Si $v = 0$, entonces o bien $u = 0$ o bien $u = 4$; de $u = 0$, obtenemos $x = 0, y = 0$, y de $u = 4$, obtenemos la solución $x = 2, y = 2$. Si $v = 1$ entonces o bien $u = 1$ o bien $u = 3$; para $u = 1$, no hay solución y si $u = 3$, tenemos la solución $x = 2, y = 1$. Las únicas soluciones válidas de la ecuación son $(1,2), (2,2)$ y $(2,1)$, que son simétricas, ya que la ecuación lo era en las incógnitas x e y .

Problema 9. En la revista *CruX* aparece enunciado el siguiente problema, similar al anterior, con el número 2268.

Hallar todas las soluciones de la ecuación diofántica

$$2(x + y) + xy = x^2 + y^2.$$

La solución que se publica, debida a Sam Baethege, es la siguiente.

Sea $y = rx$, con r racional. Al sustituir en la ecuación dada llegamos a la ecuación de segundo grado en r :

$$r^2 x^2 - r(x^2 + 2x) + (x^2 - 2x) = 0.$$

Resolviendo en r obtenemos:

$$r = \frac{x + 2 \pm \sqrt{-3x^2 + 12x + 4}}{2x}.$$

El discriminante de la solución anterior, es decir, $16 - 3(x - 2)^2$, ha de ser el cuadrado perfecto de un número entero. Como x debe ser entero positivo, las únicas soluciones posibles son $(x, r) = (4, 1), (4, 1/2), (2, 2)$. Y como $y = rx$, se tienen las soluciones siguientes de la ecuación dada:

$$(x, y) = (4, 4), (4, 2), (2, 4)$$

Nota: El Grupo de resolución de problemas *Skidmore* dió una solución muy curiosa.

Problema 10. En la revista *Crux Mathematicorum*, Volumen 25 (1997), pág. 364, aparece propuesto el problema siguiente, resuelto en el Volumen 26 (1998), págs. 436-437.

Sean x, y números reales. Hallar todas las soluciones de la ecuación

$$\frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \sqrt{xy} + \frac{x+y}{2}$$

Se trata de una igualdad en que intervienen las medias armónica, geométrica, aritmética y cuadrática. La solución que presentamos se debe a *N. Dergiades*. Denotemos

$$A = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}}, \quad B = \sqrt{xy}.$$

Entonces se tiene: $2(A^2 + B^2) = (x + y)^2$, $2(A^2 - B^2) = (x - y)^2$. De este modo, la ecuación dada, se transforma así:

$$\begin{aligned} A - B &= \frac{x+y}{2} - 2\frac{xy}{x+y} \quad \text{o} \\ 2\frac{(A^2 - B^2)}{A+B} &= \frac{(x-y)^2}{x+y} \\ \frac{(x-y)^2}{A+B} &= \frac{(x-y)^2}{x+y}. \end{aligned}$$

Lo que nos da, o bien $(x - y)^2 = 0$ (que implica que $x=y$), o bien $A+B = x+y$.
En este caso:

$$A + B = x + y \Leftrightarrow (A + B)^2 = 2(A^2 + B^2) \Leftrightarrow (A - B)^2 = 0 \Leftrightarrow A = B \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} = \sqrt{xy} \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Nota: Este problema ha aparecido recientemente en un foro de problemas ruso.

Problema 11. En la revista alemana “Die \sqrt{WURZEL} ” aparece un problema (nº 21) relacionado con el anterior, propuesto por el Prof. Heinz-Jurgen Seiffert.

Probar que para todos los números reales x, y con $xy > 0$ verifican la desigualdad

$$\frac{2xy}{x + y} + \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \sqrt{xy} + \frac{x + y}{2}$$

¿Cuándo es cierta la igualdad?

2.2 Ecuaciones diofánticas trascendentes

Vamos a comenzar con un resultado previo que se utiliza en las distintas soluciones que se dan en los problemas que siguen.

Teorema. Si α y β son números reales positivos, tales que $\beta > \alpha \geq e$, entonces $\alpha^\beta > \beta^\alpha$.

Demostración: La función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, para $x > 0$, es continua e infinitas veces

diferenciable, es estrictamente creciente si $0 < x < e$, alcanza un máximo absoluto en $x = e$, y decrece estrictamente para $x > e$. En efecto, como su derivada primera

es $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, $f'(x) = 0$ si y solo si $\ln x = 1$, o sea, $x = e$, y además,

$f'(x) > 0$, para $x < e$, y $f'(x) < 0$, para $x > e$. Para probar el teorema basta

tener en cuenta la monotonía de la función $f(x)$, ya que $\frac{\ln \alpha}{\alpha} > \frac{\ln \beta}{\beta}$ para $x > e$.

Multiplicando ambos miembros por $\alpha\beta$ y operando, resulta $\alpha^\beta > \beta^\alpha$.

Problema 12. En la revista *Function*, Volumen 16, Parte 1 (Febrero 1992), pág. 30, aparece propuesto el problema 16.1.1, en cuya solución, debida a *Seung-Jim Bang*, que aparece en las págs. 120-121, se utiliza el teorema anterior.

Siendo enteros x e y con $y \geq x > 0$: resolver la ecuación $y - x = y^x - x^y$.

Solución: Notemos que $(x,y)=(x,x)$, $(x,y)=(1,y)$ son dos soluciones de la ecuación. Para el valor $x=2$, el valor $y=3$ da una solución de la ecuación $y - 2 = y^2 - 2^y$. Como $y^2 - 2^y \leq 0$ siempre que $y \geq 4$, no hay solución $(2, y)$ para $y \geq 4$. Sea ahora $y \geq x + 1 \geq 4$, y consideremos la función $f(x) = x \ln y - y \ln x$. Como $\frac{x}{\ln x} \leq x + 1 \leq y$, la derivada f' (para x constante) de la función f resulta ser

$$f'(y) = \frac{x}{y} - \ln x \leq 0. \text{ De aquí, que } f(y) \leq f(x+1) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x.$$

Y por lo tanto

$$f(y) \leq x[\ln(x+1) - (x+1) \ln x] - \ln x. \quad (1)$$

Consideremos ahora la gráfica de la función g definida por $g(t) = \ln t$ entre las abscisas x y $x + 1$. En cierto punto $(a, g(a))$, con $x < a < x + 1$, la gráfica de esta función (aplicando el teorema del valor medio del cálculo diferencial), tendrá una tangente paralela a la cuerda determinada por los puntos $(x, g(x))$ y $(x+1, g(x+1))$. Como la cuerda y la tangente tienen la misma pendiente que $g(x+1) - g(x) = g'(a)$, es decir, $\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{a}$. Entonces, de acuerdo con

(1), se tiene $f(y) \leq \frac{x}{a} - \ln x < 1 - \ln x < 0$. De aquí $y^x < x^y$ siempre que se

verifique $y \geq x + 1 \geq 4$. En definitiva las soluciones de la ecuación dada son las siguientes: (x, y) son $(2,3)$, (t,t) y $(1,t)$, donde t es un entero arbitrario.

Problema 13. En la revista *Mathematical Gazette* (1994), hemos propuesto el siguiente problema (78H), pág.199, y lo hemos resuelto (págs.133-134).

Siendo x, y enteros positivos y distintos, determinar todas las soluciones de la ecuación diofántica $y^x - x^y = y^2 - x^2$.

La respuesta es que esta ecuación no tiene solución para y distinto de x .

Nota: A esta misma conclusión llega Nick Lord en la forma siguiente.

Por simetría, podemos suponer que $1 \leq y \leq x$. Entonces tenemos :

$$y^x - x^y > y^x - x^x = (y-x)(y^{x-1} + xy^{x-2} + \dots + x^{x-2}y + x^{x-1}) \geq \\ \geq (y-x)(y+x) = y^2 - x^2,$$

ya que $y^{x-1} \geq y$, $x^{x-1} \geq x$.

Problema 13. F. Gerris resuelve el problema más general siguiente:

Siendo x, y, z enteros positivos, distintos dos a dos, resolver $y^x - x^y = y^z - x^z$.

Llega a probar que sus únicas soluciones son $(x, y, z) = (2, 3, 1)$ y $(x, y, z) = (3, 2, 1)$.

2.2.1 Una ecuación diofántica simétrica

Problema 14. En la revista *CJM* hemos propuesto y resuelto la siguiente ecuación diofántica de tipo exponencial (nº 476).

Resolver la ecuación diofántica $y^x - x^y = y^z - x^z$, con x, y, z positivos, x distinto de y .

Solución. La solución oficial indicada se debe a Thomas Jager y al estudiante Kevin Ford (mayo 1992).

Las soluciones son las ternas: $(x, y, z) = (1, y, 1)$ con $y > 1$; $(x, y, z) = (x, 1, 1)$ con $x > 1$; $(2, 3, 1)$ y $(3, 2, 1)$. Sin pérdida alguna de generalidad, por simetría en las variables x, y , podemos suponer que $y < x$. Entonces $y^x - x^y = y^z - x^z < 0$; por tanto $\frac{\ln y}{y} < \frac{\ln x}{x}$. Como la función $f(t) = \frac{\ln t}{t}$ es continua e infinitamente derivable en su dominio $(0, +\infty)$, y en $(e, +\infty)$ es estrictamente decreciente, deducimos que $y < e$ y por tanto que $y = 1$ o $y = 2$. Si $y = 2$, $\frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 4}{4}$, que implica $x < 4$, esto es, $x = 3$. Y ya que $2^3 - 3^2 = 2^z - 3^z$, $z = 1$. Finalmente, si $y = 1$, $1 - x = 1 - x^z$ y $x > 1$, lo que implica $z = 1$.

2.2.2 Una ecuación diofántica asimétrica

Problema 15. En la revista *CJM* hemos propuesto y resuelto la siguiente ecuación diofántica de tipo exponencial (nº 752).

Hallar todas las soluciones de la ecuación diofántica $x^y - y^x = x + y$, siendo x e y enteros positivos.

Solución 1. La solución indicada a continuación se debe a Xiaoshen Wang.

Primero, es obvio que ni x ni y pueden ser 1 y además x e y no pueden ser iguales. Sea $g(x, y) = x^y - y^x - x - y$. Por simple inspección vemos que $g(2,5) = 0$. Veamos a continuación que es la única solución posible de la ecuación dada. Notemos que $g(2,y) > 0$, para $y > 5$; $g(2,y) < 0$, para $2 < y < 5$; y $g(x,2) < 0$, para todo $x > 0$. Consideremos la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, que es continua e infinitas veces derivable en su dominio, $(0, +\infty)$. Como anteriormente se indicó, $e < y < x$ implica $f(x) < f(y)$. Deducimos de ello $x^y < y^x$ y que $g(x,y) < 0$, si $e < y < x$. Por lo tanto, si (x,y) es otra solución distinta de $(2,5)$, entonces ha de ser $x < y$. Para $x \geq 3$, se tiene

$$\begin{aligned} g(x, x+1) &= x^{x+1} - (x+1)^x - 2x - 1 = \\ &= xx^x - \left[x^x + x^x + x^{x-1} \frac{x-1}{2!} + \dots + z^2 + 1 \right] - 2x - 1 > x^x - x^2 - 2x - 2. \end{aligned}$$

Esta última expresión es positiva, pues

$$\frac{d}{dx}(x^x - x^2 - 2x - 2) = x^x \ln x + x^x - 2x - 2 > (x^x - 3) + (x^2 - 2x + 1) > 0.$$

ya que

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x^y \ln x - xy^{x-1} - 1 = (x^y \ln x - y^x \ln x) + (y^x - xy^{x-1}) - 1,$$

de donde se deduce $\frac{\partial g}{\partial y} > 0$, lo cual implica $g(x,y) > 0$, para $3 \leq x < y$. De este modo, comprobamos que $(2,5)$ es la única solución, para $g(x,y) = 0$.

Solución 2. Las soluciones dadas por el autor de este artículo para todos estos problemas se basan en los siguientes lemas.

(En primer lugar, es obvio que si x e y son dos números enteros cualesquiera, tales que $y-x > 1$, entre ellos hay, a lo más, un número finito de números enteros).

Lema 1. Si x es un número real positivo, entonces $1 + x < e^x$.

La demostración se basa en el estudio de la monotonía de la función real de variable real continua e infinitas veces diferenciable $f(x) = e^x - 1 - x$, para $x \geq 0$.

Lema 2. Si x es un entero positivo, entonces

$$a) \quad 2x + 1 < 2^x \quad \text{si } x \geq 3.$$

$$b) \quad x^2 \leq 2^x \quad \text{si } x \geq 4.$$

En efecto, la parte a) se prueba por inducción, y la parte b) se deduce de a).

2.2.3 Otra ecuación diofántica trascendente

Problema 16. La cuestión que resuelvo a continuación fue publicada en un artículo en el que expongo la solución de una nueva ecuación diofántica por medio de la técnica que empleé en la resolución de los problemas anteriores.

La ecuación diofántica

$$y^x - x^y = k(y^z - x^z) \quad (1)$$

donde k, x, y, z son enteros positivos y x, y, z son distintos dos a dos, no tiene solución para $k > 1$. Para $k = 1$ las únicas soluciones son $(2, 3, 1)$ y $(3, 2, 1)$.

Solución. Supongamos que (x, y, z) es una solución en enteros positivos de (1). Por simetría respecto de las variables x e y , podemos admitir que $y > x$. Por tanto, $y = x + t$, donde $t \geq 1$, es un entero. De (1) y del lema 1, obtenemos

$$\begin{aligned} 0 < k \frac{(y^z - x^z)}{x^y} &= \frac{y^x}{x^y} - 1 = \frac{(x + y)^z - x^z}{x^{x+t}} = \\ &= \frac{(x + t)^x}{x^x} \frac{1}{x^t} - 1 = \left(1 + \frac{t}{x}\right)^x \frac{1}{x^t} - 1 < \left(\frac{e}{x}\right)^t - 1 \end{aligned}$$

lo que implica necesariamente que $e/x > 1$, y por tanto $x = 1$ o $x = 2$. Si $x = 1$, la ecuación (1) se reduce a

$$y - 1 = k(y^z - 1) = k(y - 1)(y^{z-1} + y^{z-2} + \dots + y + 1). \quad (2)$$

y, por tanto, $y = 1$ es una solución de (2), para todo $z \geq 1$, pero esta posibilidad está excluida por la hipótesis de ser $y > x$. Pero, si $y > 1$, entonces de (2) resulta

$$1 \geq k(y^{z-1} + y^{z-2} + \dots + y + 1),$$

y esta desigualdad es imposible para todo $z \geq 1$, cuando $k > 1$. Pero, si $k = 1$, esto implica que sea $z = 1$, lo que no es posible, ya que x debe ser distinto de z , por hipótesis. Ahora bien, si $x = 2$, la igualdad (1) se reduce a

$$y^2 - 2^y = k(y^z - 2^z) \quad (3)$$

Como, por hipótesis, $y > x = 2$, entonces $y^z - 2^z > 0$, para todos los enteros positivos z . Pero el lema 2 b) aplicado a (3), implica que $y \leq 3$. Así resulta $y = 3$, y la igualdad (3) se reduce a

$$k(3^z - 2^z) = 3^2 - 2^3 = 1,$$

lo que es imposible para todo $z \geq 1$, cuando $k > 1$. Pero, si $k = 1$ deducimos que $z = 1$. Por consiguiente las únicas soluciones posibles de (1), con $k = 1$, son (2,3,1) y (3,2,1), mientras que para $k > 1$, la ecuación (1) no tiene soluciones.

