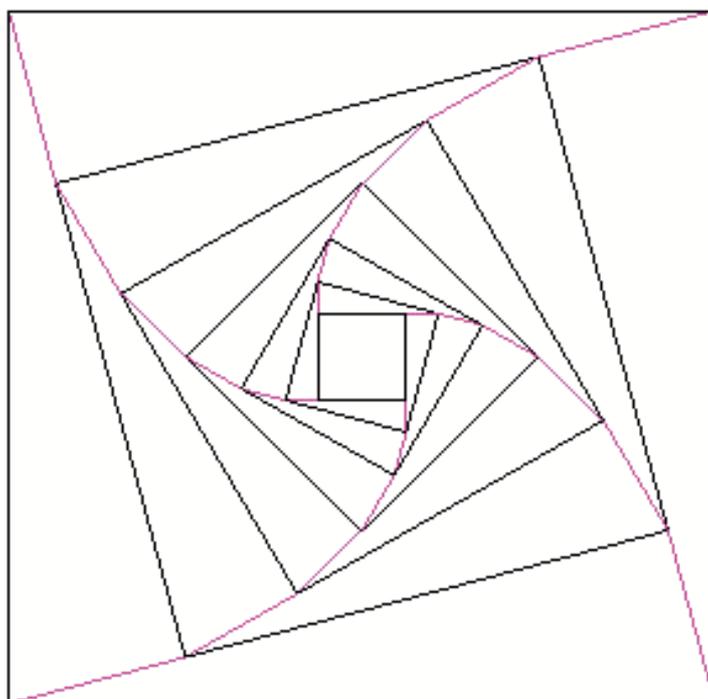


# **SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 82  
JUNIO DE 2009**

**Número especial dedicado al Profesor Eugenio Roanes Macías**

## ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2009 .....	4
XLV Olimpiada Matemática Española, por <i>Joaquin Hernández Gómez</i> .....	6
XIII Concurso de Primavera de Matemáticas, por <i>Esteban Serrano Marugán</i> .....	9
XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, por <i>María Gaspar</i> .....	11
Número especial dedicado al Profesor Eugenio Roanes Macías .....	14
¿Qué significa comprender un problema?, por <i>Fernando Etayo Gordejuela</i> .....	15
Inundaciones en la isla estrecha: una imagen del conjunto de Cantor, por <i>Baldomero Rubio Segovia</i> .....	26
Sobre la vecindad geométrica, por <i>Manuel Abellanas</i> .....	38
Sobre el descubrimiento automático de diversas generalizaciones del Teorema de Steiner-Lehmus, por <i>Rafael Losada, Tomás Recio y José Luis Valcarce</i> .....	53
Importancia de la Aritmética Comercial a lo largo de la Historia, por <i>Concepción Romo Santos</i> .....	77
Instrucciones para el envío de originales .....	93
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín .....	95
Boletín de inscripción .....	96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE  
ENTRE LOS SOCIOS DE LA  
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en  
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**

La confección de este número ha estado a cargo de Antonio Hernando y Eugenio Roanes Lozano

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).

Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

**SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS**  
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005  
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid  
Teléf.: 91 394 6248

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: [puigadam@mat.ucm.es](mailto:puigadam@mat.ucm.es)

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:  
<http://www.sociedadpuigadam.es>

## **JUNTA DIRECTIVA**

**Presidente:**

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

**Vicepresidentes:**

EUGENIO ROANES MACÍAS

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

**Vocales:**

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

ENRIQUE RUBIALES CAMINO

(Relaciones Institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

(Actividades y concursos)

**Secretario:**

JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

**Vicesecretaria:**

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

**Tesorero:**

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

**Bibliotecario:**

ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

**Mantenedoras página web:**

BEATRIZ BARRERO DÍAZ

CAROLINA BRAVO SANZ

# Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2009 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 18 de abril de 2009, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil nueve.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

## ORDEN DEL DÍA

### **1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior**

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea de 29 de marzo de 2008, que queda aprobada por unanimidad.

### **2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad**

Se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 79, 80 y 81 del boletín.

El Presidente informa sobre los concursos *Puig Adam*, *Intercentros*, y de la *fase regional de la Olimpiada Matemática*:

Concurso Puig Adam. El XXVI Concurso “Puig Adam” de Resolución de Problemas se celebró el 7 de junio de 2008, con buena participación, unos 100 estudiantes. Los resultados se publicaron en el boletín 80. Este año el XXVII Concurso “Puig Adam” se celebrará el 13 de junio,

Concurso Intercentros. Al igual que otros años, se celebró el penúltimo sábado de noviembre en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Con una participación de 37 centros y 222 estudiantes de nuestra Comunidad. En el boletín nº 81 aparece una reseña de los resultados del VIII Concurso “Intercentros”.

Olimpiada Matemática Española. También informa que en el boletín nº 81 aparecen los problemas de la Fase Local de la XLV Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid.

También se informa que el próximo sábado 25 de abril se celebrará el XIII Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid y que está teniendo un gran éxito como en años anteriores. Este año participarán más de 3500 alumnos en la 2ª fase del Concurso que se celebra en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Hay que destacar que algunos miembros del equipo organizador del Concurso son miembros de la Sociedad.

### **3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos**

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Se someten a aprobación las cuentas desde el 29 de marzo de 2008 hasta el 25 de abril de 2009. Pasando a la votación quedan aprobadas por unanimidad.

A la vista de las cuentas aprobadas, y de la situación de tesorería de la Sociedad, se propone el mantenimiento de la cuota, regularizando su cobro en el mes de octubre para ajustarlo al curso académico.

### **4. Elección de nuevos cargos directivos**

El Presidente manifiesta que no procede el cese y posterior elección de ninguno de los cargos de la Junta Directiva de la Sociedad, al no haber ninguno que haya extinguido su mandato.

### **5. Asuntos de trámite**

No hubo.

### **6. Ruegos y preguntas**

La Federación nos envía 10 ejemplares de cada número de la Revista Suma. Su finalidad es que no se quede ninguno de nuestros socios sin recibirla. Si alguien no la recibe, debe comunicárnoslo.

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce horas y cincuenta y siete minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente

El Secretario

# XLV Olimpiada Matemática Española

## Sant Feliu de Guíxols (Girona)

Organizada por la Cátedra Lluís Santaló, la fase nacional de la XLV Olimpiada Matemática se ha celebrado este curso en Sant Feliu de Guíxols, Girona. Allí se reunieron, junto con sus profesores acompañantes, los 117 estudiantes ganadores de las correspondientes fases locales, a lo largo de un intenso fin de semana que todos disfrutamos enormemente.

La representación madrileña estuvo compuesta por Moisés Herradón Cueto, Alfonso Gómez-Jordana Mañas, Jaime Roquero Jiménez, Ignacio Lescano Carroll, Francisco Criado Gallart, Alberto Merchante González, Pablo Boixeda Álvarez, Rubén Jiménez Benito e Ignacio Velasco Rodríguez. Ellos son los nueve ganadores de la fase local de la OME en la Comunidad de Madrid, que comenzó en el mes de noviembre, con la participación de casi trescientos estudiantes.

Los problemas de este año han sido los siguientes.

### Primera sesión, viernes 27 de marzo de 2009

#### Problema 1

Halla todas las sucesiones finitas de  $n$  números naturales consecutivos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  con  $n \geq 3$  tales que  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2009$

*Media de todos:* 3,53

*Media oros:* 6,5

#### Problema 2

Sean  $ABC$  un triángulo acutángulo,  $I$  el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo  $ABC$ ,  $r$  su radio, y  $R$  el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo  $ABC$ . Se traza la altura  $AD = h_a$ , con  $D$  perteneciente al lado  $BC$ . Demuestra que  $DI^2 = (2R - h_a)(h_a - 2r)$ .

*Media de todos:* 0,38

*Media oros:* 3,5

### Problema 3

Se pintan de rojo algunas de las aristas de un poliedro regular. Se dice que una tal coloración es *buena* si para cada vértice del poliedro, existe una arista que concurre en dicho vértice y no está pintada de rojo. Se dice que una tal coloración es *completamente buena* si, además de ser buena, ninguna cara del poliedro tiene todas sus aristas pintadas de rojo. ¿Para qué poliedros regulares es igual el número máximo de aristas que se pueden pintar en una coloración buena y en una coloración completamente buena?

*Media de todos:* 0,98

*Media oros:* 3

### Segunda sesión, sábado 28 de marzo de 2009

### Problema 4

Determina razonadamente todos los pares de números enteros  $(x,y)$  que verifican la ecuación  $x^2 - y^4 = 2009$ .

*Media de todos:* 3,93

*Media oros:* 7

### Problema 5

Sean  $a, b, c$  números reales positivos tales que  $abc = 1$ . Prueba la siguiente

desigualdad: 
$$\left(\frac{a}{1+ab}\right)^2 + \left(\frac{b}{1+bc}\right)^2 + \left(\frac{c}{1+ca}\right)^2 \geq \frac{3}{4}.$$

*Media de todos:* 0,30

*Media oros:* 2,67

### Problema 6

En el interior de una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$ , se toman dos puntos  $A$  y  $B$  simétricos respecto de  $O$ . Se considera un punto variable  $P$  sobre esta circunferencia y se traza la cuerda  $PP'$ , perpendicular a  $AB$ . Sea  $C$  el punto simétrico de  $B$  respecto de  $PP'$ . Halla el lugar geométrico del punto  $Q$ , intersección de  $PP'$  con  $AC$ , al variar  $P$  sobre la circunferencia.

*Media de todos:* 0,86

*Media oros:* 6,17

En el solemne acto de entrega de premios, presidido por el Consejero de Educación de la Generalitat, recibieron medalla de oro los estudiantes que a continuación se relacionan:

Moisés Herradón Cueto (1º de Bachillerato, Madrid)  
Iván Geffner Fuenmayor (2º de Bachillerato, Cataluña)  
Jaime Roquero Jiménez (2º de Bachillerato, Madrid)  
Glenier Lázaro Bello Burguet (2º de Bachillerato, La Rioja)  
Ander Lamaison Vidarte (1º de Bachillerato, Navarra)  
Alberto Merchante González (1º de Bachillerato, Madrid)

Como es habitual, se entregaron además doce medallas de plata, y dieciocho medallas de bronce.

Los resultados de los chicos madrileños han sido excelentes. A las tres medallas de oro obtenidas por Moisés, Jaime y Alberto, hay que sumar otras tres de plata (Pablo Boixeda, alumno de 4º de ESO del Colegio Alemán; Ignacio Lescano, que estudia 1º de Bachillerato en el Liceo Francés, y Rubén Jiménez, de 2º de Bachillerato del IES José Hierro de Getafe), y tres de bronce, que fueron para Alfonso Gómez-Jordana (2º de Bachillerato, Colegio Everest de Pozuelo), Ignacio Velasco (2º de Bachillerato, Colegio Vedruna) y Francisco Criado (1º de Bachillerato, Colegio Amor de Dios). En resumen: los nueve estudiantes madrileños tuvieron premio, y si representaban el 8% de la totalidad de participantes, este porcentaje alcanza el 20% entre los premiados, pasando de un 17% entre los bronces a un 25% en las platas y un 50% en los oros. Sin duda en estos resultados tiene mucho que ver además de su propio esfuerzo, el trabajo e ilusión del grupo de antiguos olímpicos madrileños (Elisa Lorenzo, Hugo Fernández, Teresa Rodrigo, David Alfaya, Gabriel Fürstenheim...) que generosamente se reúnen con ellos – ¡y con la “cantera”! - en las mañanas de los sábados para hacer problemas.

Vaya para todos ellos nuestra felicitación y nuestro agradecimiento.

**Joaquín Hernández Gómez**

## XIII Concurso de Primavera de Matemáticas

---

El sábado 25 de abril se celebró el XIII Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid en la Facultad de Matemáticas de la UCM

En Madrid, cuando termina el invierno y comienza la primavera, hay muchos chicos y chicas que saben que se acerca el CONCURSO DE PRIMAVERA. Intentar resolver 25 “problemas con chicha”, como dice Joaquín, es un reto al que año tras año se enfrenta un buen número de estudiantes entusiastas, que no se rinden ante cuestiones como esta:

*Trabajando juntas, Ana y Cati pintan un mural en 10 horas; Ana y Gloria lo harían en 12 horas y Cati y Gloria en 15 horas. Si se pusieran las tres juntas a pintar, ¿en cuántas horas acabarían el mural?*

Leen el problema una y dos veces; anotan algunos números; tal vez hagan algún dibujo; puede que busquen fracciones; o imaginan qué pasaría si cada pareja pintase durante 60 horas... Lo que no hacen es tirar la toalla. Jamás aparcan un problema sin intentar resolverlo.

Esta convocatoria hemos vuelto a batir la marca de participación: 422 centros educativos inscritos y más de 2.900 participantes en la segunda fase del sábado 25 de abril. Se dice pronto, pero reunir a casi 3.000 estudiantes (desde 5º de primaria hasta 2º de bachillerato), la mañana de un sábado para resolver problemas de matemáticas, no deja de ser algo asombroso.

Tan extraordinario que merece unas cuantas reflexiones.

En primer lugar debemos agradecer a todos esos profesores que han sabido motivar a sus estudiantes, que les han acompañado y que les han animado a participar. Sin la implicación de ellos, de los docentes, un concurso de este tipo estaría condenado al fracaso más absoluto.

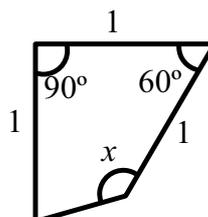
En segundo lugar queremos hacer una observación sobre los contenidos que se imparten en la enseñanza obligatoria, primaria y secundaria. Algunos profesores de matemáticas creemos que se ha exagerado en exceso el valor instrumental de las matemáticas y esto ha llevado a cargar los programas de matemáticas con demasiados cálculos, operaciones engorrosas, cuentas, fórmulas y aspectos puramente mecánicos. Aunque somos conscientes de este valor instrumental de las

matemáticas para abordar el resto de las ciencias, sí queremos reivindicar otros aspectos casi olvidados o marginados de las matemáticas, que para nosotros son su verdadera esencia.

Con este Concurso de Primavera de Matemáticas también pretendemos rescatar esas matemáticas que tanto nos gustan y que estamos convencidos de que también son las que enganchan a nuestros estudiantes: nos estamos refiriendo a la geometría; a los razonamientos lógicos; a las demostraciones; a las cuestiones de paridad; a las propiedades de los números; a la probabilidad; a problemas abiertos... Muchísimos de los problemas que conforman este concurso abordan estos campos, actualmente casi desaparecidos de los libros de texto. Creemos firmemente que debe haber un cambio profundo en los programas actuales de matemáticas.

Queremos, en definitiva, que nuestros estudiantes no maldigan a su profesora de matemáticas si les pone este problema:

*Tres de los cuatro lados de este cuadrilátero miden 1 cm.  
¿Cuánto mide el ángulo  $x$ ?*



En tercer lugar recordamos que si algún docente de fuera de la Comunidad de Madrid está interesado en organizar un evento de este tipo, por favor que no dude en ponerse en contacto con nosotros. Nos encantaría extender este concurso por todo el ámbito nacional

Toda la información está a vuestra disposición en nuestra página web, en la que encontraréis las pruebas de este año y años anteriores:

[www.mat.ucm.es/~conprim/](http://www.mat.ucm.es/~conprim/)

**Esteban Serrano Marugán**  
Miembro del Comité Organizador del  
Concurso de Primavera de Matemáticas

# XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

Entre los días 20 y 28 de septiembre de 2008, se celebró en San Salvador de Bahía (Brasil) la XXIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Asistieron 81 estudiantes procedentes de 21 países del ámbito iberoamericano.

El Jefe de la Delegación española fue el Profesor Juan Manuel Conde Calero (Universidad de Alicante), y actuó como profesor tutor el antiguo olímpico Daniel Rodrigo López, acompañando a los estudiantes David Alfaya Sánchez (Madrid), Gabriel Fürstenheim Milerud (Madrid), Moisés Herradón Cueto (Madrid) y Arnáu Messegué Buisán (Balaguer, Lleida).

Los problemas propuestos fueron los siguientes:

## Primer día, martes 23 de septiembre de 2008.

### Problema 1

Se distribuyen los números  $1, 2, 3, \dots, 2008^2$  en un tablero de  $2008 \times 2008$ , de modo que en cada casilla haya un número distinto. Para cada fila y cada columna del tablero, se calcula la diferencia entre el mayor y el menor de sus elementos. Sea  $S$  la suma de los 4016 números obtenidos. Determine el mayor valor posible de  $S$ .

*Media de todos: 5,99*

*Media del equipo español: 7*

### Problema 2

Sean  $ABC$  un triángulo escaleno, y  $r$  la bisectriz externa del ángulo  $\hat{A}BC$ . Se consideran  $P$  y  $Q$ , los pies de las perpendiculares a la recta  $r$  que pasan por  $A$  y  $C$  respectivamente. Las rectas  $CP$  y  $AB$  se intersecan en  $M$  y las rectas  $AQ$  y  $BC$  se intersecan en  $N$ . Demuestre que las rectas  $AC$ ,  $MN$  y  $r$  tienen un punto en común.

*Media de todos: 3,64*

*Media del equipo español: 4,25*

### Problema 3

Sean  $m$  y  $n$  enteros tales que el polinomio  $P(x) = x^3 + mx + n$  tiene la siguiente propiedad: si  $x$  e  $y$  son enteros y 107 divide a  $P(x) - P(y)$ , entonces 107 divide a  $x - y$ . Demuestre que 107 divide a  $m$ .

*Media de todos:* 2

*Media del equipo español:* 4,25

**Segundo día, miércoles 24 de septiembre de 2008.**

### Problema 4

Demuestre que no existen enteros positivos  $x$  e  $y$  tales que:

$$x^{2008} + 2008! = 21^y$$

*Media de todos:* 5,33

*Media del equipo español:* 7

### Problema 5

Sea  $ABC$  un triángulo, y  $X, Y, Z$  puntos sobre los lados  $BC, AC$  y  $AB$  respectivamente. Sean  $A', B', C'$  los circuncentros correspondientes a los triángulos  $AZY, BXZ, CYX$  respectivamente. Demuestre que  $(A'B'C') \geq \frac{(ABC)}{4}$ , y que la igualdad se cumple si y sólo si las rectas  $AA', BB', CC'$  tienen un punto en común. Observación: para un triángulo cualquiera  $RST$ , denotamos su área por  $(RST)$ .

*Media de todos:* 2,57

*Media del equipo español:* 4

### Problema 6

En un partido de *biribol* se enfrentan dos equipos de cuatro personas cada uno. Se organiza un torneo de biribol en el que participan  $n$  personas, que forman equipos para cada partido (los equipos no son fijos). Al final del torneo se observó que cada dos personas disputaron exactamente un partido en equipos rivales. ¿Para qué valores de  $n$  es posible organizar un torneo con tales características?

*Media de todos:* 1,20

*Media del equipo español:* 3,25

Nuestros estudiantes obtuvieron tres medallas de plata (Gabriel Fürstenheim, Arnáu Messegué y David Alfaya), y una de bronce (Moisés Herradón), excelente resultado que colocó a España en la extraoficial clasificación por equipos en cuarto lugar, detrás de Brasil, Perú y Cuba.

La XXIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se celebrará en Santiago de Querétaro (Méjico), el próximo mes de septiembre de 2009.

**María Gaspar**

## Número especial dedicado al Profesor Eugenio Roanes Macías

Como ya se anunció en el número anterior de nuestro Boletín, a petición de algunos socios y amigos, la Junta Directiva de la Sociedad aprobó dedicar este número del Boletín en homenaje al Profesor Eugenio Roanes Macías, Vicepresidente de nuestra Sociedad, con ocasión de su jubilación y en agradecimiento al trabajo que durante tanto tiempo realizó.

Por ello, en este y en el próximo número –las colaboraciones recibidas exceden la capacidad de un solo Boletín– se encontrarán los trabajos que hemos recibido, como muestra de amistad a Eugenio padre.

Las colaboraciones recibidas hasta la fecha y que no han cabido en este número del Boletín son las siguientes:

Acerca de los diámetros de Newton de una curva algebraica, por *Julio Fernández Biarge*.

Lo que debí hacer y no hice: un modelo matemático para el amor, por *Fco. Javier de Vega Fernández*.

Implementación del sistema de numeración maya en *Maple*: una experiencia interdisciplinar, por *Eugenio Roanes Lozano* y *Francisco A. González Redondo*.

Rey, Reyes y la introducción de la lógica matemática en España, por *Javier Peralta*

Recordando las Escuelas de Magisterio del último medio siglo, por *Alberto Aizpún López*.

Competencia matemática y videojuegos, por *Benjamín García Gigante*.

*Problemas de álgebra y teoría de números*, por *Juan-Bosco Romero Márquez*.

El Modulor de Le Corbusier: un instrumento de medida, por *M<sup>a</sup> Francisca Blanco Martín*.

**La Junta Directiva**

# ¿Qué significa comprender un problema?

**Fernando Etayo Gordejuela**

Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación  
Facultad de Ciencias, Universidad de Cantabria  
etayof@unican.es

## **Abstract**

*In this note, we give three different proofs of a theorem of classical geometry. Each one adds new information about the result. This is given as an example to understand which means understanding a problem.*

A Eugenio Roanes Macías, con todo afecto

## **1 Introducción**

La pregunta que encabeza está escrito es más difícil de responder que muchos problemas. A menudo, al enfrentarnos con un problema y resolverlo creemos que lo hemos comprendido del todo. Los años de docencia me van convenciendo cada vez más de lo contrario: un problema es una puerta abierta a un paisaje infinito. De hecho, no todas las resoluciones correctas de un problema aportan la misma información.

Como me resulta difícil expresar estas ideas voy a acogerme al socorrido recurso de dar un ejemplo de lo que quiero mostrar. Para ello he buscado en un ámbito muy querido por Eugenio: la geometría. Tomemos un teorema de geometría clásica, demostrémoslo de diversos modos y analicemos cuidadosamente lo que aporta cada demostración. Todas las demostraciones serán correctas, pero no todas aportarán la misma información.

## 2 El teorema y sus demostraciones

El enunciado es el siguiente:

**Teorema 1.** *Se consideran una elipse y todas las cuerdas de la misma paralelas a una cierta dirección. Entonces los puntos medios de dichas cuerdas están alineados.*

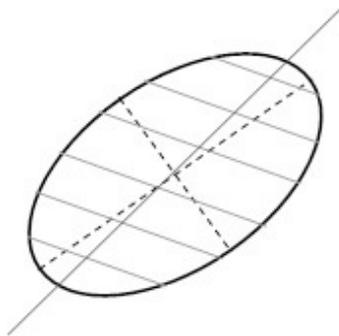


Figura 1: *Teorema 1*

*Demostración.* Vamos a proponer tres demostraciones diferentes: empleando herramientas euclídeas, afines y proyectivas.

### 2.1 Utilizando sólo herramientas euclídeas.

Consideremos un sistema de referencia tal que la ecuación de la elipse sea:

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\} = \{ b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \}$$

El resultado que nos piden es trivial si las cuerdas son paralelas a alguno de los ejes (porque entonces el otro eje es la recta buscada).

En cualquier caso, también es obvio por ser el origen de coordenadas centro de simetría de la elipse, que el centro de coordenadas es el punto medio de la cuerda que pasa por él, sea cual sea la pendiente de la familia de cuerdas.

Podemos parametrizar la familia de cuerdas como  $\{y = \lambda x + c\}$ , donde la  $c$  es variable. Por la observación precedente, si el resultado es cierto, los puntos medios deberán estar en una recta del tipo  $\{y = \mu x\}$ .

