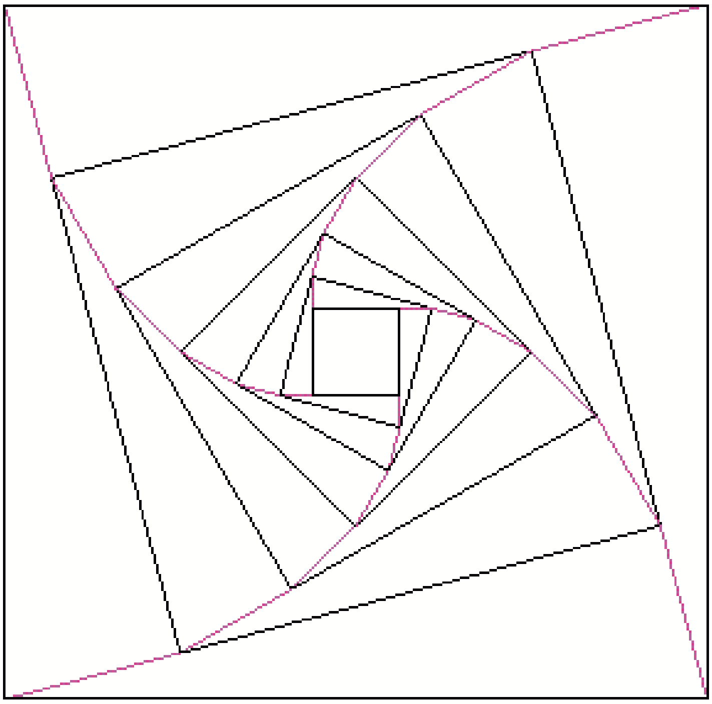
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 83
OCTUBRE DE 2009

Número especial dedicado al Profesor Eugenio Roanes Macías

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando y Eugenio Roanes Lozano

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 62 48

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse
a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
`http://www.sociedadpuigadam.es`

JUNTA DIRECTIVA

XXVII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Como cada año, desde 1983, nuestra Sociedad y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, han celebrado su *Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas,* que en 2009 ha tenido lugar por vigésimo séptima vez.

El Concurso de este año, convocado en nuestro Boletín nº 81 (en el que aparecen las Bases), se celebró en la mañana del caluroso sábado 13 de Junio de 2009. Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en el mismo lugar.

La concurrencia, fue parecida a la de años anteriores: 86 alumnos que, según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 7 puntos.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de enhorabuena a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a todos los que han contribuido al éxito del Concurso. Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

<u>**NIVEL I**</u>

1. **D. Lorenzo ESTEBAN de la IGLESIA,** *del Colegio Fray Luis de León (Madrid)*
2. **D. Marcos PARDO GARCÍA,** *del Colegio Joyfe de Madrid*
3. **D. Federico ESPÓSITO BACIGALUPO,** *del Colegio Alemán de Madrid* y

   D. Jaime MENDIZÁBAL ROCHE, *del I.E.S. Ramiro de Maeztu de Madrid* y

   Dª. Gloria VIDAL AMIÁN, *del I.E.S. Oleana de Requena(Valencia)*

<u>**NIVEL II**</u>

1. **D. Juan MARTÍNEZ OLANDO,** *del Colegio Sta. María del Pilar de Madrid.*
2. **D. Diego PEÑA PASTOR,** *del Colegio Amor Misericordioso de Madrid.*

3. D. Daniel HENRY MANTILLA. *del Liceo Francés de Madrid* y

D. Kostadin IVANOV, *del I.E.S. Octavio Paz de Leganés (Madrid)*

5. D. Andrés GÓMEZ RICO, *del IE.S. nº 1 de Requena (Valencia)*

NIVEL III

1. D. Moisés HERRADÓN CUETO, *del I.E.S San Juan Bautista (Madrid).*

2. D. Sergio FERNÁNDEZ RINCÓN*, del I.E.S. Antonio Machado de Alcalá de Henares (Madrid)*

3. D. Francisco CRIADO GALLART, *del Colegio Madre de Dios de Madrid*

4. D. Ignacio LESCANO CARROLL *, del Liceo Francés de Madrid*

5. D. Alberto MERCHANTE GONZÁLEZ*, del I.E.S. Ramiro de Maeztu (Madrid).*

Nos complace señalar que los tres primeros premiados del Nivel III fueron también premiados en el Nivel II en el Concurso del año pasado y en el nivel I de 2007 y que dos de los premiados en el nivel II (Martínez Olando y Henry Mantilla) lo fueron en nivel I en 2008.

Nuestra enhorabuena a todos los premiados, al resto de los participantes y a los padres y profesores que los han preparado y animado a participar.

Damos en este mismo número los enunciados de los problemas propuestos, indicando para cada uno la calificación media para todos los presentados, la calificación media obtenida por los cinco premiados y el número de soluciones correctas presentadas (calificadas con 7 o 6).

Finalmente, mostrar nuestro agradecimiento a la Profesora Almudena Mejías, esposa de nuestro Presidente, por tomar las fotos que aparecen en esta crónica.

María Gaspar y Julio F. Biarge

Problemas propuestos en el XXVII Concurso

(Calificaciones de 0 a 7 en cada problema)

NIVEL I (3º de E.S.O.) *28 presentados.*

Problema 1º
Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es dato para la siguiente.

a) El rectángulo que se muestra en la Figura 1 está divido en siete cuadrados. El lado de cada cuadrado gris mide 8 cm. ¿cuántos centímetros mide el lado del cuadrado rayado?

b) Sea R la respuesta del apartado anterior. Cuando dividimos los números **272 758** y **273 437** entre el número N, obtenemos como restos $R-5$ y $R-1$. Calcular el número N.

c) Si el área del cuadrilátero sombreado en la Figura 2 viene dada por el número N del apartado anterior, obtén el área del cuadrilátero *ABCD,* sabiendo que *P* y *Q* son puntos medios de lados del cuadrado.

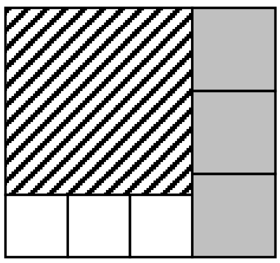


Figura 1

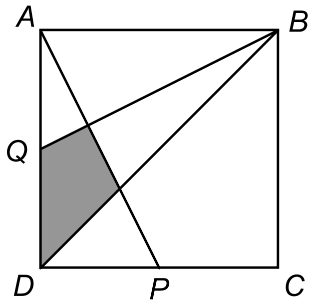


Figura 2

(Media = 1,4 . Media premiados = 2,8. Soluciones correctas = 1)

Problema 2º
Una hoja rectangular de papel, algo más alargada que una de las habituales DIN A-4, blanca por un lado y gris por el otro, fue doblada tres veces como indica la Figura 3. El perímetro del rectángulo que quedó blanco después del primer doblez mide 20 cm más que el perímetro del rectángulo que quedó blanco después del segundo doblez, y éste es 16 cm mayor que el perímetro del rectángulo que quedó blanco después del tercer doblez. Determina el área de la hoja.

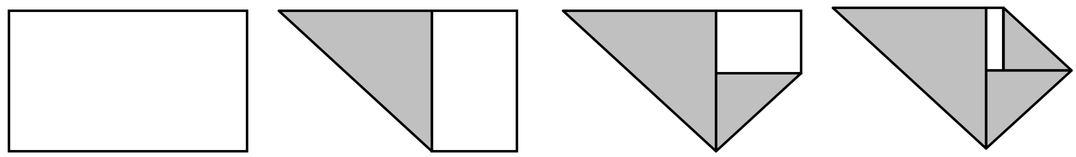


Figura 3

(Media = 3,4. Media premiados = 7,0 . Soluciones correctas = 12)

Problema 3º

Algunos de los animales que hay en Madrid están realmente locos. El 10 % de los gatos se creen que son perros y el 10 % de los perros se creen que son gatos. Todos los demás, gatos y perros, son perfectamente normales.

Un día hicimos un test a todos los perros y gatos de Madrid y resultó que el 20 % del total se creían que eran gatos ¿Qué porcentaje del total de gatos y perros de Madrid son realmente gatos?

(Media = 3,0 . Media premiados = 7,0 . Soluciones correctas = 10)

Problema 4º

Los vértices de un cubo de 2 cm de arista son *A, B, C, D, E, F, G* y *H* como se indica en la Figura 4. Si *M* y *N* son los puntos medios de las aristas *AD* y *DC* respectivamente, calcula el área el cuadrilátero *MEGN.*

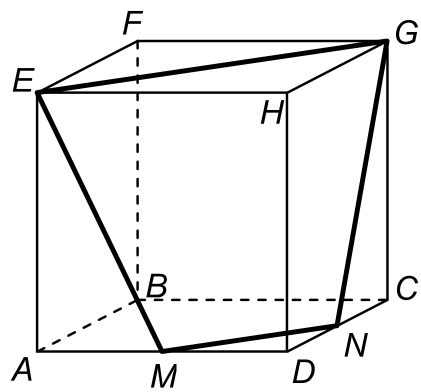


Figura 4

(Media = 2,8. Media premiados = 7,0 . Soluciones correctas = 11)

NIVEL II (4º de E.S.O.) *30 presentados.*

Problema 1º

Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es dato para la siguiente.

a) Al sumar todos los números de dos cifras, Javier creyó que había obtenido un capicúa pero, desafortunadamente, luego comprobó que había olvidado uno de los sumandos. ¿Qué número de dos cifras olvidó sumar?

b) Sean ***a*** y ***b*** las cifras del número que olvidó sumar Javier. Desde un punto exterior a una circunferencia trazamos dos secantes a la misma que forman entre sí un ángulo de 30º y que determinan en dicha circunferencia arcos de longitudes ***aπ*** y ***bπ*** como indica la Figura 5. Calcula el radio de la circunferencia.

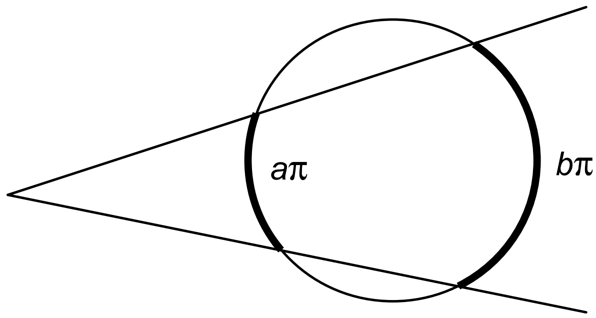


Figura 5

c) Sea R la respuesta al apartado b). Las dos bases y uno de los otros lados de un trapecio miden, respectivamente, R, $4R$ y R-1 . Si una de las diagonales mide también $4R$, calcula la longitud de la otra diagonal.

(Media = 1,4. Media premiados = 3,4 . Soluciones correctas = 1)

Problema 2º

Encuentra todas las parejas de números reales (a,b) para las que se verifique que hay exactamente tres números iguales entre los 4 siguientes: $a-b$, a/b , $a+b$ y $a-b$

(Media = 1,5. Media premiados = 5,8 . Soluciones correctas = 4)

Problema 3º
Considera tres enteros positivos consecutivos. Si dejas al pequeño como está, le sumas 10 al mediano y un número primo al mayor, resulta que los tres números que obtienes están en progresión geométrica. Determina razonadamente el número primo que sumaste al mayor.

(Media = 3,2. Media premiados = 7,0 . Soluciones correctas = 12)

Problema 4º
Demuestra que en cualquier triángulo acutángulo cuyas alturas miden todas menos de 3 cm, su área debe ser menor que $3\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

(Media = 1,8. Media premiados = 3,0 . Soluciones correctas = 0)

NIVEL III (1º de Bachillerato) *28 presentados.*

Problema 1º
Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es dato para la siguiente.

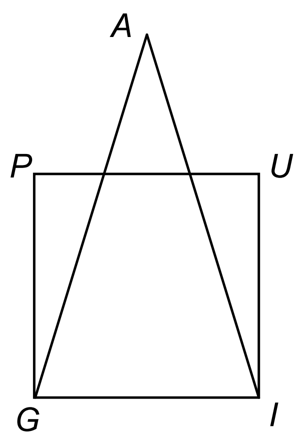


Figura 6

a) El cuadrado *PUIG* de la Figura 6 tiene de lado 10 y el triángulo isósceles *AIG* tiene en común con el cuadrado un trapecio de área 80 . Calcula la altura de dicho triángulo sobre el lado *GI* .
b) Sea h dicha altura. En la curva de ecuación $y^2 + 2hx - 2009 = x^2$, hay dos puntos cuyas coordenadas son números enteros positivos. Obtén la suma S de sus abscisas.

c) Sea p el mayor primo que divide a S. El número $p!$ acaba en varios ceros. Si N es el número obtenido al borrar todos esos ceros, calcula el mayor entero k para el que 12^k es un divisor de N.

(Media = 3,0. Media premiados = 5,6 . Soluciones correctas = 7)

Problema 2º

Se tienen tres cajas, en cada una de las cuales hay al menos una bola blanca y al menos una bola negra. La probabilidad de que sacada al azar una bola de cada caja se verifique que no son las tres blancas es de ½ .

Calcula razonadamente la composición de cada caja, sabiendo que el total de bolas es el menor posible para que se cumpla el enunciado.

(Media = 3,3. Media premiados = 6,0 . Soluciones correctas = 10)

Problema 3º

En la parábola $y = x^2$ consideramos los puntos $A(a,a^2)$, $B(b,b^2)$, $C(c,c^2)$, $D(d,d^2)$ cuyas coordenadas son números enteros.

a) Sea k el área del triángulo ABC. Demuestra que para cualquier elección de a, b y c con las condiciones dadas, el número k viene dado por

$$k = \frac{1}{2}\,|\,(a-b)(b-c)(c-a)\,|$$

b) Demuestra que k es entero.

c) Prueba que si k es primo, entonces $k = 3$.

d) Demuestra que k nunca es cuadrado de un primo.

e) Prueba que el área del cuadrilátero $ABCD$ no puede ser nunca 8 .

Nota: Puedes utilizar el resultado de cada apartado para hacer el siguiente, aunque no lo hayas demostrado.

(Media = 1,6. Media premiados = 5,2 . Soluciones correctas = 2)

Problema 4º

Calcula tres números reales en progresión geométrica, sabiendo que si al tercero le restamos 4, los nuevos números están en progresión aritmética y que si en estos nuevos restamos 1 tanto al segundo como al tercero, los nuevos números vuelven a estar en progresión geométrica.

(Media = 1,6. Media premiados = 4,0 . Soluciones correctas = 0)

Número especial dedicado al Profesor Eugenio Roanes Macías

Como ya se anunció en el número 81 de nuestro Boletín, a petición de algunos socios y amigos, la Junta Directiva de la Sociedad aprobó dedicar el número 82 del Boletín en homenaje al Profesor Eugenio Roanes Macías, Vicepresidente de nuestra Sociedad, con ocasión de su jubilación y en agradecimiento al trabajo que durante tanto tiempo realizó.

Por ello, en el número anterior, en este y en el próximo número –las colaboraciones recibidas exceden la capacidad de un solo Boletín– se encontrarán los trabajos que hemos recibido, como muestra de amistad a Eugenio padre.

Las colaboraciones recibidas hasta la fecha, y que no han cabido en el número anterior del Boletín y en éste, son las siguientes:

Escaleras deslizantes flexibles: Un repaso actualizado y específico al puente entre Geometría Dinámica y Algebra Computacional,
por *Francisco Botana* y *José Luis Valcarce*

Calculo de volúmenes con la fórmula del prismatoide,
por *Julio Castiñeira Merino*

Problemas de álgebra y teoría de números,
por *Juan-Bosco Romero Márquez*

El Modulor de Le Corbusier: un instrumento de medida,
por *Mª Francisca Blanco Martín*

A Challenging locus,
por *Josef Böhm*

Interactive Geometric Constructions in the Virtual Space
por *Heinz Schumann*

La Escuela Politécnica de París
por *Maria Paz Bujanda*

La Junta Directiva

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 83 (Octubre 2009)

Acerca de los diámetros de Newton de una curva algebraica

Julio Fernández Biarge

Profesor emérito de la Universidad Politécnica de Madrid
jfbiarge@telefonica.net

Abstract

In this paper, we apply the concept of diameters of an algebraic curve developed by Newton, to some particular cases, especially to the third and fourth order curves related with the cyclical points, and we study some of their properties.

Dedicado a *Eugenio Roanes Macías,*
con motivo de su reciente jubilación.

1. Los diámetros de Newton

En su estudio sistemático de las cúbicas, Newton incluyó una propiedad que es citada con frecuencia, pero de la que no se suelen extraer curiosas consecuencias que hoy son fáciles de demostrar. Se trata de la siguiente:

Si una curva cúbica es cortada por un haz de rectas paralelas, los centros de gravedad de los puntos de corte de cada una de ellas con la curva (reales o imaginarios) están sobre una recta.

Esa recta recibe el nombre de diámetro (conjugado con la dirección de las rectas del haz). La demostración es muy simple, incluso generalizándolo para una *curva algebraica de cualquier orden* n (en lugar de considerar sólo el caso $n = 3$). Pero antes conviene advertir de la naturaleza afín del centro de gravedad (es decir, si transformamos varios puntos en una afinidad, el centro de gravedad de los transformados es el transformado del centro de gravedad de los primeros). Esto nos permite elegir libremente el sistema de referencia cartesiano para la demostración. Tomaremos coordenadas cartesianas homogéneas x, y, t (siendo $t = 0$ para los puntos impropios). Si escogemos el eje de las x en la dirección de las rectas del haz, las ecuaciones de éstas son $y = kt$. La ecuación de la curva $f(x,y,t) = 0$ se puede ordenar en las potencias de x, quedando

$$Ax^n +(By +Ct)x^{n-1}+ \dots = 0 \qquad (1)$$

Si es $A \neq 0$, las abscisas de los n puntos de intersección con la recta y = k serán las raíces de la ecuación $Ax^n +(Bk +Ct)x^{n-1}+ \dots = 0$, y su suma será, por tanto, $-(Bk+Ct)/A$. El centro de gravedad de los puntos de intersección estará también en la recta $y = kt$ y su abscisa será la n-sima parte de esa suma, con lo que, en definitiva, ese centro estará sobre la recta de ecuación $nAx +By +Ct = 0$ que es, por tanto, el *diámetro*. Hemos excluido el caso de que sea $A = 0$, o sea el de que la curva pase por el punto impropio de las paralelas consideradas.

Desde el punto de vista proyectivo, este diámetro no es otra recta, sino la polar de primer orden (o (n-1)-ésima) del punto impropio, (1, 0, 0), de las rectas del haz de paralelas,

$$f_x(1, 0, 0)\, x + f_y(1, 0, 0)\, y + f_t(1, 0, 0)\, t = 0 \qquad (2)$$

En efecto, es inmediata la comprobación de que en el caso de que la ecuación sea (1), $f_x(1, 0, 0) = nA$, $f_y(1, 0, 0) = B$, $f_t(1, 0, 0) = C$ y, por tanto, (2) coincide con el diámetro hallado. Debe observarse que la prueba anterior, no sólo es aplicable al caso particular considerado, sino que tiene validez general, dado el carácter proyectivo de la polar de primer orden y el afín del centro de gravedad, que nos da libertad de elección del sistema de referencia.

El diámetro conjugado de la dirección de punto impropio (u,v,0) viene dado, por tanto, por

$$f_x(u,v,0)\, x + f_y(u,v,0)\, y + f_t(u,v,0)\, t = 0 , \qquad (3)$$

fórmula que tiene la ventaja de que no es preciso excluir el caso A = 0 , pues es aplicable sin excepción. En el caso de que la curva pase por $(u,v,0)$, la expresión (3) da también una recta que, si no es la $t = 0$, es una asíntota de la curva con la dirección de las rectas del haz (aunque ya no es ciertamente lugar geométrico de los centros de gravedad de las n intersecciones de cada recta del haz). Admitiremos también a esta asíntota como *diámetro*.

Ya en 1726, *Edwar Waring* demostró que el centro de gravedad de los puntos de intersección de una recta con una curva algebraica de orden n, con n asíntotas reales o imaginarias (salvo que sea paralela a una de ellas) es el mismo que el de los puntos de intersección con esas asíntotas. En consecuencia, el diámetro de la curva conjugado con una dirección es el mismo que el de la curva degenerada formada por las *n* asíntotas. La demostración es muy sencilla, pues si se toma el sistema de referencia como se hizo antes, de modo que la curva quede expresada en la forma (1), el producto de las ecuaciones de las n asíntotas sólo difiere de la (1) en términos que llevan el factor t^2, con lo que los valores de *A, B* y *C* son los mismos. Una exposición muy elemental puede verse en el libro [1].

Salvo en el caso de que la curva algebraica de orden *n* tenga ramas parabólicas o punto singular impropio, esto reduce el estudio de sus diámetros al del estudio de los diámetros de la curva degenerada formada por *n* rectas (reales o imaginarias). La denominación adoptada de diámetro puede hacer pensar equivocadamente en la existencia de un centro, por donde pasarían todos. Este es el caso de las curvas con centro de simetría, por el cual pasan evidentemente todos los diámetros, pero no el caso general, como veremos con detalle en otros.

2. Diámetros de una cúbica

Los diámetros de una cúbica (sin rama parabólica ni punto doble impropio) son los mismos que los del triángulo de sus asíntotas (las tres reales o una real y dos imaginarias conjugadas). Consideremos el caso de tres asíntotas reales.

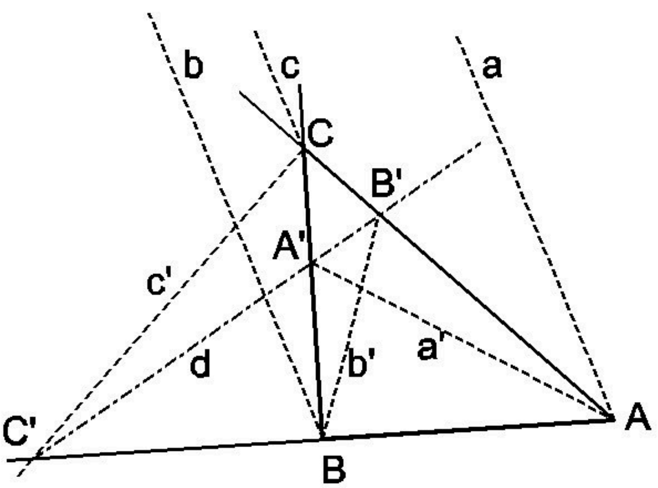


Figura 1: *La recta d es el diámetro buscado*

Debemos señalar que si conocemos ese triángulo ABC, es muy fácil determinar el diámetro conjugado con una dirección, ω. En efecto, si a es la recta de dirección ω que pasa por A y a' su conjugada armónica respecto a los lados AB y AC, la intersección A' de a' con BC debe pertenecer al diámetro buscado, ya que a' es el lugar geométrico de los puntos medios de las intersecciones de las rectas de dirección ω con los lados AB y AC, y, por tanto, A' es centro de gravedad de las intersecciones con los tres lados de la que pasa por él. Los puntos B' y C' obtenidos análogamente con los otros vértices están siempre alineados con A', y la recta, d, que los contiene, es el diámetro buscado (Figura 1).