Agradecimientos

Deseo dar las gracias a mi amigo el Prof. D. Julio Fernández Biarge, por darme nuevas ideas y sugerencias, para mejorar de forma considerable este trabajo en su contenido y en su forma.

Bibliografía

Aparte de las revistas citadas en los problemas aquí resueltos, hemos usado algunos libros de referencia, indicados a continuación.

[1] L.E. Dickson, *History of Number Theory*, Vol. II. Chelsea. New York, 1952.

[2] I. Niven, H. Zuckerman, *Introducción a la Teoría de Números*. Limusa-Wiley. Mexico, 1985.

Una caja informática de herramientas matemáticas

Alfonsa García, Francisco García

Universidad Politécnica de Madrid.

Departamento de Matemática Aplicada. E.U. Informática

alfonsa.garcia@eui.upm.es, gmazario@eui.upm.es

Gerardo Rodríguez

Universidad de Salamanca.

Departamento de Matemática Aplicada. E.P.S. de Zamora

gerardo@usal.es

Victoria Rodríguez

IES La Ería. Oviedo

victoria@educastur.princast.es

Agustín de la Villa

Universidad Pontificia Comillas.

Departamento de Matemática Aplicada y Computación. ETSI (ICAI)

Universidad Politécnica de Madrid

Departamento de Matemática Aplicada. E.U.I.T. Industrial.

avilla@upco.es

Abstract

In this paper an approach to one teaching model based on competences will be analyzed. We promote the use of a Computer Algebra System and we encourage the students to design their own toolbox, implementing elementary algorithms to be used further (in Mathematics or other related topics). As an example we show a toolbox with several tools for the study of planar geometry to be used in the first year in High School level.

Dedicado a *Eugenio Roanes Macías*,
gran amante de la Educación Matemática y de la Geometría

Resumen

Se presenta en este trabajo una propuesta de actividad para un modelo de aprendizaje basado en competencias y con apoyo de herramientas informáticas. Se sugiere que el estudiante diseñe y elabore una “caja de herramientas” con la implementación, en un sistema informático, de algoritmos matemáticos elementales, que podrá utilizar posteriormente en la resolución de problemas tanto de matemáticas como de otras asignaturas. Como ejemplo se propone una caja que contiene herramientas relacionadas con aspectos de la geometría del plano estudiados en primer curso de Bachillerato.

Introducción

En la actualidad se nos está pidiendo a los profesores que cambiemos el modelo de enseñanza tradicional para adaptarnos al “aprendizaje basado en competencias”. Se trata de definir lo que tiene que ser capaz de hacer el estudiante, tras haber cursado una determinada materia y diseñar una serie de actividades que le permitan alcanzar las competencias marcadas.

El cambio puede ser un fracaso si no se pone en ello una buena dosis de esfuerzo, imaginación, sentido común e ilusión. Hay que contar con la inercia del sistema y la dificultad para diseñar actividades efectivas, ya que los profesores, en general, tenemos una gran experiencia en preparar y dar clases expositivas, más o menos participativas, y hemos trabajado mucho para encontrar la forma más adecuada de introducir y presentar los conceptos y resultados, pero no tenemos experiencia en dirigir actividades de aprendizaje autónomo.

Además, parece que el uso de la tecnología se está imponiendo en mayor medida en el propio domicilio que en las aulas, tanto para profesores como para estudiantes (ver [4]). Casi todos los profesores y estudiantes de bachillerato hacen uso privado de Internet. Pero pocas planificaciones docentes incluyen un uso dirigido de tecnologías.

Por ejemplo, cuando se encarga a los alumnos la realización de trabajos que incluyen la búsqueda de información sobre algún tema, sabemos que muchos de ellos se limitan a hacer un “copy & paste” de Wikipedia, a veces sin ni siquiera leerlo para ver si se adapta al guión propuesto. En ocasiones, los profesores “se defienden” de esto pidiendo que entreguen el trabajo escrito a mano (para asegu-

rarse de que al menos lo lean al copiarlo) o prohibiendo el uso de Internet. Pero lo interesante no sería esto, sino que se les dirija para hacer una verdadera labor de búsqueda, contraste de la información y elaboración propia del trabajo. Los profesores debemos asumir una tarea más: dirigir a los estudiantes para un uso adecuado de las herramientas tecnológicas.

Nuestra opinión es que estamos abocados a diseñar cursos de matemáticas en los que deben mezclarse: clases magistrales (teoría y problemas resueltos con detalle por el profesor), talleres de problemas y prácticas en el laboratorio (en los que el protagonista es el alumno) y actividades de trabajo dirigido, para que el alumno pueda alcanzar las competencias previstas. Las prácticas de laboratorio deben estar preparadas con unos objetivos claros. Nuestra propuesta es que el ordenador, con un sistema informático de cálculo matemático (Computer Algebra System o CAS) ayude a la realización automática de determinadas tareas en el proceso de resolución de problemas. Para ello, en ocasiones será adecuada la utilización de determinadas funciones o comandos que pueden venir incorporados al sistema o haber sido preparados por el profesor o contruidos por los propios estudiantes. En el CD que acompaña a [1] se pueden ver algunos ejemplos de cómo llevar a la práctica estas ideas.

Además, el nuevo modelo de enseñanza va encaminado a un trabajo más autónomo del estudiante, que le permite el acceso a las tecnologías informáticas fuera de las prácticas regladas, por lo que es imprescindible que adquiera la capacidad de hacer un uso óptimo de ellas. Se debe potenciar las ventajas que poseen los CAS: visualización, potencia de cálculo, posibilidad de experimentación, evitando los posibles efectos perniciosos como falta de sentido crítico ante la respuesta del ordenador, incapacidad de interpretar los resultados obtenidos, etc.

En cualquier caso, todas las actividades propuestas, para que sean efectivas, se deben diseñar sin perder de vista los objetivos pretendidos, teniendo en cuenta fundamentalmente a los estudiantes a los que van dirigidas.

1. Diseño de la caja de herramientas matemáticas

Las asignaturas de Matemáticas del bachillerato o las de los primeros cursos de Ingeniería tienen como principal objetivo iniciar al estudiante en el lenguaje de la Ciencia y Tecnología y capacitarle para el uso correcto de determinados algoritmos en la resolución de problemas.

Con frecuencia, los profesores nos quejamos de que los estudiantes no son capaces de utilizar fuera del contexto de la asignatura (por ejemplo en cursos sucesivos) las destrezas matemáticas supuestamente adquiridas en los cursos básicos. Tienen una especie de “pereza mental” que les impide recordar y utilizar lo que aprendieron y en muchas ocasiones tampoco disponen de un modo rápido y eficaz de localizar la información y los métodos adecuados.

Los profesores que hacen uso en clase de algún CAS, a veces, piden a los estudiantes que definan algunas utilidades que les permiten automatizar determinadas tareas sencillas, como por ejemplo definir una función para calcular la tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto y usarla posteriormente en algún problema. Pero, en general, en estos casos no pretenden otra cosa que ayudarles a entender el algoritmo correspondiente y no aspiran a que el estudiante diseñe un recurso propio ni a que utilice en cursos sucesivos las funciones implementadas.

Una actividad formativa, a la vez que útil, es proponer a los estudiantes que construyan su propia “Caja de herramientas” bien ordenada, para la resolución de problemas matemáticos. Esta caja de herramientas no será otra cosa que un fichero o colección de ficheros de utilidades programadas en el lenguaje de programación propio de algún CAS (Derive, Maple, Maxima) o incluso en alguna calculadora con capacidades simbólicas o gráficas como la TI92 o la Casio Class-Pad 300.

El acceso a la caja de herramientas tendrá carácter formativo o meramente instrumental dependiendo de que la programación de la herramienta utilizada sea o no visible al alumno. En el primer caso, el alumno puede repasar y ejecutar la herramienta y en el segundo caso simplemente ejecutarla. En un primer nivel, parece más aconsejable la utilización de un sistema informático que permita en todo momento que el alumno conozca qué está haciendo la herramienta que ha seleccionado.

El profesor deberá proponer una serie de herramientas imprescindibles, de acuerdo con la asignatura correspondiente, que debe contener la caja. Los estudiantes deberán definir las funciones correspondientes, probarlas y añadir las que consideren oportunas. Además deberán completar el trabajo redactando un “breve manual de uso” de su fichero de utilidades.

Si han hecho una buena caja de herramientas, además de haber entendido bien los algoritmos, dispondrán de un recurso propio que podrán utilizar en otras asignaturas del mismo curso o de cursos sucesivos.

Antes de acabar las ideas generales sobre las cajas de herramientas es necesario poner de manifiesto que prácticamente cualquier CAS es una caja de herramientas muy completa y que sólo por comodidad de uso o como estrategia docente será necesario o conveniente construir nuevas utilidades o bien modificar las ya existentes, para adaptarlas a las necesidades específicas del usuario.

2. Una caja de herramientas geométricas

Tras leer el libro “La experiencia de descubrir en Geometría” de Miguel de Guzmán [2], que es un buen ejemplo de cómo usar una caja de herramientas geométricas básicas, para abordar problemas complejos, experimentar y descubrir propiedades, surge la idea de proponer a estudiantes de primer curso de bachillerato una caja de herramientas geométricas elementales, que se puede utilizar para contrastar analítica y gráficamente la resolución de algunos problemas de Matemáticas y también de Dibujo Técnico.

Algunas de las herramientas básicas podrían ser funciones para:

- dibujar un segmento o un triángulo,
- calcular la distancia entre dos puntos dados,
- calcular el ángulo de dos vectores,
- obtener el punto medio de dos puntos dados,
- obtener el simétrico de un punto respecto a otro dado,
- calcular la ecuación de la recta que pasa por dos puntos,
- calcular una paralela a una recta por un punto dado,
- calcular la paralela a una recta a una distancia dada,
- calcular la distancia de un punto a una recta,
- calcular la perpendicular a una recta por un punto dado,
- calcular la altura de un triángulo relativa a un lado,
- calcular la mediatriz de un segmento,
- calcular las ecuaciones de las medianas, las bisectrices o las alturas de un triángulo,
- calcular las coordenadas del baricentro, incentro, circuncentro y ortocentro de un triángulo,
- calcular el área de un triángulo a partir de las coordenadas de los vértices,

- obtener la ecuación de la circunferencia a partir del centro y el radio,
- obtener la ecuación de la circunferencia a partir del centro y uno de sus puntos,
- obtener la ecuación de la circunferencia a partir de su diámetro,
- calcular la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos,
- calcular la ecuación de la circunferencia inscrita o circunscrita a un triángulo, etc.

Para definir, por ejemplo en DERIVE, este tipo de funciones no hace falta ser experto; cualquier estudiante puede hacerlo, si conoce los conceptos, sin más que escribir las ecuaciones correspondientes. Es un buen ejercicio, ya que les ayuda a afianzar sus conocimientos y facilita la experimentación. En el ANEXO I se muestran algunas de dichas funciones.

Cada vez que en la resolución de un problema haya que hacer una construcción típica los estudiantes pueden guardar la función correspondiente en su caja de herramientas.

Por ejemplo, si se tiene en la caja de herramientas la función $\text{recta}(P, Q)$, que devuelve la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y la función $\text{punto_medio}(P, Q)$, que calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos P y Q , se puede definir una función para que calcule las medianas de un triángulo: $\text{mediana}(P, Q, R) := \text{recta}(P, \text{punto_medio}(Q, R))$. Ahora, definiendo tres puntos de coordenadas arbitrarias $P := [a, b]$, $Q := [c, d]$, $R := [e, f]$, se puede comprobar automáticamente que las tres rectas $\text{mediana}(P, Q, R)$, $\text{mediana}(Q, R, P)$ y $\text{mediana}(R, P, Q)$ se cortan en un punto (el baricentro) de coordenadas $[(a+c+e)/3, (b+d+f)/3]$.

A continuación, se puede incorporar a la caja de herramientas la función $\text{baricentro}(P, Q, R) := (P+Q+R)/3$, que permite obtener directamente las coordenadas de dicho punto.

Una característica de los problemas geométricos es que muchas veces se pueden abordar de distintas formas. Pero con frecuencia se renuncia a ello por la falta de tiempo y el tedio que puede producir el exceso de cálculos. También es frecuente que se resuelva el mismo problema en las asignaturas de Dibujo Técnico y Matemáticas con técnicas diferentes (geometría sintética en un caso y analítica en el otro). La caja de herramientas nos permite en muy poco tiempo aunar ambas construcciones obteniendo automáticamente dibujos y ecuaciones de los objetos geométricos que intervienen.

3. Ejemplos de uso de la caja de herramientas

3.1 Construir un cuadrado, dados dos vértices

Este problema tiene diferentes soluciones, según que los vértices A y B sean extremos de un lado del cuadrado o de la diagonal.

En un primer caso se obtiene una solución (y su simétrica correspondiente respecto del segmento AB) por el siguiente algoritmo (ver figura 1):

1. Se obtiene la circunferencia de diámetro AB.
2. Se halla la mediatriz del segmento AB y se elige uno de los puntos de intersección, O, con la circunferencia anterior.
3. Se hallan los simétricos de A y B respecto de O y esos son los otros dos vértices del cuadrado.

