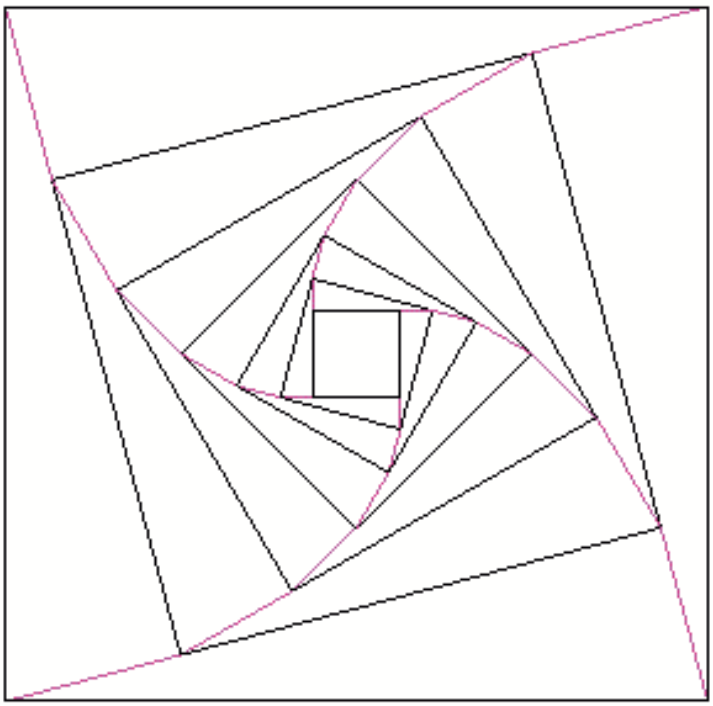
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 80
OCTUBRE DE 2008

Número especial dedicado a la Olimpíada Matemática Internacional celebrada en Madrid el pasado mes de julio.

ÍNDICE

	Págs.
XXVI Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas	4
Problemas propuestos en el XXVI Concurso	10
49 Olimpiada Internacional de Matemáticas, por *María Gaspar*	15
Problemas propuestos en la 49 Olimpiada Internacional	20
Nota de presentación, por *E. Roanes Lozano*	22
Directing our Suspicions (Using Matrix Algebra to organize the results of an investigation), por *Patricia* y *Carl Leinbach*, y *Josef Böhm*	23
Extensión natural a 3D del teorema de Pappus y su configuración completa, por *E. Roanes Macías*, *E. Roanes Lozano* y *J. Fernández Biarge*	38
Rectas Proyectivas sobre R-álgebras bidimensionales y cuádricas en el espacio proyectivo, por *Santiago Mazuelas Franco*	57
Reseña de software: Las matemáticas en MAX, la distribución de software libre de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, por *Ismail Alí Gago* y *Fernando Lisón Martín*	77
Instrucciones para el envío de originales	93
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción	96

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 6248

Todo lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: `puigadam@mat.ucm.es`

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
`http://www.sociedadpuigadam.es`

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

XXVI Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Nuestra Sociedad y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, como cada año, desde 1983, han celebrado el *Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas* que en 2008 ha tenido lugar por vigésimo sexta vez.

En los veinticinco años precedentes, hemos tenido la satisfacción de ver cómo muchos de los alumnos premiados han obtenido posteriormente notables éxitos en las Olimpiadas Matemáticas, tanto nacionales como internacionales.

El Concurso de este año, convocado en nuestro Boletín nº 78 (en el que aparecen las Bases), se celebró en la mañana del sábado 7 de Junio de 2008. Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en el mismo lugar..

La concurrencia, fue parecida a la de años anteriores: 89 alumnos que, según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 7 puntos.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de enhorabuena a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a todos los que han contribuido al éxito del Concurso.

Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

NIVEL I

1. D. Juan MARTÍNEZ OLANDO, *del Colegio Sta. María del Pilar de Madrid*

2. D Fernando GAGO ENCINAS, *del Colegio San Gabriel de Madrid*

3. D. Daniel HENRY MONTILLA. *del Liceo Francés de Madrid*

4. D. Aitor ALONSO LORENZO, *del I.E.S. Diego Velázquez de Madrid*

5. D. José Luis SÁNCHEZ SALVADOR, *del I.E.S. María Guerrero de Madrid*

NIVEL II

1. **D. Francisco CRIADO GALLART,** *del Colegio Amor de Dios de Madrid*
2. **D. Moisés HERRADÓN CUETO,** *del Colegio Brains de Madrid*
3. **D. Carlos RUIZ DOMÍNGUEZ,** *del Colegio San Viator de Madrid*
4. **D. Sergio FERNÁNDEZ RINCÓN**, *del I.E.S. Antonio Machado de Alcalá de Henares (Madrid)*
5. **D. Daniel HERRERO SERRANO**, *del Colegio San José del Parque de Madid*

NIVEL III

1. **D. Rubén JIMÉNEZ BENITO**, *del I.E.S. José Hierro de Getafe (Madrid)* y

   D. Pedro SEGOVIA CARNICERO, *del Colegio San José del Parque de Madrid*
3. **D. Alfonso ALAMBRA MORÁN,** *del I.E.S Doctor .Marañón de.Alcalá de Henares (Madrid)* y

   D. Jaime ROQUERO GIMÉNEZ, *del Liceo Francés de Madrid*
5. **D. Chenda LIU ZHANG**, *del I.E.S. de El Escorial (Madrid).*

Nos complace señalar que los cuatro primeros premiados del Nivel II fueron también premiados en el Nivel I en el Concurso del año pasado y que uno de los primeros premios (Sr. Jiménez) del nivel III fue también primer premio en el nivel II de 2007 y en el nivel I de 2006.

Ha sido sorprendente que el problema 4º del Nivel I haya sido resuelto correctamente por un único participante. Los resultados del nivel III han sido algo decepcionantes, pues los problemas 1º y 3º han quedado sin resolver satisfactoriamente y sólo uno ha dado respuesta correcta al 4º.

Nuestra enhorabuena a todos los premiados, al resto de los participantes y a los padres y profesores que los han preparado y animado a participar.

Damos en este mismo número los enunciados de los problemas propuestos, indicando para cada uno la calificación media para todos los presentados, la calificación media obtenida por los cinco premiados y el número de soluciones correctas presentadas (calificadas con 7 o 6).

Problemas propuestos en el XXVI Concurso

NIVEL I

(30 presentados. Calificaciones de 0 a 7 en cada problema)

Problema 1º

Estudiar si existe un número, n, que cumpla las siguientes condiciones:

1ª: $5n$ es una cuarta potencia.

2ª: $3n$ es una quinta potencia.

3ª: $7n$ es una sexta potencia.

(Media = 1,1 . Media premiados = 6,4 .Soluciones correctas = 4)

Problema 2º

Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es dato para la siguiente:

a) Dos lados de un triángulo isósceles miden 22 y 61. Calcular el área de dicho triángulo.

b) Sea T el área y $k = T+1$. Si a, b y c son enteros positivos menores o iguales que k, y la operación $P*Q$ significa $(P+Q)/2$, calcular el mayor valor posible para la expresión $a*(b*c)-(a*b)*c$.

c) Sea M la respuesta al apartado b). ¿Cuántos números n con $1<n<M$ verifican $[n/2] + [n/3] = n/2 + n/3$? Recuérdese que $[a]$ significa parte entera de a, esto es [1,6]=1 y [8]=8.

(Media = 3,2. Media premiados = 6,4 . Soluciones correctas = 6)

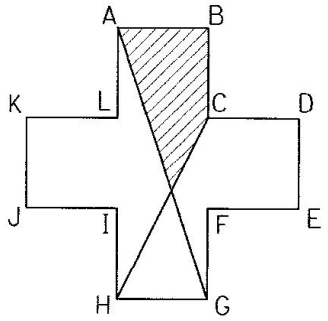
Problema 3º

¿Cuántos cuadrados perfectos menores que 10^6 son múltiplos de 24 ?

(Media = 1,3. Media premiados = 6,0 . Soluciones correctas = 4)

Problema 4º

Consideremos el polígono de 12 lados *ABCDEFGHIJKL* de la figura en el que cada lado tiene longitud 4 y cada dos lados consecutivos forman un ángulo recto. Si las diagonales *AG* y *CH* se cortan en el punto *M,* ¿Cuál es el área del cuadrilátero *ABCM* ?



(Media = 0,6. Media premiados = 2,4 . Soluciones correctas = 1)

NIVEL II

(36 presentados. Calificaciones de 0 a 7 en cada problema)

Problema 1º

C *y* C' *son dos circunferencias secantes.* O *es el centro de* C, *y* C' *pasa por* O. *La recta de centros corta a* C' *en* O *y además en otro punto,* P, *de modo que las tangentes por* P *a* C *son perpendiculares entre sí. Calcular la razón entre los radios.*

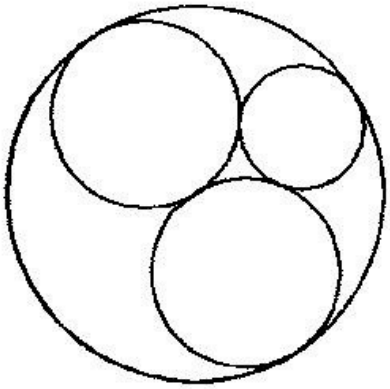
(Media = 2,1. Media premiados = 7,0 . Soluciones correctas = 8)

Problema 2º

Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es dato para la siguiente:

a) Calcular el menor entero positivo *n* para el que el producto 13.19.*n* se puede escribir también como producto de tres enteros consecutivos.

b) Sea n la respuesta del apartado anterior y $k=n/111$. Todas las circunferencias de la figura son tangentes entre sí. Si la mayor tiene radio k y las medianas se tocan en el centro de la mayor, calcular el radio de la pequeña.



c) Sea r la respuesta del apartado anterior. Calcular el área comprendida entre las líneas $y = x\text{-}1 + x\text{-}3$ e $y=4r$.