Teniendo en cuenta la naturaleza afín del concepto de centro de gravedad y por tanto de diámetro, siempre podemos transformar mediante una afinidad el triángulo de esas asíntotas en otro equilátero. En consecuencia, para estudiar propiedades afines podemos suponer equilátero el triángulo de partida. Con un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares con origen en su centro, podemos hacer que los vértices sean $A(0,1)$, $B(-\sqrt{3}/2,-1/2)$, $C(\sqrt{3}/2,-1/2)$. Las ecuaciones de los lados son entonces

$$BC)\ \ 2y + t = 0\ , \qquad CA)\ \ \sqrt{3}\,x + y - t = 0\ , \qquad AB)\ \ -\sqrt{3}\,x + y - t = 0$$

y la cúbica degenerada formada por los tres será

$$f(x.y.t) \equiv (2y + t)[(y - t)^2 - 3x^2] = 0$$

Las derivadas parciales de esta forma serán

$$f_x(x.y.t) = 12xy - 6xt$$

$$f_y(x.y.t) = 6y^2 - 6x^2 - 6yt - 2t^2$$

$$f_t(x.y.t) = -3y^2 - 3x^2 - 4yt + 3t^2$$

En consecuencia, el diámetro conjugado a la dirección del punto impropio $(p,q,0)$ será

$$4pqx + 2(q^2 - p^2)y - (q^2 + p^2)t = 0\ .$$

Poniendo esta ecuación en forma normal, resulta inmediato que la distancia del origen a esta recta es ½ . Podemos, por tanto afirmar que:

Los diámetros de un triángulo equilátero son tangentes a su circunferencia inscrita (que es tangente a sus lados en sus puntos medios y pasa por los puntos medios de los segmentos que unen su centro con los vértices).

Teniendo en cuenta la afinidad que transforma cualquier triángulo en otro equilátero, podemos afirmar en general:

Los diámetros de una curva cúbica con tres asíntotas reales (de direcciones distintas) son tangentes a una elipse tangente a esas tres asíntotas en los puntos medios de los lados del triángulo que forman, cuyo centro está en el baricentro de éste y que pasa por los puntos medios de los segmentos que unen ese centro con los vértices.

En realidad, podemos prescindir de la condición de que las tres asíntotas sean reales. Incluso si no se desea utilizar transformaciones afines con coeficientes imaginarios, se puede hacer una demostración parecida a la anterior. Si una cúbica posee dos asíntotas imaginarias, éstas se cortarán en un punto real A' y cortarán a la asíntota real en dos puntos imaginarios conjugados B' y C' cuyo punto medio será real. Podemos someter la cúbica a una transformación afín de modo que las coordenadas de los transformados de estos puntos, A. B, C, tengan las coordenadas $A(0,1)$, $B(-\sqrt{3}i/2,-1/2)$, $C(\sqrt{3}i/2,-1/2)$, (escogidas así por analogía con el caso anterior), con lo que las ecuaciones de las asíntotas serán:

$$BC)\ \ 2y + t = 0\ ,\quad AC)\ \ y - i\sqrt{3}x/2 - t = 0\ \ ,\quad AB)\ \ y + i\sqrt{3}x/2 - t = 0$$

La cúbica degenerada formada por estas tres rectas será

$$f(x,y,t) \equiv (2y + t)((y - t)^2 + 3x^2) = 0$$

y las derivadas parciales de la forma f serán

$$f_x(x.y.t) = 12xy + 6xt$$

$$f_y(x.y.t) = 6y^2 + 6x^2 - 6yt - 2t^2$$

$$f_t(x.y.t) = -3y^2 + 3x^2 - 4yt + 3t^2$$

En consecuencia, el diámetro conjugado a la dirección de punto impropio $(p,q,0)$ será

$$4pqx + 2(q^2 - p^2)y - (q^2 + p^2)t = 0$$

que es la recta de coordenadas

$$u = 4pq\ \ ,\quad v = 2(q^2 - p^2)\ \ ,\quad w = -(q^2 + p^2)$$

Siendo muy fácil eliminar p y q, resulta que el lugar geométrico de los diámetros es la cónica de rectas $u^2 - v^2 + 4w^2 = 0$, formada por las tangentes a la hipérbola equilátera $4(x^2 - y^2) - t^2 = 0$. Ésta hipérbola es tangente a la asíntota real en el punto *M(0.-1/2)* y tiene su centro en el origen, situado en el segmento *AM*, a doble distancia de A que de M. Teniendo en cuenta las propiedades que se conservan en una afinidad, podemos afirmar:

Los diámetros de una curva cúbica con dos asíntotas imaginarias conjugadas (que se cortan en un punto real A) y la otra asíntota real, son tangentes a una hipérbola; esta hipérbola es tangente a la asíntota real en un punto M y tiene su centro O en segmento AM, de modo que AO = 2·OM.

Nos quedan por considerar los casos de que la cúbica tenga una intersección doble (o triple) con la recta impropia; en este caso no podemos reducir la determinación de sus diámetros a la de los de la terna de sus asíntotas, que no existe. En primer lugar consideraremos el caso de que la cúbica corte a la recta impropia en dos puntos confundidos en I, siendo I punto simple de la cúbica, y otro distinto, J, con lo que tendrá una asíntota que pasa por J. Tomaremos ésta como eje $y = 0$, el origen en uno de sus puntos y el eje $x = 0$ pasando por I (el sistema cartesiano no tiene por qué ser ortogonal). La ecuación de la cúbica será entonces

$$f(x,y,t) \equiv ax^2y + bxyt + cy^2t + dxt^2 + eyt^2 + kt^3 = 0$$

y las derivadas parciales de f son

$$f_x(x.y.t) = 2axy + byt + dt^2$$

$$f_y(x.y.t) = ax^2 + bxt + 2cyt + et^2$$

$$f_t(x.y.t) = bxy + cy^2 + 2dxt + 2eyt + 3kt^2$$

El diámetro conjugado a la dirección de punto impropio $(p,q,0)$ será la recta de coordenadas

$$u = 2apq \ , v = ap^2 \ , \ w = bpq + cq^2$$

y es fácil eliminar p y q , resultando que el lugar geométrico de los diámetros es la cónica de rectas

$$cu^2 + 2buv - 4avw = 0$$

que evidentemente es una parábola (pues se satisface para $(0,0,1)$) de eje paralelo a $x = 0$ y tangente a la asíntota $y = 0$ (pues se satisface para $(0,1,0)$. Podemos, por tanto, enunciar:

Los diámetros de una curva cúbica con una sola asíntota y que es tangente a la recta impropia en un punto I son tangentes a una parábola cuyo punto impropio es también I y que es tangente a dicha asíntota.

Si la cúbica tiene un punto doble impropio, I, y otro punto impropio, J, distinto, tomando la asíntota que pasa por J como eje $y = 0$ y como eje $x = 0$ la paralela media a las asíntotas tangentes en el punto doble I , su ecuación quedará en la forma

$$f(x,y,t) \equiv (ax^2 + bt^2)y + ct^2x + dt^3 = 0$$

(siendo $b = 0$, si el punto doble es de retroceso). La derivada parcial $f_t(x.y.t)$ en este caso se anula en $(p,q,0)$, con lo que todos los diámetros pasarán por el punto $(0,0,1)$.

Por último, si la cúbica corta a la recta impropia en tres puntos confundidos en I , tomaremos como origen un punto de la cúbica y la tangente en él como eje $y = 0$. Si además el eje $x = 0$ lo tomamos pasando por I , la ecuación de la cúbica quedará en la forma

$$f(x,y,t) \equiv ax^3 + bx^2t + cxyt + dy^2t + eyt^2 = 0$$

y la derivada parcial $f_y(x.y.t) = cxt + 2dyt + et^2$ se anula para cualquier punto $(p,q,0)$, con lo que todos los diámetros pasarán por el punto impropio $I(0,1,0)$. En definitiva:

Los diámetros de una curva cúbica con punto doble impropio o que tenga tres intersecciones confundidas con la recta impropia, pasan todas por un punto (e incluso pueden coincidir).

El último caso, especialísimo, ocurre, por ejemplo, para la cúbica $y = x^3$.

3. Diámetros de una cúbica circular

Las cúbicas circulares fueron estudiadas ampliamente en [2], donde se definió su foco (intersección de las dos asíntotas isótropas, imaginarias conjugadas). Lo dicho anteriormente permite el trazado sencillo del diámetro de una cúbica circular conjugado con una dirección, si se conocen su foco y su asíntota real. En efecto, ese diámetro será el mismo para la cúbica que para el conjunto de sus tres asíntotas (dos isótropas y una real). Para todas las rectas de una dirección, ω, el centro de gravedad (punto medio real) de sus intersecciones con las dos isótropas del foco se halla sobre la recta que pasa por ese foco perpendicular a ω. Así, resulta inmediato que:

El diámetro de una cúbica circular conjugado con una dirección, ω, se puede hallar de la siguiente manera: sea G el punto de intersección de la asíntota real con la recta que pasa por el foco F de dirección ω y H el de intersección de esa asíntota con la recta perpendicular a la anterior por F (Figura 2). Si D es el punto del segmento FG que cumple 2·FD = DG, el diámetro buscado es la recta DH.

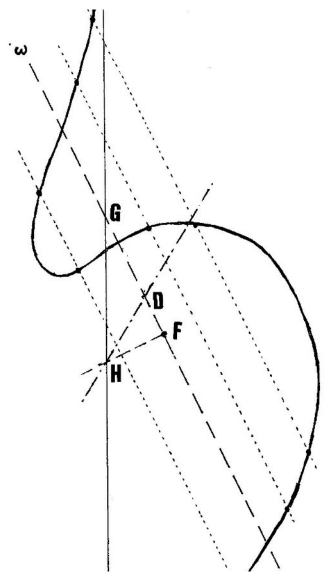


Figura 2: Determinación del diámetro conjugado

4. Diámetros de una cuártica bicircular

Podemos aplicar las propiedades anteriores a las cuárticas bicirculares estudiadas en [3]. Para una de ellas bifocal, los diámetros correspondientes a una dirección serán los mismos que los de las cuatro asíntotas, o sea las rectas isótropas de los dos focos. El centro de gravedad (punto medio) de las intersecciones de una recta con el par de isótropas de un foco, está en la recta perpendicular a ella por ese foco, de modo que para las cuatro asíntotas, el diámetro conjugado a una dirección será la paralela media de las dos rectas perpendiculares a ella por ambos focos:

Para una cuártica bicircular bifocal, el diámetro conjugado de una dirección es la recta perpendicular a esa dirección que pasa por el punto medio del segmento que une los dos focos. Todos los diámetros pasan por ese punto (aun cuando la cuártica no lo tenga como centro de simetría).

Como caso límite de estos, se tiene:

Para una cuártica bicircular monofocal, el diámetro conjugado de una dirección es la recta perpendicular a esa dirección que pasa por su foco. Todos los diámetros pasan por ese punto.

Tal ocurre, por ejemplo, en la cardioide estudiada en [3].

Referencias

[1] R. Moreno Castillo. *Plücker y Poncelet.* Nivola **21**. Madrid, 2005.

[2] J. Fernández Biarge. *Algunas propiedades de las cúbicas circulares.* Boletín de la Sociedad Puig Adam, **34** (1993), págs. 21-38.

[3] J. Fernández Biarge. *Cuárticas bicirculares.* Boletín de la Sociedad Puig Adam, **77** (2007), págs. 34-43.

Lo que debí hacer y no hice: un modelo matemático para el amor

Fco. Javier de Vega Fernández

Master en Investigación Matemática, Univ. Complutense de Madrid
Colegios Ramón y Cajal, Madrid
jdvfgp@hotmail.com

Abstract

The following article proposes a mathematical model for loving relationships. We will start from two very simple Hypothesis, being the hypothesis I "the person who falls in love tends to idealize the loved person" and Hypothesis II "as soon as there is a real contact with the loved person, this one does not resemble to the idealized and mithologized being you had imagine"and by imitating the Lotka-Volterra´s classic model, we reach to spectacular results, which are very known for everybody.

.

Dedicado al profesor *Eugenio Roanes Macías* en su jubilación: sus simpáticas clases contagian un entusiasmo por las matemáticas difícil de olvidar. Es por esto que seguirá impartiendo clase durante muchos años en el recuerdo de sus alumnos.

Yo sé un himno gigante y extraño / que anuncia en la noche del alma una aurora, / y estas páginas son de ese himno / cadencias que el aire dilata en las sombras. [...] Pero en vano es luchar, que no hay cifra / capaz de encerrarle; [...]

(G. A. Bécquer)

Introducción

Se trata de matematizar los misterios del amor de pareja. Veremos que partiendo de hipótesis muy simples y aceptadas por casi todos, se llega a resultados espectaculares, aunque bien conocidos (¡qué voy a decirles del amor que ustedes no sepan...!)

Los dos supuestos de los que partimos son los siguientes:

I) la persona que se enamora, si no tiene contacto con su ser amado, tiende a idealizarlo, es decir, su amor crece desmesuradamente

II) en cuanto se establece el contacto con la persona amada, es inevitable decepcionarse en cierto modo, es decir, la persona que amas no es como la habías idealizado y mitificado.

1 Obtención del modelo

Con estas dos hipótesis, imitando el modelo clásico de Lotka-Volterra, podemos establecer un sistema de ecuaciones diferenciales que nos mida la "variación de amor".

Supongamos una pareja concreta formada por un hombre y una mujer. Denotamos por x(t) a la "cantidad de amor que siente el hombre por la mujer". Esta cantidad variará con el tiempo, t. Del mismo modo, sea y(t) la "cantidad de amor que siente la mujer por el hombre".

Como se ha indicado, en el supuesto *I)*, cada individuo tiende a idealizar a su ser querido, si no establece contacto con él, por lo que su "cantidad de amor" (¡sea lo que sea esto!) crecerá. En términos de ecuaciones diferenciales: si $\frac{dx}{dt}$ es la variación de la cantidad de amor del hombre con respecto al tiempo, podemos expresar el supuesto *I)* mediante la ecuación $\frac{dx}{dt} = \alpha x$, donde α es una constante real. (¡El amor crece si se alimenta de fantasías!).

Pero, en cuanto nos topamos con la realidad, es decir, en cuanto entra en juego el supuesto II), hay que restar en la ecuación un factor βxy, donde β es otra constante real. Por tanto, la ecuación diferencial que modeliza la variación de amor del hombre será:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \ ; \ \alpha,\beta \in \mathrm{R} \ ; \ \alpha,\beta > 0 \qquad (1)$$

(Esta ecuación ¡*habla* de *I)* y *II)* de forma casi evidente!)

Análogamente, la variación de amor de la mujer con respecto al tiempo será:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma y - \delta xy \; ; \; \gamma,\delta \in \mathrm{R} \; ; \; \gamma,\delta > 0 \qquad (2)$$

Tenemos ya nuestro sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \gamma y - \delta xy \qquad (3)$$

2 Representación del modelo

El sistema (3) es no-lineal. Sus puntos de equilibrio son $(0,0)$ y $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha}{\beta}\right)$. Haciendo el estudio local de estos puntos obtenemos una representación del *diagrama de fases* de nuestro sistema. Supondremos desde ahora, $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$. Ayudándonos del sistema de cómputo algebraico *Maple*, podemos dibujar el diagrama de fases e intentar ¡comprender lo incomprensible del amor!

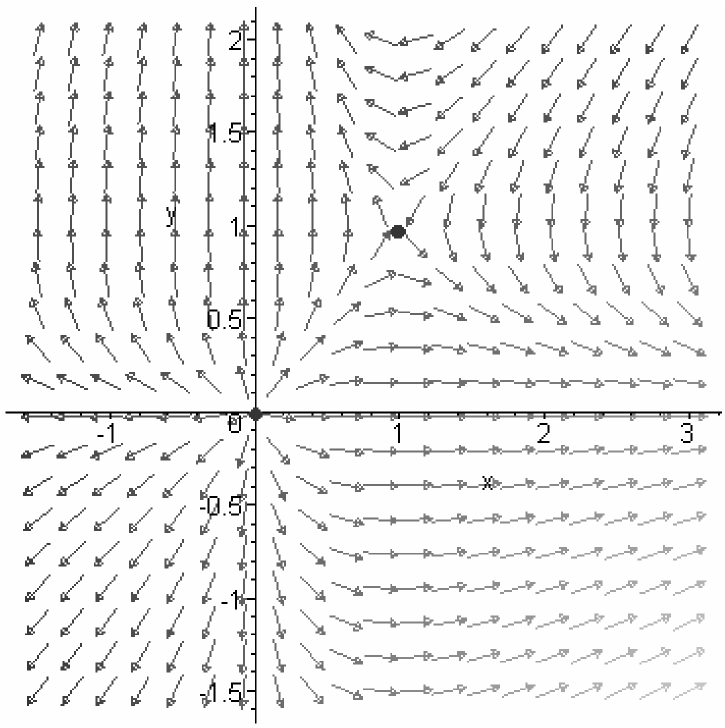


Figura1: *Modelo del amor obtenido con Maple*

3 Interpretación del modelo

El punto de equilibrio (0,0) es muy fácil de interpretar. Si no sientes atracción o repulsión por alguien y viceversa, la estabilidad es absoluta e indiscutible. Centrémonos pues en el punto (1,1). Este sería el estado ideal de amor. Donde la pareja se estabiliza y se quiere para siempre. Ahora, este estado es casi imposible de alcanzar. En nuestro caso, sólo cuando el hombre en su estado inicial siente exactamente la misma cantidad de amor que la mujer, la pareja irá acercándose a este estado excepcional. En los demás casos, como en la realidad, el amor no es tan idílico. Veamos.

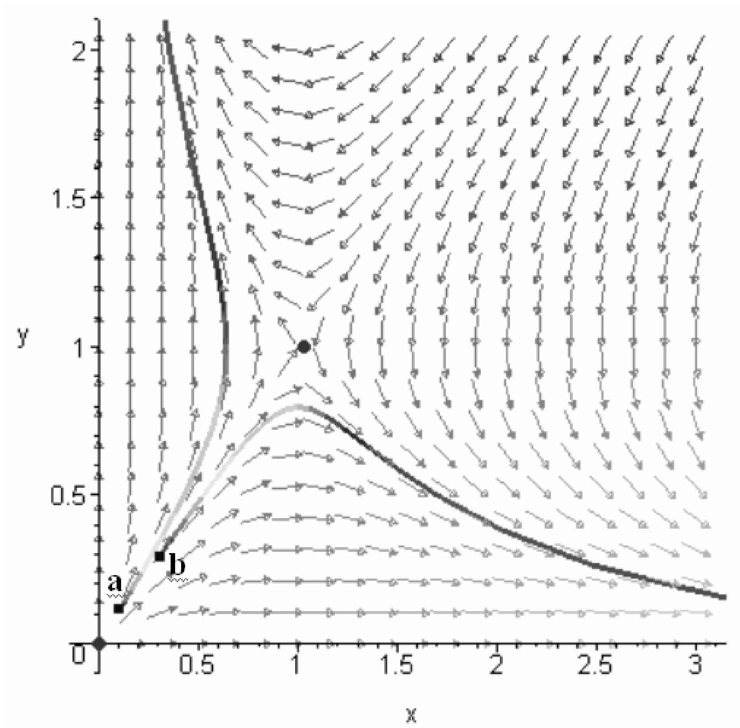


Figura 2: *Datos iniciales similares con consecuencias dispares*

En la Figura 2 están representadas dos trayectorias que corresponden a valores iniciales **a** = (0.1 , 0.11) y **b** = (0.3 , 0.29) . Podríamos interpretar que son dos parejas muy similares al comienzo de la relación. Además, las dos parecen aproximarse al "pleno amor", pero en el primer caso es el chico el que empieza a disgustarse con la relación y en el segundo caso es la chica la que va perdiendo el interés por su pareja.

Obsérvese también que mientras uno de los miembros pierde su motivación con la relación, el otro va aumentando su interés por ésta. ¡Mientras que uno empieza a "pasar del tema", el otro se obsesiona!

Es tan corto el amor y tan largo el olvido. (Pablo Neruda).

Con un poco de atención al diagrama de fases es fácil convencerse de lo siguiente: cuando hay demasiada diferencia en los valores iniciales, la relación no funciona. En la Figura 3 se podría interpretar que el chico, en el inicio de la relación (punto **a**), está muy enamorado de la chica y ésta, aún sintiendo algo por él, no puede evitar sentirse agobiada por éste. Como se observa, la relación no tiene buen fin y, como es lógico, la chica va perdiendo el interés ante su agobiante pareja.

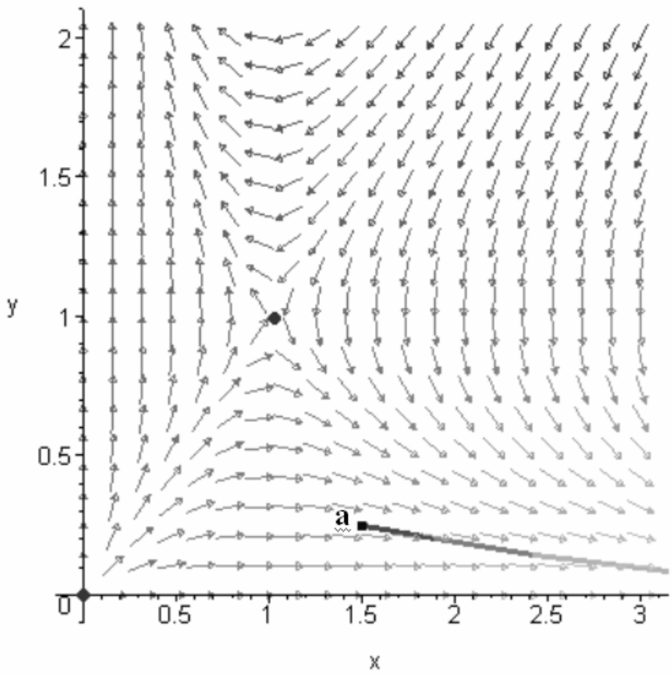


Figura 3: *Demasiada diferencia en los valores iniciales*

No es bueno empezar con mucho ímpetu la relación. En la Figura 4, la pareja empieza demasiado ilusionada (punto inicial **a**). Como se ve, a medida que transcurren los días, se hace evidente que *cualquier tiempo pasado fue mejor*.

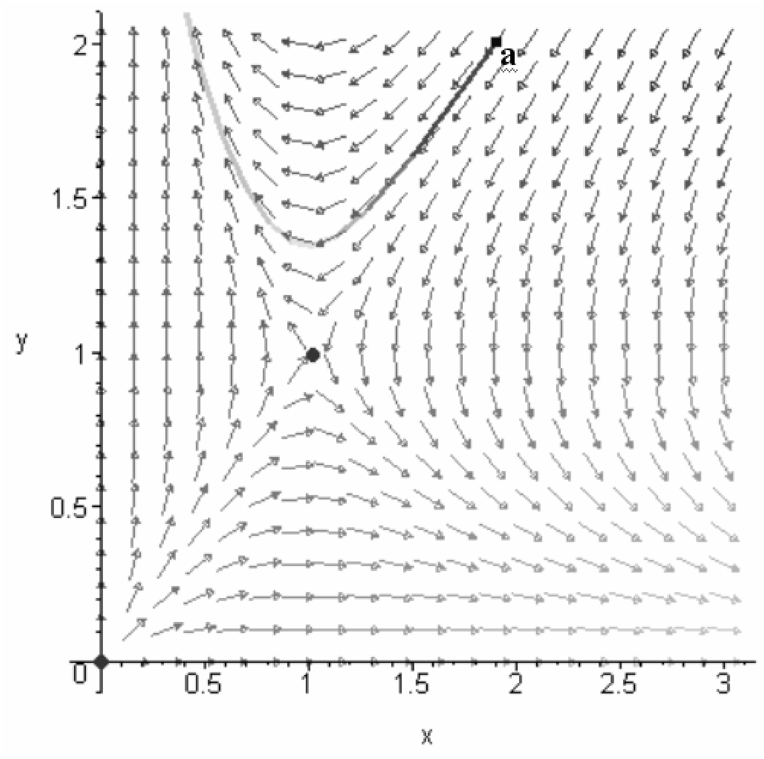


Figura 4: *Relación con impetuoso comienzo*

Las relaciones en las que no ocurren los casos descritos en las Figuras 3 y 4, el inicio de las mismas es bueno y prometedor. Véase la Figura 2 en el que las dos parejas descritas se aproximaban a la estabilidad y "pleno amor".

