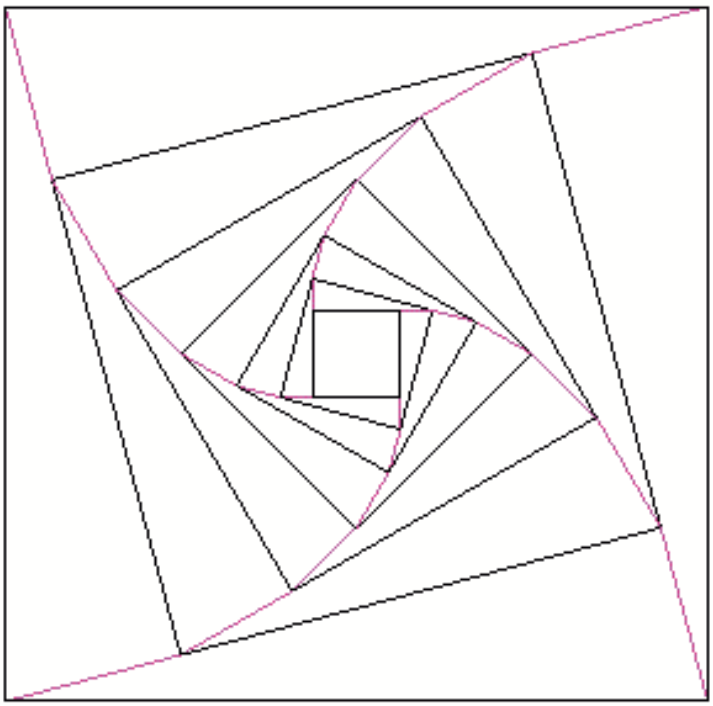
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 81
FEBRERO DE 2009

ÍNDICE

Págs.

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2009 4
Nota sobre la cuota anual de la Sociedad 4
Recordando a Calero,
por *Jose Javier Etayo Miqueo* 5
XXVII Concurso de Resolución de Problemas 8
VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid,
por *Joaquín Hernández Gómez* 9
Problemas Propuestos en la Fase Local de la XLV Olimpíada Matemática Española en los distritos de Madrid 11
Anuncio de número especial de nuestro Boletín 12
El modelo matemático lognormal para valorar activos financieros: un enfoque didáctico,
por *G. Calbo Sanjuán* 13
Estabilidad, aproximación numérica y mecánica de fluidos,
por *Leo M. González, Fabricio Macià y Antonio Souto Iglesias* 26
Desarrollo de competencias básicas a través de las matemáticas,
por *Mª. Mercedes Sánchez Benito* 40
Primera derivada y convexidad,
por *Miguel L. Pérez Gallardo* 48
Actividades saludables para la clase de Matemáticas,
por *Mª Dolores Rodríguez Soalleiro y Diana Sánchez Rodríguez* 65
Provocar el pensamiento matemático: un ejemplo en el aula,
por *G. Calbo Sanjuán* 83
Instrucciones para el envío de originales 94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín 95
Boletín de inscripción 96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La confección de este número ha estado a cargo de E. Roanes

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 6248

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
http://www.sociedadpuigadam.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2009

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2009 para el sábado *día 18 de abril de 2009*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

Nota sobre la cuota anual

Como ya saben nuestros socios, la cuota anual global era de 40€. Desde hace muchos años la parte correspondiente a nuestra Sociedad era de 21€ y la parte correspondiente a la Federación es desde el año pasado de 19€. En la Asamblea del 2008 se aprobó por unanimidad una cuota global de 49€, de los que 30€ corresponden a la Sociedad (por la que se recibe nuestro Boletín), y 19€ a la Federación (por la que se recibe la revista Suma). De todo ello se dio cuenta en el Acta de la Asamblea 2008, publicada en el nº 79 de nuestro Boletín.

Durante el presente curso, el recibo anual del curso se ha tenido que pasar en diciembre (en vez de en febrero, como solía hacerse), porque ahora la Federación requiere cerrar cuentas antes de fin de año.

La Junta Directiva

Recordando a Calero

Era de modesta presencia, en su imagen y en su trato. Casi se diría que se complacía en ello, si no fuera tan opuesto a cualquier mistificación. Pero es como si le gustase aparecer así, entre despistado e ingenuo; encogidico, tantas veces colgado del brazo de Ignacia, su esposa, compañera ya desde sus tiempos de estudiantes e inseparable de por vida. Con aroma de terruño, tenía una pinta como de alcalde de un viejo pueblo manchego. Afable y cordial en el trato, de sencillas maneras pero nada tímido ni carente de humor. De firmes convicciones, sabía defenderlas sin levantar la voz pero con serenidad y entereza. Y era tan bondadoso que cualquier trastada de que fuera objeto la interpretaba siempre como una distracción involuntaria de quien se la hiciera; y tan humilde, que los sinsabores y las penas que la vida ponía en su camino los miraba como ayudas que Dios le enviaba para librarle de caer en la soberbia. Bien sé que ensamblando todas estas piezas no me sale el retrato de Gonzalo Calero pero son las primeras que acuden a mi mente en este recordatorio.

Yo no le conocí hasta los primeros años sesenta, cuando vino a la cátedra del Instituto "Ramiro de Maeztu" desde la que había ocupado en Sevilla. Me lo encontraba por los pasillos del Instituto "Jorge Juan" del CSIC desojándose por desentrañar algún pasaje de *Commutative Algebra*, de Zariski y Samuel, por aquel entonces recién salido del horno. Y es que D. Pedro Abellanas ya le había cogido por su cuenta y puesto a trabajar en uno de sus temas favoritos, en el que fue puntero: las correspondencias algebraicas. Todavía recuerdo, de mis tiempos de alumno suyo en Zaragoza, que al hacerse pública cada año la lista de cursos de doctorado, el de D. Pedro era invariablemente ése: "Correspondencias algebraicas". Había sido el correlato que él puso a las correspondencias birracionales que Zariski dio poco antes a conocer y en él iba formando a algunos de sus discípulos. Calero fue uno de ellos y sus aportaciones, que fue desgranando entre los años 67 a 74 en aquellas entrañables reuniones de matemáticos españoles y luego también portugueses, tuvieron como cúpula su tesis doctoral; si mal no recuerdo, "Correspondencias algebraicas simples en el espacio afín". Tiempo después completó su paralela dedicación a la docencia universitaria en nuestra Complutense con el acceso a una titularidad (o como se llamase, que ya me pierdo en la multiplicidad de cambios y nombres). Pertenece, pues, Calero a esa estirpe de antiguos Catedráticos de Instituto, el tristemente "dinamitado cuerpo de espléndidos docentes (leo

en un reportaje y lo suscribo), los más conspicuos, bien en su modesta esfera, aparentemente, de la Enseñanza Media, bien en el paso, el salto, a la Universidad". Y continúa aquel suelto añorando cómo recordamos los nombres de nuestros profesores de Media y reconociendo el mérito de quienes forman a la mayoría de nuestros hijos: "agradecer, otro dolor de España", concluye.

Pero en aquel círculo que rodeaba a Calero, definido por D. Pedro, la Facultad de Ciencias y el "Jorge Juan", se iban cociendo más cosas. Había llegado la hora, en todas partes, de la renovación didáctica de las matemáticas. D. Pedro Abellanas, muy en su carácter, cogió el toro por los cuernos y nos embarcó a unos cuantos en esa aventura. Por supuesto a Calero, a Martínez Losada, con otros profesores de bachillerato, a Laplaza, Arregui, quién sabe cuántos más, amén de los contactos con otros centros españoles. ¡Cómo trabajamos entonces! Escribimos libros-piloto, celebramos un congreso con los franceses, teníamos cenáculos inacabables en el "Jorge Juan" y, sobre todo, multitud de cursos, ciclos de conferencias y reuniones con profesores interesados en aquel movimiento. Nuestra mayor satisfacción era ver el gusto y hasta el entusiasmo con que seguían nuestras lecciones y el calor con que nos acogían. Madrid, Zaragoza y Pamplona quedan imborrables en mi recuerdo y, por lo que después comentábamos, también en el de Calero. La decepción no tardó en llegar: cambios administrativos invalidaron todo aquello pero lo peor fue la reacción, una especie de soterrada campaña para desacreditar lo que habíamos hecho con tanta ilusión y esfuerzo; y con errores también, qué duda cabe, pero no como para desatar unas críticas que, al menos a mí, me llenaron de amargor. Es posible que Calero, que era mucho más bueno, pasara por ello sin sentirse aludido o, en todo caso, disculpándolo.

De hecho él siguió impertérrito con su didáctica y con su estudio. Pienso sinceramente que disfrutaba aprendiendo y se deleitaba enseñando. En estas mismas páginas ha contado cómo continuaba asistiendo en la Facultad a las lecciones de D. Pedro: "Algunos cursos ordené adecuadamente mi trabajo para poder ir a sus clases. (…). Era un auténtico maestro en los contenidos y en la forma de exponer las ideas. Haber podido asistir fue un auténtico gozo para mí, lo que fue otro motivo más de agradecimiento." Lo malo es que lo mismo hizo conmigo; y digo "malo" porque cualquier comparación entre unas lecciones y otras rozaría el sarcasmo. Pero el bueno de Calero, con una contumacia digna de mejor causa, venía año tras año a mi curso de geometría diferencial, como si todavía pudiera enseñarle algo. Y aún quería, con insistencia muy propia de él, que siguiera explicándolo después de mi jubilación. Con ella pasamos, de vernos diariamente y subir juntos

desde la Universitaria, muchas veces en compañía de Rodríguez Salinas, a no vernos ya casi nunca.

La última vez que hablé con él fue por teléfono, cuando me anunció que había muerto Ignacia y sentía el alma herida de soledad. Por rara curiosidad, también la última llamada de D. Pedro, tiempo antes, fue para pedirme el número del teléfono de Calero. Aquel discípulo suyo, dechado de fidelidad. El pasado noviembre fue él quien nos dejó definitivamente y ya nada le queda por aprender, aunque sí por enseñarnos, a través de su ejemplo. Nuestro amigo, que solía manifestarse alegre por saberse amado por Dios, habrá ya alcanzado la plenitud del amor y de la paz. Que eternamente le acompañen.

José Javier Etayo Miqueo

XXVII Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *13 de junio del 2009* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 13 de Mayo del 2009, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid *Fax: 91 394 4662*
Correo electrónico : **jetayo@mat.ucm.es**

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2008-2009.

VIII Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

El pasado 22 de noviembre, penúltimo sábado de noviembre como cada año, se celebró en la Facultad de Matemáticas de la UCM el VIII Concurso Intercentros de Matemáticas, organizado por nuestra Sociedad en colaboración con dicha Facultad.

La participación alcanzó los 37 centros, es decir, 222 estudiantes de nuestra Comunidad (recordad, cada centro debe presentar 6 estudiantes, 2 de 1º-2º ESO, 2 de 3º-4º ESO y 2 de Bachillerato) dedicaron la mañana del sábado a pensar, disfrutar y competir.

Los centros y estudiantes ganadores son los que figuran a continuación. He aquí la relación de ganadores en esta VIII edición.

Centros Ganadores

1º. IES San Juan Bautista

2º. IES Ramiro de Maeztu

3º. Liceo Francés

Estudiantes Ganadores

Primer Nivel (1º y 2º de E.S.O.)

1º.- Marta Lorente Ros (2º ESO. Col. Ntra. Sra. De las Maravillas)

2º.- José Mª Martínez Cid (2º ESO. Col. El Prado)

Segundo Nivel (3º y 4º de E.S.O.)

1º.- Daniel Henry Mantilla (4º ESO. Liceo Francés)

2º.- Jaime Mendizábal Roche (3º ESO. IES Ramiro de Maeztu)

Tercer Nivel (Bachillerato)

1º.- Moisés Herradón Cueto (1º Bach. IES San Juan Bautista)

2º.- Jesús Sánchez Díaz (1º Bach. Col. Vedruna)

Los centros que más puntuación global obtuvieron en el cómputo de las tres pruebas (Equipos, Individual y Relevos), fueron:

IES San Juan Bautista	54,1	
IES Ramiro de Maeztu	51,8	
Liceo Francés		48,4
Col. Ntra. Sra. De las Maravillas		46
Col. Alemán		42,5
Col. El Prado		41,3
Col. Fray Luis de León	39,3	
Col. San José del Parque		35,5
IES José Hierro (Getafe)		35
Col. Vedruna		33,5

Para más información, tanto sobre el concurso de este año como de los anteriores –ganadores, enunciados, etc…- podéis consultar:
`www.sociedadpuigadam.es`

Nuestra más cordial enhorabuena a los ganadores. Nos vemos en el mes de noviembre. Penúltimo sábado, como siempre.

Joaquín Hernández

Problemas propuestos en la Fase Local de la XLV Olimpíada Matemática Española en los distritos de Madrid

Se celebró en Madrid el viernes 23 y sábado 24 de enero de 2009, proponiéndose tres problemas en cada sesión de tres horas y media, no estando permitido el uso de calculadoras. Cada problema se calificaba sobre 7 puntos.

Problema 1

Dado un triángulo acutángulo ABC, determinar para qué puntos de su interior se verifican las siguientes desigualdades:

$$1 \le \frac{\angle APB}{\angle ACB} \le 2, \qquad 1 \le \frac{\angle BPC}{\angle BAC} \le 2 \quad \text{y} \quad 1 \le \frac{\angle CPA}{\angle CBA} \le 2.$$

Problema 2

La igualdad 2008 = 1111 + 444 + 222 + 99 + 77 + 55 es un ejemplo de descomposición del número 2008 como suma de números distintos de más de una cifra, cuya representación (en el sistema decimal) utiliza un solo dígito.

i) Encontrar una descomposición de este tipo para el número 2009.

ii) Determinar para el número 2009 todas las posibles descomposiciones de este tipo que utilizan el menor número posible de sumandos (el orden de los sumandos no se tiene en cuenta).

Problema 3

Se tienen en el plano $3n$ puntos: n de color blanco, n de color azul y n de color negro. Cada uno de los puntos está unido con puntos de color distinto al suyo mediante $n+1$ segmentos exactamente. Probar que hay, al menos, un triángulo formado por vértices de distinto color.

Problema 4

Probar que para todo entero positivo n, $n^{19} - n^7$ es divisible por 30.

Problema 5

Determinar el mayor número de planos en el espacio tridimensional para los que existen seis puntos con las siguientes condiciones:

i) Cada plano contiene al menos cuatro de los puntos.

ii) Cuatro puntos cualesquiera no pertenecen a una misma recta.

Problema 6

Los puntos de una retícula $m \times n$ pueden ser de color blanco o negro. Una retícula se dice que está equilibrada si para cualquier punto P de ella, la fila y columna que pasan por este punto P tienen el mismo número de puntos de igual color que P. Determinar todos los pares de enteros positivos (m, n) para los que existe una retícula equilibrada.

Nota: La Crónica con los ganadores se publicará, una vez que se haya calificado, en el próximo número del Boletín.

Anuncio de número especial dedicado al Profesor Eugenio Roanes Macías, con ocasión de su jubilación: invitación a presentar artículos

A petición de algunos socios y amigos, la Junta Directiva de la Sociedad ha aprobado dedicar un número del Boletín en homenaje al Profesor Eugenio Roanes Macías, Vicepresidente de nuestra Sociedad, con ocasión de su jubilación. En principio, dicho número será el 82, correspondiente a junio 2009.

Se invita a presentar artículos a cuantos compañeros, alumnos y amigos del Profesor Eugenio Roanes Macías lo deseen. Las normas de presentación serán las habituales del Boletín, que aparecen al final de este número. Los artículos serán revisados, como es norma en este Boletín. La fecha límite de envío de trabajos es el 10 de mayo de 2009.

La Junta Directiva

El modelo matemático lognormal para valorar activos financieros: un enfoque didáctico

G. Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols, L'Alcúdia, Valencia

Resumen

This paper provides two different ways to introduce the well-known model for describing the price of a financial asset. The model is usually called geometric brownian motion. The first approach is based up to introduce uncertainty from deterministic framework for valuation of assets free of risk. The second one requires the introduction of a special calculus namely Itô's Calculus. This last topic is presented in an elementary way in order to take advantage in the classroom.

Introducción

Este trabajo tiene como objeto, motivar el uso del denominado *modelo Log-normal* o *movimiento browniano geométrico*, para la valoración de acciones y opciones sobre acciones. La justificación de su uso práctico está basado en el éxito del mismo, testeado en numerosos estudios empíricos (véase, [1], [2]), y sobretodo porque es una de las piedras angulares de modelo de Black-Scholes y Merton (véase, [3], [4]) para poner precio a un tipo de derivado financiero llamado opción europea, cuyo valor se *deriva* del de una acción. El modelo de Black-Scholes-Merton fue galardonado en el año 1997 con el Premio Nobel de Economía. El modelo Log-normal se basa en la ecuación diferencial estocástica:

$$dS(t) = \mu\, S(t)\, dt + \sigma\, S(t)\, dB(t)\,, \tag{1}$$

que modeliza la tasa de cambio $dS(t)$ del precio de una acción o subyacente en el intervalo $[t, t+dt]$ de longitud dt, descomponiendo su valor en dos sumandos: el primero de tipo determinista, $\mu\, S(t)\, dt$, que indica que la variación es proporcional al subyacente al inicio del intervalo, i.e., $S(t)$, y al plazo transcurrido, dt, (siendo

μ la constante de proporcionalidad, que se denomina *deriva* o *drift*); y un segundo sumando de tipo aleatorio, $\sigma\, S(t)\, dB(t)$, que trata de recoger todos los aspectos no deterministas del mercado, pero que influyen en la variación del precio del subyacente (como puede ser el riesgo político internacional, la incertidumbre ante catástrofes naturales, etc.). Esto último se hace multiplicando el valor del subyacente $S(t)$) por una constante positiva σ, llamada volatilidad, y por, -y esta es la forma mediante la cual se introduce la aleatoriedad-, un proceso estocástico llamado movimiento browniano o proceso de Wiener, $B(t)$. En resumen, las variables y parámetros de (1) son:

- $S(t)$ = precio del subyacente o acción en el instante t.
- μ constante llamada tendencia o deriva (o drift).
- σ constante positiva llamada volatilidad.
- $B(t)$ proceso estocástico denominado movimiento browniano.
- $dS(t)$ variación del subyacente en el intervalo $[t, t + dt]$.
- $dB(t)$ variación del movimiento browniano en $[t, t + dt]$.

El primer modelo de precios para acciones que contenía en su formulación la aleatoriedad fue introducido por Louis Bachelier en 1900 (véase, [5]) en su tesis doctoral, pero debido al contexto formativo de su época, esta aportación quedó desgraciadamente aparcada y resultó incomprendida, y fue posteriormente en los trabajos de P. Samuelson (véase, [6]) cuando se recuperó el trabajo de Bachelier (el cual ciertamente contenía errores graves desde el punto de vista matemático, pero contenía las ideas novedosas y centrales que luego se aprovecharían para desarrollar gran parte de los principales modelos actuales). Desde entonces, estas aportaciones han tenido un gran impacto en la literatura e investigación en Finanzas, y hoy son numerosos los modelos de tipo estocástico que tratan de explicar la evolución de los precios de los activos financieros, debido al gran número de factores inciertos que determinan finalmente el precio de cualquier acción.

1. El movimiento browniano

Ya se ha señalado en el apartado anterior que la forma de introducir la aleatoriedad en el modelo (1) es a través de un proceso estocástico llamado *movimiento browniano* o *proceso de Wiener*, denotado $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ y que se define como aquel que cumple las siguientes propiedades:

- **B1**: Empieza en el origen con probabilidad 1: $P\left[B(0) = 0\right] = 1$.

- **B2**: Tiene incrementos estacionarios: $B(t+\Delta t) - B(t) \overset{\mathrm{d}}{=} B(s+\Delta t) - B(s)$, $\forall\, s, t \in [t, +\infty]$, siendo la igualdad en distribución.
- **B3**: Tiene incrementos independientes, es decir, se cumple que las siguientes variables aleatorias: $B(t_2) - B(t_1)$, $B(t_3) - B(t_2)$, ..., $B(t_{n+1}) - B(t_n)$ con $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t_{n+1} < +\infty$, son independientes.
- **B4**: Sigue una distribución normal o gaussiana de media cero y varianza $t > 0$: $B(t) \sim N(0; \sqrt{t})$.
- **B5**: Tiene trayectorias continuas (sin saltos), pero que no son diferenciables en ningún punto.

Algunas de las trayectorias muestrales de este proceso pueden verse en la Figura 1. Éstas cumplen las condiciones **B1**-**B5**. Cada una de las trayectorias representadas podría ser el ruido o aleatoriedad que modeliza el término aleatorio de cada uno de los posibles caminos que el precio de la acción podría seguir de acuerdo al modelo de paseo aleatorio que se formulará más adelante. La elección de este proceso estocástico para su inclusión en el modelo (1) está fundamentada en el éxito que el mismo ha tenido en las aplicaciones reales. Sin embargo, ello no debe de extrañar en base al Teorema Central del Límite, ya que son muy numerosos y diferentes, los factores y variables que en el mundo real pueden llegar a determinar el valor de un activo financiero. Por otro lado, las trayectorias irregulares del proceso browniano recogen muy bien, cuando se incluyen en el modelo final (el modelo Log-normal), las gráficas que los operadores de índices manejan día a día al representar su evolución.

El movimiento browniano $B = \{B(t) : t \geq 0\}$ goza de las siguientes propiedades, de las cuales se hará uso posteriormente:

- **P1**: Función media: $\mu_B(t) = 0$, $\forall\, t \geq 0$.
- **P2**: Función covarianza: $Cov\,[B(t), B(s)] = \text{mín}(t, s)$, $\forall\, s, t \geq 0$.
- **P3**: Es $1/2$-autosemejante: $T^{\frac{1}{2}} B(t) = B(T\,t)$, $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, T > 0$.

La primera propiedad nos indica que, en media, el valor que toma este proceso es nulo (esto se aprecia intuitivamente en la Figura 1). La función de covarianza mide el grado de relación lineal (en el sentido estadístico) entre las variables aleatorias $B(s)$ y $B(t)$ que se obtienen al fijar dos instantes s y t. Mientras que la última propiedad es puramente geométrica. Se han introducido aquí estas propiedades, porque a continuación permitirán motivar el uso del modelo Log-normal en la valoración de acciones (véase, Figura 3).

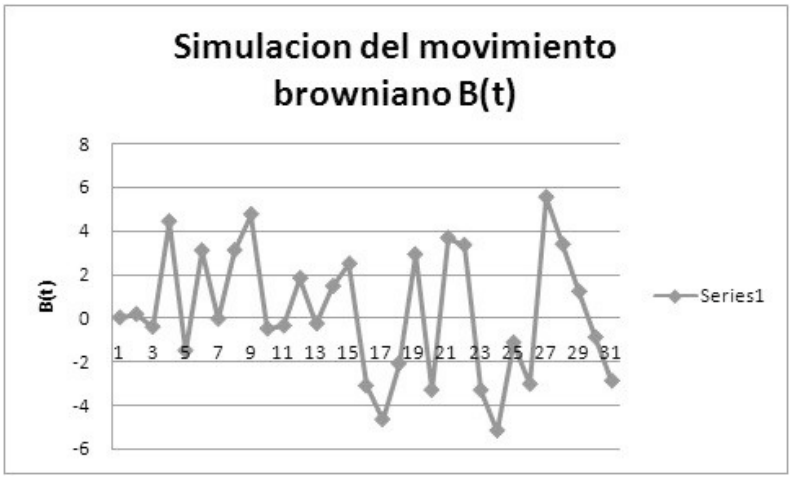


Figura 1: Trayectoria simulada para el movimiento browninano

2. Motivando el modelo Log-normal o Movimiento Browniano Geométrico

En esta sección se motivará la aplicación del modelo Log-normal desde dos enfoques diferentes. Para desarrollar el primer enfoque, se considerará en primer lugar el modelo clásico determinista de capitalización compuesta continua, y a partir del mismo, introduciendo la aleatoriedad en él, llegaremos a admitir como plausible el modelo Log-normal. En el segundo enfoque, más formal y técnico, se requerirá el uso del denominado Lema de Itô, y se presenta en este trabajo porque es el camino adecuado para formalizar gran parte de la teoría estocástica moderna de la modelización y valoración de activos financieros.
Sea S_0 un principal que se invierte (capitaliza) a un interés μ compuesto continuo durante un intervalo temporal $[0, T]$ dividido en K periodos de longitud $\Delta t > 0$ cada uno (véase, Figura 2).