(Media = 1,4. Media premiados = 5,0 . Soluciones correctas = 3)

Problema 3º

En una clase de 30 estudiantes, el profesor escribe en la pizarra un entero positivo. Un estudiante dice que es divisible por 2, otro que es divisible por 3, otro que por 4, y así hasta que el estudiante número 30 dice que es divisible por 31. El profesor dice entonces que todas las afirmaciones que se han hecho son verdaderas, salvo dos de ellas, que además han sido hechas seguidas. ¿Cuáles son las dos afirmaciones falsas?

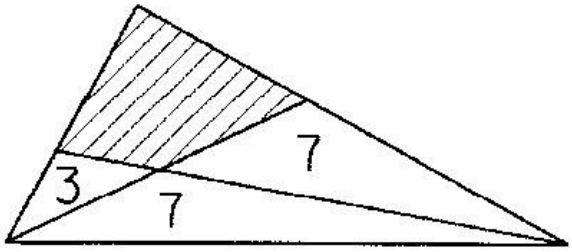
(Media = 2,7. Media premiados = 6,8 . Soluciones correctas = 13)

Problema 4º

Dividimos un triángulo en tres triángulos y un cuadrilátero, trazando dos segmentos desde dos de los vértices a los lados opuestos.

Si las áreas de los triángulos formados son, como se indica en la figura, 3, 7 y 7, ¿Cuál es el área del cuadrilátero sombreado?

.



(Media = 0,8. Media premiados = 2,8 . Soluciones correctas = 2)

NIVEL III

(23 presentados. Calificaciones de 0 a 7 en cada problema)

Problema 1º

La suma $S = 1+1/2+1/3+...+1/n$ es una fracción, P/Q . Se pide:

1º. Demostrar que si es $n = 100$, entonces P es múltiplo de 101.

2º. Estudiar si para $n = 200$, P será múltiplo de 201

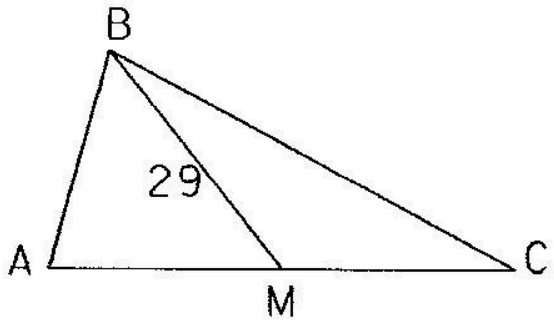
(Media = 1,5. Media premiados = 3,4 . Soluciones correctas = 0)

Problema 2º

Los tres apartados de este problema están encadenados. La respuesta de cada uno es dato para la siguiente:

a) El entero n es 124 unidades menor que un cuadrado perfecto y 56 unidades menor que otro cuadrado perfecto. Calcular n .

b) Sea $d = n/30$. En el triángulo ABC, la mediana BM mide 29. Una perpendicular desde C a la prolongación de BM, corta a ésta en el punto R. Si $CR=d$, calcular el área del triángulo ABC.



c) Sea T el área del triángulo ABC. La recta $5x+2y = 2008$ no corta a la circunferencia $x^2 + y^2 = T$. Encontrar el punto de esta circunferencia más próximo a esta recta.

(Media = 2,0. Media premiados = 5,4 . Soluciones correctas = 3)

Problema 3º

Para cada número positivo A representamos por $[A]$ la parte entera de A. Así pues, $[2,7]=2$, $[\pi]=3$, $[5]=5$.Representamos por $\{A\}$ a $A - [A]$.

Dar un ejemplo de un número A tal que $\{A\} + \{1/A\} = 1$.

¿Puede ocurrir que $\{A\} + \{1/A\} = 1$ y A sea racional? Justifíquese la respuesta.

(Media = 0,5. Media premiados = 2,2 . Soluciones correctas = 0)

Problema 4º

Alicia, Beatriz y Carlos resolvieron, entre los tres, 100 problemas de su libro de texto y resultó que cada uno por separado sabía resolver exactamente 60 problemas. Decimos que un problema es fácil si lo supieron resolver los tres y que un problema es difícil si lo supo resolver sólo uno de los tres. ¿Cuántos problemas difíciles había más que fáciles?

(Media = 2,0. Media premiados = 3,2 . Soluciones correctas = 1)

49 Olimpiada Internacional de Matemáticas

Después de veinticinco participaciones españolas en la Olimpiada Internacional de Matemáticas, le ha correspondido a nuestro país organizar la 49 edición de la misma.

Así, el día 10 de julio llegaban a Madrid los jefes de delegación de los países participantes, que finalmente fueron 97 con equipo, todo un récord, que podría haber sido más destacado si los estudiantes de Pakistán y de Nigeria hubieran podido conseguir a tiempo sus visados de entrada. Les acompañaban también observadores de Benín, Mauritania y Siria, países que según las normas de la IMO, podrán participar ya el año próximo como miembros de pleno derecho.

El Jurado, bajo la presidencia de Carlos Andradas, permaneció aislado en el Parador Nacional de La Granja para elegir los seis problemas de la prueba y preparar las versiones idiomáticas que utilizarían los alumnos participantes.

Mientras tanto, los responsables de los estudiantes ultimaban los muchos detalles organizativos necesarios para que todo saliera según estaba previsto. La recepción en Barajas, los menús, los guías, el examen, la apertura, las excursiones…..Y es que bajo todos los puntos de vista, la IMO tiene una logística muy complicada. Para empezar, el registro en línea, con todos los alfabetos, todos los caracteres, ¡y todos se leían bien en la web! Y se imprimieron también si errores las identificaciones y los diplomas. Además de los problemas diplomáticos con la obtención de visados - ¡cuántas llamadas telefónicas, cartas y faxes han sido necesarios! - ; había que superar las barreras idiomáticas, garantizar la seguridad y comodidad de los participantes, adolescentes en su mayoría. En este sentido, cada equipo ha tenido asignado un guía capaz de comunicarse con él. Los guías eran voluntarios universitarios, que han acompañado a sus equipos, residiendo con ellos durante toda su estancia en España. Puesto que estos se alojaban en seis Colegios Mayores de la Complutense, y en el de la Universidad Autónoma, en cada residencia dos o tres máximos responsables, en general antiguos olímpicos, se ocupaban de la coordinación de los diferentes grupos, ya que las actividades programadas eran comunes a todos los chicos, unas setecientas personas.

Todos – estudiantes, Jurado y jefes adjuntos – juntos, pero sin posibilidades de mantener contacto directo entre sí, asistieron el día 15 de julio en el Teatro Circo Price al brillante acto de apertura en el que la ciudad de Madrid dio la bienvenida a la ciudad a todos los participantes.

Un aspecto crucial en la IMO, y muy delicado desde el punto de vista organizativo, es el examen. Los 535 “contestants” ocuparon, en los días 16 y 17 mesas individuales en una sola sala de la Escuela de Caminos de la Universidad Politécnica de Madrid. Cada uno de ellos recibió los enunciados en dos idiomas, previamente solicitados al realizar la inscripción. Y aunque no es el país organizador, sino el Jurado, el que se ocupa de las traducciones, sí nos tocaba a nosotros conseguir que no hubiera errores en el reparto…Las preguntas, que pueden hacerse, por escrito, durante la primera media hora de cada día, llegaban a La Granja a través de un túnel VPN, donde el Jurado decidía de manera corporativa las posibles respuestas.

Al terminar el examen, cada día, todo el trabajo de los estudiantes se escaneó, y reprodujo, para poder hacer llegar los originales a cada jefe de delegación para

que los calificaran, y las copias a los equipos de “coordinadores”. La misión de estos últimos es la de garantizar la equidad en las calificaciones: solamente ellos tienen una visión de conjunto sobre cada problema. Hubo un total de 86 coordinadores distribuidos en cinco equipos de coordinación por problema, y durante dos días, muy intensos, acordaron reunidos con el jefe de delegación y el jefe adjunto de cada país las notas de cada estudiante en cada problema. Las reuniones de coordinación tuvieron lugar en el Hotel Convención, al que el Jurado se trasladó el día 17, al terminar las pruebas.

Mientras esperaban sus resultados, los estudiantes tuvieron la oportunidad de conocer Madrid y sus alrededores. Se programaron salidas a Segovia, el Monasterio de El Escorial, Toledo, Aranjuez, con espectáculo flamenco en su maravillosa Plaza de Toros, y juegos matemáticos en el Retiro, en un día de enorme calor que no impidió sin embargo el que los chicos corrieran de un sitio para otro en busca de las pruebas y pistas, disfrutando enormemente.

Por fin, el día 20 de julio los premios estaban decididos. El Jurado decidió establecer los cortes para las medallas de oro, plata y bronce, en los 31, 22 y 15 puntos respectivamente. Resultaron premiados 47 estudiantes con oro, 100 con

plata y 120 con bronce; además todos los que resolvieron completamente un problema sin alcanzar el bronce recibieron mención de honor.

Tres estudiantes, Xiaosheng Mu y Dongyi Wei de China, y Alex Zhai de Estados Unidos, consiguieron la puntuación máxima, 42 puntos. Alex ya tuvo oro el año pasado en Vietnam, y aunque representante de Estados Unidos, es él mismo chino de origen.

Por países, los primeros países clasificados y sus puntos fueron los siguientes: China 217, Rusia 199 (los seis estudiantes tuvieron oro), Estados Unidos 190, Corea del Sur 188 e Irán 181. El primer país europeo, después de Rusia, fue Hungría, que ocupó la décima posición en la tabla, con 163 puntos.

El día 21 de julio tuvo lugar, en el Auditorio padre Soler de la Universidad Carlos III, el Acto de Clausura y entrega de medallas. Lo presidieron los Príncipes de Asturias, que al finalizar el acto felicitaron personalmente al equipo español, y

permanecieron durante casi media hora fotografiándose y charlando informalmente con todos los estudiantes.