Debido al comportamiento asintótico de las trayectorias, se hacen evidentes las siguientes frases populares: *el amor nunca se olvida*; *aunque la llama del amor se apague, siempre quedan cenizas*.

Se justifican en este modelo los amores platónicos en los cuales alguien se enamora de una persona y ésta, ni le conoce. Esto correspondería en nuestro modelo a situaciones iniciales en los semiejes positivos.

Ahora nos ocupamos de dos resultados que están más ocultos en el modelo, pero que quedarán claros con sus correspondientes diagramas de fases.

Los matrimonios concertados pueden funcionar, con un pequeño matiz: aunque no se conozcan, bastaría una mínima atracción por las dos partes, para que todo funcione. Nuestro modelo nos asegura que *¡el amor ya llegará!*

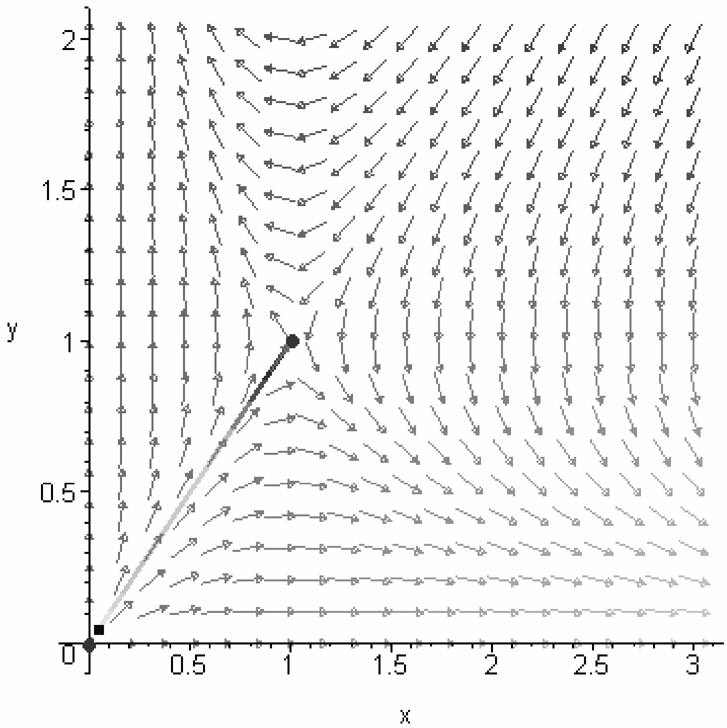


Figura 5: *Evolución de una pareja concertada*

La Figura 5 corresponde al punto con valor inicial (0.05, 0.05) muy próximo al (0, 0). Se podría interpretar que los integrantes, se gustan mínimamente. No obstante, su relación "concertada" funciona a la perfección. No queda por menos que recordar la siguiente frase.

El amor a menudo es el fruto del matrimonio (Moliére).

Es muy común en las parejas, "darse un tiempo", cuando no funciona la relación. Son conocidos y escuchados los típicos consejos: "pasa de ella" o "pasa de él, verás como te vuelve a hacer caso". ¡Esto puede funcionar e invertir los papeles de la relación! Veamos.

La siguiente pareja, tendría como valor inicial el punto **a** de la Figura 6. Todo comienza muy bien (¡los inicios son fantásticos como hemos dicho!), pero la relación se tuerce y es la chica la que decide dejar al chico (estamos ahora en el punto **b** de la Figura 6). El chico reacciona pasando de su pareja. Como si no existiese (tendrá que morderse la lengua para no llamar por teléfono...). Esta reacción sería equivalente a pasar ahora al punto **c** donde “se ha dado la vuelta a la tortilla”. Incluso se observa una reconciliación *¡Todo el mundo sabe que lo mejor de una pelea de pareja es la reconciliación! (si la hay)*. Este último diagrama justifica además las típicas parejas que se pasan la vida dejando y volviendo a empezar la relación ¡Esto puede funcionar!

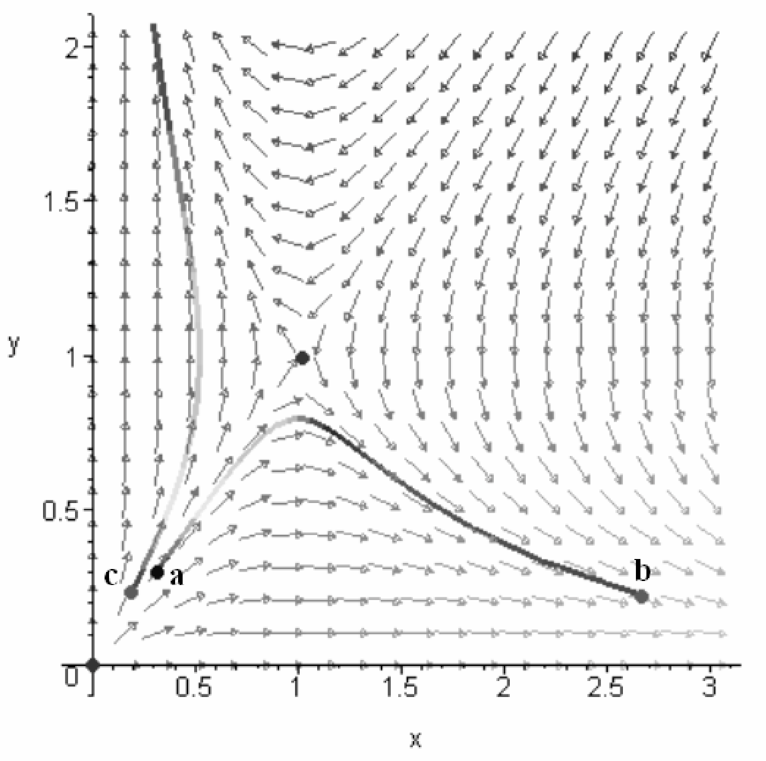


Figura 6: *Pareja con ruptura y reconciliación*

Para terminar, analizamos los demás cuadrantes del diagrama de fases. Si lo contrario de amor es odio y desprecio, nuestro diagrama de fases dice todavía algunas cosas interesantes.

Resulta espectacular observar que *el amor es ciego* pues, si alguien siente atracción por una persona y ésta le desprecia, su reacción es, como todos sabemos, ¡enamorarse más y más!

La situación inicial (punto **a** de la Figura 7), muestra en este ejemplo que la *persona y* desprecia a la *persona x*. Observamos también que la *persona x* siente atracción por la *persona y*. La cegada *persona x* se enamora más y más aguantando los desplantes de su no correspondida pareja. Como consuelo queda indicar que el odio de la *persona y* tiende a desaparecer.

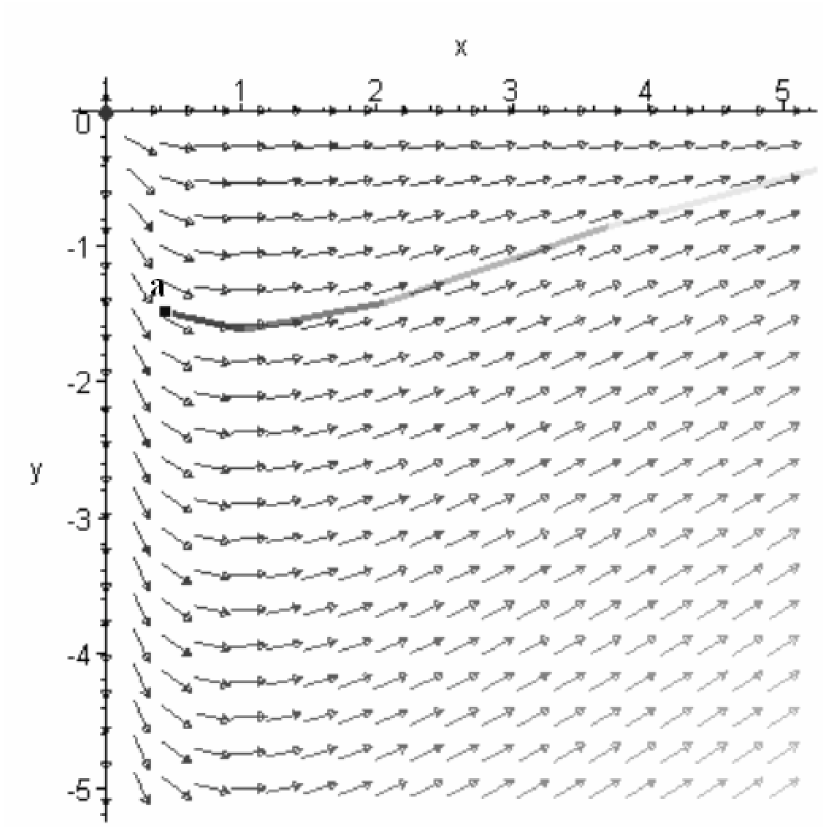


Figura 7: *El amor crece ante los desplantes del ser querido*

Los valores iniciales en los semiejes negativos nos indican que el odio inicial de una persona hacia otra crece, si ésta le ignora por completo. (*No hay mayor desprecio que no hacer aprecio)*.

Si dos personas se repudian, nuestro modelo predice que su odio crecerá y crecerá. (*El odio engendra odio*; *Siembra vientos y recogerás tempestades)*.

La trayectoria de la Figura 8 corresponde al valor inicial (-0.2, -0.3). Observamos cómo la animadversión de la pareja crece y crece. *¡Qué cerca está el amor y el odio!* Si no lo creen, fíjense en el punto (0, 0).

Cuando una persona termina una relación amorosa, es muy común la frase: *debí hacer esto o aquello*.

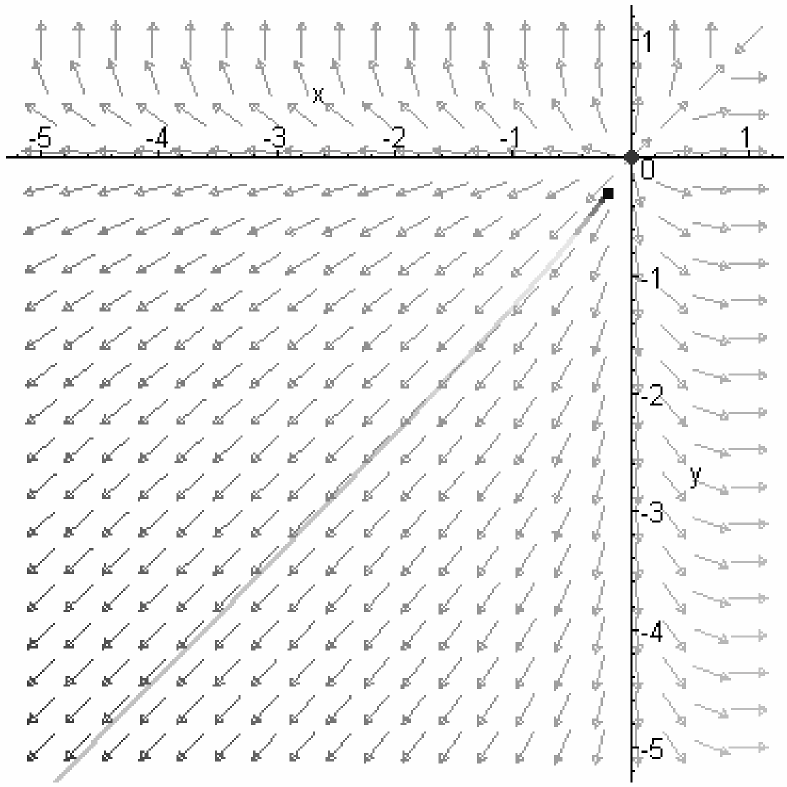


Figura 8: *La animadversión crece, si el desprecio es mutuo*

Epílogo

El sistema de ecuaciones diferenciales que hemos utilizado, se propuso en el examen final de una asignatura de la licenciatura en Matemáticas. Nervioso, al ver que podía "lucirme", contando lo expuesto en estas líneas, no acerté a ver una simple solución particular de un ejercicio precedente. Sin duda, debí contar todo esto y no lo hice. Es esta anécdota una pequeña historia de amor, ¿verdad?

El que quiera estudiar el amor, siempre será discípulo (Sara Bernhardt).

Bibliografía

[1] M. Braun (1990): *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamérica.

[2] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (1999): *Calculos Matematicos por Ordenador con Maple V.5.* Rubiños-1860 S.A.

Implementación del sistema de numeración maya en *Maple*: una experiencia interdisciplinar

Eugenio Roanes Lozano
Francisco A. González Redondo

Secc. Deptal. de Álgebra, Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
eroanes@mat.ucm.es , faglezr@edu.ucm.es

Abstract

A classroom interdisciplinary activity at Teacher Training Degree level *is presented in this article. It introduces the Mayan number system and numeric base conversion, in order the students to implement the corresponding procedures in the computer algebra system* Maple*. What started as a brief cooperation during the academic year course 2008-2009 has turned to be a successful activity that has occupied three sessions of the elective subject* Educational Applications of Computer Algebra Systems *and has given raise to a curious set of* Maple *procedures.*

Dedicado a Eugenio Roanes Macías (*Eugenio padre*), siempre tan interesado en los temas de Matemática Computacional y Educación Matemática, por sus dos compañeros en la *Sección Departamental de Álgebra*, con cariño y agradecimiento, tras muchos años de *convivencia*.

1 Introducción

Grosso modo, hasta mediados de los años *70*, el sistema educativo de Enseñanza Secundaria en España estaba centrado en el estudio de la geometría plana clásica. Tras la llegada de la *Matemática Moderna*, se insiste a nivel preuniversitario en el manejo de la teoría de conjuntos, relaciones, correspondencias, estructuras algebraicas, cambios de base, etcétera. En la actualidad estos temas no se tratan prácticamente antes de ingresar en la universidad y, por ejemplo, la Educación Secundaria Obligatoria (10-16 años) se orienta a la consecución de *competencias básicas*.

En este artículo se describe una experiencia interdisciplinar concreta a nivel de Magisterio, llevada a cabo durante el curso académico 2008-2009. Se ha introducido en una primera sesión el sistema de numeración maya desde el punto de vista de la Historia de la Matemática. Ello da pie a desarrollar en las dos sesiones siguientes en el sistema de cómputo algebraico *Maple* (URL, 2008a), el que es, para estos alumnos, su primer *proyecto* (hasta aquí han resuelto cuestiones y problemas más o menos de inmediata aplicación). El trabajo es guiado por el profesor y se sigue el esquema habitual de la Figura 1:

Estudio de problema

↓

Traducción del `problema a lenguaje matemático (matematización)

↓

Resolución del problema

↓

Implementación de la solución encontrada al problema

Figura 1: *Esquema de trabajo*.

Se insiste a lo largo de la experiencia en temas interdisciplinares, como la conveniencia de buscar los antecedentes históricos, la necesidad de formular con precisión en matemáticas, de comprobar la presunta solución general encontrada, de seguir buenas prácticas al programar (por ejemplo, programar con procedimientos y subprocedimientos, cuya corrección se puede comprobar independientemente).

Terminaremos esta Introducción subrayando que una experiencia similar, aunque desarrollada a un nivel educativo anterior y con medios no tecnológicos, se detalla en (Roanes, 1971).

2 El sistema de numeración maya

La civilización maya desarrolló un singular mundo de conocimientos astronómicos y matemáticos en y desde sus templos, el ámbito más propio de un sistema de organización política, como autocracia sacerdotal, que basaba su poder en la Astrología.

Sin instrumentos de observación (desconocían el vidrio y, por tanto, carecían de lentes), y sin relojes de arena o de agua (clepsidras) para estimar períodos de tiempo como nuestras horas, minutos o segundos, su unidad de tiempo más pequeña era el *kin* o día, cuya duración medían a partir del registro repetido de las sombras proyectadas por una vara de madera emplazada verticalmente en el suelo, el *gnomon* (utilizado también por los griegos para determinar el acimut y la altura del sol).

A partir del día, las siguientes unidades eran:

- el *uinal* o mes de 20 *kines* (días),
- el *tun* o año de 18 *uinales* ($18 \cdot 20 = 360$ días),
- el *katun* de 20 *tunes* ($20 \cdot 360 = 7200$ días),
- el *baktun* de 20 *katunes* ($20 \cdot 20 \cdot 360 = 144.000$ días),
- el *pictun* de 20 *baktunes* ($20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 360 = 2.880.000$ días),
- etc.

Como parece obvio, los astrónomos mayas sabían qué correcciones tenían que hacer por haber considerado un año de 360 días en vez del solar de 365, 25 (Grube, 2001).

Con este sistema, contando grandes períodos de tiempo, estimaron la revolución sinódica de Venus (que redondearon en 584 días), la duración de una lunación en lo que hoy escribiríamos como 29,53020 días, y llegaron a registrar períodos de tiempo de 300.000.000 años. Así podemos comprobarlo en estelas conmemorativas y en las páginas de los pocos libros mayas (códices) que se conservan (Landa, 2002), en los que encontramos un sistema de numeración muy original con tres características esenciales: era posicional, de base veinte y disponía de un cero.

Efectivamente, asociado a su origen religioso, las cantidades numéricas que registraban los mayas iban ligadas al dios correspondiente a cada orden: el dios portador de los *kines*, el dios portador de los *uinales*, el dios portador de los *tunes*, etc. En esta realidad se fundamenta su concepción del "cero": un símbolo para que no quede vacío el espacio que debía acompañar al dios portador de la cantidad ausente de un orden concreto (Ifrah, 2008).

En suma, este sistema concebido en los templos servía perfectamente para representar fechas (días trascurridos), preparar rituales y conmemoraciones, etc., pero no permitía realizar operaciones. Para estas actividades matemáticas ajenas a los ritos religiosos y relacionadas más bien con la administración y el comercio, descartaron la irregularidad del *tun* (año) de 360 *kines*, adoptando el orden natural $20 \cdot 20 = 400$ propio de un sistema de base veinte.

Así como en nuestro sistema decimal necesitamos nueve cifras (y el cero), para escribir cualquier número los mayas precisaban diecinueve. Pero los símbolos utilizados para cada una de estas diecinueve unidades eran muy simples: puntos y trazos horizontales (véase la Figura 2).

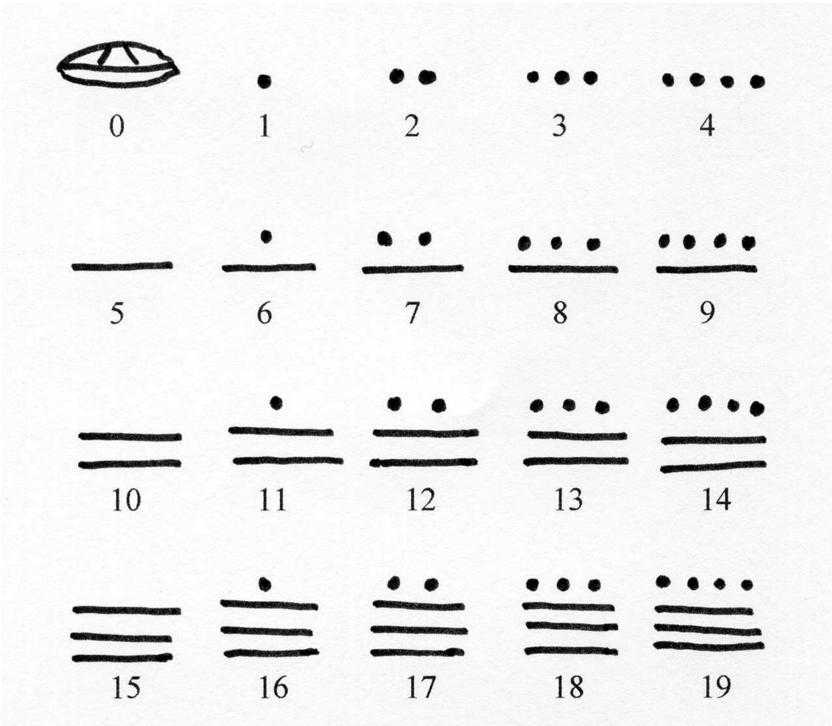


Figura 2: *Numerales mayas.*

Cuando hoy escribimos un número entero positivo de cuatro cifras en base diez, $n = wxyz$, donde w, x, y, y z pueden valer de 1 hasta 9 (o 0), realmente estamos abreviando la expresión:

$$n = w \cdot 10^3 + x \cdot 10^2 + y \cdot 10^1 + z \cdot 10^0$$

Para escribir cualquier número mayor de diecinueve, los mayas situaban los símbolos referidos en una columna vertical que contenía tantos pisos como órdenes de unidades, incluyendo un símbolo especial, una especie de caracola, para llenar un orden que fuera a quedar vacío de puntos y/o trazos, el cero maya. De esta manera los mayas podían expresar lo que en nuestra notación sería cualquier número *m* de la forma:

$$m = \ldots + w \cdot 20^3 + x \cdot 20^2 + y \cdot 20^1 + z \cdot 20^0$$

Así, por ejemplo, el número

$$1.368.280 = 8 \cdot 20^4 + 11 \cdot 20^3 + 0 \cdot 20^2 + 14 \cdot 20^1 + 0 \cdot 20^0$$

lo representaban mediante puntos, trazos y caracolas como se muestra en la Figura 3.

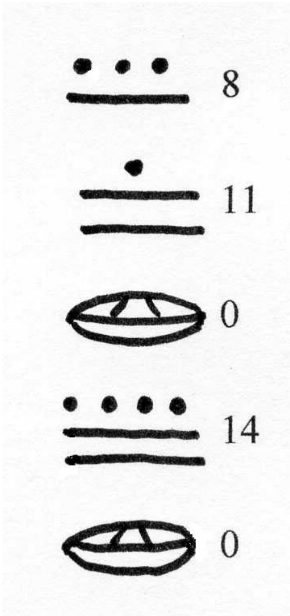


Figura 3: *Ejemplo de numeración maya.*

Más allá de estas consideraciones básicas, pueden verse otros muchos desarrollos matemáticos del pueblo maya en el libro de Romero (2004).

3 Implementación de cambio de base de numeración en *Maple*

Cuando se considera el cambio de base desde el punto de vista matemático, da igual que la base destino, *b*, sea menor o mayor que *10*. Si *b* es mayor que *10*, sobre la marcha decidimos qué símbolos extra utilizar. Por ejemplo para base hexadecimal es habitual tomar como números de una cifra:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Este es un problema que presenta una dificultad computacional añadida típica: si queremos seguir usando la notación posicional usual y escribir un programa general de cambio de base, habría que acotar la base mayor que se podría usar (*m*) y preparar un juego de *números* de una cifra (desde *0* hasta *m-1*).

Para evitar este inconveniente comenzaremos desarrollando un procedimiento de paso de base *10* a cualquier base menor que *10*.