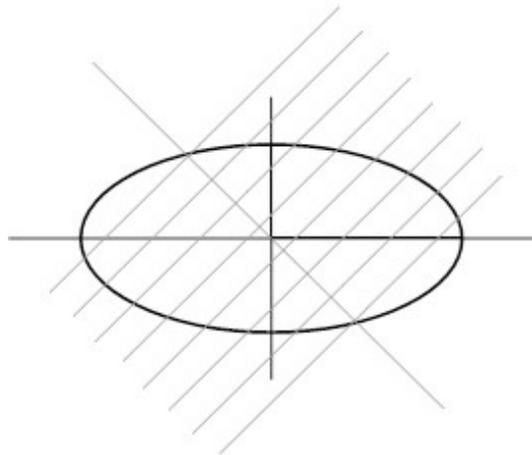


Figura 2: *Herramientas euclídeas*

Intersequemos una cuerda de la familia con la elipse:

$$\begin{aligned} b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 &\Rightarrow b^2x^2 + a^2(\lambda x + c)^2 = a^2b^2 \\ &\Rightarrow (\lambda^2a^2 + b^2)x^2 + 2a^2\lambda cx + a^2(c^2 - b^2) = 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, que son de la forma

$$x = \frac{-2a^2\lambda c \pm \sqrt{\Delta}}{2(\lambda^2a^2 + b^2)}$$

donde  $\Delta$  es el discriminante de la ecuación, que, como veremos, no necesitamos calcular explícitamente. Lo que necesitamos es hallar el punto medio de los dos puntos de intersección de la cuerda con la elipse, esto es, el punto

$$m = \left( \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \right)$$

donde  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ , son los puntos de intersección. Pues bien,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(x_1 + x_2) &= \frac{1}{2} \left( \frac{-2a^2\lambda c + \sqrt{\Delta}}{2(\lambda^2a^2 + b^2)} + \frac{-2a^2\lambda c - \sqrt{\Delta}}{2(\lambda^2a^2 + b^2)} \right) = \frac{-2a^2\lambda c}{2(\lambda^2a^2 + b^2)} = \\ &= \frac{-a^2\lambda c}{\lambda^2a^2 + b^2} \end{aligned}$$

Para hallar la otra coordenada de  $m$  basta tener en cuenta que el punto pertenece a la cuerda  $\{y = \lambda x + c\}$ . Por lo tanto,

$$m = \left( \frac{-a^2\lambda c}{\lambda^2 a^2 + b^2}, \lambda \frac{-a^2\lambda c}{\lambda^2 a^2 + b^2} + c \right) = \left( \frac{-a^2\lambda c}{\lambda^2 a^2 + b^2}, \frac{-a^2\lambda^2 c + a^2\lambda^2 c + cb^2}{\lambda^2 a^2 + b^2} \right) = \left( \frac{-a^2\lambda c}{\lambda^2 a^2 + b^2}, \frac{cb^2}{\lambda^2 a^2 + b^2} \right)$$

En esta expresión  $a, b, \lambda$  son valores fijos (determinados por la elipse y la pendiente de las cuerdas) y  $c$  variable (la que determina cada cuerda). Si dividimos las dos coordenadas de  $m$  obtenemos:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{cb^2}{-a^2\lambda c} = \frac{b^2}{-a^2\lambda}$$

Por lo tanto, los puntos medios de las cuerdas están todos en la recta

$$\left\{ y = -\frac{b^2}{a^2\lambda} x \right\}$$

y, por consiguiente, están alineados.

### Comentarios:

(a) La recta que hemos obtenido es de la forma deseada (pasa por el centro de la elipse).

(b) Hemos comprobado que el resultado es cierto. Y conocemos las ecuaciones del lugar geométrico pedido.

## 2.2 Utilizando herramientas afines

Comenzamos reduciendo el problema a uno mucho más sencillo: si la elipse es una circunferencia, el resultado es cierto de modo evidente. Los puntos medios de cuerdas paralelas están situados sobre el diámetro perpendicular a dichas cuerdas.

Dada una elipse cualquiera siempre podemos construir un cilindro circular sobre ella (esto es, obtener la elipse como intersección del cilindro con un cierto plano  $\Pi$ ). La sección obtenida al cortarlo con un plano  $\Pi'$  perpendicular a sus generatrices es una circunferencia.

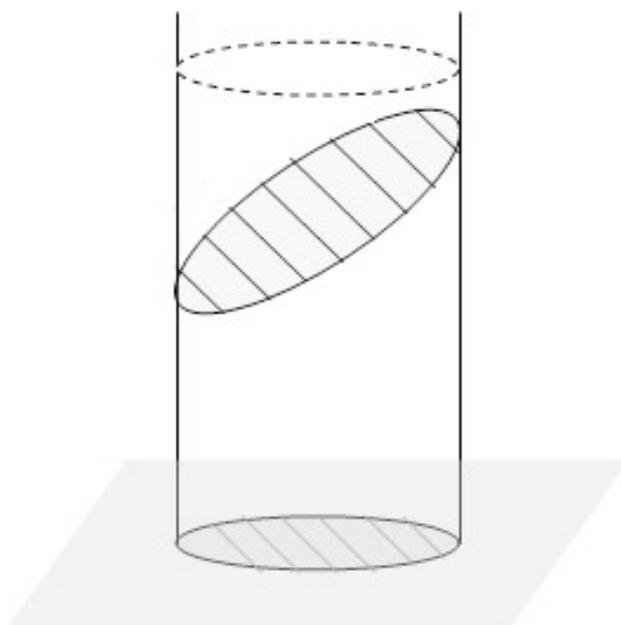


Figura 3: *Herramientas afines*

Consideremos la proyección paralela de dirección las generatrices del cilindro y base  $\Pi'$ . Cuando la restringimos al plano  $\Pi$  aplica éste sobre el plano  $\Pi'$  y lleva la elipse sobre la circunferencia, las cuerdas de la elipse sobre cuerdas de la circunferencia, los puntos medios de las cuerdas de la elipse sobre puntos medios de las cuerdas de la circunferencia, porque al ser una aplicación afín preserva todas estas propiedades afines. Como para circunferencias el resultado es cierto, los puntos medios de las cuerdas de la circunferencia están alineados. Si consideramos ahora la proyección paralela de dirección las generatrices del cilindro y base  $\Pi$ , lleva las cuerdas de la circunferencia en las que teníamos al principio en la elipse, los puntos medios en puntos medios y preserva las alineaciones. Luego los puntos medios de las cuerdas de la elipse están alineados.

Comentario: Esta demostración reduce el caso general (elipse) a un caso particular sencillo (circunferencia) y utiliza el hecho de que los datos son afines y no sólo euclídeos. Es ya una bella demostración que realizamos sin emplear coordenadas.

### 2.3 Utilizando herramientas proyectivas.

Necesitamos el siguiente conocido resultado de Geometría Proyectiva [1]:

**Lema 1.** Sean  $\varphi$  una cónica,  $p$  un punto que no esté en la cónica, y  $\tilde{R}$  una recta que pase por  $p$  y corte a la cónica en dos puntos (distintos)  $a \neq b$ . Entonces

1. La intersección de  $\tilde{R}$  con la recta polar de  $p$ ,  $\tilde{H}_p$ , es un punto  $q$ .
2. Los puntos  $a$  y  $b$  separan armónicamente a los puntos  $p$  y  $q$ , esto es,  $[a, b, p, q] = -1$ .

De naturaleza parecida es el siguiente resultado que más tarde será mencionado.

**Lema 2.** Sean  $\varphi$  una cónica,  $p$  un punto que no esté en la cónica, y  $\tilde{R}$  una recta que pase por  $p$  y corte a la cónica en un único punto  $r$ . Entonces  $r \in \tilde{H}_p$ .

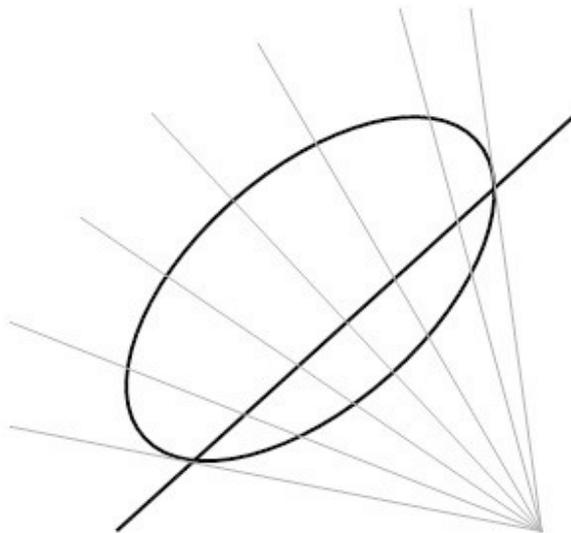


Figura 4: Herramientas proyectivas

Probemos entonces el resultado. Sea  $q$  el punto del infinito de las cuerdas. Tomemos una cualquiera de ellas,  $R$ , y sean  $a, b$  los puntos en los que interseca

a la elipse. Entonces, por el lema 1, se tiene que el punto  $n = R \cap \tilde{H}_q$  verifica:

$$-1 = [n, q, a, b] = (n, a, b) \quad \Rightarrow \quad \vec{na} = -\vec{nb}$$

donde  $(n, a, b)$  denota la razón simple de dichos puntos, con lo que  $n$  es el punto medio entre  $a$  y  $b$ .

Así que los puntos medios de las cuerdas están todos en la recta polar de  $q$  (con lo que en particular están alineados).

Comentarios:

- (a) Esta demostración es muy sencilla, asumiendo el lema 1 previo.
- (b) No utiliza coordenadas.
- (c) Hace ver que el resultado es en su esencia proyectivo, por lo que será válido también para las demás cónicas proyectivamente equivalentes.
- (d) Da la razón por la que los puntos están alineados: están en la polar del punto del infinito de las cuerdas.
- (e) Además proporciona más información: la cuerda que pasa por el centro de la elipse es el diámetro conjugado de la recta solución (cada diámetro pasa por el polo del otro).

### 3 Verificación proyectiva de la solución euclídea.

Veamos que las dos diámetros aludidos en el último comentario son conjugados. Sus ecuaciones eran:

$$R = \{y = \lambda x\} \quad ; \quad S = \left\{y = -\frac{b^2}{a^2\lambda} x\right\}$$

cuyos puntos del infinito son, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad ; \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b^2}{a^2\lambda} \end{bmatrix}$$

y la matriz de la extensión proyectiva de la elipse es:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix}.$$

Veamos que el polo de  $\tilde{R}$  está en  $\tilde{S}$ . El polo de  $\tilde{R}$  es el punto

$$r = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

que satisface  $\tilde{R} = \tilde{H}_r$ , esto es,

$$\{x_2 - \lambda x_1 = 0\} = \left\{ (r_0, r_1, r_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

con lo que

$$\{x_2 - \lambda x_1 = 0\} = \left\{ -r_0 x_0 + \frac{r_1}{a^2} x_1 + \frac{r_2}{b^2} x_2 = 0 \right\}$$

que nos da el punto

$$r = \begin{bmatrix} r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda a^2 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{b^2}{a^2 \lambda} \end{bmatrix}$$

que es el punto del infinito de  $S$ . Luego son conjugados los dos diámetros.

## 4 Conocer profundamente el resultado permite conjeturar otros.

En efecto, habiendo entendido el teorema en su expresión proyectiva, podemos enunciar y demostrar otras propiedades que son básicamente iguales a la que hemos probado. Por ejemplo el siguiente enunciado:

**Teorema 2.** *Se consideran una parábola y todas las cuerdas de la misma paralelas a una cierta dirección. Entonces los puntos medios de dichas*

*cuerdas están alineados y la recta que los contiene es paralela al eje de la parábola.*

### Comentarios previos

Parece razonable conjeturar que este resultado es cierto, porque la demostración del referente a la elipse es proyectiva, por lo cual también valdrá para las otras cónicas proyectivamente equivalentes. En la demostración del resultado para la elipse vimos que la recta solución es un diámetro de la elipse, esto es, que pasa por el centro de la elipse, que es el polo del infinito. Parece plausible que la misma condición se tenga en cualquier cónica. En el caso de la parábola el polo del infinito es el punto de tangencia de la extensión proyectiva de la parábola con la recta del infinito. El eje pasa por dicho punto, así que toda recta que también pase por él será paralela al eje. Esa es la condición que hemos puesto.

### *Demostración.*

Primera parte. Es exactamente la misma que para el caso de las elipses.

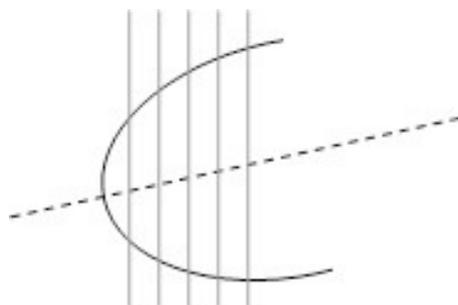


Figura 5: *Teorema 2*

Sea  $q$  el punto del infinito de las cuerdas. Tomemos una cualquiera de ellas,  $R$ , y sean  $a, b$  los puntos en los que interseca a la parábola. Entonces, por el Lema 1, se tiene que el punto  $n = R \cap \tilde{H}_q$  verifica:

$$-1 = [n, q, a, b] = (n, a, b) \quad \Rightarrow \quad \vec{na} = -\vec{nb}$$

con lo que  $n$  es el punto medio entre  $a$  y  $b$ .

Así que los puntos medios de las cuerdas están todos en la recta polar de  $q$  (con lo que en particular están alineados).

Segunda parte. Veamos que la recta  $\tilde{H}_q$  pasa por el punto  $p$  de tangencia de la parábola con la recta del infinito. Esto es trivial, porque  $q$  está en la recta del infinito, con lo que la recta del infinito es una de las dos tangentes a la extensión proyectiva de la parábola que pasan por  $q$ , y, por el Lema 2,  $p \in \tilde{H}_q$ .

Comentario:

Para las hipérbolas el resultado es totalmente similar al de las elipses, así que hemos obtenido el siguiente resultado más general que el inicial y que podemos expresar en los siguientes términos:

**Teorema 3.** *Se consideran una cónica no degenerada y todas las cuerdas de la misma paralelas a una cierta dirección. Entonces los puntos medios de dichas cuerdas están alineados en una recta que pasa por el polo de la recta del infinito. Por tanto, si la cónica es una parábola, la recta que los contiene es paralela a su eje, y si la cónica es una elipse o una hipérbola, la recta que los contiene pasa por su centro.*

## 5 ¿Qué significa comprender un problema?

En el ejemplo propuesto tenemos tres demostraciones, euclídea, afín y proyectiva. La geometría euclídea está incluida en la afín y ésta en la proyectiva, lo cual significa, en particular, que todo movimiento euclídeo es un isomorfismo afín, y que todo isomorfismo afín es proyectivo (homografía). Por lo tanto, la propiedad del teorema es, respectivamente, cierta para toda cónica

- euclídeamente equivalente a la inicial, es decir, para toda elipse con iguales semiejes que la de partida; de hecho, como la inicial tiene semiejes arbitrarios, queda probado el resultado para toda elipse;
- afínmente equivalente a la inicial, esto es, para toda elipse, y por eso basta que el resultado sea cierto para las circunferencias, que es lo que hemos usado en la segunda demostración;

- y para toda cónica proyectivamente equivalente a la inicial (es decir, para cualquier elipse, parábola o hipérbola).

Situar el resultado en su contexto de validez es esencial para *entenderlo*.

Volviendo al comienzo del artículo, a la pregunta de qué significa comprender un problema, me atrevería a decir que en Matemáticas nunca terminamos de comprender las cosas. La experiencia más directa que tenemos muchos de nosotros, es la diferencia entre nuestro nivel de comprensión de un tema cuando somos alumnos a cuando somos profesores. Cuando tenemos que explicar algo, ¡qué diferencia en la comprensión de la materia! En una situación y en otra, cuántas veces habremos exclamado: ¡ahora lo veo! Ese *verlo* significa que se nos hace presente una realidad más profunda que la concatenación lógica de propiedades. Un problema “bien resuelto” muy frecuentemente suscita nuevas preguntas, como nos ha ocurrido en el texto. Como ya lo *vemos*, podemos preguntarnos por nuevas situaciones.

## Referencias y notas

Los resultados citados en el texto son clásicos, aunque las demostraciones no están tomadas de ningún texto en particular. Los lemas 1 y 2 sobre intersección de una recta y una cónica pueden encontrarse por ejemplo en

[1] L. A. Santaló: *Geometría Proyectiva*, Eudeba, 1966.

Respecto de la notación para la razón doble de puntos la definición tomada, en coordenadas, es la siguiente:

$$[a, b, x, c] = \frac{(a, x, c)}{(b, x, c)} = \frac{x - a}{c - a} : \frac{x - b}{c - b}$$

y  $(a, x, c)$  es la razón simple. Cuando  $b$  es el punto del infinito de la recta que contiene a los puntos  $a, x, c$  resulta que  $[a, b, x, c] = (a, x, c)$ , propiedad que es utilizada en el texto.

Por último, el autor desea hacer pública su gratitud a Gema Quintana, alumna del Máster de Matemáticas y Computación de la Universidad de Cantabria, que le ha ayudado en la realización e inclusion de las ilustraciones.

# Inundaciones en la isla estrecha: una imagen del conjunto de Cantor

**Baldomero Rubio Segovia**  
Universidad Complutense  
baldomero.rubio@mat.ucm.es

## **Abstract**

*A short story is used to describe the ternary Cantor's set.  
Here is the origin of fractal sets and geometric measure theory.  
Dimension and measure in the theory of Hausdorff are defined.*

Como homenaje a Eugenio Roanes Macías,  
en su jubilación.

## **I. Inundaciones en la isla estrecha**

En un lejano mar hubo una vez una isla tan estrecha que era conocida como la isla recta. Solamente sus dos extremos tocaban al mar y allí se habían instalado para siempre dos importantes personajes: Cero y Uno. Los demás no podían disfrutar de tal situación, pero se resignaban a su suerte y permanecían unos junto a otros en buena armonía sin moverse. Eran tantos que, aunque todos pensaban que debería haber alguien situado a su lado, sin embargo no sabían a ciencia cierta quién era, de tantos como había muy próximos. No se podía decir que tuvieran un régimen democrático, porque el señor Cant dirigía sus vidas de forma permanente. Cant era un personaje de prestigio por su gran habilidad para manejar colecciones enormes de cosas y saber distinguir muy bien unas de otras. Al parecer, no vivía en la isla. Tenía un padrón de todos los habitantes que asignaba nombre a cada uno sin que hubiera peligro de confusiones. Se trataba de un sistema muy ingenioso inventado por él que requería solamente tres signos que podían repetirse a conveniencia en cada nombre. Los nombres no eran otra cosa que listas más o menos largas confeccionadas con los tres signos, sin que fuera necesario utilizar los tres en todas ellas. Para la mayoría de los isleños su nombre era interminable.

Merece la pena citar los tres signos: uno era incoloro y redondo, otro era azul, y el tercero era rojo. En principio esto no tenía connotaciones políticas, pero los acontecimientos que vinieron después pusieron de manifiesto que no era indiferente que en un nombre predominara el rojo o el azul, sobre todo en el caso de ser interminable y carecer de signo azul. Además, estaba prohibido que un nombre interminable tuviera una parte final completamente roja.

Unos habitantes de la isla eran nobles, otros no. Era característico de la nobleza tener nombres no interminables, y daba igual que prevaleciera el rojo o el azul. El más noble tenía nombre más corto. Quizás por esta razón Cero y Uno se habían instalado de inicio en su posición de privilegio. Por cierto, habíamos olvidado decir el nombre de Cero y el de Uno. Son dos nombres con un único signo, sin repetirse. El signo rojo simple estaba suprimido por razones técnicas: quizás porque Cant lo reservaba para sí. El nombre de Uno era un único signo azul, y el de Cero no tenía más remedio que ser el signo incoloro y redondo, por cuya razón pasó a denominarse como el noble que lo encarnaba: cero. Salvo el de Uno, todos los nombres comenzaban por cero.

Una vez llegó una gran tormenta que inundó la parte central de la isla, y ésta quedó partida en dos. Se produjo un gran desasosiego, pero algunos pensaron en positivo: al menos había dos habitantes más para poder instalarse en alguna de las dos nuevas posiciones junto al lago central. Allí se colocaron los dos más nobles que seguían a Cero y a Uno.

Lo curioso es que el fenómeno de la inundación se repitió al mismo tiempo en las dos islas, tras lo cual había ya cuatro y dos nuevos lagos con los consiguientes cuatro nuevos puestos junto a ellos, donde se colocaron enseguida los nobles siguientes en nobleza a los ya instalados.

En sucesivas etapas las islas que iban surgiendo sufrían el mismo tipo de inundación. Cada etapa significaba duplicar el número de islas y de lagos, así como el de nuevos puestos de privilegio, reservados a los nobles. Los que ya estaban instalados observaron que las futuras inundaciones no les iban a afectar. No parecía que el azul o el rojo del nombre fuera relevante para tener más o menos opciones de alcanzar un sitio sin riesgos de inundación futuros, pero sí se constató que los nombres de los habitantes de las zonas que ya estaban inundadas tenían algún signo azul. Lo cual daba cierta tranquilidad a quienes sólo tenían color rojo.

Así sucedió hasta el final de los tiempos; sólo entonces los nobles que se

habían salvado por lograr una posición junto a un lago, comenzaron a pensar cuál habría sido el destino de otros nobles y el de quienes no lo eran. Al parecer no habían sido afectados por las inundaciones aquellos, nobles o no, cuyo nombre carecía de signo azul, aunque la mayor parte de ellos no había logrado abrigo junto a un lago.

El señor Cant acudió a estudiar la situación. Como tenía el padrón de todos los habitantes de la primitiva isla y además había hecho un duplicado del mismo sin utilizar el signo rojo, pudo comprobar efectivamente que los que carecían de signo azul en sus nombres eran tantos como los que figuraban en el primitivo padrón.

- Inexplicable -, clamaron al unísono los nobles que ocupaban situaciones junto a un lago, muchos de los cuales tenían nombre con algún signo azul.

¡Parecía que no hubo perjudicados por las inundaciones, e incluso había aumentado la población!

Sólo el señor Cant pudo saber exactamente lo que había pasado, pero nadie más llegó a entenderlo. ¿Habían encontrado protección todos los nobles junto a un lago? ¿Quiénes y cuántos fueron realmente los afectados por las inundaciones? El señor Cant hizo oídos sordos a estas preguntas y se limitó a recomendarles que estudiaran matemáticas.

## II. El conjunto ternario de Cantor

Sin duda el lector habrá observado que la narración anterior constituye una descripción del conjunto ternario de Cantor. Las alusiones, sugerencias y preguntas que se formulan tienen una interpretación matemática. A continuación se ofrecen en términos precisos la definición de este conjunto y la justificación de sus sorprendentes propiedades.

Del intervalo real  $[0, 1]$  se separa en una primera etapa el intervalo abierto  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ , de longitud  $3^{-1}$ , y lo que queda es la unión de dos intervalos cerrados de la misma longitud:  $[0, \frac{1}{3}]$  y  $[\frac{2}{3}, 1]$ . De forma análoga, en una segunda etapa se separan de cada uno de éstos el intervalo abierto centrado en él y de longitud  $3^{-2}$ . Así se continúa sin interrupción y lo que queda de  $[0, 1]$  una vez realizado este proceso infinito es un conjunto  $C$  que se denomina conjunto ternario de Cantor.

Puede observarse que, al terminar la etapa  $k$  del proceso anterior, lo que queda de  $[0, 1]$  es la unión  $F_k$  de  $2^k$  intervalos cerrados disjuntos que

constituyen la familia

$$\mathfrak{F}_k = \{F_{kj} : j = 1, 2, \dots, 2^k\}$$

de intervalos  $F_{kj}$  que se consideran ordenados de izquierda a derecha al aumentar  $j$ . La longitud, o diámetro  $|F_{kj}|$ , de cada  $F_{kj}$  es  $3^{-k}$ .  $\mathfrak{F}$  designa a la unión de todas las familias  $\mathfrak{F}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots$

Cada  $F_k$  es cerrado y la sucesión  $\{F_k\}$  es contractiva. El conjunto ternario  $C$  de Cantor es la intersección de todos los  $F_k$ , por lo cual es cerrado.  $F_k$  contiene a  $C$  para cada  $k$  y por ello, siendo  $m$  la medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}$ , se verifica

$$m(C) < m(F_k) = 2^k 3^{-k} = (2/3)^k.$$

Puesto que  $(2/3)^k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , resulta  $m(C) = 0$ .  $C$  no puede contener un intervalo porque  $C \subset F_k$  para cada  $k$  y los intervalos cerrados disjuntos cuya unión es  $F_k$  tienen longitud  $3^{-k}$ , que converge a 0 cuando  $k \rightarrow \infty$ .  $C$  no es numerable porque se observa que cada  $x$  del intervalo  $[0, 1]$  que no pertenece a  $C$  tiene algún 1 en su representación en el sistema de base tres, lo cual equivale a que  $C$  contiene al subconjunto  $C'$  de  $[0, 1]$  cuyos elementos se representan en el sistema de base tres solamente con las cifras 0 y 2; (las expresiones ternarias de período 2 se consideran excluidas). Hay una biyección natural de  $[0, 1]$  a  $C'$  en la que la imagen de  $x$  se obtiene expresando  $x$  en el sistema de base dos y sustituyendo cada 1 de la representación de  $x$  por un 2. Puesto que  $[0, 1]$  es no numerable, así sucede también para  $C'$ .