Figura 2: Regimen de capitalización a interés compuesto continuo

Denotemos por $\widehat{S}^{(j)}$, $j = 0, 1, \ldots, K$, el capital al cabo de j períodos (por convenio de notación, implícitamente se supone que $\widehat{S}^{(0)} = S_0$), entonces sabemos que $\widehat{S}^{(1)} = S_0 \exp(\mu\Delta t)$, $\widehat{S}^{(2)} = \widehat{S}^{(1)} \exp(\mu\Delta t)$, y en general

$$\widehat{S}^{(j)} = \widehat{S}^{(j-1)} \exp(\mu\Delta t) \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, K\,, \tag{2}$$

y por tanto, razonando recursivamente se tiene

$$\widehat{S}^{(j)} = \widehat{S}^{(j-1)} \exp(\mu\Delta t) = \widehat{S}^{(j-2)} \exp(2\mu\Delta t) = \cdots = S_0 \exp(\mu j \Delta t)\,,\ j = 1, \ldots, K. \tag{3}$$

Obsérvese que cuando $j = K$, se cumple que: $\widehat{S}(T) = \widehat{S}^{(K)} = S_0 \exp(\mu K \Delta t) = S_0 \exp(\mu T)$, donde se ha utilizado que $K\Delta t = T$ y se ha introducido la notación siguiente: $\widehat{S}(T)$ representa el capital al cabo de K períodos. Es decir, el efecto de K pasos de longitud Δt equivale a un paso de tamaño $T = K\Delta t$. En realidad, este modelo de capitalización resulta de resolver el problema de valor inicial siguiente:

$$\frac{d\widehat{S}(t)}{dt} = \mu \widehat{S}(t) \quad , \quad \widehat{S}(0) = S_0\,, \tag{4}$$

cuya solución es

$$\widehat{S}(t) = S_0 \exp(\mu t)\,, \tag{5}$$

la cual, para $t = T$ captura la solución el problema anterior: $\widehat{S}(T) = S_0 \exp(\mu T)$. Es importante observar que el modelo (1) generaliza el (4), i.e., el modelo estocástico de partida contiene al modelo clásico determinista de capitalización continua, pues basta hacer $\sigma = 0$ en (1) para obtener a partir de la ecuación diferencial estocástica (1) la ecuación diferencial ordinaria (4). Sin embargo, hace falta subrayar que el valor de una acción está gobernado por multitud de factores y variables que deben considerarse inciertos y no deterministas, por ello (4) no es un buen modelo, si bien el modelo que aspire a ser adecuado debe recoger en su formulación (y el modelo (1), así lo hace, como se verá después) la parte del valor de la evolución del precio de la acción que se comporta de forma determinista como cualquier otra inversión libre de riesgo y, la parte, incierta o aleatoria, que hace que el valor de ese activo financiero no sea predecible de forma determinista.
Por un razonamiento intuitivo, en este primer enfoque, llegaremos a que la solución de la ecuación diferencial estocástica (1) es

$$S(t) = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B(t)\right)\,. \tag{6}$$

En el segundo enfoque, se resolverá la ecuación (1) utilizando el cálculo estocástico de Itô (véase, ([2]). Comencemos entonces con la deducción (intuitiva) anunciada.

Para ello, basándonos en (2) con $j = 1$, introduzcamos (la pertinente) aleatoriedad como sigue:

$$\widetilde{S}^{(1)} = S_0 \exp(\mu \Delta t) \exp(cZ_1)\,, \tag{7}$$

siendo c una constante libre (que más tarde fijaremos) y Z_1 una variable aleatoria normal o gaussiana tipificada, i.e, $Z_1 \sim N(0;1)$, y en general, introduciendo la aleatoriedad en (2) del mismo modo se tiene

$$\widetilde{S}^{(j)} = \widetilde{S}^{(j-1)} \exp(\mu \Delta t) \exp(cZ_j)\,, \tag{8}$$

siendo $Z_j \sim N(0;1)$. Si hacemos esto para cada, $j = 1, 2, \ldots, K$ de modo que, $Z_1, \ldots, Z_j, \ldots, Z_K$ sean variables aleatorias $N(0;1)$ e independientes. Desde (3) con $j = K$, obtenemos

$$\widetilde{S}^{(K)} = S_0 \exp(\mu K \Delta t) \exp(c\,(Z_1 + \cdots + Z_K))\,, \tag{9}$$

o equivalentemente

$$\widetilde{S}(T) = S_0 \exp(\mu T) \exp(c\,(Z_1 + \cdots + Z_K))\,.$$

La aleatoriedad introducida así en (7) (o más generalmente en (8)), parece coherente porque garantiza que $\widetilde{S}^{(1)} > 0$ (o más generalmente, $\widetilde{S}^{(j)} > 0$); pero no es totalmente satisfactoria, ya que, es de esperar que cuando no haya incertidumbre, el término $\widetilde{S}^{(1)}$ en (7) se comporte como en (3) con $j = 1$, al menos en media, y como $\widetilde{S}^{(1)}$ dada en (7) es una variable aleatoria log-normal para la cual se cumple (véase, [7])

$$E\left[\exp(cZ)\right] = \exp\left(\frac{c^2}{2}\right) \quad , \quad Z \sim N(0;1)\,, \tag{10}$$

por tanto se tiene

$$\begin{aligned} E\left[\widetilde{S}^{(1)}\right] &= E\left[S_0 \exp(\mu \Delta t) \exp(cZ_1)\right] &= S_0 \exp(\mu \Delta t) E\left[\exp(cZ_1)\right] \\ &= S_0 \exp(\mu \Delta t) \exp\left(\frac{c^2}{2}\right) &\neq S_0 \exp(\mu \Delta t) = \widetilde{S}^{(1)}\,. \end{aligned}$$

Para lograr este objetivo marcado, vamos a introducir la aleatoriedad como sigue

$$S^{(1)} = S_0 \exp\left(\mu \Delta t\right) \exp\left(cZ_1 - \frac{c^2}{2}\right)\,, \tag{11}$$

ya que, claramente de (10) se obtiene que

$$E\left[S^{(1)}\right] = S_0 \exp\left(\mu \Delta t\right)\,,$$

y en general en (2) introduciremos la aleatoriedad del mismo modo:

$$S^{(j)} = S^{(j-1)} \exp(\mu \Delta t) \exp\left(cZ_j - \frac{c^2}{2}\right) \ , \ j = 1, \ldots, K \, . \tag{12}$$

Razonando recursivamente como en (3) obtenemos

$$S(T) = S^{(K)} = S_0 \exp(\mu K \Delta t) \exp\left(c\left(Z_1 + \ldots + Z_K\right)\right) \exp\left(-K\frac{c^2}{2}\right) . \tag{13}$$

Denotemos por

$$W_K = Z_1 + \ldots + Z_K \, , \tag{14}$$

entonces dado que $Z_j \sim N(0; \sqrt{j})$, con $j = 1, 2, \ldots, K$, son variables aleatorias independientes se tiene $W_K \sim N(0; \sqrt{K})$ y como $K\Delta t = T$ y $S^{(K)} = S(T)$, (13) equivale a

$$S(T) = S_0 \exp(\mu T) \exp\left(c\, W_K - K\frac{c^2}{2}\right) , \tag{15}$$

donde S_0 es el precio o subyacente de la acción en el instante inicial; $\exp(\mu T)$ es la componente determinista del valor de la acción (ligado al valor μ del tipo de interés); W_K representa la introducción de la aleatoriedad en el modelo y $\exp(-Kc^2/2)$ es un término (determinista) de corrección.
La modelización dada (15) tiene una gran ventaja frente a otro tipo de modelos como los basados en árboles binomiales (véase, [8]), y es que permite que el valor de la acción no sólo tome dos valores posibles, sino cualquier valor positivo. Sin embargo, sigue conteniendo un defecto importante respecto de nuestros intereses; si fijamos T y vamos considerando subintervalos más pequeños (particiones más finas del intervalo $[0, T]$), es decir, hacemos $K \to \infty$ ó equivalentemente $\Delta t \to 0$, con T fijo, para la varianza del término que introduce la aleatoriedad en el modelo (15) se obtiene

$$Var\left[cW_K\right] = c^2 Var\left[W_K\right] = c^2 K \to +\infty \, , \tag{16}$$

esto es, la varianza de este término que forma parte del modelo de la acción aumentará cuantas más discretizaciones tomemos del intervalo objeto de análisis, con independencia del valor T que define su extremo superior, el cual está fijo. Esto carece de sentido desde el punto de vista financiero, ya que fijado un intervalo durante el cual se observa una acción, la volatilidad de la misma es un valor fijo que no debería cambiar aunque en lugar de observar la acción intra-semana lo hiciéramos intra-día. Para resolver esto, recordemos que la constante c introducida en (7) es libre y por tanto está a nuestro servicio. Tomemos entonces c de modo que

$$c^2 \, K = \sigma^2 \, T \, , \tag{17}$$

siendo σ^2 un parámetro fijo identificativo del modelo particular que manejemos (y que en la práctica se calculará a partir de los datos reales observados). De esta forma, según (16)

$$Var\left[c\,W_K\right] = \sigma^2\,T < +\infty\,. \tag{18}$$

Obsérvese que esto nos indica algo coherente que se aprecia en la práctica: a mayor longitud T del intervalo $[0,T]$, tendremos mayor volatilidad, es decir, variabilidad de la acción.
Vamos ahora a relacionar W_K dada en (14) con el movimiento browniano. A continuación, probaremos que

$$B(T) \overset{\mathrm{d}}{=} \sqrt{\Delta t}\,W_K \quad , \quad K\Delta t = T \tag{19}$$

siendo la igualdad anterior en distribución. Para ello, observemos que ambos términos de (19) son gaussianos: el miembro de la izquierda por la propia definición de movimiento browniano, y el miembro de la derecha, por ser la transformación lineal de W_K que es, como ya se ha señalado anteriormente normal o gaussiano. Además, por **B4**

$$E\left[B(T)\right] = 0 \quad , \quad E\left[\sqrt{\Delta t}\,W_K\right] = \sqrt{\Delta t}\,E\left[W_K\right] = 0\,,$$

ya que, $E\left[W_K\right] = 0$. Finalmente por **B4** sabemos que $Var\left[B(T)\right] = T$, y como $Var\left[W_K\right] = K$ y $K\Delta t = T$, se obtiene que

$$Var\left[\sqrt{\Delta t}\,W_K\right] = \Delta t\,Var\left[W_K\right] = \Delta t\,K = T\,.$$

Por otra parte, con la elección (17) se tiene

$$c = \sigma\,\sqrt{\frac{T}{K}}\,,$$

y como $K\,\Delta t = T$,

$$c = \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,, \tag{20}$$

y entonces

$$c\,W_K = \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,W_K = \sigma\,B(T)\,, \tag{21}$$

donde en el último paso hemos utilizado la propiedad (19). Finalmente, sustituyendo (17) y (21) en (15) llegamos a:

$$S(T) = S_0\,\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\,T\right)\,\exp\left(\sigma\,B(T)\right)\,. \tag{22}$$

Por lo que desde una motivación basada en la introducción de la aleatoriedad en el modelo determinista, hemos obtenido el modelo Log-normal.

Observemos además que de (22), la propiedad **P3** y aplicando (10) para $c = \sigma\sqrt{T}$, ya que, $B(1) \sim N(0;1)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} E\left[S(T)\right] &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right) E\left[\exp\left(\sigma B(T)\right)\right] \\ &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right) \exp\left(\frac{\left(\sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}\right) \\ &= S_0 \exp\left(\mu T\right) . \end{aligned} \tag{23}$$

En palabras, el modelo lognormal goza de la deseable propiedad de que el comportamiento medio del precio de la acción es el mismo que el valor en el caso determinista (véase (5) con $t = T$).
Para saber cómo evoluciona la volatilidad del precio de la acción según el modelo lognormal observemos que, razonando como para el caso de la media, la varianza está dada por,

$$\begin{aligned} Var\left[S(T)\right] &= E\left[\left(S(T)\right)^2\right] - \left(E\left[S(T)\right]\right)^2 \\ &= E\left[\left(S_0\right)^2 \exp\left(2\,\sigma\,B(T) + 2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right)\right] - \left(S_0 \exp(\mu T)\right)^2 \\ &= \left(S_0\right)^2 \exp\left(2\,\mu\,T\right)\left(E\left[\exp\left(2\,\sigma\,B(T)\right)\right] \exp\left(-\sigma^2\,T\right) - 1\right) \\ &= \left(S_0\right)^2 \exp\left(2\,\mu\,T\right)\left(E\left[\exp\left(2\,\sigma\sqrt{T}\,B(1)\right)\right] \exp\left(-\sigma^2\,T\right) - 1\right) \\ &= \left(S_0\right)^2 \exp\left(2\,\mu\,T\right)\left(\exp\left(\sigma^2\,T\right) - 1\right) . \end{aligned} \tag{24}$$

3. El enfoque Itô

Abordemos ahora la introducción del modelo lognormal mediante el segundo enfoque, el cual está basado, como ya se adelantó, en la aplicación del denominado *lema de Itô* que se presentará posteriormente.
En ambiente de certidumbre, si $\widehat{S}(t)$ es el valor resultante de invertir 1 euro a un régimen de capitalización a interés compuesto continuo a una tasa constante μ durante el intervalo de tiempo $[0, t]$, entonces como se vio en (4), $S(t)$ es la solución del siguiente problema de valor inicial cuya ecuación diferencial ordinaria indica que el capital crece a una tasa de crecimiento relativo constante e igual a μ, y cuya condición inicial indica la inversión al principio del intervalo:

$$\frac{d\widehat{S}(t)}{dt} = \mu\,\widehat{S}(t) \quad , \quad \widehat{S}(0) = 1\,. \tag{25}$$

Sin embargo, cuando la inversión se realiza en un mercado bursátil, es más realista considerar que la tasa de crecimiento de la inversión contiene incertidumbre, y ésta es habitualmente modelizada en la forma $\mu + \sigma\,\dot{B}(t)$, siendo $B(t) \sim N\left(0; \sqrt{t}\right)$, i.e., un proceso estocástico de tipo gaussiano o normal con media cero y varianza t, llamado movimiento browniano, y $\dot{B}(t)$ su derivada (en el sentido de la teoría de distribuciones, ya que, las trayectorias de dicho proceso estocástico no son diferenciables en ningún punto). Por su parte, $\dot{B}(t)$ es un proceso también gaussiano y estacionario, llamado ruido blanco. En este contexto, la ecuación diferencial dada en (25) se escribe en la forma

$$\frac{dS(t)}{dt} = \left(\mu + \sigma\,\dot{B}(t)\right)\, S(t)\,,$$

o en su representación diferencial dada en (1), i.e.,

$$dS(t) = \mu\, S(t)\, dt + \sigma\, S(t)\, dB(t)\,,$$

la cual, recordemos se denomina *ecuación diferencial estocástica*. Cuando $\sigma = 0$, corresponde a un modelo determinista (o sin ruido o incertidumbre) cuya solución para la condición inicial $S(0) = 1$, es bien conocida: $S(t) = \exp(\mu\, t)$, pero si $\sigma \neq 0$, su solución es un proceso estocástico, y para su cálculo se precisa de un cálculo estocástico especial, denominado *Cálculo de Itô*. Este cálculo maneja ecuaciones diferenciales estocásticas en la forma

$$X(t) = X_0 + \int_0^t A_1(s)\, ds + c \int_0^t A_2(s)\, dB(s)\,, \tag{26}$$

siendo $A_1(s)$ y $A_2(s)$ procesos estocásticos adaptados a la filtración $\Gamma = (\mathfrak{F})_t = (\sigma(\, B(s) : s \leq t\,))$, donde $\sigma(\, B(s) : s \leq t\,)$ es la σ-álgebra generada por $B(s)$ con $s \leq t$, (véase, [1]).
En (26), la primera integral es una integral ordinaria de Riemann y la segunda es una integral estocástica tipo Itô. Aunque las hipótesis se pueden relajar sustancialmente (véase, [2]), si suponemos que $A_1(s)$ y $A_2(s)$ son continuos y que con probabilidad 1 (c.p. 1) se cumple que

$$\int_0^t \left(A_2(s)\right)^2\, ds < +\infty\ ,\ \text{ c.p. } 1\,,$$

las integrales que aparecen en (26) están bien definidas.
La principal herramienta del cálculo de Itô, la cual desempeña un rol análogo a la regla de la cadena en el cálculo diferencial, está dada a través del siguiente resultado:

Teorema 1 *(*Lema de Itô. Versión adaptada al movimiento browniano*). Dada una ecuación diferencial estocástica de la forma (1) y $f(t,x)$ una función continua con*

derivada parcial de primer orden respecto de t continua y de segundo orden respecto de x continua, para $s < t$, se cumple:

$$\begin{aligned} f(t,B(t)) - f(s,B(s)) &= \int_s^t \left(\frac{\partial f(u,B(u))}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(u,B(u))}{\partial x^2} \right) du \\ &+ \int_s^t \left(\frac{\partial f(u,B(u))}{\partial x} \right) dB(u)\,. \end{aligned} \tag{27}$$

Para la aplicación de este resultado, escribamos primero la e.d.e. (1) con condición inicial $S(0) = S_0$ en forma integral

$$S(t) = S_0 + \int_0^t \mu\, S(x)\, dx + \int_0^t \sigma\, S(x)\, dB(x)\,, \tag{28}$$

y supongamos que $S(t) = f(t, B(t))$, entonces identificando coeficientes en (27) y (28), se tiene

$$\mu\, f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}\,, \tag{29}$$

$$\sigma\, f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\,, \tag{30}$$

derivando (30) respecto de la segunda variable, i.e., x, obtenemos

$$\sigma\, \frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}\,, \tag{31}$$

y sustituyendo (30) en (31), se llega a

$$\sigma^2\, f(t,x) = \frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}\,. \tag{32}$$

Simplificando (29)-(32), obtenemos las ecuaciones en derivadas parciales:

$$\left(\mu - \frac{1}{2}\,\sigma^2 \right)\, f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} \quad , \quad \sigma\, f(t,x) = \frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\,, \tag{33}$$

cuya solución buscamos -utilizando el método de separación de variables para ecuaciones en derivadas parciales-, en la forma $f(t,x) = g(t)\, h(x)$, con lo que según (33) se debe satisfacer

$$g(t) = g(0)\, \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\,\sigma^2 \right)\, t \right) \quad , \quad h(x) = h(0)\, \exp\left(\sigma\, x\right)\,, \tag{34}$$

por tanto,

$$f(t,x) = g(t)\,h(x) = g(0)\,h(0)\,\exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)\,t + \sigma\,x\right)\,,$$

y como por definición del movimiento browniano $B(0) = 1$ con probabilidad 1, se tiene que $S(0) = f(0, B(0)) = f(0,0) = g(0)\,h(0)$ luego

$$f(t,x) = S(0)\,\exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)\,t + \sigma\,x\right)\,.$$

Finalmente,

$$S(t) = f(t, B(t)) = S(0)\,\exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\,\sigma^2\right)\,t + \sigma\,B(t)\right) \quad , \quad t \geq 0\,,$$

que es el proceso estocástico solución de la ecuación diferencial estocástica (1), el cual es denominado en la literatura movimiento browniano geométrico o proceso estocástico lognormal, ya que, para cada t es la exponencial de una variable aleatoria gaussiana ($B(t)$). La Figura 3 muestra las simulaciones de algunas trayectorias muestrales de este proceso estocástico.

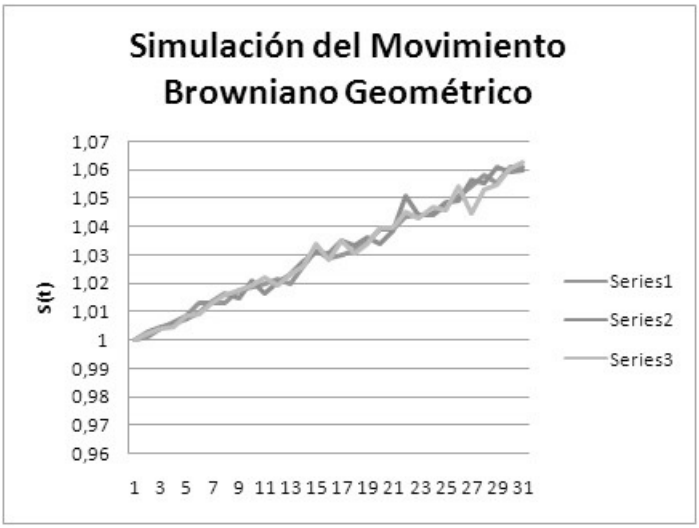


Figura 3: Trayectorias simuladas para el movimiento browninano geométrico

Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado una aplicación de las matemáticas a las Finanzas, estudiando mediante dos enfoques alternativos, el modelo denominado movimiento browniano geométrico, que se utiliza para predecir cómo evoluciona un activo financiero en el mercado real, lo que permite emitir predicciones de la acción. Con ello, se pretende mostrar un ejemplo donde la matemática es decisiva a la hora de dar una respuesta a cuestiones de la vida económica.

Referencias

[1] Lamberton D., Lapeyre B. (1996), *Introduction to Stochastic Calculus to Finance*. Chapman Hall/CRC, New York.

[2] Okksendahl B. (1998), *Stochastic Differential Equations*. Springer, Berlín.

[3] Black F., Scholes M. (1973), *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal of Financial Economics 4, 125-144.

[4] Merton R. (1976), *Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous*, Journal of Political Economy 81, 637-659.

[5] Bachellier L. (1900), *Théorie de la spéculation*, Annales du Science de L'École Normale Supérieure, 17, 21-86.

[6] Samuelson P. (1965), *Rational theory of warrants prices*, Industrial Management Review, 13-31.

[7] Quesada V., García A. (1988), *Lecciones de Cálculo de Probabilidades*. Ed. Díaz de Santos, Madrid.

[8] Hull J.C. (2002), *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*. Ed. Pearson Education, 4ª ed., Madrid.

Estabilidad, aproximación numérica y mecánica de fluidos

Leo M. González, Fabricio Macià, Antonio Souto Iglesias
ETSI Navales, UPM
{leo.gonzalez,fabricio.macia,antonio.souto}@upm.es

Abstract

In this paper, the numerical approximation of the one-dimensional transport equation by means of finite-difference schemes is discussed. Special attention is paid to the crucial concept of numerical stability, which can be clearly analyzed for this equation. It will be shown, through a series of basic but meaningful examples, how stability affects the quality of the numerical approximations. The procedures here described may serve as basis for the deep understanding of numerical approaches to other more complex physical phenomena.

1. Modelando la advección: la ecuación de transporte unidimensional

Las leyes que rigen el transporte de sustancias contaminantes a lo largo del curso de un río, o a través del aire; o bien la propagación del plancton o la salinidad del agua siguiendo las corrientes oceánicas son de una gran complejidad; no obstante, pueden destacarse dos fenómenos que predominan sobre el resto: advección y difusión. La segunda está asociada a naturaleza molecular de la materia; las móleculas tienden a propagarse de forma cuasialeatoria de las regiones donde la concentración es mayor a aquellas donde ésta es menor. La advección, por el contrario, es un fenómeno macroscópico: describe el

transporte puro de una concentración de moléculas siguiendo una dirección fija (o más generalmente, siguiendo un campo de direcciones).

Tal vez, el modelo más simple que describe la advección consiste en considerar una sustancia propagándose a lo largo de una dirección fija $\mathbf{v}$ del espacio. Si la concentración es constante a lo largo de las direcciones perpendiculares a $\mathbf{v}$ basta estudiar la propagación en dicha dirección. Podemos por ello suponer que la concentración en un instante de tiempo t viene descrita por una función $u\,(x,t)$ de la recta real. Si suponemos que el fluido se desplaza a una velocidad constante $c>0$, obtenemos la siguiente ley:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)+c\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}. \tag{1}$$

Para simplificar la exposición, supondremos en lo que sigue que u es periódica en x y que la concentración en el instante inicial $t=0$ es conocida. Más concretamente, asumiremos que:

$$\begin{cases} u\,(x,t) & \text{es } 2\pi\text{-periódica en } x \text{ para todo } t\in\mathbb{R},\\ u\,(x,0)=u_0\,(x) & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{2}$$

Dada una densidad inicial $u_0\in C^1\,(\mathbb{R})$ que sea $2\pi-$periódica, las solución de (1) es una función $u\in C^1\,(\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_t)$, 2π-periódica en x, dada por:

$$u\,(x,t)=u_0\,(x-ct)\,;$$

para $t,x\in\mathbb{R}$.

Generalmente, los sistemas más complejos dan lugar a modelos que no pueden resolverse de forma exacta. Por ello, es necesario recurrir a aproximaciones numéricas y métodos computacionales. Mostraremos en lo que sigue, a través de ejemplos sencillos basados en la ecuación de transporte (1), que la cuestión de la aproximación numérica es delicada y frecuentemente da resultados contrarios a la intuición. Ello está íntimanente ligado a un aspecto fundamental del análisis numérico de las ecuaciones diferenciales: el estudio de la *estabilidad* de las aproximaciones numéricas.