A continuación desarrollaremos un procedimiento de cambio de base *10* a cualquier base, devolviendo la salida en formato lista, en la que se escriben en base *10* las cifras del número en base *b* (aunque haga falta más de una cifra en base *10* para representar cada cifra en base *b*). Así por ejemplo, el número *140* en base *10* se corresponde con *[11,8]* en base *12* (*140* se puede agrupar como *11* docenas y sobran *8* unidades). De hecho esta es la solución que se ha adoptado en *Maple* para su comando de cambio de base `convert/base` (aunque, por alguna causa que ignoramos, este comando ordena las cifras de izquierda a derecha, en lugar de hacerlo de derecha a izquierda, como es habitual).

Puesto que existe un comando interno que realiza esta acción, no se presenta aquí una novedad en *Maple*, sino una experiencia didáctica de repaso de los procesos de cambio de base (estudiados por los alumnos en asignaturas de Didáctica de las Matemáticas) y una práctica de programación.

Se pueden encontrar fácilmente detalladas introducciones a *Maple* como (Corless, 2003; Heck, 2002; Roanes & Roanes, 1999).

3.1 Implementación en *Maple* de cambio de base a base menor que *10*

Pensemos como pasar un número *n* de base *10* a base *b* (*b*<*10*) con input y output en la forma habitual.

El resto de dividir *n* entre *b* son las unidades sobrantes, y el cociente corresponde con el número de *decenas* en base *b* que se han podido obtener con esas *n* unidades. El cociente y resto de la división entera se pueden obtener directamente con los comandos de *Maple* `irem` e `iquo`. Ahora bien, el número de *decenas* en base b obtenidas puede ser mayor que b, en cuyo caso habrá que reiterar el proceso para calcular cuantas *centenas* en base b, *unidades de millar* en base b, etc. podemos ir formando.

Interesará, pues, implementar un procedimiento recursivo, sin olvidar que, en cada caso, se corre la cifra un lugar, por lo que iremos multiplicando cada resto sucesivo por *10*.

Una posible implementación es la siguiente:

```
> base_b:=proc(n::nonnegint,b::nonnegint)
>   if n<b then n
>      else irem(n,b) + 10 * base_b(iquo(n,b),b)
>    fi;
> end:
```

Pasemos, por ejemplo, *166* a base *3*:

```
> base_b(166,3);
```

$$20011$$

3.2 Implementación en *Maple* de cambio de base a base cualquiera

El proceso (recursivo) es exactamente el mismo que en la subsección anterior, solo que el output se presentará en formato lista.

Notemos que las listas se escriben en *Maple* entre corchetes con sus elementos separados por comas, y que el comando `op` permite obtener los elementos de la lista separados por comas (esto es, elimina los corchetes) y se puede usar para concatenar las dos listas.

Una posible implementación es la siguiente:

```
> base_bl:=proc(n::nonnegint,b::nonnegint)
>   if n<b then [n]
>          else [op(base_bl(iquo(n,b),b)) ,
>                op(irem(n,b))]
>    fi;
> end:
```

Pasemos, por ejemplo, *166* a base *3*:

```
> base_bl(166,3);
```

$$[2, 0, 0, 1, 1]$$

y *665* a base *20*:

```
> base_bl(665,20);
```

$$[1, 13, 5]$$

3.3 Implementación de la representación del sistema de numeración maya

Es posible hacer que *Maple* trabaje con imágenes JPG, e implementar de este modo un paquete de paso al sistema de numeración maya usando imágenes de los jeroglíficos generadas de modo externo, como se muestra en (URL, 2008b). No obstante hemos considerado más oportuno usar en este caso los símbolos existentes en *Maple* para centrarnos en cuestiones de programación más habituales.

La implementación se ha planteado en dos pasos. Primeramente implementamos un procedimiento que transforme los números *0* al *19* (los de *una cifra* en base *20*) a notación maya. Para ello representamos el cero maya -una especie de ojo- con la letra griega *theta mayúscula*, el uno con un punto, el dos con dos puntos, etcétera y el cinco con varios guiones bajos consecutivos. Los mayas realmente usaban una base 20 que alterna para los símbolos las bases 5 y 4, y el número de *rayas* se puede calcular iterativamente. Una vez dibujadas las rayas, si las hubiera, se reenvía al mismo procedimiento para que coloque encima los puntos que sea menester.

Una posible implementación sería:

```
> maya19:=proc(n::nonnegint)
>   local i;
>   if n=0 then print(Theta)
>    elif n=1 then print(`. `)
>     elif n=2 then print(`.. `)
>      elif n=3 then print(`... `)
>       elif n=4 then print(`.... `)
>        elif n=5 then print(`_____`)
>         else if irem(n,5)>0 then
```

```
>                               maya19(irem(n,5)) fi;
>                for i to iquo(n,5) do maya19(5) od
>    fi;
>  end:
```

Veamos algunos ejemplos:

```
> maya19(0);
```

Θ

```
> maya19(8);
```

...

_____

```
> maya19(10);
```

_____

_____

Finalmente, usemos el procedimiento anterior como subprocedimiento de otro procedimiento que pasa números cualesquiera, primero a base *20* y los elementos de la lista resultado, a notación maya:

```
> maya:=proc(n::nonnegint)
>   local i,R;
>   R:=base_bl(n,20);
>   for i in R do maya19(i); print(`  `);  od;
>  end:
```

(entre cada grupo de símbolos correspondientes a una cifra intercalamos una línea en blanco).

Comparemos el paso a base *20* y a notación maya de algunos números:

```
> base_bl(105,20);
```

$$[5, 5]$$

```
> maya(105);
```

_____

```
______

> base_bl(3080,20);
                         [ 7 , 14 , 0 ]
> maya(3080);
                              ..
                            ______

                             ....
                            ______
                            ______

                              Θ
```

Notemos que el programa introduce una línea en blanco entre las representaciones mayas de cada cifra, al objeto de no confundir, por ejemplo:

- el número *10* (en base *10*), con
- el número *105* (en base *10*), esto es, el número *55* en base *20*,

pues ambos números se representan en el sistema maya con dos rayas horizontales. Esta ambigüedad no existiría si los símbolos correspondientes a cada cifra se colocaran uno al lado del otro (en lugar de "apilarlos") y no se variara el método de "apilar" los distintos símbolos para formar cada cifra.

4 Experiencia de clase

La asignatura optativa *Aplicaciones Educativas de los Sistemas de Cálculo Simbólico* es una asignatura cuatrimestral de la titulación de *Magisterio* de la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid. Se imparte íntegramente en un aula informática dotada con 40 ordenadores compatibles, en dos sesiones semanales de hora y media, estando limitado el número de alumnos que se pueden matricular a uno por ordenador. Hay una amplia oferta de asignaturas optativas y esta asignatura estaba a un tercio de su capacidad máxima.

Las sesiones son teórico-prácticas: tras breves presentaciones del profesor sobre su ordenador conectado a un proyector LCD, los alumnos comprueban en sus ordenadores lo que se ha mostrado y pasan a continuación a tratar de resolver algún problema relacionado que se propone.

La evaluación se propone que sea continua, evaluándose la resolución de las cuestiones propuestas. El examen queda para quien no asiste a clase regularmente o no sigue la asignatura correctamente. Este curso 2008-2009 todos los alumnos han aprobado la asignatura por notas de clase.

Aproximadamente la mitad de los alumnos había cursado con anterioridad alguna asignatura de contenido computacional (programación en *Logo*, Geometría Elemental con Sistemas de Geometría Dinámica o Matemática Elemental con *Derive*) y eran francamente buenos. Los demás no manejaban más que un procesador de textos. Además de que, con un grupo reducido es más fácil atender personalmente a cada alumno, la actitud de todos ellos era muy positiva y la relación entre nosotros francamente distendida y cordial. Un auténtico placer para quien disfruta de la docencia.

Esta experiencia se desarrolló en tres sesiones (ya se llevaban diez semanas con la asignatura y se habían tratado estructuras, funciones, programación, etcétera). En la primera clase (atípica) se presentó una introducción a la cultura maya y en particular a su sistema de numeración

La segunda y tercera clase se desarrollaron en el formato usual, dando pequeñas explicaciones y, sobre todo, pistas, para que ellos resolvieran el problema en sucesivos pasos, cada vez más complejos (primero desarrollando la solución matemática y luego implementándola).

Como agradable sorpresa, los mejores alumnos del grupo consiguieron realizar la práctica completa o casi completa, y los demás completaron las fases más sencillas y avanzaron bastante en las más complejas.

Conclusiones

Una vez más se comprueba como la sinergia entre distintas áreas de conocimiento (matemática, historia de la matemática y programación, en este caso) permite proponer y desarrollar actividades que resultan de una alta motivación para los alumnos. Además la motivación se refuerza cuando se desarrolla la docencia de forma altamente participativa. Esta actitud provoca que los resultados sean espectaculares.

Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente subvencionado por los proyectos TIN2006-06190 (Ministerio de Educación y Ciencia) y UCM2008-910563 (UCM - BSCH Gr. 58/08, Grupo de Investigación ACEIA).

Bibliografía

Corless, R. M., *Essential Maple. An Introduction for Scientific Programmers*, Springer-Verlag, NewYork, EEUU, 2002.

Grube, N. (ed.), *Los mayas, una civilización milenaria*, Könemann, Colonia, Alemania, 2001.

Heck, A., *Introduction to* Maple, *Springer*-Verlag, New York, EEUU, 2003.

Ifrah, G., *Historia universal de las cifras*, Espasa, Madrid, España, 2008.

Landa, D. de, *Relación de las cosas de Yucatán*, Dastin, Madrid, España, 2002.

Roanes, E., Didáctica de los convenios en que se basan los sistemas de numeración. Gaceta Matemática XXIII/3-4, 1971, 3-13.

Roanes Macías, E. & Roanes Lozano, E., *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5, Rubiños*-1860, Madrid, España, 1999.

Romero Conde, P., *Numerología matemática maya*, Centro de Estudios del Mundo Maya, Mérida, México, 2004.

URL, 2008a: `http://www.maplesoft.com/`

URL, 2008b: `http://www.mapleprimes.com/forum/convertmayannumber`

Competencia matemática y videojuegos

Benjamín García Gigante

Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid
benjamin.garcia@uam.es

Abstract

This paper is part of the author's doctoral thesis "Videogames: popular culture, entertainment media and resource to teach and learn of Mathematics", that will be read soon in the Universidad Autónoma de Madrid. We analyse the use of videogames in the teaching and learning of Mathematics at Primary School.

A Eugenio Roanes Macías,
con toda mi gratitud y afecto.

Introducción

Resulta curioso como suceden las cosas. Hace unos años, con motivo de la jubilación de Mª Paz Bujanda tuve la oportunidad de utilizar algunas páginas de este mismo boletín para agradecer el haberla tenido como profesora en la Facultad, su mano y compañía en mi entrada en el mundo de la educación matemática, y sobre todo su amistad. Hoy me permiten hacer lo mismo con el profesor Eugenio Roanes Macías, a quién conocí cuando abandonaba el nido de la Facultad para comenzar a volar por esos otros mundos desconocidos: mi primera conferencia, mis primeros congresos en Évora y Sevilla, mi primer trabajo como docente... En todos ellos siempre conté con la inestimable ayuda y apoyo de Eugenio Roanes "padre" (en palabras de Pilar). Y lo que es más importante, con su amistad.

En el caso de Mª Paz, escribí unas líneas que resumían parte del DEA que había presentado unos meses antes, y en el caso de Eugenio otras que forman parte de la tesis nacida a partir de dicho DEA, y que seguramente sea leída antes de que sea publicado este número dedicado al profesor Roanes Macías. En particular, en las siguientes páginas resumiremos uno de los principales trabajos que se han realizado sobre el aprendizaje que es posible alcanzar utilizando los videojuegos, debido a Gee (2004), y su relación con determinadas carencias que presentan nuestros escolares por lo que respecta a su competencia matemática.

1. Principios de aprendizaje de Gee

Infinidad de autores (B. García Gigante, 2009, pp. 181-186) han postulado el potencial educativo de determinados videojuegos, en particular, Gee (Ibíd.) sugiere que para dar respuesta a la pregunta de ¿por qué se aprende con estos videojuegos?, examinemos a un videojugador: ¿Qué es lo que hace que pase las horas muertas con un videojuego que en la mayoría de los casos es largo y complejo? ¿Cómo consigue un videojuego que el usuario aprenda a manejarlo? Una respuesta obvia es que son motivadores, pero evidentemente esto no es suficiente, la razón que esgrime Gee es que los videojuegos son tan motivadores porque están diseñados para provocar su aprendizaje y consiguen a la vez que los usuarios se diviertan con dicho aprendizaje. Por ello, argumenta Gee, si prestamos atención a los “buenos” videojuegos podremos aprender qué elementos significativos presentan, y aprehenderlos para llevarlos al entorno educativo, y en particular al de las matemáticas escolares. Si pudiéramos hacerlo, tendríamos alumnos que pagarían por aprender como pagan por un videojuego; el sueño de todo docente. De hecho Gee va más allá, asegurando que como los videojuegos están cada vez más presentes en la sociedad, los aprendizajes que generan contribuirán a crear una sociedad mejor, más inteligente y reflexiva.

Desde esta perspectiva, el autor identifica y caracteriza treinta y seis principios de enseñanza y para el aprendizaje presentes en los videojuegos. A continuación detallamos algunos de ellos.

2. Principio de los ámbitos semióticos y principio semiótico

A pesar de lo que pudiera parecer a simple vista, no existe una única manera de leer, no es lo mismo leer un libro de texto, que un manual del aire acondicionado, o un periódico, o un cómic, o una poesía, sencillamente porque hay formas diferentes de leer distintos tipos de textos. Perspectiva desde la cual, el alfabetismo tradicional no es algo unitario, sino que en él está presente la multiplicidad. Si pensamos detenidamente sobre este hecho, nos daremos cuenta de que esta multiplicidad implica que no podemos leer o escribir textos sin saber en qué ámbito cultural queremos realizar esas tareas. No existe un saber leer o escribir en general, se lee o se escribe dentro de un contexto sociocultural determinado. Por ejemplo si escribimos “Bajo maná, giro dos montañas, choque y estás a falta de una”, seguramente el lector no encontrará significado a nada de lo que hay escrito. Conocerá todos los términos, podrá definir cada una de las palabras, pero no encontrará su significado. Porque cualquier alfabetismo, encuentra su sentido dentro de las prácticas sociales en las que éste se inscribe, y el lector, que será competente en mil y un ámbitos específicos, seguramente será ajeno al mundo de Magic (por cierto un maravilloso juego de cartas), donde esta afirmación tiene un significado muy concreto. Lo curioso de ese texto es que, replicando los modelos de lectoescritura presentes a menudo en nuestro sistema educativo, podríamos validar su comprensión mediante las preguntas ¿Qué bajo? ¿Qué giro? ¿Cuánto te falta? El lector ajeno al mundo de Magic responderá sin duda alguna a estas preguntas de forma correcta, por lo tanto habremos de concluir que ha comprendido en toda su extensión el texto en cuestión.

Gee (Ibíd., 18), define el término semiótico como una forma de indicar que estamos hablando sobre cosas diferentes (textos, gráficos, imágenes, sonidos, gestos, movimientos, diagramas, ecuaciones, objetos, personas o relaciones) que pueden tener distintos significados, y que sólo adquirirán significado real dentro de un ámbito semiótico concreto (J. Lemke, 1990). Significado que sólo podrá ser comprendido en su totalidad por las personas relacionadas con dicho ámbito y que forman su grupo de afinidad (J. Rifkin, 2000). Lo que Gee pone de manifiesto, y cualquier videojugador sabe, es que la utilización de videojuegos promueve el aprendizaje como dominio de ámbitos semióticos, y la participación en grupos de afinidad.

> <u>1.- Principio de los ámbitos semióticos</u>: Aprender implica dominar ámbitos semióticos a un cierto nivel y ser capaz de participar, a un cierto nivel, en el grupo o grupos de afinidad conectados con ellos.

Un videojugador es consciente de que debe distinguir entre ámbitos semióticos. Situemos a una persona que nunca haya utilizado un videojuego frente a uno de ellos en el que tiene que atravesar una puerta ¿qué haría? Si la misma situación es planteada a un videojugador, inmediatamente pensará en qué hacer dependiendo por ejemplo del tipo de videojuego de que se trate. Si se trata de un shooter, directamente entrará, y lo hará prevenido para disparar nada más entrar. Si se trata de uno de plataformas caminará hacia ella y pasará a otro nivel o pantalla. Si se trata de una aventura sabrá que debe buscar algo que le permita abrir la puerta, como una llave. Si está ante un "Survival Horror" se preparará para una vez abierta no asustarse demasiado. En definitiva identificará el ámbito semiótico en el que desea realizar la acción. Y si no puede, siempre podrá echar mano de su grupo de afinidad (amigos, chat, foros o revistas por ejemplo) para resolver el problema.

Gee va más allá y hace referencia en su principio semiótico a las experiencias de aprendizaje, afirmando que el aprendizaje que promueven los videojuegos sólo tiene sentido desde un aprendizaje situado y focalizado en la experiencia del videojugador (R. A. Brooks, 2002).

<u>2.- Principio semiótico</u>: Un aspecto fundamental de la experiencia de aprendizaje consiste en aprender y apreciar las interrelaciones que se dan dentro y a través de sistemas de signos múltiples como un sistema complejo (imágenes, palabras, acciones, símbolos, artefactos, etc.).

En realidad, en muchas situaciones, las personas aprendemos, pensamos y solucionamos problemas al reflexionar sobre experiencias vividas previamente, de manera que el aprendizaje proviene de realizar asociaciones entre las experiencias que tenemos almacenadas. Desde esta perspectiva, el aprendizaje en el mundo de los videojuegos es el mismo que el que necesitamos en el mundo real. Lamentablemente, no suele ocurrir lo mismo en el entorno escolar, en donde las prácticas de enseñanza en el área de Matemáticas suelen aparecer descontextualizadas y ajenas a cualquier experiencia del alumno.

De todos es conocido el problema de "la edad del gran capitán" que apareció por primera vez en un estudio realizado en 1979 en el IREM de Grenoble: "En un barco hay 20 cabras y 15 vacas ¿cuál es la edad del capitán?" Y si planteamos este problema a alumnos de 4º o 5º curso de Educación Primaria, raro será el alumno que no responda que la solución es 35 años. El planteamiento que generalmente hacen los alumnos es, en primer lugar identificar el problema como un problema de la clase de matemáticas, y por lo tanto catalogarlo como un problema que ha de tener solución; y en segundo lugar, como los únicos datos del problema son 20 y 15, y 35 es una buena edad para una capitán de barco, la solución debe ser la suma. Es el ambiente semiótico en el que suelen desenvolverse los alumnos en clase de matemáticas: sin reflexión, sin tener en cuenta su experiencia real, sin hacer un análisis de la falta, sobreabundancia o incluso de la incompatibilidad entre los datos. En definitiva sin contemplar ninguno de los dos principios de Gee mencionados anteriormente.

3. Principio de transferencia y principio de la prueba

Volvamos de nuevo sobre el problema de colocar a un videojugador ante una puerta que ha de abrir, esta vez sabiendo que está ante una aventura gráfica y que es un videojugador experimentado. De forma inmediata, irreflexiva, intuitiva, el jugador intentará echar mano de sus experiencias análogas para resolver el problema, porque ya ha acumulado muchas. En primer lugar intentará conseguir una llave, pero además, su experiencia con este tipo videojuegos (ámbito semiótico), le hará saber si ha de continuar buscando la llave o si simplemente ha de resolver el problema de otra manera. Por ejemplo podría buscar algunas baldosas sobre las que pisar. Pero tampoco en este caso lo hará sin más, no se pondrá a pisar todas las baldosas, porque antes de pisar siquiera la primera baldosa ya tendrá una percepción del comportamiento del videojuego, de lo que se puede hacer en él y lo que no. De la misma forma podría buscar palancas, anillas o pasadizos. También recordará, y si puede irá hacia ellas, cómo son las puertas que ha pasado: todas ellas tienen encendidas las dos antorchas que la flanquean, mientras que la que ha de pasar sólo tiene una. Así el problema de abrir una puerta lo transforma en el de encender una antorcha. Y vuelta a empezar.

Esta es una característica importante del aprendizaje que presentan los videojuegos, la capacidad que adquiere el jugador para afrontar una nueva situación de la que no es capaz de salir airoso utilizando únicamente las estrategias o habilidades de las que había hecho uso hasta ahora, y que soluciona echando mano de su experiencia. Esta característica es la transferencia (J. D. Bransford y D. L. Schwartz, 1999), y desde el punto de vista de la educación matemática no es fácil conseguirla, puesto que lleva implícito que el escolar sea consciente de las analogías existentes en dos situaciones distintas, y para ello es necesario que sea capaz de prescindir de los rasgos superficialmente diferentes de dichas situaciones, para centrarse únicamente en las propiedades que comparten a un nivel más profundo.

<u>3.- Principio de transferencia</u>: A los que aprenden se les dan amplias oportunidades para practicar y apoyo para transferir lo que han aprendido antes y aplicarlo a problemas posteriores, incluidos aquellos que exijan adaptación y transformación de ese aprendizaje inicial.

¿Cómo consiguen los videojuegos que sea posible la transferencia? Básicamente, mediante el descubrimiento. El descubrimiento de habilidades básicas del ambiente semiótico al que pertenezca el videojuego, y a las que podrá acceder porque estarán estructuradas de forma coherente. Y el descubrimiento a partir del reconocimiento de pautas existentes en el videojuego. Cuando Gee (Ibíd., p. 110) analiza cómo se produce esta transferencia y cómo se genera el aprendizaje en los videojuegos, postula el denominado principio de la prueba, que no es sino la transcripción a este entorno lúdico, del proceso de matematización básico en la educación matemática (M. P. Bujanda, 1981, pp. 28-29).

4.- Principio de la prueba: El aprendizaje consiste en un ciclo de probar el mundo (hacer algo), reflexionar en esta y sobre esta acción, y sobre esta base, formular una hipótesis y comprobar el mundo para poner a prueba esa hipótesis para luego aceptarla o volverla a pensar.

4. Principio del régimen de competencia y de las rutas múltiples

Algo importante que nos enseñan los videojuegos y que está presente en muchos de los principios para la enseñanza y el aprendizaje analizados por Gee, es que el jugador siempre actúa dentro de su régimen de competencia (A. A. DiSessa, 2000), es decir, el videojuego siempre coloca al jugador ante situaciones de las que puede salir airoso, utilizando el conocimiento que ha adquirido hasta llegar a ese punto. Pero además el jugador sabe que dicha situación es un desafío para él, pero a la vez tiene la suficiente confianza en sí mismo para afrontar el reto sabiendo de antemano que, tarde o temprano saldrá victorioso (J. L. Sherry, 2004).

5.- Principio del régimen de competencia: El que aprende obtiene amplias oportunidades para funcionar dentro de sus propios recursos, pero en el borde externo de los mismos, de modo que, en estos puntos, percibe las cosas como desafiantes, pero no insuperables.

Pero además, el aprendizaje que proponen los videojuegos hace que los jugadores puedan elegir distintas estrategias o pautas, o elaborar distintos tipos de conjeturas que encajen con su estilo de aprendizaje, de pensamiento y forma de ser. De esta manera, el videojugador se motiva para permanecer en ese mundo virtual que le da la oportunidad de disfrutar siendo tal como es.