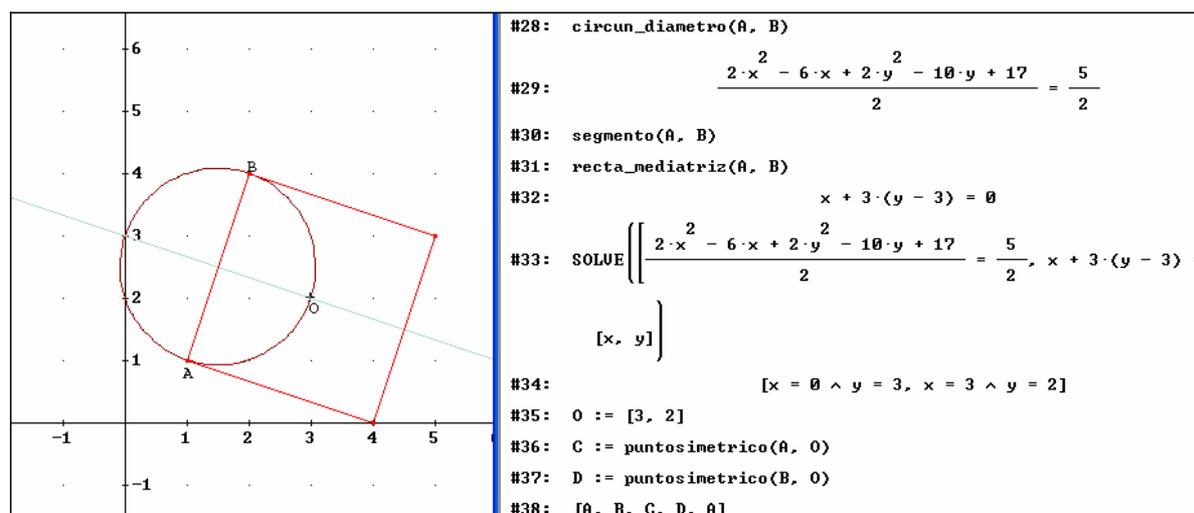


Figura 1: Construcción de un cuadrado a partir de un lado

En un segundo caso, se obtiene una solución (y su simétrica respecto del segmento AB) calculando las ecuaciones de los cuatro lados (ver figura 2).

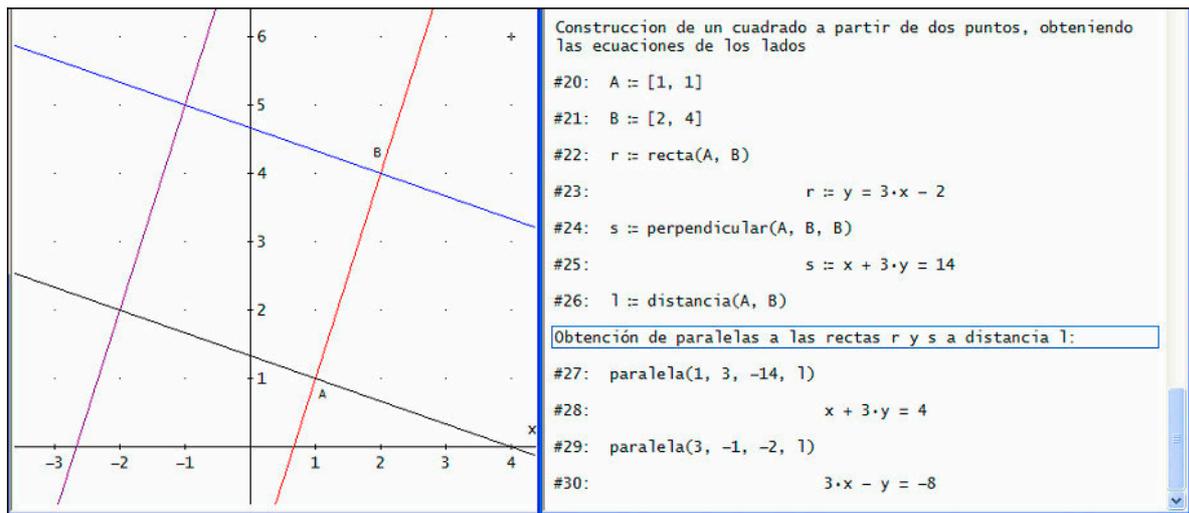


Figura 2: Ecuaciones de los lados del cuadrado de lado AB

En un tercer caso, si A y B son los vértices de la diagonal del cuadrado, para obtener los otros vértices se puede usar el siguiente algoritmo (ver figura 3):

1. Obtener la ecuación de la recta r , que pasa por A y B (diagonal del cuadrado).
2. Obtener Q, punto medio de A y B.
3. Obtener la ecuación de la recta s , perpendicular a r que pasa por Q.
4. Obtener la ecuación de la circunferencia c , de centro Q, que pasa por A.
5. Determinar los puntos de intersección de s y c , que son los otros dos vértices del cuadrado.

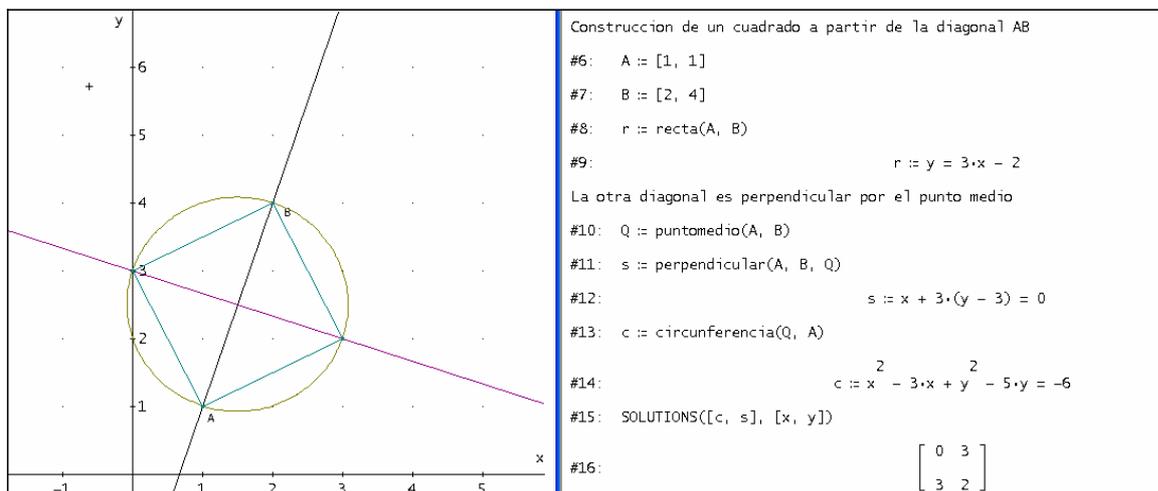


Figura 3: Construcción de un cuadrado de diagonal AB

3.2 Construir un pentágono regular a partir de un lado

Una construcción bastante elegante del pentágono regular, partiendo de uno de sus lados AB, es la que hace uso de que la razón entre la diagonal del pentágono regular y un lado es precisamente la razón áurea. Así, conocido el lado l se puede obtener la longitud de la diagonal $d = l \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y se pueden construir sendas circunferencias centradas respectivamente en A y B, y cuyo radio sea d . El vértice D estará en la intersección de dichas circunferencias. Una vez conocido D y el lado se pueden obtener los otros dos vértices (ver figura 4). Usando la caja de herramientas se puede hacer un seguimiento analítico y gráfico de esta construcción.

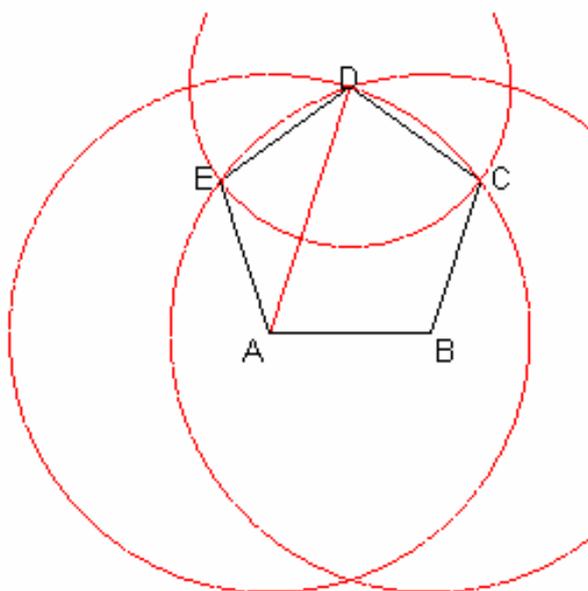


Figura 4: *Construcción de un pentágono regular*

4. Conclusiones

El uso de una caja de herramientas individualizada y acorde con las necesidades de cada estudiante permitirá a éste reforzar el proceso de aprendizaje. Con esta metodología los estudiantes participan de forma activa en el uso de los CAS y no se limitan a su uso como “caja negra”.

El artículo contiene una propuesta de uso de las herramientas informáticas para alumnos de Bachillerato, que sólo se ha probado de forma parcial, pero con resul-

tados satisfactorios. (Se incluye como anexo en las dos páginas siguientes, después de las Referencias)

5. Referencias

1. GARCÍA, A.; GARCÍA, F; LÓPEZ, A.; RODRÍGUEZ, G.; DE LA VILLA, A. *Cálculo I. Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable*, CLAG, Madrid, 2008.
2. GUZMÁN, M. *La experiencia de descubrir en Geometría*. Nivola, Madrid 2002.
3. LUELMO, M. J. *Construcciones geométricas: Una experiencia interdisciplinar de autoformación*. Epsilon, Rev. de la S.A.P.M. THALES, 38 (1997), págs.131-153.
4. PÉREZ, A. *El profesorado de matemáticas ante las tecnologías de la Informática y las Comunicaciones*. La Gaceta de la RSME vol. 9, n.2 (2006), págs. 512-544.

Anexo: caja de herramientas geométricas

Para introducir puntos, se da la lista de sus coordenadas. Por ejemplo, P:=[2,5]. Vamos a definir funciones que permiten calcular y dibujar objetos geométricos.

Distancia entre los puntos P y Q :

#1: distancia(P, Q) := |Q - P |

Segmento que une P y Q :

#2: segmento(P, Q) := [P, Q]

Triángulo de vértices P, Q, R :

#3: triangulo(P, Q, R) := [P, Q, R, P]

Punto medio de P y Q :

#4: puntomedio(P, Q) := (P + Q) / 2

Punto simétrico de P respecto de Q :

#5: puntosimetrico(P, Q) := 2 · Q - P

Ángulo formado por los segmentos PQ y QR :

#6: angulo(P, Q, R) := ACOS((P - Q) · (R - Q) / | P - Q | · | R - Q |)

Pendiente del segmento PQ :

#7: pendiente(P, Q) := (Q₂ - P₂) / (Q₁ - P₁)

Circunferencia de centro el punto P y que pasa por el punto Q :

#8: circunferencia(P, Q) := (x - P₁)² + (y - P₂)² = distancia(P, Q)²

Circunferencia de diámetro PQ :

#9: circunf_diam(P, Q) := circunferencia(puntomedio(P, Q), P)

Ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q :

#10: recta(P, Q) := (Q₁ - P₁) · (y - P₂) = (Q₂ - P₂) · (x - P₁)

Ecuación de la recta que pasa por el punto P y tiene pendiente m :

#11: rect_punto_pendiente(P, m) := y - P₂ = m · (x - P₁)

Ecuación de la recta paralela al segmento PQ y que pasa por el punto R :

#12: paralela(P, Q, R) := (Q₁ - P₁) · (y - R₂) = (Q₂ - P₂) · (x - R₁)

Recta perpendicular al segmento PQ que pasa por R
(la definición hace uso del producto escalar) :

#13: perpendicular(P, Q, R) := ([x, y] - R) · (Q - P) = 0

Ecuación de la mediatriz del segmento PQ (perpendicular por el punto medio) :

#14: recta_mediatrix(P, Q) := perpendicular(P, Q, (P + Q) / 2)

Ecuación de la mediana del triángulo PQR que parte del vértice P :

#15: mediana(P, Q, R) := recta(P, puntomedio(Q, R))

Coordenadas del baricentro del triángulo de vértices P, Q, R :

#16: baricentro_tria(P, Q, R) := (P + Q + R) / 3

Coordenadas del ortocentro del triángulo de vértices P, Q, R :

#17: ortocentro(P, Q, R) := SOLUTIONS([([x, y] - R) · (Q - P) = 0, ([x, y] - P) · (Q - R) = 0], [x, y])

EL MODULOR

Un instrumento de medida

M^a Francisca Blanco Martín

Dpto. Matemática Aplicada, E.T.S. Arquitectura, Univ. de Valladolid
fblanco@maf.uva.es

Abstract

The Modulor is a measuring system based on the human body measurements and the mathematics, the double unit, the Fibonacci numbers, and the golden ratio. Le Corbusier described it as a "range of harmonious measurements to suit the human scale, universally applicable to architecture and to mechanical things." Le Corbusier selected the solar plexus, the top of the head, and the tips of the fingers of an extended arm as the main anatomical positions. The distance from the ground to the solar plexus is the golden section of the distance between the ground and the top of the head.

Una pequeña aportación como reconocimiento y agradecimiento al profesor Eugenio Roanes Macías, por toda la enseñanza de él recibida

Introducción

El Modulor es una medida armónica a la escala humana aplicable universalmente a la Arquitectura y a la Mecánica, según reza el subtítulo del ensayo que sobre el Modulor escribió su autor, Le Corbusier.

Situemos históricamente al autor de El Modulor; Le Corbusier (1887- 1965), nace en Suiza, pero desarrolla su actividad como arquitecto fundamentalmente en París, donde abre un estudio en 1922. Su primera actividad y periodo más productivo como arquitecto se desarrolla en el periodo de entreguerras.

Por una parte, la desolación producida por la I Guerra Mundial y como consecuencia la necesidad de una reconstrucción, y por otra, los avances de la mecánica, y como una consecuencia de ello el aumento de las comunicaciones,

hacen conveniente una producción en serie, utilizando patrones que permitan poner en consonancia los distintos sistemas de medidas, métrico y anglosajón.

Le Corbusier tenía la idea de que la medida del hombre era la básica, la imprescindible para la construcción y el diseño de cualquier elemento. Él pretendía conseguir:

"... instrumento de trabajo fundado en la estatura humana y en la Matemática, logrado por cálculos sencillos y riquísimo, aplicable lo mismo a los planes de una vivienda que a los de una unidad de alojamiento, tanto a una manufactura como a los envases y recipientes, al arte tipográfico, a la planificación urbanística, a todos los objetos de uso y consumo, desde el equipo de cocina hasta las futuras catedrales de un mundo que busca la unidad" [4].

En 1918 funda y dirige la revista "L'Esprit Nouveau", en colaboración con Ozenfant y Dermée, comienza a utilizar el sobrenombre de Le Corbusier (su verdadero nombre es Charles Edouard Jeanneret-Gris). En este primer número escribe frases como:

"Los grandes problemas de la construcción moderna serán resueltos por la geometría. El ingeniero, inspirado por la ley de economía y conducido por el cálculo nos pone de acuerdo con el universo, logra la armonía. La arquitectura es el juego inteligente y magnífico de los volúmenes reunidos bajo la luz."

Le Corbusier tenía la idea de que la medida del hombre era la básica, la imprescindible para la construcción y el diseño de cualquier elemento, el sistema anglosajón de pies y pulgadas tenía que ver con las medidas humanas, mientras que el sistema métrico nada tenía que ver con ellas, por ello él pretendía construir un sistema de medidas que armonizase ambos sistemas.