El equipo español estuvo integrado por Diego Izquierdo Arseguet (Medalla de Bronce), Arnau Messegué Buisán (Medalla de Bronce), Gabriel Fürstenheim Milerud (Medalla de Bronce), David Alfaya Sánchez (Mención de Honor), Moisés Herradón Cueto (Mención de Honor) y Juan José Madrigal Martínez (Mención de Honor). Ha sido la primera vez en que los seis han obtenido algún galardón. Los 83 puntos conseguidos entre todos colocaron a España en la posición 43.

Ha sido necesario el esfuerzo de muchas personas e instituciones para conseguir llevar a buen puerto esta Olimpiada, que en opinión de muchos jefes de delegación que han vivido muchas, ha sido de las mejores. Nos toca ahora aprovechar el interés que haya podido despertar en los medios de comunicación para potenciar más tanto nuestra Olimpiada como cualquier otra actividad que permita acercar más y mejor las matemáticas a todos nuestros jóvenes.

María Gaspar

Problemas propuestos en la 49 Olimpiada Internacional de Matemáticas

Primer día, 16 de julio de 2008

Problema 1

Un triángulo acutángulo ABC tiene ortocentro H. La circunferencia con centro en el punto medio de BC que pasa por H corta a la recta BC en A_1 y A_2. La circunferencia con centro en el punto medio de CA que pasa por H corta a la recta CA en B_1 y B_2. La circunferencia con centro en el punto medio de AB que pasa por H corta a la recta AB en C_1 y C_2. Demostrar que A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 y C_2 están en una misma circunferencia.

Problema 2

(a) Demostrar que

$$\frac{x^2}{(x-1)^2}+\frac{y^2}{(y-1)^2}+\frac{z^2}{(z-1)^2}\geq 1 \qquad (*)$$

para todos los números reales x, y, z distintos de 1 con $xyz = 1$

(b) Demostrar que existen infinitas ternas de números reales x, y, z distintos de 1, con $xyz = 1$, para los cuales la desigualdad (*) es una igualdad.

Problema 3

Demostrar que existen infinitos enteros positivos n tales que $n^2 + 1$ tiene un divisor primo mayor que $2n+\sqrt{2n}$

Segundo día, 17 de julio de 2008

Problema 4

Hallar todas las funciones $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ (es decir, todas las funciones de los reales positivos en los reales positivos), tales que

$$\frac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)}=\frac{w^2+x^2}{y^2+z^2}$$

para todo los números reales positivos w,x,y,z que satisfacen $wx=yz$.

Problema 5

Sean n y k enteros positivos tales que $k\geq n$ y $k-n$ es par. Se tienen $2n$ lámparas numeradas $1,2,...,2n$ cada una de las cuales puede estar encendida o apagada. Inicialmente todas las lámparas están apagadas. Se consideran sucesiones de *pasos*: en cada paso, se selecciona exactamente una lámpara y se cambia su estado (si está apagada se enciende; si está encendida se apaga). Sea N el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas 1, 2, … , n quedan todas encendidas y las lámparas $n+1$, …, $2n$ quedan todas apagadas. Sea M el número de sucesiones de k pasos al cabo de los cuales las lámparas 1, 2, … , n quedan todas encendidas y las lámparas $n+1$, …, $2n$ quedan todas apagadas sin haber sido nunca encendidas. Calcular la razón N/M.

Problema 6

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que las longitudes de los lados BA y BC son diferentes. Sean ω_1 y ω_2 las circunferencias inscritas dentro de los triángulos ABC y ADC respectivamente. Se supone que existe una circunferencia ω tangente a la prolongación del segmento BA a continuación de A y tangente a la prolongación del segmento BC a continuación de C, la cual también es tangente a las rectas AD y CD. Demostrar que el punto de intersección de las tangentes comunes exteriores a ω_1 y ω_2 está sobre ω.

Nota de presentación de Bohm y los Leinbach

Hace ya unos años que publicamos en nuestro Boletín artículos de Carl Leinbach (bol. núm. 55) y Josef Böhm (bol. núm. 39). Ambos son especialistas en didáctica del álgebra computacional, y expertos en el sistema Derive.

Carl es catedrático emérito de matemáticas en el Gettysburg College (Pennsilvania, USA) y organizó por ejemplo el congreso mundial de Derive en 1998 en su universidad.

Josef era catedrático de instituto en St. Pölten (Austria) y coordina desde su creación el "Derive Users Group".

Ambos han participado muy activamente en la divulgación del uso de calculadoras en la enseñanza de la matemática dentro del programa de Texas Instruments "TI^3" ("Teachers Teaching with Technology").

Aunque ya están teóricamente jubilados, siguen publicando excelentes trabajos, como veremos a continuación.

Patt Leinbach, esposa de Carl, es "coroner" en su condado, esto es, es una persona encargada de investigar muertes, especialmente aquellas que ocurren en circunstancias inusuales, tratando de averiguar las causas de las mismas.

Ahora estamos acostumbrados a ver en TV pruebas forenses biológicas, físicas y químicas en series como CSI. En el interesantísimo artículo que sigue veremos como existe también una "matemática forense".

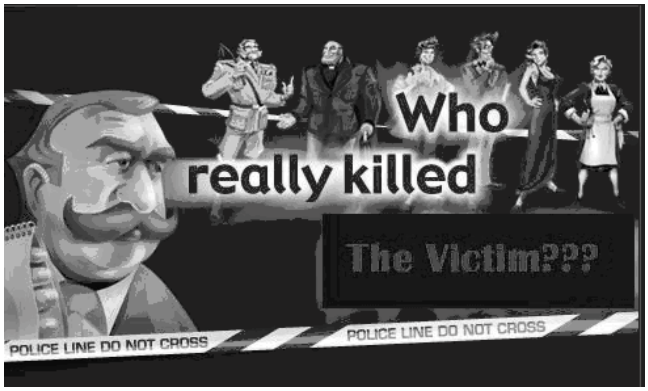
Este artículo está tomado de "*P. Leinbach, C. Leinbach, J: Böhm: Forensische Mathematik für den Unterricht. bk-Teachware SR-57. Linz, Austria, 2008.* Agradecemos al responsable de *bk-Teachware*, el conocido matemático Bernhard Kutzler, que también ha escrito artículos para nuestro Boletín, el permiso para reproducir aquí este artículo.

Agradecemos también a Josef Böhm su ofrecimiento de enviar por email a quien se lo solicite el código que aparece en el artículo (para Derive y calculadoras TI).

Eugenio Roanes Lozano

Directing our Suspicions
(Using Matrix Algebra to organize the results of an investigation)

Patricia and Carl Leinbach, Josef Böhm
leinbach@gettysburg.edu, nojo.boehm@pgv.at



1. Scenario

You are called by the county police to investigate a shallow grave that has been located by two hunters at the edge of the county. You cordon off the scene and carefully uncover the remains that are buried in the grave. It is obvious that the body was not buried recently. In fact all that remains is essentially bones and some shreds of fabric. It is apparent to your experienced eye that the victim was a young female, but that is all that you can determine at the scene of the grave. You assist in a careful exhumation of the body and direct that it be taken to the county morgue.

Returning to the morgue, you do a more precise analysis. From the length of the bones and an examination of the bone ends you determine that the victim is a pre-pubescent female. A forensic dental examination reveals that the victim is a young girl who was reported missing over 20 years ago. Further analysis reveals that the victim was shot at least three times in the area of the chest. No bullets have been found on the scene, but the extent of damage to the bones indicates that the weapon was on the order of a .45 caliber pistol. You are unable to make a more exact estimate concerning the weapon.

At this point your involvement in the investigation is over. Solving the crime is the job of the police. A team of detectives is assigned to the case and they begin the tedious job of interviewing people who knew the victim and also others who had contact with her. The town where the victim lived is a small town, so the detectives begin there. They also review the local police's case notes. The prime suspect at the time of the disappearance was an African-American 14-year old boy who was the son of the girl's neighbors. His family was the only non Caucasian family in the neighborhood. The boy's sister was the girls "best friend"; however, the victim and his sister had just had a small falling out that had seemed to have been orchestrated by the victim's mother.

2. The Police Investigation

The police began by questioning the now grown boy and his sister. As is the case in so many investigations, the questioning revealed other individuals who needed to be visited. From their interviews, the police have narrowed the suspect list down to six individuals. Here is a very brief summary on the police findings. We will identify the suspects by alphabetical letters, A through F.

A. The African-American boy. Sister, of whom he is very protective, had just received a "rejection" from the victim; Had been seen on the victim's property the night of the disappearance; Determined to have been a fairly normal teen age boy, but resentful of the discrimination his family had to endure.

B. African-American girl. Had been a friend of the victim from the moment her family moved next door to the victim's family amidst a demonstration by the local "citizen's committee for a pure neighborhood"; Had recently had a childish falling out with the victim; Had written a note to the victim the day of her disappearance asking to meet in their "secret place."

C. Leader of the citizen's committee that lead a demonstration greeting the moving van when the African-American family moved in; Was very offended by the victim being good friend and confidant of suspect B; Quoted as saying "The only thing worse than a black is a white person who befriends one"; Known to be a stern father and husband. Known to have kept a gun in his home.

D. Real Estate agent trying to capitalize on the panic that can result from having a non Caucasian family move into the neighborhood; Was trying to buy homes cheap and sell houses in his new development on the edge of town; Perceived the public friendship of the victim and suspect B as "bad for business."

E. Teen aged boy. Son of suspect C; Prejudiced, but confused, especially by the friendship of the victim and suspect B; Had been publicly rebuked and slapped by the victim when bullying her at school; Apologized to the victim and her friend and was, in return, severely disciplined by his father. He was constantly trying to please his father.