6.- <u>Principio de las rutas múltiples</u>: Hay múltiples formas de efectuar progresos o de avanzar. Eso permite a los videojugadores tomar decisiones, fiarse de sus propias fortalezas, estilos de aprendizaje y resolución de problemas, al mismo tiempo que exploran estilos diferentes.

La consideración de muchos problemas clásicos en la educación matemática, permite poner de manifiesto la relación existente entre estos principios de aprendizaje y determinados aspectos básicos de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Consideremos por ejemplo el siguiente, para trabajar en 4º o 5º curso de Educación Primaria: "Las baldosas en una zona del parque están colocadas como muestra la Figura 1. Si en el parque hay 10 baldosas negras ¿cuántas baldosas hay? ¿Y en el caso de 15 baldosas negras? ¿Y qué ocurre si hay 100 baldosas negras?"

Para empezar, la actividad matemática permite que, conforme al principio de las rutas múltiples de Gee, todos los alumnos puedan trabajar en mayor o menor medida dicho problema. Los alumnos mejor dotados para las matemáticas pueden encontrar directamente la solución del problema abstrayendo de él el modelo que subyace: "Quitadas las 2 primeras baldosas blancas, cada baldosa negra está rodeada por 4 baldosas blancas". Otros por el contrario necesitarán del reconocimiento de pautas y regularidades para conjeturar que "cada vez que se añade una baldosa negra, el número de baldosas blancas aumenta en 4", con lo que posteriormente podrán comprobar el isomorfismo existente con problemas anteriores de patrones numéricos, y conjeturar una solución del tipo "el número de baldosas negras por 4, más 2". Diferentes soluciones, para distintas experiencias, pero cada quien situado en su régimen de competencia. Incluso con la ayuda del profesor, gran parte de los alumnos situados en este régimen de competencia inferior podrán acceder a la comprensión del modelo subyacente buscando una interpretación real a su conjetura.

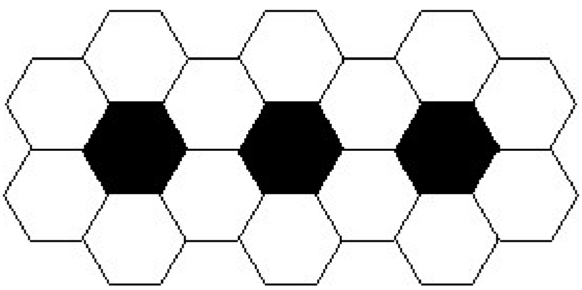


Figura 1

Bibliografía

Bransford, J. D, y Schwartz, D. L. (1999): Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. *Review of Research in Education,* 24, pp. 61-100.

Brooks, R. A. (2002): *Flesh and machines: How robots will change us*. Nueva York: Pantheon Books.

Bujanda, M. P. (1981): *Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas*. Madrid: SM.

Disessa, A. A. (2000): *Changing minds: Computers, learning and literacy*. Cambridge: MIT Press.

García Gigante, B. (2009): *Videojuegos: medio de ocio, cultura popular y recurso didáctico para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares*. Tesis inscrita en la Universidad Autónoma de Madrid.

Gee, J. P. (2004): *Lo que nos enseñan los videojuegos sobre el aprendizaje y el alfabetismo*. Málaga: Ediciones Aljibe.

Lemke, J. (1990): *Talking science: Language, learning and values*. New Jersey: Ablex Publishing.

Rifkin, J. (2000): *The age of access: The new culture of hypercapitalism where all of life is a paid-for experience*. Nueva York: Tarcher / Putnam.

Sherry, J. L. (2004): Flow and media enjoyment. *Communication Theory,* 14 (4), pp. 328-347.

Rey, Reyes y la introducción de la lógica matemática en España

Javier Peralta

Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid
javier.peralta@uam.es

Abstract

In this article we show that the introduction in Spain of mathematical logic is due to Ventura Reyes, at the end of the 19th century. Nevertheless, almost fiftieth years before, we can already perceive traces of that on the philosophical introduction of symbolic logic of José María Rey. Both also imported into Spain other two mathematical theories novel on the time: Rey, the imaginary numbers (under a methaphysical viewpoint), and Reyes, the non-Euclidean geometries.

Dedicado a Eugenio Roanes Macías, profesor de maestros y maestro de profesores. Con mi reconocimiento y afecto.

Introducción

La finalidad de este artículo es mostrar que Ventura Reyes y Prósper fue el introductor en España de la lógica matemática o simbólica, pero que antes también se había ocupado de ello, aunque de manera incipiente, José María Rey y Heredia. Se trata, pues, de poner en relación las aportaciones de uno y otro en este campo.

Si bien el acercamiento de Rey a la lógica simbólica fue hecho desde una perspectiva a medio camino entre la filosofía y la matemática, hay que destacar que su texto *Elementos de Lógica*, que será comentado en estas páginas, aparece en 1853, justamente cuando se están desarrollando esas ideas en Europa y América, e incluso un año antes de que sea publicado el tratado de Boole considerado fundador de esta teoría. Casi medio siglo después Reyes la introducirá ya con su enfoque matemático, lo que será puesto de manifiesto tras el examen de algunos de sus artículos.

Abundando en la obra de ambos me ha parecido oportuno poner de relieve además que estos dos personajes asimismo importaron a nuestro país otras novedosas teorías matemáticas: los números imaginarios, por Rey -también desde un punto de vista filosófico-, y las geometrías no euclídeas, por Reyes.

El artículo se completa con unas breves notas sobre el desarrollo de la lógica y acerca del estado de la matemática española en el siglo XIX, para que el lector pueda apreciar mejor la importancia de nuestros dos protagonistas en el marco de la precaria situación matemática existente entonces en nuestro país.

1. Los inicios de la lógica matemática

En el siglo XVII ya se perciben, aunque de modo incipiente, algunas ideas en relación con lo que más tarde sería la lógica matemática; así, por ejemplo, Leibniz busca desde su juventud un "alfabeto de los pensamientos humanos" y un "idioma universal", con la intención de construir un lenguaje simbólico con el que se puedan expresar los razonamientos sin ambigüedad. A lo largo del XVIII, en cambio, no se producen avances, más aún a raíz del convencimiento de Kant de que no era necesaria "ninguna nueva invención de la lógica" (en la que, sin embargo, prácticamente no se habían producido novedades desde las leyes del silogismo de Aristóteles).

A principios del siglo XIX las cosas empiezan a cambiar, debido especialmente a las aportaciones de diversos matemáticos ingleses. Así, Babbage, Herschel …, ponen el acento en el carácter lógico de las matemáticas; De Morgan introduce en 1838 la expresión "inducción matemática"; etc.; aunque quien suele ser considerado el iniciador de la lógica simbólica o lógica matemática es George Boole (1815-1864), que expone en su tratado *And investigation into the laws of Thought, on which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (1854). A partir de ese momento la lógica se desarrolla básicamente en dos direcciones: en una estructuración más rigurosa de la lógica misma (que culmina con la obra de Schröder sobre "el álgebra de la lógica", de cuatro volúmenes, editados entre 1890 y 1905) y en la búsqueda de una conexión cada vez más estrecha entre lógica y matemáticas (que conduce a la estructura de "álgebra de Boole"). Además de los ya mencionados, hay que citar a otros varios que también desempeñan una importante labor en el desarrollo inicial de la lógica matemática (últimas décadas del siglo XIX y primeras del XX), como Peirce (1809-1880), Peano (1858-1932), Whitehead (1861-1947), etc.

2. La lógica en España

Con anterioridad al siglo XIX, posiblemente las únicas aportaciones españolas a la lógica (filosófica, no matemática) hayan sido las de Pedro Hispano y Raimundo Lulio (siglo XIII). Por otra parte, la lógica se ha enseñado en nuestras universidades prácticamente desde el momento en que empezaron a crearse (también en el siglo XIII).

Centrándonos ahora en el XIX y el XX, la lógica ha sido objeto de estudio en las llamadas Facultades de Artes (denominación anterior de las Facultades de Filosofía), dentro de las enseñanzas de las "Instituciones filosóficas", que integraban las materias de Historia de la Filosofía y Elementos de Matemáticas, Lógica y Metafísica, Física General y Física Particular ([5]). Dichas Facultades, por cierto, tenían la consideración de Facultades menores, y su función era preparatoria para acceder a las Facultades mayores (Cánones, Leyes, Teología y Medicina); situación a la que pone fin Alonso Martínez en 1854 eliminando esa distinción.

Igualmente se llega a estudiar lógica en centros de educación secundaria, como por ejemplo en el Instituto San Isidro de Madrid, creado en 1845, y en algunas de las instituciones escolares que le precedieron (su existencia se remonta a 1346 -cuando Alfonso XI autoriza al Concejo de Madrid a crear un Escuela de Gramática- y va transformándose una y otra vez: Colegio Imperial, Estudios Reales de San Isidro…, aunque conservando siempre su labor educativa). Valga como muestra de ello que en 1625, cuando se fundan los Reales Estudios del Colegio Imperial, una de las cátedras existentes es la de "Súmula y Lógica"; también, en torno al año 1835, queda constancia de que de los siete catedráticos que hay entonces, uno de ellos, José López Urive, es de Lógica; y, en fin, otro de los distintos momentos en que no hay duda de la inclusión de la Lógica en sus estudios tiene lugar en los años siguientes a su creación como Instituto, cuando algunos de sus catedráticos, como Juan Díaz de Baeza (primer director del Instituto, hasta su fallecimiento en 1858) o Antonio de la Corte (marqués de la Corte, su sucesor en la dirección), dicen serlo de "Psicología, Lógica y Estética"[1] ([20]).

[1] Uno de los primeros Institutos que nacen en España es el Vicens Vives en Gerona. Su director, J. González de Soto, era profesor de ([1]): "psicología, ideología, lógica, moral, religión y física experimental" (!).

También en el primer tercio del siglo XX, fundado ya el Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, la asignatura de "Psicología y Lógica" aparece en los Planes de Estudio de Bachillerato: en 5º curso en el Plan Bugallal (1903), y asimismo en 5º curso, pero solo en la opción de Letras, en el siguiente Plan Callejo (1926); aunque ya no figura en el Plan Villalobos, de 1934 ([23]).

Quede claro, sin embargo, que como se dijo al principio de esta breve nota sobre el estudio de la lógica en España, no me he referido a la lógica matemática, lo que será tratado más adelante (fundamentalmente en relación con los dos personajes protagonistas de este trabajo). Pero antes de ocuparme de ello, y para poder valorar mejor las aportaciones y el alcance de la labor realizada por José María Rey y Ventura Reyes, probablemente sea aconsejable conocer, siquiera someramente, cómo se encontraba en aquella época la matemática española.

3. La matemática española en el siglo XIX

Comenzaré con una visión retrospectiva.

En la primera mitad del siglo XVIII nuestra matemática no está a un buen nivel. De hecho, el primer texto editado en España en que se usa el cálculo infinitesimal posiblemente sea *Observaciones astronómicas y físicas*, de Jorge Juan y Antonio de Ulloa, publicado en 1748[2], aunque poco después el cálculo ya se trata con entidad propia en el *Curso militar de matemáticas* (1753), del capitán Pedro Padilla. No obstante, habrá que esperar todavía unos años más hasta que se presente didácticamente en los *Elementos de Matemáticas* (1772), de Benito Bails, donde también se introduce la notación de Leibniz. Además de Bails, Agustín de Pedrayes, Juan Justo García, Tadeo Lope y Aguilar, José Chaix, José Mariano Vallejo y Gabriel Císcar y Císcar, son algunos de nuestros mejores matemáticos de las últimas décadas del XVIII y principios del XIX.

Ciertamente en ese último período existe un buen ambiente de renovación científica, pero que es paralizado bruscamente por la Guerra de la Independencia. Sin embargo, la finalización de la contienda tampoco supone la vuelta a la situación anterior, por lo que la etapa de 1808 a 1833 es llamada *período de catástrofe*. Mientras la matemática europea de entonces experimenta un gran desarrollo, uno de los problemas que a nosotros más nos ocupa es el uso del sistema métrico decimal, y no existen otras publicaciones matemáticas que las destinadas a la enseñanza o a la técnica (principalmente a las obras públicas y a la construcción

---

[2] Los *Principia* de Newton datan de 1687.

de ferrocarriles). De hecho, prácticamente nuestra única actividad matemática reseñable en ese tiempo es la formación de ingenieros militares.

Las principales figuras de esos años son algunos de los ya mencionados anteriormente, pero cuya obra podría decirse que se encuentra básicamente encuadrada en el XVIII; con la excepción de Vallejo (1779-1846), que cabría encajar plenamente en el XIX, y al que habría que añadir Fernando García San Pedro (1796-1854), dedicado a la formación de militares, Francisco Travesedo (1768-1861), que sería catedrático de Cálculo sublime en la Universidad Central ([7]) y acaso algún otro.

En el segundo tercio de siglo empiezan a crearse nuevas instituciones educativas y científicas, como las Escuelas de Ingenieros (civiles), las Escuelas Normales, los Institutos de Segunda Enseñanza, la Real Academia de Ciencias de Madrid… Asimismo se emprenden importantes reformas en la enseñanza, que en lo referente a las ciencias suponen, entre otras, el establecimiento de la licenciatura en Ciencias y su doctorado (Plan Pidal, 1845) y la creación de las Facultades de Ciencias (con tres secciones), que resultan de la separación de las Facultades de Filosofía y Letras en dos: Filosofía y Letras y Ciencias (Ley Moyano, 1857). En esta etapa, entre los matemáticos más originales se encuentran, además de los anteriores, Echegaray (1832-1916), que ya despunta al final de este periodo, y que mantendrá su magisterio hasta principios del siglo XX, y Juan Cortázar (1809-1873), catedrático de Álgebra superior y Geometría analítica en la Universidad de Madrid (él, junto a Travesedo, son los dos únicos catedráticos de Matemáticas de los quince que hay en Ciencias en 1851 entre todas las universidades españolas).

Con la Revolución de 1868 toma cuerpo nuestra recuperación científica, aunque en las últimas décadas del siglo siguen haciéndose evidentes el atraso económico del país y el grado de incultura de la sociedad española (el analfabetismo, por ejemplo, es entonces de alrededor del setenta por ciento, frente a menos del cincuenta por ciento de Francia). Hacia 1875 nuestra matemática, en concreto, se encuentra como con medio siglo de retraso con respecto a la europea más desarrollada, pero empiezan a cobrar un cierto impulso la traducción y adaptación de textos extranjeros -sobre todo franceses-, y nuestros mejores matemáticos se esfuerzan por presentar algunas de las nuevas -aunque en ocasiones, ya desfasadas- teorías. En esta etapa, en las universidades de Barcelona, Madrid y Zaragoza, que son las únicas en las que pueden estudiarse Ciencias Físico-Matemáticas, se inicia una mayor actividad, y sus profesores comienzan a hacerse un hueco entre los militares e ingenieros, que han sido hasta entonces los protagonistas de nuestra modesta matemática.

En esa labor destacan, entre otros, Eduardo León, José Ríus, Simón Archilla, Lauro Clariana, Miguel Ortega, José Ruiz Castizo, José María Villafañe, Andrés Irueste…; y, por encima de todos, José Echegaray, Zoel García de Galdeano, Eduardo Torroja y Ventura Reyes: los llamados *sembradores*.

El notable impulso de renovación científica que tiene lugar a finales del siglo XIX, no puede sin embargo ser considerado como un hecho aislado, sino que, a mi juicio ([6]), debe encuadrarse en el marco más amplio de una regeneración nacional: la *Generación del 98*, aunque esta denominación suela asociarse tan solo a su importante repercusión literaria.

En 1900 se crea el Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, en 1907 la Junta para la ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas y en 1908 la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (estas dos últimas con una sección correspondiente a las Ciencias Exactas). Se establece así el caldo de cultivo adecuado para el nacimiento, en 1911, de la Sociedad Matemática Española, que preside Echegaray. Pero ésta ya es otra historia…

4. José María Rey y Heredia

Los datos biográficos de José María Rey y Heredia, de los que aquí haré un breve resumen, están recogidos en su mayor parte en el prólogo de su libro *Curso de Psicología y Lógica*, de dos volúmenes, escrito conjuntamente con Pedro Felipe Monlau[3] y publicado en 1849 ([4]).

Rey nace en Córdoba en 1818, ingresa en el Seminario a la edad de quince años y permanece allí once años, en los últimos de los cuales da clase de filosofía y francés a los estudiantes más jóvenes; aunque finalmente no se ordena sacerdote. Luego ejerce como profesor de Lógica en el Instituto de Ciudad Real, en 1846 obtiene el grado de Bachiller en Filosofía[4] y es nombrado catedrático del Instituto de Noviciado (hoy Cardenal Cisneros), en Madrid.

[3] Monlau fue catedrático de Filosofía en el Instituto San Isidro de Madrid, director del Museo Arqueológico y miembro de las Academias de la Lengua, Ciencias Morales y Medicina ([20]).

[4] Según el Plan Pidal, la segunda enseñanza, elemental y superior, constituían la Facultad de Filosofía. En ese mismo Plan se crean los Institutos Provinciales de Segunda Enseñanza, dependientes de la Universidad, pues aquel nivel educativo tenía la consideración de primer ciclo universitario; una vez finalizado, daba lugar al título de Bachiller en Filosofía, que facultaba para el ejercicio de la enseñanza. Con la Ley Moyano, en cambio, los Institutos se separan de la Universidad, y el nuevo título, Bachiller en Artes, es de rango inferior, pues solo sirve para el acceso a los títulos universitarios.

En ese instituto conoce a Acisclo Fernández-Vallín Bustillo[5] (1825-1895), catedrático de Matemáticas, quien le introduce en el conocimiento de los números complejos. Rey continúa su carrera y obtiene los títulos académicos de Bachiller en Jurisprudencia (1852), Licenciado en Jurisprudencia (1854) y Licenciado en Filosofía y Letras (1857).

De salud débil, fallece en 1861 y el ayuntamiento de Córdoba le dedica una calle tras su temprana desaparición.

5. Los *Elementos de Lógica* de Rey

Como ya se ha dicho, la matemática española en el siglo XIX se encuentra bastante atrasada con respecto a la de los países más desarrollados, aunque un grupo reducido de personas, entre las que se encuentra Rey, trata de importar algunas teorías del exterior. En el caso de la lógica, debido posiblemente en parte a la carencia de los conocimientos adecuados, se va a hacer sin embargo desde un enfoque a medio camino entre las matemáticas y la filosofía. En esa situación se encuentra el libro que ahora se analizará (como también el que se comentará en la siguiente sección).

Elementos de Lógica se publicó en 1853 y tuvo numerosas reediciones (yo he consultado la décima, de 1872). Resulta de las sucesivas revisiones del texto *Curso de Psicología y Lógica*, de Monlau y Rey anteriormente citado, en las que va separándose en dos.

Elementos ([10]), está pensado para su uso en centros de Segunda Enseñanza. En su primera página, debajo del nombre el autor, se lee[6]: Licenciado en Jurispru-

[5] Fernández-Vallín fue director del Instituto (bajo su mandato se cambió el nombre de Noviciado por el de Cardenal Cisneros), miembro de las Academias de Ciencias y de la Historia, Consejero de Instrucción Pública, secretario de la Comisión de Relaciones Exteriores entre España y las Repúblicas de América, etc. Es autor de numerosas publicaciones, entre las que se encuentran *La Educación popular en España* y *Geografía, Matemática o elementos de Cosmografía*, su discurso de recepción en la Real Academia de Ciencias: *Cultura científica en España en el siglo XVI*; además de diversos libros de matemáticas, como *Aritmética para niños*, *Geometría para niños*, *Elementos de Matemáticas* y diversos manuales de texto para la segunda enseñanza, la mayor parte de ellos con varias ediciones.

[6] Aunque en buena parte de la descripción de esta obra y de las otras que se analizan en este artículo me referiré a citas textuales o casi textuales, para facilitar la redacción y la lectura y además poder utilizar con más libertad el castellano y la ortografía actuales, no las entrecomillaré, salvo en algún caso especial en que desee enfatizar determinados aspectos del texto original.

dencia y en Filosofía, Catedrático que fue de Psicología, Lógica y Ética en la Universidad de Madrid. La exposición es bastante unitaria, escrita en un buen español con el texto florido del siglo XIX y se nota en él la formación de José María Rey, pues hay numerosas citas en latín, que no traduce. Tiene 346 páginas y consta de: 1) una Introducción, que llama Prenociones; 2) cuatro partes: Crítica, Metodología, Gramática y Dialéctica; 3) un Sumario o Resumen del texto y 4) una Tabla general de Materias y Programa de las lecciones o Índice.

Prenociones es un largo capítulo que comienza definiendo la Lógica como la ciencia que expone las leyes de la inteligencia y las reglas que han de dirigirla en la investigación y la enunciación de la verdad. Divide la Lógica en cuatro partes: Crítica (que trata del juicio como medio de obtener la verdad), Metodología (que establece y ordena las operaciones necesarias para la adquisición de las verdades científicas), Gramática (que expone los principios generales y filosóficos del lenguaje como medio de enunciar el pensamiento) y Dialéctica (que estudia las leyes y formas especiales del lenguaje en la demostración científica de la verdad).

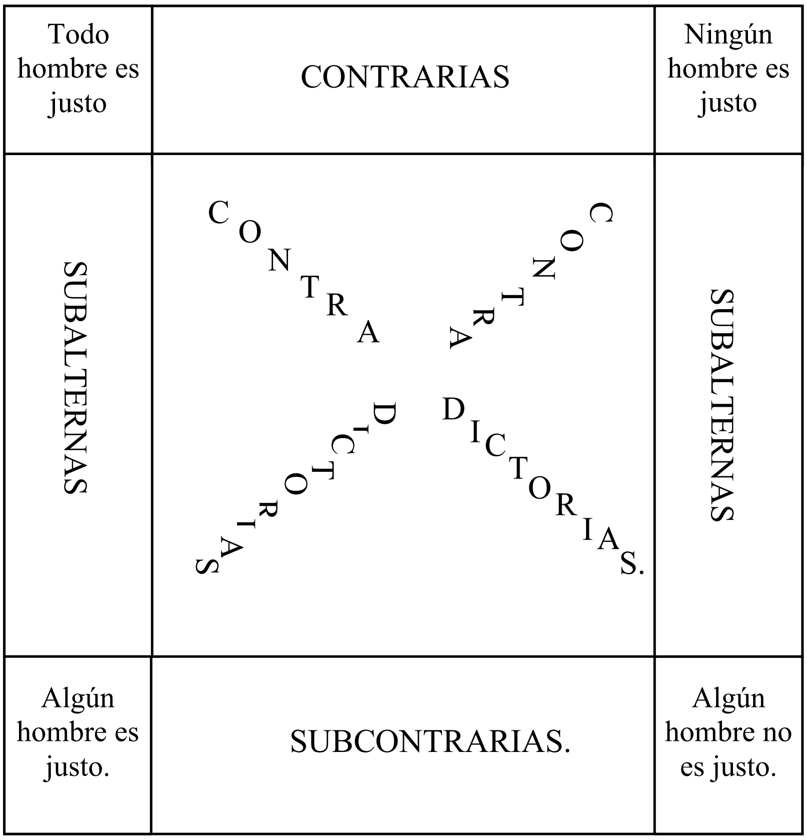
En la Crítica (Parte I), lo que me ha parecido más relevante desde el punto de vista de la argumentación matemática es el apartado "Del raciocinio", incluido en un capítulo titulado "De la razón". Señalo a continuación algunas cuestiones sobre ello.