Entre los años 1942 y 1948 desarrolló el Modulor, un sistema de medidas en el que cada magnitud se relaciona con las demás según la proporción áurea y a la vez se corresponde con las medidas del cuerpo humano. Le Corbusier retomó el antiguo ideal de establecer una relación directa entre las proporciones de los edificios y las del hombre. El libro titulado El Modulor se publicó en 1950 y en 1955 publicó el Modulor 2.

1 Construcción del sistema de proporciones

En el tiempo que transcurre desde 1918 a 1920 y como consecuencia de sus observaciones, tanto en Francia como en sus viajes al extranjero, Le Corbusier constata que en las arquitecturas armoniosas de muy distintos lugares:

1.- Las obras de arte están regidas por reglas

- 2.- El ángulo recto dirige determinadas composiciones arquitectónicas, pictóricas, etc.
- 3.- Los trazados reguladores ordenan las composiciones.
- 4.- La sección áurea como recurso matemático fundamental.
- 5.- La altura entre techo y suelo, tiene en cuenta la altura de un hombre con el brazo levantado.
- 6.- La necesidad de buscar un “enrejado” de proporciones que será la regla de la obra.

A partir de este momento comienza a investigar y a desarrollar diversos estudios y proyectos que relacionen las medidas del hombre con los diversos elementos que se utilizan tanto en la vivienda como en la fábrica.

Con estas ideas y la ayuda de sus colaboradores y tras varias aproximaciones, que presentaremos a continuación, acabará ideando El Modulor, que Le Corbusier define:

“El *Modulor* es un aparato de medida fundado en la estatura humana y en la Matemática. *Un hombre- con- el- brazo- levantado da los puntos determinantes de la ocupación del espacio, -el pie, el plexo solar, la cabeza, la punta de los dedos estando levantado el brazo- tres intervalos que definen una serie de secciones áureas de Fibonacci; y por otra parte, la Matemática ofrece la variación más sencilla y más fuerte de un valor: lo simple, el doble y las dos secciones áureas*” [4].

Como consecuencia de la ocupación alemana de París y la separación de Francia en dos, en 1940, Le Corbusier cierra el estudio de París, dedicándose durante los 4 años siguientes a investigar y escribir.

En 1943 Hanning colaborador de Le Corbusier debía marcharse a Saboya y le pide trabajo al maestro: “Déme una tarea para llenar mis horas vacías”. La propuesta de Le Corbusier es:

“*Tome el hombre con el brazo levantado de 2,20 m de alto, inscribalo en dos cuadrados superpuestos de 1,10 m, móntelo a caballo sobre los dos cuadrados y el tercer cuadrado que resulte le dará una solución. El lugar del ángulo recto debe poderle ayudar a colocar el tercer cuadrado.*”

“*Con este enrejado, regido por el hombre instalado en su interior, estoy seguro de que usted llegará a una serie de medidas que pondrán de acuerdo la estatura humana (el brazo levantado) y la matemática.*” [4]

El 25 de agosto del mismo año, Hanning da la siguiente respuesta.

1.1 Construcción de Hanning

Se traza el cuadrado ABCD, de lado $a = 1,10$ m (figura 1), y a partir de él se construye el rectángulo áureo CBEF (figura 2):

En el cuadrado ABCD se traza la mediatriz MN de los lados AB y CD. El segmento AM, hipotenusa del triángulo rectángulo ADM,

$$AM = MF = \sqrt{AD^2 + DM^2} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2} a.$$

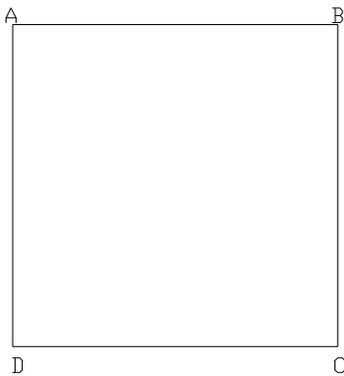


Figura 1. Cuadrado

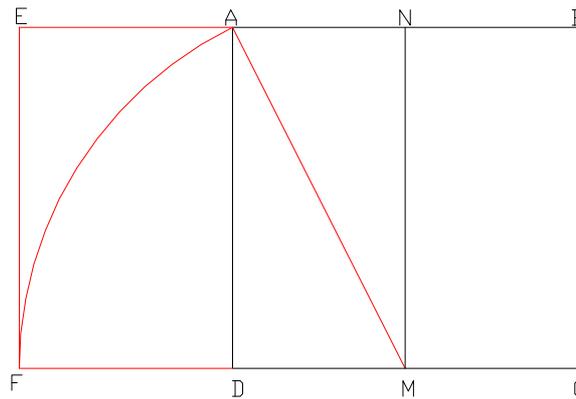


Figura 2. Rectángulo áureo

Con centro en M y radio MA se traza el arco de circunferencia hasta la intersección con la prolongación del lado DC, obteniéndose el punto F:

$$CF = CM + MF = \frac{1}{2} a + \frac{\sqrt{5}}{2} a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a = \varphi a.$$

Se traza la perpendicular a CF por F hasta la intersección con la prolongación de AB, obteniendo el punto E.

El rectángulo BCFE tiene proporción áurea, $\frac{CF}{BC} = \frac{\varphi a}{a} = \varphi$

A partir del cuadrado inicial se construye el rectángulo diagonal: se traza el arco de circunferencia con centro D y radio $DB = \sqrt{2} a$, desde el punto B hasta la intersección con la prolongación de DC, obteniendo el punto H.

El rectángulo AGHD, figura 3, tiene proporción $\frac{DH}{AD} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$

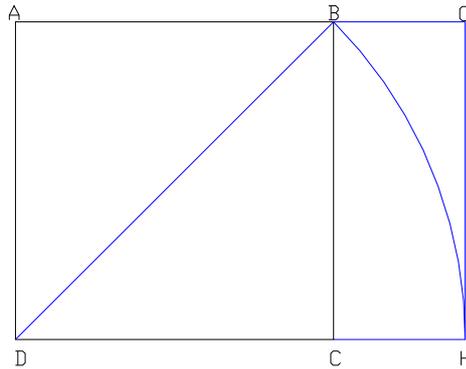


Figura 3. *Rectángulo diagonal*

Resumiendo, a partir del cuadrado ABCD se han construido a la izquierda su prolongación áurea y a la derecha su prolongación diagonal, obteniendo el rectángulo EGHF de la Figura 4.

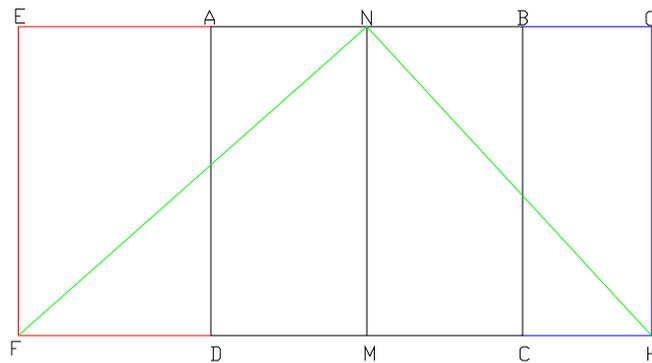


Figura 4. *Construcción de Hanning*

En el rectángulo EGHF se trazan las rectas FN y NH, que según Hanning determinan el ángulo recto. El error de esta construcción es que dicho ángulo no es recto, como veremos a continuación.

Si el ángulo FNH fuese recto, el triángulo FNH sería rectángulo, y por el teorema de la altura, se verificaría:

$$(MN)^2 = (MF).(MH) \quad (1)$$

$$MF = \frac{\sqrt{5}}{2}a, \quad MH = DH - DM = \sqrt{2}a - \frac{a}{2} = \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)a$$

$$MF.MH = \frac{\sqrt{5}}{2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)a^2 \quad \text{y} \quad MN^2 = a^2$$

La relación (1) no se verifica puesto que $\frac{\sqrt{5}}{2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right) \neq 1$

Desigualdad que demuestra que FNH no es un ángulo recto. Luego la construcción a la que llegó Hanning en Agosto de 1943 no es válida, no resuelve el problema propuesto por Le Corbusier, si bien será útil para posteriores investigaciones.

1.2 Construcción de Maillard

En Diciembre de 1943, otra colaboradora de Le Corbusier, Elisa Maillard, realiza una nueva construcción, que aunque tampoco responde exactamente al problema planteado, se aproxima más que la de Hanning, y Le Corbusier la patentó con el nombre de *Modulor*.

Se traza el cuadrado ABCD, de lado unidad, (figura 5) y a partir de él se construye el rectángulo áureo ADGH (figura 6).

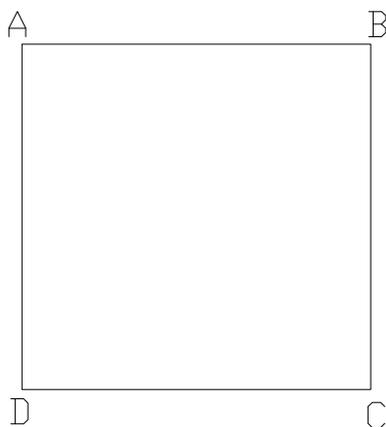


Figura 5. Cuadrado

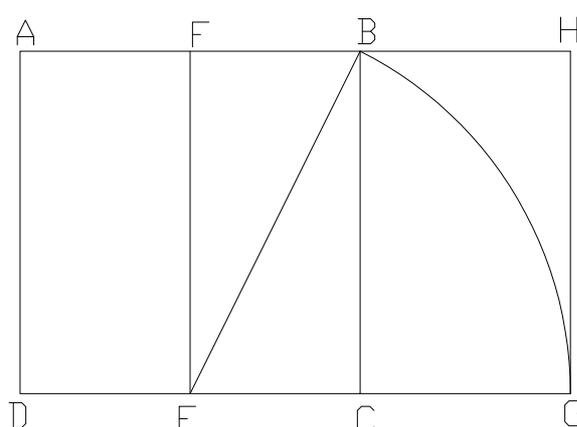


Figura 6 . Rectángulo áureo

Se traza la línea FG y la perpendicular a ella por F, esta recta corta a la recta DG en el punto I. Se traza la perpendicular por I a IG hasta cortar a la prolongación de AB en el punto J. De esta forma obtenemos el rectángulo GIJH (figura 7). Con esta construcción el ángulo IFG es recto.

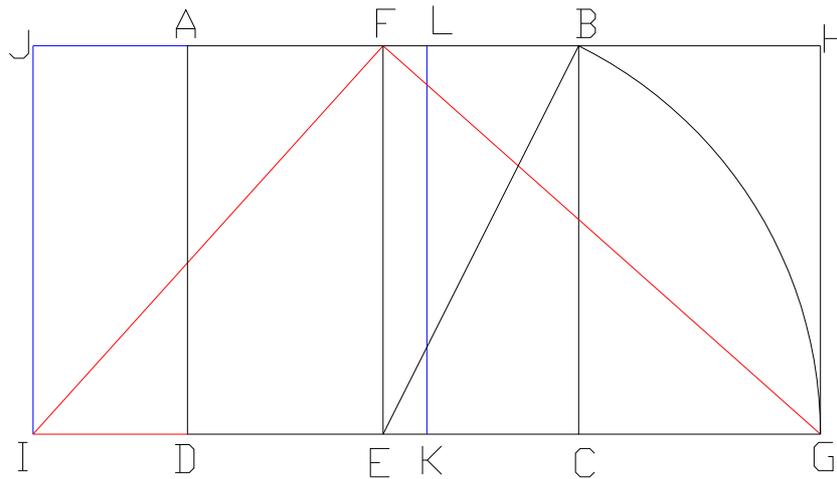


Figura 7. *Construcción de Maillard*

Sea K el punto medio de IG, por este punto se traza la perpendicular a IG, que corta a JH en el punto L (Figura 7).

La propuesta de esta construcción es que el rectángulo GIJH está dividido por KL en dos cuadrados iguales e iguales al cuadrado de partida ABCD. Ello no es cierto, en efecto:

En el triángulo rectángulo (por construcción) IFG aplicamos el teorema de la altura:

$$EF^2 = IE \cdot EG, \quad 1 = IE \cdot \sqrt{5}/2, \quad IE = 2\sqrt{5}/5$$

$$IG = IE + EG = 2\sqrt{5}/5 + \sqrt{5}/2 = 9\sqrt{5}/10 \neq 2$$

IKLJ no es un cuadrado, $IJ = 1$ y $KI \neq 1$.

Aunque no se obtienen dos cuadrados, sino dos rectángulos iguales, hacemos notar que la diferencia de medida del lado del rectángulo y el cuadrado es insignificante, teniendo en cuenta la futura utilización de estas construcciones.

El 10 de marzo de 1944 Hanning escribe a Le Corbusier diciéndole que el trazado de Maillard es matemáticamente imposible: “Sólo hay un ángulo recto y es el que forman las diagonales de los dos cuadrados” [4], lo que contradice su propia construcción.

Estos estudios se producen en plena ocupación alemana de París, con dificultades para reunirse y efectuar una investigación conjunta.

En el año 1945, un año después de la liberación y reabierto su estudio en París, Le Corbusier somete el estudio del enrejado de proporciones a sus colaboradores,

con el fin de presentarlo en su viaje a Estados Unidos como un *utensilio eventual de medida de prefabricaciones* [4].

Pensaron que estaba resuelto el problema propuesto de insertar en dos cuadrados que contienen un hombre con el brazo levantado, un tercer cuadrado en el lugar del ángulo recto. El dimensionado que adoptan para el enrejado es la estatura del hombre de 1,75 m., talla francesa, el hombre con el brazo levantado de 2,16 m., la medida del lado del cuadrado 108 cm., mitad de la longitud del hombre con el brazo levantado (Figura 9). En estas medidas Le Corbusier advierte la sucesión de Fibonacci, cada término es la suma de los dos anteriores.