2. Análisis de Fourier de la ecuación de transporte

Tomemos una solución $u(x,t)$ de la ecuación (1) que satisfaga (2). Como dicha función es periódica en la variable x, admite un desarrollo en serie de

Fourier:

$$u(x,t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}_k(t) e^{ikx}, \tag{3}$$

donde los coeficientes (o modos) de Fourier vienen dados por:

$$\widehat{u}_k(t) = \int_{-\pi}^{\pi} u\,(x,t)\, e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}. \tag{4}$$

Al ser u continuamente derivable, la serie (3) converge puntualmente (véase por ejemplo [4], Teorema 2.1, p. 81) y cada uno de los modos $\widehat{u}_k$ es una función continuamente derivable de $\mathbb{R}$ a valores complejos. Combinando (4) con la ecuación (1) y realizando una integración por partes obtenemos:

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial t} u\,(x,t) + c \frac{\partial}{\partial x} u\,(x,t) \right] e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi} = \frac{d\widehat{u}_k}{dt}(t) + cik\widehat{u}_k(t).$$

Esta expresión no es más que una ecuación diferencial ordinaria para cada uno de los modos $\widehat{u}_k\,(t)$ cuya solución es

$$\widehat{u}_k(t) = e^{-cikt} \widehat{u}_k\,(0)\,. \tag{5}$$

Bien entendido, la condición inicial en (2) nos impone que:

$$\widehat{u}_k\,(0) = \int_{-\pi}^{\pi} u_0\,(x)\, e^{-ikx} \frac{dx}{2\pi}.$$

El punto de vista de Fourier nos muestra nítidamente el carácter conservativo de la ecuación de transporte. El módulo de cada coeficiente de Fourier satisface, a la luz de (5):

$$|\widehat{u}_k(t)| = |\widehat{u}_k(0)|, \qquad \text{para todo } t \in \mathbb{R}. \tag{6}$$

Por lo tanto la amplitud de cada uno de los modos es constante en el tiempo.

3. Aproximación numérica. Discretización

Para aproximar numéricamente la ecuación (1), dividimos el intervalo $[0, \pi)$ en N partes iguales. Pongamos

$$h := \pi/N \qquad \text{y elijamos } \Delta t \text{ positivo.}$$

Vamos a aproximar los valores

$$u\left(hj, \Delta t n\right) \approx u_j^n, \qquad j, n \in \mathbb{Z},$$

introduciendo una *discretización* de la ecuación de transporte (1). Más precisamente, vamos a sustituir las derivadas que intervienen en (1) por cocientes de diferencias adecuados.

Una posibilidad es utilizar diferencias simples en tiempo y diferencias centradas en espacio. Ello da lugar a:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \qquad j, n \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Las condiciones de contorno periódicas se traducen en la siguiente relación, coherente con que u_j^n sea $2N$-periódica en j:

$$u_{-N}^n = u_N^n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{8}$$

La condición inicial se convierte en:

$$u_j^0 = u\left(hj, 0\right), \qquad j \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Esta no es la única discretización natural que admite esta ecuación. Por ejemplo, se podrían reemplazar las diferencias centradas en espacio por unas diferencias simples; ello resulta en el método conocido como *upwind*:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \qquad j, n \in \mathbb{Z}, \tag{10}$$

que en este caso se complementa con las condiciones de contorno (8) y la condición inicial (9).

4. Análisis de Fourier de la discretización

Reescribimos la ecuación en diferencias (7) de la siguiente forma:

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \tag{11}$$

Podemos expresar la función discreta u_j^n en términos de su serie de Fourier discreta:

$$u_j^n = \sum_{k=-N}^{N-1} \widehat{u}_k^n e^{ikhj},$$

donde los correspondientes coeficientes de Fourier vienen dados por:

$$\widehat{u}_k^n = \sum_{j=-N}^{N-1} u_j^n \frac{e^{-ikhj}}{2\pi}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (11) y simplificando obtenemos:

$$\sum_{k=-N}^{N-1} \widehat{u}_k^{n+1} e^{ikhj} = \sum_{k=-N}^{N-1} \widehat{u}_k^n e^{ikhj} - \frac{c\Delta t}{2h} \sum_{k=-N}^{N-1} \widehat{u}_k^n (e^{ikh} - e^{-ikh}) e^{ikhj};$$

de ello se obtiene que para cada número de onda $k = -N, ..., N+1$ se satisface una ecuación de la forma:

$$\widehat{u}_k^{n+1} = \widehat{u}_k^n - \frac{c\Delta t}{2h}(e^{ikh} - e^{-ikh})\widehat{u}_k^n = \left(1 - \frac{ic\Delta t}{h}\,\mathrm{sen}(kh)\right)\widehat{u}_k^n \tag{12}$$

con

$$\widehat{u}_k^0 = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-N}^{N-1} u_j^0 e^{-ikhj}. \tag{13}$$

Es conveniente recordar que los vectores $(2\pi)^{-1/2}\left(e^{-ikhj}\right)_{j=-N,...,N-1}$ constituyen una base ortonormal de $\mathbb{C}^{2N}$.

La solución del problema de valor inicial (12), (13) no es más que:

$$\widehat{u}_k^n = \left(1 - i\frac{c\Delta t}{h}\,\mathrm{sen}(kh)\right)^n \widehat{u}_k^0. \tag{14}$$

Claramente, esta fórmula difiere de su ánaloga continua (5).

Un análisis análogo para el método upwind (10) resulta en:

$$\widehat{u}_k^n = \left(1 - \frac{c\Delta t}{h}\left[1 - \cos\left(kh\right)\right] - i\frac{c\Delta t}{h}\operatorname{sen}\left(kh\right)\right)^n \widehat{u}_k^0 \tag{15}$$

5. Discretización espacial *vs.* discretización temporal

Es interesante, tanto a efectos prácticos como desde un punto de vista más analítico, poder distinguir qué características de la solución aproximada (14) provienen de la discretización espacial y cuáles son debidas a la discretización temporal. Introduzcamos la función L_h:

$$L_h\left(k\right) := \frac{ic}{h}\operatorname{sen}(kh); \tag{16}$$

La fórmula (14) para nuestra solución aproximada se escribe entonces:

$$\widehat{u}_k^n = \left(1 - \Delta t L_h\left(k\right)\right)^n \widehat{u}_k^0.$$

La función L_h suele llamarse así por analogía con la terminología utilizada en ecuaciones diferenciales donde el *símbolo* del operador de diferencias $\mathcal{L}_h$ se define como:

$$\mathcal{L}_h f\left(x\right) := c\frac{f\left(x+h\right) - f\left(x-h\right)}{2h}.$$

Puede comprobarse fácilmente que, dada una función $2\pi-$periódica $f\left(x\right)$, se tiene $\widehat{\mathcal{L}_h f}_k = L_h\left(k\right)\widehat{f}_k$.

Es claro ahora que la discretización de la parte espacial es responsable de la aparición del término $L_h\left(k\right)$ mientras que la parte temporal introduce un término de la forma:

$$G_{\Delta t}\left(\tau\right) := 1 - \Delta t\tau;$$

vemos finalmente que, con esta nueva notación, (14) se escribe:

$$\widehat{u}_k^n = \left[G_{\Delta t}\left(L_h\left(k\right)\right)\right]^n \widehat{u}_k^0.$$

Quedan así claras las contribuciones de las discretizaciones temporales y espaciales a la estructura de las soluciones de la ecuación discreta (7). En

resumen: *un cambio en la discretización espacial producirá un nuevo símbolo L_h, mientras que modificar la discretización temporal resulta en un cambio de la función $G_{\Delta t}$.*

Ahora estamos en condiciones de examinar las cualidades de la aproximación introducida por la discretización (7). Comencemos examinando el símbolo L_h:

$$L_h(k) = cik\frac{\operatorname{sen}(kh)}{kh} = cik\left(1 + r(hk)\right),$$

donde el resto es de la forma $r(\xi) = -\xi^2/6 + \mathcal{O}\left(\xi^4\right)$, con lo que, en particular se tiene:

$$\lim_{h\to 0^+} L_h(k) = cik. \tag{17}$$

Por otro lado, escribiendo $t = n\Delta t$,

$$G_{\Delta t}(\tau)^n = (1 - \Delta t\tau)^n = \left(1 - \frac{t}{n}\tau\right)^n \underset{\Delta t = t/n \to 0^+}{\to} e^{-\tau t}. \tag{18}$$

Así, de forma ingenua se podría pensar combinando (17) y (18) que

$$G_{\Delta t}(L_h(k)) \text{ es una buena aproximación de } e^{-cikt},$$

cuando h y Δt son pequeños. A la vista de la fórmula (5) ello implicaría que las soluciones de (7) son en efecto buenas aproximaciones de las de (1).

Si realizamos simulación numérica se observa que esto no es así (véase figura 1). Ello está relacionado con el carácter *inestable* de la aproximación (7). Los códigos en MATLAB de los programas utilizados para realizar las simulaciones numéricas se encuentran disponibles en la siguiente dirección web: `http://canal.etsin.upm.es/ftp/PUIGADAM.rar`

Describiremos a continuación y de forma precisa cómo tiene lugar este fenómeno. Comencemos calculando el módulo de los coeficientes $\widehat{u}_k^n$:

$$\left|\widehat{u}_k^n\right| = \left|G_{\Delta t}(L_h(hk))\right|^n \left|\widehat{u}_k^0\right| = \left(1 + \left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2 c^2 \operatorname{sen}^2(hk)\right)^{\frac{n}{2}} \left|\widehat{u}_k^0\right|.$$

Tenemos cotas:

$$1 \le 1 + \left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2 c^2 \operatorname{sen}^2(hk) \le 1 + \left(\frac{\Delta t}{h}\right)^2 c^2,$$

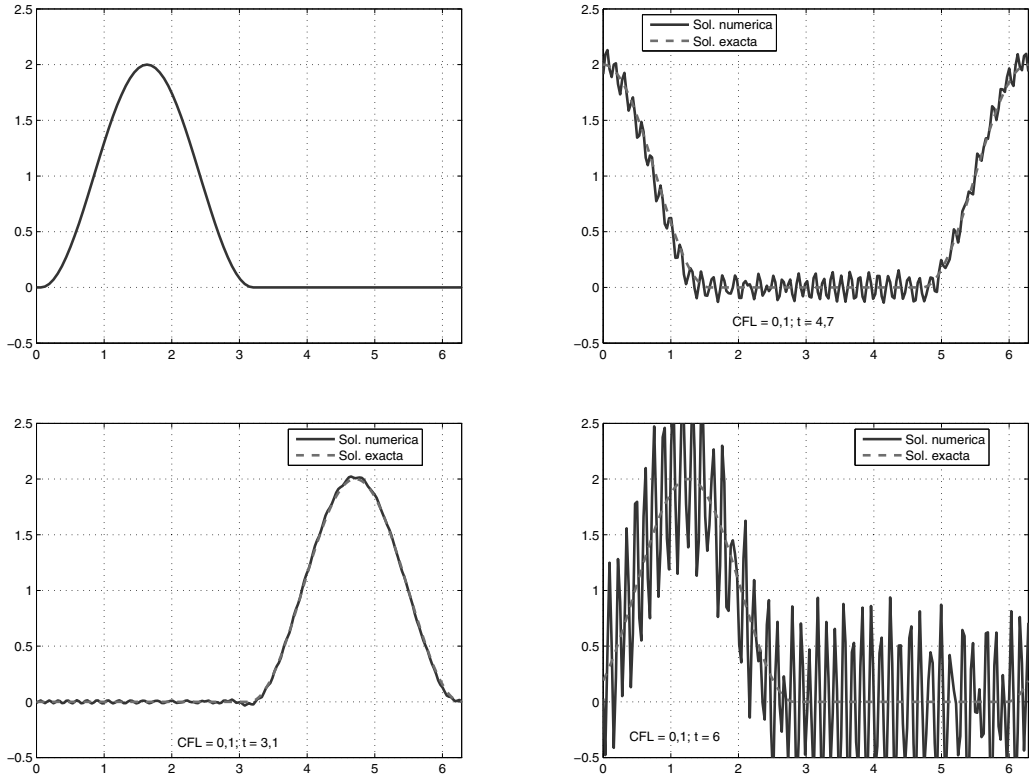


Figura 1: *Solución obtenida con la discretización centrada para el dato inicial* $u_0(x) = \operatorname{sen}(x - \pi/2)$ *para* $x \in (0, \pi)$ *y* $u_0(x) = 0$ *para* $x \in (\pi, 2\pi)$.

que se alcanzan para $k = \pm N$ y $k = \pm N/2$ respectivamente (al menos cuando N es par). Vemos por tanto que, si por ejemplo $\Delta t/h = \gamma > 0$, se tendrá, poniendo $t = n\Delta t$ y $|k| = 1, ..., N-1$:

$$|\widehat{u}_k(t)| \approx |\widehat{u}_k^n| = \left(1 + \gamma^2 c^2 \operatorname{sen}^2(hk)\right)^{n/2} \left|\widehat{u}_k^0\right| \underset{\Delta t = t/n \to 0^+}{\to} \infty, \tag{19}$$

en claro contraste con el fenómeno conservativo (6) que tiene lugar para la ecuación de transporte continua. Es de destacar que (19) tiene lugar independientemente del tamaño de h y Δt. En particular, no mejora tomando h ó Δt más pequeños (siempre que estén ligados por la relación $\Delta t/h = \gamma$).

La situación es bien distinta para el método upwind (10). Razonando de

Observemos además que de (22), la propiedad **P3** y aplicando (10) para $c = \sigma\sqrt{T}$, ya que, $B(1) \sim N(0;1)$ se tiene que:

$$\begin{aligned} E\left[S(T)\right] &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right) E\left[\exp\left(\sigma B(T)\right)\right] \\ &= S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right) \exp\left(\frac{\left(\sigma\sqrt{T}\right)^2}{2}\right) \\ &= S_0 \exp\left(\mu T\right) . \end{aligned} \tag{23}$$

En palabras, el modelo lognormal goza de la deseable propiedad de que el comportamiento medio del precio de la acción es el mismo que el valor en el caso determinista (véase (5) con $t = T$).
Para saber cómo evoluciona la volatilidad del precio de la acción según el modelo lognormal observemos que, razonando como para el caso de la media, la varianza está dada por,

$$\begin{aligned} Var\left[S(T)\right] &= E\left[\left(S(T)\right)^2\right] - \left(E\left[S(T)\right]\right)^2 \\ &= E\left[\left(S_0\right)^2 \exp\left(2\,\sigma\,B(T) + 2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) T\right)\right] - \left(S_0 \exp(\mu\,T)\right)^2 \\ &= \left(S_0\right)^2 \exp\left(2\,\mu\,T\right)\left(E\left[\exp\left(2\,\sigma\,B(T)\right)\right] \exp\left(-\,\sigma^2\,T\right) - 1\right) \\ &= \left(S_0\right)^2 \exp\left(2\,\mu\,T\right)\left(E\left[\exp\left(2\,\sigma\sqrt{T}\,B(1)\right)\right] \exp\left(-\,\sigma^2\,T\right) - 1\right) \\ &= \left(S_0\right)^2 \exp\left(2\,\mu\,T\right)\left(\exp\left(\,\sigma^2\,T\right) - 1\right) . \end{aligned} \tag{24}$$

3. El enfoque Itô

Abordemos ahora la introducción del modelo lognormal mediante el segundo enfoque, el cual está basado, como ya se adelantó, en la aplicación del denominado *lema de Itô* que se presentará posteriormente.
En ambiente de certidumbre, si $\widehat{S}(t)$ es el valor resultante de invertir 1 euro a un régimen de capitalización a interés compuesto continuo a una tasa constante μ durante el intervalo de tiempo $[0,t]$, entonces como se vio en (4), $S(t)$ es la solución del siguiente problema de valor inicial cuya ecuación diferencial ordinaria indica que el capital crece a una tasa de crecimiento relativo constante e igual a μ, y cuya condición inicial indica la inversión al principio del intervalo:

$$\frac{d\widehat{S}(t)}{dt} = \mu\,\widehat{S}(t) \quad , \quad \widehat{S}(0) = 1\,. \tag{25}$$

6. Estabilidad desde el punto de vista de la discretización temporal

Hemos insistido en distinguir las contribuciones respectivas de las discretizaciones temporales y espaciales. Ello viene motivado por el hecho de que generalmente la estructura de las segundas puede ser de gran complejidad, como sucede cuando la parte espacial viene aproximada mediante elementos o volúmenes finitos – situación muy habitual cuando se pretende resolver numéricamente ecuaciones en geometrías complejas – o, como cuando se emplea un método de partículas para resolver un problema de mecánica de fluidos. Esto conlleva serios obstáculos a la hora de realizar una análisis de estabilidad similar al de la sección anterior. Por ello es interesante tener criterios que permitan asegurar la estabilidad de la aproximación numérica que estén únicamente basados en la discretización temporal.

Por ello consideramos la ecuación diferencial ordinaria lineal:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \lambda y, & \text{con } \lambda \in \mathbb{C}, \\ y(0) = A. \end{cases} \tag{20}$$

La solución exacta del problema de valor inicial anterior es $y\left(t\right) = Ae^{\lambda t}$.

Como hicimos en la sección anterior, construimos la aproximación discreta:

$$\frac{y^{n+1} - y^n}{\Delta t} = \lambda y^n, \qquad y^0 = A, \tag{21}$$

que, en la notación usada anteriormente, se escribe,

$$y^{n+1} = (1 + \lambda \Delta t) y^n = G_{\Delta t}\left(\lambda\right) y^n,$$

y, por tanto, viene dada por:

$$y^n = G_{\Delta t}\left(\lambda\right)^n A. \tag{22}$$

Un requerimiento natural para que la ecuación discreta (21) produzca buenas aproximaciones de la ecuación lineal (20) es que la primera reproduzca el comportamiento cualitativo de la segunda. En particular, si las soluciones de (20) permanecen acotadas para $t \geq 0$, éste también debería ser el caso para la aproximación discreta (21).

Las soluciones de (20) permanecen acotadas para todo $t \geq 0$ siempre que

$$\operatorname{Re} \lambda \leq 0; \tag{23}$$

no obstante, a la vista de (21), resulta claro que en la aproximación discreta esto ocurre si y sólo si:

$$|G_{\Delta t}(\lambda)| = |G_1(\lambda \Delta t)| = |1 + \lambda \Delta t| \leq 1,$$

o dicho de otro modo, cuando

$$(1 + \operatorname{Re}(\lambda \Delta t))^2 + \operatorname{Im}(\lambda \Delta t)^2 \leq 1, \tag{24}$$

que corresponde a los valores de $\lambda \Delta t$ contenidos en la circunferencia de centro $(-1, 0)$ y radio unidad.

El claro contraste entre (23) y (24) muestra que el rango de valores λ para el cual la aproximación (21) reproduce los de la ecuación diferencial ordinaria lineal es muy restringido (en particular es acotado) y que éste mejora a medida que Δt disminuye.

Esta construcción puede realizarse para cualquier aproximación discreta que se desee de la E.D.O. lineal (20), dando lugar a una nueva función $G_{\Delta t}(\lambda)$. En ese caso, se define la *región de estabilidad* del esquema numérico correspondiente como la región del plano complejo dada por

$$z \in \mathbb{C}, \qquad |G_1(z)| \leq 1.$$

Los valores $z = \lambda \Delta t$ con $\operatorname{Re} z \leq 0$ que pertenece a la región de estabilidad son precisamente los valores para los cuales las soluciones $y^n = G_{\Delta t}(\lambda)^n A$ del esquema numérico permanece acotadas para todo $n \geq 0$.

Desde este punto de vista, un esquema numérico proporciona una mejor aproximación en tanto en cuanto su región de estabilidad cubra una mayor parte del semiplano $\operatorname{Re} z \leq 0$. En las referencias [1, 6] puede encontrarse una descripción más detallada de las regiones de estabilidad correspondientes a distintas discretizaciones temporales.

Estas consideraciones aportan una nueva luz al análisis de las aproximaciones numéricas de la ecuación de transporte (1). El análisis de Fourier

permite reescribirla como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales e independientes:

$$\frac{d\widehat{u}_k}{dt}(t) = -cik\widehat{u}_k(t).$$

Siempre que $c > 0$, los valores $\lambda = -cik$ satisfacen la condición $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$, lo que es coherente con el carácter conservativo de la ecuación.

Si aplicáramos a la ecuación una discretización únicamente temporal obtendríamos:

$$\frac{\widehat{u}_k^{n+1} - \widehat{u}_k^n}{\Delta t} = -cik\widehat{u}_k^n.$$

El análisis anterior muestra que dicha aproximación reproduce el comportamiento cualitativo de la ecuación original siempre que $-cik\Delta t$ pertenezca a la región de estabilidad de la discretización. Y esto no puede ocurrir si $k \neq 0$, puesto que, como ya vimos, dicha región es un círculo cuya circunferencia corta al eje imaginario en el origen. Esta fenomenología prevalece si reemplazamos la derivada espacial $-cik$ por el símbolo asociado a las diferencias centradas (16), de ahí que la aproximación numérica (7) no de buenos resultados. No es el caso si se utiliza la discretización upwind (10) con número de courant $c\Delta t/h = 1$; Δt veces el símbolo de la discretización es es precisamente la cantidad $1 - \cos(kh) + i\,\mathrm{sen}\,(kh)$ que claramente pertenece a la región de estabilidad (23). En conclusión, las propiedades de aproximación de un esquema numérico para la ecuación de transporte (1) no pueden basarse únicamente en la elección, de forma independiente, de buenas aproximaciones para las derivadas espaciales y temporales. Una metodología numérica correcta puede ser la siguiente: se elige la discretización temporal de forma que el símbolo de la discretización espacial L_h tome valores en su región de estabilidad $|G_{\Delta t} \circ L_h| \leq 1$. Cuando no se tiene información sobre el símbolo L_h ha de procurarse elegir la discretización espacial de forma que su región se estabilidad cubra la mayor fracción posible del semiplano $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$.

Existen numerosos textos desde los que el lector podrá profundizar sobre estas cuestiones. La relación entre estabilidad y convergencia de esquemas numéricos para la aproximación de problemas lineales viene excelentemente descrita en el artículo [2]. En este breve texto, hemos ignorado muchos aspectos relevantes de la aproximación numérica de la ecuación de transporte, como son, por ejemplo, el estudio de la velocidad de fase y la velocidad de

grupo. El lector deseoso conocer mejor este rico campo, a caballo entre las matemáticas y la ingeniería, puede consultar, de entre las muchas existentes, las referencias [3, 5, 6], que destacan por su claridad y valor pedagógico.

7. Conclusiones y trabajo futuro

Hemos estudiado en este artículo la aproximación numérica de la ecuación de transporte unidimensional mediante esquemas de diferencias finitas. La idea ha sido entender de modo preciso el concepto de estabilidad asintótica de la aproximación discreta a la solución continua, y de cómo esa estabilidad es comprometida por el tipo de discretización del espacio y del tiempo, y la combinación de ambas. Es sorprendente que esquemas que en principio parecen de peor calidad, se demuestren mejores al reproducir la solución analítica de la ecuación de partida. La compresión de estos problemas es crucial para poder estudiar esquemas de resolución numérica de problemas en Mecánica del Continuo (tanto fluidos como estructuras) y si a los lectores de este Boletín les pareciere interesante el artículo, quizá en una temática no muy visitada en el mismo, pero creemos que relevante, nuestro trabajo futuro más inmediato pasaría por el estudio de la ecuación de transporte con velocidad de propagación variable, o ecuación de Burgers sin viscosidad.

Referencias

[1] Butcher, J. C. *Numerical methods for ordinary differential equations.* Second edition. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 2008.

[2] Sanz-Serna, J. M. Stability and convergence in numerical analysis. I. Linear problems—a simple, comprehensive account. *Nonlinear differential equations (Granada, 1984)*, 64–113, Res. Notes in Math., **132**, Pitman, Boston, MA, 1985.

[3] Sanz-Serna, J. M. Fourier techniques in numerical methods for evolutionary problems. *Computational physics (Granada, 1994)*, 145–200, Lecture Notes in Phys., **448**, Springer, Berlin, 1995.

[4] Stein, E.M.; Shakarchi, R. *Fourier analysis. An introduction.* Princeton Lectures in Analysis, **1**. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003.

[5] Trefethen, L.N. Group velocity in finite difference schemes. *SIAM Rev.* **24**(2) (1982), 113–136.