El complementario de  $C$  en  $[0, 1]$  es la unión de los intervalos abiertos disjuntos que se han ido separando de  $[0, 1]$  en las sucesivas etapas de la construcción de  $C$ . Se designa  $\mathfrak{G}$  la familia constituida por éstos. Conviene observar que para cada intervalo  $(a, b)$  de  $\mathfrak{G}$  sucede que  $a$  y  $b$  pertenecen a  $C$  y que existen infinitos elementos de  $\mathfrak{F}$  cuyo extremo mayor es  $a$ , y también infinitos elementos de  $\mathfrak{F}$  cuyo extremo menor es  $b$ . Obsérvese también que  $|G| \geq |F|$  cuando  $G$  y  $F$  tienen un extremo común y pertenecen respectivamente a  $\mathfrak{G}$  y a  $\mathfrak{F}$ . Asimismo, en esta situación respecto de  $G$  puede elegirse  $F$  con diámetro arbitrariamente pequeño.

Al conjunto de Cantor se asocia el número real  $s$  del intervalo  $(0, 1)$  que verifica  $3^s = 2$ , el cual tiene las propiedades que se expresan en el lema siguiente.

**Lema 1.** Sean  $C$  el conjunto ternario de Cantor y  $s$  el número real que verifica  $3^s = 2$ .

a) Para cada entero positivo  $k$  se verifica

$$\sum_{j=1}^{2^k} |F_{kj}|^s = 1.$$

b) Sea  $G$  un intervalo abierto de  $\mathfrak{G}$ , y sean  $K_1$  y  $K_2$  intervalos cerrados contenidos en  $[0, 1]$  y situados uno a la izquierda y otro a la derecha de  $G$  de manera que cada uno de ellos tiene un extremo común con  $G$  y verifican  $|K_1| \leq |G|$  y  $|K_2| \leq |G|$ . La unión de  $K_1$ ,  $K_2$  y  $G$  es entonces un intervalo cerrado  $K$  y

$$|K|^s \geq |K_1|^s + |K_2|^s.$$

c) Fijados  $m$  intervalos consecutivos de  $\mathfrak{F}_k$ , sea  $K$  el menor intervalo cerrado que los contiene. Entonces  $|K|^s \geq 2^{-k}m$ .

*Demostración:*

a)

$$\sum_{j=1}^{2^k} |F_{kj}|^s = 2^k (3^{-k})^s = 2^k (3^s)^{-k} = 2^k 2^{-k} = 1.$$

b) Puesto que

$$|G| \geq \frac{1}{2} [|K_1| + |K_2|],$$

resulta

$$|K|^s = [|K_1| + |K_2| + |G|]^s \geq \left[ \frac{3}{2} (|K_1| + |K_2|) \right]^s.$$

Si es  $|K_1| = |K_2|$ , entonces se obtiene de lo anterior

$$|K|^s \geq [3|K_1|]^s = 3^s |K_1|^s = 2|K_1|^s = |K_1|^s + |K_2|^s.$$

Cuando es  $|K_1| < |K_2|$  se utiliza la concavidad de la función  $\varphi(x) = x^s$  y, al evaluar  $\varphi$  en los puntos  $3|K_1|$ ,  $3|K_2|$  y el punto medio de éstos, resulta

$$\varphi \left[ \frac{3}{2} (|K_1| + |K_2|) \right] > \frac{1}{2} [\varphi(3|K_1|) + \varphi(3|K_2|)] = |K_1|^s + |K_2|^s,$$

es decir,

$$|K|^s > |K_1|^s + |K_2|^s.$$

c)  $K$  es algún  $F_{kj}$  en el caso  $m = 1$ , y resulta

$$|K|^s = (3^{-k})^s = (3^s)^{-k} = 2^{-k}.$$

$K$  es  $[0, 1]$  en el caso  $m = 2^k$ , y el resultado se obtiene de a). Sea  $m$  mayor que 1 y menor que  $2^k$  y sea  $K$  un intervalo de longitud mínima que contiene a  $m$  intervalos consecutivos de  $\mathfrak{F}_k$ . Se probará que la estimación de  $|K|^s$  se puede reducir a la estimación de  $|K_1|^s$  y de  $|K_2|^s$  siendo  $K_1$  y  $K_2$  dos intervalos disjuntos de longitud mínima que contienen respectivamente a  $m_1$  y  $m_2$  intervalos consecutivos de  $\mathfrak{F}_k$ , siendo  $m_1 + m_2 = m$ . Así, por reducciones sucesivas de esta naturaleza se llega a  $m$  intervalos cerrados de longitud mínima cada uno de los cuales contiene a un único intervalo de  $\mathfrak{F}_k$ . Es decir, éstos son precisamente  $m$  miembros de la familia  $\mathfrak{F}_k$ . Después sólo es preciso aplicar lo ya obtenido para el caso  $m = 1$ .

Sea  $K$  pues el intervalo considerado. Entre los intervalos de  $\mathfrak{G}$  contenidos en  $K$  hay uno,  $G$ , de longitud máxima. Sean  $K_1$  y  $K_2$  los intervalos cerrados que tienen un extremo común con  $G$ , y situados uno a la izquierda y otro a la derecha de  $G$ , de manera que la unión de  $K_1$ ,  $K_2$  y  $G$  es  $K$ . Debe verificarse que  $|K_1| \leq |G|$  y  $|K_2| \leq |G|$  porque, en otro caso,  $G$  no sería el intervalo de  $\mathfrak{G}$  de longitud máxima contenido en  $K$ . Además, de los  $m$  intervalos de  $\mathfrak{F}_k$  que  $K$  contiene, hay  $m_1$  contenidos en  $K_1$  y  $m_2$  contenidos en  $K_2$ . Se aplica ahora b) a los intervalos  $K_1$ ,  $K_2$  y  $G$ , y se obtiene

$$|K|^s \geq |K_1|^s + |K_2|^s.$$

Después se hace la misma construcción para  $K_1$  y  $K_2$ , y se continúa como ya se ha indicado.

### III. La teoría de Hausdorff

Como se ha hecho notar, la medida de Lebesgue del conjunto de Cantor es 0 y su cardinal es como el de un intervalo real. Constituye un buen ejemplo para aplicarle la teoría de Hausdorff.

En la teoría de Lebesgue la definición de medida exterior para un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  procede mediante los cubrimientos de  $A$  por colecciones numerables  $\{I_j\}$  de intervalos y partiendo de la noción elemental de volumen para éstos. En la teoría de Hausdorff las colecciones  $\{I_j\}$  se sustituyen

por colecciones  $\{U_j\}$  de conjuntos arbitrarios acotados  $U_j$  con diámetro  $|U_j|$  positivo y se asigna a cada  $U_j$  el número  $|U_j|^s$ , siendo  $s$  algún número real no negativo elegido convenientemente para el conjunto  $A$ , (en el conjunto de Cantor  $s$  verifica  $3^s = 2$ ). A la colección  $\{U_j\}$  se asocia la suma de la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} |U_j|^s.$$

En principio se trataría de considerar el ínfimo de estas sumas cuando  $\{U_j\}$  recorre las posibles colecciones numerables de tal naturaleza que cubren  $A$ . Sin embargo, este simple proceso no sería muy significativo si se admite que los conjuntos recubridores  $U_j$  pueden tener diámetros arbitrariamente grandes. El siguiente ejemplo pone de manifiesto la conveniencia de proceder considerando cubrimientos de  $A$  constituidos por conjuntos cuyos diámetros están acotados por algún número positivo  $\delta$ , y en etapas sucesivas hacer tender  $\delta$  a 0.

*Ejemplo:* Si se elige  $s = 0$  y  $A$  es un conjunto finito de cardinal  $r$ , entonces de cualquier colección  $\{U_j\}$  que cubre  $A$  pueden suprimirse los  $U_j$  disjuntos con  $A$  y la colección se reduce a una finita  $\{U_1, U_2, \dots, U_k\}$  con a lo más  $r$  elementos que también cubre  $A$ , y

$$\sum_{j=1}^k |U_j|^0 = k \leq r.$$

Si no se pone limitación alguna al diámetro positivo de cada  $U_j$ , entonces hay una colección  $\{U\}$  de un único elemento que cubre  $A$ , y la suma asociada a ella es 1. Pero si a la colección  $\{U_j\}$  que cubre  $A$  se ponen sucesivamente las limitaciones de ser  $|U_j| \leq \delta_n$ , siendo  $\{\delta_n\}$  una sucesión decreciente de números positivos con límite 0, entonces resulta que  $\{U_j\}$  se va reduciendo a colecciones finitas cuyo número de elementos puede ir aumentando. Si  $\delta$  es menor que la mínima distancia entre dos elementos de  $A$ , entonces  $\{U_j\}$  se reduce a una colección  $\{U_1, U_2, \dots, U_r\}$  que tiene el mismo cardinal que  $A$  cuando es  $\delta_n \leq \delta$ , puesto que en tal situación a cada  $U_j$  que no es disjunto con  $A$  pertenece un único elemento de  $A$ . Es decir, el cardinal de  $A$  se ha obtenido por un procedimiento que es esencialmente el método de Hausdorff: se consideran en primer lugar  $\delta$ - cubrimientos  $\{U_j\}$  del conjunto  $A$  que se pretende medir, es decir,  $\delta$  es un número positivo fijado y  $|U_j| \leq \delta$  para cada

$j$ , y después se hacer tender  $\delta$  a 0. Esto puede servir como motivación para la teoría de Hausdorff.

Fijados  $s \geq 0$ ,  $\delta > 0$ , y un subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$ , se designa  $\mathfrak{U}_\delta(A)$  la familia de todos los  $\delta$ - cubrimientos de  $A$ , es decir, colecciones  $\{U_j\}$  finitas o infinitas numerables de conjuntos  $U_j$  cuya unión contiene a  $A$  y cuyos diámetros  $|U_j|$  verifican  $0 < |U_j| \leq \delta$ . El

$$\inf \left\{ \sum_j |U_j|^s : \{U_j\} \in \mathfrak{U}_\delta(A) \right\}$$

se designa  $h_\delta^s(A)$ , y  $h^s(A)$  es el

$$\sup \{h_\delta^s(A) : \delta > 0\}.$$

En relación con  $h_\delta^s(A)$  y  $h^s(A)$  es conveniente hacer las siguientes observaciones:

1)  $h_\delta^s(A)$  puede ser cualquier número real no negativo o bien infinito, y no se altera si se restringe  $\mathfrak{U}_\delta(A)$  a la familia de las colecciones cuyos miembros son conjuntos convexos. En efecto, si  $\{U_j\}$  es cualquier colección de  $\mathfrak{U}_\delta(A)$ , entonces la colección de los cierres convexos de los  $U_j$  también pertenece a  $\mathfrak{U}_\delta(A)$  y a ambas colecciones se asocia la misma suma.

2) Siendo  $0 < \delta' < \delta$ , cualquier  $\delta'$ - cubrimiento de  $A$  es  $\delta$ - cubrimiento de  $A$ , por lo cual  $\mathfrak{U}_{\delta'}(A) \subset \mathfrak{U}_\delta(A)$  y, como consecuencia,  $h_{\delta'}^s(A) \geq h_\delta^s(A)$ . Es decir,  $h_\delta^s(A)$  puede aumentar al decrecer  $\delta$ . Esto prueba que existe el límite de  $h_\delta^s(A)$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ , y que

$$h^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} h_\delta^s(A).$$

Además,  $h^s(A)$  es un número real no negativo y también puede ser infinito. Nótese que así sucede para  $s = 0$  si  $A$  no es finito.

Procedimientos usuales de la teoría general de la medida permiten establecer que en  $\mathbb{R}^n$   $h_\delta^s$  y  $h^s$  son medidas exteriores, y  $h^s$  es una medida exterior métrica. El proceso de Caratheodory (ver [1] o [2]) asocia a  $h^s$  la  $\sigma$ -álgebra  $\mathfrak{M}^s$  de los conjuntos  $h^s$ - medibles, la cual contiene a la  $\sigma$ - álgebra de Borel, y la restricción de  $h^s$  a  $\mathfrak{M}^s$  es la  $s$ - medida de Hausdorff de  $\mathbb{R}^n$ .

Se requiere ahora estudiar la evolución de  $h^s(A)$  cuando  $s$  varía. Sea entonces  $s' > s \geq 0$  y  $0 < \delta < 1$ . Para cualquier  $\{U_j\}$  de  $\mathfrak{U}_\delta(A)$  se verifica

$$\sum_j |U_j|^{s'} \leq \sum_j |U_j|^s,$$

por lo cual  $h_\delta^{s'}(A) \leq h_\delta^s(A)$ , y cuando  $\delta \rightarrow 0$  resulta también  $h^{s'}(A) \leq h^s(A)$ . Además, en estas circunstancias

$$\sum_j |U_j|^s = \sum_j |U_j|^{s-s'} |U_j|^{s'} \geq \delta^{s-s'} \sum_j |U_j|^{s'},$$

lo cual implica que

$$h_\delta^s(A) \geq \delta^{s-s'} h_\delta^{s'}(A).$$

Puesto que  $s-s'$  es negativo,  $\delta^{s-s'} \rightarrow \infty$  cuando  $\delta \rightarrow 0$ , y naturalmente,  $h_\delta^s(A)$  y  $h_\delta^{s'}(A)$  convergen respectivamente a  $h^s(A)$  y  $h^{s'}(A)$ . De aquí se obtiene lo siguiente:

Siendo  $s' > s \geq 0$ ,

$$1) \quad h^{s'}(A) \neq 0 \text{ implica } h^s(A) = \infty,$$

y

$$2) \quad h^s(A) \neq \infty \text{ implica } h^{s'}(A) = 0.$$

Esta observación nos va a permitir establecer el concepto de dimensión de Hausdorff para el conjunto  $A$ .

Con tal intención probaremos antes el siguiente lema.

**Lema 2.** *Sea  $U = [0, 1]^n$  el intervalo cúbico de  $\mathbb{R}^n$  producto de  $n$  copias del intervalo real  $[0, 1]$ . Se verifica que  $h^n(U)$  no es infinito. Si es  $s > n$ , entonces  $h^s(U)$  y  $h^s(\mathbb{R}^n)$  son 0.*

*Demostración.* Para cualquier entero positivo  $k$  se considera el intervalo cúbico  $[0, 1/k]^n$ , contenido en  $U$  y cuyo diámetro es  $\sqrt{n}/k$ .  $U$  se descompone de manera natural en  $k^n$  intervalos cúbicos disjuntos obtenidos por desplazamiento de  $[0, 1/k]^n$ , y todos ellos tienen el mismo diámetro. Sea

$$\{U_j : j = 1, 2, \dots, k^n\}$$

la colección de los intervalos disjuntos cuya unión es  $U$ . Fijado  $\delta > 0$ , esta colección pertenece a  $\mathfrak{U}_\delta(U)$  si se elige  $k$  de manera que sea

$$\frac{\sqrt{n}}{k} \leq \delta.$$

Resulta entonces

$$h_\delta^n(U) \leq \sum_{j=1}^{k^n} |U_j|^n = k^n \left[ \frac{\sqrt{n}}{k} \right]^n = [\sqrt{n}]^n < \infty.$$

Puesto que  $\delta > 0$  es arbitrario, se obtiene también  $h^n(U) < \infty$ . La observación 2) indicada antes de la formulación del lema 2 pone de manifiesto que  $h^s(U) = 0$  cuando es  $s > n$ . Finalmente,  $U$  es un conjunto de Borel y por ello es  $h^s$ -medible, y  $\mathbb{R}^n$  se puede descomponer en los miembros de una colección numerable de intervalos cúbicos disjuntos que tienen la misma propiedad que  $U$ . Resulta así  $h^s(\mathbb{R}^n) = 0$  por la  $\sigma$ -aditividad de  $h^s$ .

El lema anterior prueba que  $h^s(A) = 0$  cuando es  $s > n$  y  $A$  es cualquier subconjunto de  $\mathbb{R}^n$ . Por ello, sólo interesan los valores de  $s$  que recorren el intervalo real  $[0, n]$ . Asimismo, de las observaciones 1) y 2) antes expresadas se deduce que a cada conjunto  $A$  se asigna un número llamado dimensión de Hausdorff de  $A$ ,  $dim A$ , que pertenece al intervalo  $[0, n]$  y tiene la propiedad siguiente:

$$h^s(A) = \infty \text{ si } 0 \leq s < dim A, \quad h^s(A) = 0 \text{ si } dim A < s < \infty.$$

Es obvio que  $dim A \leq dim B$  si  $A \subset B$ .

Sea ahora  $s$  la dimensión de  $A$ .  $h^s(A)$  puede ser 0, o un número positivo, o  $\infty$ . Un conjunto  $E \subset \mathbb{R}^n$  es un  $s$ -conjunto significa que  $E$  es  $h^s$ -medible y

$$0 < h^s(E) < \infty.$$

Obviamente, la dimensión de un  $s$ -conjunto es  $s$ , pero no todos los conjuntos de dimensión  $s$  son  $s$ -conjuntos.

Un conjunto no vacío finito  $E$  es un 0-conjunto y  $h^0(E) = \text{card } E$ , pues si  $\delta$  es cualquier número positivo menor que la mínima distancia entre dos puntos de  $E$ , entonces a cada conjunto  $U$  no disjunto con  $E$  pertenece un único punto de  $E$ , por lo cual  $h_\delta^0(E) = \text{card } E$ .

Con un argumento análogo al utilizado en el lema 2 se prueba que un subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  que es de Borel y acotado verifica que  $h^n(E)$  no es  $\infty$ . Entonces  $E$  es un  $n$ -conjunto si  $h^n(E)$  es positivo. Pero la dimensión de Hausdorff de  $E$  es menor o igual que  $n$  cuando  $h^n(E) = 0$ .

#### IV. Dimensión y medida del conjunto de Cantor

**Teorema.** *La dimensión de Hausdorff del conjunto ternario  $C$  de Cantor es el número  $s$  que verifica  $3^s = 2$ , es decir,  $s$  es el cociente  $\ln 2 / \ln 3$ , y  $h^s(C) = 1$ .*

*Demostración.* Para cada entero positivo  $k$  sea  $\delta(k) = 3^{-k}$ . La familia  $\mathfrak{F}_k$  es un  $\delta(k)$ -cubrimiento de  $C$ , por lo cual

$$h_{\delta(k)}^s(C) \leq \sum_{j=1}^{2^k} |F_{kj}|^s = 2^k (3^{-k})^s = 2^k (3^s)^{-k} = 2^k 2^{-k} = 1.$$

La desigualdad

$$h_{\delta(k)}^s(C) \leq 1$$

es válida para cada  $k$ , y  $\delta(k) \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ , por lo que  $h^s(C) \leq 1$ . Si es  $h^s(C) > 0$ , entonces  $\dim C = s$ . Se probará también que  $h^s(C) \geq 1$ , de lo que resulta  $h^s(C) = 1$  y que  $C$  es un  $s$ -conjunto.

Para estimar  $h^s(C)$  se pueden considerar solamente cubrimientos por conjuntos convexos que, en esta situación, son intervalos. Asimismo, con la misma longitud es el intervalo cerrado el que tiene más capacidad para cubrir. Por esta razón es suficiente probar lo siguiente:

*Para cada cubrimiento  $\{I_j\}$  de  $C$  constituido por intervalos cerrados se verifica  $\sum |I_j|^s \geq 1$ .*

La prueba consistirá en comprobar que la existencia de un tal cubrimiento  $\{I_j\}$  de  $C$  que verifique  $\sum |I_j|^s < 1$  genera una contradicción.

Se considera pues un cubrimiento  $\{I_j\}$  para  $C$  de intervalos cerrados tal que  $\sum |I_j|^s < 1$ . Cada  $I_j$  se puede ampliar un poco para convertirse en un intervalo abierto (designado también  $I_j$ ) de manera que siga verificándose  $\sum |I_j|^s < 1$ . Puesto que  $C$  es compacto y la colección de abiertos  $\{I_j\}$  lo cubre, se puede seleccionar una subcolección finita  $\mathfrak{J} = \{I_1, I_2, \dots, I_r\}$  que también cubre a  $C$  y verifica naturalmente  $\sum_{j=1}^r |I_j|^s < 1$ . Puede suponerse que cada elemento de  $\mathfrak{J}$  tiene intersección no vacía con  $C$ .

Obsérvese ahora que cualquier intervalo abierto  $(a, b)$  que tiene intersección no vacía con  $C$  y cuyos extremos no pertenecen a  $C$  tiene la siguiente propiedad:

Existe algún  $k$  tal que  $C \cap (a, b)$  está contenido en la unión de los miembros de una colección de intervalos consecutivos de  $\mathfrak{F}_k$ , y  $(a, b)$  contiene a todos ellos.

Se observa también que lo mismo sucede a  $(a, b)$  cuando existen dos intervalos de  $\mathfrak{F}$  tales que  $a$  es el extremo mayor de uno y  $b$  es el extremo menor del otro. En el caso de ser  $a$  y  $b$  elementos de  $C$  en una situación distinta de la anterior, es fácil probar que basta una ampliación arbitrariamente pequeña de  $(a, b)$  para convertirlo en otro intervalo abierto con la propiedad citada. Mediante la ampliación adecuada de los elementos de  $\mathfrak{J}$  que sea precisa (se mantiene la notación para ellos) se consigue que todos los elementos de  $\mathfrak{J}$  la tengan y que se verifique también  $\sum_{j=1}^r |I_j|^s < 1$ . Se designa  $k_j$  el menor  $k$  al que se refiere la propiedad correspondiente a  $I_j$ .

Siendo  $k$  el mayor de los  $k_j$ , es claro que

$$F_k \subset I_1 \cup I_2 \dots \cup I_r,$$

y que cada intervalo de la familia  $\mathfrak{F}_k$  está contenido en algún  $I_j$ .

Finalmente, para cada  $j$  se considera el mínimo intervalo cerrado  $K_j$  que contiene a todos los elementos de  $\mathfrak{F}_k$  que están contenidos en  $I_j$ , y sea  $m_j$  el número de éstos. Se verifica que  $\sum_{j=1}^r |K_j|^s < 1$  y  $m_1 + m_2 + \dots + m_r \geq 2^k$ . De acuerdo con c) del lema 1 resulta

$$\sum_{j=1}^r |K_j|^s \geq 2^{-k}(m_1 + m_2 + \dots + m_r) \geq 2^{-k}2^k = 1,$$

lo cual constituye la contradicción que se esperaba.

## Referencias

- [1] Falconer K. J. *The geometry of fractal sets*. Cambridge University Press. 1985.
- [2] De Guzmán M. y Rubio B. *Integración: teoría y técnicas*. Alhambra. Madrid. 1979.
- [3] Rubio B. *Números y Convergencia*. Editado por el autor. Madrid 1996.
- [4] Rubio B. *Medida e integración en  $\mathbb{R}^n$* . (Se editará próximamente)

## Sobre la vecindad geométrica

**Manuel Abellanas**

Universidad Politécnica de Madrid

manuel.abellanas@upm.es

### **Abstract**

*This paper deals with the concept of geometric vicinity. The central question is: Given a set  $S$  of  $n$  points on the plane and one of them  $p \in S$ , What points of  $S$  can be considered the neighbours of  $p$  in  $S$ ? We review several definitions of the concept and we ask for efficient algorithms for computing the neighbours in practice. The paper aims to be a lesson<sup>1</sup> on Geometry able to be used in the classroom in undergraduate level or even in high school.*

Dedicado al profesor Eugenio Roanes Macías  
con motivo de su jubilación académica<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> El término *lección* debe entenderse en sentido amplio según mandan los cánones de la reforma universitaria en curso. No obstante, a pesar de que muchos insisten en que esto es hacer innovación educativa, el Profesor Roanes sabe muy bien que de novedad no tiene nada, pues hace bastantes décadas que él ya enseñaba y ponía en práctica muchas de las metodologías que hoy nos predicán como novedades. Renovación tal vez sea el término correcto. Lo bueno, y lo malo, del problema educativo, es que no tiene solución, por lo que exige un esfuerzo permanente de renovación en busca de la mejor solución para cada momento y circunstancia.

<sup>2</sup> El profesor Roanes ha sido uno de los pioneros de la didáctica de la Matemática en España. Sus libros son un referente para quienes están interesados en la materia. Uno de ellos, *Introducción a la Geometría* (Anaya 1980), me ha sido de gran utilidad en numerosas ocasiones, tanto para aprender Geometría como para aprender a enseñar Geometría. Este trabajo es un modesto homenaje al Profesor Roanes con la gratitud de quien ha compartido experiencias con él como alumno y como compañero.

## Introducción

Supongamos que estoy en una región poco poblada, plana y despejada (¿La Mancha de Don Quijote, tal vez?) y necesito pedir ayuda. Como anochece, las luces en las puertas de las casas a mi alrededor me ayudan a localizarlas. Así puedo identificar cuáles son los vecinos a los que acudir. Si puedo caminar en línea recta en cualquier dirección, el vecino más próximo será el más adecuado para llegar lo antes posible. Pero tal vez no me interese si se encuentra en dirección muy diferente a la que llevo en mi viaje caminando a través de la región, pues tendré que desandar el camino que ya he hecho y volverlo a andar después. Esto me plantea la siguiente cuestión: Además del vecino más próximo, ¿cuáles son los demás vecinos de la posición donde me encuentro?