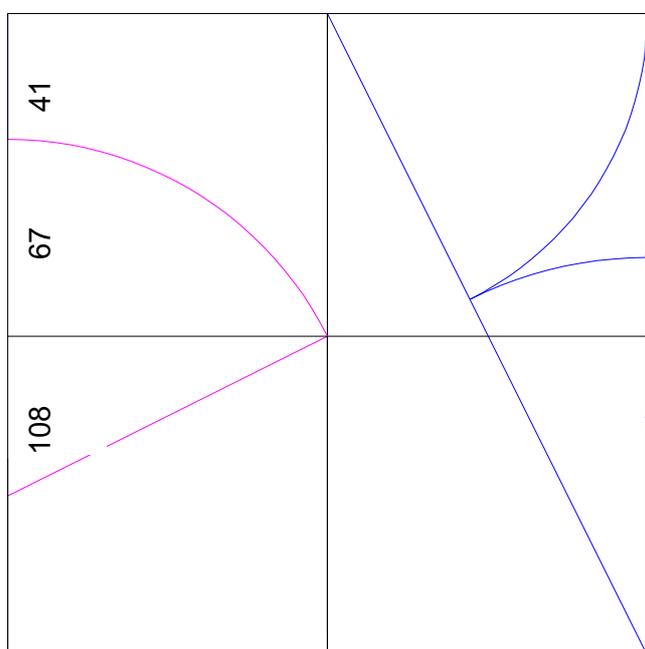


Figura 8. Construcción vertical de Maillard

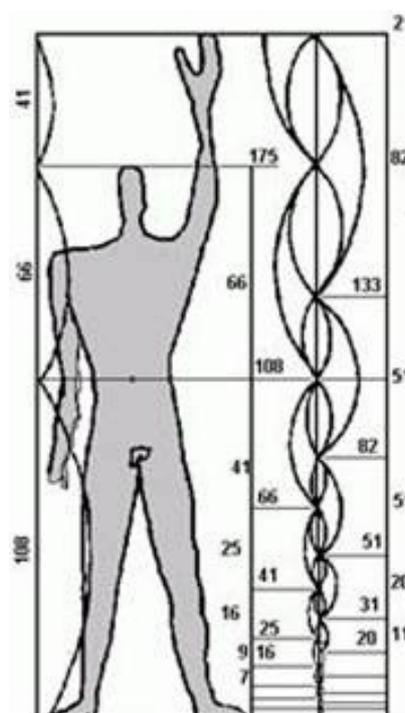


Figura 9. Modulor, hombre 1,75 m

Le Corbusier escribe en El Modulor: El ENREJADO de proporciones es un *elemento de superficie* que hemos creado, un enrejado que acomoda el orden matemático a la estatura humana, pero no quedamos satisfechos porque no tenemos *la definición* de nuestro invento ([4], pag. 39).

Se incorpora al estudio un nuevo colaborador, Soltan y a los pocos días le dice a Le Corbusier: “Me parece que su invento no explota un suceso superficial, sino lineal. El enrejado que usted ha descubierto sólo es un fragmento de una serie lineal de secciones áureas que tienden por una parte a cero y por otra hacia el infi-

nito”. “Perfectamente, le respondí, de ahora en adelante la llamaremos REGLA de proporciones” [4].

La primera regla fue construida por Soltan, tomando la estatura del hombre de 1,75 m., talla francesa, el hombre con el brazo levantado de 2,16m.

“Esta regla se adapta al cuerpo humano en sus puntos esenciales de ocupación de espacio, y tiene en cuenta la más sencilla y esencial evolución matemática de un valor, a saber: la unidad, su doble y las dos secciones áureas sumadas o restadas” [4].

Como resumen de todo lo anterior dice Le Corbusier: “califiqué la “*serie roja*” la de Fibonacci formada por la razón φ establecida sobre la unidad 108, y llame *serie azul* a la construida sobre su doble 216. Dibujé el hombre de 1,75 m. de alto referido a 4 cifras, 0, 108, 175, 216, y colocando la banda roja a la izquierda y la azul a la derecha, las dos series φ tendían hacia cero por abajo y hacia el infinito por arriba” [4].

En este momento Le Corbusier patenta la regla y la designa con el nombre de MODULOR, que define como vimos en la página 2.

Esta construcción se empleó durante algunos años, hasta que otros ayudantes de Le Corbusier propusieron un nuevo y definitivo trazado, esta vez geométricamente exacto.

Una de las pretensiones, de la creación de esta regla, era que sirviera como instrumento para la fabricación en serie en todos los países, para lo cual había de poner en consonancia los sistemas de medidas decimal y pies-pulgadas. Las medidas del sistema métrico utilizadas en el Modulor no eran de traducción automática al sistema de medida anglosajón.

Intentando buscar una solución para este inconveniente, otro de sus colaboradores, Py, observo que: “Los valores actuales del *Modulor* están determinados por la estatura de un hombre de 1,75 m., que es una talla más bien francesa. ¿No habeis observado en las novelas policíacas inglesas que los buenos tipos-un policía, por ejemplo- tiene siempre 6 pies de alto?” (pie=30,48 cm) [4].

$$6 \text{ pies} = 6 \cdot 30,48 \text{ cm} = 182,88 \text{ cm}$$

La graduación de un nuevo Modulor sobre la base de un hombre de 6 pies ó 183 cm. de estatura resolvía de forma automática la conversión entre los dos sistemas de medidas occidentales.

1.3 Construcción definitiva del Modulor

Esta construcción se basa en el hombre de 6 pies o 183 cm. de estatura, y de 226 cm. ó 89 pulgadas con el brazo levantado, como veremos a continuación.

Se trazan dos cuadrados contiguos de 113 cm. de lado, ABCD y BFEC, obteniendo el rectángulo AFED de lados 226 cm. y 113 cm.

- Se traza el rectángulo áureo AGHD, correspondiente al cuadrado ABCD,

$$\frac{AG}{AB} = \frac{AB}{BG} = \varphi.$$

- Un tercer cuadrado de igual lado, GHKJ se sitúa sobre el rectángulo áureo, cuadrado que se obtiene restando al rectángulo áureo AGHD el mayor cuadrado posible a la derecha. (KH =HG = AB).

- Las diagonales AC y CF de los dos cuadrados iniciales determinan en el punto C un ángulo recto inscrito dentro del rectángulo doble cuadrado.

- Los lados del ángulo recto AC y CF intersecan con los lados del tercer cuadrado JGHK en los puntos P y Q respectivamente. (figura 10)

- Trazamos la recta que une P y Q, que corta a las prolongaciones de los lados del rectángulo AFED, en los puntos T y S. (figura 11)

- Trazamos el rectángulo SVTR determinado por la diagonal ST.

- En este rectángulo está contenido todo el Modulor (Figura 11).

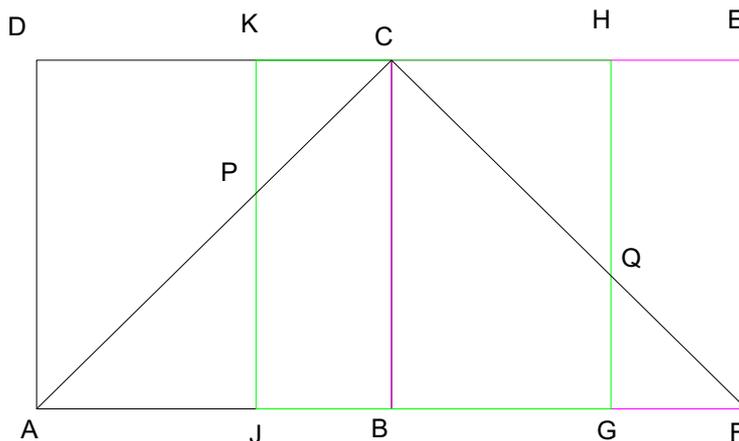


Figura 10. *Tres cuadrados y ángulo recto*

En la Figura 11 vamos a insertar, entre las rectas PQ y SV, una serie de triángulos rectángulos semejantes a PCQ, tal que la proporción entre dos consecutivos es constante e igual a φ , y la sucesión formada por las longitudes de los lados proporcionales es de Fibonacci (Figura 12).

Teniendo en cuenta que el segmento AC es diagonal del cuadrado ABCD, el ángulo ACK es de 45°. El triángulo KCP es rectángulo e isósceles (los ángulos en C y P son iguales de 45°, como se muestra en la Figura 11).

$$KP = KC = JB = a\varphi^{-2}.$$

Se traza la recta que pasa por P y es perpendicular a AC obteniéndose el punto M, el triángulo MPK es rectángulo, isósceles e igual al triángulo KCP, por tener los tres ángulos iguales y un lado común, luego los lados opuestos a ángulos iguales son iguales (Figura 12):

$$KM = KC = JB = a\varphi^{-2} = r_{-2}; \quad CM = CK + KM = 2a\varphi^{-2} = b_{-2},$$

$$DM = DK - KM = AJ - KC = a\varphi^{-1} - a\varphi^{-2} = a\varphi^{-3}$$

Trazamos el segmento que pasa por M y es perpendicular a MP; corta a AD en el punto D', obteniéndose el triángulo rectángulo e isósceles DMD'; por D' se traza la perpendicular a D'M obteniéndose el punto Z.

Los triángulos MDD' y DZD' son iguales, con lo cual

$$DZ = DM = a\varphi^{-3} = r_{-3}, \quad MZ = MD + DZ = 2a\varphi^{-3} = b_{-3}$$

Este procedimiento podemos seguirle indefinidamente, obteniendo los sucesivos términos de las posiciones negativas de las series roja y azul del Modulor.

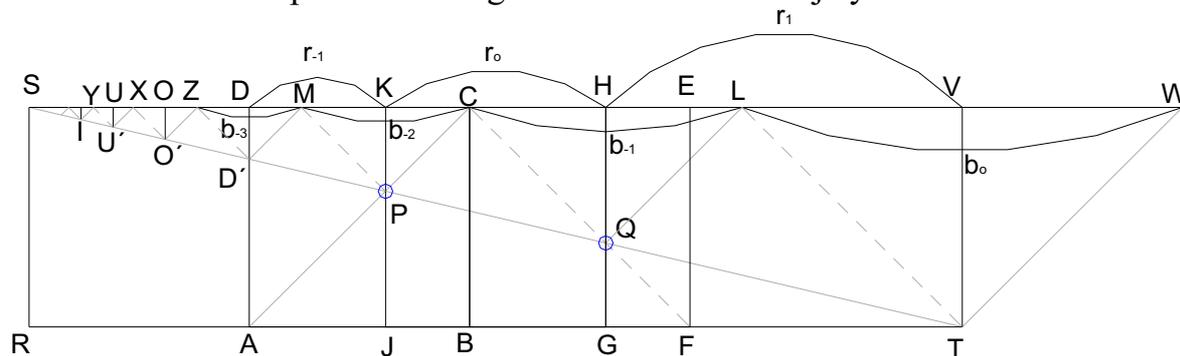


Figura 12. Esquema de las series roja y azul

Para obtener los términos de las posiciones positivas de las sucesiones hacemos un razonamiento análogo a partir del punto Q. La diagonal CF del cuadrado BFEC, corta a HG en el punto Q, el ángulo QCH = 45°, en consecuencia el triángulo QCH es rectángulo e isósceles.

Se traza la recta que pasa por Q y es perpendicular a CF obteniéndose el punto L, el triángulo HQL es rectángulo, isósceles e igual al triángulo CQH, en consecuencia (Figura 12):

$$CH = HL, CH = BG = a\varphi^{-1}, CL = CH + HL = 2a\varphi^{-1} = b_{-1}$$

Se traza la perpendicular a QL por L, que corta a la prolongación de AB en T, por T se traza la paralela a BC que corta a la prolongación de CD en V:

El triángulo LTV es rectángulo e isósceles, $LV = VT = CB = a$.

Se traza por T la perpendicular a LT, que corta a la prolongación de DC en W:

$$LV = VW, LW = 2a = b_0 = 226 \text{ cm.}$$

Este procedimiento podemos seguirle indefinidamente, obteniendo los sucesivos términos de las posiciones positivas de las series roja y azul del Modulor.

Observamos en la Figura 12 que si tomamos las líneas paralelas grises, podemos aplicar el teorema de Thales (gris), ver Figura 13 y si tomamos las líneas paralelas discontinuas, podemos aplicar el teorema de Thales (azul), ver figura 14. Combinando las relaciones que obtenemos de Thales gris y Thales discontinuas vamos obteniendo los términos de las series roja y azul de El Modulor

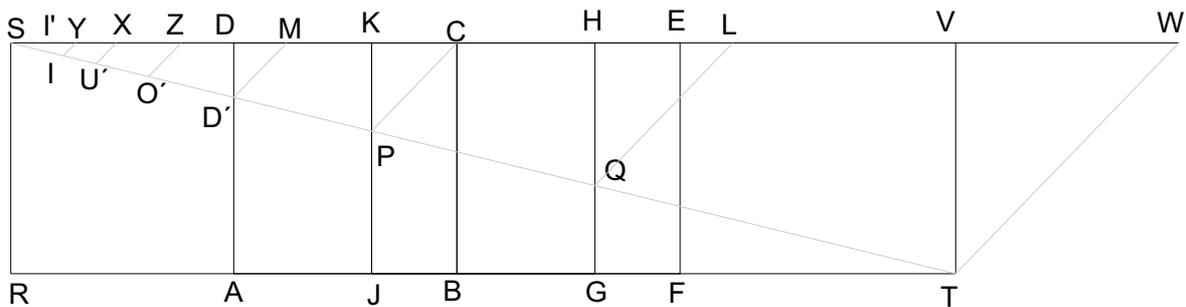


Figura 13. *Thales Rojo*

Aplicamos el teorema de Thales a las rectas paralelas grises cortadas por las rectas secantes WS y TS:

$$TQ/WL = QP/LC = PD'/CM = D'O'/MZ = O'U'/ZX = U'I'/XY = \dots$$

De la primera proporción obtenemos: $TQ/QP = WL/LC$, por Thales discontinuo

$$TQ/QP = \varphi, \text{ luego } WL = \varphi LC = \varphi 2a\varphi^{-1} = 2a = b_0.$$

De la segunda proporción obtenemos: $QP/PD' = CL/MC = \frac{2a\varphi^{-1}}{2a\varphi^{-2}} = \varphi$.

De la tercera proporción obtenemos: $PD'/D'O' = CM/MZ = \frac{2a\varphi^{-2}}{2a\varphi^{-3}} = \varphi$.

De la cuarta proporción obtenemos: $O'D'/O'U' = MZ/ZX = \frac{2a\varphi^{-3}}{ZX}$,

por Thales discontinuo $ZX=2a\varphi^{-4}$, luego $O'D'/O'U'=MZ/ZX = \frac{2a\varphi^{-3}}{2a\varphi^{-4}} = \varphi$.

De la quinta proporción obtenemos: $O'U'/U'I=ZX/XY$, por Thales discontinuo $O'U'/U'I = ZX/XY = \frac{2a\varphi^{-4}}{2a\varphi^{-5}} = \varphi$.

En resumen: $\varphi = WL/LC = LC/CM = CM/MZ = MZ/ZX = ZX/XY = \dots$, y
 $WL = b_0, LC = b_{-1}, CM = b_{-2}, MZ = b_{-3}, ZX = b_{-4}, XY = b_{-5}, \dots$.

Así obtenemos los términos de la serie azul.

Aplicamos el teorema de Thales a las rectas paralelas discontinuas cortadas por las rectas secantes WS y TS (Figura 14).