[6] Vichnevetsky, R.; Bowles, J. B. *Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations.* SIAM Studies in Applied Mathematics, **5**. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, Pa., 1982.

Desarrollo de competencias básicas a través de las matemáticas

por

M. Mercedes Sánchez Benito
Dept. de Matemática Aplicada de la Facultad de Matemáticas de la UCM
IES Ortega y Gasset de Madrid
merche@mat.ucm.es

Abstract

Some reflections about skills acquisition through problem solving as training for Mathematical Olympiads are developed along the paper.
.

El pasado mes de julio tuvo lugar en El Escorial el curso Desarrollo de competencias básicas a través de las matemáticas dirigido por Eugenio Roanes Lozano y tuve la fortuna de participar en la mesa redonda *Entrenamiento para concursos y olimpiadas matemáticas y adquisición de competencias. La búsqueda de talentos matemáticos*.

En este texto, quiero desarrollar algunas de las reflexiones que presenté allí sobre la adquisición de competencias a través de la resolución de problemas como preparación para la participación en las distintas olimpiadas matemáticas.

Los concursos de resolución de problemas de matemáticas son una vieja tradición en muchos países, probablemente se remonta hasta la antigua Grecia. Son famosos los concursos para resolver ecuaciones cúbicas en la Italia del siglo XVI. En Francia hubo competiciones matemáticas en el siglo XVIII. Hungría comenzó en 1894 el concurso Eötvös (con el nombre de Kürschák a partir de 1947) que privilegia los modos de razonamiento, el ingenio y la capacidad de hacer un buen uso de las facultades intelectuales. No exige un conocimiento de matemáticas avanzadas. Los participantes se preparan durante años para destacar en este concurso, pasando por otros concursos desarrollados en la enseñanza secundaria y empezando en la escuela primaria.

El concurso continúa hoy día y es el más claro antecedente de la Olimpiada Matemática Internacional. La primera Olimpiada Matemática, con ese nombre, tuvo lugar en Leningrado (actual San Petersburgo) en 1934, y la segunda en Moscú en 1935, organizadas, entre otros, por Delaunay; éste expresó en una conferencia: *"Un alumno no es un recipiente que hay que llenar de conocimientos, sino una antorcha que hay que encender".*

Este espíritu ha prevalecido hasta nuestros días en la preparación de los alumnos que participan en las olimpiadas. A diferencia de lo que ocurre en la enseñanza reglada de las matemáticas en la Enseñanza Secundaria, en la cual a los alumnos realizan ejercicios rutinarios sobre los temas curriculares, dejando un poco de lado el placer de entender y pensar por sí mismos, en las Olimpiadas de Matemáticas se les presentan verdaderos problemas que no requieren del conocimiento de muchos contenidos, pero sí presentan un desafío tal que en la búsqueda de sus soluciones los alumnos construyen significados, redescubren conceptos básicos y adquieren habilidades y destrezas de gran utilidad para sus estudios posteriores.

Las Olimpiadas Matemáticas se popularizaron en toda la (entonces llamada) Unión Soviética y luego se extendieron a los países que vivían bajo su "paraguas" como Rumanía, Polonia, Alemania del Este, Bulgaria, Hungría…..

El nombre de Olimpiada data de 1959, año de celebración de la primera Olimpiada Matemática Internacional por iniciativa de Rumanía. Muchos de los grandes matemáticos actuales han pasado por la Olimpiada Internacional y además algunos de ellos han sido medallas Fields, recientemente Timothy Gowers, T. Tao y G. Perelman.

En España la Olimpiada de Matemáticas se celebra desde 1964 y toma como modelo la IMO. La primera vez que España participó en la IMO fue en 1983 por iniciativa de Miguel de Guzmán y allí asistieron Ceferino Ruiz y Jordi Dou como jefe de delegación y tutor respectivamente y los estudiantes participantes fueron: José Burillo Puig (UPC), Roberto Selva Gómez (UPC), Francisco J. Díaz Vega (UNED) y José Marañón Mora (US).

De la Olimpiada Matemática Española también han surgido grandes matemáticos: José Luis Rubio de Francia, Antonio Córdoba, Jesús Sanz Serna, Ricardo Pérez Marco…

Después de este pequeño recorrido histórico vamos a plantearnos una serie de cuestiones.

¿Qué son las Olimpiadas de Matemáticas?

En general son concursos en los que participan estudiantes de niveles previos a la licenciatura, estos estudiantes se enfrentan a problemas que ponen a prueba sus habilidades de razonamiento, su ingenio y su creatividad; en la resolución de estos problemas el estudiante pone a prueba su capacidad para analizar y encontrar una solución del problema y definir una estrategia para resolverlo.

Pero, en realidad, son mucho más que esto. En la olimpiada se comparten otras muchas cosas además de las matemáticas, bajo la única afición común que es el deseo de aprender matemáticas conviven todas las razas, todas las religiones, todos los sistemas políticos (en el caso de las olimpiadas internacionales), todas las clases sociales, distintas formas de vida (en el caso de las olimpiadas nacionales); no hay mejor medicina contra el racismo, a favor de la integración, de la no violencia y de la utópica igualdad.

En el libro de la vida de muchos de los participantes se escriben páginas enteras de superación, de esfuerzo y de compañerismo. Pero también se hacen amigos y se forjan una serie de conocimientos que perdurarán toda la vida; no olvidemos que la adolescencia junto con la infancia, en el recuerdo, nos acompañarán siempre.

Hay sensaciones que dejan una huella indeleble; estoy segura de que para la inmensa mayoría de los participantes resulta una experiencia inolvidable por razones muy variadas, a lo mejor no precisamente matemáticas.

Por ejemplo, yo no olvidaré nunca mi participación como miembro del equipo español en la IMO 2004 en Atenas, todos *disfrutamos* de la luz cegadora del mar Egeo, de la belleza que se siente al contemplar de cerca los mármoles del Partenon, de la ciudad de Atenas con sus calles abigarradas y coloristas, sus mercados y sus tabernas, de la simpatía de un pueblo y de su buen hacer matemático.

El objetivo que persigue la olimpiada matemática es intentar entusiasmar a nuestros jóvenes con el placer de hacer matemáticas, de ejercitar la imaginación en la resolución de problemas, de abrir una ventana al gran mundo de las matemáticas más allá de lo que se ve a través de la enseñanza reglada.

Los fines de la IMO se pueden resumir en:

- Descubrir, potenciar y estimular a jóvenes talentos para las matemáticas de todos los países del mundo.
- Establecer y fomentar lazos académicos y de amistad entre los profesores de los distintos países.
- Crear la oportunidad para el intercambio de información de los dife-

rentes programas educativos en matemáticas y la forma de llevarlos a la práctica.

¿Cómo participan los alumnos y en qué condiciones?

En España se organizan varias olimpiadas. Las más resaltables son:

La **OME** (Olimpiada Matemática Española), organizada por la RSME (`www.rsme.es`) en colaboración con el Ministerio de Educación, Política Social y Deporte con quien tiene suscrito un convenio de colaboración, dirigida a estudiantes de Bachillerato, pero pueden participar también estudiantes de tercero y cuarto de ESO, siempre que un profesor avale su participación.

En general, se celebra en dos fases, una local y una nacional. De la olimpiada nacional sale el equipo de 6 estudiantes que participará en la IMO y posteriormente los 4 que participarán en la Olimpiada Iberoamericana. Tanto la fase local como la nacional consisten en dos sesiones de 3 problemas cada una, a resolver en 3 horas y media. En la última fase, los participantes sólo pueden hacer preguntas (y por escrito) durante la primera media hora de cada sesión.

La **OMN** (Olimpiada Matemática Nacional), organizada por la Federación de Asociaciones de Profesores de Matemáticas. Comprende tres fases: provincial, regional y nacional. La fase provincial consiste en un único examen con 6 problemas, mientras que las fases regional y nacional comprenden también pruebas por equipos consistentes en búsqueda de pistas, problemas espaciales, cálculo mental, etc. Los equipos nunca están formados por más de un participante de la misma Comunidad Autónoma, para fomentar la diversidad. Participan en ella estudiantes de 2° de ESO.

El **Canguro Matemático** y el **Cangur**, organizados respectivamente en Castilla y en las Comunidades de lengua catalana, es una competición que ordena a los estudiantes en 6 niveles diferentes dependiendo del curso en el que estén matriculados. Su equivalente madrileño es el Concurso de Primavera.

Las competiciones internacionales en las que participa España son:

IMO, la más prestigiosa competición internacional de matemáticas en la que participan 6 alumnos de cada país invitado. Este año se ha celebrado en el del 14 al 22 de julio en Madrid.

OIM (Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas). Participan 4 alumnos de cada país invitado. Son invitados la mayoría de los países de habla hispana y portuguesa de América y Europa. Este año se ha realizado en el mes de septiembre en Bahia Brasil.

Los temas sobre los que versan los problemas son: Teoría de números, Combinatoria, Geometría, Desigualdades, Ecuaciones funcionales, Juegos……, temas todos ellos muy alejados del currículo escolar.

Las Olimpiadas Matemáticas apoyan la hipótesis de que un aprendizaje profundo de las matemáticas se hace a través de la resolución de problemas.

Miguel de Guzmán defendía con energía la educación matemática a través de la resolución de problemas, en un estudio titulado "La enseñanza de las Matemáticas, Tendencias e innovaciones" publicado en 1993 en Madrid, Editorial Popular SA, afirmaba:

La enseñanza por resolución de problemas pone el énfasis en los procesos de pensamiento, en los procesos de aprendizaje y toma los contenidos matemáticos, cuyo valor no se debe dejar a un lado, como campo de operaciones privilegiado para la tarea de hacerse con formas de pensamiento eficaces.

Se trata de considerar como lo más importante:

- *Que el alumno manipule los objetos matemáticos;*
- *Que active su propia capacidad mental;*
- *Que ejercite su creatividad,*
- *Que reflexione sobre su propio proceso de pensamiento a fin de mejorarlo conscientemente;*
- *Que, a ser posible, haga transferencias de estas actividades a otros aspectos de su trabajo mental;*
- *Que adquiera confianza en sí mismo; que se divierta con su propia actividad mental;*
- *Que se prepare así para otros problemas de la ciencia y, posiblemente, de su vida cotidiana;*
- *Que se prepare para los nuevos retos de la tecnología y de la ciencia.*

¿Cuáles son las ventajas de este tipo de enseñanza? ¿Por qué esforzarse para conseguir tales objetivos? He aquí unas cuantas razones interesantes:

- *Porque es lo mejor que podemos proporcionar a nuestros jóvenes: capacidad autónoma para resolver sus propios problemas;*
- *Porque el mundo evoluciona muy rápidamente: los procesos efectivos de adaptación a los cambios de nuestra ciencia y de nuestra cultura no se hacen obsoletos;*
- *Porque el trabajo se puede hacer atrayente, divertido, satisfactorio, autorrealizador y creativo;*
- *Porque muchos de los hábitos que así se consolidan tienen un valor universal, no limitado al mundo de las matemáticas;*
- *Porque es aplicable a todas las edades.*

Después de estas reflexiones es evidente que a través de la resolución de problemas se pueden adquirir todas las competencias básicas:

- *La comunicación lingüística* en numerosos sentidos. En primer lugar, es imprescindible el uso de vocabulario específico referente a la terminología matemática, utilizado bien en el aula, bien en la lectura de diversos textos.
- En cuanto a la *competencia matemática* no hay nada que cuestionar.
- Por otra parte las matemáticas son prácticamente indispensables para poder desarrollar la *competencia en el conocimiento e interacción con el mundo físico.*
- En cuanto al *tratamiento de la información y competencia digital***,** un uso adecuado de los distintos programas DERIVE, GEOGEBRA, CABRI, STATGRAPHICS, MATLAB…. en matemáticas favorece en gran medida la introducción del alumno en el mundo de las TIC, tan fundamental en el siglo XXI, además de fomentar su autoaprendizaje.
- Respecto a la *competencia social y ciudadana*, el hecho de potenciar actividades colectivas en un contexto en el que se ha de escuchar y tener en cuenta a los demás es imprescindible para conseguir buenos resultados finales.

En el mismo artículo citado anteriormente, Miguel de Guzmán, en el año 1993 decía: *El trabajo en grupo en este tema tiene una serie de ventajas importantes:*

- *Proporciona la posibilidad de un gran enriquecimiento, al permitirnos percibir las distintas formas de afrontar una misma situación/problema;*
- *El grupo proporciona apoyo y estímulo en una labor que de otra manera puede resultar dura, por su complejidad y por la constancia que requiere;*
- *El trabajo con otros nos da la posibilidad de contrastar los progresos que el método es capaz de producir en uno mismo y en otros;*
- *El trabajo en grupo proporciona la posibilidad de prepararse mejor para ayudar a nuestros estudiantes en una labor semejante con mayor conocimiento de los resortes que funcionan en diferentes circunstancias y personas.*
- Por otra parte, es impensable obviar el fomento de la *competencia cultural y artística.* No olvidemos que las matemáticas forman parte de nuestra cultura y que la armonía es un paso previo a la belleza.

- La resolución de problemas desarrolla *la competencia de aprender a aprender* de forma natural. El ensayo- error que aparece de forma natural al hacer problemas nos ayuda a tener conciencia de nuestras propias capacidades.
- Finalmente, la *competencia de autonomía e iniciativa personal*, se fomenta con la iniciativa, el trabajo cooperativo, la planificación de proyectos, la creatividad, la actitud positiva hacia la innovación, sabiendo asumir los errores y aprender de ellos, y desarrollando acciones con confianza, responsabilidad y sentido crítico. La satisfacción que se siente cuando se alcanza un reto que uno se ha propuesto contribuye a ese equilibrio emocional que tan beneficiosamente repercute en el individuo.

¿Cuál ha sido el impacto de este tipo de concursos en la práctica docente?

Podría pensarse que las olimpiadas de matemáticas son eventos dirigidos a los "genios", pero esto no es así. Lo que sucede es que, aunque son muy pocos los estudiantes que alcanzan el nivel internacional, en el camino se realiza mucho trabajo y muy valioso que rinde sus frutos en un buen número de muchachos. Hay un gran esfuerzo de apoyo detrás de estos estudiantes, y bastantes profesores y alumnos que dan vida a esta dinámica.

Los objetivos están claros: *aprender a resolver problemas y aprender resolviendo problemas.*

En mi caso, el trabajo altruista con los alumnos que resuelven problemas para la olimpiada ha significado una necesidad de actualización permanente de conocimientos y sobre todo una manera de tratar de hacer más atractivos los contenidos para todos mis alumnos. Estoy segura haber aprendido más en la búsqueda de problemas y métodos de resolución que lo que ellos han podido aprender de mí.

Yo considero que he sido muy afortunada en haberme encontrado con estudiantes muy interesados en resolver problemas de matemáticas, unos han tenido éxito en la olimpiada, otros no, pero todos ellos han disfrutado muchísimo con las matemáticas, desde aquí quiero darles las gracias por el estímulo que han supuesto en mi vida profesional.

La resolución de problemas requiere mucha tenacidad, y esto lo sabemos todos que estamos alrededor de la olimpiada, la genialidad produce algún resultado que nos produce admiración.

Los logros de estas personas que catalogamos como "genios" tienen una especie de aura mágica a su alrededor, y aun así, esta gente extraordinaria no siempre

es la que cosecha más éxitos en la investigación matemática. Timothy Gowers [3] afirma:

De las muchas cualidades que se precisan para resolver problemas ya abordados previamente por otros matemáticos profesionales sin dar con la solución, la genialidad no es necesaria ni suficiente. Para ilustrarlo tenemos un ejemplo extremo, Andrew Wiles, que demostró el teorema de Fermat. Desconozco con exactitud qué le condujo al éxito, pero seguro que precisó mucho arrojo, determinación y paciencia, amplios conocimientos de ciertos trabajos muy complejos desarrollados por otros, la buena fortuna de hallarse en la rama adecuada de las matemáticas en el momento correcto y una capacidad estratégica excepcional.

En el fondo, esta última habilidad es más importante que una velocidad mental inusitada: la mayoría de las aportaciones a las matemáticas provienen de tortugas más que de liebres.

Bibliografía

[1] M. de Guzmán, La enseñanza de las Matemáticas, Tendencias e innovaciones. Editorial Popular SA, Madrid 1993.

[2] The DeSeCo Project on the Web: `www.deseco.admin.ch` `www.oecd.org/edu/statistics/deseco`

[3] Timothy Gowers, Matemáticas. Una breve introducción. Alianza Editorial, Madrid 2008.

[4] J. Goñi Zabala, El desarrollo de la competencia matemática. Editorial GRAÓ 2008.

Primera derivada y convexidad

Miguel L. Pérez Gallardo
Dept. de Matemáticas, IES Los Colegiales (Antequera, Málaga)
mlpg_mat@telefonica.net

Abstract

The aim of this paper is to optimize the usage of the first derivative to describe the convexity of as many functions as possible; in doing so, we will have to compute and use the second derivative when it's just strictly needed. We will also prove some propositions about common intuitions in graphic representations.

Introducción

A menudo, el estudiante de Bachillerato se encuentra realizando un trabajo tedioso y de resultado previsible al estudiar la convexidad de muchas funciones. El objeto de este artículo es optimizar el uso de la primera derivada y extraerle toda la información posible; con ello acudiremos al estudio de la segunda derivada sólo en casos en que sea estrictamente necesario. Además, enunciaremos como resultados algunas intuiciones que son de uso común en las representaciones gráficas.

En este artículo utilizaremos los términos de concavidad y convexidad en un intervalo según lo definido por Michael Spivak en su *Cálculus* [1]: por ejemplo, $y = x^2$ es convexa en todo $\mathbb{R}$ ("hacia las *y* negativas"); una función será cóncava o convexa en un punto de su dominio si lo es en un entorno abierto de dicho punto. Por *curvatura* de una función entenderemos su cualidad de ser convexa o cóncava. Un *punto de inflexión* será un valor de la variable en el que cambia la curvatura de la función [2].

Empezaremos por estudiar ciertos resultados relativos a funciones polinómicas, y luego veremos hasta qué punto los podemos extender a un conjunto más amplio de funciones. Intentaremos, en la medida de lo posible, no utilizar herramientas matemáticas que no estén presentes en el currículo preuniversitario.

Lema 1

(i.) *Sea f una función polinómica no constante. El conjunto de ceros de f' es finito. Por tanto, en cada intervalo abierto delimitado por ceros consecutivos, f' tiene signo constante y f es creciente o decreciente.*

(ii.) *Sea f una función polinómica de grado mayor que 1. El conjunto de ceros de f'' es finito. Por tanto, en cada intervalo abierto delimitado por dos ceros consecutivos f'' tiene signo constante y f es cóncava o convexa.*

(iii.) *Antes de llegar a un máximo, una función polinómica es creciente; tras llegar a un máximo, una función polinómica es decreciente.*

(iv.) *Antes de llegar a un mínimo, una función polinómica es decreciente; tras llegar a un mínimo, una función polinómica es creciente.*

Demostración. Sólo es necesario justificar (iii) y (iv), pero las demostraciones son inmediatas gracias a la continuidad de f y sus derivadas, y el signo constante de éstas entre ceros consecutivos.

Proposición 1 [curvatura en extremos de funciones polinómicas]

Sean f una función polinómica, x_0 un número real.

(i.) *Si f tiene un máximo local en x_0, f es cóncava en un entorno de x_0.*

(ii.) *Si f tiene un mínimo local en x_0, f es convexa en un entorno de x_0.*

Demostración. Como f tiene un máximo local en x_0, f es creciente en un cierto intervalo (a, x_0) (ver lema 1), y como f' tiene un número finito de ceros, se puede escoger a para que $f'(x) > 0$ para todo x de (a, x_0). Podemos suponer que en (a, x_0) f'' no se anula (los ceros de f'' también son finitos). Por tanto, f'' conservará su signo en (a, x_0). Es imposible que $f''(x) > 0$ en (a, x_0), ya que f' sería creciente y ello contradiría que f' es estrictamente positiva hasta x_0, y que $f'(x_0) = 0$. Así pues, necesariamente $f''(x) < 0$ en (a, x_0) y f es cóncava antes de llegar a x_0. Similarmente, podemos demostrar que f sigue siendo cóncava tras pasar por x_0, lo que demuestra (i). La demostración de (ii) es análoga.

Proposición 2 [monotonía, derivada nula y curvatura de funciones polinómicas]

Sean f una función polinómica y x_0 un punto de inflexión de f con $f'(x_0) = 0$.

(i.) *Si f es creciente en un entorno de x_0, entonces f es cóncava antes de pasar por x_0 y convexa tras pasar por él.*

(ii.) *Si f es decreciente en un entorno de x_0, entonces f es convexa antes de pasar por x_0 y cóncava tras pasar por él.*

Demostración. Para demostrar en (i) que *f* es cóncava antes de pasar por x_0, podemos utilizar los mismos argumentos empleados en la demostración anterior para ver que *f* era cóncava antes de llegar al máximo; para demostrar que *f* es convexa tras pasar por x_0, podemos utilizar los mismos argumentos que se emplearían en la proposición anterior para ver que *f* es convexa tras pasar por el mínimo. Similarmente podemos probar (ii), cambiando los signos oportunos, etc.

En esta proposición no puede debilitarse la hipótesis $f'(x_0)=0$ (exigir $f'(x_0)\geq 0$ en (i) o $f'(x_0)\leq 0$ en (ii)), como veremos en el ejemplo siguiente: $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$ tiene puntos de inflexión en $x = -⅓$ y $x = 1$ (fig. 1).

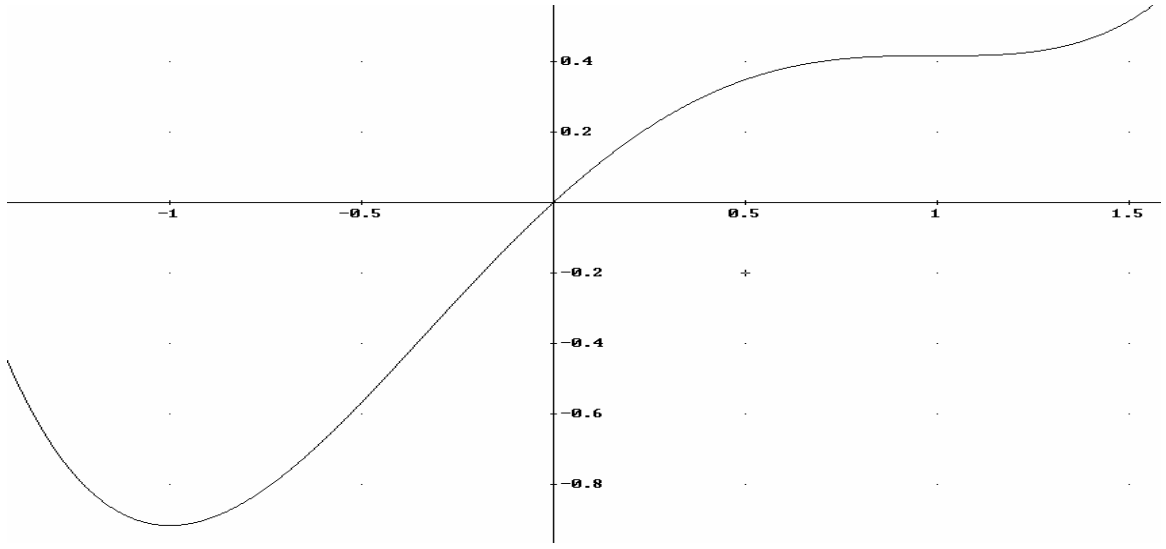


Figura 1: *Gráfica de* $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$

f es creciente al pasar por ambos. Es fácil ver que $f'(1)=0$ y que f es cóncava antes y convexa después de pasar por $x = 1$. Sin embargo, $f'(-⅓)>0$, es convexa antes de llegar a $x = -⅓$ y cóncava tras pasar por él.