F. Mother of victim. Was entranced by suspect D's attempts to sell her a new home, but opposed by her husband; Insisted that her daughter stop seeing suspect B; Made her daughter ignore her friend in public.

Each of the above suspects seems to have a reason for being placed on the list of suspects to the crime. The job for the detectives is to sort out these reasons and determine on whom to concentrate their efforts.

An old rule of thumb in criminal investigations is to look at three pointers: Motive, Opportunity, and Profit. Who had the most powerful motive for killing the victim? Who had the best opportunity to commit the crime? Who would profit the most from the crime? We will abbreviate these pointers as MOP. In the following investigation, we will apply the MOP pointers to the crime at hand.

3. Investigative Objective

- Organize investigative findings in a sensible way that will lead to the solution of the crime.

4. Mathematical Objectives

- Find a way to sensibly incorporate subjective evidence into a meaningful quantitative analysis.
- Assign a priority ranking and strength to the various alternatives for solving the crime.
- Using a two way comparison of alternatives to achieve the ranking.

- Learn about the concept of a dominant vector related to certain matrices.

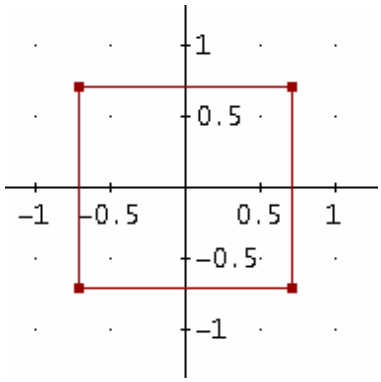
5. Preliminary Mathematical Discussion

In this section we will introduce the idea of a dominant vector which can be associated with certain types of matrices. At the moment, this may seem like an irrelevant mathematical diversion, but it really has a lot to do with our attempt to solve the crime; however, the idea of a dominant vector (more properly called a dominant eigenvector) is the basis of the *Analytic Hierarchy Process* invented by the mathematician Thomas Saaty in the late 1970's. This process is a way of prioritizing several alternatives into a logical sequence of choices.

We will illustrate the idea of a dominant vector while working with a 2×2 matrix. We will assume that every entry in the matrix is positive and that the second row is not a multiple of the first row. For our example matrix we will use the matrix,

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

We will look at the effect of multiplying the corners of the following square by the matrix, A.



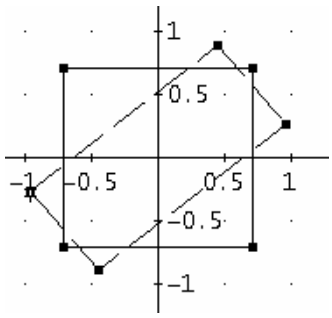
Since multiplication by the matrix A is a linear process, the lines joining the corners will be transformed into lines joining the corners of the images of the corners. Also any point in the interior of the square will be transformed into the interior of the image of the square. The square can be created by joining the following coordinate points in order:

Q:= [-√2/2,-√2/2;-√2/2, √2/2;√2/2,√2/2;√2/2,-√2/2;-√2/2, -√2/2]

We multiply each of the points by A and normalize by dividing by the length of the resulting vector.

$$\text{VECTOR}\left(\frac{A\cdot v}{|A\cdot v|},\ v,\ Q\right)$$

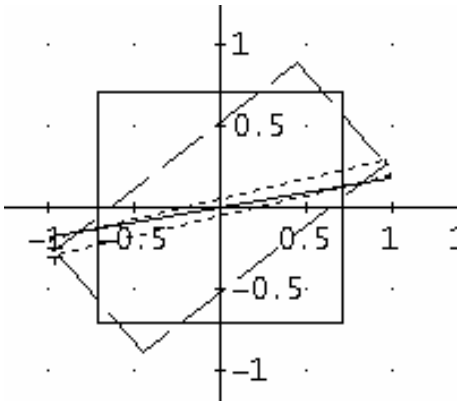
The result is shown as the dashed rectangle superimposed on the original square. Note that the rectangle is now slanted in a particular direction and is a compressed form of the original.



Next multiplying the matrix of the corner points of the dashed rectangle by A or doing the same thing by multiplying the corner points of original matrix by A^2, we see a rectangle with a slightly different slant and even more compressed. This rectangle is shown as a dotted rectangle.

$$\text{VECTOR}\left(\frac{A^{2}\cdot v}{\left|A^{2}\cdot v\right|},\ v,\ Q\right)$$

$$\text{VECTOR}\left(\frac{A^{20}\cdot v}{\left|A^{20}\cdot v\right|},\ v,\ Q\right)$$



Repeating the process one more time we see that at this stage we have almost reduced the square to a single line. In fact, if we continue taking higher powers of A times the coordinates points of the square, we see that the square is reduced to a straight line segment lying on the line

$$y = 0.18301x$$

which passes through the origin and the point, D = (0.8453, 0.1547). Exact calculation results in $\left(\frac{6-2\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right)$ for D. As an exercise, take an arbitrary

point in 2-dimensional space and multiply it by a high power (20 or higher) of the matrix, *A*, and show that the result lies on this line (or very close to it).

We choose the vector *d* lying on the line and having the property that its components sum to 1, and call it the *dominant* (*Eigen-*)*vector for the matrix, A*. The idea of a *dominant vector* will play an important role in our analysis of the evidence collected by the police during their investigation of the suspects in the murder.

It is important to note that not every matrix has a dominant vector. For example, the matrix

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

has the property that when any vector is multiplied by successive powers of *B* the result is a set of 12 different vectors that keeps repeating.

$$B\cdot[x, y] = \left[\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} - \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot y}{2}\right]$$

$$B^{13}\cdot[x, y] = \left[\frac{\sqrt{3}\cdot x}{2} - \frac{y}{2}, \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}\cdot y}{2}\right]$$

$$\text{VECTOR}(B^{k}\cdot[2, 2], k, 20)$$

The third expression leads to the list of the first 20 products

Fortunately for us, we will not be dealing with matrices like *B*. Instead we will be dealing with matrices that have all positive entries. Two German Mathematicians, *Oskar Perron* (1880–1975) and *Ferdinand Georg Frobenius*, (1849–1917) proved that *every matrix having all positive entries has an associated* ***dominant vector*** *having all positive terms*. They actually proved much stronger results, but the statement we have given in this paragraph is sufficient for what follows.

As we mentioned the *Eigenvector* in this paragraph it might be useful to give e short explanation of this very important mathematical concept.

With A being a regular matrix the equation $A \cdot \lambda = \lambda \cdot v$ can be set up. Numbers λ and vectors v which are solutions of this equation are called *Eigenvalues* (λ) and *Eigenvectors* (v) of A. Such an eigenvector multiplied by A will change only its length but not its direction. You can find the eigenvectors of A supported by Derive or the CAS-calculator and show that one of them is identical to the dominant vector which we have found above by experimenting.

EIGENVALUES(A)

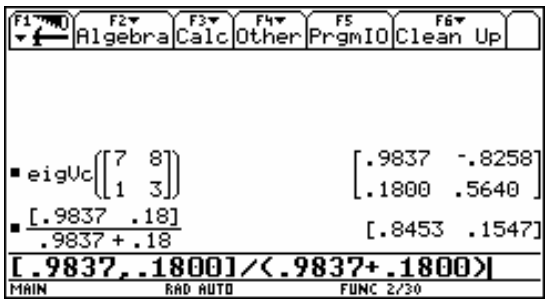
$[2\cdot\sqrt{3} + 5,\ 5 - 2\cdot\sqrt{3}]$

EXACT_EIGENVECTOR(A, $2\cdot\sqrt{3} + 5$)

$$\begin{bmatrix} -2\cdot\sqrt{3} - 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\frac{[-2\cdot\sqrt{3} - 2,\ -1]}{\Sigma([-2\cdot\sqrt{3} - 2,\ -1])}$$

[0.8452994616, 0.1547005383]



Both Eigenvectors appear as column vectors. Only this one with equal signs for both components can bet he dominant one.

6. Applying Hierarchical Ranking Methods to the Evidence

The Analytical Hierarchical Ranking Method was devised by *Thomas Saaty* in 1977. It is a method for ordering preferences of several categories or individuals relative to several criteria. In our case we have six suspects, A through E, and three criteria, Motive, Opportunity, and Profit. This technique is especially useful when we are faced with a situation that is hard to quantify, but where we have opinions or feelings when comparing the categories, individuals, or criteria, and we can rank and rate the relative strength of our feelings. In effect, the method gives us a way to quantify some things that seem to be non quantifiable.

First we need to have a scheme for comparing two items relative to a particular criterion. The method devised by Saaty uses a scale of 1 to 9 for comparing the strength of feeling about two individuals relative to the criterion.

1 = There is **no preference** for one item over the other

3 = A **slightly stronger** preference for one over the other

5 = There is an **essential** preference for one over the other

7 = There is **some evidence** that one is preferred over the other

9 = There is **indisputable evidence** for preferring one over the other

2, 4, 6, 8 are intermediate values used as compromises for disagreements in group decisions. In short, this is the standard preference scale of 1 to 5 expanded to provide intermediate values for compromises. The idea is to store preferences when comparing two suspects in an $n \times n$ matrix $[a_{i,j}]$, where

$a_{i,j}$ = s where s is the score of the preference of item i over item j

$a_{j,i} = \dfrac{1}{s}$

This implies that we always have $a_{i,i} = 1$ for all $i = 1, \ldots, n$.

Let's try out the scheme for suspect A relative to the other suspects. We will assume that a team of at least four detectives was assigned to the case and they based their scores on their interviews.