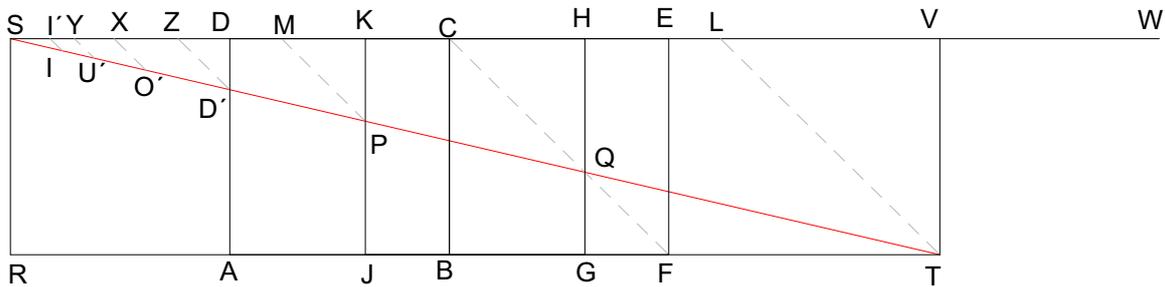


Figura 14. *Thales Azul*

$$TQ/LC = QP/CM = PD'/MZ = D'O'/ZX = O'U'/XY = U'I/YI' = \dots$$

De la primera proporción $TQ/QP = LC/CM = \varphi$, por Thales gris.

De la segunda proporción obtenemos: $QP/PD' = CM/MZ = \frac{2a\varphi^{-2}}{2a\varphi^{-3}} = \varphi$

De la tercera proporción obtenemos: $PD'/D'O' = MZ/ZX = \frac{2a\varphi^{-3}}{ZX}$

Teniendo en cuenta Thales gris $PD'/D'O' = \varphi$, luego $ZX = 2a\varphi^{-4}$ y

$$PD'/D'O' = MZ/ZX = \frac{2a\varphi^{-3}}{2a\varphi^{-4}} = \varphi.$$

De la cuarta proporción obtenemos: $D'O'/O'U' = ZX/XY = \varphi$, por Thales gris, luego $YX = ZX/\varphi$, es decir, $XY = 2a\varphi^{-5}$.

Podemos seguir indefinidamente combinando las dos series de paralelas, aplicando el teorema de Thales y obtener las sucesivas potencias de φ y comprobando que la relación entre cada dos segmentos consecutivos es φ .

Resumiendo, tenemos una forma geométrica sencilla de construir los términos de la series azul y roja:

$$WL = b_0, LC = b_{-1}, CM = b_{-2}, DZ = b_{-3}, ZX = b_{-4}, XY = b_{-5}$$

$$VH = r_1, HK = r_0, KD = r_{-1}, DO = r_{-2}, OU = r_{-3}, \text{ etc.}$$

Observemos que la construcción geométrica del Modulor nos proporciona intervalos de medida, tal que la relación entre cada dos consecutivos es el número irracional φ ; en la práctica, a partir de la medida entera de 113 cm. del plexo solar, se toman aproximaciones por números enteros en centímetros (Figura 15).

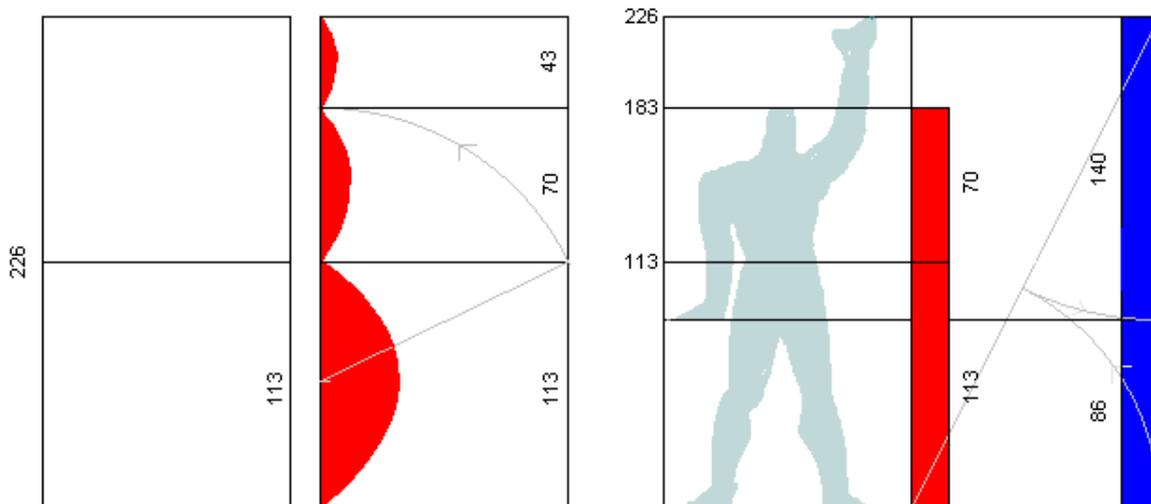


Figura 15. Modulor con el hombre de 183 cm.

Así tenemos: $\varphi = 1,618$, $a = 113$, $VH = a\varphi = AG = 182,834$, aproximadamente 183 cm y a partir de los términos $r_0 = 113$, $r_1 = 183$, se construye la sucesión de Fibonacci que da lugar a la serie roja:

$$r_1 = 183, r_0 = 113, r_{-1} = r_1 - r_0 = 70, r_{-2} = r_0 - r_{-1} = 43, r_{-3} = r_{-1} - r_{-2} = 27 \dots$$

siendo su doble la serie azul:

$$b_1 = 366, b_0 = 226, b_{-1} = b_1 - b_0 = 140, b_{-2} = b_0 - b_{-1} = 86, b_{-3} = b_{-1} - b_{-2} = 54.$$

La Figura 16 nos muestra posturas comunes en el hombre que corresponden a las series roja y azul.

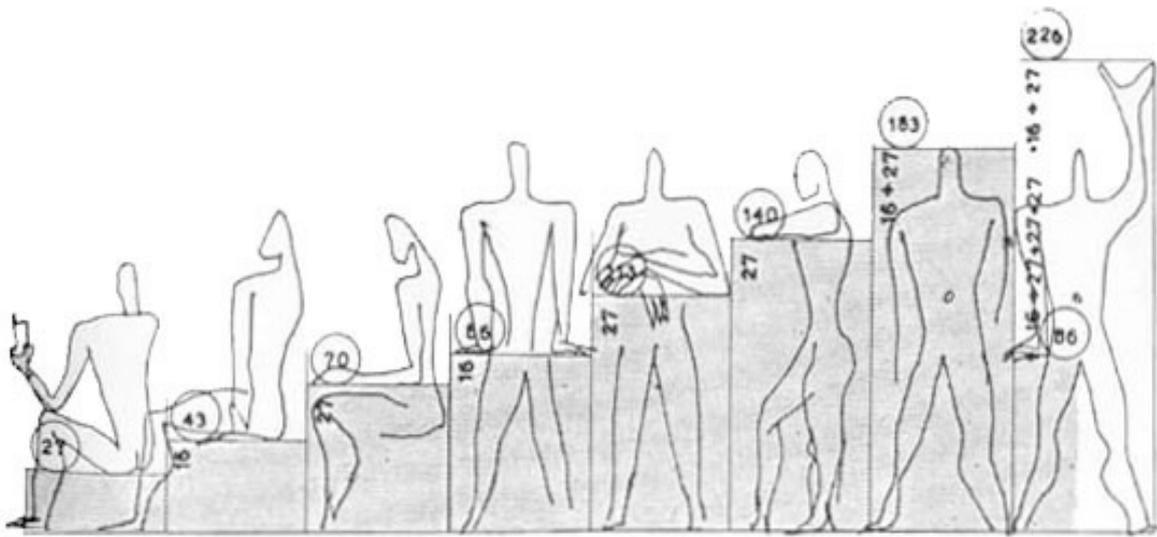


Figura 16. *Medidas del Modulor y posturas humanas habituales*

Le Corbusier en sus “Comentarios sobre el Modulor” (Modulor 2, pág. 58) pone de manifiesto que la base del Modulor es el número de oro $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ y la

propiedad $\varphi^2 = \varphi + 1$ es el hilo de la trama, la sucesión $\{\varphi^n\}_{n \geq 0}$, multiplicada por la medida del plexo solar 113 cm., proporciona la serie roja. No solamente hay un hilo en la trama, sino que también está el hilo de la urdimbre, y este hilo es la serie azul, con las mismas proporciones pero el doble de la roja. Ambas series son sucesiones de Fibonacci, cada término es la suma de los dos términos que le preceden.

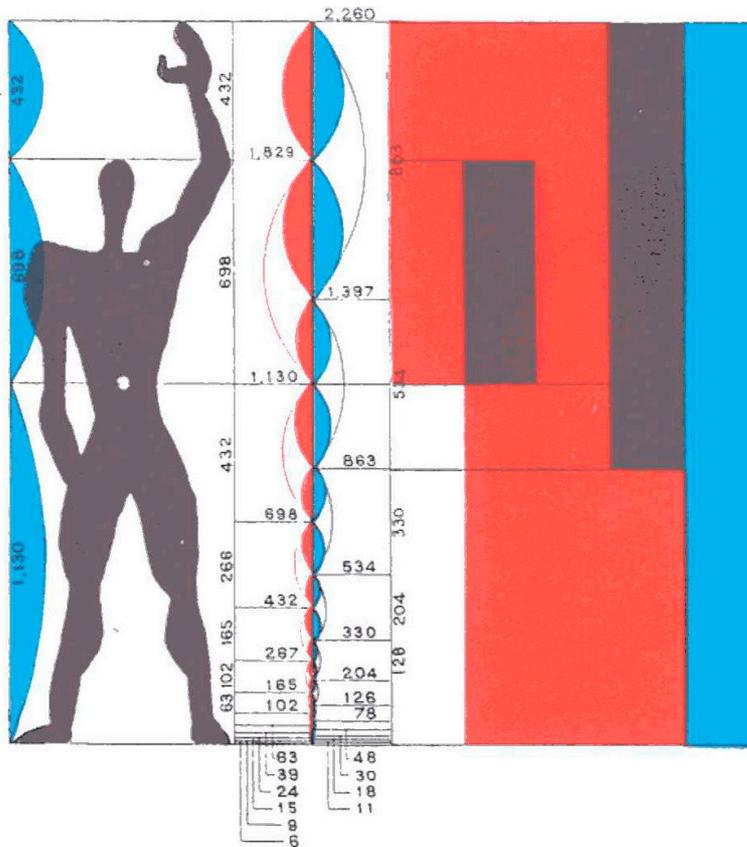


Figura 17. Modulor, series roja y azul

La trama y la urdimbre cambian el sentido si consideramos la propiedad del número de oro, $\varphi^{-1} = \varphi - 1$; la sucesión $\{\varphi^n\}_{n \leq 0}$, nos proporciona los valores de la serie roja por debajo de la medida del plexo solar, 113, 70, 43, etc. y su doble los términos de la serie azul.

La trama y la urdimbre, en ambos sentidos, se entretrejen en orden creciente de los números, alternando rojo, azul, rojo etc. Existen otros entramados entre ambas series; por ejemplo, observamos que cada término de la serie roja es la media aritmética de los dos términos que la preceden de la serie azul.

2. Conclusiones

El Modulor, propuesto en un principio como un sistema de enrejado de proporciones en 1942, fue desarrollado y puesto a punto durante tres años, cuando pasó a

ser considerado como una regla y se le dio este nombre. A finales de 1948 cuando la respuesta matemática es correcta Le Corbusier decide escribir un libro que se publica en 1950, posteriormente escribe El Modulor 2, que se publica en 1955.

El Modulor es una medida organizada sobre la matemática y la escala humana, constituida por una doble serie: la roja y la azul. No es un cuadro numérico, las cifras del Modulor son medidas, hechos que tienen corporeidad, tales medidas pertenecen a los números y tienen sus virtudes, pero los objetos que hay que construir y cuyas dimensiones determinan son continentes de hombre o prolongaciones de él.

Le Corbusier ante la pregunta que le hicieron unos años más tarde: ¿Sigue pensando lo mismo que escribió sobre el Modulor?, respondió:

“Luca Paccioli escribió durante el Renacimiento la "Divina Proposición", inspirada en cosas del pasado. El número de oro, Pitágoras. Yo aporté algo nuevo al número de oro gracias al sistema métrico de la Revolución”.

"Antes eran el pie y la pulgada, una escala humana. Y con el métrico perdimos eso ya que despersonalizó los instrumentos de medida. El metro, el centímetro, el decímetro no son de la escala, el modulor sí. Tomé las proporciones desde el plexo solar hasta la cabeza y el brazo y encontré la sección de oro allí."

"Y creé un sistema de dimensionamiento que responde a las dimensiones del cuerpo humano. Lo descubrí sin darme cuenta. No soy pretencioso, pero es importante. Y abre a la industria enormes posibilidades. Es un útil moderno. Es sorprendente ver que una gama de medida, un piano afinado, a la escala humana es una innovación sensacional."

Bibliografía

[1] Blanco, M^a F. *Arte y Matemáticas*, pp137-156. *Un paseo por la Geometría*. UPV. Bilbao, 2007.

[2] Blanco, M^a F. *Geometría y diseño*. Metodología y Aplicaciones de las Matemáticas en la E.S.O. , Julio 2004. Colección : Aulas de Verano. Serie: Ciencias. Instituto Superior de Formación.

[3] Curtis, W.J.R. *Le Corbusier, ideas y formas*. Ed. Hermann Blume, Madrid, 1987.

[4] Le Corbusier. *El Modulor y El Modulor 2*. Poseidón, 3^a edición, 1980.

[5] Ghyka, M.: *Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes*. Editorial Poseidón. 1978.

[6] Ghyka, M.: *El número de oro*. Editorial Poseidón. 1978.

One Locus – Three Challenges

Josef Böhm

Austrian Center for Didactics of Computer Algebra and
International DERIVE User Group
noj.o.boehm@pgv.at

Abstract

In this paper, we would like to demonstrate a meaningful interplay between analytical and graphical representation. Special consideration is given to the use of slider bars to emphasize the role of the parameters

Dedicated to Eugenio Roanes Macías,
at the occasion of his retirement.

Introduction

I attended a conference in the US and in one of the breaks I came across a wonderful dynamic geometry program - *Geometry Expressions*. Its author (Phil Todd) offers an example book for downloading which contains a rich collection of exciting examples. One example shows the implicit form of the locus of the midpoints of the common tangents to two circles when changing the radius of one circle (Figure 1).