Proposición 3 [en las funciones polinómicas, los ceros de sus derivadas son extremos o puntos de inflexión]

Sea f una función polinómica. Si $f'(x_0)=0$ *pero* x_0 *no es extremo local, entonces* x_0 *es punto de inflexión.*

Demostración. Como *f* es polinómica, f' también lo es; por hipótesis, $f'(x_0)=0$. El teorema del factor afirma la existencia de un polinomio $p(x)$ tal que $f'(x)=(x-x_0)\cdot p(x)$; de hecho, dado que x_0 no es extremo, $f'(x)$ no cambia de signo al pasar por él, por lo que podemos encontrar *n* par y $q(x)$ un polinomio con $q(x_0)\neq 0$ tales que $f'(x)=(x-x_0)^n\cdot q(x)$; vamos a ver que f'' cambia de signo al pasar por x_0, lo que es condición suficiente para que x_0 sea punto de inflexión. $f''(x)=\left[\,(x-x_0)^n\cdot q(x)\,\right]'=(x-x_0)^{n-1}\cdot\left[\,nq(x)+(x-x_0)\,q'(x)\,\right]$. Definamos r como $r(x)=nq(x)+(x-x_0)\,q'(x)$; evidentemente, $f''(x)$ cambiará de signo al pasar por x_0 si $r(x)$ no cambia de signo, ya que el factor $(x-x_0)^{n-1}$ sí que lo hace ($n-1$ es impar). Si $r(x)$ cambiara de signo al pasar por x_0, tendría un factor $x-x_0$ y, para un cierto $s(x)$, se tendría $r(x)=(x-x_0)\,s(x)=nq(x)+(x-x_0)\,q'(x)$ y, despejando, $q(x)=\frac{1}{n}(x-x_0)\cdot\left[\,s(x)-q'(x)\,\right]$, lo que contradiría que $q(x_0)\neq 0$.

Por tanto, en funciones polinómicas, que la primera derivada se anule en un punto sin cambiar de signo al pasar por él conlleva un cambio de curvatura.

Proposición 4 [curvatura en el infinito de las funciones polinómicas]

Consideremos una función polinómica $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$.

(i.) *Si* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, *entonces* f *es convexa en un cierto intervalo* $(a,+\infty)$.

(ii.) *Si* $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$, *entonces* f *es cóncava en un cierto intervalo* $(a,+\infty)$.

(iii.) *Si* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$, *entonces* f *es convexa en un cierto intervalo* $(-\infty,b)$.

(iv.) *Si* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, *entonces* f *es cóncava en un cierto intervalo* $(-\infty,b)$.

[*Es decir: si* $a_n>0$, f *es convexa en* $(a,+\infty)$*; con n par, es convexa en* $(-\infty,b)$*, y con n impar, es cóncava en* $(-\infty,b)$*; si* $a_n<0$, f *es cóncava en* $(a,+\infty)$*; con n par, es cóncava en* $(-\infty,b)$*, y con n impar, es convexa en* $(-\infty,b)$]

Demostración. Estos límites son determinados por la paridad de n y el signo de a_n. Como $f''(x)=n\cdot(n-1)a_nx^{n-2}+\cdots+a_2$, el coeficiente del término de mayor grado de $f''(x)$ tiene el mismo signo que el de $f(x)$, y sus grados ($n-2$ y n) la misma paridad. Por tanto, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} f''(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f''(x)$, con lo que, en un cierto intervalo $(a,+\infty)$, signo f = signo f'', y en un cierto $(-\infty,b)$, también. A partir de aquí, las conclusiones sobre la curvatura son inmediatas.

Estos resultados permiten a menudo abreviar el estudio de la curvatura de una función polinómica. Consideremos nuevamente la función dada por $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x$; es fácil ver que $f'(x)=x^3-x^2-x+1$ se anula en $x=$-1 y x = 1, y que f es decreciente en $(-\infty,-1)$ y creciente en $(-1,+\infty)$. Por la proposición 3, x = 1 es punto de inflexión, ya que f' no cambia de signo al pasar por él. Además, f es convexa justo después de x = 1 (proposición 2) y, como $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, f es convexa a partir de un cierto lugar (proposición 4). Como es imposible que f cambie dos veces más de curvatura tras pasar por x = 1 (como mucho, hay otro punto de inflexión más porque f'' tiene grado 2), con toda seguridad f es convexa en $(1,+\infty)$. Sabemos también que f es convexa en un cierto $(-\infty,b)$ porque $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$. Dado que f sigue siendo convexa alrededor de su punto de mínimo absoluto x = –1, razonando como antes vemos que es imposible que f cambie de curvatura antes de pasar por él. Sin embargo, antes de llegar a x = 1 f ha de ser cóncava (proposición 2). Por tanto, existe otro punto de inflexión y pertenece a $(-1,1)$. Como vemos, salvo por la localización exacta de uno de los puntos de inflexión (aunque hemos podido acotarlo), toda la información relevante de la curvatura de f se ha extraído de la primera derivada.

Ahora intentaremos generalizar estos resultados. Desde luego, la proposición 4 es falsa en general; basta dar como ejemplo $y=\sqrt[3]{x}$. Sin embargo, al observar las demostraciones del lema 1 y de las proposiciones 1 y 2, vemos que las únicas propiedades realmente importantes que se han usado son la continuidad de las derivadas (por lo que un cambio de signo de la derivada implica que ésta se anula) y que, en un entorno de un número x_0, las derivadas primera o segunda no se anulan; esto es, que los ceros de las derivadas no se acumulan en x_0. Ello nos permite debilitar las hipótesis y extender los resultados así:

Proposición 5 [Ampliación del lema 1]

Sea f una función derivable dos veces. Sea a un número en el dominio de f en el que no se anulan sus derivadas, ni es punto de acumulación de los ceros de éstas.

(i.) *f' tiene signo constante en un entorno de a, y f es creciente o decreciente.*

(ii.) *f'' tiene signo constante en un entorno de a, y f es cóncava o convexa.*

(iii.) *Antes de un máximo, f es creciente; después de un máximo, es decreciente.*

(iv.) *Antes de un mínimo, f es decreciente; después de un mínimo, es creciente.*

Proposición 6 [Ampliación de la proposición 1]

Sean f una función derivable dos veces y x_0 un número real, tales que x_0 no es punto de acumulación de los ceros de f' ni de los de f''.

(i.) *Si x_0 es punto de máximo local de f, entonces f es cóncava en x_0.*

(ii.) *Si x_0 es punto de mínimo local de f, entonces f es convexa en x_0.*

La demostración del lema 1 es válida para la proposición 5; la de la proposición 1 es igualmente válida para la 6.

Proposición 7 [Ampliación de la proposición 2]

Sean f una función derivable dos veces y x_0 un punto de inflexión de f, tales que $f'(x_0)=0$.

(i.) *Si f es creciente en un entorno de x_0, entonces f es cóncava antes de pasar por x_0 y convexa tras pasar por él.*

(ii.) *Si f es decreciente en un entorno de x_0, entonces f es convexa antes de pasar por x_0 y cóncava tras pasar por él.*

Demostración. Como x_0 es punto de inflexión de *f,* la curvatura de ésta cambia de sentido en él; esto es, f no tiene más remedio que ser cóncava antes de pasar por x_0 y convexa tras pasar por x_0, o viceversa. Si f es creciente en un cierto entorno de x_0, necesariamente $f'(x_0)\geq 0$ en tal entorno. Si f fuera convexa antes de llegar a x_0, $f''(x)\geq 0$ en un cierto intervalo (a,x_0) y entonces f' sería monótona no decreciente antes de llegar a x_0. Como $f'(x_0)\geq 0$, $f'(x_0)=0$ y f' es continua, ser monótona no decreciente implicaría ser idénticamente nula en (a,x_0), con lo que f sería constante y, por tanto, ni cóncava ni convexa. Así pues, necesariamente f ha de ser cóncava antes de llegar a x_0. Razonando similarmente, podemos

demostrar que f ha de ser convexa tras pasar por x_0, lo que demuestra (i). La demostración de (ii) es análoga, cambiando los signos oportunos.

Nótese que, en esta proposición, que x_0 sea punto de inflexión permite prescindir de la hipótesis de la acumulación de los ceros de de las derivadas, puesto que no corremos riesgo de cambios de curvatura en cualquier entorno de x_0.

Proposición 8 [Ampliación de la proposición 3] *Sean f una función derivable dos veces y x_0 en el dominio de f, tales que x_0 no es punto de acumulación de los ceros de f' ni de los de f''. Si $f'(x_0)=0$ sin que x_0 sea extremo local, entonces x_0 es punto de inflexión.*

Demostración. No podemos dar la misma demostración de la proposición 3, pues aquélla se basaba fuertemente en propiedades de los polinomios. Como $f'(x_0)=0$ pero x_0 no es extremo local, $f'(x)\geq 0$ ó $f'(x)\leq 0$ en todo un entorno $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ de x_0 (ya que la monotonía de f no cambia de signo), en el que podemos además suponer que f' y f'' no se anulan salvo, a lo sumo, en x_0 (x_0 no es punto de acumulación de los ceros de f' ni de los de f''). f'' ha de tener signo constante en $(x_0-\delta, x_0)$ por no anularse y ser continua. Por tanto f' es monótona en $(x_0-\delta, x_0)$. Si $f'(x)>0$ en $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, dado que f' es continua, monótona y se anula en x_0, f' es decreciente en $(x_0-\delta, x_0)$. Por tanto, $f''(x)<0$ y f resultaría ser cóncava antes de llegar a x_0. Razonando similarmente, como f'' ha de tener signo constante en $(x_0, x_0+\delta)$, f' será monótona en tal intervalo; unido esto a la hipótesis de ser $f'(x)>0$ en $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ y $f'(x_0)=0$, evidencia que f' es creciente en $(x_0, x_0+\delta)$, por ello $f''(x)>0$ y f resultaría ser convexa después de x_0. x_0 es, pues, punto de inflexión. Si $f'(x)\leq 0$ en $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, es fácil ver que f es convexa antes de llegar a x_0 y cóncava después de él.

Que x_0 no sea punto de acumulación de los ceros de las derivadas resulta ser necesario para las proposiciones 6 y 8. Consideremos la función f definida por

$$f(x)=x^6 sen^4\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0, \quad f(0)=0$$

f es claramente continua y derivable en $\mathbb{R}$ salvo, a lo sumo, en $x = 0$. No es difcil ver que f es al menos dos veces derivable en $x = 0$ mediante técnicas de acota-

ción, ya que todos los términos de $f'(x)$ y de $f''(x)$ tienen factores polinómicos que se anulan en $x = 0$ **[**ver apéndice, al final del artículo**]**. Por ello mismo, $f'(0)=0$. Podemos ver que $x = 0$ es punto de acumulación de los ceros de f' y de los de f'': todos los valores de x de la forma $\frac{1}{k\pi}$ con k entero no nulo anulan tanto a $f'(x)=6x^5\cdot \text{sen}^4\left(\frac{1}{x}\right)-4x^4\cdot \text{sen}^3\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ como a

$$f''(x)=\left(30x^4-4x^2\right)\cdot \text{sen}^4\left(\frac{1}{x}\right)-40x^3\cdot \text{sen}^3\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\cos\left(\frac{1}{x}\right)+12x^2\cdot \text{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\cos^2\left(\frac{1}{x}\right).$$

Es evidente, además, que $x = 0$ es punto de mínimo absoluto para la función. Sin embargo, f no es convexa en ningún entorno de $x = 0$ (ver figura 2), así que no podemos extender a este caso la tesis de la proposición 6.

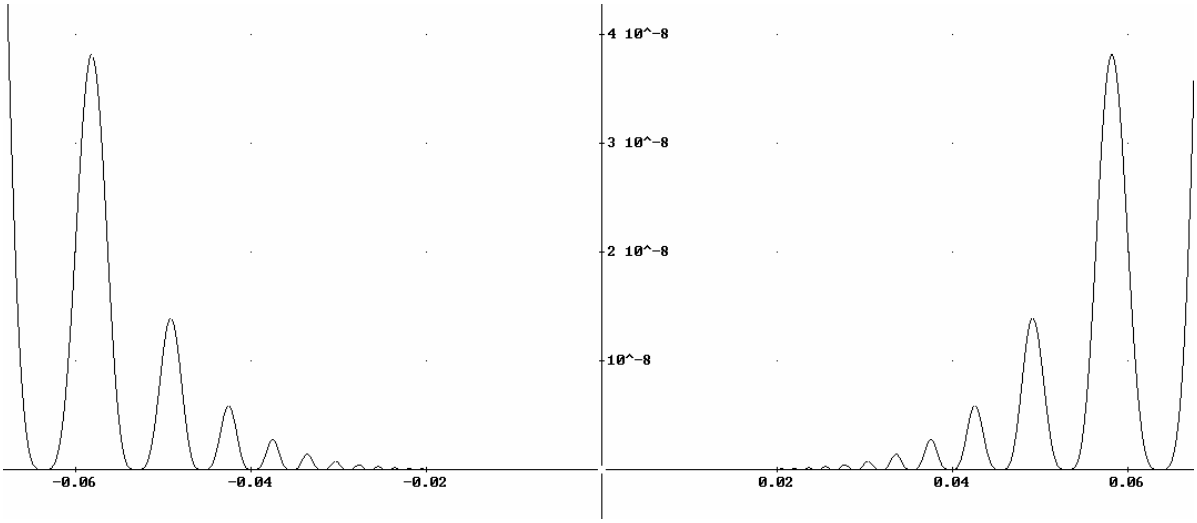


Figura 2: *Gráfica de f*

Respecto de la proposición 8, podemos ver que la función f dada por

$$f(x)=x^5 sen^4\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x\neq 0, \quad f(0)=0$$

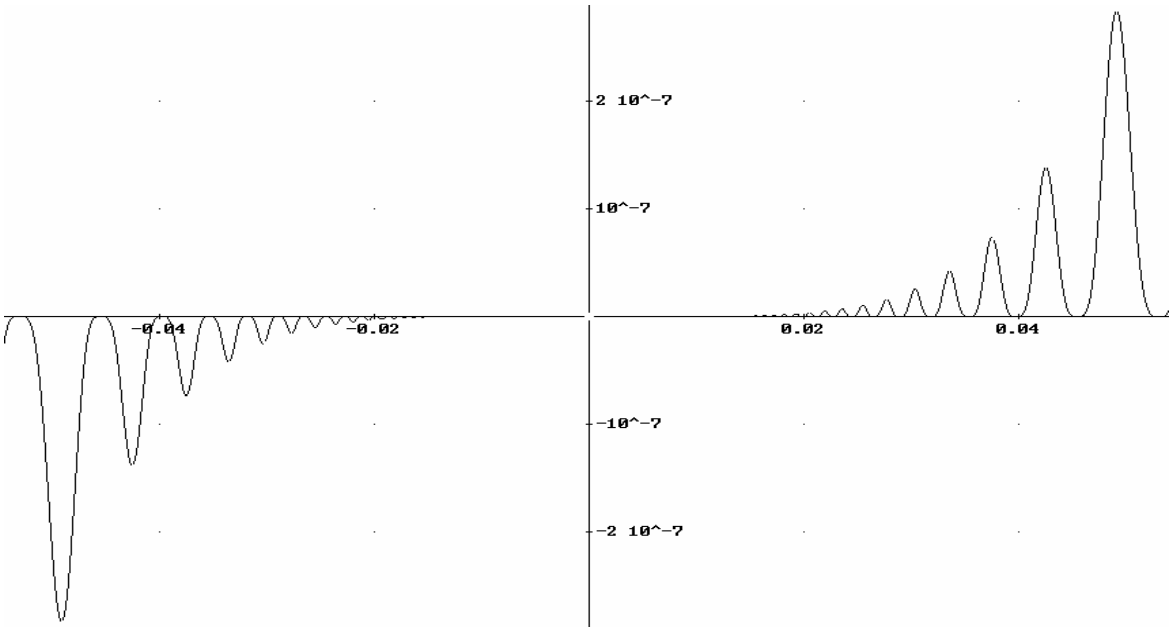


Figura 3: *Gráfica de f*

tiene en $x = 0$ un cero de su derivada que no es extremo local ni punto de inflexión (los cálculos son análogos a los anteriores; se dejan para el lector).

A continuación, veremos que la curvatura de una función en torno a una asíntota es, dadas unas hipótesis razonables, completamente predecible.

Proposición 9 [curvatura alrededor de asíntotas verticales].

Sea f derivable dos veces, y $x_0 \in \mathbb{R}$ verificando no ser punto de acumulación de los ceros de sus derivadas.

(i.) *Si* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$, *entonces, en un cierto intervalo* (a, x_0), f *es convexa.*

(ii.) *Si* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$, *entonces, en un cierto intervalo* (x_0, b), f *es convexa.*

(iii.) *Si* $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$, *entonces, en un cierto intervalo* (a, x_0), f *es cóncava.*

(iv.) *Si* $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$, *entonces, en un cierto intervalo* (x_0, b), f *es cóncava.*

Demostración. Demostremos (i). Sea (a, x_0) un intervalo en el que no se anulen ni f' ni f'', lo que podemos hallar por hipótesis. Como el signo de f' es constante, f es monótona del mismo signo en todo (a, x_0), y, ya que $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$,

necesariamente $f'>0$ en tal intervalo. De hecho, podemos afirmar que f' no solamente es positiva, sino que es monótona, puesto que f'' tiene signo constante por hipótesis en (a, x_0). Si logramos ver que f' es creciente, f'' no tendrá más remedio que ser positiva y por ello f resultará ser convexa. Dado que f' es monótona en (a, x_0), si no fuera creciente sería decreciente. En tal caso $f'(a)$ sería cota superior para todo $f'(x)$ en $[a, x_0)$; por el teorema del valor medio de Cauchy, para todo $x \in [a, x_0)$ existe $\bar{x} \in (a, x)$ tal que $f'(\bar{x}) = \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$; despejando en la expresión anterior, $f(x) = f'(\bar{x})\cdot(x-a)+f(a) \leq f'(a)\cdot(x_0-a)+f(a)$, por lo que f estaría acotada en (a, x_0), lo que contradice que $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$ (en consecuencia: si una función derivable no está acotada en un intervalo acotado, su derivada tampoco está acotada); en conclusión, f' ha de ser creciente, $f'' > 0$ y f será convexa. El resto de los apartados se demuestra de forma parecida.

Proposición 10 [curvatura alrededor de asíntotas horizontales].
Sean f dos veces derivable y $a \in \mathbb{R}$ tales que, si $x > a$, $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$. Además, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$.

(i.) *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, +\infty)$, entonces f es cóncava en ese intervalo.*

(ii.) *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, +\infty)$, entonces f es convexa en ese intervalo.*

Supongamos ahora que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que, si $x < b$, $f'(x) \neq 0$, $f''(x) \neq 0$. Además, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = k \in \mathbb{R}$

(iii.) *Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, b)$, entonces f es convexa en ese intervalo.*

(iv.) *Si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, b)$, entonces, f es cóncava en ese intervalo.*

Demostración. Demostremos (i). Como en ocasiones anteriores, será suficiente ver que $f''(x) < 0$ para todo $x \in (a, +\infty)$. Por hipótesis f'' tiene signo constante en todo $(a, +\infty)$. Por tanto f' es creciente o decreciente en todo el intervalo. Veamos que f' es decreciente, por lo que f'' será negativa y por ello f cóncava. En $(a, +\infty)$ $f' > 0$ por hipótesis y por tanto f es creciente. Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k$, f está acotada por *k*. Empleando el teorema del valor medio de Cauchy como en la prop. 9, para todo $x \geq a$ existiría $\bar{x} \in (a, x)$ tal que $f(x) = f'(\bar{x})\cdot(x-a)+f(a)$. Si f' fuera creciente en lugar de decreciente, entonces $f'(\bar{x}) > f'(a) > 0$ y $f(x) =$

$= f'(\bar{x})\cdot(x-a)+f(a) > f'(a)\cdot(x-a)+f(a) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, lo que contradiría la acotación de f por k en $(a,+\infty)$; f' será por tanto decreciente, f'' será negativa y por ello f cóncava. El resto de los apartados se prueba similarmente.

A partir de ahora, por simplificar, diremos que una función f es convexa *hacia la derecha* si f es convexa en un cierto intervalo $(a,+\infty)$; diremos que f es convexa *hacia la izquierda* si f es convexa en un cierto intervalo $(-\infty,b)$. Igualmente definimos concavidad hacia la derecha y hacia la izquierda.

En principio, parece que nada podemos deducir de la curvatura de una función alrededor de asíntotas oblícuas sólo con el signo de la primera derivada: por ejemplo, las derivadas de $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$ y $g(x)=\frac{x^2-1}{x}$, $f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$ y $g'(x)=\frac{x^2+1}{x^2}$, son positivas en $(-\infty,-1)$ y $(1,+\infty)$: pero las curvaturas de f y g son distintas:

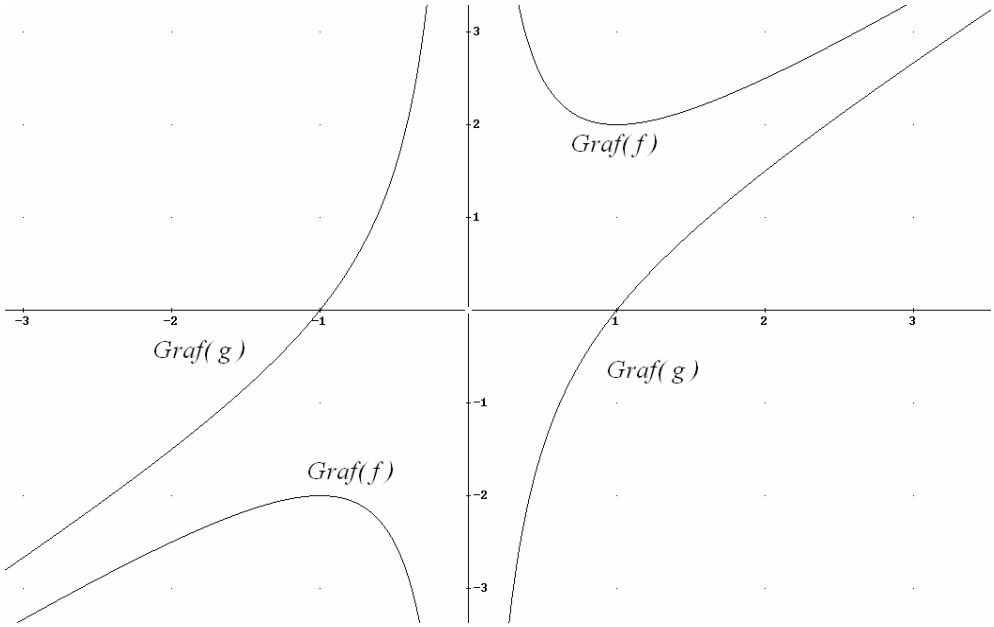


Figura 4: *Gráficas de f y g*

Sin embargo, con algo más de cálculo se pueden concluir ciertas cosas:

Proposición 11.

Consideremos f una función racional: $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, *con*

$p(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$, $q(x)=b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1 x+b_0$.

(i.) Sups. $n \le m$; si $f'(x)>0$ para todo $x > a$, f es cóncava hacia la derecha; si $f'(x)<0$, f es convexa hacia la derecha; si $f'(x)>0$ para todo $x < b$, f es convexa hacia la izquierda; si $f'(x)<0$, f es cóncava hacia la izquierda.

(ii.) [*Hay funciones racionales que se comportan como polinomios en el infinito*] *Supongamos $n \ge m + 2$. Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, f es convexa a la derecha; si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, f es cóncava a la derecha; si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, f es convexa a la izquierda; si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, f es cóncava a la izquierda. En términos de coeficientes: si $\dfrac{a_n}{b_m}>0$, f es convexa a la derecha; si $n - m$ es par, f es convexa a la izquierda, y si $n - m$ es impar, f es cóncava a la izquierda; si $\dfrac{a_n}{b_m}<0$, f es cóncava a la derecha; si $n - m$ es par, f es cóncava a la izquierda, y si $n - m$ es impar, f es convexa a la izquierda.*

Demostración. Veamos (i.). Como $n \le m$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ son reales; por ello, f tiene asíntota horizontal a la derecha y a la izquierda. Aplicando la proposición 10, tenemos los resultados que hemos enunciado.

Supongamos ahora que $n \ge m + 2$; en tal caso, dividiendo $p(x)$ entre $q(x)$, obtenemos un cociente $c(x)=c_{n-m}x^{n-m}+c_{n-m-1}x^{n-m-1}+\cdots+c_1 x+c_0$ y un resto $r(x)=r_k x^k+r_{k-1}x^{k-1}+\cdots+r_1 x+r_0$ con $k < m$ tales que $f(x)=c(x)+\dfrac{r(x)}{q(x)}$, $f'(x)=c'(x)+\left[\dfrac{r(x)}{q(x)}\right]'$, $f''(x)=c''(x)+\left[\dfrac{r(x)}{q(x)}\right]''$. Nótese que, al derivar una fracción, la diferencia grado denominador – grado numerador crece; por ejemplo, en $\left[\dfrac{r(x)}{q(x)}\right]'=\dfrac{r'(x)q(x)-r(x)q'(x)}{q^2(x)}$, tenemos grado $q^2(x)$–grado $[r'(x)q(x)-r(x)q'(x)]\ge$ $\ge 2m-(m+k-1)=m-k+1>m-k$ =grado $q(x)$– grado $r(x)$; y por ello

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'' = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]' = \lim_{x\to+\infty}\frac{r(x)}{q(x)} = 0$. Ni $c'(x) = (n-m)\,c_{n-m}x^{n-m-1} + \cdots$ ni $c''(x) = (n-m)(n-m-1)c_{n-m}x^{n-m-2} + \cdots$ son constantes (ya que $n - m \geq 2$). Si $c_{n-m} = \frac{a_n}{b_m} > 0$, $\lim_{x\to+\infty} f''(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[(n-m)(n-m-1)c_{n-m}x^{n-m-2} + \cdots\right] + \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'' =$ $= +\infty + 0 = +\infty$; por tanto, en un cierto $(a, +\infty)$, $f''(x) > 0$ y f será convexa a la derecha. Si además $n - m$ es par, $n - m - 2$ también lo es y $\lim_{x\to-\infty} f''(x) =$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[(n-m)(n-m-1)c_{n-m}x^{n-m-2} + \cdots\right] + \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'' = +\infty + 0 = +\infty;$$

por tanto, al menos hasta un cierto $x = b$, $f''(x)$ mantiene su signo positivo y f es convexa hacia la izquierda. El resto de los casos se prueba de forma análoga.