A compared with B:

The detectives found no strong evidence to rank one over the other relative to the motive criteria, so they gave a score of 1. Thus,

$$a_{1,2} = 1 \text{ and } a_{2,1} = 1.$$

A compared to C:

Although suspect C wanted the African-American family to move out of the neighborhood, the detectives believed that the hurt suffered by A upon rejection by her former friend was a stronger motive so they gave a score of 7,

$$a_{1,3} = 7 \text{ and } a_{3,1} = \frac{1}{7}.$$

A compared to D:

The victim was actively standing in the way of the Real Estate Agent's sales perspectives in the neighborhood for his housing project as well as the opportunity to pick up some valuable property cheaply. They all believed this was a stronger motive than A's hurt, although this was a feeling not supported by evidence so they rated it as a 5.

$$a_{1,4} = \frac{1}{5} \text{ and } a_{4,1} = 5.$$

A compared to E:

The detectives were split on this comparison. One group believed that the public embarrassment of E by being slapped by the victim in public and his subsequent criticism by his father was clearly stronger motivation to kill the victim than A's rejection by her friend. The other group agreed that it was stronger, but not quite as strong as the first group perceived it to be. The compromise score of 8 was chosen.

$$a_{1,5} = \frac{1}{8} \text{ and } a_{5,1} = 8$$

A compared to F:

The consensus was that the rejection that A experienced was a slightly stronger motive than the mother being thwarted in her desire for her dream house by her daughter's sway with the father not to move. They gave a score of 3 to A.

$$a_{1,6} = 3 \text{ and } a_{6,1} = \frac{1}{3}$$

The above assignment of values has filled in row 1 and column 1 of the Motive matrix. A similar analysis was done for the remaining suspects. Note that there are 10 more comparisons to be made in order to fill out the matrix. Here is the matrix proposed by the detectives:

$$\text{Motive} := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 7 & \frac{1}{5} & \frac{1}{8} & 3 \\ 1 & 1 & 9 & 2 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 & 2 & \frac{1}{5} & 4 \\ 5 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{3} & 2 \\ 8 & 8 & 5 & 3 & 1 & 6 \\ \frac{1}{3} & 4 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

A quick view of the matrix shows that row 5 clearly dominates the others, i.e. E seems to have the strongest motives, but what about the ranking of the other suspects relative to this criterion? Also, what about the other criteria of Opportunity and Profit? We take these two questions one at a time. We first rank the suspects relative to the motive criterion. This is where the idea of a dominant vector comes in to play.

If we apply the comparisons in matrix Motive consistently to any ranking of the suspects, then the effect of the comparisons should take effect and the rankings should tend towards the line determined by the dominant vector. (Try this. Use your CAS to multiply the equal ranking vector [,1,1,1,1,1] by the 30^{th} power of the Motive matrix and normalize the result by dividing by the sum of the terms so that they add up to one). If you have down loaded the accompanying Derive© file called , Crime Solver, the program, Dom_vec, will find the dominant vector for any positive matrix up to a given tolerance between the actual and computed value. Here is the result for the Motive matrix. Compare it with your result.

```
APPROX(Dom_vec(Motiv, 0.0001))

[0.129723, 0.145604, 0.0868161, 0.127580, 0.418666, 0.0916085]
```

Compare with your result from above. Suspect E, corresponding to the fifth value in the list is clearly the highest ranked according to this criterion. Suspect B is a distant second followed by suspects A, D, F, and C.

Coming back once more to the *eigenvector* we will show that our approximative procedure using Dom_vec can be confirmed in a very mathematical way using this concept:

```
SELECT(IM(x) = 0, x, EIGENVALUES(Motive))

[9.52509, 0.144898]

dv := APPROX_EIGENVECTOR(Motive, 9.52509)

dv := [-0.261811, -0.293876, -0.175191, -0.257476, -0.844939, -0.184882]

   dv
------- = [0.129726, 0.145614, 0.0868066, 0.127578, 0.418664, 0.0916085]
Σ(dv)
```

Derive delivers – approximatively – two real eigenvalues. The first command selects the two real eigenvalues, the other four ones are complex valued. The attempt with the first real eigenvalue leads to the appropriate eigenvector, which – after normalizing proves to be almost identical to the dominant vector obtained via Dom_vec. As working with larger matrices calculation of the eigenvalues may lead to problems it seems to be better to find the final position using an iterative procedure. Besides the provided program, which considers a

given accuracy you can also perform the first – say 20 – multiplications and investigate the development or you might prefer to jump immediately to the last row of the resulting table:

$$\left(\text{ITERATES}\left(\frac{\text{Motive}\cdot a}{\sum(\text{Motive}\cdot a)}, a, [1, 1, 1, 1, 1, 1], 20\right)\right)_{21}$$

[0.129727, 0.145614, 0.0868068, 0.127578, 0.418664, 0.0916082]

The four detectives make the comparisons of the suspects with respect to the remaining criteria. We can see the matrices and calculate the dominant vectors.

$$\text{Opportunity} := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 3 & 8 & 5 & \frac{1}{8} \\ 4 & 1 & 9 & 9 & 6 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & 1 & 5 & \frac{1}{7} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{5} & 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & 7 & 8 & 1 & \frac{1}{6} \\ 9 & 2 & 6 & 9 & 6 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{Profit} := \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{7} & \frac{1}{4} \\ 6 & 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{9} & 1 & \frac{1}{3} \\ 4 & 7 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 4 \\ 9 & 9 & 3 & 1 & 7 & 8 \\ 7 & 1 & 5 & \frac{1}{7} & 1 & 6 \\ 3 & 3 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}$$

APPROX(Dom_vec(Opportunity, 0.0001))

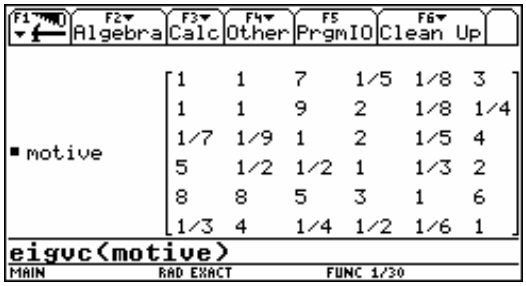
[0.13351, 0.287204, 0.0399389, 0.0182983, 0.0905006, 0.430547]

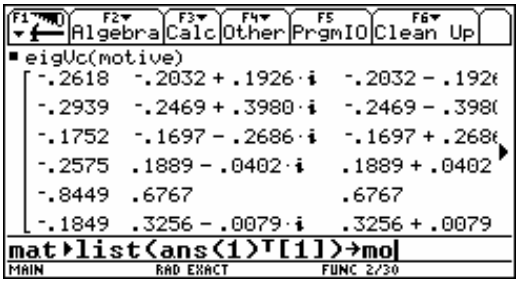
APPROX(Dom_vec(Profit, 0.0001))

[0.0223752, 0.0667236, 0.151176, 0.486494, 0.21275, 0.06048]

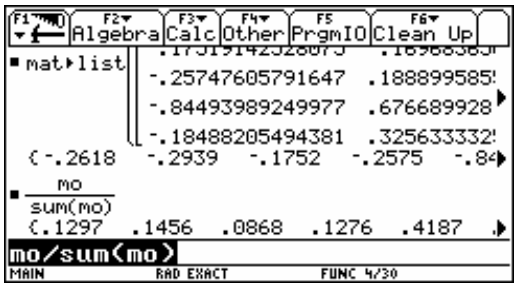
Task: Confirm these results by calculating the eigenvectors.

You can find the eigenvectors for matrices – without determining the eigenvalues – on the CAS-calculator:





For normalizing the first column of the resulting matrix (which represents the appropriate eigen-vector) must be converted in a list.



Upon examining the dominant vectors for the three rankings, you see that each criterion gives a different ranking of the three suspects. The team of detectives has one more "collective decision" to make: How does the evidence fit the crime they are investigating? In other words, how much weight should they give to each of the three criteria relative to the circumstances of this crime? Once again, they can use the Analytical Hierarchical Ranking Scheme to assign the weights.

The matrix arrived at by the detectives is:

$$\text{Priorities} := \begin{bmatrix} 1 & 5 & 8 \\ \frac{1}{5} & 1 & 4 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

which leads to the dominant vector

```
APPROX(Dom_vec(Priorities, 0.0001)) = [0.733392, 0.199065, 0.0675423]
```

Task: Explain how matrix Priorities *comes into being.*

It is clear that *Motive* and *Opportunity* are the dominant criteria in this case and the Profit has relatively little role to play in the opinion of the detectives. This should be expected in the murder of a child coming from a middle class family. Indeed, *Motive* is by far the prime criterion. Each individuals score for the three criteria is multiplied by the weighting given to the criteria to find a final score for each suspect.

$$\begin{bmatrix} 0.129725 & 0.133494 & 0.0223754 \\ 0.145612 & 0.287197 & 0.0667261 \\ 0.0868076 & 0.03994 & 0.151181 \\ 0.127578 & 0.0183003 & 0.486502 \\ 0.418665 & 0.0904892 & 0.212729 \\ 0.0916089 & 0.430578 & 0.0604838 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.733384 \\ 0.199069 \\ 0.0675455 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.123224 \\ 0.168468 \\ 0.0818257 \\ 0.130067 \\ 0.339424 \\ 0.156984 \end{bmatrix}$$

The rows of the left matrix are the values of MOP for persons A to F. The product delivers the scores which must be sorted. Row 5 gives the maximum value, row 3 the minimum value. So E is the main suspect and C is the last person on the list of suspects.

This can be done using the Derive© program MOP_Suspects that is a part of the package supplied with this activity. The result of the program is given below.

```
MOP_Suspects(Priorities, Motive, Opportunity, Profit, 0.0001) =
```

0.339432	E
0.168464	B
0.156977	F
0.130068	D
0.123226	A
0.0818315	C

Upon further investigation and questioning, it turned out that suspect E had committed the murder and confessed to the murder. He was arrested, tried, and found guilty.