Después de dividir el raciocinio en inductivo y deductivo, define la inducción como la marcha que sigue la razón cuando, de la observación de un cierto número de hechos particulares, asciende a establecer principios generales aplicables a todos los hechos de la misma especie; y en el razonamiento inductivo incluye el principio de inducción formulado por Newton: "*Effectuum generalium ejusdem generis eccedem sunt causae*". La deducción significa en cambio la marcha de la razón cuando, poseedora de ciertos principios generales, desciende a las consecuencias particulares que contienen; y considera que el razonamiento deductivo, complemento natural y necesario del inductivo, está basado en tres principios: dos cosas idénticas a una tercera son idénticas entre sí, dos cosas de las cuales la una es idéntica con una tercera y la otra no lo es, no son idénticas entre sí, y, cuando ninguna de dos cosas es idéntica con una tercera, no puede deducirse que sean ni que no sean idénticas entre sí.

En la Parte II (Metodología), dentro del capítulo titulado "De la ciencia como fin del método", define la demostración como la operación que desenvuelve y expone sintéticamente la Ciencia; y hace numerosas referencias a la geometría (como botón de muestra, véase lo siguiente: considerando admitido que a veces para probar determinadas verdades no hay un principio de demostración *directa* y es menester hacer ver el *absurdo* que se seguiría de que no fuese verdad lo propuesto o de que fuese verdad el enunciado contradictorio, pone como ejemplo que para demostrar que el diámetro divide al círculo y a la circunferencia en dos partes iguales, es suficiente con tener en cuenta que, de no ser así, se chocaría contra el principio de la igualdad de los radios en el círculo). También hace explícita la nomenclatura correspondiente a los elementos que cabe considerar en la exposición de una serie de verdades, que define de la forma que se indica: Axiomas (principios formales, comunes a todas las ciencias), Postulados (verdades fundamentales que tienen un carácter práctico, por cuando en ellas se establece la evidente posibilidad de hacer alguna cosa), Teoremas (enunciados especulativos en que se propone una verdad demostrable), Problemas (enunciados prácticos en que se propone hacer alguna cosa, enseñando y legitimando los procedimientos para lograrlo), Corolarios (verdades especulativas que se derivan inmediatamente de una verdad anterior), Escolios (prevenciones o advertencias que se van intercalando por todo el cuerpo de la ciencia para facilitar su marcha deductiva); y afirma que es precisamente en las matemáticas en donde se han conservado estas denominaciones, después de lo cual particulariza alguno de los anteriores conceptos a esta ciencia. A continuación, opone las ciencias racionales, o de puro razonamiento (la metafísica, las matemáticas y, en cierto sentido, la moral) a las empíricas o de observación (las cosmológicas y las antropológicas, que dependen de los objetos a los que se refieren y son tan contingentes como ellos), precisando que debe fundarse en su carácter la especialidad del método con que unas y otras han de tratarse.

La Gramática (Parte III) no me parece de especial interés para el razonamiento matemático, pero sí la Dialéctica (Parte IV) -iniciada por Zenón de Elea-, que consta de tres capítulos: “De la proposición”, “De la argumentación” y “De los sofismas”.

En el correspondiente a las proposiciones, entre otros tipos, establece las universales y particulares; afirmativas y negativas; categóricas, hipotéticas y disyuntivas; posibles, contingentes y necesarias; discretivas y relativas; etc. Y de la comparación de proposiciones surgen las contradictorias, contrarias, subcontrarias y subalternas, que compara en el siguiente cuadro:



En el capítulo dedicado a la argumentación estudia los silogismos y sus términos, y establece ocho reglas de los silogismos (y sus figuras y modos). Estos últimos se reducen a diecinueve, representados nemotécnicamente por otras tantas palabras distribuidas en los cuatro versos siguientes, que acaso les suenen todavía a algún lector:

> BARBARA, CELARENT, DARII, FERIO (Baralipton,
> Celantes, Dabitis, Fapesmo, Frisesomorum);
> *Cesare, Camestres, Festino, Baroco; Darapti,*
> Felapton, Disamis, Datisi, Bocardo, Ferison.

Más tarde habla de las argumentaciones no silogísticas, que son el entinema (silogismo en que se omite una de las premisas, por demasiado clara o sebreentendida), epiquerema (después de cada premisa se pone la prueba de su verdad), prosilogismo y episilogismo (denotan la correspondencia que hay entre varios silogismos consecutivos producidos en una argumentación escolástica), dilema (silogismo hipotético disyuntivo formado por una premisa mayor disyuntiva, dos o más miembros que son antecedentes de otras tantas hipotéticas y dos o más consiguientes de estas hipotéticas, que deben ser conclusiones inadmisibles para el adversario), inducción (diferente a la estudiada como especie de raciocinio, pero verdadero método socrático en la disputa, que consiste en hacer una serie de preguntas dispuestas con cierto artificio para ir confundiendo al contrario -sin que él lo perciba- a un resultado que no esperaba o le repugnaba expresamente), ejemplo (argumentación cuyo fundamento es la inducción analógica o la analogía) y *sorites*, de lo que hablaremos enseguida.

Termina el libro con un capítulo dedicado a los sofismas, los abusos de la argumentación y las falacias.

Una vez realizado el resumen del texto, voy a hacer un breve comentario sobre la filosofía de Rey, el término *sorites* y una valoración de su contribución en esta obra a la introducción de la lógica matemática en España. Pero veamos antes qué suele entenderse por “Ideología” ([8], [22]).

Se conoce como tal a una corriente filosófica que se ocupa del origen, génesis y análisis de las ideas, para la elaboración de una teoría global de la Filosofía; o sea, es algo así como “la ciencia de las ideas”. Se introduce en Francia en las postrimerías del siglo XVIII y su figura principal posiblemente sea Destutt de Tracy (1754-1836), que sigue en parte la doctrina de Locke, Condillac y otros. La influencia de los ideólogos en España tiene lugar en la primera década del XIX y sirve de fundamento teórico de las disciplinas humanísticas, especialmente Filosofía (Lógica, Estética y Psicología), Gramática y Literatura (Retórica y Poética). El matemático Juan Justo García publica *Elementos de verdadera Lógica* en 1821, en donde prácticamente se limita a reproducir la Ideología de Destutt; e igualmente basada en esos principios se encuentran la obra ya mencionada de Monlau y Rey, escrita en 1849, como también el libro del que ahora nos estamos ocupando y el que se comentará en la siguiente sección.

Incluida en esa corriente cabe entender, por ejemplo, la definición que da Rey de signo (o símbolo): un signo es una “*cosa cualquiera considerada como medio que conduce al conocimiento de la otra*”; o la que empleará más tarde es su obra *Teoría Trascendental de las Cantidades Imaginarias* al tratar de las diversas interpretaciones de la unidad imaginaria.

En cuanto a una primera valoración del tratado de Lógica, parece que su objetivo es alcanzar soltura en el arte de encadenar razonamientos plausibles, entre otras ocasiones, para mantener duelos dialécticos; pero contiene además elementos fundamentales para la argumentación en matemáticas. Todo ello, junto a las frecuentes referencias a esta ciencia, creo que hacen de él un valioso recurso en este campo.

Por otra parte, hay que decir que como el texto se publicó en 1853, naturalmente no se hace eco del libro *The Laws of Thought* (1854), en el que Boole presenta su nueva teoría de lógica matemática. Pero creo que sí se encuentra algún indicio, al menos en la edición de *Elementos de Lógica* de 1782, que es la que he examinado, especialmente en relación con el término *sorites*.

Dice que *sorites* (*cumulatio*) es un amontonamiento de proposiciones dispuestas con tal arte que haya una gradación perfecta entre dos extremidades que enlazamos por la intervención de varios términos medios, y añade que puede compararse a una serie de ecuaciones en que concluimos la igualdad de dos extremos por ser iguales a varios términos medios, con los cuales sucesivamente vamos comparando, ya el término menor, ya el mayor; en el primer caso el *sorites* se llama directo y en el segundo regresivo. Así, la fórmula del primero es:

A es B;
B es C;
C es D;
D es E;
E es F;
luego A es F

lo que evidentemente significa:

$$(p_1 \text{ es } p_2) \wedge \ldots \wedge (p_i \text{ es } p_{i+1}) \wedge \ldots \wedge (p_{n-1} \text{ es } p_n) \Rightarrow (p_1 \text{ es } p_n)$$

Mientras que el *sorites* regresivo podría representarse de esta manera:

E es F;
D es E;
C es D;
B es C;
A es B;
luego A es F

A la vista entonces de la obra en su totalidad, creo que cabe afirmar que Rey Heredia habría sido el precursor -remoto, eso sí- de la lógica simbólica en nuestro país, aunque por supuesto, desde un enfoque esencialmente filosófico. Además, tiene el valor de haber traído a España algunas de esas ideas -aunque en una pequeña parte- justamente cuando se estaban configurando en el seno de la comunidad matemática más avanzada, lo que me parece verdaderamente reseñable en la matemática española decimonónica.

6. La *Teoría Trascendental de las Cantidades Imaginarias* de Rey

Es su obra póstuma ([9]), escrita durante los últimos años de su vida y publicada en 1865, después de su fallecimiento, una vez que sus herederos la presentaran a un concurso nacional de manuales de texto para su aplicación en la mejora de la Segunda Enseñanza. Está revisado por Fernández-Vallín y prologado por Monlau. El índice es el siguiente:

Prólogo

Introducción

Libro I: Sobre la naturaleza e interpretación de las cantidades imaginarias.

- Capítulo I: Exposición matemática del concepto de cualidad.
- Capítulo II: Sobre las cantidades imaginarias consideradas cono raíces.
- Capítulo III: Sobre el modulo y el argumento de las cantidades imaginarias.
- Capítulo IV: Interpretación del *imaginarismo* en las ecuaciones de segundo grado.
- Capítulo V: Interpretación del imaginarismo en las secciones cónicas.
- Capítulo VI: Sumario del Libro y transición a los siguientes.

Libro II: Sobre las cantidades imaginarias en el algoritmo de la suma.

- Capítulo I: Sumas algebraicas.
- Capítulo II: Suma sincategoremática de cantidades.
- Capítulo III: Sobre sumas poligonales.

Libro III: Las cantidades imaginarias en el algoritmo de la producción.

- Capítulo I: Productos binarios.
- Capítulo II: Sobre productos ternarios.

Libro IV: Las cantidades imaginarias en el algoritmo de la *graduación* (elevar a potencias).

- Capítulo I: Graduación algebraica.

- Capítulo II: Teoría algebraica de la graduación de cantidades imaginarias.
- Capítulo III: Sobre las raíces de la unidad.
- Capítulo IV: Consideración dinámica de las raíces imaginarias.
- Capítulo V: Teoría trigonométrica del imaginarismo.
- Capítulo VI: Construcción gráfica de las raíces de la unidad.
- Capítulo VII: Graduación infinita de cantidades imaginarias.
- Capítulo VIII: Sobre exponenciales imaginarias.

Sumario de los últimos tres Libros.

Sumario del trabajo completo.

Traducción del Capítulo sobre la Lógica Trascendental de la *Crítica de la razón pura.*

Glosario de los términos empleados en el libro.

Rey reconoce la influencia en el tratado de Adrien-Quentin Buée (1748-1826), emigrado francés a Gran Bretaña tras la Revolución Francesa, quien había escrito una memoria sobre las cantidades imaginarias que constituye uno de los últimos intentos de la aceptación de los números negativos e imaginarios como nociones válidas sobre bases metafísicas. Bajo esa concepción cabe situar, por ejemplo, lo que Rey afirma varias veces en su libro: "*los números imitan al espacio, aunque son de naturaleza tan diferente*" (apoyándose en una frase de Pascal).

En la Introducción se vierten diversas ideas sobre Matemáticas, el concepto de cantidad imaginaria, su historia, la necesidad de la Metafísica en las Matemáticas, etc. Trata por ejemplo de la exactitud de las Matemáticas y afirma que en el futuro, debido a la aplicación de la Filosofía Trascendental, no quedarán misterios matemáticos sin resolver; y presenta el *imaginarismo* (*scandalum mathematicum*) como uno de esos puntos oscuros. También asegura que nuestras mentes son más matemáticas de lo que creemos, ya que nuestras estructuras mentales se apoyan más en la verdad lógica de los juicios y proposiciones, en contraposición al lento avance experimental del conocimiento empírico.

Pero me parece que alguna de las cosas que más podría sorprender al matemático es, por ejemplo, lo que Rey llama "*síntesis de la unidad consigo mismo*" -en la idea, creo, de la axiomática de los números naturales de Peano- que le lleva a describir 1×1 como "*la esterilidad de la unidad bajo el algoritmo de la producción*"; y otras cosas de ese estilo en similar lenguaje barroco. Asimismo podría extrañar la defensa de la Metafísica como elemento fundamental de las Matemáticas, sosteniendo que los mejores matemáticos de la historia, como Descartes, Pascal, Newton, Leibniz o Euler fueron también grandes metafísicos, y que no habrían llegado a su cumbre de no haber sido tan profunda su visión filosófica.

La Introducción es sin duda la parte más interesante de la obra. En el Libro I explica que las cantidades imaginarias deben entenderse mediante la aplicación del concepto de cualidad; esto es -según él-, algo añadido a la cantidad, una especie de atributo modificador, de modo que la propiedad que tienen los números como representación de la cantidad se vea complementada también en su aspecto geométrico, y pone como sencillo ejemplo de ello el ya conocido caso de los números negativos. Con estas premisas comienza la interpretación cualitativa del signo de la cantidad imaginaria, $\sqrt{-1}$, que combina con el problema de la extracción de raíces cuadradas de números negativos, organizando lo que en mi modesta opinión considero un tremendo embrollo filosófico-matemático. Valga como botón de muestra lo que escribe en la página 51:

> En el anterior capítulo he considerado el símbolo $\sqrt{-1}$ como un signo de limitación ó de neutralidad perfecta, entre la afección positiva y la negativa, ó como la expresión más propia de un grado máximo de indiferencia respecto de aquellas direcciones fundamentales. Sin embargo, por su forma radical revela el signo $\sqrt{-1}$ un origen algorítmico potencial, y simboliza la totalidad de una teoría inmensa, de la cual no son sino determinaciones particulares los tres momentos típicos representados por los signos +, -, ± $\sqrt{-1}$ correspondientes a los tres conceptos, *realidad, negación* y *limitación*. En la teoría de la potencialidad, ó sea de la graduación, está el germen de la teoría cualitativa.

En los Libros II, III y IV realiza operaciones con números imaginarios, utilizando las palabras: *síntesis* para la adición, *producción* para la multiplicación y *graduación* para elevar a potencias; estableciendo que las dos primeras son operaciones *sincategoremáticas*, al considerar conjuntamente sus aspectos cuantitativos y cualitativos. El Libro IV me parece el más interesante de ellos, y permite apreciar que el autor debería tener conocimientos matemáticos relativamente buenos. Por ejemplo, para calcular $\left(\sqrt{-1}\right)^{1/m}$, hace la descomposición:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^{1/m}=\left[1-\left(1-\sqrt{-1}\right)\right]^{1/m}$$

y usa luego la fórmula generalizada del binomio de Newton; aplica la fórmula de Euler:

$$\left(1+\frac{\mu}{\infty}\right)^{\infty}=1+\frac{\infty}{1}\cdot\frac{\mu}{\infty}+\frac{\infty^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{\mu^2}{\infty^2}+\frac{\infty^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{\mu^3}{\infty^3}+\ldots$$

para llegar a:

$$e^p=\left(1+\frac{p}{\infty}\right)^{\infty}$$

etc.

Aunque alterna el aparato matemático con expresiones tan extrañas como "*Inevolubilidad de la unidad positiva bajo el concepto de calidad. Número e cualitativo*" o definiciones tan sorprendentes como la recogida para el número *e* ya hace años por el Prof. Etayo Miqueo ([3]):

> … es la potencia infinita obtenida por la evolución infinita de la unidad estéril, fecundada por la adición de un elemento infinitesimal. Expresa el máximo desarrollo a que puede aspirar la unidad con el mínimun de actividad evolutiva, con una evoluvilidad cuantitativa infinitamente pequeña. Aunque encerrado en el abismo infinitesimal que media entre los números dos y tres, en los primeros grados de la escala natural numérica, sin que fuera posible adivinar a priori que en este punto singularísimo había de parar la evolución infinita del binomio radical $1+1/\infty$, el cálculo revela su existencia, dando al propio tiempo una prueba patente de cuanto se mezcla la noción del infinito en las someras aplicaciones acerca de la cantidad.

Creo que podría decirse como resumen que existe un apreciable intento de introducir los números imaginarios, pero desde supuestos filosóficos y, en no pocos casos, mediante extraños argumentos ajenos a las matemáticas. A lo largo del texto existen además diversos razonamientos y conclusiones en relación con la lógica, el imaginarismo, la crítica kantiana, etc., en los que no me he detenido, que se encuentran en la línea de su obra *Elementos de Lógica*.

7. Ventura Reyes y Prósper

En 1863, dos años después del fallecimiento de José María Rey, nace en Castuera (Badajoz) un curioso personaje: Ventura Reyes y Prósper ([6], [18], [21]). Se licencia en Ciencias, sección de Naturales, en Madrid (1883), y dos años después se doctora con una tesis sobre la clasificación de las aves de la Península Ibérica, con permio extraordinario de licenciatura y doctorado. La tesis es publicada en los *Anales de la Sociedad Española de Historia Natural*, lo que le merece la felicitación del Comité Ornitológico Internacional, con sede en Viena, y su nombramiento como miembro permanente del mismo. Sin embargo, aunque nunca abandona del todo su dedicación a este campo, paulatinamente va creciendo su interés por las matemáticas, a las que irá prestando la mayor parte de su atención. También realizaría trabajos de paleontología y de arqueología.

En 1891 obtiene la cátedra de Historia Natural del Instituto de Teruel y en 1892 la de Matemáticas del Instituto de Albacete, pero al poco de tomar posesión de su nuevo puesto la cátedra es suprimida y ocupa entonces la de Física y Química, a pesar de que estas disciplinas no tenían especial atractivo para él. Finalmente en 1907, tras muchos esfuerzos, logra ganar la cátedra de Matemáticas del Instituto de Toledo; y más tarde hará cinco intentos por ser catedrático en Madrid, pero no lo consigue. Fallece en Toledo en 1922.

Sabe francés, alemán, inglés, italiano y latín y tiene buenas nociones de griego, noruego, ruso y sueco, lo que le permite no depender sólo de la matemática francesa, como la mayoría de sus contemporáneos. Sus focos de interés se centran especialmente en las áreas de geometría proyectiva, geometría no euclídea y lógica matemática; y suele ser considerado el introductor en España de las dos últimas.

Viaja a Alemania y contacta con Klein y Lindemann, y también mantiene relación con Pasch, Peano y algunos de los mejores matemáticos de su época. Es un auténtico investigador -con la precariedad de medios que podemos imaginar en un Instituto de provincias- y no escribe tratados ni manuales, sino artículos científicos en las más importantes revistas españolas de la especialidad (*El Progreso Matemático, Revista de la Real Academia de Ciencias, Revista de la Sociedad Matemática Española*…) y en algunas extranjeras, como *Mathematische Annalen*[7] y *Bulletin de la Societé phisico-mathématique de Kazan*; de hecho, es el único matemático español que en el siglo XIX publica fuera de nuestras fronteras en revistas prestigiosas, si bien se trate tan solo de breves notas.

[7] En *Mathematische Annalen* escribían matemáticos de la talla de Hilbert, Cantor o Lie.

Goza de un cierto reconocimiento internacional, pues es citado por Schröder, Gino Loria, Schur y algunos de los ilustres matemáticos mencionados anteriormente, y pertenece a la Sociedad Astronómica de Francia y a la Sociedad físico-matemática de la Universidad de Kazan. Pero en España no tiene la misma consideración; es más, aunque es un hombre bueno y generoso (valga como ejemplo que enseñaba taquigrafía gratuitamente en el Instituto de Toledo y daba clases a los reclusos de esta ciudad), a veces es objeto de insidias. Así sucede por ejemplo cuando un profesor de religión, Ventura Fernández López, dirige una nota al subsecretario de Instrucción Pública llena de ataques personales contra Reyes, entonces director del Instituto de Toledo ([21]):

> Se ha casado *civilmente* con una sobrina carnal, al objeto, según es público y notorio, de que en su día pueda recaer en ella la viudedad consiguiente, y tal es así que, en efecto, ni un solo día ha vivido con ella, siendo además el supuesto matrimonio por poderes… Esto burla los fines del matrimonio y es una estafa para el Estado. Requiere para ser revalidado la apostasía de la Religión Católica que hasta ahora don Ventura ha profesado; pero apostasía que le inhabilita por lo menos para ser Director de este Instituto.

Aunque la acusación es todavía más grave si se tiene en cuenta que los hechos eran falsos: ni se casó por lo civil, ni su esposa era sobrina carnal, ni tenía parentesco alguno con él, según afirma el Prof. Juan del Val tras haberlo comprobado ([21]).

8. Reyes y las geometrías no euclídeas

En esta sección y en la siguiente me referiré a las contribuciones de Ventura Reyes a dos áreas de la matemática prácticamente desconocidas entonces en España: las geometrías no euclídeas y la lógica matemática, pero teniendo en cuenta el objetivo principal de este trabajo, de la primera de ellas, que comentaré a continuación, tan solo haré una breve reseña.

Aunque las primeras menciones sobre las geometrías no euclídeas en nuestro país surgen hacia 1870-1880, es en el artículo "Nociones de trigonometría general", publicado en *Crónica científica* en 1884, de Claudio Clariana (1842-1916), catedrático de la Universidad de Barcelona, en donde ya se presentan con cierta precisión varias de sus nociones.

De más relevancia son, sin embargo, las aportaciones de Reyes, que no se limita a introducir en España este tema novedoso, sino que además expone ciertos resultados propios. Algunos de estos artículos se encuentran en las revistas extranjeras antes reseñadas: "Sur la géométrie non-Euclidienne" (1887) que, si bien en el campo de la geometría proyectiva tiene asimismo implicaciones en las geometrías no euclídeas, y que aparece en *Mathematische Annalen*[8], y "Note sur le théorème de Pytagore et la géométrie non-Euclidienne" (1897), que lo hace en la antes citada de la Universidad de Kazan. También se encuentran trabajos suyos en otras revistas españolas, como *El Progreso Matemático*, en donde escribe "Breve reseña histórica de la geometría no euclídea, especialmente de dos y tres dimensiones" (1894) y "Algunas propiedades referentes a los sistemas de círculos demostradas sin el auxilio de relaciones métricas ni del postulado euclídeo" (1895); y el *Archivo de Matemáticas Puras y Aplicadas*, en donde publica "Un punto de geometría no euclídea" (1897). Pero de todos sus artículos sobre este tema los más importantes son, sin duda, los citados al principio, que contienen contribuciones originales; así, en el primero de ellos expone una simplificación de una demostración debida a Klein en relación con el teorema fundamental de Staudt (que el cuarto punto de una cuaterna armónica depende exclusivamente de los otros tres, independientemente del axioma de las paralelas) y, en el segundo, resuelve un problema de Steiner.