La primera pregunta que surge al ver el enunciado de esta proposición es ¿qué ocurre si $n = m + 1$, como en la figura 4? esto es, ¿qué pasa cuando la función racional tiene asíntotas oblícuas? dividiendo $p(x)$ entre $q(x)$, obtenemos un cociente $c(x) = c_1x + c_0$ con $c_1 = \frac{a_n}{b_m}$ y un resto $r(x) = r_kx^k + r_{k-1}x^{k-1} + \cdots + r_1x + r_0$ con $k < m$ de forma que $f(x) = c_1x + c_0 + \frac{r(x)}{q(x)}$, $f'(x) = c_1 + \left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'$, $f''(x) = \left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]''$, por lo que el signo de $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]''$ nos da la curvatura de f. Pero como $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'$ y $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]''$ tienen un número finito de ceros, existe un intervalo $(a, +\infty)$ en el que ha de darse uno de estos dos casos: $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'' > 0$, por lo que $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'$ sería creciente y, como $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]' = 0$, se tendría $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]' < 0$ en $(a, +\infty)$, ó $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'' < 0$, por lo que $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'$ sería decreciente y, como $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]' = 0$, se tendría $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]' > 0$ en

$(a,+\infty)$. Los signos constantes de $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]'$ y $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]''$ en $(a,+\infty)$ permiten asegurar que las condiciones anteriores son también suficientes, con lo que podemos afirmar que si $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]' > 0$ a la derecha, f es cóncava a la derecha y que si $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]' < 0$ a la derecha, f es convexa hacia la derecha. Análogamente veríamos que si $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]' > 0$ a la izquierda, entonces f es cóncava a la izquierda y que si $\left[\frac{r(x)}{q(x)}\right]' < 0$ a la izquierda, entonces f es convexa hacia la izquierda. Concluímos, por tanto, que la curvatura en el infinito de las funciones racionales queda totalmente descrita por la primera derivada.

Acabaremos con una proposición sencilla, casi innecesaria de puro evidente:

Proposición 12

(i.) [*La antisimetría supone cambio de curvatura*]. *Sea f una función derivable dos veces en su dominio, con f'' no idénticamente nula, y $a\in\mathbb{R}$ no punto de acumulación de los ceros de las derivadas de f tal que, para todo x en un cierto intervalo $(0,\delta)$, $f(a-x)=-f(a+x)$ (o sea: f es antisimétrica respecto de x = a). Entonces, la curvatura de f antes de a y después de a es distinta; por tanto, si $a\in Dom(f)$, es punto de inflexión de f.*

(ii.) **[***La simetría supone curvatura constante***].** *Sea f una función derivable dos veces en su dominio, con f'' no idénticamente nula, y $a\in\mathbb{R}$ no punto de acumulación de los ceros de las derivadas de f tal que, para todo x en un cierto intervalo $(0,\delta)$, $f(a-x)=f(a+x)$ (esto es: f es simétrica respecto de x = a). Entonces, f tiene la misma curvatura antes y después de a; además, si $a\in Dom(f)$, es extremo local de f.*

Demostración. Es suficiente para probar (i.) ver que $f''(x)$ tiene signos distintos antes y después de *a*. Veremos aún más: que $f''(a-x)=-f''(a+x)$. Definiendo $g(x)=a-x,\quad h(x)=a+x$, y aplicando la regla de la cadena trivialmente,

$$f''(a-x)=-(-f''(g(x)))=-f''(g(x))\cdot g'(x)=-[f'(g(x))]'=[-f'(g(x))]'=$$
$$=[f'(g(x))\cdot g'(x)]'=(f\circ g)''(x)=[f(a-x)]''=-[f(a+x)]''=-(f\circ h)''(x)=$$

$$= -\left[f'(h(x))\cdot h'(x)\right]' = -\left[f'(h(x))\cdot 1\right]' = -f''(h(x))\cdot h'(x) = -f''(h(x))\cdot 1 = -f''(a+x)$$

lo que prueba el enunciado. Para (ii.), utilizando la misma técnica que en (i), es fácil ver que $f''(a-x) = f''(a+x)$. Veamos ahora que $x = a$ es extremo local de f. Podemos suponer que f' no se anula en $(a-\delta, a)$ (los ceros de las derivadas de f no se acumulan en $x = a$) por lo que f será monótona en $(a-\delta, a)$. Por la misma razón, f' no se anula en $(a, a+\delta)$ y f es monótona en $(a, a+\delta)$. La simetría de f en torno $x = a$ impide que la monotonía de f sea del mismo signo a ambos lados de $x = a$, con lo que f cambia de creciente a decreciente o viceversa al pasar por $x = a$, y, como f es continua por ser derivable, tenemos un extremo local. (Podemos debilitar las hipótesis de derivabilidad en este resultado y exigir sólo continuidad en $x = a$ y derivabilidad en un entorno reducido suyo).

Acabaremos con ejemplos de uso de estos resultados: tomemos, por ejemplo, la función racional f dada por $f(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2 - 3}{3x}$; esta función antisimétrica tiene una única asíntota vertical en $x = 0$; como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$, f es convexa justo a la izquierda de $x = 0$ (prop. 9). Además, $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$, por lo que f es cóncava a la izquierda (prop. 11). Por tanto, tendrá al menos un punto de inflexión en $(-\infty, 0)$. $f'(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2} = \left(\dfrac{x^2 - 1}{x}\right)^2$ no cambia de signo en sus ceros $x = -1$ y $x = 1$, por lo que además son puntos de inflexión (prop. 8). ¿Habrá más? $f''(x) = \left[\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2\right]' = 2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ sólo se anula en $x = -1$ y $x = 1$, por lo que podemos concluir nuestro estudio: f es cóncava en $(-\infty, -1)$, tiene un punto de inflexión en $x = -1$, es convexa en $(-1, 0)$, y, por antisimetría, (prop. 12), es cóncava en $(0, 1)$, tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y es convexa en $(1, +\infty)$:

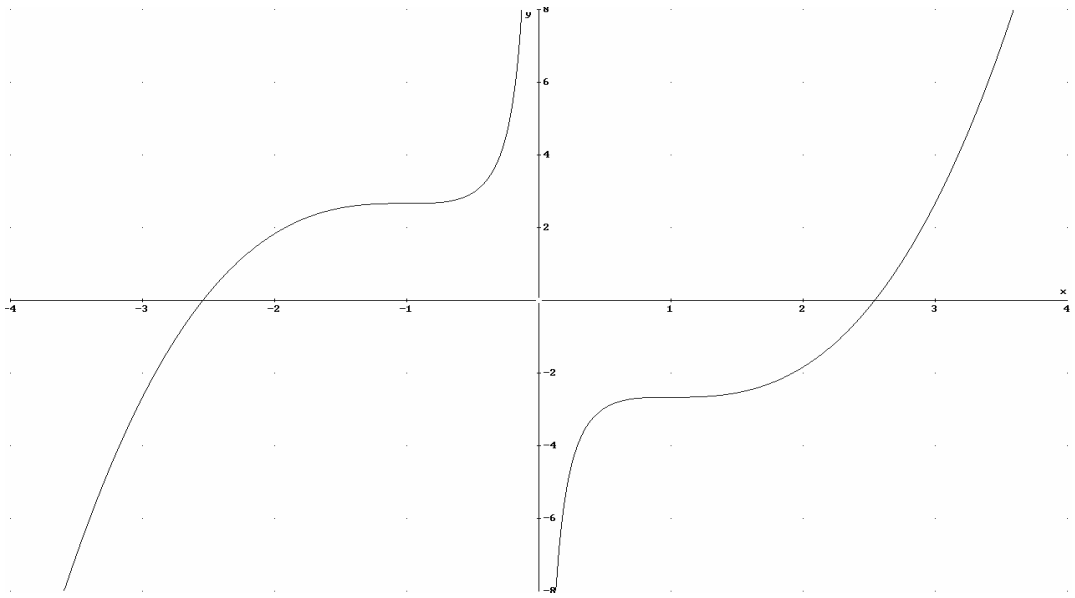


Figura 5: *Gráfica de f*

Veamos cómo aplicar estos resultados en el estudio de una función no racional bien conocida como $f(x)=\tan(x)$ en, por ejemplo, $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$; como es lógico, los resultados son posteriormente trasladables a todo su dominio por periodicidad. $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x)=-\infty$, por lo que f es cóncava justo a la derecha de $x=-\frac{\pi}{2}$, (prop. 9). Por antisimetría f es convexa justo a la izquierda de $x=\frac{\pi}{2}$, y $x=0$ es punto de inflexión (prop. 12). Nos preguntamos si es el único punto de inflexión, con lo que la curvatura de f quedaría totalmente descrita. Es fácil ver sin acudir a f'' que $f'(x)=(1/\cos(x))^2$ es creciente en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ (cuadrado de la inversa de una función decreciente) y decreciente en $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ (por simetría). Por tanto, el único punto de inflexión es $x=0$; $f(x)=\tan(x)$ es cóncava en $\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ y convexa en $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

En resumen: dadas unas hipótesis de regularidad que la mayoría, por no decir todas las funciones del currículo preuniversitario cumplen, podemos afirmar que:

- la curvatura de una función es predecible alrededor de los ceros de la primera derivada sin usar la segunda.
- los ceros de la primera derivada son extremos locales o puntos de inflexión

• los límites en el infinito de funciones polinómicas y racionales determinan su curvatura en el infinito.
• la existencia de asíntotas determina, en muchos casos, la curvatura.
• la simetría en torno a un valor de la variable relaciona las curvaturas en torno a tal valor.

Apéndice

Consideremos la función f definida por $f(x) = x^6 sen^4\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Nótese que $0 \leq sen^4\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$, $-1 \leq sen^n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos^m\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ para cualesquiera *n, m* no negativos. La acotación $0 \leq x^6 sen^4\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^6 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ prueba que f es continua en $x = 0$. Las acotaciones de $f'(x) = 6x^5 \operatorname{sen}^4\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^4 \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ dadas por $-6x^5 - 4x^4 \leq 6x^5 \cdot sen^4\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^4 \cdot sen\left(\frac{1}{x}\right)^3 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 6x^5 + 4x^4$ si $x > 0$ y por $6x^5 - 4x^4 \leq 6x^5 \cdot \operatorname{sen}^4\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^4 \cdot \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq -6x^5 + 4x^4$ si $x < 0$ demuestran que f es derivable en $x = 0$ y que $f'(0) = 0$, ya que todas las cotas superiores e inferiores tienden a 0 cuando x tiende a 0. Similarmente, podemos ver que

$$f''(x) = \left(30x^4 - 4x^2\right) \cdot \operatorname{sen}^4\left(\frac{1}{x}\right) - 40x^3 \cdot \operatorname{sen}^3\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) + 12x^2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

está acotada por funciones polinómicas que tienden a 0 cuando x tiende a 0, por lo que existe $f''(0)$ y vale 0 [los detalles se dejan al cuidado del lector].

Bibliografía

[1] Spivak, M. (1988): *Calculus (Segunda Edición)*, Ed. Reverté, Barcelona

[2] Rey Pastor, J., Pi Calleja, P., Trejo, C. A. (1969): *Análisis Matemático (Vol. I, Octava Edición)*, Ed. Kapelusz, Buenos Aires

Actividades saludables para la clase de Matemáticas[1]

Mª Dolores Rodríguez Soalleiro[1], Diana Sánchez Rodríguez[2]

[1]Profesora de Matemáticas de Secundaria, [2]Técnica Superior en Dietética
email: lola@mismates.net

Abstract

We propose a series of cards with health – nutrition contents and with mathematical contents. Health contents are related to people's weight, the energy that they need and that principal nutrients produce, the study of the proportion of nutrients in a daily menu as well as the percentage of calories in every food; mathematical contents refer to numbers and operations, proportions, approximations, percentages, tables and data, functions, etc. The contents are distributed in sequenced cards. In every card there are one or two examples to solve in groups in class and a series of proposed activities related to the explained content. In some of these activities we have included suggestions about technological resources that can be used and / or proposals for extension that we consider appropriate to work in groups or in an individual way. In the activities, we've tried to work with interesting themes related to their lives, that can be useful because they affect them directly, in order to apply the acquired knowledge to the care of their own health.

Introducción

La Educación para la Salud es una de esas materias que de manera transversal ofrecen los diferentes currículos a través de las sucesivas leyes educativas pero que nunca, a nuestro entender, se acaba de integrar en los contenidos de las asignaturas, provocando que los alumnos y alumnas no lleguen a asimilar los conocimientos necesarios para desenvolverse en la vida con un mínimo de criterio acerca del cuidado de su salud.

---

[1] N. del E.: Este artículo contiene varias fichas directamente preparadas para ser llevadas al aula. Por ello no está estructurado y sus secciones numeradas como es habitual en el boletín.

Lo cierto es que puede ser complicado para un profesor de matemáticas introducir contenidos de salud; los libros de texto no ayudan, y nuestra formación inicial tampoco. Sin embargo, desde las Matemáticas es sencillo inculcar a los alumnos buenos hábitos de salud; bastaría con proponer en nuestras clases actividades en contextos relacionados con la misma.

Además, estas actividades pueden realizarse dentro de un marco interdisciplinar con otras asignaturas como, por ejemplo, Ciencias Naturales o Educación Física.

De esta forma, estaríamos ofreciendo a nuestros alumnos una enseñanza de naturaleza competencial que les permitiría integrar el conocimiento adquirido y ponerlo en marcha fuera del aula y para su propio bienestar.

Con los contenidos de las actividades ofrecidos en este artículo, consideramos que los alumnos podrán adquirir todas las competencias básicas y en especial las siguientes:

- Competencia matemática: al utilizar los contenidos matemáticos propuestos, para interpretar distintos tipos de información, ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos de la realidad y resolver problemas relacionados con la vida cotidiana.
- Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico: al interpretar el mundo físico y desenvolverse en él, interactuando con aspectos naturales, comprendiendo sucesos y prediciendo consecuencias y mejorando y preservando las condiciones de vida propia.
- Tratamiento de la información y competencia digital: buscando, obteniendo y procesando información y transformándola en conocimiento y resolviendo los problemas con la ayuda de diversos programas y medios informáticos

Si además utilizamos una metodología activa, en las que los alumnos trabajen en grupo dentro de su propia clase o mediante algún proyecto conjunto con otro grupo de alumnos dentro o fuera del centro, sin duda estaremos potenciando el desarrollo de estas y todas las demás competencias.

Las fichas que proponemos abordan algunos contenidos matemáticos de todos los cursos de ESO, el profesor decidirá en que curso y en que unidades didácticas abordará actividades o fichas completas.

Por otra parte, el material puede ser utilizado íntegramente en materias como Ámbito científico y tecnológico o Taller de matemáticas.

Ficha I- El Índice de Masa Corporal (IMC)

El índice de masa corporal en una persona adulta, es la relación entre el peso de la persona en kilogramos y su altura, en metros, elevada al cuadrado.

$$IMC = \frac{p}{h^2}$$

La Organización Mundial de la Salud (OMS) nos proporciona en su sitio web (http://www.who.int/en/), la tabla siguiente para conocer el estado de una persona adulta según su peso teniendo en cuenta el resultado de su IMC:

Classification	BMI(kg/m^2)	
	Principal cut-off points	Additional cut-off points
Underweight	<18.50	<18.50
Severe thinness	<16.00	<16.00
Moderate thinness	16.00 - 16.99	16.00 - 16.99
Mild thinness	17.00 - 18.49	17.00 - 18.49
Normal range	18.50 - 24.99	18.50 - 22.99
		23.00 - 24.99
Overweight	≥25.00	≥25.00
Pre-obese	25.00 - 29.99	25.00 - 27.49
		27.50 - 29.99
Obese	≥30.00	≥30.00
Obese class I	30.00 - 34-99	30.00 - 32.49
		32.50 - 34.99
Obese class II	35.00 - 39.99	35.00 - 37.49
		37.50 - 39.99
Obese class III	≥40.00	≥40.00

Tabla 1 (fuente: OMS)

El IMC constituye una medida muy útil para conocer el peso saludable de una persona pues la forma de calcularlo no varía en función del sexo ni de la edad en la población adulta. No obstante, debe considerarse como una guía aproximativa, pues puede no corresponder al mismo grado de delgadez o gordura en diferentes

individuos. Para trabajar de manera más cómoda, podemos resumir la tabla como se muestra en la Tabla 2.

IMC	Situación de la persona
< 18	Por debajo del peso saludable
18 a 25	**Peso saludable**
25 a 30	Sobrepeso
> 30	Obesidad

Tabla 2

Ejemplo**:** Imaginemos una persona que mide 1,80 metros:

- Caso I: Si su peso es de 77 kg., su IMC será:

$$IMC = \frac{p}{h^2} = \frac{77}{(1{,}80)^2} = \frac{77}{3{,}24} = 23{,}76 \Rightarrow \text{peso saludable}$$

- Caso II: Si su peso es de 104 kg., su IMC será:

$$IMC = \frac{p}{h^2} = \frac{104}{(1{,}80)^2} = \frac{104}{3{,}24} = 32{,}1 \Rightarrow \text{obeso}$$

- Caso III: Si su peso es de 57 kg., su IMC será:

$$IMC = \frac{p}{h^2} = \frac{57}{(1{,}80)^2} = \frac{57}{3{,}24} = 17{,}6 \Rightarrow \text{debajo de su peso saludable}$$

Actividades

1. Calcula el IMC de los miembros adultos de tu familia.

   Ampliación: Hacer un debate sobre los datos de la tabla del IMC ¿cómo crees que se ha confeccionado la tabla? ¿Por qué esos datos no son válidos para adolescentes? ¿Por qué los menores de 5 años tienen otros datos?

2. Calcula el IMC en los casos siguientes:

P = 56 kg., h = 1,50 m	P = 74 kg., h = 1,65 m.	P = 80 kg., h = 1,92 m.

   Recursos: Calculadora

3. Indica cuáles de las siguientes personas tienen un peso saludable y cuáles no:

Tomás pesa 97, 5 kg. y mide 1,90 m.	Ángeles pesa 65 kg. y mide 1,62 m.
Pedro pesa 81,5 kg. y mide 1, 87 m.	Juan pesa 86 kg. y mide 1, 73 m.

Recursos: Calculadora

4. Cuando el IMC > 40, se considera obesidad mórbida. A la vista de las alturas y los pesos de las siguientes personas, rellena la tabla calculando el IMC e indicando si tiene o no obesidad mórbida Compara los datos de Eusebio y Petra y explica los resultados.

Nombre	Peso (kg.)	Altura (m.)	IMC	Obesidad mórbida: si / no
Eusebio	110	1,97		
Leoncio	86	1,73		
Lucas	115	1,68		
Petra	97	1,54		
Encarna	75	1,74		

Ampliación: Buscar en Internet información sobre la obesidad mórbida en la actualidad y hacer un trabajo en grupo resumiendo la información encontrada.

Recursos: Calculadora o hoja de cálculo

5. El mínimo IMC exigible para las modelos de la pasarela Cibeles es de 18. Indica cuáles de las siguientes modelos podrían desfilar rellenando la tabla:

Nombre	Altura	Peso	IMC	Podría desfilar: sí/ no
Ana	1,66 m	52,00 kg.		
Esther	1,69 m	50,00 kg.		
Virginia	1,72 m	54,00 kg.		
Mª José	1,77 m	53,50 kg.		
Lola	1,82 m	70,00 kg.		

Ampliación: Buscar información sobre la pasarela Cibeles y el peso de las modelos ¿cómo y porqué surgió esa norma sobre el peso? ¿Existe la misma norma en otros desfiles de moda, por ejemplo, Milán? Hacer un debate por grupos.

Recursos: Calculadora u hoja de cálculo

Ficha 2- Peso saludable

En la fórmula del IMC despejamos el peso:

$$IMC = \frac{p}{h^2} \Rightarrow p = IMC * h^2$$

Sabemos que para tener un peso saludable, el IMC estaría entre 18 y 25

- Si IMC = 18→ P = 18 * h^2 → sería el peso saludable mínimo.
- Si IMC = 25→ P = 25 * h^2→ sería el peso saludable máximo.

Por lo tanto, se dice que una persona adulta tiene un *peso saludable* si su peso está comprendido entre 18 * h^2 y 25 * h^2 ; siendo h su altura.

*Peso saludable (PS)= (18*h^2 , 25*h^2)*

Ejemplo**:** Calcula el peso saludable para una persona que mida 1,80 metros.

- Si el IMC = 18 → p = 18 * 3,24 = 58,32 kg. Es el peso saludable mínimo
- Si el IMC = 25→ p = 25 * 3,24 = 81 kg. Es el peso saludable máximo.

Su peso saludable estaría entre 58,32 y 81 kg.

Actividades

6. Calcula entre qué pesos debe estar un adulto que mide 1,92 m., para tener una situación de peso saludable.

   Ampliación: Representar las gráficas correspondientes al peso saludable mínimo (y = 18* x^2) y peso saludable máximo (y = 25 * x^2) en función de la altura. Localizar las ramas parabólicas correspondientes a los valores más habituales de la altura, por ejemplo, desde 1,50 m hasta 1,90 m. Comprobar en las gráficas los resultados que has obtenido.

   Recursos: Calculadora gráfica o programa informático

7. Rellena la tabla siguiente calculando para cada altura su peso saludable mínimo y su peso saludable máximo aproximados:

Altura: h	**h^2**	**P S $_{mín.}$**	**P S $_{máx.}$**
1,60 m			
1,70 m			
1,80 m			
1,90 m			

Ampliación: Utilizar las gráficas del ejercicio 6º para estudiar los resultados.

Recursos: Calculadora gráfica o programa informático que haga gráficos.

8. Marta mide 1,68 y pesa 55 kg. ¿Cuál es su peso saludable? ¿Cuánto tiene que adelgazar o engordar?
9. En la tabla te dan alturas posibles de personas en metros. Rellena las columnas y saca conclusiones de los resultados.

Altura	PS mín.	PS máx.	$\overline{x}$: Media de $PS_{mín}$ y $PS_{máx.}$
1,62			
1,64			
1,66			
1,68			
1,7			
1,72			
1,74			
1,76			
1,78			
1,8			
1,82			

Ampliación: Discutir en grupo el resultado de la última columna ¿cuál sería la media para alturas que no estén en la tabla, por ejemplo, para 1,58 m. o para 1,95?

Recursos: Hoja de cálculo.

Ficha 3-Metabolismo basal (MB)

El *metabolismo basal* (MB) es la energía que necesita el cuerpo en reposo. Se mide en kilocalorías y se obtiene, para el caso de los hombres, con la fórmula siguiente:

$$\boxed{MB_{hombres} = peso\ en\ kg.\ x\ 24\ horas}$$

En el caso de las mujeres supone un 10% menos:

$$\text{El 10 \% de MB} = \frac{10 * MB}{100} = \frac{MB}{10} = 0{,}1 * MB$$

$$MB - 0{,}1*MB = (1-0{,}1)*MB = 0{,}9*MB$$

Por lo tanto en el caso de las mujeres la fórmula sería:

$$\boxed{MB_{mujeres} = \text{peso en kg. x 24 horas x } 0{,}9}$$

Ejemplo**:** Elena y Pablo pesan 68 kg. ¿Cuál es su MB?

Elena→ MB = peso x 24 x 0,9 = 68 x 24 x 0,9 = 1.468,8 kcal.
Pablo→ MB = peso x 24 = 68 x 24 = 1. 632 Kcal.

Conociendo el MB se puede calcular el peso de una persona si sabemos su sexo.

$MB_{hombres}$ = peso en kg. x 24 horas → peso =MB/24 (kg.)

$MB_{mujeres}$ = peso en kg. x 24 horas x 0,9 → peso = MB/(24*0,9) (kg).