7. Exercises Related to the Activity

1. Read a mystery novel and prior to reaching the end of the novel, identify the major suspects. Use the Analytical Hierarchical Ranking Method to identify the possible perpetrator of the crime. Compare your result with the author's solution of the crime.
2. Together with a small group of friends, watch a detective show on television that has a good development of the evidence. Have everyone leave before the end of the show, but videotape the ending portion that you missed. You and your friends create the matrices for the Analytical Hierarchical Ranking Method and determine the most likely guilty suspect. Watch the end of the show and compare your result.
3. The Analytical Hierarchical Ranking Method has applications in many areas. Apply the method to making an important decision in your life, such as choosing a college to attend, choosing a summer job, choosing a destination for a family trip, etc. Obviously you will use criteria other than the ones used for crime solving.
4. Choose important criteria for success in a particular sport. Rank the teams in your league relative to these criteria using the Analytical Hierarchical Ranking Method. How do the results compare to the final rankings of the team after the end of a season?

8. Final Comments

The role of the coroner ended in this case at the point the coroner assigned an manner (murder) and means (gun shot wound to the chest) to the death of the victim. The remainder of the work was for the police. They did the interviews and gathering of evidence.

Crime solving, like the practice of medicine, is not a science. Scientific methods are applied to the evidence and conclusions are reached. However, it is seldom that the results are based on scientific laws or indisputable facts. There is a lot that requires the insight and training of the investigator. The methods used in this activity are a way for the investigators to organize their insights and "hunches". They are nothing more. They can be used to direct an investigation, not produce irrefutable evidence. In the case of the above investigation, this organization produced a focus that lead to a confession by the guilty party.

Note: More information about AHP can be found at:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Thomas_Saaty`
`http://en.wikipedia.org/wiki/Analytic_Hierarchy_Process`
`http://www.boku.ac.at/mi/ahp/ahp.pdf`

Extensión natural a 3D del teorema de Pappus y su configuración completa *

E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano
Sec. Dept. Algebra, Fac. Educación UCM
{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

J. Fernández Biarge
Catedrático Emérito de la UPM
jfbiarge@telefonica.net

Abstract

Pappus's hexagon theorem states that: "the three intersection points of opposite sides of an hexagon, whose vertices lie alternatively on two lines, are collinear". The following natural extension of Pappus theorem to 3D is considered: "given an octagon, whose vertices lie alternatively on two planes, and whose opposite side-lines are secant, the four intersection points of opposite side-lines are coplanar". In this extension to 3D of Pappus theorem some vertices of the polygonal line can not be freely chosen, but an interesting property has been found: the four diagonal lines passing through opposite vertices share a point. This property leads to a simple method to generate the configuration. Moreover, conditions of existence of this configuration are determined and the so called complete configuration is also described in detail.

Introducción

Hace tiempo que nos venimos ocupando de la extensión a 3D de teoremas geométricos clásicos, como puede verse en [3, 4, 5, 6, 7, 9]. En el presente trabajo nos ocupamos de la extensión a 3D del teorema de Pappus.

*Parcialmente subvencionado por el proyecto *MTM2004-03175* del Ministerio de Educación y Ciencia.

El problema de la generación de la configuración geométrica del teorema de Pappus 3D, ya lo habíamos iniciado brevemente en [8], como aplicación de deducción automática en geometría, y posteriormente lo habíamos desarrollado en detalle, por un método paramétrico ejecutado vía computacional [10]. En el presente artículo hemos completado su análisis, vía geometría sintética, con tres objetivos: precisar bajo qué condiciones existe dicha configuración 3D, determinar todos los elementos que la conforman y describir cómo generarla. Siendo un problema de incidencia e intersección y, por tanto de naturaleza proyectiva, lo estudiaremos en el espacio proyectivo de 3 dimensiones sobre el cuerpo base de los números reales.

1 Configuración clásica de Pappus 2D

El teorema de Pappus aparece tratado en cualquier tratado clásico de Geometría, como [1, 2]. Dadas dos rectas distintas, α y β, se considera una línea poligonal cerrada de seis lados, cuyos vértices, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, yacen alternativamente sobre una y otra recta, $A_1, A_3, A_5 \in \alpha$, y $A_2, A_4, A_6 \in \beta$. Denotando a los lados de dicha poligonal: $L_1 = A_1A_2,\ L_2 = A_2A_3,\ L_3 = A_3A_4,\ L_4 = A_4A_5,\ L_5 = A_5A_6,\ L_6 = A_6A_1$, si cada lado de dicha poligonal interseca a su opuesto, entonces esos tres puntos de intersección, $P_1 = L_1 \cap L_4,\ P_2 = L_2 \cap L_5,\ P_3 = L_3 \cap L_6$, resultan ser colineales (Fig.1).

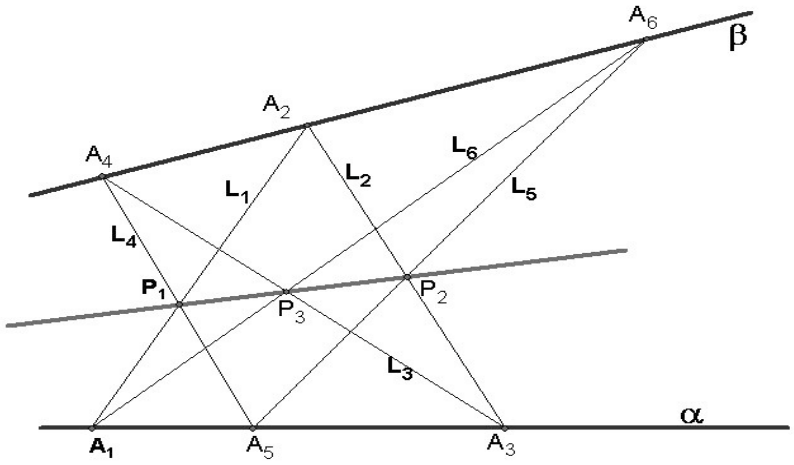


Figura 1: *Configuración de Pappus 2D con segmentos-lados*

Como los lados (segmentos) opuestos pueden no intersecarse (ser disjuntos), conviene sustituir "lados" de la poligonal por "rectas-lados". En caso de que dos rectas-lados opuestas sean paralelas, se admite que se cortan en su punto del infinito, por lo que conviene considerar esta configuración en el plano proyectivo. En este espacio el resultado puede enunciarse así (Fig.2): *las rectas-lados opuestas de una línea poligonal cerrada, cuyos vértices yacen alternativamente sobre dos rectas distintas, se cortan en puntos colineales.* A la recta, ρ, incidente con esos tres puntos de intersección, se la suele llamar *recta de Pappus.*

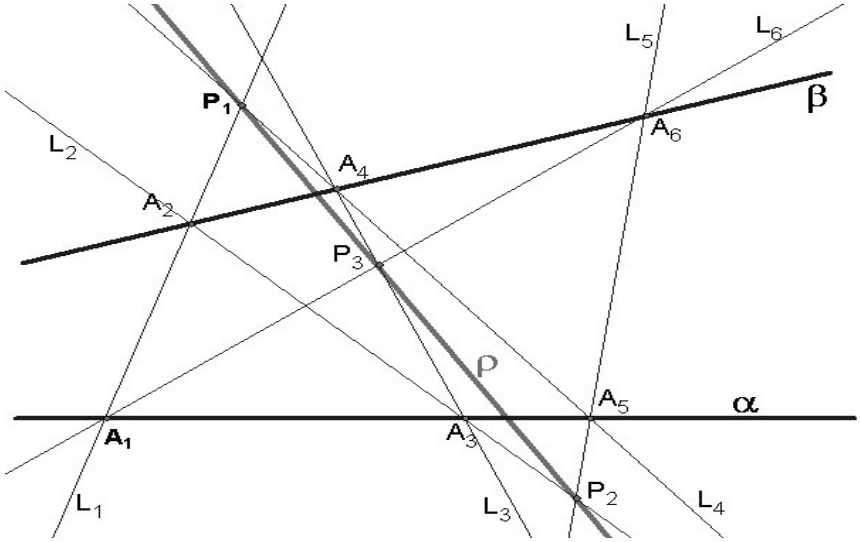


Figura 2: *Configuración de Pappus 2D con rectas-lados*

2 ¿Cómo extender la configuración a 3D?

Al tratar de extender a 3D la configuración clásica de Pappus, parece natural sustituir las dos rectas distintas, sobre las que yacen los vértices de la poligonal, por dos planos distintos. También parece natural sustituir la poligonal cerrada de seis lados, cuyos lados opuestos se cortan en puntos colineales, por una de ocho, cuyos lados opuestos se cortan en puntos coplanarios.

Pero, en el plano proyectivo dos rectas distintas siempre tienen un único

punto común, mientras que en el espacio proyectivo 3D dos rectas distintas pueden ser disjuntas (cruzarse). En consecuencia, al tratar de extender a 3D la configuración clásica de Pappus, se ha de comenzar asegurando que cada dos lados opuestos de la poligonal de ocho lados tengan un punto en común.

Finalmente, parece natural considerar que esos cuatro puntos de intersección de lados opuestos de la poligonal sean coplanarios, del mismo modo que los tres puntos de intersección de lados opuestos eran colineales en el caso 2D.