Esta situación sirve para plantear a nuestros estudiantes un trabajo de investigación que pueden desarrollar tanto en el aula, mediante debate moderado por el profesor, como fuera de ella, buscando información que pondrán en común después, llegando, en su caso, a recoger los resultados obtenidos en un documento.

*Simplificación del problema* (modelización): Convendremos que tanto las casas como la posición del caminante se representan por puntos en el plano. Para distinguir la posición del caminante la dibujaremos de color rojo y las posiciones de las casas de color azul. Así el problema se transforma en decidir qué puntos azules son los “vecinos” del punto rojo.

El objetivo principal es que los estudiantes reflexionen sobre el concepto de vecindad y lo relacionen con el de proximidad, distinguiendo ambos conceptos. Como objetivo secundario se puede plantear la obtención de algoritmos para el cálculo de los vecinos a partir de unos datos dados. En niveles superiores se puede plantear también el análisis de la complejidad de los algoritmos obtenidos y proponer la búsqueda de algoritmos eficientes.

En las siguientes secciones se abordan diferentes problemas y soluciones relacionados con la cuestión anterior con el ánimo de que sirvan de fuente de inspiración para el profesor.

### 1 La solución urgente: el vecino más próximo

Empezaremos con el caso más sencillo. Aquél en el que el caminante decide acudir al vecino más próximo. Posiblemente porque la urgencia de llegar cuanto

antes pesa más que el inconveniente de la caminata extra que esta opción le supondrá.

**Problema 1 (El vecino más próximo):** Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano y dado un punto  $q$ , hallar el punto de  $S$  más próximo a  $q$ .

Es claro que para resolver el problema basta con hallar las distancias entre  $q$  y cada uno de los puntos de  $S$  y quedarse con el que dé la menor distancia. Si nuestros estudiantes disponen de instrumentos de dibujo o de un *sistema de Geometría dinámica* (como **Geogebra**<sup>3</sup>, por ejemplo), podemos plantearles que resuelvan el problema de modo gráfico. Una posibilidad consiste en trazar todas las circunferencias centradas en el punto  $q$  que pasan por los puntos de  $S$  y seleccionar el punto que determina la más pequeña.

Como el problema ha resultado demasiado sencillo, generalicemos ahora el problema.

**Problema 2 (Todos los vecinos más próximos):** Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano, hallar, para cada uno de sus puntos, cuál es el punto de  $S$ , distinto de él, más próximo a él.

Lo primero que a uno se le ocurre, sobretodo después de haber resuelto el problema 1, es aplicar  $n$  veces el algoritmo que resuelve éste. Una vez para cada punto de  $S$ , considerando éste como punto rojo y el resto como puntos azules. Resuelto así, no parece que hayamos aumentado la complicación del problema. Sin embargo, el reto consiste en resolverlo de forma más eficiente. Es decir, empleando menos operaciones. Veamos cuántas operaciones hay que realizar si empleamos como base el problema anterior: Para cada uno de los  $n$  puntos hay que calcular las distancias entre él y los  $n-1$  puntos restantes. Además hay que comparar esas distancias entre ellas para quedarse con la menor. Esto supone  $n-1$  cálculos de distancias mas  $n-2$  comparaciones por cada punto (basta comparar cada nueva distancia con la que hasta ese momento es la menor. Así sólo necesitamos hacer  $n-2$  comparaciones para hallar la más pequeña). Si contamos como operaciones básicas el cálculo de la distancia entre dos puntos y la comparación de distancias, en total el algoritmo requiere que realicemos  $n [(n-1) + (n - 2) ] = 2n^2 - 3n$  operaciones. La pregunta ahora es: ¿es posible resolver el problema empleando menos operaciones?

---

<sup>3</sup> *Geogebra* es un software libre muy recomendable. Puede descargarse en la dirección [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) o bien puede emplearse directamente seleccionando el enlace correspondiente en dicha página web.

Tal vez un estudiante brillante se da cuenta de que en la ejecución de este algoritmo estamos calculando la distancia entre cada par de puntos dos veces. Y ésta, desde luego, será la misma las dos veces. Por tanto, ¿porqué hacer ese cálculo por duplicado? Esta observación permite disminuir el número de operaciones una cantidad importante: podemos ahorrarnos la mitad de los cálculos de las distancias. De esta forma el número de operaciones elementales necesario será  $(3/2)n^2 - (5/2)n$ . Hemos conseguido rebajar el coeficiente principal de 2 a 3/2, lo cual es una mejora importante. Nuestros estudiantes se convencerán cuando representen las gráficas de las dos funciones, por ejemplo con *Geogebra*, y vean que una aparece notablemente por debajo de la otra, sobre todo para valores grandes de  $n$ . Será bueno también que calculen los valores de ambas funciones para 10, 100 y 1000 puntos y vean cómo la diferencia se agranda. Para insistir en el interés que tiene encontrar algoritmos eficientes podemos hacer el cálculo aproximado del tiempo físico que necesitan uno y otro algoritmo para resolver el mismo problema, suponiendo, por ejemplo, que lo ejecuta una máquina capaz de realizar un millón de operaciones elementales por segundo. Así podemos calcular que, para procesar cien mil puntos, el algoritmo mejorado tardará una hora y veinte minutos menos que el otro.

No termina aquí el problema. Hay soluciones mejores. Existen algoritmos que resuelven el problema 2 con menos operaciones. La función  $T(n)$  que mide la complejidad del algoritmo (es decir, el número de operaciones elementales que requiere para un número de datos de entrada  $n$ ), que en las dos soluciones anteriores era  $T(n) = 2n^2 - 3n$  y  $T(n) = (3/2)n^2 - (5/2)n$  respectivamente, puede ser del orden 4 de la función  $T(n) = n \log_2 n$ .

Pero volvamos a la solución geométrica constructiva del primer problema. De todos los círculos centrados en el punto  $q$ , nos quedábamos con el más pequeño. Equivalentemente, se trata de quedarse con aquél que está vacío (es decir, que no contiene en su interior ningún punto del conjunto  $S$ ). El vecino más próximo se caracteriza por esta propiedad. Es aquel tal que el círculo centrado en el punto  $q$

---

<sup>4</sup> Una función real de variable entera  $f(n)$  es del orden de otra función  $g(n)$  si existe una constante  $k$  tal que, para valores de  $n$  superiores a un cierto  $n_0$ , se verifica  $f(n) < k g(n)$ . Es decir, asintóticamente está acotada por la función  $g$  salvo una constante multiplicativa.

que lo contiene en la frontera está vacío<sup>5</sup>. Esta caracterización nos sirve para explicar el concepto de vecino más próximo de forma gráfica intuitiva: El vecino más próximo es el primero que alcanza un círculo con centro en  $q$  cuyo radio crece partiendo de cero. Con *Geogebra* se puede hacer ver esta idea muy bien definiendo un círculo con centro en  $q$  y haciendo variar su radio hasta que alcance algún punto de  $S$  (Figura 1). En definitiva, un punto es el vecino más próximo de  $q$  si el espacio entre ellos está vacío (en este caso el espacio es el círculo mencionado). En la Figura 2 están representados todos los vecinos más próximos de un conjunto de puntos y los círculos vacíos correspondientes. La relación de vecindad está indicada con una flecha. Obsérvese que la relación no es simétrica.

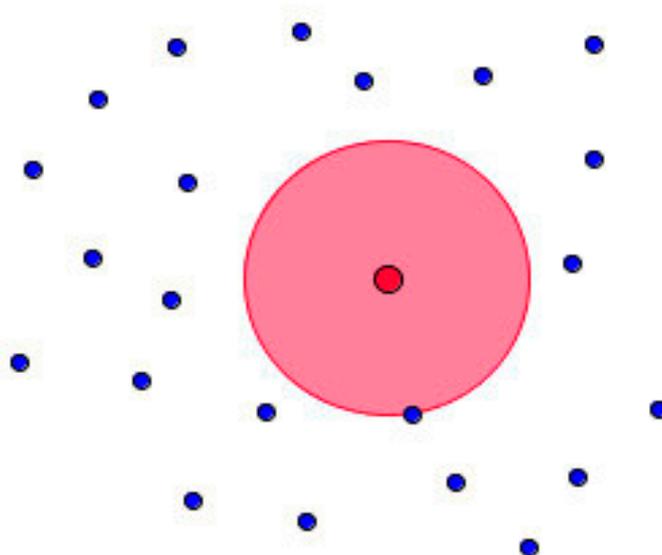


Figura 1: *El vecino más próximo.*

La idea de vecindad geométrica está asociada a la existencia de una determinada región vacía. En general, dos puntos serán vecinos si no hay ningún punto “entre ellos”, o, dicho de otra forma, si “el espacio entre ellos está vacío”. En los

---

<sup>5</sup> Podría ocurrir que haya varios puntos en  $S$  con esta condición. Tal es el caso cuando varios puntos equidistan de  $q$  y su distancia es la mínima. En ese caso cualquiera sería solución.

siguientes apartados vamos a usar esta idea para definir de diferentes formas la vecindad entre los puntos de un conjunto.

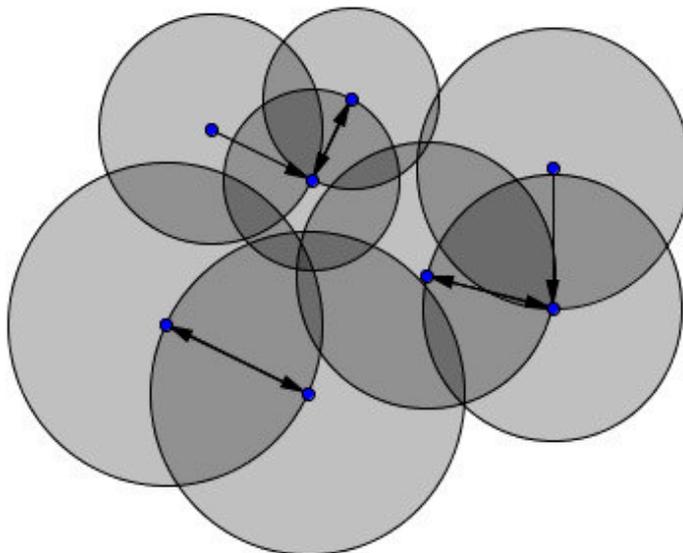


Figura 2: Todos los vecinos más próximos

## 2 Los vecinos a mi alrededor

Ahora que ya sabemos bastante sobre los vecinos más próximos, volvamos a la pregunta que nos hacíamos en la introducción. Además del vecino más próximo, ¿cuáles son los demás vecinos del punto  $q$ ? En esta sección vamos a analizar varias definiciones de vecindad.

### 2.1 Vecinos Delaunay

Empezaremos haciendo uso de la definición del vecino más próximo.

**Definición 1:** Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano, diremos que dos puntos  $s_i$  y  $s_j$  de  $S$  son vecinos si existe un punto  $q$  en el plano tal que tiene a  $s_i$  y  $s_j$  entre sus vecinos más próximos.

De forma equivalente, se puede decir que  $s_i$  y  $s_j$  son vecinos si existe un punto  $q$  tal que el círculo centrado en  $q$  que contiene a  $s_i$  en la frontera, contiene también a  $s_j$  en la frontera y no contiene a ningún otro punto de  $S$  en su interior. Siendo así,

el punto  $q$  establece la vecindad entre  $s_i$  y  $s_j$ . Pero lo importante no es el punto  $q$ . Lo importante es el círculo que contiene a  $s_i$  y a  $s_j$  en su frontera y está vacío (de otros puntos de  $S$ ). Así que podemos definir la vecindad de dos puntos, de forma equivalente, del siguiente modo:

**Definición 2:** Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano, diremos que dos puntos  $s_i$  y  $s_j$  de  $S$  son vecinos si existe un círculo tal que tiene a  $s_i$  y  $s_j$  en su frontera y su interior no contiene puntos de  $S$ . (De forma más breve, diremos que hay un círculo vacío que pasa por  $s_i$  y  $s_j$ ).

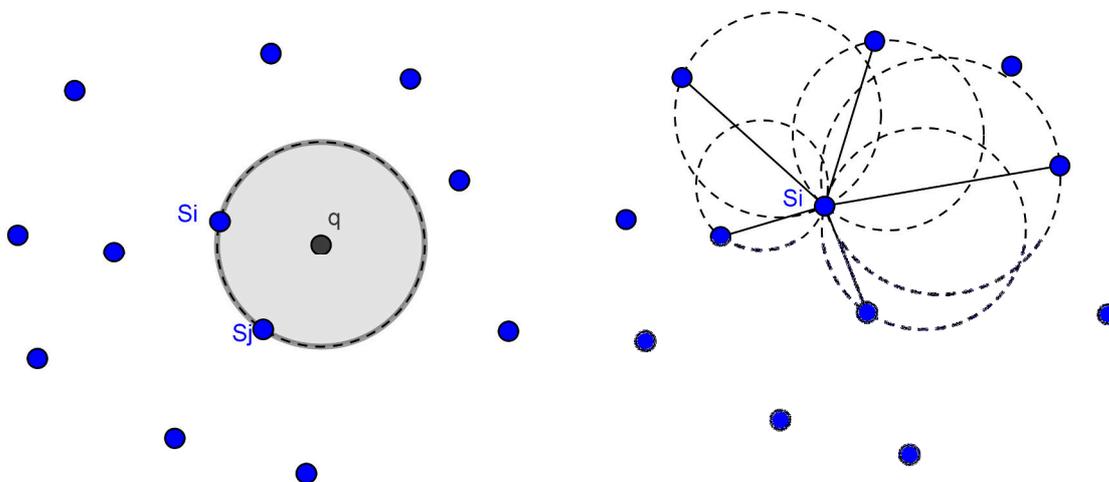


Figura 3:  $s_i$  y  $s_j$  son vecinos gracias al punto  $q$ . A la derecha varios vecinos de  $s_i$

Esta idea de vecindad entre los puntos de un conjunto tiene en común con la del vecino más próximo que depende de la existencia de una cierta región vacía. En este caso se trata de cualquier círculo que pase por los dos puntos vecinos. Otra observación sencilla es que el vecino más próximo de un punto, también es su vecino, ¡como no podía ser de otra forma!. A pesar de su sencillez, no está mal pedir a nuestros estudiantes que lo demuestren. Una vez resuelto este ejercicio, tal vez se animen a demostrar este otro un poco más general:

**Proposición 1:** Sea  $S$  un conjunto de puntos del plano y  $s_i$  y  $s_j$  dos puntos de  $S$ . Se verifica que  $s_i$  y  $s_j$  son vecinos si, y sólo si existe un círculo que contiene a  $s_i$  y  $s_j$  y en cuyo interior no hay otro punto de  $S$  distinto de  $s_i$  y  $s_j$ .

Esta proposición es, como vemos, una tercera definición equivalente. Lo interesante de esta definición es que tal vez parece más natural a la hora de definir el concepto de vecindad. Al menos el de “buena vecindad”. Ya que en lugar de definir dos puntos vecinos como aquéllos que están separados por un círculo vacío, se puede decir que son aquellos que se pueden separar de los demás puntos mediante una circunferencia. Bueno, no exactamente. Hay casos en los que no es así. Puede ser de nuevo un buen motivo para retar a nuestros estudiantes a descubrir cuáles son esos casos. En esta ocasión daremos la respuesta aquí: se trata de los casos en que más de tres puntos son concíclicos siendo el círculo correspondiente vacío (sin puntos de  $S$ ). En efecto, si hay cuatro o más puntos en la frontera de un círculo de interior vacío, según las definiciones anteriores, todos son vecinos entre sí y, sin embargo, no hay forma de encontrar una circunferencia que separe a dos de ellos alternos de los demás (es decir, que contenga a dos no consecutivos en su interior y el resto sean exteriores). Esta observación es un buen motivo para hablar de los *casos degenerados* de un problema geométrico<sup>6</sup>. En lo que sigue, salvo que digamos lo contrario, supondremos que los datos de nuestros problemas no están en posición degenerada. En particular no habrá tres puntos en la misma recta ni cuatro en la misma circunferencia.

Lo siguiente que podemos plantear es cuáles son todos los vecinos de un punto, cuántos hay, y cómo calcularlos. Nos ahorraremos aquí los casos más simples que corresponden a conjuntos con muy pocos puntos. No obstante puede ser interesante sugerir a nuestros estudiantes analizarlos con detalle. Supondremos que el conjunto tiene bastantes puntos. De hecho, en muchas aplicaciones se manejan conjuntos con muchos puntos. Miles o incluso millones de puntos. Por eso es importante encontrar soluciones eficientes cuando diseñamos algoritmos para resolver problemas relacionados. De otra forma el tiempo de cálculo puede sobrepasar el que disponemos. No es difícil probar que un punto tiene siempre al menos dos vecinos y puede llegar a tener  $n-1$ , siendo  $n$  el número de puntos del conjunto.

Para hallar todos los vecinos de un punto podemos empezar por resolver el siguiente problema de tipo test, que además tiene interés por sí mismo:

---

<sup>6</sup> Este es un tema que puede dar mucho de sí. Conformémonos aquí con decir que un conjunto finito de puntos del plano está en posición degenerada si alguno de sus puntos depende algebraicamente de los demás. Por ejemplo si hay tres de ellos alineados, o cuatro en la misma circunferencia, o seis en la misma cónica, etc.

**Problema 3 (test de vecindad):** Dado un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano, y dados dos puntos  $p$  y  $q$  de  $S$ , averiguar si  $p$  y  $q$  son vecinos.

Para resolverlo vamos a emplear una propiedad de los círculos tan obvia como interesante por el número de veces que aparece en diferentes demostraciones relacionadas con círculos:

**Lema 2:** Sean  $p$  y  $q$  dos puntos de un conjunto  $S$  de puntos del plano y sea  $C$  el círculo que tiene el segmento  $pq$  como diámetro (al que llamaremos círculo diametral de  $p$  y  $q$ ). Si existen puntos de  $S$  en el círculo  $C$  a ambos lados del segmento  $pq$ , entonces no es posible separar mediante una circunferencia los puntos  $p$  y  $q$  del resto de puntos de  $S$ .

La idea para demostrar este lema es ver que todos los círculos que pasan por  $p$  y  $q$  contienen algún otro punto de  $S$ . Si intentamos evitar los puntos de un lado del segmento, necesariamente contendremos puntos del otro lado. Experimentando con Geogebra se observa muy bien esta propiedad. Demostrarla con detalle o no, dependerá del interés y nivel de nuestros estudiantes.

En esta propiedad se basa el siguiente algoritmo para resolver el test de vecindad:

**Algoritmo (test de vecindad):**

**Datos de entrada:** Un conjunto  $S$  de  $n$  puntos del plano y dos puntos  $p$  y  $q$  de  $S$

**Datos de salida:** Si / No

- 1 Calcular el círculo  $C$  diametral de  $p$  y  $q$ .
- 2 Averiguar si hay puntos de  $S$  pertenecientes a  $C$ , distintos de  $p$  y  $q$ . En caso negativo responder Si y parar.
- 3 Si hay puntos de  $S$  en el círculo  $C$  a ambos lados del segmento  $pq$ , responder No y parar.
- 4 En otro caso sólo hay puntos de  $S$  en uno de los semicírculos en que el segmento  $pq$  divide a  $C$ . Hallar, de entre estos puntos, aquel punto  $m$  que defina un ángulo mayor con  $p$  y  $q$ , considerando a  $m$  como vértice del ángulo.
- 5 Analizar si el círculo que pasa por  $p$ ,  $q$  y  $m$  contiene algún otro punto de  $S$ . En caso afirmativo, responder No. En caso negativo, responder Si.

Como el lector estará pensando, y conviene resaltar a los estudiantes, esta manera de describir el algoritmo es demasiado vaga como para poderlo convertir directamente en un programa de ordenador. Falta describir con detalle cada uno de los pasos. No obstante recoge las ideas principales y reduce el problema a otros más simples que pueden ser tratados de forma independiente. El nivel de detalle dependerá del nivel e intereses de los estudiantes. En todo caso, en una primera aproximación al problema, siempre es preferible describirlo “*a alto nivel*” para que las ideas fundamentales, geométricas en este caso, no se pierdan en el bosque de los detalles.

El análisis de la complejidad del algoritmo puede hacerse, como es costumbre, fijándose en el orden de la función  $T(n)$  que mide el número de operaciones elementales necesarias para ejecutar el algoritmo con  $n$  puntos en el peor caso. Prescindimos, por tanto, de los detalles que nos darían la expresión precisa de dicha función. Al tratarse de un algoritmo que consta de 5 pasos que hay que ejecutar una sola vez de forma secuencial, el número de operaciones será la suma de las necesarias para cada paso. El paso 1 solo requiere un número constante de operaciones, pues solo intervienen en él los puntos  $p$  y  $q$ . Cada uno de los demás pasos requieren una cantidad de operaciones que es función lineal de  $n$ , ya que, básicamente hay que recorrer la lista de puntos  $S$  y realizar un número constante de operaciones por cada uno de los puntos. En conclusión, el orden de la complejidad del algoritmo es  $O(n)$ . Por otra parte, es obvio que debemos procesar todos y cada uno de los puntos de  $S$  al menos una vez, pues si nos dejamos alguno sin utilizar, puede ser que sea ése precisamente el responsable de que  $p$  y  $q$  no sean vecinos. En consecuencia, cualquier algoritmo que resuelva el test tendrá una complejidad, al menos, del mismo orden lineal. Es por esto que en casos como este se dice que el algoritmo es *óptimo*.

Los lectores matemáticos ya estarán pensando que empleando el test de vecindad  $n-1$  veces queda resuelto el problema de partida de hallar todos los vecinos de un punto dado. Incluso podemos resolver el problema más general de calcular todas las parejas de puntos vecinos del conjunto  $S$  sin más que aplicar el test a cada una de ellas. En este caso habrá que aplicar el test  $n(n-1)/2$  veces. Pero no debe olvidarse que la complejidad de los algoritmos está directamente ligada a los recursos necesarios para poder ejecutarlos, principalmente el tiempo. Por tanto, el problema no está terminado. Queda analizar la complejidad de estos algoritmos y analizar si son mejorables desde el punto de vista de la complejidad. Y, en efecto, es posible. Es fácil deducir que el procedimiento descrito para hallar todos los

vecinos de un punto tiene complejidad  $O(n^2)$  y el descrito para hallar todas las parejas de vecinos  $O(n^3)$ . Queda pendiente el reto de conseguir otros algoritmos mejores<sup>7</sup>.

La definición de vecindad que hemos empleado en esta sección tiene propiedades interesantes. Seguramente la más interesante de todas es que si unimos mediante segmentos las parejas de puntos vecinos de un conjunto finito  $S$  (en posición no degenerada), obtenemos una *triangulación* del conjunto  $S$ .

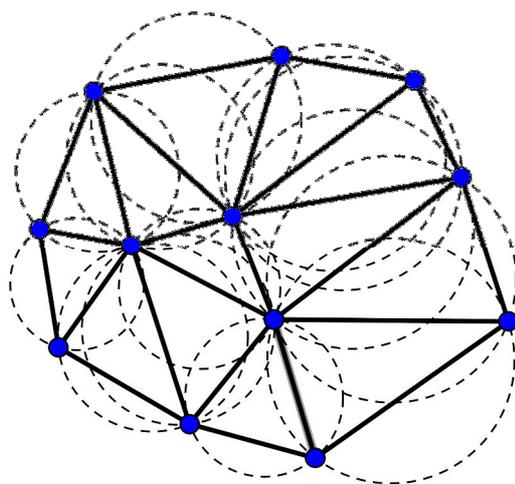


Figura 4: *Triangulación obtenida al conectar todas las parejas de vecinos.*

Es muy fácil que los estudiantes entiendan qué es una triangulación de un conjunto de puntos. Basta con hacer que dibujen en un papel, o con Geogebra, unos cuantos puntos y que los conecten de dos en dos mediante segmentos con la única condición de que dos segmentos cualesquiera no se atraviesen. Incluso se puede plantear como un juego para dos jugadores:

***Juego de la triangulación:*** Uno de los jugadores dibuja  $n$  puntos. De forma alternativa cada jugador dibuja un segmento conectando dos puntos con la condición de que no atravesase a otro ya dibujado. Gana el último jugador que consiga conectar dos puntos.