Geometry Expressions is not only a dynamic geometry program but has a powerful CAS working in the background. Otherwise it would not be possible to deliver the implicit form of this locus (a 4th order equation).

$$\Rightarrow 4 \cdot X^4 + 8 \cdot X^2 \cdot Y^2 + 4 \cdot Y^4 - 12 \cdot X^3 \cdot a - 12 \cdot X \cdot Y^2 \cdot a + a^4 - a^2 \cdot s^2 + Y^2 \cdot (4 \cdot a^2 - 4 \cdot s^2) + X^2 \cdot (13 \cdot a^2 - 4 \cdot s^2) + X \cdot (-6 \cdot a^3 + 4 \cdot a \cdot s^2) = 0$$

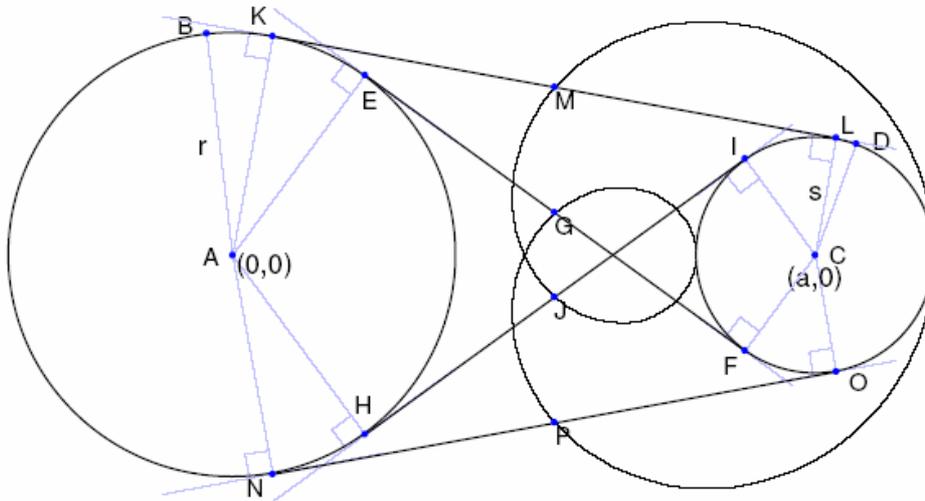


Figure 1

1. First challenge

The first challenge is to reproduce the construction with the dynamic geometry program of your choice. I experienced that even experienced teachers face problems finding the correct construction.

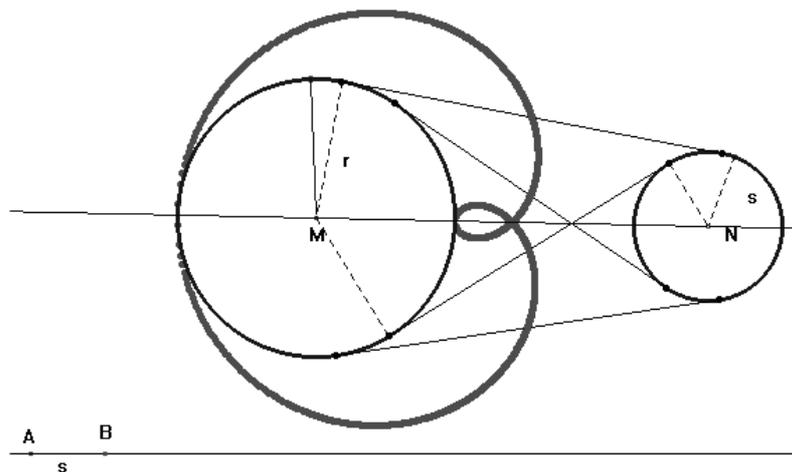


Figure 2

Figure 2 contains my reproduction with *Cabri*. Dragging point B changes radius s of the circle with centre N. Try to do the construction. It can be that you will face a problem (at the moment when radius $s > r$). Then try to resolve this problem!

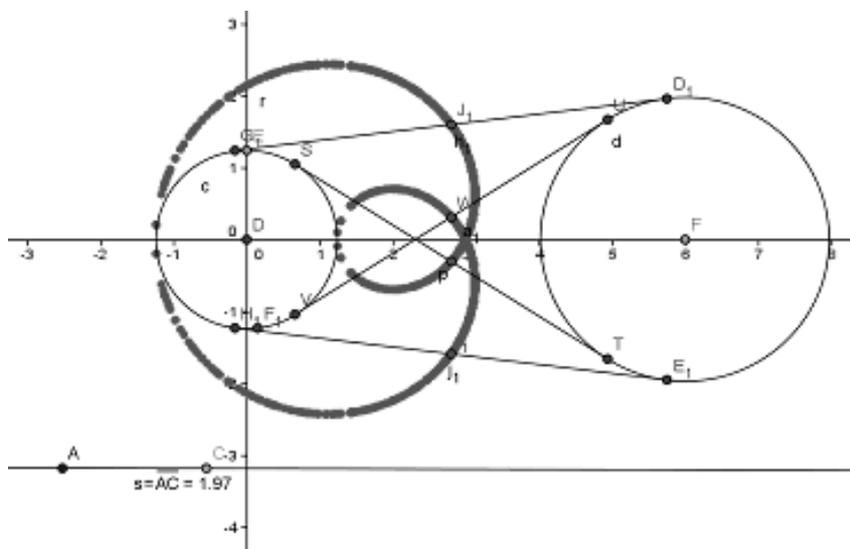


Figure 3

Figure 3 shows the *GeoGebra* construction. In my realizations radius s of the right circle is changing. The following calculation will simulate exactly the *Geometry Expressions* figure (with radius r of the left circle changing).

2. Second challenge

The second challenge is to find any form of analytic representation of this locus. I use my favorite computer algebra system, *DERIVE*, which allows working really parallel in two representation forms: the algebraic form in the Algebra Window and the geometric form supported by slider bars in the 2D Plot Window. I strongly recommend this approach for nearly all geometric problems which we meet in school mathematics. The students will get a deep impression of the functionality of the parameters appearing in a problem and they can immediately check their calculation by visualizing not only the final but also intermediate results. We will demonstrate this using this – not so trivial – example.

The mathematics is not so difficult. It covers analytic geometry of secondary school but manipulating the expressions would be too boring and tedious not only for students but also for the teachers.

I start with two circles – one of them with its center in the origin and varying radius r , the other with its center in $(a,0)$ and radius s . In fact we can vary all parameters but r is the parameter determining the locus.

The *DERIVE* code is not so difficult. If you are using any other popular CAS (*Maple*, *MATHEMATICA*, *WIRIS*, ...) you can proceed in a very similar way.

I define the two circles, switch to the 2D-Plot Window, introduce sliders for r , a and s and plot the circles. It is necessary to play around with the sliders in order to be sure that the parameters fulfill their roles (Figure 4).

```
#1: circle_origin := x2 + y2 = r2
#2: circle_var := (x - a)2 + y2 = s2
```

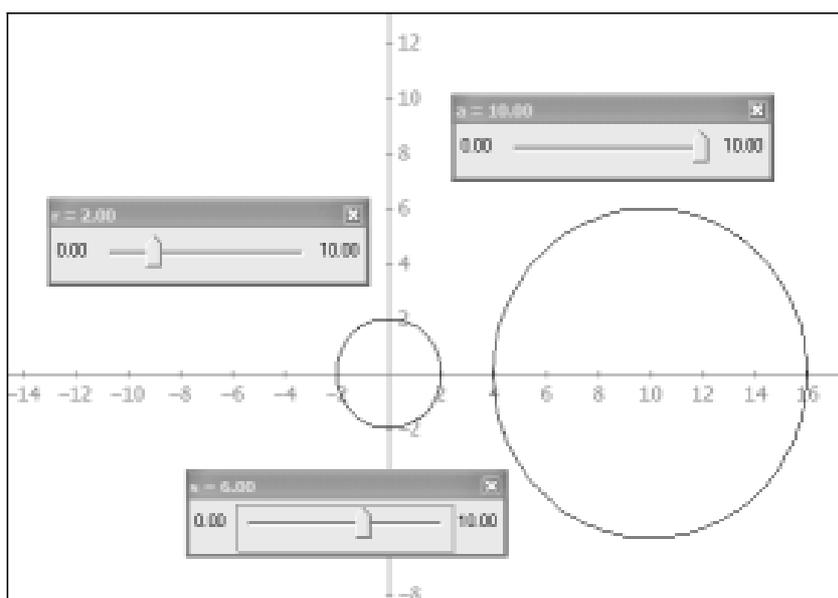


Figure 4

Next step: how to find the common tangents? Let's take any arbitrary line and find the conditions for osculating both circles. The resulting equations containing variables k (slope) and d (intercept) are called in German "*Berührbedingung*", (in

English: "osculating condition"). We could refer to a table of formulae but as "purists" we are eager doing the whole calculation on our own.

#3: line := y = k·x + d

#4: tanpts_o := SOLUTIONS(line ^ circle_origin, [x, y])

#5: tanpts_o :=
$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{(r^2 \cdot (k^2 + 1) - d^2)} + d \cdot k}{k^2 + 1} & \frac{d - k \cdot \sqrt{(r^2 \cdot (k^2 + 1) - d^2)}}{k^2 + 1} \\ \frac{\sqrt{(r^2 \cdot (k^2 + 1) - d^2)} - d \cdot k}{k^2 + 1} & \frac{k \cdot \sqrt{(r^2 \cdot (k^2 + 1) - d^2)} + d}{k^2 + 1} \end{bmatrix}$$

We need only one point because in case of osculation the expression under the root – the discriminant – must be equal to zero. This leads to our first equation for k and d .

#6: tanpts_o :=
$$\left[\frac{\sqrt{(r^2 \cdot (k^2 + 1) - d^2)} - d \cdot k}{k^2 + 1}, \frac{k \cdot \sqrt{(r^2 \cdot (k^2 + 1) - d^2)} + d}{k^2 + 1} \right]$$

#7: cond1 := $r^2 \cdot (k^2 + 1) - d^2 = 0$

We do the same for the other circle obtaining an expression for the osculation points and the second equation for slope and intercept of the common tangents.

#9: tanpts_v :=
$$\frac{\sqrt{(-a \cdot k^2 - 2 \cdot a \cdot d \cdot k - d^2 + s \cdot (k^2 + 1))}}{k^2 + 1}$$

#10: cond2 := $-d^2 - 2 \cdot d \cdot k \cdot a + k^2 \cdot (s^2 - a^2) + s^2$

(Note that expression #9 above and expression #22 below are truncated because of their width).

We – *DERIVE* does the job – solve the equation for k and d .

#11: `sols := SOLUTIONS(cond1 ^ cond2, [k, d])`

#12: `sols :=`

$$\left[\begin{array}{l} \frac{r+s}{\sqrt{(a^2-r^2-2rs-s^2)}} - \frac{a \cdot r}{\sqrt{(a^2-r^2-2rs-s^2)}} \\ - \frac{r+s}{\sqrt{(a^2-r^2-2rs-s^2)}} - \frac{a \cdot r}{\sqrt{(a^2-r^2-2rs-s^2)}} \\ \frac{r-s}{\sqrt{(a^2-r^2+2rs-s^2)}} - \frac{a \cdot r}{\sqrt{(a^2-r^2+2rs-s^2)}} \\ \frac{s-r}{\sqrt{(a^2-r^2+2rs-s^2)}} - \frac{a \cdot r}{\sqrt{(a^2-r^2+2rs-s^2)}} \end{array} \right]$$

As expected we receive four pairs of solutions – ask the students, why? Using *DERIVE*'s fabulous VECTOR command we get a list of the osculation points on the circles by substituting the solutions in the respective tangents.

#13: `pts_o := VECTOR(SUBST(tanpts_o, [k, d], sols), j, 4)`

#14: `pts_o :=`

$$\left[\begin{array}{l} \frac{r \cdot (r+s)}{a} - \frac{r \cdot \sqrt{(a^2-r^2-2rs-s^2)}}{a} \\ \frac{r \cdot (r+s)}{a} - \frac{r \cdot \sqrt{(a^2-r^2-2rs-s^2)}}{a} \\ \frac{r \cdot (r-s)}{a} - \frac{r \cdot \sqrt{(a^2-r^2+2rs-s^2)}}{a} \\ \frac{r \cdot (r-s)}{a} - \frac{r \cdot \sqrt{(a^2-r^2+2rs-s^2)}}{a} \end{array} \right]$$

We switch to the plot window and plot the four points. They should appear on the left circle. If this works to our satisfaction we proceed with the osculation points on the other circle and finally connect the points to segments – always verifying graphically if the calculations have been right so far.

```
#15: pts_v := VECTOR(SUBST(tanpts_v, [k, d], sols ), j, 4)
#16: segments := VECTOR([pts_o_j, pts_v_j], j, 4)
```

It is not necessary to simplify all the expression for plotting. We can plot expressions #13, #14 and #15 without being bored by the bulky simplified expressions. At the other hand seeing the result gives also an impression if we could be on the right path or not. So my recommendation is: some times simplifying and then deleting the extended expressions. The screen shot in Figure 5 shows the circles and the common osculating segments – looks good, indeed.

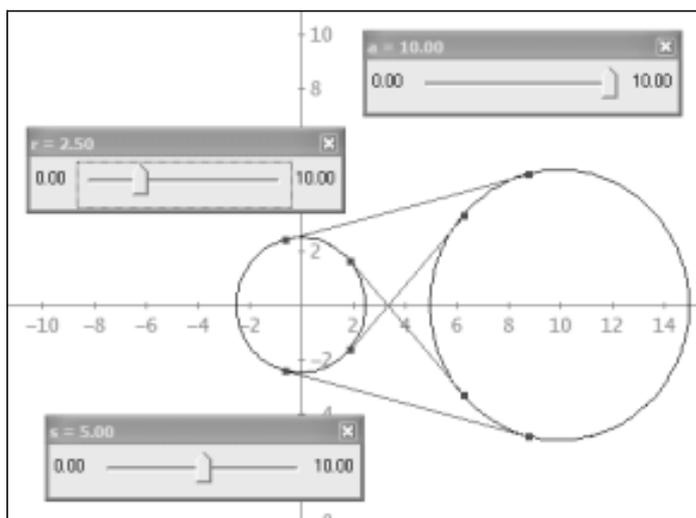


Figure 5

We calculate the midpoints and add them to the graph by plotting them (in another color –Figure 6).

```
#17: midpoints := VECTOR( ( (v_1 + v_2) / 2, v, segments )
```

The list of the midpoints should be recognized by the students as the parameter representation(s) of the curve(s). As there are four midpoints the students should expect four parameter curves = four distinct loci.