No obstante; en las últimas décadas de siglo hay también otros matemáticos españoles que se ocupan de importar a nuestro país las ideas básicas acerca de las geometrías no euclídeas. El más notable de ellos es Zoel García de Galdeano (1846-1924), en sus textos *Geometría elemental* (1888) y *Geometría general* (1895), versión ampliada del anterior. En todo caso, en los primeros años del siglo XX el tema ya aparece recogido en diversas publicaciones españolas, como por ejemplo, en la memoria "Tratado didáctico de las Geometrías no euclídeas" (1908), de J. M. Bartrina y Capella, premiada por la Academia de Ciencias y Artes de Barcelona. En total, Bernalte y Llombart catalogan 86 trabajos relacionados con las geometrías no euclídeas publicados en España de 1874 a 1910, de las que tan solo siete habrían sido traducciones ([2]).

---

[8] En esta revista publica igualmente "Sur les propiétés graphiques des figures centriques" (1888), de geometría proyectiva, en donde prueba un teorema sobre triángulos homológicos en una carta dirigida a Pasch -a la que éste contesta en la misma revista-, lo que luego Pasch incluiría en su obra *Lecciones de geometría moderna* citándole elogiosamente.

9. Reyes y la lógica matemática

La lógica matemática, que en estado incipiente y bajo una perspectiva filosófica intuye José María Rey y Heredia en sus *Elementos de Lógica* (1853), que luego renovaría en posteriores ediciones, es introducida en su verdadera concepción (matemáticamente) por Ventura Reyes y Prósper en la última década del siglo. Aunque, de nuevo, también García de Galdeano estaba al tanto de esta moderna teoría, ya que en 1891 escribe una reseña del primer volumen de la obra *Vorlesungen über die Algebrader Logik* (1890), de Ernest Schröder, y un año después de los *Principi di Logica espositi secondo la dottrine moderne*, de Albino Nagy, que aparecerían en *El Progreso Matemático*.

El interés de Reyes por la lógica surge a raíz de la lectura de otro libro anterior de Schröder: *Operationskreis des Logikkalküls* (1877), que conoce en su viaje a Alemania, y a partir de entonces comienza a escribir en nuestro país sobre ello. Sin embargo, a diferencia de cómo sucede con las geometrías no euclídeas, sus artículos no contribuyen prácticamente a su progreso, puesto que se limita casi en exclusiva a dar información de las obras sobre lógica más importantes, así como de sus autores, y a la difusión de los avances producidos en este campo.

Antes de ocuparme de sus trabajos, y para intentar comprender mejor el pensamiento de Ventura Reyes, probablemente convenga saber que también quiso que los alumnos de segunda enseñanza tuvieran noticia de las recientes tendencias. Así, en el programa de matemáticas que presenta en 1888 a oposiciones de Instituto, figura un primer capítulo que se ocupa de las nuevas ideas acerca de las matemáticas de Gauss, Staudt, Riemann, Lobachevski, Bolyai, Boole, Grassmann…, que sitúa en su contexto histórico; además de otros temas en los que se inicia el estudio de las sustituciones (según Cauchy y Galois), la lógica (de acuerdo a las ideas de Boole, Grassmann, Peirce…) y las geometrías no euclídeas (Bolyai, Lobachevski…)[9].

Los escritos de Reyes sobre lógica son siete, todos ellos publicados en *El Progreso Matemático* entre 1891 y 1893, a los que hay que añadir dos más de los que luego me ocuparé. Los siete primeros son los artículos [11] a [17] reseñados en la Bibliografía.

Haré a continuación una concisa descripción de estos breves trabajos (todos ellos de cuatro páginas, salvo el último que es de tres).

---

[9] Me permito sugerir al lector que considere si la pretensión de introducir de manera comprensible a los alumnos de enseñanza secundaria algunas ideas sobre las nuevas tendencias de las matemáticas -tarea nada fácil, por supuesto-, sería factible hoy en día, más de un siglo después.

El primero ([11]) trata de las máquinas lógicas construidas hasta entonces por Cuninghame, Venn, Marquand…; especialmente de la debida a este último según las teorías de los lógicos Ladd y Mitchell. Y se completa con una relación de los lógicos contemporáneos, asunto sobre el que demuestra tener una buena información.

Hay varios trabajos referidos a algunas de las principales figuras de la lógica en aquel momento y a su desarrollo en determinados países: son los artículos [12] y [14], en donde se ocupa de los lógicos americanos Ladd-Franklin, Peirce y Mitchell, y [13] y [17], en los que se centra en el alemán Schröder y los italianos Peano y Nagy, respectivamente. Entre otras cuestiones, trata de la notación y de la introducción de nuevas operaciones lógicas, problemas entonces de importancia. Pero sorprende que todo ello se presente suponiendo que el lector ya conoce el tema (y Reyes se limite a dar una información complementaria), cuando era casi seguro que eso no sucedía; es más, probablemente en la mayoría de las ocasiones ni siquiera sería capaz de valorar en su justa medida lo novedoso del asunto ni su favorable repercusión en la construcción del edificio matemático. No resulta fácil comprender, por consiguiente, las razones por las cuales el autor no hace una exposición introductoria que permita al lector no tener que recurrir a las obras a las que hace referencia.

En el artículo [16] analiza el papel fundamental de la aritmética dentro de las matemáticas, ya que, mientras por ejemplo en la geometría se pueden cambiar algunos axiomas (como el de las paralelas) y se obtienen otros sistemas geométricos (como las geometrías no euclídeas de Gauss, Lobachevski y Bolyai), no cabe hacer eso con la aritmética, según argumenta Poincaré. Resulta así -sigue diciendo- que la aritmética "*es tan invariable como las leyes del juicio, es en una palabra, una rama de la lógica pura*"; criterio según el cual se esclarece el concepto de número entero, gracias a las aportaciones, inicialmente de Grassmann, y luego de Dedekind y Cantor, con las definiciones precisas de número finito e infinito. Afirma de este modo que quedan establecidas las bases fundamentales de los números enteros, de las cuales se deducen las correspondientes a los fraccionarios (según las contribuciones de Tannery, Méray, Stolz y Peano) y de los inconmensurables (con los trabajos de Tannery, Dedekind y Weierstrass). Después de leído todo el artículo parece evidente que Reyes está al corriente de las cuestiones relativas a la aritmetización del análisis y a la fundamentación de los números reales, que eran estudiadas especialmente en la década de 1870 a 1880, y sobre las que da a conocer sucintamente alguna de sus claves.

También el artículo [15], en el que intenta aportar ideas originales en vez de ser meramente descriptivo, es de nuevo tan esquemático que resulta imposible entender los criterios que establece para clasificar en siete grupos los escritos lógico-matemáticos (clasificación que hoy en día podría parecer algo arbitraria). Esa catalogación -según confiesa- es un primer paso para su proyecto de elaborar una historia de la lógica simbólica, algo no hecho hasta entonces, pero que él cree que podrá realizar por conocer lo existente sobre ello en las bibliotecas españolas (que no es mucho) y, principalmente, por haber mantenido correspondencia con Ladd, Schröder, Peirce, Venn, Murphy, Kempe, Voight, Johnson, Mac-Coll, Naggy y Peano, quienes además le han enviado artículos suyos en relación son su propósito.

Me referiré ahora a los otros dos artículos de lógica (el segundo dividido en dos partes) no publicados en *El Progreso Matemático* ([22]), sino en la revista *Naturaleza, Ciencia é Industria* ("Revista general de Ciencias é Industrias", Madrid: Imprenta Manuel Tello; continuación de *La Gaceta Industrial, La Ciencia Eléctrica y La Naturaleza*, refundidas). Son los siguientes:

- I. "La lógica simbólica, I", Vol. I (1891), nº 7, pp. 187-188.
- II. "La lógica simbólica, II", Vol. I (1891), nº 9, pp. 254-256 y Vol. I (1891), nº 11, pp. 319-321.

Los trabajos I y II están editados en el mismo año (1891) que [11] y [12], y por los mismos meses: [11] en septiembre, [12] en diciembre, I en octubre y II en noviembre (la primera parte) y diciembre (la segunda); y suponen una novedad con respecto a todos los demás, pues constituyen en cierto modo una presentación general de la lógica matemática para lectores desconocedores del tema (lo que se había echado en falta en los otros). Tanto el artículo I como las dos partes de II finalizan con la palabra "continuará"; sin embargo, con ello concluye las publicaciones acerca de la introducción de la lógica simbólica, tanto en esta revista como en cualquier otra. Sorprende pues esa interrupción repentina de una exposición general divulgativa de sus nociones fundamentales, cuando en cambio prosigue las publicaciones sobre lógica en *El Progreso Matemático*, pero ocupándose de otros aspectos, en todo caso complementarios.

En los artículos I y II demuestra, por otra parte, estar al corriente de las contribuciones de Boole, Mitchel, Peirce, Schröder, De Morgan…, y presenta, como se ha dicho, los conceptos básicos: proposiciones, operaciones entre ellas y sus propiedades, implicaciones, etc., aunque en ocasiones -como parece natural-, con una notación algo diferente a la actual [por ejemplo, $a(=b$ significa a implica b]. En todo caso -repito-, no terminará esa presentación general.

Pero esa última consideración también se pone de manifiesto en otros momentos de su labor introductoria de la lógica matemática en España. Me refiero a estos dos: en primer lugar, aunque en [11] y [12] dice estar traduciendo los *Vorlesungen* de Schröder, no parece que llegara a terminar esa tarea; y, en segundo, tampoco finaliza su proyecto de escribir una historia de la lógica, declarado en [15], pues se limita a realizar una clasificación -a su juicio- de las publicaciones sobre este tema. Con todo, nada de ello parece que deba ensombrecer un ápice el relevante papel que juega al importar esas ideas a nuestro país y destacar su importancia teórica dentro del edificio matemático.

10. Trío de Reyes

Cuando a lo largo de este artículo me he estado refiriendo a Rey Heredia y a Reyes y Prósper, probablemente a algún lector le haya venido a la cabeza otro "Rey": Julio Rey Pastor (1888-1962), el mejor matemático español de la primera mitad del siglo XX y su líder indiscutible. Y aunque posterior a nuestros dos protagonistas -nació 70 años más tarde que el primero y 25 después del segundo- quería finalizar estas páginas con unas palabras suyas sobre aquellos.

Al primero se refiere en el discurso inaugural del V Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, sección 1ª (Ciencias Matemáticas), celebrado en Valladolid en 1915, en donde elogia la tarea de Rey y Heredia por haber contribuido al renacimiento de la ciencia española. Y menciona en concreto su obra *Teoría Trascendental de las Cantidades Imaginarias*, en la que introduce los números complejos en nuestro país, aunque -confiesa- de una manera elemental y desde un punto de vista filosófico y no matemático.

También alaba el trabajo de Reyes -que considera normal en un profesor extranjero, pero extraordinario para uno español- en estos términos ([19]):

> La generosa exuberancia hispánica, disculpable por la patriótica sed que todos sufrimos de compatriotas famosos, se apresurará a calificar de *genio* a este matemático precursor; calificativo que haría sonreir a cualquier profesor ultrapirenaico al medir fríamente el valor absoluto de las ingeniosas notas elementales firmadas por nuestro colega toledano; pero mal juez será siempre el que interprete en abstracto los hechos del frío sumario escrito, sin interesarse por el caso concreto del encausado, con todo su entorno de circunstancias vitales; y así resulta en este caso: que quien sería fríamente calificado como profesor corriente y *normal*, juzgado fuera de aquí, es en verdad *genial*, preci-

samente por ser *normal afuera* y por tanto excepcional aquí *dentro*; por ser distinto de todos sus colegas; y por parecerse a los hombres de otro mundo más que a los del propio.

Esta última cita corresponde a la contestación del discurso de recepción de Ricardo San Juan en la Real Academia de Ciencias (1956). Terminaré el artículo con unas palabras de San Juan -acaso exageradas- justamente del anterior discurso, con la que elogiosamente se refiere a su profesor de matemáticas del Instituto de Toledo, Ventura Reyes y Prósper ([19]):

> Profundas y elegantes han sido todas sus creaciones, y algunas trascendentales para el desarrollo de la Ciencia. La demostración del teorema de los triángulos homológicos, sin la cual no hubiera podido Schur desarrollar su teoría de los elementos ideales, cerró definitivamente la fundamentación de la geometría proyectiva, iniciada por Klein y trabajosamente desarrollada por Pasch.

Bibliografía

[1] Bastons, C. (1996). "A propósito de los 150 años de la Enseñanza Media en España". *Cátedra Nova*, nº 3, pp. 21-23.

[2] Bernalte, A. y Llombart, J. (1995). "The effect of the implantation of non-Enclidean geometries on the change of paradigm and its repercussion in Spain", en Ausejo, E. y Hormigón, M. (Eds.), *Paradigms and Mathematics*. Madrid: Siglo XXI, pp. 391-406.

[3] Etayo, J. J. (1990). *De como hablan los matemáticos y algunos otros*. Discurso inaugural del año académico 1990-1991. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

[4] Monlau, P. F. y Rey, J. M. (1849). *Curso de Psicología y Lógica.* Madrid: Gaspar y Roig.

[5] Moreno, A. (1988). "De la física como medio a la física como fin. Un episodio entre la Ilustración y la crisis del 98", en Sánchez Ron, J. M. (Ed.), *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil*. Madrid: CSIC/El Arquero, pp. 27-70.

[6] Peralta, J. (1999). *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Madrid: Nivola.

[7] Peralta, J. (2000). "La Matemática madrileña en el panorama español de 1800 a 1936", en Escribano, M. C. (Coord.), *Matemáticos Madrileños*. Madrid: Anaya, pp. 183-230.

[8] Picavet, F. (1891). *Les idéologues*. En la dirección web: www.uquebec.ca/zone/30/Classiques_des_Sciences_sociales/index.html
[9] Rey y Heredia, J. M. (1865). *Teoría Trascendental de las Cantidades Imaginarias*. Madrid: Imprenta Nacional.
[10] Rey y Heredia, J. M. (1872). *Elementos de Lógica*. Madrid: Imprenta y Estereotipia de M. Rivadeneyra (10ª edición).
[11] Reyes, V. (1891). "El raciocinio a máquina". *El Progreso Matemático,* Tomo I, nº 9, pp. 217-220.
[12] Reyes, V. (1891). "Cristina Ladd-Franklin. Matemática americana y su influencia en la lógica simbólica". *Prog. Matem.*, Tomo I, nº 12, pp. 297-300.
[13] Reyes, V. (1892). "Ernesto Schroeder. Sus merecimientos ante la lógica, su propaganda lógico-matemática, sus obras". *Prog. Matem.*, Tomo II, nº 14, pp. 33-36.
[14] Reyes, V. (1892). "Charles Santiago Peirce y Oscar Howard Mitchell". *Prog. Matem.*, Tomo II, nº 18, pp. 170-173.
[15] Reyes, V. (1892). "Proyecto de clasificación de los escritos lógicos-simbólicos, especialmente de los post-boolianos". *Prog. Matem.*, Tomo II, nº 20, pp. 229-232.
[16] Reyes, V. (1892). "Nuevo modelo de considerar la aritmética". *Prog. Matem.*, Tomo III, nº 25, pp. 23-26.
[17] Reyes, V. (1893). "La Lógica simbólica en Italia". *Prog. Matem.*, Tomo III, nº 26, pp. 41-43.
[18] San Juan, R. (1950). "La obra científica del matemático español D. Ventura de los Reyes y Prósper". *Gaceta Matemática*, 1ª serie, Vol. II, nº 2, pp. 37-41.
[19] San Juan, R. (1956). *La abstracción matemática*. Discurso de recepción. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
[20] Simón, J. (1992). *Historia del Colegio Imperial de Madrid*. Madrid: Instituto de Estudios Madrileños.
[21] Val, J. A. del (1966). "Un lógico y matemático español del siglo XIX: Ventura Reyes y Prósper. *Revista de Occidente*, nº 35, pp. 252-261.
[22] Vega, L. (2002). "Ventura Reyes y Prósper" (1863-1922) y la introducción de la nueva lógica en España". *Asclepio*, Vol. LIV, nº 2, pp. 181-210.
[23] Viñao, A. (1994). "Los institutos de segunda enseñanza", en AA. VV., *La educación en la España Contemporánea (1789-1975)*: *Historia de la Educación en España y América*, Vol. 3. Madrid: SM/Morata.

Recordando las Escuelas de Magisterio del último medio siglo

Alberto Aizpún López

Catedrático de Matemáticas de la Escuela de Magisterio de Madrid
aizpunycasals@telefónica.es

Abstract

Not being my intention to begin the writing of an essay and without the aim of arguin, in this article we make an reference to what the training of teachers has been over the last half century, as well as to intrinsec difficulties that centres in charge of the instruction of professionals have. We also refer to the problems that teachers of mathematics have to face in order to fufill their task.

Dedicado al Profesor Roanes Macías

Introducción

El pasado mes de Diciembre, los amigos, los compañeros y los colegas del Profesor Eugenio Roanes Macías le ofrecieron una comida homenaje para acompañarle en el momento de su jubilación. Actos como aquel propician que se pase revista a las vicisitudes habidas en un periodo de tiempo que allí termina. A mi me dio por pensar en el papel que los Profesores de Matemáticas han desempeñado en las Escuelas de Magisterio (llámense hoy como se quiera) como formadores de Maestros, y puse arbitrariamente el origen del tiempo en 1958; en total, medio siglo para examinar. Ya hacía cinco años desde que se habían convocado las primeras Oposiciones a Cátedras después de la guerra civil. Unas reservadas exclusivamente para mujeres, que habían de ocupar plaza en Escuelas de alumnado femenino y otras, con distinto Tribunal y distinto Cuestionario base, para varones, que aspiraban a plazas en Escuelas de alumnado masculino. Esa distinción del Profesorado desapareció, precisamente en 1958, al crearse la Escuela Experimental Nocturna en Madrid, con alumnado masculino pero Profesorado mixto.

La Escuela en que yo habría de servir durante casi toda mi vida profesional era entonces exclusivamente femenina, formada por unas dos mil alumnas de entre catorce y dieciséis años, profesorado femenino solamente (excepto un varón incrustado desde antes de la guerra), personal administrativo femenino y personal subalterno que se componía de ocho mujeres. La conserje principal tenía un hermoso perro lobo que era una hembra. Ese mismo año, el Centro al que algo más tarde llegaría el Profesor Roanes admitía solamente varones. Recuerdo como detalle que el jefe de los conserjes también tenía un hermoso perro lobo que, naturalmente, era macho.

En aquel tiempo, la carrera de Magisterio estaba regulada por el llamado Plan de 1950 que había de durar hasta 1967, quedando extinguido en 1969. O sea, que doce años habían de pasar desde el lanzamiento del Sputnik, y años desde los viajes de la perra Laika y el de Yuri Gagarin; justamente el año que Amstrong pisó la luna, entonces, nuestros aspirantes al Magisterio, hombres y mujeres, fueron dispensados de asignaturas como "Caligrafía", Labores y enseñanzas del hogar (costura, bordados y confección de ropa de niño)", "Formación del Espíritu Nacional", etc. Porque el Plan de Estudios, al que accedían niños y niñas de catorce años, tenía esas cosas. La cultura que proporcionaba era de un nivel miserable, las técnicas de trabajo como profesional ridículas y el prestigio social que tenía el Título, nulo. Solamente después de terminados aquellos estudios, sumando experiencia continuada en el ejercicio de la profesión con ilusión por el trabajo, curiosidad por el conocimiento, esfuerzo personal y formación autodidacta, quien conseguía extirpar la malformación producida inicialmente podía considerarse verdadero Profesor o Profesora de Enseñanza Primaria.

Contra lo que podría pensar, ingenuamente, cualquier profano, la culpa de todo ello no era del Profesorado, la mayoría magníficos profesores. No hay que olvidar que el profesor es un funcionario, lo que significa ser un intermediario encargado de transmitir a su alumno lo que la Sociedad le ordena y no lo que considere mejor, como el juez, otro funcionario, se encarga de aplicar a cada ciudadano el Derecho que la sociedad le manda y no cualquier otro que le parezca más razonable. Lo que pasa es que, a veces, esta idea es soslayada por molesta, se le disfraza o, directamente, se niega. Pero la ocultación de la verdad nunca ha servido para cambiarla.

Quienes conocen la historia de las Escuelas de Magisterio no necesitan explicación alguna, pero nuestros actuales colegas del Profesorado en esos Centros no están, en general, muy informados sobre la cuestión. Ni les hace falta para ingresar en alguno de ellos como docente. Por eso, porque es necesario recordar para poder comprender, no viene mal acudir al magnífico ensayo (1) y al anterior en el tiempo, pero menos exhaustivo (2). Quien no lo sepa, aprenderá por su lectura que el Profesorado de las Escuelas Normales no procedía directamente de la calle, sino que era formado en un Centro específicamente creado para ello: la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio, en el que se ingresaba mediante selección previa, y de cuya fundación se cumplen cien años en éste de 2009. No parece que las Escuelas, en cualquiera de sus denominaciones actuales, se hayan lanzado a recordarlo. Hoy día, cualquier persona medianamente cultivada conoce en nombre y obra a quienes formaron a esos normalistas: José Ortega y Gasset (hasta que obtuvo su cátedra en la Universidad), Luis de Hoyos, Luis de Zulueta, Domingo Barnés, Ricardo Beltrán y Rózpide, Rufino Blanco, Juan Zaragüeta,.....La relación completa del año 1920 puede verse en el ensayo citado (1). Por otro lado, cualesquiera que sean las opiniones personales sobre los hechos y cualesquiera que sean los sentimientos que algunos manifiestan cuando aquellos son evocados, no se puede ignorar cómo fueron formados los mejores maestros que hasta ahora conocieron nuestras Escuelas Primarias. Pero como el objeto de este trabajo no es ése de examinar Planes de Estudio, se recomienda la lectura detallada de (3) y (4) . Quien lo haga quedará informado de que la situación de las Escuelas Normales en el momento de comenzar la guerra civil era la siguiente:

a) Disponían de Profesores específicamente preparados . En particular, éstos tenían la experiencia escolar suficiente para que sus alumnos les vieran actuar con los niños.
b) Los alumnos, con título previo de Bachiller Superior, llegaban a la Escuela después de un concurso-oposición. El número de plazas era limitado. Su preparación profesional era de tal grado que el plan de estudios se llamaba precisamente así: Plan Profesional.

1 Medio siglo de Profesores de Matemáticas en Escuelas de Magisterio

Puestos medio siglo antes del homenaje al Profesor Roanes, las cosas del Magisterio eran así:

a) Se llaman Escuelas de Magisterio.
b) Los Profesores son Licenciados en su materia y han llegado por Oposición sin experiencia previa como maestros.
c) Los alumnos, varones o mujeres, son niños: entran con catorce años, con título de Bachiller Elemental.