---

<sup>7</sup> Ambos problemas pueden resolverse con complejidad  $O(n \log n)$

Este juego sirve para que los estudiantes descubran alguna propiedad combinatoria de las triangulaciones. En primer lugar, que hay varias diferentes. De hecho el número es elevado. También, si se les hace jugar varias veces con el mismo conjunto de puntos (para lo que viene bien usar Geogebra), pueden hacer conjeturas sobre el número de segmentos que tiene la triangulación. Si siempre empieza el juego el mismo jugador, siempre será el mismo jugador el que gane, lo que hará que el otro se interese especialmente en descubrir lo que está pasando. Finalmente se les puede hacer ver que el número de segmentos depende de forma lineal del número de puntos y del número de ellos que aparecen en la envolvente convexa<sup>8</sup>. Conocer finalmente “el truco” del juego que permite saber quién será el ganador a priori, será, sin duda, el mejor aliciente para que entiendan las propiedades combinatorias correspondientes.

La triangulación que se obtiene conectando los puntos vecinos se conoce como la *triangulación de Delaunay*<sup>9</sup>. Tiene tantas aplicaciones en campos tan diversos que se ha estudiado en profundidad y existen numerosos resultados relacionados con ella. Entre otros, existen algoritmos eficientes para su cálculo. Los algoritmos óptimos que calculan esta triangulación tienen complejidad  $O(n \log n)$ . A la vecindad correspondiente, que hemos presentado en esta sección, se la conoce como *vecindad Delaunay*.

## 2.2 Vecinos Gabriel

Puestos a sacar alguna pega a la vecindad Delaunay, podemos echarle en cara que considera vecinos a algunas parejas de puntos que parecen intuitivamente poco vecinos. Véase si no el ejemplo de la Figura 5.

---

<sup>8</sup> La envolvente convexa de un conjunto de puntos es la frontera de su cierre convexo. Y éste es el menor conjunto convexo que contiene al conjunto de partida.

<sup>9</sup> Boris Delaunay, famoso alpinista y matemático ruso definió esta triangulación en 1934 en su artículo "Sur la sphère vide", *Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk* 7: 793–800.

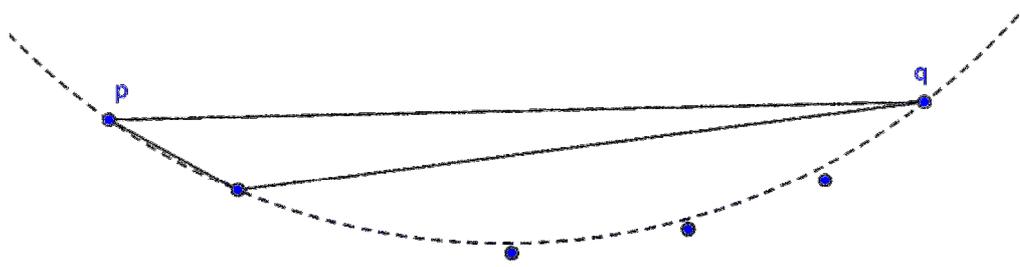


Figura 5: Los puntos  $p$  y  $q$  son vecinos Delaunay porque se pueden separar de los demás mediante una circunferencia.

Por esta razón, tiene sentido, sobre todo de cara a sus aplicaciones, definir la vecindad de forma más restrictiva. Este es el caso de la siguiente definición debida a Gabriel y Sokal<sup>10</sup>

**Definición 3:** Dos puntos de un conjunto  $S$  de puntos del plano son vecinos Gabriel si el círculo diametral que definen no contiene en su interior a ningún punto de  $S$ .

Es claro que la vecindad Gabriel implica la vecindad Delaunay, pues el círculo diametral contiene a los puntos que lo definen en su frontera y su interior está vacío. Sin embargo es más restrictiva, pues no todo par de vecinos Delaunay son vecinos Gabriel. En el ejemplo mostrado en la figura 5 los puntos  $p$  y  $q$  no son vecinos Gabriel pues su círculo diametral contiene al resto de los puntos en su interior. También es fácil ver que cada punto y su vecino más próximo son vecinos Gabriel.

La vecindad Gabriel se establece cuando no hay puntos en “el espacio” comprendido entre dos puntos, entendiendo en este caso que dicho espacio es el círculo diametral.

### 2.3 Otras vecindades

Con la misma idea de considerar como vecinos aquellos puntos tales que “el espacio entre ellos” esté vacío, se pueden adoptar otras definiciones. Algunos ejemplos son los siguientes:

<sup>10</sup> K. R. Gabriel, ; R. R. Sokal, (1969), "A new statistical approach to geographic variation analysis", *Systematic Zoology* 18: 259–270,

**Definición 4:** Dos puntos de un conjunto  $S$  de puntos del plano son vecinos relativos<sup>11</sup> si la intersección de los círculos centrados en ellos y de radio igual a su distancia es vacía (es decir, no contiene otros puntos de  $S$  en su interior).

**Definición 5:** Dos puntos de un conjunto  $S$  de puntos del plano son vecinos si el rectángulo isotético<sup>12</sup> que determinan es vacío.

**Definición 6:** Dos puntos de un conjunto  $S$  de puntos del plano son vecinos si la franja comprendida entre ellos es vacía, siendo dicha franja el espacio comprendido entre las rectas paralelas que pasan por los puntos y que son perpendiculares a la recta que los contiene.

**Definición 7:** Dos puntos de un conjunto  $S$  de puntos del plano son vecinos si el cuadrado que los contiene en vértices diametralmente opuestos es vacío.

La lista de definiciones puede ser infinita. De hecho constituye un ejercicio interesante y de gran estímulo para los estudiantes el pedirles que den su propia definición de vecindad y compararla con las ya conocidas. Dependiendo del nivel, se les puede pedir que obtengan algoritmos para hallar todas las parejas de vecinos según su propia definición y analicen la complejidad, tanto del conjunto de parejas de vecinos como del algoritmo.

### 3 Los vecinos más lejanos

En ocasiones no interesa saber quién es el vecino más cercano, si no justo lo contrario. Quién es el vecino más lejano. Por ejemplo, si queremos dar cobertura desde una antena a todos los usuarios de una región, para calcular la potencia de emisión necesaria necesitamos saber quién es el más alejado de la antena. Salvo en casos degenerados, cada punto de un conjunto finito de puntos del plano tendrá un vecino más alejado.

Obtener un algoritmo para hallar el vecino más lejano de un punto dado es igual de sencillo que para hallar el vecino más próximo. Basta quedarse con la

---

<sup>11</sup> Definición debida a G.T.Toussaint en el artículo *The relative neighbourhood graph of a finite planar set*. Pattern Recognition Volume 12, Issue 4, 1980, Pages 261-268.

<sup>12</sup> Un rectángulo isotético es el que tiene sus lados paralelos a los ejes. Dos puntos del plano determinan un único rectángulo isotético una de cuyas diagonales es el segmento que los une. Si los puntos coinciden en abscisa u ordenada, el rectángulo se reduce a un segmento vertical u horizontal respectivamente.

mayor de las distancias en lugar de la menor al comparar las distancias entre el punto y los demás puntos del conjunto. El algoritmo es por tanto de complejidad lineal respecto del número de puntos y por tanto, óptimo. Aplicando este algoritmo a cada punto del conjunto, podemos hallar todos los vecinos más lejanos con una complejidad  $O(n^2)$ . El reto es, de nuevo, hallar todos los vecinos más lejanos con un algoritmo de complejidad menor que  $O(n^2)$ .

No es difícil demostrar que el vecino más lejano de cualquier punto de un conjunto  $S$  debe estar en la envolvente convexa de  $S$ . Esta observación geométrica nos permite mejorar, al menos en algunos casos, el algoritmo. En efecto, para buscar el vecino más lejano de cada punto basta considerar los puntos que estén en la envolvente convexa. Si el conjunto tiene  $h$  puntos en la envolvente convexa, una vez conocidos cuáles son, podremos hallar todos los vecinos más lejanos con una complejidad  $O(nh)$ . Si hay pocos puntos en la envolvente, esto puede suponer un gran ahorro. En todo caso queda por ver cómo hallar los puntos que están en la envolvente convexa. Para que la mejora mencionada sea tal, debemos hallar éstos con complejidad menor que  $O(n^2)$ . Afortunadamente esto es posible. Los algoritmos óptimos que lo hacen tienen complejidad  $O(n \log n)$ . Pero eso, aun siendo muy interesante, se sale del tema de hoy. Además, para una lección ya tenemos materia más que suficiente.

Mañana será otro día<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup> Como decía mi padre.

## Sobre el descubrimiento automático de diversas generalizaciones del Teorema de Steiner-Lehmus

**Rafael Losada,**  
IES de Pravia,

**Tomás Recio,**  
Universidad de Cantabria,

**José Luis Valcarce**  
IES Pontepedriña

rafaelll@educastur.princast.es

tomas.recio@unican.es

jvalcarce@edu.xunta.es

### Abstract

*The Theorem of Steiner-Lehmus states that if a triangle has two (internal) angle-bisectors with the same length, then the triangle must be isosceles. Here we will deal with our attempts to provide, through automatic discovery tools, a more general statement regarding internal and external bisectors. The case of three (either internal or external) bisectors is also described.*

### Resumen

*El teorema de Steiner-Lehmus establece que si un triángulo tiene dos bisectores (internos) de la misma longitud, entonces el triángulo es isósceles. Aquí intentaremos probar, mediante herramientas de descubrimiento automático, un resultado más general en relación con la longitud de los bisectores internos y externos. También describiremos el caso de tres bisectores (internos o externos).*

Dedicado al Prof. Eugenio Roanes Macías

### Introducción

Un vértice de un triángulo da lugar a cuatro ángulos, dos a dos opuestos y dos a dos suplementarios. Consideremos las dos bisectrices, mutuamente perpendiculares, de estos ángulos. Denominemos *bisector* al segmento determinado sobre cada bisectriz por el vértice y el punto de intersección de la misma con el lado opuesto a dicho vértice. Hay, pues, dos bisectores en cada vértice, bisectores que denomi-

naremos, respectivamente, *interno* y *externo*, según correspondan al ángulo del triángulo o a su suplementario.

Es bastante evidente que en un triángulo isósceles los bisectores correspondientes a los ángulos iguales han de ser de igual longitud. El Teorema de Steiner-Lehmus afirma que, recíprocamente, si se tiene tal igualdad de longitudes de los bisectores internos, el triángulo ha de ser isósceles. Se trata de un resultado de geometría elemental, obtenido a mediados del siglo XIX, pero que sigue, en la actualidad, despertando el interés de matemáticos de medio mundo, como puede leerse en [Be], donde se incluye un pequeño apunte histórico y algunas referencias sobre dicho Teorema. Otra referencia útil es la página web [S-L], donde se describen múltiples demostraciones (comentadas en muchos casos), con aportaciones de matemáticos de la talla de Coexter, Conway y otros, y un listado de publicaciones –hasta hace diez años, aproximadamente– sobre dicho resultado.

El Teorema de Steiner-Lehmus ha sido también objeto de estudio desde la perspectiva del *razonamiento automático* en geometría elemental. Se trata de un campo de investigación que busca desarrollar un procedimiento algorítmico universal para demostrar o descubrir resultados geométricos. Resulta curioso constatar el que uno de sus máximos exponentes, el profesor Wu Wen-Tsun, miembro de la Academia China de Ciencias, premio Herbrand en 1997 y premio Shaw en 2006, por sus trabajos sobre la mecanización de las matemáticas, haya publicado en 1985 un librito dedicado exclusivamente a la automatización de teoremas en torno a los triángulos con bisectores de igual longitud, ref. [WL]. Más recientemente, el mismo tema y enfoque aparece en un libro de Wang [W04] y en un artículo de Botana [B07].

A la vista de esta larga y rica historia, ¿qué pretendemos descubrir automáticamente sobre el teorema de Steiner-Lehmus? Se trata de encontrar, aplicando el mismo procedimiento de *descubrimiento automático* descrito en [R], [RV] y [DR], las condiciones que debe verificar un triángulo para que se verifique la igualdad de longitudes de dos y tres bisectores (asociados a vértices distintos), considerados estos con toda generalidad (esto es, tanto internos como externos).

Describiremos totalmente los triángulos con dos bisectores iguales (para vértices distintos), detallando la distinta casuística (interno=externo, externo=externo, etc.) y veremos que un triángulo con dos bisectores iguales (que no sean simultáneamente internos) no tiene porqué ser isósceles; es más, en el caso interno=externo no es nunca isósceles salvo en un pequeño número de posiciones cuyas coordenadas precisaremos. Este resultado puede deducirse de [W04] y [B07] sin mucha dificultad –usando, por ejemplo, la herramienta GeoGebra que

describiremos más abajo –aunque allí no se detalla. Es curioso comparar la facilidad del procedimiento mecánico frente a las referencias de [Be] al paulatino progreso hacia el descubrimiento de distintos ejemplos de triángulos con bisectores iguales.

Finalmente trataremos el caso –aparentemente nuevo, aunque esto es difícil de afirmar en geometría elemental– de triángulos con tres bisectores iguales (correspondientes a vértices distintos). Tras describir con precisión todos los casos posibles, llegamos a dos conclusiones sorprendentes: no hay triángulos con dos bisectores internos y uno externo de igual longitud y tampoco hay triángulos con tres bisectores externos de igual longitud finita.

## 1. Planteamiento

Consideremos un triángulo  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(x,y)$ . Construiremos el bisector (interno o externo) asociado a un vértice dado  $V$  mediante el siguiente método general:

- En cada una de las rectas que se intersecan en  $V$ , sobre las que descansan los lados del triángulo, tomamos un punto de forma que ambos puntos equidisten de  $V$ .
- Sean esos puntos  $P_1$ ,  $P_2$ .
- Calculamos el punto medio  $M$  del segmento  $P_1P_2$ .
- Entonces, la recta  $VM$  es una bisectriz y su intersección con el lado opuesto (o su prolongación) determina el bisector correspondiente.

Observemos que posicionando adecuadamente los puntos  $P_1$  y  $P_2$  sobre los lados del triángulo (o sus prolongaciones) podemos obtener, mediante este método, los bisectores que concurren en  $V$ .

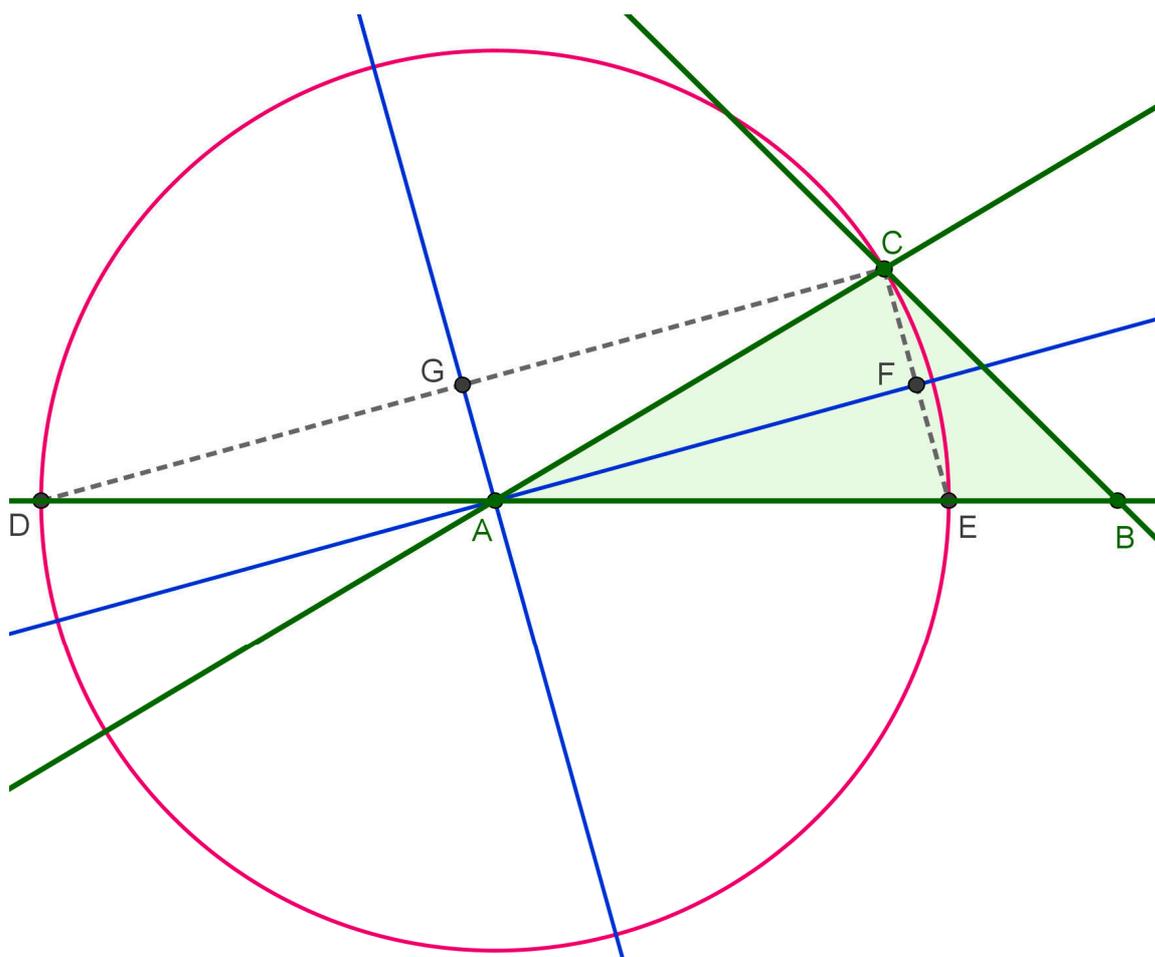


Figura 1

En la Figura 1 hemos aplicado el método descrito para obtener los dos bisectores de  $A$ , tomando  $P_1=C$  y  $P_2=E$  o  $P_2=D$ , siendo  $F$  el punto medio de  $CE$  y  $G$  el punto medio de  $CD$ . Las dos bisectrices para el vértice  $A$  son, por tanto,  $AF$  y  $AG$ . Finalmente, ya que nuestro interés se centra en la longitud de los segmentos bisectores desde  $A$  hasta el pie de las intersecciones de cada bisectriz con el lado opuesto, calculamos esos puntos de intersección entre las bisectrices y la recta  $BC$  que pasa por los otros dos vértices del triángulo.

Resumimos a continuación las ecuaciones resultantes para el triángulo  $ABC$ , donde  $A(0,0)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(x,y)$ :

### Bisectores para A

Sea un punto  $(p,q)$  a la misma distancia que  $C(x,y)$  de  $A$ , por lo que cumple

$$p^2 + q^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

Coloquemos este punto en el lado  $AB$ , es decir, hagamos

$$q = 0$$

Entonces, el punto medio entre  $(p,q)$  y  $C$  será

$$\left( \frac{x+p}{2}, \frac{y+q}{2} \right)$$

y la recta definida por  $A$  y este punto medio intersecará al lado opuesto  $BC$  en el punto  $(a,b)$ , verificándose

$$-a \frac{y+q}{2} + b \frac{x+p}{2} = 0$$

$$-ay + b(x-1) + y = 0$$

Por último, la distancia de  $(a,b)$  a  $A$  es:

$$a^2 + b^2$$

expresión que proporciona la longitud del bisector en  $A$  (ya sea interno o externo).

### Bisectores para B

Sea un punto  $(r,s)$  a la misma distancia que  $C(x,y)$  de  $B$ . Se cumple que

$$(r-1)^2 + s^2 - ((x-1)^2 + y^2) = 0$$

Coloquemos este punto en el lado  $AB$ , es decir, hagamos

$$s = 0$$

Entonces, el punto medio entre  $(r,s)$  y  $C$  será

$$\left( \frac{x+r}{2}, \frac{y+s}{2} \right),$$

y la recta definida por  $B$  y este punto medio intersecará al lado opuesto  $AC$  en el punto  $(m,n)$ , verificándose

$$-m \frac{y+s}{2} + n \left( \frac{x+r}{2} - 1 \right) + \frac{y+s}{2} = 0$$

$$-my + nx = 0$$

Por último, la distancia de  $(m,n)$  a  $B$  es:

$$(m-1)^2 + n^2$$

expresión que proporciona la longitud del bisector en  $B$  (ya sea interno o externo).

### Bisectores para $C$

Sea un punto  $(u,v)$  a la misma distancia que  $A$  de  $C$ . Se cumple que

$$(u-x)^2 + (v-y)^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

Coloquemos este punto en el lado  $BC$ , es decir, hagamos

$$-uy + v(x-1) + y = 0$$

Entonces, el punto medio entre  $(u,v)$  y  $A$  será

$$\left( \frac{u}{2}, \frac{v}{2} \right)$$

y la recta definida por  $C$  y este punto medio intersecará al lado opuesto  $AB$  en el punto  $(t,z)$ , verificándose

$$-(t-x) \left( \frac{v}{2} - y \right) + (z-y) \left( \frac{u}{2} - x \right) = 0$$

$$z = 0$$

Por último, la distancia de  $(t,z)$  a  $C$  es:

$$(t-x)^2 + (z-y)^2$$

expresión que proporciona la longitud del bisector en C (ya sea interno o externo).

Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones que determinan las longitudes de los bisectores (respectivamente:  $a^2 + b^2$ ,  $(m-1)^2 + n^2$ ,  $(t-x)^2 + (z-y)^2$  está constituido por los siguientes tres bloques:

$$p^2 + q^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

$$q = 0$$

$$-a \frac{y+q}{2} + b \frac{x+p}{2} = 0$$

$$-ay + b(x-1) + y = 0$$

$$(r-1)^2 + s^2 - ((x-1)^2 + y^2) = 0$$

$$s = 0$$

$$-m \frac{y+s}{2} + n \left( \frac{x+r}{2} - 1 \right) + \frac{y+s}{2} = 0$$

$$-my + nx = 0$$

$$(u-x)^2 + (v-y)^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

$$-uy + v(x-1) + y = 0$$

$$-(t-x) \left( \frac{v}{2} - y \right) + (z-y) \left( \frac{u}{2} - x \right) = 0$$

$$z = 0$$

Este conjunto de ecuaciones puede considerarse como la colección de Hipótesis para las expresiones obtenidas relativas a la longitud de los bisectores.

Debemos tener en cuenta que cualquiera que sea el bisector que pudiéramos elegir en cada vértice (es decir, ya pensemos en un bisector interno o externo) deberá cumplir uno de estos bloques de ecuaciones. Y a la inversa, estas ecuaciones no permiten distinguir entre bisectores internos y externos.

## 2. Triángulos con dos bisectores iguales

Es fácil demostrar (por otros métodos) que dos bisectores internos tienen la misma longitud si y sólo si el triángulo es isósceles (y la igualdad de longitud entre dos lados es equivalente a la igualdad de los dos bisectores que se apoyan en esos lados iguales: teorema de Steiner-Lehmus). Además, es fácil ver que en este caso isósceles los bisectores externos (para los mismos vértices que tienen bisectores internos iguales) también coinciden en longitud (aunque no podamos afirmar que sea el único caso en que este hecho ocurre).

De este modo, el lugar geométrico del vértice  $C$  en el que dos bisectores internos son iguales es la unión de tres curvas:

- la recta  $2x - 1 = 0$  (la mediatriz del lado  $AB$ ),
- la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2x = 0$  (con centro en  $B$  y radio 1, por lo que  $BC$  y  $AC$  tienen la misma longitud) y
- la circunferencia  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  (con centro  $A$  y radio 1, por lo que  $AB$  y  $AC$  son iguales).

El punto  $C$  yace en una de estas tres curvas si y sólo si el triángulo es isósceles.

Además, esto implica que los tres bisectores internos coinciden en longitud precisamente cuando estas tres curvas coinciden, lo que sucede en las soluciones del sistema:

$$2x - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

es decir, en los puntos:  $\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

A continuación, consideremos la tesis: Hay dos bisectores (internos o externos, aleatoriamente), asociados a diferentes vértices, que tienen la misma longitud. ¿Qué condición deberá cumplir el triángulo para verificar esta tesis?

### 2.1 Bisectores en $A$ y $B$

Comencemos considerando los segmentos bisectores asociados a los vértices  $A$  y  $B$ . En este caso, consideraremos como tesis la igualdad:

$$a^2 + b^2 - ((m-1)^2 + n^2) = 0$$

que es en cierto modo más fuerte (ya que establece la igualdad de las longitudes para todas las interpretaciones de  $(a, b)$  y  $(m, n)$ , esto es, para todos los pares de bisectores en  $A$  y  $B$ ).

A continuación, seguimos el método de descubrimiento expuesto en [R], [RV] o [DR]. Es fácil comprobar que las dos únicas variables independientes (geométricamente significativas para la construcción) son  $\{x, y\}$ . Después añadimos la tesis a la colección de hipótesis y eliminamos en ese sistema  $(H+T)$  todas las variables excepto  $\{x, y\}$ .