Actividades

10. Averigua el metabolismo basal de los miembros de tu familia.
11. Averigua el MB de las personas siguientes:

Aurelio pesa 85 kg.	Andrea pesa 78 kg.
Montse pesa 58 kg.	Carlos pesa 97 kg

12. En la tabla siguiente tienes en la primera columna algunos de los pesos más frecuentes. Calcula el metabolismo basal para ambos sexos, rellenando las columnas que están en blanco:

Peso en kg.	**MB (hombre)**	**MB (mujer)**
61		
80		
87		

Recursos: Hoja de cálculo.

13. Cecilia tiene un metabolismo basal de 1800 kcal., Mario de 2400 kcal. y Jacinta de 1400 kcal. Averigua lo que pesan.

Recursos: Hoja de cálculo anterior para comprobar los resultados.

Ficha 4- Factor de Actividad (FA)

El *factor de actividad* (FA) es un número asociado al gasto de energía al hacer una actividad física y se puede resumir en la tabla siguiente según el tipo de actividades que haga la persona a lo largo del día:

Tipo de actividad	Actividades tipo	Factor de actividad
Sedentaria	Dormir, coser, comer, estar sentado leyendo escribiendo, jugando,…, estar de pie	1,20
Suave	Trabajar en una oficina, tocar el piano, pasear, conducir un coche, lavarse, vestirse, ducharse, barrer, hacer camas, limpiar cristales y/o zapatos, lavar platos, cocinar	1,25
Media	Caminar a 5 km/h, planchar, fregar suelo, pasar el aspirador, lavar ropa a mano.	1,30
Alta	Cavar, subir escaleras, montar a caballo o en bici sin cuestas,…	1,50
Muy alta	Correr a más de 8 km/h, deportes como baloncesto, fútbol, esquí, nadar,…profesiones como minería, albañilería, etc,…	1,75

Ejemplo: Indica el factor de actividad adecuado para las siguientes personas:

Leo es pianista → 1,25	Pepa es jugadora de baloncesto→ 1,50
Lucas es jardinero→ 1,50	Marta es asistenta→ 1,30
Alfredo es administrativo en una oficina→ 1,25	

Actividades

14. Indica el factor de actividad adecuado para los miembros de su familia explicando por qué consideras que es ese de acuerdo con su actividad física.
15. Indica el FA para cada una de las siguientes personas:

Juan corre a diario a 10 km/h.	Luisa es profesora de aerobic
Miguel es monitor de equitación.	Conchita está jubilada y normalmente hace punto.

Ficha 5 - Gasto Energético Total Diario

El gasto energético total diario (GET) es la energía que necesita el organismo para funcionar de manera correcta. Se mide en kilocalorías y su fórmula es:

$$GET = MB * FA$$

Ejemplo**:** Elena pesa 68 kg. y hace a diario una actividad media ¿Cuál es su GET?

En primer lugar calculamos su MB = 68 * 24 = 1.632 Kcal. Como es una mujer hay que restarle el 10% que es 163.2→ su MB será 1632- 163,2 = 1.468,8 kcal.

Si hace una actividad media el FA = 1,30→ su GET será: MB * FA= 1468,8 * 1,30 = 1.909,44 kilocalorías.

Actividades

16. Calcula el GET de los miembros de tu familia según su factor de actividad.

17. Las personas siguientes tienen un factor de actividad medio, calcula el gasto de energía diaria (GET) para cada una de ellas: Lola pesa 66 kg.; Luís pesa 85,5 kg.; Pepa pesa 71 kg. y Darío pesa 70 kg.

    Ampliación: Deducir que para un factor de actividad medio, la función que da el GET para hombres es y = 31x, y para mujeres y = 28x, siendo x el peso en kg. Dibujar ambas gráficas señalando las partes que corresponden a los valores más habituales de peso en los adultos, por ejemplo desde 50 kg. a 90 kg.

    Recursos: calculadora gráfica o programa informático.

18. Calcula el GET de las siguientes personas:
    a. Tomás, es jardinero y pesa 93 kg.
    b. Andrea trabaja en una oficina y pesa 55 kg.
    c. Pedro juega al baloncesto y pesa 110 kg.
    d. Luisa es nadadora profesional y pesa 73 kg.
    e. Lancho está jubilado, hace vida sedentaria y pesa 81 kg.

    Ampliación: Comprobar los resultados con las gráficas del ejercicio anterior.

    Recursos: Calculadora gráfica o programa informático.

19. En la tabla te dan las kilocalorías aproximadas que se gastan por cada minuto dependiendo del tipo de esfuerzo que se realice.

Tipo de esfuerzo	Kcal. por minuto
Ningún esfuerzo	1,25
Esfuerzo suave	2,5
Esfuerzo medio	5
Esfuerzo duro	7,5
Esfuerzo muy duro	10

Calcula las kilocalorías que necesitaría una persona que duerme 8 horas, trabaja en una oficina 8 horas, camina 1 hora, nada media hora, ve la TV 2 horas y media, hace las tareas de casa en 2 horas, arregla su jardín ½ hora y las restantes las emplea en comer y asearse.

20. Si la persona del ejercicio 19 es un hombre que pesa 91 kg.y mide 1,78 m:
    a. Calcula su GET según la fórmula general y compara el resultado con lo que te sale en el ejercicio 20.
    b. Indica si debería adelgazar o engordar

    Ampliación: Discutir en grupo los resultados del GET obtenidos en los ejercicio 19 y 20. Un buen tema de debate sería "¿Qué crees que podría hacer para alcanzar su peso saludable?"

Ficha 6- Distribución de Kilocalorías a lo largo del día

Los expertos en nutrición recomiendan, siempre, hacer cinco comidas al día: el desayuno, el tentempié de media mañana, la comida, la merienda y la cena, con la siguiente distribución de las kilocalorías:

Desayuno → 20%; Almuerzo y Merienda → 10%; Comida →35% y Cena → 25%

Ejemplo: Si una persona necesita 2.013 kilocalorías diarias tendría que distribuirlas de la siguiente manera en 5 tomas:

- Desayuno→ 20% de 2013 = 402,6 kcal.
- Almuerzo o Media mañana→ 10% de 2013 = 201,3 kcal.
- Comida→ 35% de 2013 =704,5 kcal.
- Merienda→ 10% de 2013 =201,3 kcal.
- Cena→ 25% de 2013 =503,25 kcal.

Actividades

21. Indica cómo se distribuiría a lo largo del día un menú que aporta 1500 kilocalorías.

22. Inés toma las kilocalorías diarias distribuidas de la siguiente manera: desayuno: 320 kcal.; media mañana: 290 kcal.; comida: 800 kcal.; merienda: 150 kcal. y cena: 700 kcal.

    Calcula la distribución porcentual de las kilocalorías que ingiere en cada comida e indica si es la correcta.

23. José Manuel pesa 87,5 kg., y mide 1,83 m. Calcula las kilocalorías que necesita al día para mantenerse en su peso sabiendo que hace una actividad media y distribúyelas a lo largo del día en 5 comidas.

Ficha 7- La información nutricional

Los alimentos contienen nutrientes que son sustancias que asimila el organismo para conseguir la energía necesaria. Los principales nutrientes son las proteínas, las grasas o lípidos y los hidratos de carbono.

Para conocer la cantidad de estos nutrientes hay dos maneras, la primera es usar una tabla de composición de alimentos y las segunda es mirar en la etiqueta del producto en la que debe figurar la cantidad en gramos de cada uno de ellos por cada 100 g. de producto.

Para calcular la cantidad de energía que aportan los nutrientes, es necesario saber que:

1 g de proteínas aporta 4 kcal.; 1 g. de grasas 9 kcal. y 1 g. de HC 4 kcal.

Ejemplo: En un bote de rodajas de piña al natural aparece la siguiente información sobre nutrientes por cada 100 g. de producto: Proteínas: 0,4 g.; Grasas: 0,1 g.; HC: 12,2 g. Si una persona toma 145 g de piña. Calcula las kilocalorías que le aportan.

Proteínas:

$$\left.\begin{array}{l}100\text{ g de piña} \rightarrow 0{,}4\text{ g de P}\\ 145\text{ g de piña} \rightarrow \text{x g. de P}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{145 * 0{,}4}{100} = 0{,}58 \approx 0{,}6\text{ g. de P}$$ → 0,6 * 4 = 2,4 kcal.

Grasas:

$$\left.\begin{array}{l}100\text{ g de piña} \rightarrow 0{,}1\text{ g de grasas}\\ 145\text{ g de piña} \rightarrow \text{x g. de grasas}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{145 * 0{,}1}{100} = 0{,}145 \approx 0{,}1\text{ g. de gras.}$$ → 0,1 * 9 = 0,9 kcal.

HC:

$$\left.\begin{array}{l}100\text{ g de piña} \rightarrow 12{,}2\text{ g. de HC}\\ 145\text{ g de piña} \rightarrow \text{x g. de HC}\end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{145 * 12{,}2}{100} = 17{,}69 \approx 17{,}7\text{ g. de HC}$$ → 17,7 * 4 ≈ 71 kc.

Por lo tanto las kilocalorías totales serán: 2,4 + 0,9 + 71 = 74,3 kcal.

Actividades:

24. Calcula la cantidad de proteínas, grasas, hidratos de carbono y las kilocalorías que contienen 125 gramos de leche entera sabiendo que en la etiqueta tenemos la siguiente información: Proteínas:3,2; Grasas: 3,7; HC: 4,6

Ficha 8 – El equilibrio nutricional

Una dieta es equilibrada cuando el total de energía que aporta se distribuye al día, por nutrientes, de la siguiente manera:

Proteínas → 15%; *Grasas → 30%;* *Hidratos de carbono → 55%*

Para calcular el porcentaje hay que conocer la cantidad en gramos de producto consumido y consultar en la etiqueta o en una tabla de composición de alimentos [ver referencia 2], en la que nos dan la cantidad en gramos de los nutrientes por cada 100 gramos de producto.

Ejemplo: Para calcular la proporción de nutrientes del menú diario de la tabla:

Comidas diarias	Alimento	Cantidad (g.)	Kcal.	Proteínas (g.)	Grasas (g.)	H de C (g.)
Desayuno	Naranja	150	41,2	0,88	0	9,4
	Muesli	60	230	6,3	4,9	40,3
	Leche entera	150	98,4	5	5,4	7,5
Almuerzo	Yogur entero sabor fruta	125	143	6,8	4,3	19,5
Comida	Crema calabacín	60	223	6,2	5,6	37
	Ternera asada	100	131	20,7	5,4	0
	Patata	50	37,7	1,1	0,09	8,1
	Nectarinas	150	56,7	1,9	0,13	12
	Pan	40	109	3,12	0,4	23,2
Merienda	Plátano	100	87,5	1,2	0,3	20
Cena	Lechuga	100	14,3	1,5	0,3	1,4
	Tomate	60	10,7	0,56	0,06	2
	Merluza	150	107	19,1	3,4	0
	Claudias	150	59,2	0,77	0	14
	Aceite oliva diario	50	450	0	50	0
TOTALES			1.798,7	75,13	80,28	194,4

Utilizamos una tabla de composición de alimentos para conocer la cantidad de kilocalorías, proteínas, grasas e hidratos de carbono que proporcionan las cantidades en gramos de cada uno de los alimentos consumidos. En las tablas de

composición de alimentos nos dan estas cantidades por cada 100 gramos de alimento, con lo que hacemos una regla de tres, no obstante existen tablas de composición en línea que calculan automáticamente estas cantidades sin más que teclear el alimento y los gramos que hemos ingerido del mismo.

Rellenamos la tabla y sumamos las columnas obteniendo las kilocalorías que aporta el menú así como la cantidad en gramos de los tres nutrientes principales.

Calculamos a continuación la cantidad de calorías que aportan los tres nutrientes:

Proteínas: 75,13 g x 4 kcal/g = 300,52 kcal.
Grasas: 80,28 g x 9 kcal/g = 722,52 kcal.
H. de C.: 194,4 g x 4 kcal/g = 777,60 kcal

Y, por último, calculamos la proporción de nutrientes:

Proteínas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{de } 1.789{,}7 \text{ kcal} \rightarrow 300{,}52 \text{ son de proteínas} \\ \text{de } 100 \text{ kcal.} \rightarrow \text{x de proteínas}\end{array}\right\} x = \frac{300{,}52 * 100}{1789{,}7} = 16{,}7\% > 15\ \% \text{ recomendado}$$

Grasas:

$$\left.\begin{array}{l}\text{de } 1.789{,}7 \text{ kcal} \rightarrow 722{,}52 \text{ son de grasas} \\ \text{de } 100 \text{ kcal.} \rightarrow \text{x de grasas}\end{array}\right\} x = \frac{722{,}52 * 100}{1789{,}7} = 40{,}16\% > 30\% \text{ recomendado}$$

H. de C.:

$$\left.\begin{array}{l}\text{de } 1.789{,}7 \text{ kcal} \rightarrow 777{,}6 \text{ son de hidratos} \\ \text{de } 100 \text{ kcal.} \rightarrow \text{x de hidratos}\end{array}\right\} x = \frac{777{,}6 * 100}{1789{,}7} = 43{,}23\% < 55\% \text{ recomendado}$$

Actividades

25. Analizar el menú diario siguiente:: Desayuno: 125 g. de zumo de naranja; 250 de leche semidesnatada; 10 g. de mermelada; 10 g. de mantequilla y 65 g. de pan de molde blanco; Media mañana: 65 g. de pan de trigo; 100 g. de queso fresco; Comida: 100 g de puré de patatas con leche; 1900 g. de pollo a la plancha; 60 g. de patatas; 1 yogur desnatado con frutas y 30 g. de pan de trigo; Merienda: 100 g. de melocotón; 100 g. de manzana y Cena: 100 g. de coliflor; 100 g. de emperador y 30 g. de pan de trigo. Aceite de oliva diario: 50 gramos.

Ampliación: Discutir en grupo el equilibrio de este menú con respecto a la proporción de nutrientes y elaborar un menú alternativo que cumpla la proporción de nutrientes recomendable.

Recursos: Tablas en línea de composición de alimentos y Hoja de cálculo.

Conclusiones

No hay que olvidar que estos datos están dirigidos para una población adulta y sana y que aún se están estudiando para adolescentes, así hemos de hacérselo ver a los alumnos desde el principio. También advertirles que son datos poblacionales que deben considerarse como una guía aproximada y que también sus diferentes casos, al ser adolescentes, serían aproximativos.

No obstante creemos que es una buena práctica iniciarles en estas actividades para que tomen conciencia de las distintas situaciones que se pueden plantear a un adulto en cuanto al peso y a las kilocalorías que necesitan según su actividad física, con ello, además de contenidos matemáticos, los hemos iniciado en el aprendizaje de contenidos de salud.

Vendría a continuación el estudio de los nutrientes de los alimentos así como las kilocalorías que aportan, esto constituye una segunda parte del artículo en la que estamos trabajando, y en que se pretende continuar en el aprendizaje de contenidos de salud referentes al análisis nutricional y calórico de los alimentos que ingieren, la frecuencia en la ingesta de los mismos y el peso de las raciones recomendadas.

Fuentes de información

[1] Sitio web de la OMS: http://www.who.int/en/

[2] Tabla de composición de alimentos en línea:
http://www.kelloggs.es/nutricion/index.php?donde=composicion

Soluciones a los ejercicios

Ejercicio 2: a) 24,89 → 24,9; b) 27,18 → 27,2; c) 21,7

Ejercicio 3: Tomás IMC = 27,01 → IMC = 27 No; Ángeles IMC = 24,77 → 24,8 Sí; Pedro IMC = 23,3 → Sí; Juan IMC = 28,7 → No

Ejercicio 4:

Nombre	Peso (kg.)	Altura (m.)	IMC	Obesidad mórbida: sí o no
Eusebio	110	1,97	28,34	No

Leoncio	86	1,73	28,7	No
Lucas	115	1,68	40,75	Sí
Petra	97	1,54	40,97	Sí
Encarna	75	1,74	24,8	No

Ejercicio 5:

Nombre	Altura	Peso	IMC	Podría desfilar
Ana	1,66 m	52,00 k	18,87	Si
Esther	1,69 m	50,00 k	17,51	No
Virginia	1,72 m	54,00 k	18,25	Sí
Mª José	1,77 m	53,50 k	17,08	No
Lola	1,82 m	70,00 k	21,13	Sí

Ejercicio 6: 18 * (1,92)^2 = 18* 3,68 = 66,24 kg; 25 * (1,92)^2 = 25 * 3,68 = 92 kg.

Ejercicio 7:

Altura: h	h^2	P S $_{mín.}$ (k)	P S $_{máx.}$
1,60 m	2,56	46,08	64,00
1,70 m	2,89	52,02	72,25
1,80 m	3,24	58,32	81,00
1,90 m	3,61	64,98	90,25

Ejercicio 8: 18 * (1,68)^2 = 18 * 2,82 = 50,76 kg.; 25 * (1,68)^2 = 70,5 kg. $\approx$ 44 kilos. Como pesa 55 kg., está dentro del intervalo de peso saludable.

Ejercicio 9:

Altura	PS mín.	PS máx.	$\overline{x}$:Media de $PS_{mín}$ y $PS_{máx.}$
1,62	47	66	56
1,64	48	67	58
1,66	50	69	59
1,68	51	71	61
1,7	52	72	62
1,72	53	74	64
1,74	54	76	65
1,76	56	77	67
1,78	57	79	68
1,8	58	81	70
1,82	60	83	71

Ejercicio 11: Aurelio → 85 x 24 = 2040 kcal.; Andrea → 78 x 24 = 1872; 1872 – 187,2 = 1684,8 kcal.; Montse → 58 x 24 = 1392; 1392 – 139,2 = 1252,8 kcal.; Carlos → 97 x 24 = 2328 kcal.

Ejercicio 12:

Peso en kg.	MB (hombre)	MB (mujer)
61	1464	1317,6
80	1920	1728
87	2088	1879,2

Ejercicio 13: Cecilia: peso = 1800/(24*0,9)=83,3 kg.; Nazario: peso = 2400/24 = 100 kg.; Jacinta: peso = 1400/(24*0,9)= 64,8 kg.

Ejercicio 15: Juan 1,75; Luisa 1,50; Petra 1,50; Conchita 1,20

Ejercicio 17: Lola: MB: 66 * 24 = 1584→ 1584 – 158, 4 = 1425,6 kcal→ GET = 1425,6 * * 1,30 = 1.853,28 ≈1.850 kcal. ; Luis: MB: 85,5 * 24 = 2052→ GET = 2052 * 1,30 = 2667,6 ≈2670 kcal.; Pepa: MB: 71 * 24 = 1704→ 1704 – 170,4 = 1533,6 kcal→ GET = 1533,6 * 1,30 = 1993,68 ≈1994 kcal.; Dario: MB: 70 * 24 =1680→ GET = 1680 *1,30 = 2184 ≈2.180 kcal.

Ejercicio 18: Tomas: MB: 93 * 24 =2232→ GET = 2232 * 1, 50 = 3348 kcal.; Andrea: MB: 55 * 24 = 1320 kcal→ 1320-132 = 1188 kcal→ GET = 1188 * 1, 25 = 1485 kcal.; Pedro: MB: 110 * 24 =2640→ GET = 2640 * 1, 75 = 4620 kcal.; Luisa: MB: 73 * 24 = 1752 kcal→ 1752-175, 2 = 1576,8 kcal→ GET = 1576,8 * 1,75 = 2759,4 kcal. ≈ 2760 kcal.; Lancho: MB: 81 x 24 = 1944→ GET = 1944 x 1, 20 = 2332 kcal

Ejercicio 19: 8 horas durmiendo→ 480 m x 1,25 = 600 kcal; 8 horas oficina→ 480 minutos→ 480 x 2,5 = 1200 kcal.; 1 hora caminando→ 60 minutos→ 60 x 5 = 300 kcal.; ½ hora nadando→ 30 minutos→ 30 x 7,5 = 225 kcal.; 2 horas tareas casa→ 120 minutos→ 120x 5 = 600 kcal.; ½ horas jardín→ 30 minutos→ 30 x 7,5 = 225 kcal.; 4 horas aseo+ comida→ 240 minutos→ 240 x 1,25 = 300 kcal. En total: 600 +1200+300+225+600+225+300= 3.450 kcal.

Ejercicio 20: GET = MB x FA = peso* 24* FA = 91 * 24 * 1,5 = 3.276 kcal. Antes eran: 3.450 kcal. La diferencia es insignificante. PI = 22* (1,78)^2= 70 kg. Debería adelgazar. Como hace bastante actividad física, debería ingerir menos kilocalorías.

Ejercicio 21: Desayuno→ 20% de 1500 = 300 kcal.; Media mañana→ 10% de 1500 = 150 kcal.; Comida→ 35% de 1500 =525 kcal.; Merienda→ 10% de 1500 = 150 kcal.; Cena→ 25% de 1500 = 375 kcal.

Ejercicio 22: 320+290+800+150+700= 2.260 kcal., al día. Desayuno: (320*100)/2260 = 14,15 < 20%; Media mañana: 13% > 10%; Comida: 35,4% correcto; Merienda: 6,6% < 10%; Cena: 31% > 20%. Debería incrementar la ingesta en el desayuno y merienda para disminuir en la cena.

Ejercicio 23: MB = p*24 = 87,5 * 24 = 2100→ GET = 2100 * 1,30 = 2730 kcal. diarias. Haciendo los porcentajes sale: Desayuno: 546 kcal.; Media mañana: 273 kcal.; Comida: 955,5 kcal.; Merienda 273 kcal. y Cena: 682,5 kcal.

Ejercicio 24: Proteínas: (125*3,2)/100 = 4 g. → 4 g. *4 kcal/g. = 16 kcal.; Grasas: (125*3,7)/100= 4,62 g. → 4,62 g. de grasa *9 kcal./g. = 41,6 kcal.; HC: (125*4,6)/100= 5,75 g→ 5,75 g. de HC *4 kcal./g. =23 kcal.

Ejercicio 25

Comida del día	Alimentos	Cantidad (g.)	Kcal.	Proteínas (g.)	Grasas (g.)	H. de C. (g.)
Desayuno	Zumo de naranja	125	34,3	0,73	0	1
	Leche semi	250	108	7,4	3,9	11
	Mermelada fresa	10	28,1	0,02	0	7
	Mantequilla	10	75	0,06	8,3	0
	Pan molde	65	182	5,2	3	33,8
Almuerzo	Pan de trigo	65	177	5,1	0,65	37,7
	Queso fresco	100	175	15	11	4
Comida	Puré de patatas con leche	100	79,6	2,4	1,2	14,8
	Pollo plancha	100	112	21,8	2,8	0
	Patatas	60	253	4,1	8,5	40
	Yogur	125	86,8	4,8	0,25	16,4
	Pan de trigo	30	81,7	2,3	0,3	17,4
Merienda	Melocotón	100	38,4	0,6	0	9
	Manzana	100	49,2	0,3	0	12
Cena	Coliflor	100	23	2,2	0,2	3
	Emperador	100	107	17	4,3	0
	Pan de trigo	30	81,7	2,3	0,3	17,4
Aceite	oliva	50	450	0	50	0
TOTAL			2141,8	91,31	94,7	224,5

Proteínas: 91,31 g*4 kcal./g= 365,24 kcal.→ 17% < 15% recomendado; Grasas: 94,7 g *9 kcal/g= 852,3 kcal. → 39,8% > 30 % recomendado; Hidratos de carbono: 224,5 g*4 kcal/g = 898 kcal. → 42% < 55% recomendado

Provocar el pensamiento matemático: un ejemplo en el aula

G. Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols, L'Alcúdia, Valencia

Resumen

This paper shows an example of problem that provides the possibility of stimulating our teaching development in the classroom. It allows to present optimization strategies and techniques in a different way as it is usual. Moreover, it can be used as a motivating problem in order to connect skills treated in different teaching levels.

Introducción

El objetivo de este trabajo es mostrar -desde un problema particular planteado en el aula como una actividad más-, hasta dónde podemos llegar si, como docentes, nos esforzamos en (utilizando la terminología de Mason-Burton-Stacey, véase [3, pág. 159]) *provocar el pensamiento matemático*. Desde el punto de vista de la labor docente, de forma natural veremos en el desarrollo de estas páginas que, la dinámica de trabajo propuesta, nos permitirá poner en práctica diversas *estrategias de pensamiento matemático* propias de la Resolución de Problemas (véase, [2, pág. 133]).

Esta historia comienza un día cualquiera en el aula de Secundaria, con el planteamiento del siguiente problema propuesto en la XIII Olimpiada Matemática Española en 1975 (véase [4, pág. 14]).