En particular, el Profesorado de Matemáticas ha llegado en tres tandas: 1953, 1956 y 1959. Seis en 1959, siete en 1956 y no sé cuántos en 1953; pongamos una docena. Muy pocos (no recuerdo más que dos) conocen la Escuela Primaria como maestros en ejercicio. En cambio, la mayor parte son ya profesores de Instituto o de Escuela Técnica (hasta hay uno que en 1959 ya tendrá tres cátedras), lo que significa que sí tienen experiencia docente. Ese profesor genérico recién llegado del que hablamos no tiene nombre, pero solamente para describir su llegada al primer destino, le pondremos el mío. La primera escuela en que yo serví era la de una capital de provincia de tercera clase administrativa. El director de la masculina era el profesor de Religión, un hombre robusto, malcarado, sanguíneo, iracundo, que se llamaba Leonardo y a quien, por buen nombre, decían Don Leopardo. Sin duda actuaba de buena fe y resultaba, en el fondo, entrañable; daba la pauta del vuelo intelectual que el Centro permitía. Quizá la biblioteca había sido expurgada de obras señaladas por peligrosas pedagógicamente hablando, pero en Matemáticas, al parecer poco proclives a cualquier tipo de heterodoxia, quedaba un fondo interesantísimo: los dos tomos de la "Matemática elemental desde un punto de vista superior" de Félix Klein, editada por la Biblioteca Matemática que dirigía Rey Pastor; las colecciones de ejercicios y problemas del grupo francés F.G.M. , tanto de Aritmética como de Álgebra, de Geometría y de Trigonometría; los tres tomos de "Récreations mathématiques" de Edouard Lucas; los tres de "Récréations mathématiques y problémes des temps anciens et modernes"de W. Rousse Ball, el "Traité de Géométrie" de Rouché y Comberousse, "Análisis numérico" y "Teoría de funciones" de Rey Pastor, la traducción de Álvarez Ude y de Rey Pastor de "Lecciones de Geometría Moderna" de Moritz Pasch, y otros. Todo "vestigios del viejo esplendor" que diría el poeta Espronceda.

Los Planes de Estudio han variado a lo largo de tantos años. Unas veces la asignatura que imponen se llama Matemáticas, otras Matemáticas y su Metodología, otras Matemáticas y su Didáctica, otras Didáctica de las Matemáticas, otras Metodología de las Matemáticas. Con distinta, aunque siempre escasa, intensidad. Así que la situación ha sido constantemente ésta: el Profesor que llega a la E.M. es un Licenciado o Doctor, sobrado de conocimientos matemáticos, ansioso por hacer bien su labor y cuya obligación sobreentendida es conseguir buenos profesionales de Escuela Primaria, pero con frecuencia más que suficiente para hacer despreciable el número de excepciones, el profesor de Didáctica de las Matemáticas no tiene de inicio la menor idea experimentada de lo que es en la realidad una jornada escolar completa en Primaria. Dicho de otro modo: no es un experto, ni siquiera un conocedor, del trabajo escolar con niños; a veces, ni ha pisado un aula de Primaria desde que salió de ellas como alumno. De modo que ese profesor se ve obligado a enseñar una materia que desconoce, porque la Didáctica de las Matemáticas no es matemática, como la Didáctica de la Ciencia no es ciencia.

Afortunadamente, desde un entorno de 1980 existen las asociaciones de profesores de Matemáticas, que facilitan la organización de Reuniones, Encuentros, Jornadas, Congresos, etc., en los que nuestro profesor novel se puede tranquilizar al ver que su problema como docente es general, salvo las consabidas excepciones. En esos encuentros a los que el Profesor acude con la mejor intención de escuchar, aprender y colaborar, se encuentra con que nadie le ofrece una actuación práctica con niños de colegio, como las que con más o menos acierto se llamaron en otro tiempo "Lecciones Modelo", que nunca faltaban en las reuniones pedagógicas y que D.Pedro Puig Adam, por ejemplo, desarrollaba ante cualquiera, con alumnos de Institutos, con tanta generosidad como brillantez. Es de recordar que, hasta su fallecimiento en 1960, la figura de la enseñanza de las matemáticas en Institutos era, muy merecidamente, D. Pedro Puig Adam, quien ofrecía, a quien se le acercara interesado, la posibilidad de verle trabajar con alumnos de carne y hueso, así como debatir después, pedagógicamente, cualquier detalle de la clase impartida. Parece razonable esperar que en un sistema educativo bien organizado todo profesor de E.M. debería hacer otro tanto en una escuela primaria porque, a fin de cuentas, la función que se supone que desarrolla es indicar a sus alumnos cómo han de trabajar con los niños y ¿qué mejor que una demostración práctica?. Más: una formación como maestro separada de la Escuela Primaria, no inmersa en las aulas, no es una formación adecuada; y si la ignorancia de la vida y el trabajo reales de esa escuela empieza por los propios formadores, entonces se hace inútil cualquier buena intención por su parte, pero así viene ocurriendo en todo el medio siglo que examinamos. En ese punto los organizadores de la Educación han mostrado su eficacia, porque lo que señalo no es un defecto de los Centros de Formación, sino una decisión política, deliberadamente tomada en su día y no corregida luego por nadie.

De todos modos, nuestro profesor está decidido a explorar y conocer el campo de la Didáctica de las Matemáticas y si no puede empezar por su contemplación en un Colegio con niños quizá decida hacerlo estudiando a fondo las directrices oficiales que el Ministerio de Educación da a los maestros. Si lo hace, encontrará algo sorprendente: es que gran parte de esas normas, directrices y orientaciones, supuestamente salidas de la experiencia de los redactores, son copia literal de párrafos enteros del libro (5) y que no se cita la fuente. Nuestro colega lo encaja como un golpe bajo y, desde entonces, cuando en alguna norma oficial vea una idea racional pensará que es un plagio.

A la vista de todo eso se decide por incorporarse al tipo de trabajos que ve en los Encuentros. En principio siente cierta prevención, aunque quizá cambie de opinión más tarde: le parece que discursear sobre técnicas de enseñanza sin niños de colegio que las avalen es como exhibirse con vistosas verónicas en la terraza de su casa: toreo de salón. Como, a fin de cuentas, la matemática escolar primaria no es un campo independiente sino una parte de la educación general, se sumerge en el estudio de los pedagogos más influyentes del siglo XX, de su obra y sus propuestas, así como de los tipos de Escuela Primaria que nacen con ellas. Principalmente, desde Decroly y la Escuela Activa, con sus variantes, tanto en Europa como en América, recorre el siglo y otea hoy los esbozos que van apareciendo sobre la Escuela Virtual, basada en las posibilidades técnicas de Internet. Todo ello mirado especialmente como profesor de matemáticas en un Centro de Formación que es, encargado de formar a sus alumnos para que trabajen en la Enseñanza Primaria y no en otro campo. No olvida las propuestas netamente españolas: la Escuela Moderna de Ferrer y Guardia, la organización educativa de la segunda república y los movimientos de renovación pedagógica. Y le parece ver que el papel que se le asigna a la matemática escolar es el mismo en todo ello, porque los cambios que se proponen se refieren, siempre, a las *técnicas de aprendizaje*, pero no a lo que se entiende por Matemáticas. Efectivamente, en 1900 la justificación era ésta: "la Matemática sirve para describir la realidad; hagamos que el niño observe esa realidad y aprenderá Matemáticas"; hoy día no es muy distinta y solamente ha cambiado el aspecto que ofrece lo que llamamos realidad. En consecuencia, los resultados escolares tampoco difieren mucho, siendo siempre peores de lo deseable. Con el tiempo han cambiado los contenidos, han cambiado los medios técnicos, ha cambiado la consideración social de la educación, pero no ha cambiado el pensamiento sobre los caminos por los que los conceptos matemáticos se instalan en la mente infantil. Quizá haya variables educativas que distorsionan el aprendizaje o quizá, más simplemente, lo que tomamos por Matemática en la escuela, no sea tal, sino una falsificación que utiliza el mismo vocabulario.

Respecto a la primera posibilidad, hace una treintena de años que muchos de nuestros profesores, magníficamente preparados para ello, vienen desarrollando trabajos sobre cuestiones no matemáticas y estudian cosas como la psicología del aprendizaje, la psicología del alumno, la técnica de construcción de diseños escolares, los procesos de la cognición, el origen social de la Matemática, la epistemología de los conceptos y cosas parecidas. Todo ello ha llevado a esclarecer esos objetos de estudio, pero no parece que tenga mucho que ver con la Didáctica de las Matemáticas porque aunque ésta no sea un capítulo de las Matemáticas, solamente puede justificar su nombre mediante contenidos matemáticos.

2. Lo trivial y lo no tanto

Para un matemático, las ideas que se manejan en la escuela son triviales y, seguramente, está en lo cierto. Eso mismo da identidad a la Didáctica, que consiste en trivializar el concepto, haciéndolo asequible al alumno primario tal cual es sin sustituirlo por un sucedáneo. Ese concepto puede considerarse trivial una vez que hemos conseguido llevarlo a la escuela elemental sin desvirtuarlo, pero el trabajo que exige ese proceso de traslación ya no es, ni mucho menos, trivial y exige un estudio matemático del concepto mayor que la simple comprensión, suficiente para exponerlo de modo formal en una enseñanza superior. Sería algo así como el proceso opuesto al del título del libro de Klein y se podría resumir por "la matemática superior desde un punto de vista elemental" Es aquí donde la herramienta principal, indispensable, es el lenguaje adecuado, sea oral, escrito o de imágenes. Efectivamente, cuando dos personas comentan un tema que ambos dominan, las incorrecciones de lenguaje importan poco porque cada uno sabe de lo que se habla, pero si son el Profesor que intenta enseñar y el alumno que escucha, entones el primero debe emplear un lenguaje preciso, ortodoxo, porque cada abuso de lenguaje significa una variación del concepto transmitido y se supone que el oyente entiende lo que se dice, no lo que se quiere decir pero no se dice. Sin el obligado lenguaje riguroso, el alumno ha de atender a cosas de este jaez: "convierte la fracción 1/7 en decimal de tres cifras" (no me lo invento) " la parte entera de un decimal es el número que está a la izquierda de la coma", "escribe el número que sigue a 2, 5, 8, …". El lector no necesita explicaciones pero yo doy ahora algunas, más que nada para aclarar lo que vengo diciendo en esta subsección. En primer lugar no se puede olvidar en ningún momento que la idea que fundamenta toda la Matemática actual desde hace siglos y la distingue de otras Matemáticas, como la griega, es el concepto de función; en consecuencia, el efecto principal que debe tener la educación matemática elemental es conseguir que el alumno alcance ese pensamiento funcional, mucho más que logre cualquier habilidad operativa. Con esa interpretación, los números son inmutables y no existe truco alguno de ilusionista que *convierta* un número en otro. En segundo lugar la fracción 1/7 no es una fracción decimal y por tanto no existe decimal de tres cifras que la represente. El caso es que el redactor de los ejemplos anteriores tiene el conocimiento correcto pero como su alumno es un niño dice las cosas de cualquier manera. Así pasa lo que pasa y con ese desbarajuste de lenguaje tan frecuente, la consecuencia puede ser la de la tira cómica de Calvin y su tigre:

Ambos están estudiando y leen "Un quintal es una unidad de peso que equivale a cien libras". Pregunta Calvin: "¿Y qué es una libra?". El tigre:" Un signo del Zodiaco". Después de un momento de reflexión Calvin deduce: "Jo, nunca entenderé las Matemáticas".

....

Y en éstas estaba yo, dispuesto a lanzarme por los vericuetos de la Didáctica de las Matemáticas y los de la trivialización de conceptos cuando, con los postres, terminó la comida y comenzó el homenaje al Profesor Roanes Macías. Entonces me dediqué a observar, escuchar y aplaudir, como está mandado. Un placer.

Bibliografía

[1] Molero Pintado, Antonio; del Pozo Andrés, Mª del Mar (1989): *Escuela de Estudios Superiores del Magisterio*. Universidad de Alcala. Departamento de Educación.

[2] Ferrer G. Maura, Salvador (1973): *La Escuela de Estudios Superiores del Magisterio*. Madrid.

[3] Molero Pintado, Antonio (1977): *La Reforma educativa de la Segunda República Española*. Ed. Santillana.

[4] `www.ua.es/centros/educación/secretaria/anteriores planesboe.html`

[5] Young, J.W.A. (1947): *Fines, valor y métodos de la enseñanza matemática.* Ed. Losada. (El original es de 1929 y la primera versión de 1906).

Aquellos maravillosos años

Olga Gómez Agulló

Departamento de Matemáticas
I.E.S. Juan Carlos I, Ciempozuelos
olga.gomezagullo@educa.madrid.org

Fernando Lisón Martín

Departamento de Biología y Geología
I.E.S. Juan Carlos I, Ciempozuelos
Miembro del grupo MAX (MAdrid-LinuX)
fernando.lison@educa.madrid.org

Abstract

In appreciation of all Eugenio Roanes Macías represents for us

Cursamos magisterio en la Pablo Montesinos entre los años 1980 y 1983. En ese tiempo tuvimos más de 25 profesores distintos, y recordamos anécdotas y peculiaridades de todos o casi todos, pero siempre que añoramos aquellos años nos oímos decir la misma frase :¡Qué suerte tuvimos con nuestros profesores de la especialidad! Nos referimos a Mercedes Calvo de Geología, a María Angeles Collantes de Biología, pero muy especialmente a Manuela Sánchez que nos enseñó Física en 2º y Química en 3º y a Eugenio Roanes Macías que fue nuestro "profe" de mates en los tres cursos, y con el que hemos tenido la suerte de mantener el contacto y poder contarnos entre sus amigos.

Por todo esto, cuando nos enteramos de este número especial de homenaje a Eugenio, no lo dudamos. Hubiese sido más relevante que le hubiéramos nombrado en los agradecimiento al recoger nuestra medalla Fields, pero ya estamos por encima del límite de edad, y nuestra máxima aportación a las Matemáticas es buscar cada mañana qué hacer para que la gente menuda comprenda que sumar fracciones o aplicar el teorema de Pitágoras es igual de fácil y divertido que meter balones en una canasta o tirarle pelotillas al compañero de delante.

Entonces pensamos en el minimalismo conceptual y firmar un artículo con la palabra que mejor expresa nuestros sentimientos respecto a Eugenio: “Gracias”. Sin embargo, optamos por ordenar algunos recuerdos, y eso son estas notas para *celebrar (¿?)* la jubilación de Eugenio, que no tendrán la imparcialidad que debiera otorgar el paso del tiempo, sino que irán teñidas de la admiración que siempre le hemos tenido y del cariño que crece continuamente.

De su mano descubrimos que las Matemáticas (como la Física y la Química), cuando están bien fundamentadas, cuando se sabe a dónde se quiere llegar, cuando van de la mano la teoría y la práctica, no son en absoluto complicadas: de los axiomas recogíamos los teoremas como frutas en sazón.

Fuimos subiendo escalón a escalón, se diría que nos llevaba de la mano como a niños pequeños. Desde la altura donde empezábamos cada día, con los pies bien asentados, afrontar el siguiente escalón resultaba cautivadoramente sencillo.

Además de Matemáticas aprendimos didáctica. La motivación continua que nos hacía contrastar nuestras soluciones a los problemas con las de los demás compañeros, la relación con los alumnos, seria, pero amable, y nunca impersonal, la importancia de la programación diaria: cómo nos asombraba que día tras día, el timbre coincidiese con el final de la clase, lo mucho que aprenden los alumnos en la pizarra, cómo las manos ayudan a construir el pensamiento, el cuaderno de actividades, la actualización constante... nos introdujo en el mundo de la informática cuando aquí no era más que un rumor...

Pero Eugenio enseñaba más con su actitud que con sus explicaciones. Desbordaba entusiasmo, lo contagiaba. Disfrutaba muchísimo con su trabajo, cuando explicaba y cuando nos veía desarrollar un problema algo más complejo.

No conseguimos recordar que faltase ningún día a sus clases y sí que se nos vienen a la cabeza días en que estaba realmente enfermo y seguramente con fiebre alta, y allí estaba, por nosotros, para nosotros. Exigiéndonos la misma puntualidad sin decir una palabra al respecto, sólo con su presencia infalible.

Aprendimos tolerancia a una edad en la que nos *creíamos* tolerantes: en aquella vorágine de principios de los 80, los alumnos (los profesores, por supuesto) fumábamos en las clases hasta crear una neblina que dificultaba ver la pizarra, Eugenio nos pedía a los fumadores que nos pusiésemos cerca de las ventanas y que las abriésemos. Siempre expresaba su criterio con argumentos razonables.

Además nos escuchaba. En cada trimestre, a los alumnos que salíamos habitualmente a la pizarra a resolver los ejercicios, nos ofrecía una calificación, y si nos parecía suficiente y conveniente, no teníamos que hacer el examen trimestral. Como el grupo, -tal vez no esté bien que lo digamos nosotros- tenía bastante nivel, no todos los interesados podíamos salir a lo largo del trimestre a demostrar nuestro trabajo diario (y eso que llegamos a organizar turnos). Algunas compañeras -no es una cuestión sexista, es que éramos sólo cinco varones en el grupo- adujeron que era injusto que algunos no hiciéramos los exámenes y Eugenio cedió a sus peticiones y todos nos examinamos en el segundo trimestre del segundo curso. Con los resultados en la mano Eugenio comprobó la gran correlación entre la nota ofrecida y la obtenida en el examen y, de nuevo con argumentos razonables, volvimos al sistema de no hacer los exámenes.

La escuela compartía parte del patio con un colegio público anejo, el Rufino Blanco, si mal no recuerdo. Un día nos contó Eugenio al llegar a clase que le habían dado un pelotazo los niños que jugaban en el recreo y que les reconvino con las siguientes palabras "Tened cuidado que un día le vais a dar a una persona". Os aseguro que a pesar de los años éstas son palabras literales. Nos hizo gracia, "Claro, por eso no falta nunca: es una máquina!" y cosas por el estilo. Y sólo cuando recibimos nuestro primer pelotazo en un patio de recreo y les dijimos a nuestros alumnos esas mismas palabras sonriendo por dentro y por fuera, entendimos que "maestro" es una "persona" especial que sabe encajar pelotazos.

También fue nuestro tutor de Prácticas y, mientras que para otros compañeros era un sufrimiento la proximidad de la visita del tutor, nosotros esperábamos el día en que nos vería *dar una clase*, o algo parecido, como la culminación de todo nuestro aprendizaje.

...

El tiempo pasa inexorable y la geometría no euclídea de la ciudad (este sería un buen campo de investigación) extiende las distancias y levanta dificultades a la comunicación, que sólo conseguimos salvar una o dos veces al año por medio del teléfono. Y ese breve rato hablando de la familia y el trabajo, nos confirma que estamos frente a un hombre, en el mejor sentido de la palabra, bueno.

Periódico científico “Todo Ciencia”

Miguel Ángel Queiruga Dios

Dpto. TICC. Colegio Jesús-María Burgos
Dpto. Física Aplicada. Universidad de Burgos
queiruga@inicia.es

Todo Ciencia

Periódico científico | Fundado en el año 2009 | Colegio Jesús–María Burgos Nº 1

Madame Curie recibe su segundo premio Nobel

La investigadora Madame Curie recibe su segundo premio Nobel, esta vez de Química. Su primer premio Nobel, en aquella ocasión de Física, lo compartió con Henri Becquerel "en reconocimiento de los extraordinarios servicios rendidos en sus investigaciones conjuntas sobre los fenómenos de radiación descubierta por Henri Becquerel". ¡Es la primera mujer que obtiene este galardón!

En esta ocasión el Nobel recibido es de Química, *«en reconocimiento de sus servicios en el avance de la Química por el descubrimiento de los elementos radio y polonio, el aislamiento del radio y el estudio de la naturaleza y compuestos de este elemento»*.
Curie, una investigadora incansable, prosiguió las investigaciones que llevaba a cabo con su marido, Pierre Curie, a pesar de su trágica muerte atropellado por un carruaje.
Como decimos, el carácter tenaz de esta mujer, le hace continuar su estudio de la

El 1 de junio de 2009, “sale a la calle” el primer número del periódico científico “Todo Ciencia”. Con sus ocho páginas impresas en papel reciclado, es el producto del trabajo colaborativo de alumnos y alumnas de 3º de E.S.O. del colegio Jesús-María de Burgos.

Dirigido por las alumnas Laura Lázaro y Ana Pérez, coordinadas por su profesor Miguel Ángel Queiruga, aborda distintos temas de actualidad científica y tecnológica; y donde todos los alumnos han tomado su papel: ayudantes, reporteros, redactores…

En realidad, el tema tratado en cada uno de los artículos que aparecen en este periódico, proviene de un trabajo previo de documentación e investigación desarrollado por los alumnos: nanotecnología, software libre, fotografía matemática…, siendo el tema central “Madame Curie”; su aportación a la Ciencia, su vida y su aspecto más humano. En alguno de estos artículos se hace referencia a un Blog que se ha desarrollado como elemento de divulgación del proyecto realizado por el grupo de trabajo, a fin de simultanear las Nuevas Tecnologías con las más tradicionales.

Además, podemos ver en la última página, entrevistas a las profesoras más veteranas del colegio y que han dedicado todo su tiempo a la enseñanza de la Ciencia, y que nos aportan sus reflexiones particulares.

Teniendo el periódico en nuestras manos, fácilmente podremos leer entre líneas la creatividad y la ilusión despertadas por el proyecto; y la satisfacción por el resultado obtenido. Se percibe el interés científico suscitado, tanto de los alumnos implicados directamente en la elaboración del periódico, como de los demás alumnos que han recibido un ejemplar, y que están pensando ya en la publicación del Nº 2 de “Todo Ciencia”, que contendrá sin duda un artículo relacionado con su proyecto de investigación. Porque, como podemos leer en el editorial: *“[...] nos lanzamos a la aventura de divulgar unas pinceladas de Ciencia y Tecnología, esperando que te resulte interesante la lectura de estos artículos, y te sirva como origen a tus propias investigaciones.”*

Con toda seguridad, estos momentos de entusiasmo vividos, dejarán una huella, una nueva experiencia, un despertar…

Reseña de libros

LUIS DE LEDESMA: *Lógica para la Computación*
ISBN: 978-84-7897-938-7. Editorial RA-MA. 181 páginas.

No hay publicados en España muchos libros que hagan una completa y detallada presentación de la Lógica, tratando en profundidad su uso en Informática, y que lo hagan además de una forma asequible para principiantes y en una extensión razonable. El excelente libro que se reseña, y que acaba de aparecer publicado, aúna estas características.

En su primer capítulo expone, desde las primeras nociones de la Lógica clásica de primer orden, hasta los profundos e históricos resultados sobre completud, decidibilidad y consistencia. El segundo capítulo trata el sistema formal de resolución y es el puente a la computación, que aparece en el tercer y último capítulo, en su vertiente de Programación Lógica y Prolog. Este tercer capítulo muestra sólo un aspecto de la computación, al objeto de ajustarse al nivel y extensión del libro, pero este aspecto está tratado, como el resto de la obra, con claridad y rigor. Finalmente, la representación del conocimiento y el Principio de Inducción, muy útiles en este contexto, se exponen en sendos apéndices.

El autor tiene una larga trayectoria docente impartiendo asignaturas y cursos sobre Lógica, que ha simultaneado con una fructífera actividad investigadora en el área. En este libro se centra en el proyecto que se anuncia en el primer capítulo, que se sigue clara y ordenadamente hasta el final, sin dispersarse en ramificaciones y temas laterales que puedan distraer al lector.

Quizás podría haberse aumentado el número de ejercicios, pero, en cualquier caso, se proporciona una excelente y abundante bibliografía. Esto es coherente con la orientación dada al texto, que trata de no ser demasiado extenso y, además, de poder servir de introducción autocontenida al tema o de punto de partida para un estudio más profundo y detallado.

El libro tiene un aire a la vez nuevo y tradicional que lo hace muy recomendable para aquellos a los que está destinado.

Eugenio Roanes Lozano

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en formato electrónico*, del modo especificado a continuación.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de originales

Se enviará por correo electrónico a la cuenta puigadam@mat.ucm.es ,o bien en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

De otro modo, también pueden enviarse dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,

76, 77, 78, 79, 80, 81, 82 y 83.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.