### Hipótesis

$$p^2 + q^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

$$q = 0$$

$$-a \frac{y+q}{2} + b \frac{x+p}{2} = 0$$

$$-ay + b(x-1) + y = 0$$

$$(r-1)^2 + s^2 - ((x-1)^2 + y^2) = 0$$

$$s = 0$$

$$-m \frac{y+s}{2} + n \left( \frac{x+r}{2} - 1 \right) + \frac{y+s}{2} = 0$$

$$-my + nx = 0$$

### Tesis

$$a^2 + b^2 - ((m-1)^2 + n^2) = 0$$

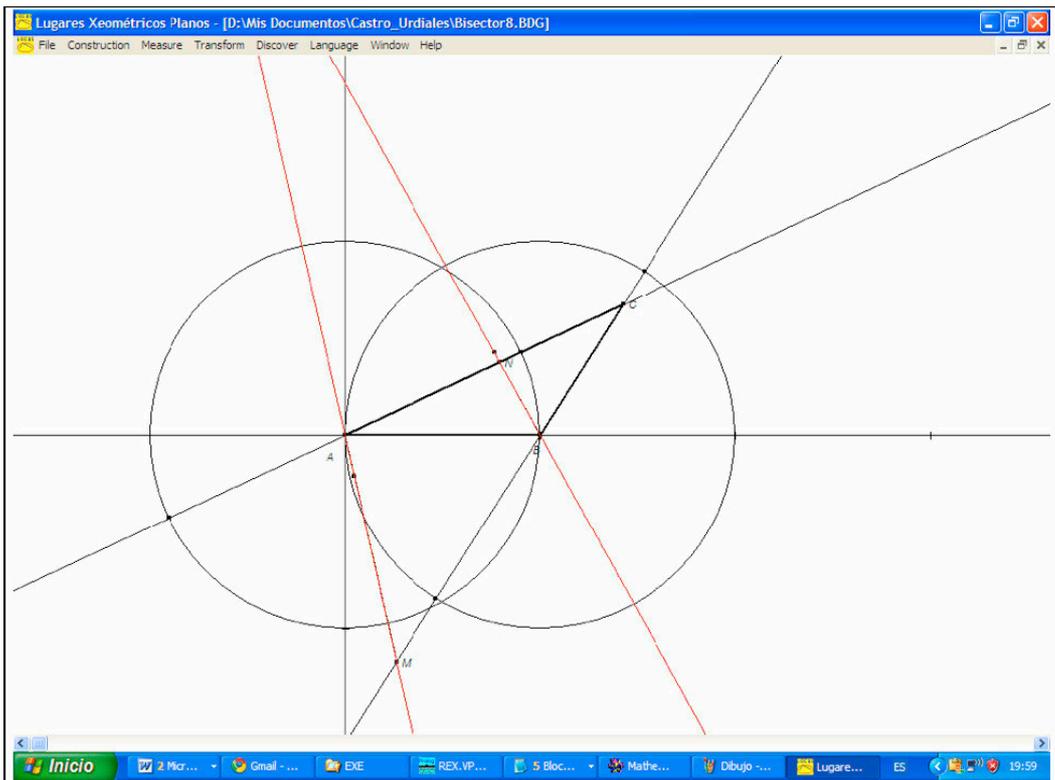
Obtenemos así (después de pocos segundos de cálculo con Maple en un portátil), el siguiente polinomio  $P$ , que se descompone como producto de tres factores.

- $14x^2y^4 + y^2 + 246y^2x^6 + 76x^8 - y^6 + 8x^{10} + 9y^{10} - 164y^2x^5 + 12y^4x - 10x^2y^2 - 4x^4 - 44y^8x - 136y^4x^3 + 278y^4x^4 - 64x^7 - 164x^7y^2 + 122y^6x^2 - 6y^4 + 8x^5 - 36y^6x + 20y^2x^3 + 84y^4x^6 + 86x^4y^6 + 44x^2y^8 + 16x^6 + 41y^2x^8 + 31y^2x^4 - 40x^9 - 252y^4x^5 - 172y^6x^3 + 14y^8$
- $y^3$

- $2x - 1$

Observemos que este resultado (con algunas simplificaciones geoméricamente no significativas) se obtiene automáticamente (siguiendo el algoritmo mencionado) con algún software como *Lugares* o *GDI* (ambos de Botana-Valcarce, ver [B07]). Así, podemos usar el menú “Discover” de *GDI*, trazar la construcción correspondiente y luego preguntar por el lugar geométrico de  $C$  tal que (como en la siguiente imagen de la Figura 2) coincidan las longitudes de los bisectores en  $A$  y  $B$ .

Ahora bien, el método de descubrimiento automático señala que el producto de los tres factores de  $P$  proporciona la clausura de Zariski del conjunto de posiciones de  $C$  para las que existe un par de bisectores internos o externos de  $A$  y  $B$  (mezclando todas las posibilidades: externo de  $A$  con externo de  $B$ , externo de  $A$  con interno de  $B$ , etc.) de la misma longitud. En otras palabras,  $P=0$  proporciona la descripción más concisa (en términos de ecuaciones) de las condiciones necesarias para establecer la tesis débil (y, por tanto, también proporciona condiciones necesarias para la más fuerte).



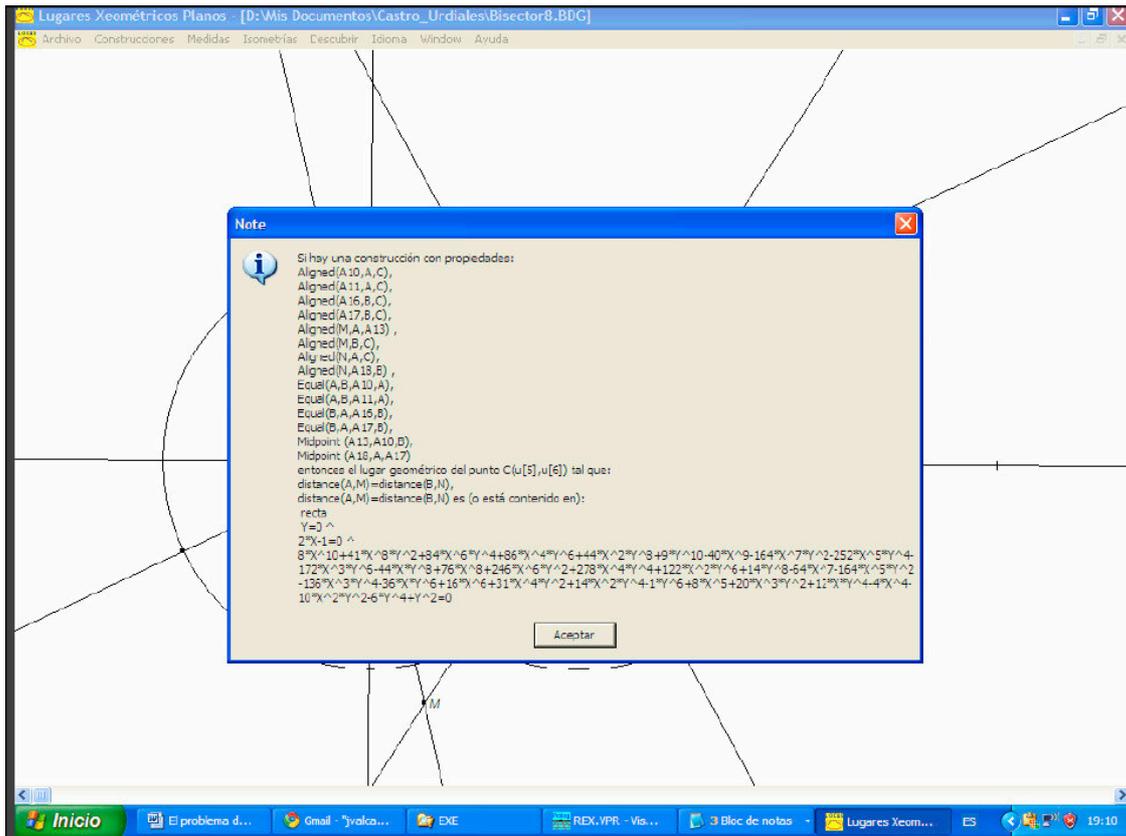
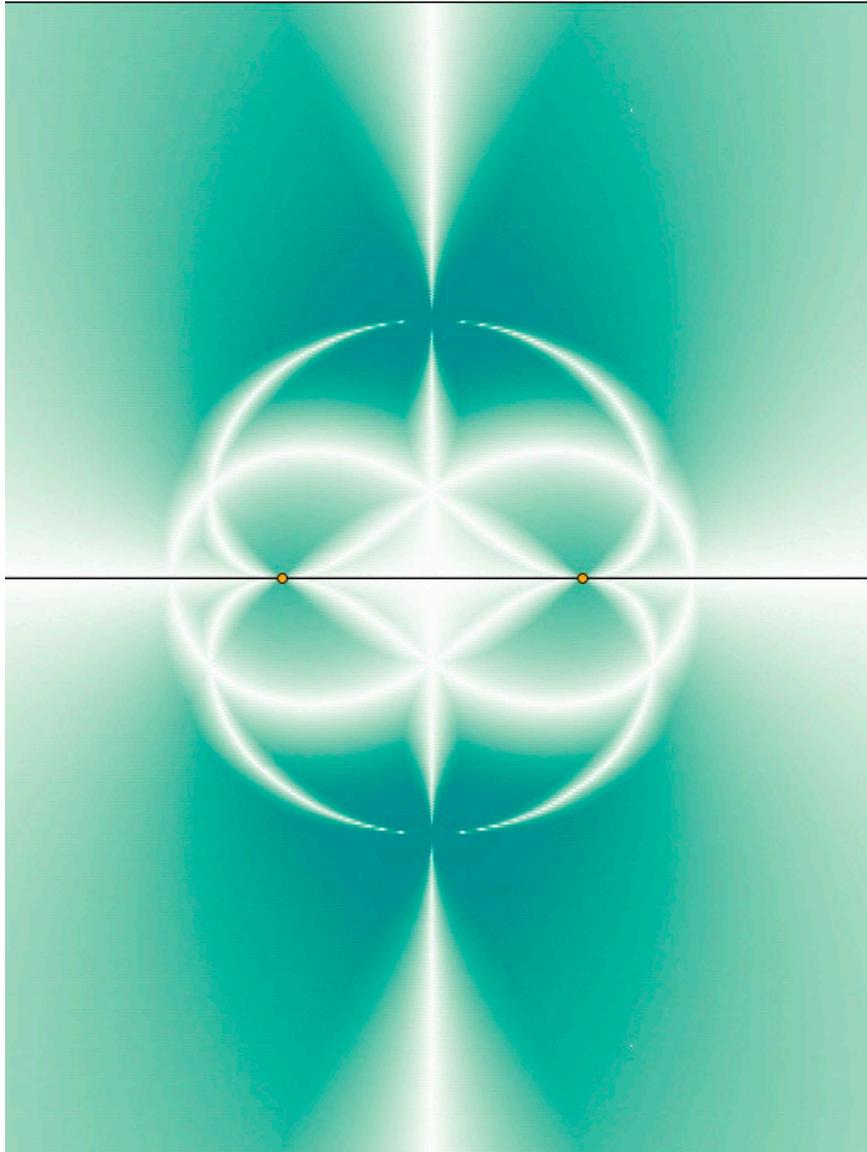


Figura 2

Como la ecuación  $P=0$  correspondiente a este lugar geométrico es la curva (reducible), mostrada en la siguiente imagen de la Figura 3, se entiende que sólo una variable ( $x$  o  $y$ ) permanece independiente si añadimos  $P$  al conjunto de hipótesis. Elijamos  $x$  (obtendríamos un desarrollo similar si nuestra elección hubiera sido  $y$ ).

Ahora, siguiendo ese método de descubrimiento automático, añadiríamos  $P$  al conjunto de hipótesis y trataríamos de probar que  $(H+P)$  es un conjunto de condiciones suficientes para  $T$  (salvo casos degenerados). El resultado del cálculo requerido (la saturación  $S$  de  $(H+P)$  por  $T$ ) es demasiado extenso para detallarlo aquí. Finalmente, debemos eliminar la variable  $y$  en  $S$  (ya que hemos escogido  $x$  como la variable independiente para  $H+P$ ). El ideal de eliminación obtenido se reduce a  $(0)$ . Esto significa, de acuerdo con la teoría de descubrimiento automático, que no hay manera de convertir  $P=0$  en condición suficiente para establecer la

tesis, incluso aunque se añadiese, a  $P=0$  y a la hipótesis dada, una colección de inecuaciones en la variable  $x$ . Así pues, no podemos encontrar de este modo un teorema acerca de la igualdad de las longitudes de todos los tipos de bisectores en  $A$  y  $B$ .



*Figura 3*

Esta conclusión, a partir de la teoría general, puede ser, en este caso particular, explicada en términos más “ad hoc”. De hecho, significa que para la mayoría de las posiciones de  $C$  en  $P=0$  (todas salvo casos degenerados) se puede encontrar una pareja de bisectores de  $A$  y  $B$  que no tengan igual longitud, pero también una pareja con igual longitud. Es decir, para algunos valores  $(a,b)$  y  $(m,n)$  correspondientes a una posición dada de  $C$ , las longitudes  $a^2+b^2$  y  $(m-1)^2+n^2$  serán diferentes, mientras que para otros valores, también correspondientes a la misma posición de  $C$ , serán iguales. Esto depende de las diferentes elecciones de  $(a,b)$  y  $(m,n)$  (bisectores internos y externos), pero no se pueden distinguir tales elecciones en términos algebraicos sin realizar una descomposición primaria (computacionalmente demasiado costosa) del ideal hipótesis.

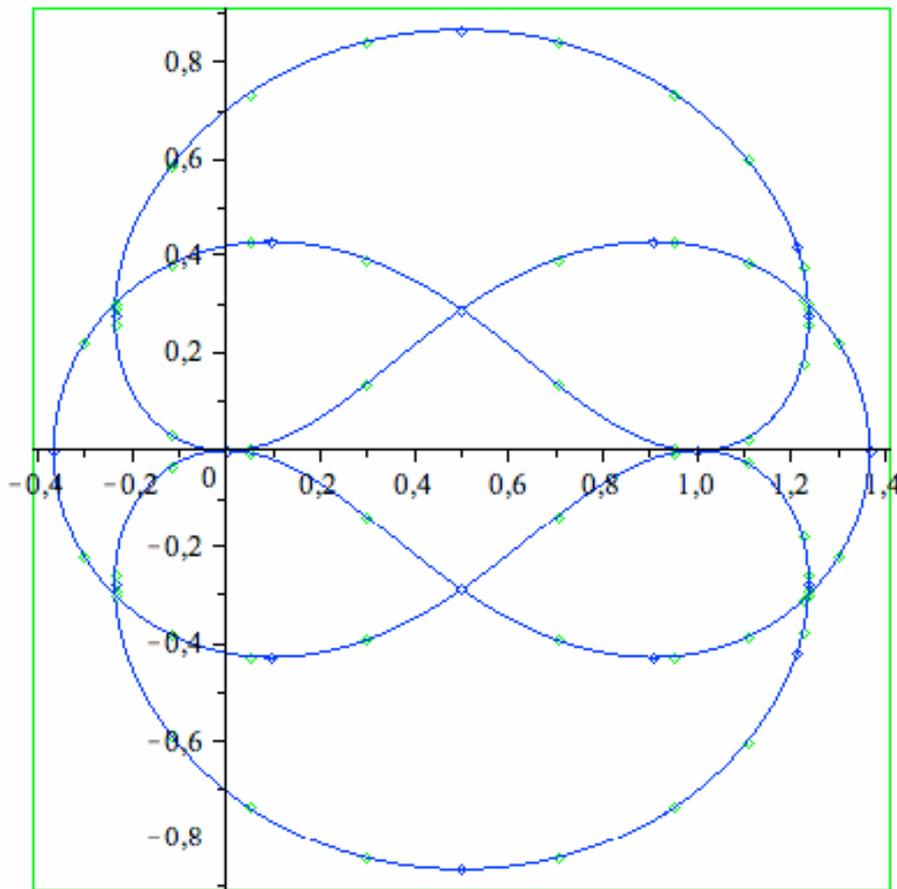
Pero este fracaso -en demostrar la tesis fuerte- puede transformarse en éxito para la tesis débil (sobre la igualdad de alguna pareja de bisectores). De hecho, el anterior razonamiento muestra que la curva  $P=0$  proporciona las condiciones necesarias para establecer que “existe una pareja de bisectores de  $A$  y  $B$  de igual longitud”. Y, en virtud de cierto resultado teórico (Proposición 2 de [DR]), también proporciona las condiciones suficientes (excepto para algunos casos degenerados, demasiado difíciles de calcular en este caso) para establecer que “existe un pareja de bisectores de  $A$  y  $B$  de igual longitud”, lo cual es bastante satisfactorio si no se requiere mayor precisión sobre el tipo de bisectores que tienen la misma longitud. Además, por motivos geométricos, las condiciones necesarias para una declaración más precisa acerca del tipo de bisectores de igual longitud deben ser una unión de algunos de los tres factores de  $P=0$  (ya que  $P=0$  no puede dividirse en más partes algebraicas).

La factorización de  $P$  nos permite enunciar nuestro teorema recién descubierto como sigue:

Si  $y=0$  (triángulo degenerado) o  $x = \frac{1}{2}$  (triángulo isósceles, con  $AC=BC$ ) o

$C=(x,y)$  descansa en la curva que se muestra a continuación, entonces (excepto para el caso  $y=0$  más tal vez un número finito de posiciones degeneradas de esa curva) existe una pareja de bisectores de  $A$  y  $B$  de igual longitud.

Como corolario podemos decir que, dado que el caso isósceles atañe al caso de los bisectores internos iguales, y el eje  $x$  es un caso degenerado, la posibilidad que resta (la curva de arriba) trata con la igualdad de los bisectores interno/externo o externo/externo.

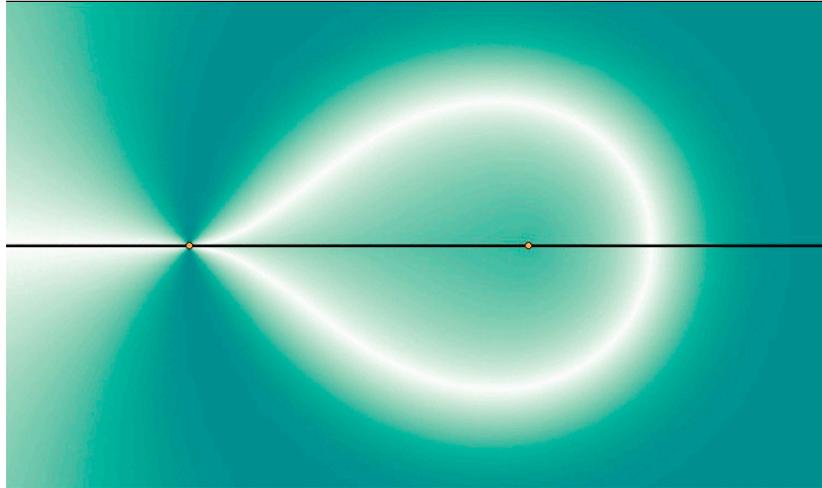


*Figura 4*

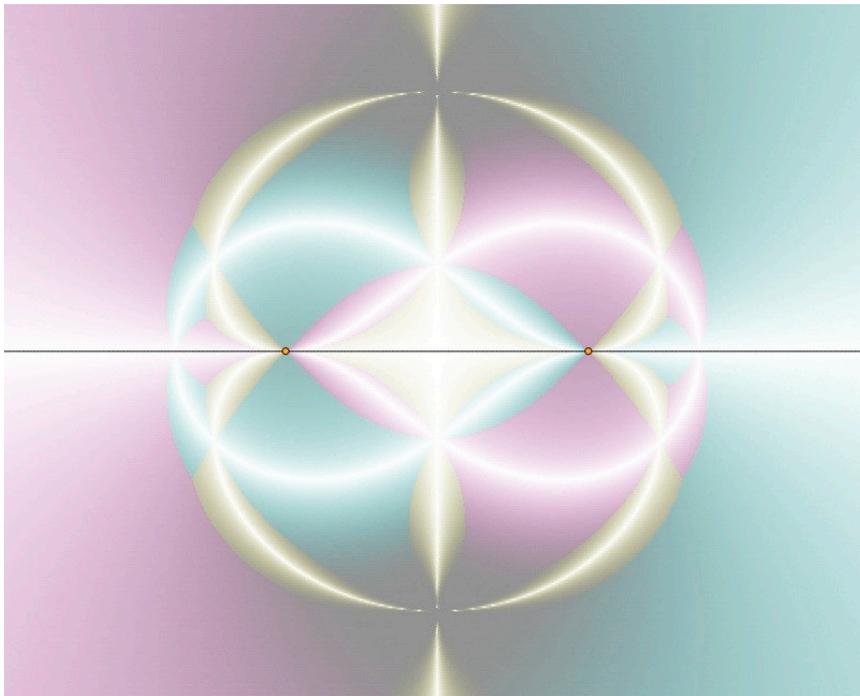
Usando la experimentación basada en el software de geometría dinámica GeoGebra<sup>1</sup> y un programa hecho a propósito por R. Losada, que barre todo el plano y resalta los puntos que verifican alguna relación numérica dada, podemos ser más precisos y mostrar que el caso de la igualdad interno/externo está contenido en dos “lágrimas” (ver la Figura 5 para uno de ellos, correspondiente a la igualdad de longitudes para el bisector externo de  $B$  y el interno de  $A$ ) incluidas en la curva de la Figura 6, mientras que el caso de la igualdad externo/externo ocurre en los restantes puntos de esta curva. Puede verse la maravillosa imagen de R. Losada, asignando colores diferentes a los diversos casos de igualdad (un color dado es asignado a un punto que está más próximo a la verificación de una de las igualda-

<sup>1</sup> [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) , <http://geogebra.es>

des de longitud: por ejemplo, el amarillo corresponde a aquellos puntos que están más próximos a la igualdad del par de bisectores externo/externo, como aparece en la Figura 6).



*Figura 5*



*Figura 6*

Para finalizar, podemos decir que ahora estamos en condiciones de “demostrar” la tesis más fuerte sobre la posición de  $C$  para la igualdad de longitudes de los cuatro bisectores con vértices  $A$  y  $B$ , considerando los puntos de la intersección común de todas las partes de esta curva compleja que corresponden a la igualdad de alguna clase de pares de bisectores. Vemos que, sin tener en cuenta las posiciones degeneradas de  $C$  en el eje  $X$ , los únicos puntos que verifican la igualdad de todas las longitudes de los bisectores de  $A$  y  $B$  se obtienen resolviendo el sistema:

- $2x - 1 = 0$
- $14x^2y^4 + y^2 + 246y^2x^6 + 76x^8 - y^6 + 8x^{10} + 9y^{10} - 164y^2x^5 + 12y^4x - 10x^2y^2 - 4x^4 - 44y^8x - 136y^4x^3 + 278y^4x^4 - 64x^7 - 164x^7y^2 + 122y^6x^2 - 6y^4 + 8x^5 - 36y^6x + 20y^2x^3 + 84y^4x^6 + 86x^4y^6 + 44x^2y^8 + 16x^6 + 41y^2x^8 + 31y^2x^4 - 40x^9 - 252y^4x^5 - 172y^6x^3 + 14y^8 = 0$

y eligiendo, entre sus soluciones (cuatro reales) aquellas que están en la intersección de ambas “lágrimas” (dado que estas contienen los puntos en los que algún bisector interno tiene igual longitud que uno externo y, por tanto, en el punto de intersección todas las longitudes son iguales). De hecho, las otras dos soluciones corresponden a puntos en los que las longitudes de los bisectores internos coinciden y también las de los bisectores externos, pero no son todas iguales entre sí – como es fácil de verificar, porque el triángulo es equilátero en esos puntos. Por tanto, las soluciones verdaderas son los puntos:

$$x = \frac{1}{2}, y = \pm \frac{1}{2} \text{RootOf}(-1 + 3Z^2) \quad \text{aprox. } (0.5, \pm 0.2886751346)$$

en los que los cuatro bisectores tienen igual longitud.

## 2.2 Bisectores en A y C

Ahora vamos a tener en cuenta los bisectores con vértices  $A$  y  $C$ , esto es, consideramos como tesis la siguiente ecuación:

$$(a^2 + b^2) - ((t - x)^2 + (z - y)^2) = 0$$

que establece la igualdad de longitudes para todas las interpretaciones de  $(a, b)$  y  $(t, z)$ , o lo que es lo mismo, para todos los pares de bisectores desde  $A$  y  $C$ .