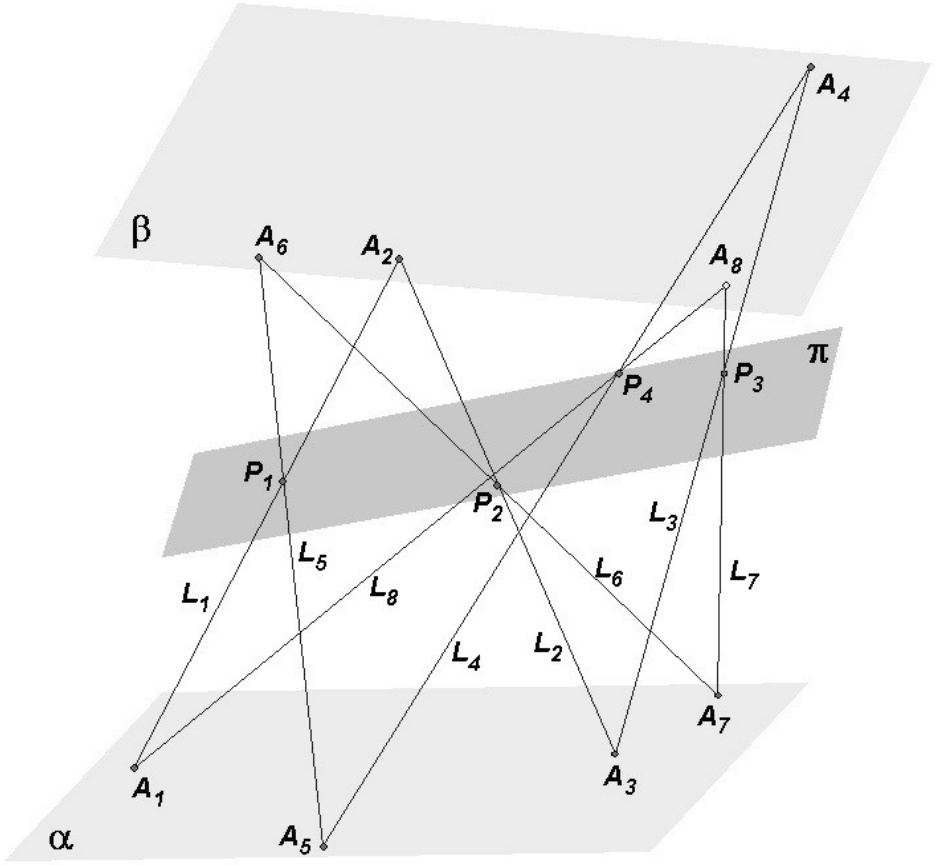


Figura 3: *Configuración de Pappus 3D*

Estas consideraciones conducen a la siguiente definición.

Definición 2.1. *En el espacio proyectivo real de tres dimensiones, se consideran dos planos distintos, α y β, y una línea poligonal cerrada de ocho*

vértices, $A_1, A_2, ..., A_8$*, cuyas rectas-lados son denotadas* $L_1 = A_1A_2$*,* $L_2 = A_2A_3$*,* $L_3 = A_3A_4$*, ...,* $L_8 = A_8A_9$ *(donde, por ser cerrada la poligonal,* $A_9 = A_1$*, lo que abrevia la notación). Si se verifican las 4 condiciones:*

1) los vértices, distintos dos a dos, yacen alternativamente sobre uno y otro plano, es decir, A_1*,* A_3*,* A_5*,* $A_7 \in \alpha$*, y* A_2*,* A_4*,* A_6*,* $A_8 \in \beta$

2) cada recta-lado y su opuesta, L_i *y* L_{i+4}*;* $i = 1, ..., 5$*, son secantes*

3) el plano incidente con cada recta-lado y su opuesta, L_i *y* L_{i+4}*, es distinto del plano incidente con la siguiente recta-lado y su opuesta,* L_{i+1} *y* L_{i+5}*;* $i = 1, ..., 4$ *(donde* L_9 *es* L_1*)*

4) los cuatro puntos de intersección de rectas-lados opuestas, denotados $P_1 = L_1 \cap L_5$*,* $P_2 = L_2 \cap L_6$*,* $P_3 = L_3 \cap L_7$*,* $P_4 = L_4 \cap L_8$*, son coplanarios*

entonces diremos que los elementos mencionados constituyen una configuración de Pappus 3D. Al plano incidente con los puntos P_1*,* P_2*,* P_3*,* P_4 *lo llamaremos plano de Pappus y lo denotaremos por* π *(Fig. 3).*

Se plantean dos cuestiones: ¿existen tales configuraciones?; en caso afirmativo, ¿cómo construirlas? Comenzamos mostrando un ejemplo muy simple, que mas adelante nos aportará ideas sobre la relación entre los elementos de una configuración de Pappus 3D.

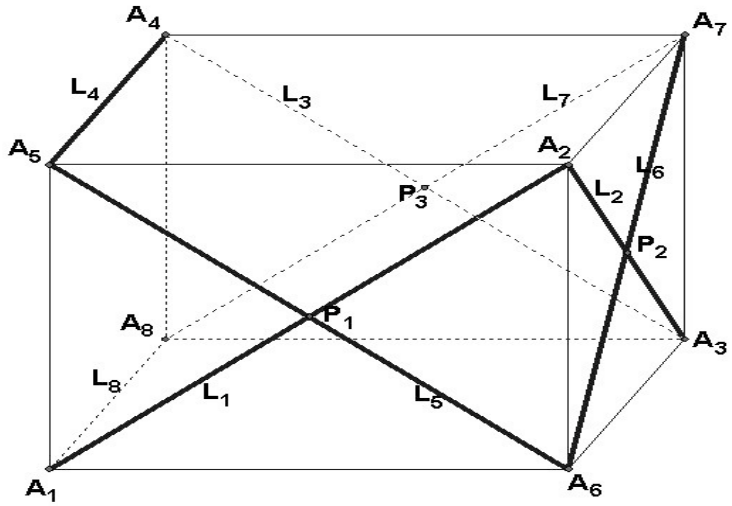


Figura 4: *Ejemplo de configuración de Pappus 3D*

Ejemplo 2.2. La figura 4 representa una línea octogonal cerrada de ocho lados, cuyos vértices son los vértices de un paralelepípedo (o, en particular, un ortoedro). Los vértices de la poligonal yacen alernativamente en dos planos α y β, siendo α el plano incidente con las dos aristas paralelas opuestas del paralelepípedo A_1A_5 y A_3A_7 y siendo β el plano incidente con las otras dos aristas del paralelepípedo paralelas a aquellas dos, A_2A_6 y A_4A_8. Los puntos de intersección de las rectas-lados opuestas $P_1 = L_1 \cap L_5,\ P_2 = L_2 \cap L_6\ P_3 = L_3 \cap L_7$ son centros de tres caras del paralelepípedo y el punto de intersección $P_4 = L_4 \cap L_8$ de las otras dos rectas-lados opuestas, paralelas entre sí y, además, paralelas al plano $P_1,\ P_2,\ P_3$ es un punto impropio de este plano. De acuerdo con la definición 2.1, se trata pues de una configuración de Pappus 3D, cuyo plano de Pappus es el que pasa por P_1, P_2 y P_3.

En el ejemplo 2.2 se observa que las cuatro rectas que pasan por vértices opuestos de la poligonal octogonal, es decir, las rectas A_1A_5, A_2A_6, A_3A_7 y A_4A_8, son paralelas y, por tanto, concurren en un punto. Dicho punto es el punto impropio de la recta $\alpha \cap \beta$.

Cabe ahora preguntarse si estas propiedades observadas en el anterior ejemplo 2.2 son ciertas para cualquier configuración Pappus 3D. Ello va a ser analizado en la siguiente sección.

3 Configuración de Pappus 3D completa

Definición 3.1. *Dada una línea poligonal cerrada de 8 vértices, $A_1, A_2, ..., A_8$ distintos dos a dos, a las cuatro rectas que pasan por cada dos vértices opuestos de la poligonal las llamaremos diagonales principales de la poligonal y las denotaremos $D_1 = A_1A_5,\ D_2 = A_2A_6,\ D_3 = A_3A_7,\ D_4 = A_4A_8$.*

Teorema 3.2. *Sea una línea poligonal cerrada de ocho lados, cuyos vértices yacen alternativamente en uno y solo uno de dos planos distintos, α y β, y tales que tres lados consecutivos no sean coplanarios. Si tres de sus rectas-lados son coplanarias con sus respectivas opuestas, entonces su cuarta recta-lado es también coplanaria con su opuesta. Además las cuatro diagonales principales de la poligonal son concurrentes y su punto común está en la recta intersección de los planos α y β.*

Demostración. Dados dos planos, α y β, distintos entre sí, consideremos una línea poligonal octogonal de vértices $A_1, ..., A_8$, tal que A_1, A_3, A_5, A_7 están en α, pero no en β, y A_2, A_4, A_6, A_8 están en β, pero no en α. Supondremos que cada tres lados consecutivos de la poligonal son no coplanarios.

De acuerdo con la notación anteriormente indicada, denotemos a las rectas-lados de la poligonal por $L_i = A_iA_i + 1,\ i = 1...8$, donde $A_9 = A_1$ (por brevedad de notación) y denotaremos a sus diagonales principales de la poligonal por $D_i = A_iA_{i+4},\ i = 1, ..., 4$.

Como consecuencia de las condiciones de incidencia de los vértices de la poligonal con los planos α y β, las diagonales D_1 y D_3 están contenidas en el plano α y las diagonales D_2 y D_4 en el plano β (Figura 5).