#18: midpoints :=

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a^2 + (r+s) \cdot (r-s)}{2 \cdot a} \quad \frac{\sqrt{(a^2 - r^2 - 2 \cdot r \cdot s - s^2)} \cdot (s-r)}{2 \cdot a} \\ \frac{a^2 + (r+s) \cdot (r-s)}{2 \cdot a} \quad \frac{\sqrt{(a^2 - r^2 - 2 \cdot r \cdot s - s^2)} \cdot (r-s)}{2 \cdot a} \\ \frac{a^2 + (r+s) \cdot (r-s)}{2 \cdot a} \quad - \frac{\sqrt{(a^2 - r^2 + 2 \cdot r \cdot s - s^2)} \cdot (r+s)}{2 \cdot a} \\ \frac{a^2 + (r+s) \cdot (r-s)}{2 \cdot a} \quad \frac{\sqrt{(a^2 - r^2 + 2 \cdot r \cdot s - s^2)} \cdot (r+s)}{2 \cdot a} \end{array} \right]$$

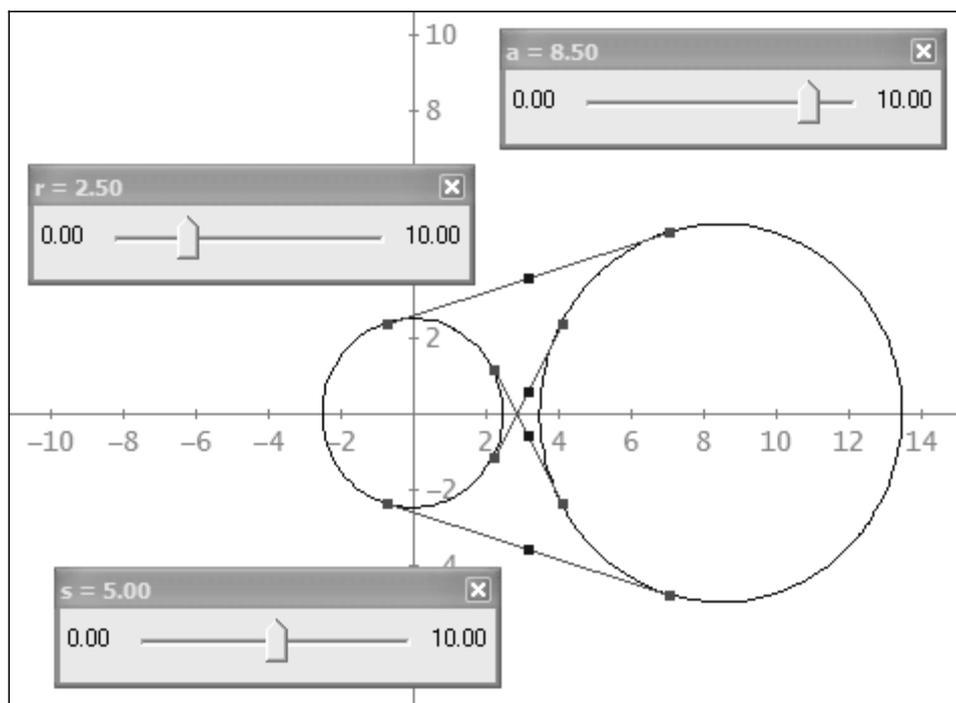


Figure 6

Curiously, the four midpoints are collinear points.

We ask the students which of the parameters is the parameter of the locus – it is r . For plotting the parameter form of the loci we have to replace r by another variable because r is blocked in the slider bar. We choose t as the new name for r .

#19: SUBST(midpoints, r, t)

#20:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a^2 - (s+t) \cdot (s-t)}{2 \cdot a} \quad \frac{\sqrt{(a^2 - s^2 - 2 \cdot s \cdot t - t^2)} \cdot (s-t)}{2 \cdot a} \\ \frac{a^2 - (s+t) \cdot (s-t)}{2 \cdot a} \quad \frac{\sqrt{(a^2 - s^2 - 2 \cdot s \cdot t - t^2)} \cdot (t-s)}{2 \cdot a} \\ \frac{a^2 - (s+t) \cdot (s-t)}{2 \cdot a} \quad - \frac{\sqrt{(a^2 - s^2 + 2 \cdot s \cdot t - t^2)} \cdot (s+t)}{2 \cdot a} \\ \frac{a^2 - (s+t) \cdot (s-t)}{2 \cdot a} \quad \frac{\sqrt{(a^2 - s^2 + 2 \cdot s \cdot t - t^2)} \cdot (s+t)}{2 \cdot a} \end{array} \right]$$

Plotting the four curves with $0 \leq t \leq 100$ gives a satisfying result. Don't forget to move the sliders and observe the changing shape of the curve. The four separated curves seem to form only one closed curve! (Figure 7).

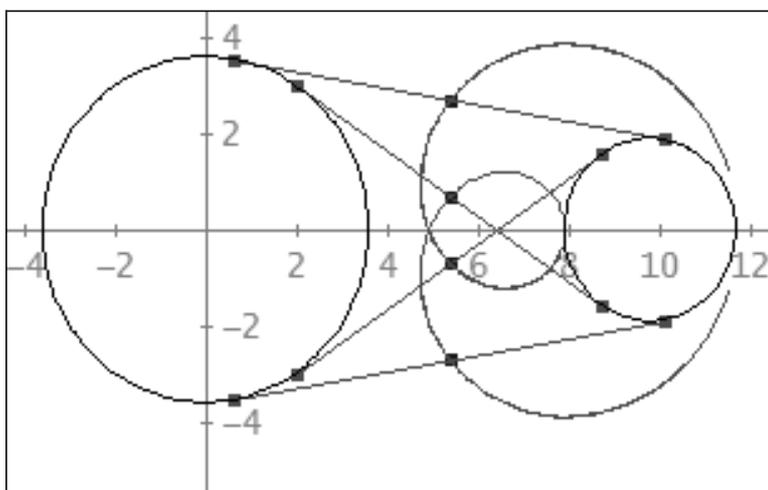


Figure 7

3. Third challenge

Comparing Figure 7 with the *Geometry Expressions* plot can make us sure that we are right. But the built in CAS of *GE* provides the implicit form of this curve – so we accept this third challenge and try to find the implicit form, too.

What to do is to eliminate the parameter t from two equations $x =$ first component and $y =$ second component of at least one of the rows of expression #20 above. We can apply a nice “trick” and hope that the CAS does the job for us:

$$\#21: \text{ SOLUTIONS} \left(x = \frac{a^2 - (s+t) \cdot (s-t)}{2 \cdot a} \wedge y = \frac{\sqrt{(a^2 - s^2 - 2 \cdot s \cdot t - t^2)} \cdot (s-t)}{2 \cdot a}, [y, t] \right)$$

We solve for y and t and hope that the CAS will find a solution for y (without t , because this is the second variable for the equation). If this works then we would have an *explicit* form of the curve!!

$$\#22: \left[\begin{array}{l} \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} + s) \cdot \sqrt{(s \cdot \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} - a \cdot x + a^2 - s^2)}}{2 \cdot a} - \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} \\ \frac{\sqrt{2} \cdot (s - \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)}) \cdot \sqrt{(-s \cdot \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} - a \cdot x + a^2 - s^2)}}{2 \cdot a} \end{array} \right] \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)}$$

The first solution for y looks “nice”. Let’s take it for further manipulations:

$$\#23: y = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} + s) \cdot \sqrt{(s \cdot \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} - a \cdot x + a^2 - s^2)}}{2 \cdot a}$$

$$\#24: \left(y = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} + s) \cdot \sqrt{(s \cdot \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} - a \cdot x + a^2 - s^2)}}{2 \cdot a} \right)^2$$

$$\#25: y = \frac{2 \cdot (\sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} + s)^2 \cdot (s \cdot \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} - a \cdot x + a^2 - s^2)}{2 \cdot a^2}$$

$$\#26: y = \frac{2 \cdot a^2 \cdot s \cdot \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)} - 2 \cdot a^2 \cdot x^2 + 3 \cdot a^2 \cdot x - a^4 + a^2 \cdot s^2}{2 \cdot a^2}$$

Having expanded the numerator of #25 we can see that only one root expression is remaining. One more simplification performs cancellation. Then we leave the single remaining root on the right side and square the whole equation once more.

$$\#28: (2 \cdot y^2 + 2 \cdot x^2 - 3 \cdot a \cdot x + a^2 - s^2 = s \cdot \sqrt{(2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)})$$

$$\#29: (2 \cdot x^2 - 3 \cdot a \cdot x + 2 \cdot y^2 + a^2 - s^2)^2 = s^2 \cdot (2 \cdot a \cdot x - a^2 + s^2)$$

This should it be!! As *DERIVE* is able to do implicit plots we can plot the graph of expression #29 (Figure 8) and to our surprise we find that it contains all four parameter curves from above.

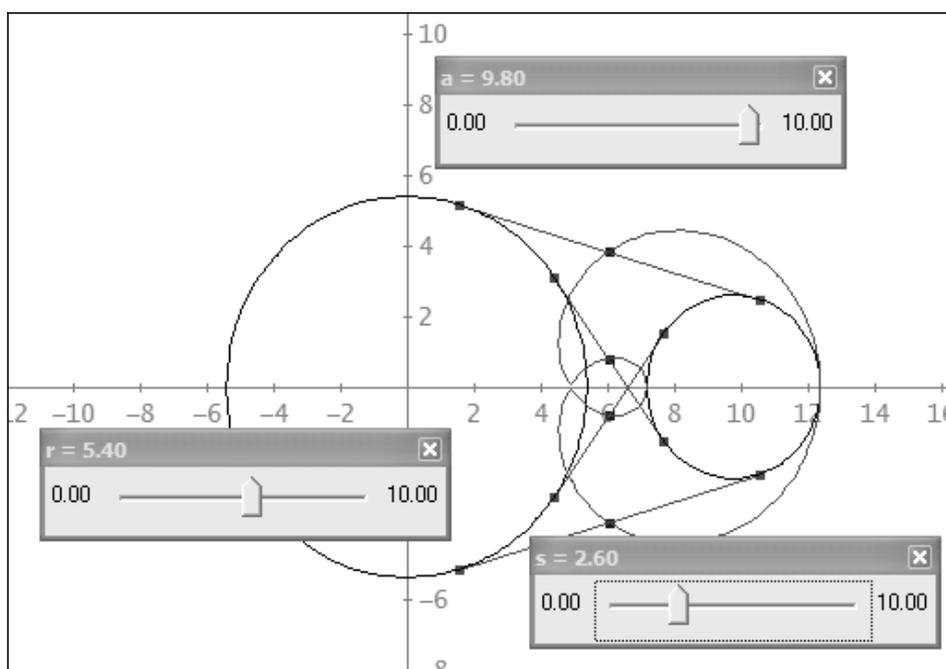


Figure 8

Finally we would like to check if our result and the result offered by *GE* are the same. *GE* has the nice feature that its algebraic results can be exported among others to *DERIVE* (also to *MAPLE*, *MATHEMATICA*, *TI-Nspire* a.o.). So we don't need to retype the expression. (#32 below is imported from *GE*)

```

#31: my_ex := (2·x2 - 3·a·x + 2·y2 + a2 - s2)2 - s·(2·a·x - a2 + s2)
#32: geom_ex := x4·4 + y2·x2·8 + y4·4 + a·x3·(-12) + a·y2·x·(-12) + a4 +
      s2·a2·(-1) + (a2·4 + s2·(-4))·y2 + (a2·13 + s2·(-4))·x2 + (a3·(-6) +
      s2·a·4)·x = 0
#33: my_ex - LHS(geom_ex) = 0

```

So the 4th order curves are identical – we did it!!

4. Conclusions

We can (and the students, of course) lean back very satisfied. We faced the challenge(s) and did a lot of mathematical work.

The students have the chance to train and/or to demonstrate some important competences: they need to apply a lot of knowledge in geometry, they need to interpret complex algebraic expressions given by the CAS, they learn to change between graphic and analytic representation forms, they need to handle parameters – supported by sliders, they can be asked for related problems (e.g. What happens if we choose a or s as parameter for the locus?) But overall they are released of all boring, tiresome and annoying calculations – but they have to provide the strategy for solving the problem. Who of us would like to do all calculations from above by hands?

For me the most important aspect is – I believe that I repeat myself – the interplay between different representation forms which at many important steps within the procedure can confirm or correct the solution process.

References

- [1] Geometry Expressions, <http://www.geometryexpressions.com/>
- [2] Geometry Example Book, http://www.geometryexpressions.com/explore.php?p=04-Examples%2F02-Example_Book.
- [3] Josef Böhm. *A Locus – A Challenge*. DERIVE Newsletter #73 (2009) <http://www.austromath.at/dug/dnl53.php>

Reseña de libros

ANDRÉS RAYA, ALFONSO RÍDER, RAFAEL RUBIO: *Álgebra y Geometría lineal* (508 páginas). ISBN: 978-84-291-2632-7. Editorial Reverté. Barcelona, 2007. www.reverte.com

Es esta una materia sobre la cual se han escrito tantos libros, que parece difícil presentar algo de modo original. Sin embargo, los autores han conseguido que lo sea. Está concebido como un completo guión de esta disciplina, tanto para el profesor que ha de explicar la asignatura, como para el alumno que la estudia al margen de las clases presenciales o como complemento de ellas.

Los temas son tratados partiendo de una motivación o introducción histórica, previos a la formalización de enunciados y demostraciones, para concluir con una abundante colección de ejemplos desarrollados y ejercicios propuestos.

Se ha puesto mucho empeño en resaltar las conexiones entre el Álgebra y la Geometría lineales, abarcando todos los temas usuales relacionados con esta disciplina, como muestra su índice general: vectores libres, espacios vectoriales, subespacios vectoriales, sistemas generadores, espacios de generación finita, aplicaciones lineales, suma directa, dimensión y codimensión de subespacios, espacio cociente, subespacios y aplicaciones afines, matrices y sus operaciones, rango de una matriz, determinantes, aplicaciones lineales en dimensión finita, sistemas lineales, dualidad, trasposición de aplicaciones lineales, cambios de base, equivalencia y semejanza de matrices, clasificación de endomorfismos lineales, autovalores y autovectores de un endomorfismo lineal, triangulación y diagonalización de endomorfismos, polinomio mínimo de un endomorfismo, descomposición primaria, introducción a las formas de Jordan, endomorfismos nilpotentes, teorema de Jordan, espacios vectoriales complejos, endomorfismos de espacios reales, espacios afines, coordenadas en espacios afines, aplicaciones afines, el grupo afín, cambio de coordenadas, simetrías, traslaciones y homotecias.

Todo ello unido a una presentación muy atractiva y una cuidada edición, hacen que este manual pueda ser muy útil para alumnos y profesores de lo que tradicionalmente se denominan carreras universitarias de Ciencias: Matemáticas, Físicas, Informática, Ingenierías técnicas y superiores,...

Eugenio Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTeX. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: “Problema número (Boletín número)”, tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo “article” y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTeX, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta puigadam@mat.ucm.es, o bien en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

De otro modo, también pueden enviarse dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,
56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,
76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83 y 84.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de la "*Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*", o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.