Hipótesis:  $p^2 + q^2 - (x^2 + y^2) = 0$

$$q = 0$$

$$-a \frac{y+q}{2} + b \frac{x+p}{2} = 0$$

$$-ay + b(x-1) + y = 0$$

$$(u-x)^2 + (v-y)^2 - (x^2 + y^2) = 0$$

$$-uy + v(x-1) + y = 0$$

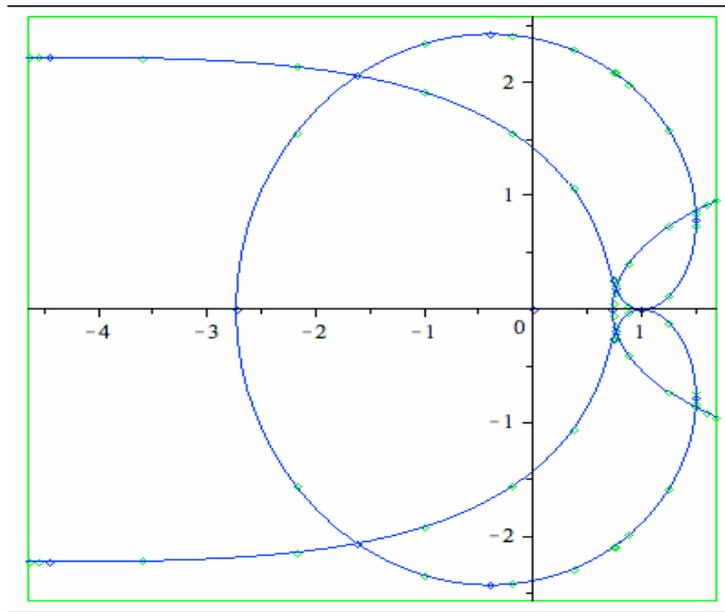
$$-(t-x) \left( \frac{v}{2} - y \right) + (z-y) \left( \frac{u}{2} - x \right) = 0$$

$$z = 0$$

Tesis:  $(a^2 + b^2) - ((t-x)^2 + (z-y)^2) = 0$

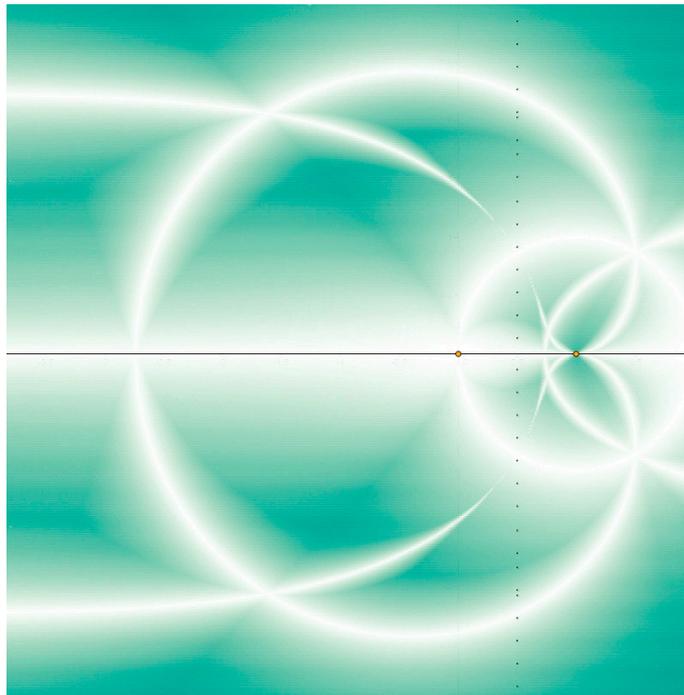
El proceso descrito para el caso de  $A, B$ , se ejecuta análogamente en el caso  $A, C$ , lo que proporciona un nuevo polinomio  $Q$ , compuesto de cuatro factores.

- $y^3$  (caso degenerado)
- $x^2 + y^2$  (caso degenerado)
- $x^2 + y^2 - 2x$  (circunferencia con centro  $B$  y radio 1, por lo que  $C$  está en la circunferencia cuando longitud  $AB$ =longitud  $BC$ )
- $x^8y^2 + 4x^6y^4 + 6x^4y^6 + 4x^2y^8 + y^{10} - 4x^8 - 18x^6y^2 - 30x^4y^4 - 22x^2y^6 - 6y^8 + 8x^7 + 28x^5y^2 + 32x^3y^4 + 12xy^6 + 16x^6 + 31x^4y^2 + 14x^2y^4 - y^6 - 64x^5 - 100x^3y^2 - 36xy^4 + 76x^4 + 94x^2y^2 + 14y^4 - 40x^3 - 44xy^2 + 8x^2 + 9y^2$  (la curva mostrada en la Figura 7)



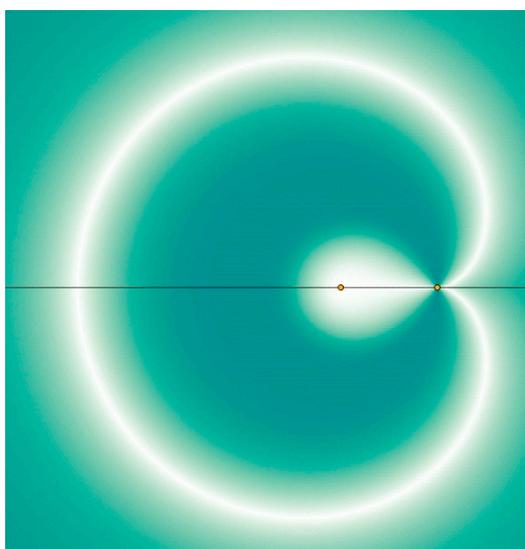
*Figura 7*

En la Figura 8 mostramos la imagen de la unión de las curvas definidas por  $Q=0$ .

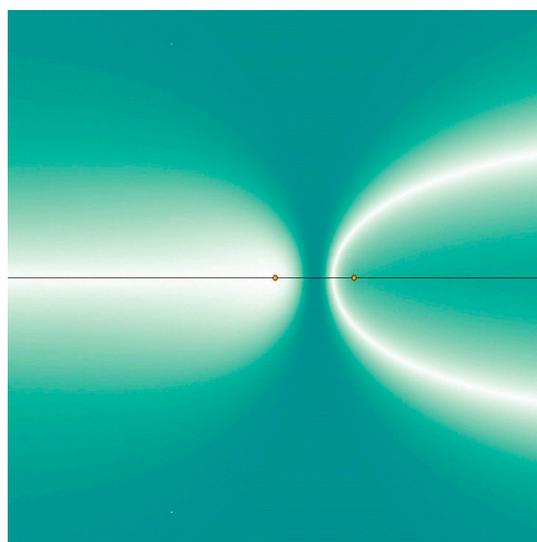


*Figura 8*

Como antes, podemos afirmar que si el punto  $C$  está en este lugar entonces hay dos bisectores de  $A$  y  $C$  que tienen igual longitud. El caso en el que ambos bisectores son internos corresponde a la circunferencia  $x^2 + y^2 - 2x$ , por lo que la curva de grado diez contiene las posiciones de  $C$  tales que algún par de bisectores interno/externo, externo/interno o externo/externo de  $A$  y  $C$  tienen igual longitud. Experimentalmente (de nuevo, gracias a R. Losada) podemos determinar que la curva de la Figura 9 corresponde a la igualdad del bisector interno de  $C$  y el bisector externo de  $A$ , mientras que la de la Figura 10 corresponde al caso en que el bisector externo de  $C$  iguala al bisector interno de  $A$ , y la “parábola” restante que va a menos infinito en el eje  $X$  está asociada al caso externo de  $C$  / externo de  $A$ .



*Figura 9*



*Figura 10*

El caso de igualdad de longitudes para todos los diferentes pares de bisectores tratados en este apartado puede ser resuelto como en el anterior, proporcionando

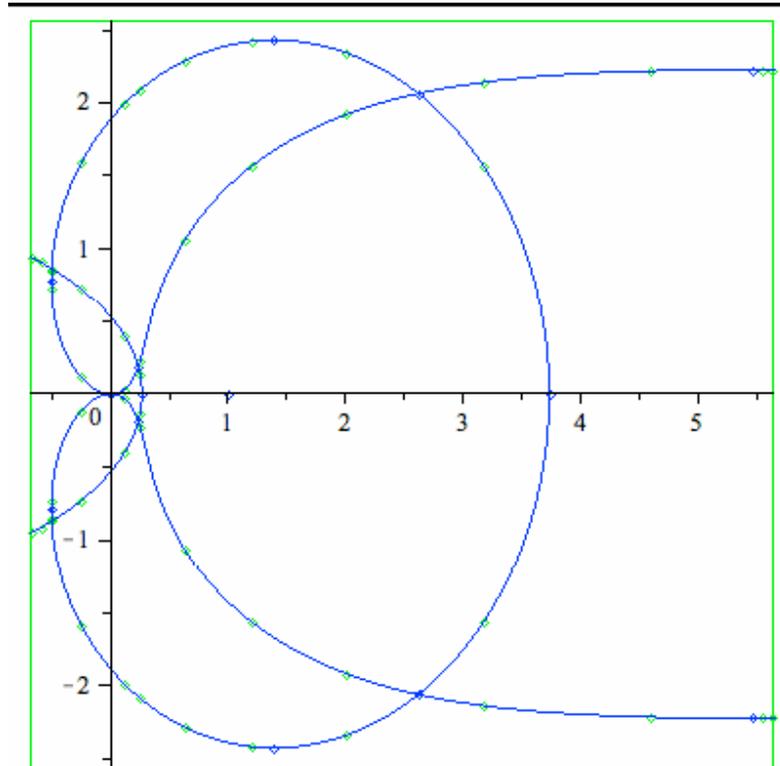
los puntos  $x = \frac{3}{2}, y = \pm \frac{1}{2} \text{RootOf}(-3 + Z^2)$ .

### 2.3 Bisectores en $B$ y $C$

La última situación, que considera los bisectores de vértices  $C$  y  $B$ , es tratada similarmente, proporcionando la curva que es la unión de las definidas por los polinomios

- $x^8y^2+4x^6y^4+6x^4y^6+4x^2y^8+y^{10}-8x^7y^2-24x^5y^4-24x^3y^6-8xy^8-4x^8+10x^6y^2+30x^4y^4+14x^2y^6-2y^8+24x^7+24x^5y^2+8x^3y^4+8xy^6-40x^6-29x^4y^2-10x^2y^4-5y^6+24x^5+8xy^4-4x^4+18x^2y^2-2y^4-8xy^2+y^2$
- $x^2 + y^2 - 1$  (circunferencia con centro en  $A$  y radio 1, por lo que  $C$  está en esta circunferencia cuando longitud  $AC$ =longitud  $AB$ )
- $y^3$  (un caso degenerado)

En la Figura 11 aparece la imagen de la curva de grado 10.



*Figura 11*

Al considerar la igualdad de todas las longitudes de los diferentes pares de bisectores involucrados en este caso y tratarlo como se indicó anteriormente, obtenemos los puntos:

$$x = -\frac{1}{2}, y = \pm \frac{1}{2} \text{RootOf}(-3 + Z^2).$$

### 3. Tres bisectores iguales

A continuación, consideraremos la tesis: hay tres bisectores (internos o externos, cualesquiera) que tienen igual longitud. ¿Cuál es la condición que tiene que verificar el triángulo para que la tesis se verifique? De nuevo, interpretamos esta situación considerando el siguiente sistema de dos tesis:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 - ((m-1)^2 + n^2) &= 0 \\ (a^2 + b^2) - ((t-x)^2 + (z-y)^2) &= 0 \end{aligned}$$

que es más fuerte que la tesis requerida, ya que aquí sus soluciones contemplan el que todas las interpretaciones de  $(a,b)$ ,  $(m, n)$ ,  $(t, z)$  (es decir, para todos los posibles pares de bisectores de cada vértice) conduzcan a la igualdad de las longitudes de los bisectores de  $A, B$  y de  $A, C$ , y, por tanto, de  $A, B$  y  $C$ .

En todo caso, podemos operar como antes, siguiendo el procedimiento general, añadiendo las dos tesis a la hipótesis, lo que constituirá la colección completa de ecuaciones.

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 - (x^2 + y^2) &= 0 \\ q &= 0 \\ -a \frac{y+q}{2} + b \frac{x+p}{2} &= 0 \\ -ay + b(x-1) + y &= 0 \\ \\ (r-1)^2 + s^2 - ((x-1)^2 + y^2) &= 0 \\ s &= 0 \\ -m \frac{y+s}{2} + n \left( \frac{x+r}{2} - 1 \right) + \frac{y+s}{2} &= 0 \\ -my + nx &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(u-x)^2 + (v-y)^2 - (x^2 + y^2) &= 0 \\
-uy + v(x-1) + y &= 0 \\
-(t-x)\left(\frac{v}{2} - y\right) + (z-y)\left(\frac{u}{2} - x\right) &= 0 \\
z &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a^2 + b^2 - ((m-1)^2 + n^2) &= 0 \\
(a^2 + b^2) - ((t-x)^2 + (z-y)^2) &= 0
\end{aligned}$$

Tras eliminar todas las variables excepto  $\{x,y\}$ , obtenemos el siguiente ideal generado por varios polinomios (presentados aquí como el producto de sus factores irreducibles):

- $y^3(2x-1)(136x^2y^4+115021x^2y^2-23136x^2+23136x-115021xy^2-136xy^4-21504 + 95149y^2 + 116789y^4)$ ,
- $y^3(2x-1)(17x^2-17x-2+19y^2)(x^2-x+1+y^2)$ ,
- $-y^3(2x-1)(103155x^2y^2-20960x^2-103155xy^2+20960x+85459y^2-136y^6-19328+104787y^4)$ ,
- $y^3(377084y^2x^4-17856-61088x^4-148192x^2-381436xy^4+87104x-412545xy^2 + 80325y^2 + 544y^8+96005y^4-754168x^3y^2+122176x^3-2856y^6+789629x^2y^2+381436x^2y^4)$

El conjunto de soluciones de este sistema de polinomios de dos variables es el eje  $X$  más un número finito de puntos reales y complejos. Ahora podemos continuar con su interpretación, utilizando el método de arriba, como condiciones necesarias para la igualdad de algunos tripletes de longitudes de bisectores de  $A$ ,  $B$  y  $C$  (pero la clase de los bisectores involucrados puede ser diferente con cada triplete), etc. Siendo más precisos, obtenemos soluciones del siguiente tipo:

- $x = \frac{1}{2}, y = \pm \frac{1}{2} \text{RootOf}(-3 + Z^2)$  (aprox.  $x = 0.5, y = \pm 0.8660254040$ )

El triángulo es equilátero y verifica la igualdad de longitudes de los bisectores internos de  $A$ ,  $B$  y  $C$  (y, en algún sentido, de los bisectores externos, ya que todos ellos tienen longitud infinita).

- $x = \frac{2}{17} - \frac{2}{17} \text{RootOf}(4Z^4 + 349Z^2 - 64)^2, \pm \text{RootOf}(4Z^4 + 349Z^2 - 64)$

(aprox.  $x = 0.09611796796, y = \pm 0.4277818044$ )

Estos puntos corresponden a la igualdad de longitudes de los bisectores externos de  $A$  y  $C$  y el bisector interno de  $B$ .

- $x = \frac{15}{17} + \frac{2}{17} \text{RootOf}(4Z^4 + 349Z^2 - 64)^2, y = \pm \text{RootOf}(4Z^4 + 349Z^2 - 64)$

(aprox.  $x = 0.09038820320, y = \pm 0.4277818044$ )

Estos puntos corresponden a la igualdad de longitudes de los bisectores externos de  $B$  y  $C$  y el bisector interno de  $A$ .

- $x = \frac{1}{2}, y = \pm \text{RootOf}(4Z^4 - 19Z^2 - 4)$

(apr.  $x = 0.5, y = \pm 2.225295714$ )

Estos puntos corresponden a la igualdad de longitudes de los bisectores externos de  $A$  y  $B$  y el bisector interno de  $C$ .

Obsérvese que podemos obtener estos mismos resultados mediante la intersección simultánea de los tres lugares geométricos encontrados en las secciones precedentes. Finalmente, permítasenos señalar que, a la vista de estas soluciones, no hay triángulos con dos bisectores internos y uno externo (para vértices diferentes) de igual longitud y tampoco hay triángulos en los que los tres bisectores externos tienen longitudes iguales (excepto para el caso de longitud infinita).

## Referencias

[Be] F. Bellot : *Triángulos Especiales* (I). Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Enero-Febrero, 2005.

[B07] F. Botana: *Bringing more intelligence to dynamic geometry by using symbolic computation*, en *Symbolic Computation and Education*. Editado por Shangzhi Li, Dongming Wang y Jing-Zhong Zhang. World Scientific, pp. 136-150, 2007.

[DR] G. Dalzotto, T. Recio: *On protocols for the automated discovery of theorems in elementary geometry*. J. Automat. Reason. (pendiente de aparecer).

[R] T. Recio: *Cálculo simbólico y geométrico*, Editorial Síntesis. Madrid. 1998.

[RV] T. Recio, M. P. Vélez: *Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry*, J. Automat. Reason. 23: 63--82 (1999).

[S-L] <http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/steiner-lehmus>

[W04] D. Wang: *Elimination practice: software tools and applications*, Imperial College Press, Londres, 2004

[WL] W.-t. Wu, X.-L. Lü: *Triangles with equal bisectors*. People's Education Press, Pekin, (1985) [en chino].

# Importancia de la Aritmética Comercial a lo largo de la Historia

**Concepción Romo Santos**

Departamento de Álgebra. Universidad Complutense

romosan@mat.ucm.es

## **Abstract**

*In this paper we deal with some treatises on practical mathematics illustrating chief human and intellectual achievements by mathematics of all times.*

Tengo la satisfacción de dedicar este trabajo al profesor Eugenio Roanes Macías con ocasión de su jubilación académica, como homenaje a su persona y en agradecimiento por su buen hacer, su calidad humana y sobre todo, por su enorme entrega a la docencia.

## **Introducción**

En este recorrido por la matemática comercial expondremos las aportaciones de Luca Paccioli en su obra *Summa de Aritmética* (Venecia, 1494) con su sistema de contabilidad por partida doble, o las de Robert Recorde en su obra “Grounde of Artes” (1541), una aritmética popular que incluye el cálculo tanto por medio del ábaco como del algoritmo, junto con algunas aplicaciones comerciales, o las de Juan Andrés y Benito Bails, este último fue el introductor en España del Cálculo Infinitesimal y de la Geometría Analítica. Observaremos, por último, el absoluto practicismo matemático de los trabajos de Francois Callet, José García Caballero, Diego Navarro y Miguel Jerónimo de Santa Cruz, cuya obra “Aritmética especu-

lativa y práctica” sirvió de libro de texto en la Academia de Matemáticas de Madrid, fundada por Felipe II.

Comenzaremos este trabajo estudiando los fundamentos de la aritmética comercial y a continuación analizaremos las aportaciones de los principales autores de esta disciplina.

## **1 Los Fundamentos de la Aritmética Comercial**

Aritmética para los griegos significaba teoría de los números y no técnica de cálculo, por lo que tenía más que ver con la filosofía, y especialmente con la lógica, que con las matemáticas. No olvidemos la fuerte impronta pitagórica y platónica. En especial, fue especialmente honda la influencia ejercida por el pensamiento neoplatónico de la época alejandrina en el posterior pensamiento occidental.

Los autores cuyos trabajos iban a convertirse en los referentes indiscutibles de los matemáticos medievales fueron: Nicómaco de Gerasa y Boecio. El primero fue un pitagórico que vivió cerca de Jerusalén hacia el año 100. Escribió una obra titulada “Introductio Arithmeticae”. Su trabajo se centró en el estudio de las propiedades más elementales de los números.

Boecio (480-520) fue un patricio romano, que tuvo un activo protagonismo político y murió ejecutado tras un periodo de prisión. Escribió libros de texto para cada una de las cuatro ramas de las artes liberales, utilizando para ello resúmenes de clásicos anteriores.

Tras un largo periodo marcado por estos autores, el enorme impulso dado por el Islam a la matemática comenzó a modificar de forma muy notable el estudio de la disciplina. En este proceso, también fue fundamental el papel jugado por la Península Ibérica, si bien sus protagonistas no nacieron obligatoriamente en ella. Gerberto de Aurillac (940-1003) se formó en Italia y en España antes de ser nombrado papa con el nombre de Silvestre II. Es el primero que enseñó en Europa los numerales hindoarábigos, que, según parece, aprendió en el cenobio de Ripio. Con todo, hay que señalar que habremos de esperar al siglo XIII para la introducción de una manera definitiva de los guarismos en Europa. Antes, en el siglo XII, se había producido una destacada labor traductora al latín, en la que destaca Adelardo de Bath (1075-1160), responsable de textos tan notables como los Elementos de Euclides (1142), las tablas astronómicas de Al-Juarismi (1126) y el Almagesto de Ptolomeo (1155). Ahora bien, este trabajó lejos del gran centro

toledano, donde Gerardo de Cremona (1114-1187) también se ocupó de los Elementos, a partir de la versión hecha por Thabit ibn-Qurra y que mejora considerablemente la de Adelardo, y del Almagesto (1175) y fue gracias a este trabajo por el que Ptolomeo iba a ser conocido en Occidente. También realizó una adaptación latina del Álgebra de Al-Juarismi, aunque la traducción más popular fue la que había realizado en 1145 Roberto de Chester. A partir de este momento, la matemática árabe iba a ser vista de manera mucho más favorable que lo había sido nunca la geometría griega.

## 2 La Propagación de los numerales hindo-arábigos

Hay que señalar que la asimilación de la numeración hindoarábiga fue lenta y que dependió más de las posiciones individuales de los distintos matemáticos que de la pertenencia a una determinada escuela. De hecho, entre los profesionales del cálculo, los abaquistas siguieron utilizando la numeración romana, pues la habilidad con el ábaco superaba las posibilidades que presentaba el cálculo a pluma, donde primero fue necesario desarrollar sistemas de simplificación operativa, que llevaron a cabo los llamados algoristas, cuyo triunfo definitivo no se iba a producir hasta el siglo XVI.

Alexandre de Villedieu, franciscano francés, fue uno de los principales divulgadores de la numeración hindoarábiga a través de su *Carmen de algorismo* (1225), un poema en que describe detalladamente las operaciones fundamentales de los enteros utilizando las cifras y considerando el cero como un número. Aunque quizá fue más trascendental el *Algorismo vulgaris* de Johannes de Sacrobosco o John de Halifax (1200-1256), pues este manual práctico de cálculo gozó de una enorme popularidad en las aulas universitarias medievales. Contemporáneo suyo fue Jordano Nemorario o de Nemore, autor no sólo de sólidos conocimientos en filosofía natural, sino también responsable de una Aritmética que sirvió de base para comentarios universitarios en la Universidad de París hasta el siglo XVI. Nos hallamos ante un continuador de la tradición filosófica de Nicomaco y Boecio, pero que en su obra, utiliza letras para representar números, siguiendo en ello a Euclides, lo que le permite la formulación de teoremas algebraicos generales y ello constituye un avance considerable.

Fuera de los claustros, hemos de destacar la labor de Leonardo de Pissa o Fibonacci (1180-1250), hijo de un mercader con intereses en el norte de África, que estudió con un maestro musulmán y viajó por Egipto, Siria y Grecia. Tras su peri-

plo publicó un *Liber abaci* (1202), que a pesar de su título, es un tratado muy completo sobre métodos y problemas algebraicos, en el que recomienda vivamente el uso de los guarismos, además de demostrar una capacidad matemática excepcional. En su libro describe las *nueve formas hindúes*, junto con el signo 0, que denomina *zephirum*, término del que derivará cero y cifra, y repasa las operaciones aritméticas usuales, incluida la extracción de raíces. Introdujo la barra horizontal para las fracciones, aunque su uso generalizado no se producirá hasta el siglo XVI. Después, pasa a tratar minuciosamente problemas de transacciones comerciales y los derivados de los cambios de pesos, medidas y monedas.

### 3 La formación del Mercader

Las escuelas de ábaco proliferaron en las ciudades italianas, adaptando sus instalaciones, conocidas como *botteghe*, para acoger a mercaderes en activo, especialmente provenientes del área germánica, que podían aprender sin descuidar su actividad. Con todo, lo habitual era que acudieran los hijos y aprendices de mercaderes a la edad de 12 o 13 años. En ellas, sabemos que se instruía a los alumnos en el conocimiento de la numeración, las operaciones fundamentales, la regla de tres y los principios del sistema monetario, las reglas de pérdidas y ganancias, cálculos de interés, etc. Para el uso pedagógico, se confeccionaron textos de aritmética comercial, bastante influidos por la obra de Fibonacci, que se conocían como libros de ábaco; término que acabó denominando genéricamente a los escritos de aritmética comercial.

También debemos recordar los manuales de mercadería, que eran recopilaciones de noticias de carácter comercial, mercantil, financiero, etc. En ellos un mercader experimentado dejaba constancia de sus conocimientos sobre práctica mercantil para ser aprovechados por los empleados de la firma. Conocemos dos manuales de mercadería confeccionados, probablemente en Barcelona el *Libre de piéces y de drogues*, escrito en 1385 según M. Gual y el *Libre* que explica lo que “á de ser un bon mercader”, escrito en 1520. En ambos se recogen nociones de aritmética, sobre todo para resolver cuestiones referidas al cálculo de precios, alquileres y soldadas, y equivalencias ponderales o de monedas.