Problema original

El precio de un diamante es proporcional al cuadrado de su peso. Demuestra que, rompiéndolo en dos partes, existe una depreciación de su valor. ¿Cuándo es máxima la depreciación?

El problema se resolvió introduciendo una buena notación y haciendo uso de herramientas básicas propias del nivel educativo señalado: binomios, desigualdades y funciones polinómicas cuadráticas. En efecto, el valor del diamante (entero) de peso p es $V(p) = k\,p^2$, $k > 0$, , mientras que si se rompe en dos trozos, cada uno de peso p_1 y p_2, respectivamente, (obsérvese que $p_1 + p_2 = p$) entonces cada trozo vale: $V(p_1) = k\,p_1^2$, $V(p_2) = k\,p_2^2$, respectivamente. Es decir, mientras que el diamante entero vale

$$V(p) = k\,p^2 = k\,(p_1 + p_2)^2 = k\left(p_1^2 + p_2^2 + 2\,p_1\,p_2\right) ,$$

los dos trozos de diamante conjuntamente valen menos, ya que como $2\,k\,p_1\,p_2 > 0$ se tiene:

$$V(p_1) + V(p_2) = k\,p_1^2 + kp_2^2 = k\left(p_1^2 + p_2^2\right) < k\left(p_1^2 + p_2^2\right) + 2\,k\,p_1\,p_2 = V(p) .$$

Exactamente la depreciación al romper el diamante en dos trozos es:

$$\text{Depreciación} = 2\,k\,p_1\,p_2 = 2\,kp_1\,(p - p_1) = -2\,k\,p_1^2 + 2\,k\,p\,p_1 := D(p_1) ,$$

donde se ha utilizado que como $p_1 + p_2 = p$, entonces $p_2 = p - p_1$. La función de depreciación $D(p_1)$ es una parábola cóncava (con el vértice hacia arriba), por tanto su máximo valor está en dicho vértice:

$$\text{Peso asociado a la máxima depreciación} = -\frac{2\,k\,p}{2\,(-2\,k)} = \frac{p}{2} ,$$

(este resultado admite una interpretación intuitiva: si el valor del diamante aumenta con el peso, la devaluación será mayor cuanto menor sean en peso los trozos que resulten de la partición, y justo si se parte de modo que cada trozo pese lo mismo, no hay un trozo que pese más que el otro y posibilite un mayor valor conjunto). Se deduce por tanto que $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_2 = \frac{p}{2}$. Además, el valor pedido de la devaluación es:

$$\text{Valor de la depreciación} = 2\,k\frac{p}{2}\,\frac{p}{2} = k\,\frac{p^2}{2} .$$

1 Cambiando el problema: ¿y si ...?

Resuelto el problema, se puede seguir *provocando* el pensamiento matemático planteando variaciones del mismo. Y así fue como se procedió en el aula. Una pregunta natural, al alcance del nivel educativo antes citado, que se propuso es la siguiente:

Problema modificado: 1ª versión
¿Y si el precio del diamante es proporcional al cubo de su peso? Parece lógico que si se rompiera en dos partes, seguiría habiendo depreciación del valor del diamante.

¿Te atreves a justificarlo? ¿Cuándo es máxima la depreciación?

Ahora el valor del diamante (entero) de peso p es $V(p) = k\,p^3$, $k > 0$. Si se rompe en dos trozos, cada uno de peso p_1 y p_2, respectivamente ($p_1 + p_2 = p$) entonces cada trozo valdrá: $V(p_1) = k\,p_1^3$, $V(p_2) = k\,p_2^3$, respectivamente. Mientras que el diamante entero vale

$$V(p) = k\,p^3 = k\,(p_1 + p_2)^3 = k\,\left(p_1^3 + p_2^3 + 3\,p_1\,p_2^2 + 3\,p_1^2\,p_2\right)\,,$$

los dos trozos de diamante conjuntamente valen menos, ya que

$$V(p_1) + V(p_2) = k\left(p_1^3 + p_2^3\right) < k\left(p_1^3 + p_2^3\right) + 3\,k\,p_1\,p_2^2 + 3\,k\,p_1^2\,p_2 := V(p)\,.$$

La depreciación al romper el diamante en dos trozos es:

$$\text{Depreciación} = 3\,k\,p_1\,p_2\,(p_1 + p_2) = 3\,k\,p_1\,\,(p - p_1)\,p = -3\,k\,p\,p_1^2 + 3\,k\,p^2\,p_1 = D(p_1)\,,$$

donde se ha utilizado que $p_2 = p - p_1$. Como en la primera formulación del problema, la función de depreciación $D(p_1)$ es una parábola cóncava, por tanto su máximo valor es:

$$\text{Peso asociado a la máxima depreciación} = -\frac{3\,k\,p^2}{2\,(-3\,k\,p)} = \frac{p}{2}\,,$$

(el resultado tiene la misma explicación intuitiva que antes). Por tanto $\widehat{p}_1 = \widehat{p}_2 = \frac{p}{2}$. El valor de la devaluación pedido es:

$$\text{Valor de la depreciación} = 3\,k\,\frac{p}{2}\,\frac{p}{2}\,p = 3\,k\,\frac{p^3}{4}\,.$$

2 Otras variaciones para otros niveles educativos

El trabajo en el aula de Secundaria deparó la propuesta por parte de los alumnos de otras generalizaciones naturales del problema, que sirvieron para mostrar, -en palabras de Miguel de Guzmán (véase, [2, pág. 227])- *la importancia del papel del conocimiento específico en la Resolución de Problemas*. En efecto, la siguiente generalización del problema, no pudo ser abordada en este nivel de enseñanza, lo que condujo a una reflexión común acerca de seguir formándose para poder responder a nuevos problemas como el que ellos mismos habían planteado:

Problema modificado: 2ª versión

En el contexto de la versión original del problema, si en lugar de romperlo en dos partes, lo hacemos en tres, parece claro que el diamante se devaluará más. ¿Se puede justificar esta afirmación, calculando la depreciación máxima?

Denotemos al peso de cada uno de los tres trozos por: p_1, p_2 y p_3, respectivamente, (ahora $p_1 + p_2 + p_3 = p$) entonces cada trozo de diamante vale:

$$V(p_1) = k\,p_1^2 \quad , \quad V(p_2) = k\,p_2^2 \quad , \quad V(p_3) = k\,p_3^2 \,.$$

Sin embargo, el valor del diamante entero es

$$V(p) = k\,p^2 = k\,(p_1 + p_2 + p_3)^2 = k\,\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + 2\,p_1\,p_2 + 2\,p_1\,p_3 + 2\,p_2\,p_3\right) \,,$$

mientras que los tres trozos de diamante conjuntamente valen menos, ya que,

$$V(p_1) + V(p_2) + V(p_3) = k\,p_1^2 + k\,p_2^2 + k\,p_3^2 = k\,\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right)$$

$$< k\,\left(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2\right) + 2\,k\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) = V(p)\,.$$

La depreciación al romper el diamante en tres trozos es:

$$\begin{array}{rcl} \text{Depreciación} & = & 2\,k\,(p_1\,p_2 + p_1\,p_3 + p_2\,p_3) \\ & = & 2\,k\,(p_1\,p_2 + p_1\,(p - p_1 - p_2) + p_2\,(p - p_1 - p_2)) \\ & = & 2\,k\,\left(-p_1^2 + (p - p_2)\,p_1 + p_2\,(p - p_2)\right) \,, \end{array}$$

donde se ha utilizado que como $p_1 + p_2 + p_3 = p$, entonces $p_3 = p - p_1 - p_2$. Por tanto, la función a maximizar es de dos variables:

$$D(p_1, p_2) = 2\,k\,\left(-p_1^2 + (p - p_2)\,p_1 + p_2\,(p - p_2)\right) \,, \tag{1}$$

y está definida sobre el dominio $S = \{(p_1, p_2) : p_1, p_2 > 0\}$, el cual es convexo (es el primer cuadrante del plano). Los candidatos a máximos de esta función son los puntos críticos, los cuales se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rcccrcl} \dfrac{\partial D(p_1, p_2)}{\partial p_1} & = & 0 & \Rightarrow & 2\,p_1 + p_2 & = & p \\ \dfrac{\partial D(p_1, p_2)}{\partial p_2} & = & 0 & \Rightarrow & p_1 + 2\,p_2 & = & p \end{array}$$

cuya solución es

$$p_1 = \frac{p}{3} \quad , \quad p_2 = \frac{p}{3}.$$

La función $D(p_1, p_2)$ es claramente diferenciable, por ser polinómica y, es cóncava en el conjunto S, por cumplirse que su matriz hessiana

$$H\left(D(p_1, p_2)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 D(p_1, p_2)}{\partial p_1^2} & \dfrac{\partial^2 D(p_1, p_2)}{\partial p_1 \partial p_2} \\ \dfrac{\partial^2 D(p_1, p_2)}{\partial p_2 \partial p_1} & \dfrac{\partial^2 D(p_1, p_2)}{\partial p_2^2} \end{pmatrix} = 2\,k \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

es definida negativa en todo punto del dominio (obsérvese que es constante), ya que, tiene valores propios negativos: $\sigma(H) = \{-3, -1\}$. Entonces por satisfacerse las condiciones suficientes de optimalidad global (véase, [1]), el punto crítico calculado, esto es, $(\hat{p}_1, \hat{p}_2) = (p/3, p/3)$, es máximo global. El valor de $\hat{p}_3 = p/3$, se obtiene de la relación: $\hat{p}_1 + \hat{p}_2 + \hat{p}_3 = p$.

Obviamente, la anterior resolución del problema es sólo abordable a nivel universitario en un curso de Cálculo Diferencial con contenidos de optimización de funciones en varias variables, pero, dado que su planteamiento había sido originado en un nivel educativo inferior me pregunté: ¿es abordable su resolución en Bachillerato? Observé que una estrategia útil para maximizar una función de dos variables, digamos $F(x, y)$, consiste en *congelar* una de las variables, por ejemplo, la variable y, generando así una función de una única variable, $f(x)$, para la cual son aplicables las técnicas clásicas de optimización en un primer curso de bachillerato, a partir de las cuales se puede obtener su máximo, digamos $\widehat{x}$, para a continuación, *liberar* la variable fijada, y, y maximar la función de una variable resultante de poner el valor óptimo $\widehat{x}$ en la función inicial, esto es, se trata de maximizar en un segundo paso la función de una variable $g(y) = F(\widehat{x}, y)$, obtiéndose el valor óptimo (máximo) $\widehat{y}$. Todo ello permite afirmar que el máximo de la función de dos variables $F(x, y)$ es $(\widehat{x}, \widehat{y})$. Con esta estrategia se abordó, en un primer curso de bachillerato el problema, obteniéndose la misma solución que, se había calculado haciendo uso del Cálculo Diferencial en varias variables. En efecto, si fijamos p_2, la función de depreciación $D(p_1, p_2) = D(p_1)$ dada en (1) es una parábola cóncava, por tanto su máximo valor está en el vértice:

$$\text{Peso 1 asociado a la máxima depreciación } (\hat{p}_1) = -\frac{2\,k\;(p - p_2)}{2\,(-2\,k)} = \frac{p - p_2}{2}\;.$$

Con ello, se tiene que la depreciación se puede escribir en términos de p_2:

$$\text{Depreciación} = 2\,k\,\left(-\left(\frac{p - p_2}{2}\right)^2 + (p - p_2)\left(\frac{p - p_2}{2}\right) + p_2\,(p - p_2)\right)$$

$$= 2\,k\,\left(-\frac{(p - p_2)^2}{4} + \frac{(p - p_2)^2}{2} + p_2\,(p - p_2)\right) = 2\,k\,\left(\frac{(p - p_2)^2}{4} + p_2\,(p - p_2)\right)$$

$$= 2\,k\,\left(-\frac{3}{4}\,p_2^2 + \frac{1}{2}\,p\,p_2 + \frac{1}{4}\,p^2\right) = D(p_2)\;.$$

De nuevo, como función de p_2, la función de depreciación $D(p_2)$ es una parábola cóncava, y por tanto su máximo valor está en el vértice:

$$\text{Peso 2 asociado a la máxima depreciación } (\hat{p}_2) = -\frac{2\,k\,\frac{1}{2}p}{2\left(2\,k\,\left(-\frac{3}{4}\right)\right)} = \frac{p}{3}\,.$$

Ello permite, a partir de la relación establecida anteriormente entre p_1 y p_2, calcular el valor de $\hat{p}_1$:

$$\hat{p}_1 = \frac{p - \hat{p}_2}{2} = \frac{p - \frac{p}{3}}{2} = \frac{p}{3}\,.$$

Finalmente como $p_1 + p_2 + p_3 = p$, se tiene que: $\hat{p}_3 = \frac{p}{3}$. El resultado obtenido es: el diamante se devalua más cuando los tres trozos tienen el mismo peso, lo que responde a la misma intuición que la dada en la resolución de la primera versión del problema. Además, el valor de la devaluación es:

$$\text{Valor de la depreciación (3 trozos)} = 2\,k\,(p_1p_2 + p_1p_3 + p_2p_3) = 2\,k\left(3\,\frac{p^2}{9}\right) = 2\,k\frac{p^2}{3}\,,$$

mientras que el valor de la depreciación del diamante cuando se rompía en dos trozos era menor:

$$\text{Valor de la depreciación (2 trozos)} = k\,\frac{p^2}{2}\,,$$

ya que $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$.

3 Conjeturar y demostrar puestos en práctica

Después de haber abordado diferentes generalizaciones parciales del problema, y siguiendo diferentes estrategias presentadas en en el magnífico texto [2], organizamos la información obtenida en una tabla que nos ayudará a *provocar* la labor previa a la demostración: realizar una buena conjetura.

El cuadro 1 contiene de forma organizada los resultados obtenidos hasta el momento (obsérvese que entre paréntesis se ha especificado el valor de la depreciación del diamante en cada caso). Sin duda el mencionado cuadro estimula la búsqueda de cadencias que conduzcan a la conjetura de la solución del problema general.

El cuadro 2 recoge las diferentes conjeturas realizadas, las cuales, desde un punto de vista docente son demostrables en niveles de enseñanza superior, pero que en cualquier caso, y a modo de potenciar la destreza de saber emitir conjeturas, fueron trabajadas en el aula de bachillerato.

En aras de explicitar las técnicas que permiten demostrar las conjeturas expuestas en el cuadro 2, veamos el caso en que se considera la siguiente generalización:

Generalización del problema original (y de su 2ª versión)
En el contexto de la versión original del problema, si en lugar de romperlo en dos partes, lo hacemos en n trozos, parece claro que el diamante se devaluará más. ¿Se puede justificar esta afirmación, calculando la depreciación máxima?

	$V(p) = k\,p^2$	$V(p) = k\,p^3$	$\cdots$	$V(p) = k\,p^r$
2 trozos	$\frac{p}{2}$; $\left(k\,\frac{p^2}{2}\right)$	$\frac{p}{2}$; $\left(3\,k\,\frac{p^3}{4}\right)$		
3 trozos	$\frac{p}{3}$; $\left(2\,k\,\frac{p^2}{3}\right)$			
$\vdots$				
n trozos				

Tabla 1: *Completando los resultados obtenidos para realizar una conjetura*

En este caso, al romperse en n trozos, cada uno de peso p_i, $1 \leq i \leq n$, de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p\,, \tag{2}$$

entonces cada trozo valdrá: $V\,(p_i) = k\,p_i^2$, $1 \leq i \leq n$. Mientras que el diamante entero vale

$$V(p) = k\,(p_1 + \ldots + p_n)^2 = k\,\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + 2\sum_{i,j=1;j<i}^{n} p_i\,p_j\right)\,,$$

los dos trozos de diamante conjuntamente valen menos, ya que

$$V\,(p_1) + \ldots + V\,(p_n) = k\sum_{i=1}^{n} p_i^2 < k\,\left(\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + 2\sum_{i,j=1;j<i}^{n} p_i\,p_j\right) = V(p)\,.$$

La depreciación al romper el diamante en n trozos es:

$$\text{Depreciación} = 2\,k\sum_{i,j=1;j<i}^{n} p_i\,p_j\,, \tag{3}$$

sujeto a la condición dada en (2). Por tanto el programa que debe resolverse en este

problema de optimización es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{Máx.} & D\left(p_1,\ldots,p_n\right) & = & \displaystyle\sum_{i,j=1;j<i}^{n} p_i\, p_j \\ & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i & = & p\,. \end{array}\right. \tag{4}$$

Para su resolución, al tratarse un problema de optimización con restricciones de igualdad, consideramos la función lagrangiana asociada:

$$\mathcal{L}\left(\lambda; p_1,\ldots,p_n\right) = \sum_{i,j=1;j<i}^{n} p_i\, p_j + \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - p\right).$$

Obtengamos ahora, resolviendo el siguiente sistema de $n+1$ ecuaciones lineales, los candidatos a óptimos de la lagrangiana (que también lo son del programa (4)):

$$\left.\begin{array}{rcrcl} \dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\, p_1} & = & \displaystyle\sum_{i=1;i\neq 1}^{n} p_i + \lambda & = & 0 \\ \dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\, p_2} & = & \displaystyle\sum_{i=1;i\neq 2}^{n} p_i + \lambda & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\, p_n} & = & \displaystyle\sum_{i=1;i\neq n}^{n} p_i + \lambda & = & 0 \\ \dfrac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\lambda} & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i & = & p\,. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Observemos que el sistema (5) es tipo Cramer, ya que, por [5, pág. 633] con $x = 0$ y $a = 1$, el determinante de la matriz de coeficientes vale:

$$\left|\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{array}\right|_{n+1} = n\,(-1)^n \neq 0\,. \tag{6}$$

Por otra parte, y con objeto de aplicar la regla de Cramer para calcular p_1, observe-

mos que

$$A_{n+1} = \left| \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ p & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right|_{n+1} = (-1)^{n+2}\, p \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right|_{n} ,$$

(donde hemos desarrollado el primer determinante por la primera columna). Para calcular este último determinante, y haciendo uso de las propiedades de los determinantes, sustituimos la primera fila por la que se obtiene de restar la segunda fila a la primera, con lo que se tiene, desarrollando ahora por la primera fila que

$$A_{n+1} = p\,(-1)^n \left| \begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right|_{n} = p\,(-1)^n \left| \begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right|_{n-1} ,$$

y aplicando la misma técnica recurrentemente, el último determinante vale 1, por lo que $A_{n+1} = p\,(-1)^n$, y

$$\widehat{p}_1 = \frac{p\,(-1)^n}{n\,(-1)^n} = \frac{p}{n}\,.$$

Claramente por la simetría del sistema (5) todas las incógnitas valen lo mismo, es decir,

$$\widehat{p}_i = \frac{p}{n} \quad , \quad 1 \leq i \leq n\,. \tag{7}$$

Por otra parte, a partir de una cualquiera de las n primeras ecuaciones del sistema (5) obtenemos el valor de la incógnita λ:

$$\widehat{\lambda} = -\sum_{i=1;i\neq 1}^{n} \widehat{p}_i = -\frac{n-1}{n}\,p \ .$$

Para justificar que los puntos $\widehat{p}_i$, $1 \leq i \leq n$ determinan el máximo de la función $D\,(p_1, \dots, p_n)$, aplicaremos la proposición 4.2 de [1, pág. 197] con $m = 1$ restricciones de igualdad (nótese que se cumple $m = 1 < n$ y que la función que define la restricción de igualdad es de clase $\mathcal{C}^2(S)$ siendo $S = \{(p_1, \dots, p_n) :\ p_i > 0,\ 1 \leq i \leq n\}$ un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ que contiene al conjunto de puntos B que define la restricción de igualdad, siendo $B = \{(p_1, \dots, p_n) :\ p_1 + \dots + p_n = 0\}$). Necesitamos

entonces (siguiendo la mencionada proposición 4.2 de [1, pág. 197]) considerar el hessiano

$$H\mathcal{L}\left(\lambda; p_1, \ldots, p_n\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{n+1}$$

el cual, al tener un valor constante cumple: $H\mathcal{L}\left(\lambda; p_1, \ldots, p_n\right) = H\,\mathcal{L}\left(\widehat{\lambda}; \widehat{p}_1, \ldots, \widehat{p}_n\right)$. Observemos que si D_j con $j = 3, 4, \ldots, n+1$ denotan los menores principales de $H\mathcal{L}\left(\widehat{\lambda}; \widehat{p}_1, \ldots, \widehat{p}_n\right)$, se cumple por (6) que $D_j = (j-1)\,(-1)^{j-1}$, $j = 3, 4, \ldots, n+1$, es decir, tienen signos alternos, siendo el signo de D_3 el mismo que el de $(-1)^{1+1}$, ya que, $D_3 = 2$. Todo ello justifica, según la proposición 4.2 de [1, pág. 197], que los valores dados en (7) son máximos locales. Pero además, por ser la restricción de igualdad de tipo lineal y la función cóncava (esto se sigue implícitamente por los argumentos ya expuestos, al ser la matriz hessiana constante y el dominio de trabajo un conjunto convexo) que el máximo local es global (véase, proposición 4.3 de [1, pág. 211]). El valor máximo de la depreciación se obtiene directamente de (3)

$$D\left(\widehat{p}_1, \ldots, \widehat{p}_n\right) = 2\,k \sum_{i,j=1;j<i}^{n} p_i\, p_j = 2\,k \sum_{i,j=1;j<i}^{n} \frac{p}{n}\,\frac{p}{n} = 2\,k\,\left(\frac{p}{n}\right)^2\,\frac{n\,(n-1)}{2} = k\,\frac{n-1}{n}\,p^2.$$

Obsérvese que cuando $n = 2$ y $n = 3$, se obtienen los resultados establecidos cuando el diamante se partía en dos y tres trozos, respectivamente. En el cuadro 2 se recoge el resultado establecido y se muestran las conjeturas realizadas para el resto de los casos, y cuya demostración rigurosa, que requiere de la técnica que acabamos de mostrar, se propone al lector interesado, y que puede ser aprovechada a nivel docente en un curso universitario con contenidos en optimización de funciones de varias variables con restricciones de igualdad.

4 Conclusiones

En este trabajo se ha intentado mostrar, a partir de un problema elemental, una metodología de trabajo docente que pretende estimular el pensamiento matemático a partir de diferentes estrategias de Resolución de Problemas como son: proponer variaciones de un problema, realizar conjeturas, demostrar resultados, organizar el trabajo en tablas, etc. Además, el problema particular aquí presentado también

muestra cómo esta forma de actuar conduce de forma natural al estudio de contenidos más avanzados, y por ello, puede servir como modelo de trabajo en cursos superiores donde todas las generalizaciones del problema original (y otras que se pueden proponer) pueden abordarse, mostrando al alumnado la gran riqueza de contenidos que el proceso matemático de generalizar, conjeturar y demostrar, puede arrastrar.

	$V(p) = kp^2$	$V(p) = kp^3$	$\cdots$	$V(p) = kp^r$
2 trozos	$\frac{p}{2}\ ;\ \left(\frac{1}{2}\,k\,p^2\right)$	$\frac{p}{2}\ ;\ \left(\frac{3}{4}\,k\,p^3\right)$	$\ldots$	$\frac{p}{2}\ ;\ \left(\frac{2\,r-3}{2\,r-2}\,k\,p^r\right)$
3 trozos	$\frac{p}{3}\ ;\ \left(\frac{2}{3}\,k\,p^2\right)$	$\frac{p}{3}\ ;\ \left(\frac{4}{5}\,k\,p^3\right)$	$\ldots$	$\frac{p}{3}\ ;\ \left(\frac{2\,r-2}{2\,r-1}\,k\,p^r\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
n trozos	$\frac{p}{n}\ ;\ \left(\frac{n-1}{n}\,k\,p^2\right)$	$\frac{p}{n}\ ;\ \left(\frac{n+1}{n+2}\,k\,p^3\right)$	$\ldots$	$\frac{p}{n}\ ;\ \left(\frac{n+2\,r-5}{n+2\,r-4}\,k\,p^r\right)$

Tabla 2: *Conjeturando la solución del problema general*

Referencias

[1] Barbolla R., Cerdá E., Sanz P. (2000), *Optimización*. Ed. Prentice-Hall. Madrid.

[2] Guzmán M. (2001), *Para Pensar Mejor*. Ed. Pirámide. Madrid.

[3] Mason J., Burton L., Stacey K. (1989), *Pensar Matemáticamente*. Ed. M.E.C.-Labor. Madrid.

[4] *Olimpiada Matemática Española. 1963-2000* . Real Sociedad Matemática Española. (2000)

[5] Anzola M., Caruncho J., García-Canales, G. (1981), *Problemas de Álgbera. Espacios Vectoriales. Tomo 3*. Ed. Alef. Madrid.

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80 y 81.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **`3025-0006-24-1400002948`** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia.*