A partir de entonces, la aritmética estuvo fuertemente vinculada a la actividad mercantil. La enseñanza de la matemática aplicada a los problemas comerciales quedó en manos de maestros de contar privados, que cubrieron la demanda planteada por quienes se dedicaban al intercambio. Por ello, era bastante corriente

que en los grandes centros mercantiles, especialmente los portuarios, los maestros de cálculo funcionasen también como asesores en cuestiones de cálculo mercantil y de contabilidad. Todo ello fue fraguándose en Italia, y por lo tanto fue allí donde más se desarrollaron las matemáticas financieras, basadas prioritariamente en el cálculo posicional.



*Leonardo de Pisa*

Así, vemos que a lo largo de los siglos XIII y XIV, paralelamente a la aparición de nuevas formas de pago aplazado con las letras de cambio y mientras que la doble entrada iba señoreándose de los libros de contabilidad, los matemáticos se preocupaban por inventar nuevos sistemas de cálculo con pluma cada vez más simplificados.

Todo este proceso del que venimos hablando, llegará a un climax en el siglo XV, cuando se afirmaron y difundieron todas estas nuevas adquisiciones y se continuó profundizando en el campo del álgebra; al tiempo que la aparición de la imprenta a finales de la centuria, permitió ampliar el grado de penetración social de la aritmética comercial. En este proceso, el protagonismo hispano es indiscutible, pues no podemos olvidar que el manual de Francesc de Santcliment (1482) fue el segundo impreso en el mundo, aparecido doce años antes de la famosa *Summa* de fray Luca Pacioli (1494). Pero es que además, un tratado posterior, escrito por el palentino fray Juan de Ortega (1512), fue traducido al francés (1515) y al italiano (1515 y 1522), abriendo un fértil periodo de producción en el campo de la aritmética.

## 4 Luca Pacioli

Luca Pacioli nació en Borgo San Sepulcro (Umbría) hacia el año 1445. Es más conocido por el sobrenombre de Luca di Borgo que adoptó al tomar el hábito de la orden franciscana. Su familia era muy pobre y Luca no asistió a la escuela. Sin embargo al estar siempre en contacto con artesanos y mercaderes aprendió un poco de lo que en esa época se llamaban matemáticas comerciales, que consistían básicamente en manejar el sistema de numeración hindu-arábigo, saber sumar, restar , multiplicar y dividir.



*Luca Paccioli*

Pacioli se fue apasionando cada vez más por las matemáticas y, mientras trabajaba en distintos talleres, ya fuera como ayudante de curtidor de pieles o como ayudante de herrero, logró, por si solo, ir estudiando hasta convertirse en un buen matemático.

Ingresó muy joven en la orden religiosa de San Francisco y hay historiadores que piensan que esto se debió más que a su vocación de monje, a tener acceso a los libros del monasterio y a la educación que había deseado toda su vida. Y en efecto, en 1475, cuando Pacioli tenía solamente treinta años, su fama como maestro en contabilidad y como matemático era ya muy grande y fue invitado como profesor a la universidad de Perusa.

Años más tarde, Luca Pacioli era ya considerado como uno de los mejores maestros en contabilidad de toda Italia y fue contratado por el duque de Florencia para trabajar en la corte como tesorero. Ahí conoció a Leonardo da Vinci y fue

quizás uno de sus mejores amigos. De tal manera que Leonardo ilustraba sus libros.

Pacioli murió en 1514 después de haber dedicado su vida a las matemáticas comerciales. Inventó procedimientos nuevos para la suma, la resta, la multiplicación y división. La forma en que nosotros dividimos hoy, la división de casita es un invento más de Luca Pacioli.

Pasó a Venecia en 1464, donde adquirió los conocimientos comerciales de los que da testimonio en la *Summa*. Enseñó Matemáticas en Perusa (1475), después en varias ciudades italianas, entre ellas Milán, donde trabajó con Leonardo da Vinci y finalmente enseñó en Roma, muriendo allí en 1514.

Su principal obra, *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni e proportionalità*, fue terminada en Perusa en 1487 y publicada en Venecia en 1494. Se trata de una verdadera enciclopedia. Entre otras cosas, contiene un curso muy completo de aritmética comercial y un método de llevar los libros por partida doble, especialmente desarrollado en Venecia, por lo que se llamó el sistema *alla veneciana*.

Desde el punto de vista matemático, hay pocas cosas originales de Pacioli, citando con frecuencia a los autores en que se inspiró o copió. Se trata de Platón, Aristóteles, Euclides, Arquímedes y Boecio entre los antiguos, y de Thabit, Ahmad ibn Yusuf, Leonardo de Pisa, Bradwardine, Blas de Parma, Alberto de Sajonia, Jordanus Nemorarius y Juan de Sacrobosco entre los medievales. De entre los contemporáneos cita a Prosdócimo de Beldomandi, cuyo tratado había aparecido en Padua un año antes de la edición de la *Summa* de Pacioli. Tuvo una enorme influencia en la enseñanza de las matemáticas durante el siglo XVI y, por ejemplo, era texto de base en las Universidades de Salamanca y Valladolid.

Hay un ejemplar de este libro en la biblioteca de los agustinos de Valladolid, siendo uno de los más bellos incunables que posee. Sus medidas son 315×225×50 mm. Una nota manuscrita indica que éste perteneció a Juan Bautista de Carmagnolis, de la orden de S. Agustín.

## **5 Robert Recorde**

Robert Recorde nació en Tenby (País de Gales) y murió en Londres en 1588. Se graduó en la Universidad de Oxford en 1531 con un B.A. Estudió medicina pero también era un estudioso de la historia y un experto en la lengua anglosajona. Años más tarde fue a estudiar a la Universidad de Cambridge, recibiendo en 1545

el grado de M.D. Después de enseñar en Cambridge durante unos años se trasladó a Londres, donde practicó la medicina. Fue médico de Eduardo VI y de la reina Mary.



*Robert Recorde*

Durante un periodo de casi dos siglos a partir de la muerte de Bradwardine, la matemática en Inglaterra no había hecho prácticamente ningún progreso, y lo poco que se hizo a comienzos del siglo XVI dependió en gran parte de la influencia de escritores italianos tales como Pacioli. Recorde fue, de hecho, casi el único matemático de cierta talla en la Inglaterra del siglo XVI.

A Recorde se debe en principio la inauguración de la escuela matemática inglesa. Al igual que habían hecho Chuquet y Pacioli antes que él, y como iba a hacer más tarde Galileo, Recorde escribió en lengua vernácula. Este hecho puede haber limitado su influencia en el continente, pero hay que hacer notar que la estructura retórica fácil que adoptó, en forma de diálogo, fue usada a su vez por Galileo, años más tarde.

La primera obra matemática de Recorde que se conserva es su *Grounde of Artes* (1541) una aritmética popular que incluye el cálculo tanto por medio del ábaco como del algoritmo, junto con algunas aplicaciones comerciales. El nivel y

el estilo de este libro, que está dedicado a Eduardo VI y que alcanzó más de dos decenas de ediciones, puede juzgarse por el siguiente problema:

*“Entonces, ¿qué responderás a esta ecuación?. Si te he vendido un caballo con sus cuatro herraduras, y cada herradura con sus seis clavos, bajo la condición de que tú pagarás por el primer clavo una moneda; por el segundo dos monedas; por el tercer clavo cuatro monedas, y así sucesivamente, doblando la cantidad cada vez, hasta acabar con los clavos, ahora te pregunto: ¿a cuánto ascenderá el precio del caballo?”.*

El *Castle of knowledge* de Recorde, una obra astronómica en la que se menciona con aprobación el sistema copernicano, así como su *Pathewaie to Knowledge*, que es una versión abreviada de los Elementos, a la vez que la primera geometría publicada en inglés, aparecieron ambos en 1551. La obra de Recorde que más se cita es el *the Wetstone of Wite*, publicada en 1557, un año solamente antes de su muerte en prisión. No se sabe si fue encarcelado por razones políticas o religiosas o debido a dificultades relativas a su cargo, desde el 1551, de “Inspector de Minas y de la Moneda de Irlanda”.

El título de *The Whetstone of Wite* (“La piedra de afilar el ingenio”) era evidentemente un juego de palabras relativo a la palabra “coss”, ya que coss es el nombre latino para “whetstone” o piedra de afilar, y el libro está dedicado, de hecho, a “the cossike practise”, es decir, al álgebra. Este libro hizo por la matemática inglesa lo que Stifel había hecho por la alemana, con un detalle que lo distingue: nuestro familiar signo de igualdad aparece en él por primera vez, y Recorde lo justifica por medio de la cita:

*“Pondré, como hago a menudo en el curso de mi trabajo, un par de paralelas o líneas gemelas de una misma longitud, así : =, porque no hay dos cosas que puedan ser más iguales”.*

Iba a hacer falta, sin embargo, otro siglo o más antes de que este signo triunfase sobre las demás notaciones rivales.

## **6 Juan Andrés**

El zaragozano mosen Juan Andrés fue uno de los grandes matemáticos aragoneses del siglo XVI. Su *Aritmética práctica* está escrita para hacerse buen contador sin necesidad de maestro.

Este libro se encuentra en la diócesis de Zaragoza, cuyo patrimonio bibliográfico refleja un legado secular valiosísimo desde el siglo IV hasta nuestros días.

## **7 La Academia de Matemáticas de Madrid. Miguel Jerónimo de Santa Cruz**

Felipe II fue un personaje abierto a todo el saber científico y un gran defensor del estudio de las matemáticas. Convencido el rey de que la carencia de artilleros en España (era necesario contratar artilleros italianos para los ejércitos del imperio), y de que la profusión de errores en la confección de las cartas de navegar, se debían a una falta de formación matemática, Felipe II, a instancias de Juan de Herrera, decidió instituir una *Academia de Matemáticas* en Madrid.

La creación de la *Academia* se realiza en Lisboa, el 25 de diciembre de 1582, durante el viaje de Felipe II, con motivo de la anexión de Portugal al Imperio.

Los primeros profesores de la recién fundada *Academia* fueron: Juan Bautista Labaña, Pedro Ambrosio de Onderiz, Luis Georgio y Juan de Herrera. Bajo el impulso de la corte, la Academia se convirtió en el lugar de encuentro de la sociedad cortesana española con las matemáticas.

Entre las enseñanzas de la *Academia* se encontraban las matemáticas comerciales siendo uno de los libros de texto la obra de Miguel Jerónimo de Santa Cruz, *Dorado contador. Aritmética especulativa y práctica*.

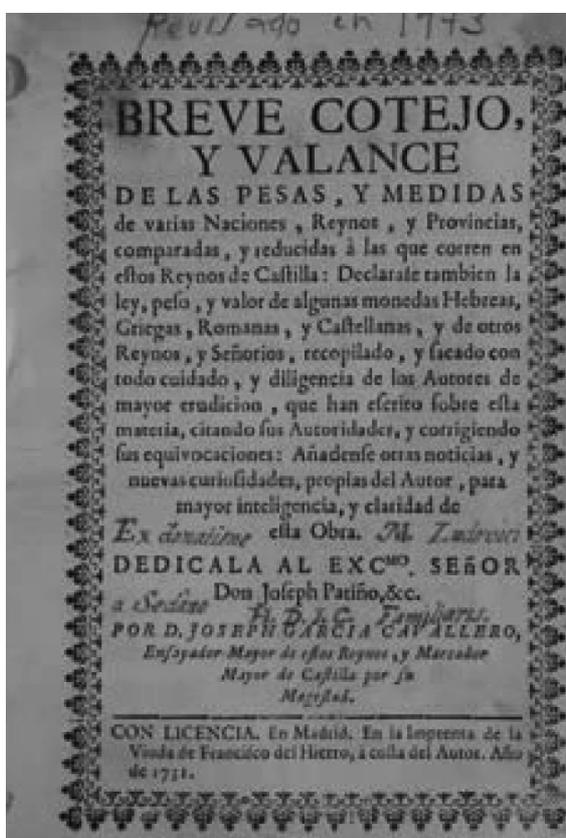
Miguel Jerónimo de Santa Cruz nació en Valencia pero se acercó en Sevilla. Con el título de “*Dorado contador. Aritmética especulativa y práctica*”, publicó una aritmética muy elemental que tuvo cierto éxito y fue reeditada en varias ocasiones a partir de la primera edición de Madrid de 1594. La obra lleva la aprobación de Ambrosio de Ondériz, que fue profesor en la *Academia de Matemáticas* de Madrid y cosmógrafo mayor del Consejo de Indias, lo que llevaba aparejado la cátedra de Matemáticas.

El libro de Miguel Jerónimo de Santa Cruz, usado como libro de texto en la Academia de Matemáticas de Madrid, contiene las operaciones elementales de aritmética, los quebrados, las progresiones aritméticas y geométricas, así como la forma de extraer raíces cuadradas y cúbicas, todo ello expuesto de una forma sencilla, al alcance de la cultura de los contadores a quienes va destinada la obra.

Para el estudio de las proporciones se inspiró en la traducción de Federico Comandino, *Euclides elementorum, libre XV*. Como dice el subtítulo de la obra de Santa Cruz, además “contiene las finanzas y reglas de contar oro y plata y las aneagas de Flandes por moderno y compendioso estilo”.

## 8 José García Caballero

José García Caballero nació en Sevilla hacia 1670 y murió en Madrid, posiblemente el año 1740. Su prestigio como ensayador de la Casa de la Moneda de Sevilla propició su traslado a Madrid en 1708 y luego su nombramiento como *Ensayador Mayor del Reino y mercader Mayor de Castilla*.



Su obra, *Breve cotejo y balance de las pesas y medidas*, es de carácter metroológico y de utilidad pública pues enseña a los españoles la relación que hay entre

sus pesas y medidas con las de otras naciones, para que en los tratos de compra y venta no salgan perjudicados.

En el Seminario Mayor Diocesano de Valladolid se encuentra un ejemplar de este libro impreso en Madrid en 1731 en la Imprenta de la viuda de Francisco del Hierro. Las dimensiones del libro son: 210×155×30 mm.

## 9 Diego Narciso Herranz

Diego Narciso Herranz, con su obra *Aritmética pura y comercial*, pretende cubrir la laguna que la literatura matemática y comercial española tenía en el campo de los cambios monetarios. Se explica el sistema monetario existente en la España dieciochesca, con su gran diversidad según regiones, y las reducciones de todas sus monedas, tras lo que pasa a hacer lo mismo con las de las principales plazas comerciales europeas con las que los comerciantes españoles tenían relaciones.

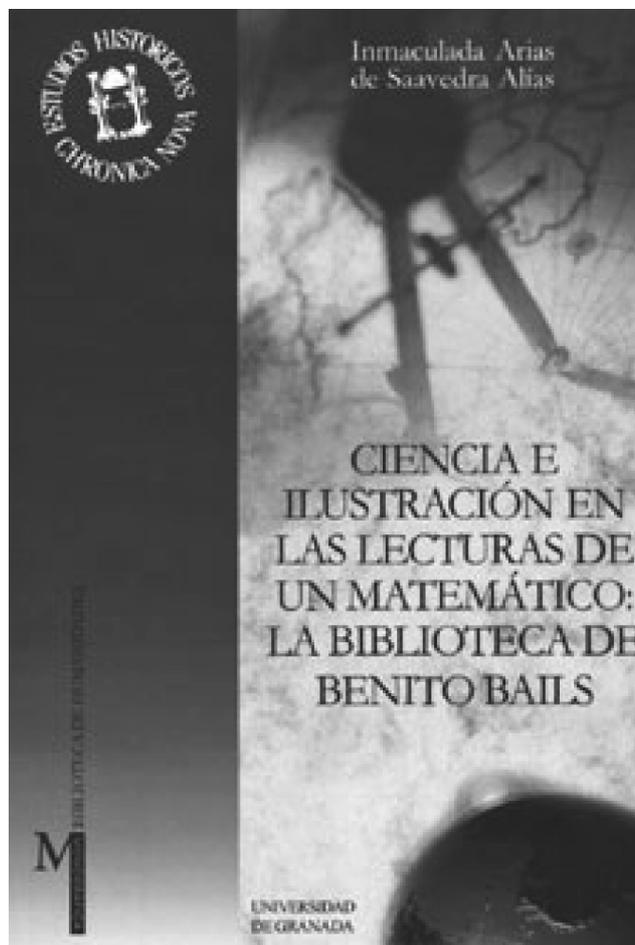
Un ejemplar de este libro se encuentra en la Biblioteca diocesana de Zamora, y se imprimió en Madrid en 1790 en la Imprenta de Benito Cano. Las dimensiones del libro son: 210×155×33 mm.

## 10 Benito Bails

Benito Bails es uno de los científicos más importantes de la España del siglo XVIII. Amigo de Campomanes, Aranda, Roda, del secretario de Estado Ricardo Wall, Bails perteneció a las *Reales Academias de La Lengua y de la Historia*, así como a la *Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona*. Aunque su actividad intelectual más importante la realizó en la *Real Academia de Bellas Artes de San Fernando*, de cuya cátedra de Matemáticas, destinada a los alumnos de Arquitectura, fue titular desde su fundación en 1768 hasta su muerte.

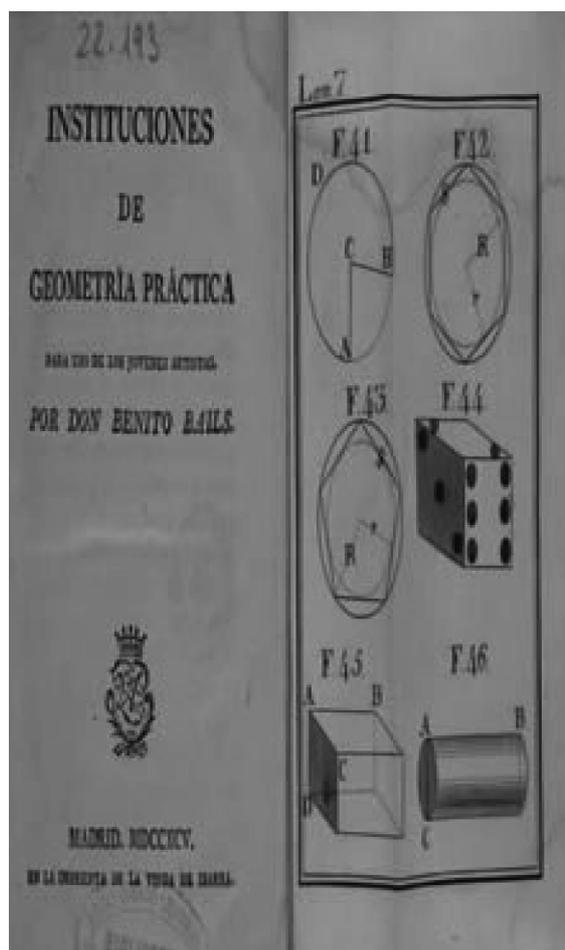
Benito Bails nació en 1730 en San Adrián de Besós ( Barcelona ) y murió en Madrid en 1797. Su infancia y juventud transcurrieron en Francia, donde se formó en Perpiñán y en la Universidad de Toulouse. A los 24 años marchó a París donde se codeó con importantes figuras de la Ilustración como D'Alembert, Condorcet, etc. que le incorporaron a las tareas de redacción de los artículos relativos a España del "*Journal Historique et Politique*". La influencia de su etapa francesa sería fundamental en su trayectoria. En 1761 regresó a Madrid donde pronto se introduce en círculos ilustrados. Fue uno de los redactores del *Mercurio*

*histórico y político*, donde desempeñó una importante actividad ilustrada y antijesuítica.



El matemático e ilustrado Benito Bails llevó a cabo una importante actividad intelectual, es autor de importantes obras entre las que destacan sus *Principios de Matemáticas* (1776), en tres volúmenes y, sobre todo, sus *Elementos de Matemáticas*, en 11 volúmenes que no sólo comprenden las matemáticas en sentido estricto (aritmética, geometría, trigonometría, álgebra, cálculo infinitesimal), sino que también comprende materias de física (dinámica, óptica, astronomía) y arquitectura. Se trata de una gran obra de recopilación que dio a conocer en España el estado de la ciencia europea del momento, a través de este enciclopédico tratado, que se convirtió en obra de referencia obligada durante bastantes años.

Pero Benito Bails no se ocupó solamente de las materias propias de su actividad docente, sino que tradujo obras de música y editó obras de medicina e higiene pública. Su vida transcurrió dedicado al estudio y a la enseñanza, y en sus últimos años, cuando sufría serios problemas de salud, fue acusado ante la Inquisición de poseer libros prohibidos y de sostener proposiciones materialistas y ateas en sus clases. Benito Bails sufrió prisión y destierro de la corte, pero finalmente, en atención a su edad y salud y gracias a sus importantes valedores le fue conmutada parte de la pena y pudo regresar a la corte, donde murió poco después.



Una de las mayores aportaciones a la ciencia de Benito Bails fue que introdujo didácticamente en España el cálculo infinitesimal, junto con la geometría analítica. Su *Elementos de Matemática* fue una obra de gran importancia que sirvió de

texto en numerosos centros y fue estudiada por casi todos los matemáticos españoles de fines del siglo XVIII.

El tomo IX de esta obra es la *Arquitectura Hidráulica*. En ella habla de la navegación interior en España y elogia al Canal Imperial de Aragón y a su impulsor, Pignatelli.

En el Seminario Mayor Diocesano de Valladolid se encuentra un ejemplar de su obra "*Elementos de Matemática. Arquitectura Hidráulica*". Este libro se imprimió en Madrid en 1790 en la imprenta de la viuda de Joaquín Ibarra.

## **Bibliografía**

- [1] Arias de Saavedra Alías, Inmaculada (2003), *Ciencia e Ilustración en las lecturas de un matemático: la biblioteca de Benito Bails*. Ed. Universidad de Granada.
- [2] Boecio (2002), *Institutio aritmética. Fundamentos de aritmética*. Estudio, edición y traducción M.A. Sánchez Manzano. Universidad de León.
- [3] Boyer, Carl.B (1994), *Historia de la Matemática*. Alianza Universidad.
- [4] Crombie, A.C. (1993) *Estilos de pensamiento científico a comienzos de la Europa moderna*. Valencia. Seminari d'Estudis sobre la Ciència.
- [5] García Caballero, José (1731), *Breve cotejo y balance de las pesas y medidas*. Madrid. Imprenta viuda de Fco. del Hierro. Seminario Mayor Diocesano de Valladolid.
- [6] Gual Camarena, M. (1981), *El primer manual hispánico de mercadería* (siglo XVI). Barcelona. C.S.I.C.
- [7] Jerónimo de Santa Cruz, Miguel (1794), *Dorado contador. Aritmética especulativa y práctica*. Madrid. Imprenta Benito Cano. Seminario Mayor Diocesano de Valladolid.
- [8] Narciso Herranz, Diego (1790), *Aritmética pura y comercial*". Madrid. Imprenta Benito Cano. Biblioteca Diocesana de Zamora.
- [9] Pacioli, Luca (1494), *Summa de Aritmética, Geometría, Proportioni e proportionalità*. Venecia. Agustinos filipinos de Valladolid.

- [10] Romo Santos, Concepción (1994), *La personalidad matemática de Juan de Herrera. El parte de las cocheras del rey*. San Lorenzo de El Escorial.
- [11] Romo Santos, Concepción (1992), *El espejo de nuestra historia: Los grandes matemáticos aragoneses*. Zaragoza. Revista Academia de Ciencias, 47.
- [12] Romo Santos, Concepción (1993), *Desarrollo de la actividad matemática en la diócesis cesaraugustana*. Revista de la Academia Canaria de Ciencias, nº 1.
- [13] Salavert Fabián (2002), Mercadería i matemàtiques al Renaixement. En: Batlló Ortiz et al. (coords), *Actes de les VI Trovades d'Historia de la ciencia i de la tècnica, 187-194*. Barcelona. Societat Catalana d'Historia de la Ciència i de la Tècnica.

## Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

### **Formato**

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTeX. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: “Problema número (Boletín número)”, tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo “article” y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTeX, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

### **Envío de originales**

Se enviará por correo electrónico a la cuenta [puigadam@mat.ucm.es](mailto:puigadam@mat.ucm.es) , o bien en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

De otro modo, también pueden enviarse dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, cuya dirección que figura en la página 2 del Boletín. Pero, una vez aceptado para su publicación, se ha de enviar el correspondiente archivo en formato electrónico en la forma anteriormente indicada.

### **Selección de originales**

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

## Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,  
56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75,  
76, 77, 78, 79, 80, 81 y 82.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

*Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004*

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.