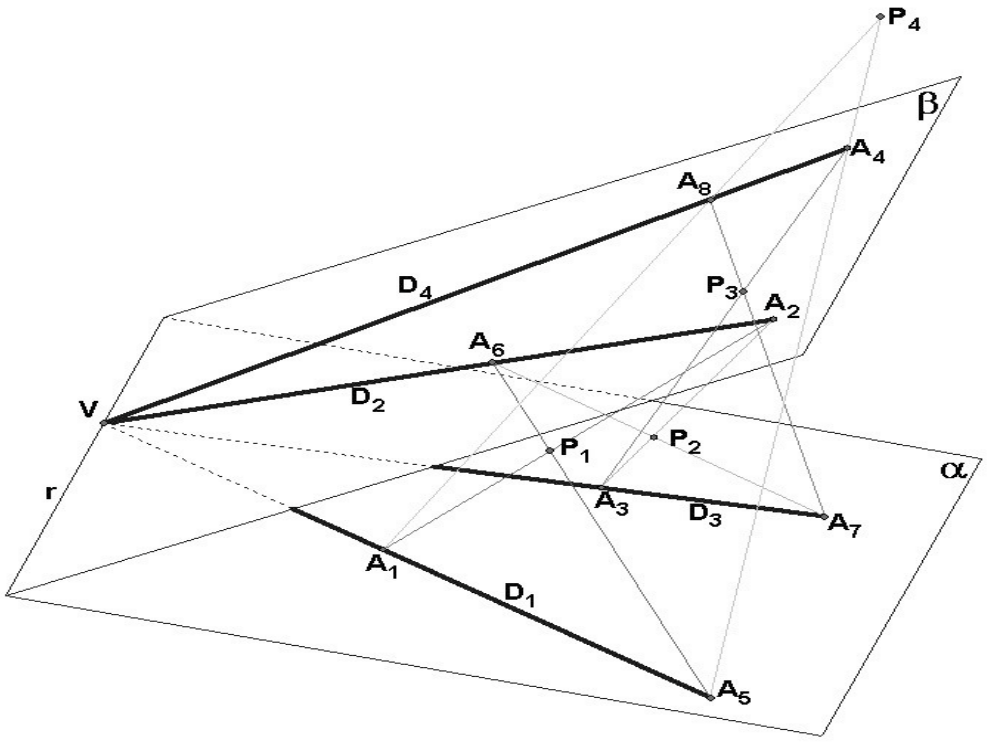


Figura 5: *Diagonales principales concurrentes en un punto de* $\alpha \cap \beta$

Suponiendo que las rectas-lados opuestas L_1 y L_5 son coplanarias, que L_2 y L_6 son coplanarias y que L_3 y L_7 son también coplanarias, entonces vamos a probar que L_4 y L_8 también son secantes entre sí.

En efecto, sea r la recta intersección de los planos α y β y sea V el punto de intersección de r con el plano $\lambda_{1,5}$ incidente con las rectas-lados L_1 y L_5. Como este plano pasa por los vértices A_1, A_2, A_5, A_6, por tanto V está en la recta intersección $\lambda_{1,5} \cap \alpha$, es decir, en la diagonal $D_1 = A_1A_5$. De igual modo, V también está en la recta intersección $\lambda_{1,5} \cap \beta$, es decir, en la diagonal $D_2 = A_2A_6$.

Por otra parte, como el plano $\lambda_{2,6}$ incidente con las rectas-lados L_2 y L_6 pasa por los vértices A_2, A_3, A_6, A_7, contiene a $D_2 = A_2A_6$, que pasa por V. Por tanto, V también está en la recta intersección $\lambda_{2,6} \cap \alpha$, es decir, en la diagonal $D_3 = A_3A_7$.

De igual modo, como el plano $\lambda_{3,7}$ incidente con las rectas-lados L_3 y L_7 pasa por los vértices A_3, A_4, A_7, A_8, contiene a $D_3 = A_3A_7$, que pasa por V. Por tanto, V también está en la recta intersección $\lambda_{3,7} \cap \beta$, es decir, en la diagonal $D_4 = A_4A_8$.

En consecuencia, V está en el plano que contiene a D_4 y D_1, en el que están los vértices A_1, A_5, A_4, A_8, luego dicho plano contiene a las rectas L_4 y L_8, que son pues dos rectas coplanarias. □

Corolario 3.3. *En la configuración de Pappus de la definición 2.1 el vértice A_5 está en la recta VA_1 y el vértice A_7 está en la recta VA_3, estando ambas rectas contenidas en el plano α. Análogamente, el vértice A_6 está en la recta VA_2 y el vértice A_8 está en la recta VA_4, estando ambas rectas contenidas en el plano β.*

Nota 3.4. Aun eligiendo los vértices de la poligonal del modo indicado en el corolario anterior, los puntos de intersección de lados opuestos $P_1 = L_1 \cap L_5$, $P_2 = L_2 \cap L_6$, $P_3 = L_3 \cap L_7$, $P_4 = L_4 \cap L_8$, no son coplanarios, en general.

A fin de tratar de conseguir que dichos puntos sean coplanarios, haremos uso del siguiente lema bien conocido.

Lema 3.5. *Sean A, B, C, D cuatro puntos coplanarios de una cuádrica no degenerada, σ. Entonces los puntos de intersección $V = AB \cap CD$ y $P = AD \cap BC$ están armónicamente separados por los puntos de intersección con σ de la recta VP, es decir, V y P son conjugados respecto de la cuádrica σ (Fig. 6). En consecuencia, P está en el plano polar de V respecto de σ (lugar de los puntos conjugados del V respecto de σ)*

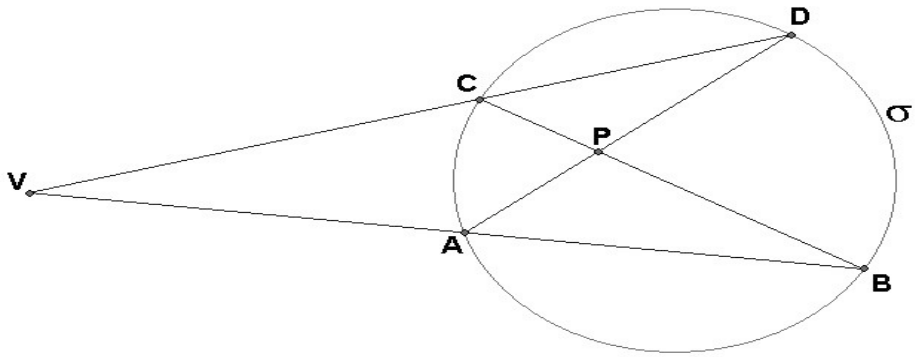


Figura 6: *V y P son puntos conjugados respecto de σ*

Teorema 3.6. *Dados dos planos distintos, α y β, sea V un punto de su recta de intersección. Sean A_1, A_3 dos puntos de α no pertenecientes a β y no colineales con V. Sean A_2, A_4 dos puntos de β no pertenecientes a α y no colineales con V. Sea A_5 un punto de la recta VA_1 distinto de V y de A_1 y sea A_7 un punto de la recta VA_3 distinto de V y de A_3. Finalmente, sea A_6 un punto de la recta VA_2 distinto de V y de A_2.*

Entonces, existe una cuádrica, σ, no degenerada que pasa por los vértices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 y que no contiene a V.

Ahora, siendo A_8 el otro punto de intersección de σ con la recta VA_4 (además del A_4), entonces la línea poligonal cerrada de vértices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8 determina una configuración de Pappus, en el sentido de la definición 2.1, es decir, cada par de sus rectas-lados opuestas son coplanarias y sus puntos de intersección $P_1 = L_1 \cap L_5$, $P_2 = L_2 \cap L_6$, $P_3 = L_3 \cap L_7$ y $P_4 = L_4 \cap L_8$, son puntos coplanarios.

Además, P_4 es el punto de intersección de la recta-lado L_4 de la línea poligonal con el plano polar del punto V respecto de la cuádrica σ.

Finalmente, los puntos A_8 y P_4 son independientes de la cuádrica σ elegida, dependiendo únicamente de los puntos iniciales $A_1, ..., A_7$.

Demostración. Supongamos que los elementos α, β, V, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 y A_7, verifican las condiciones mencionadas en el enunciado del teorema.

Comencemos probando la existencia de cuádricas no degeneradas (esto es, no consistentes en un par de planos), que pasen por los siete vértices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 y A_7.

Para ello, consideremos las posibles pares de planos que pueden contener a los siete vértices mencionados. Un tal par de planos posible es el formado por α y β, pero no el único. En efecto, los pares de planos que contienen a esos siete vértices son los que contienen a las cuatro rectas concurrentes VA_1, VA_3, VA_2 y VA_4. Ahora bien, del modo de determinación de los siete vértices dados, se sigue que estas cuatro rectas son no coplanarias tres a tres, luego existen $\binom{4}{2}$=6 planos que las contienen y, en consecuencia, hay $\binom{6}{2}$=15 pares de planos que las contienen a aquellas cuatro rectas. Por tanto, existen 15 pares de planos que contienen a aquellos siete vértices, por contener a aquellas cuatro rectas. Por último, los siete vértices podrían haber sido elegidos de modo que estuvieran contenidos en dos planos, ambos secantes con las cuatro rectas concurrentes mencionadas. Por tanto, el número de pares de planos que contienen a aquellos siete vértices es, o bien 15, ó 16.

Sean pues M y N dos puntos, distintos entre sí, no incidentes con ninguno de los planos de los 15 o 16 pares de planos mencionados. Una cuádrica, σ, incidente con estos dos puntos y con aquellos siete vértices no podrá consistir en un par de planos. En consecuencia, σ es una cuádrica no degenerada, que pasa por los siete vértices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 y A_7.

Por otra parte, es claro que los puntos M y N pueden ser elegidos de modo que σ no pase por el punto V (ya que en el haz de cuádricas incidentes con A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 y A_7 y M, basta elegir una que no pase por V). Por tanto, σ no contiene a ninguna de las cuatro rectas VA_1, VA_2, VA_3, VA_4.

Sea pues A_8 es el otro punto de intersección de σ con la recta VA_4 (además del A_4) y, de acuerdo con la notación precedente, sean $L_7 = A_7A_8$, $L_8 = A_8A_1$ y $P_4 = L_4 \cap L_8$.

Ahora, según el lema anterior, V es conjugado respecto de σ de cada uno de los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4. Luego estos cuatro puntos están en el plano polar, π, de V respecto de σ, siendo pues coplanarios.

En consecuencia, la línea poligonal octogonal de vértices $A_1, ..., A_8$ determina una configuración de Pappus, en el sentido de la definición 2.1.

Veamos finalmente que los puntos A_8 y P_4 son independientes de la cuádrica σ elegida. En efecto, el plano polar π pasa por P_1, por P_2 y por el punto Q_1 de la recta VA_1 conjugado del V respecto de σ, que es el punto armónicamente separado del V por A_1 y A_5. Estos tres puntos quedan de-

terminados por V y por $A_1, ..., A_7$, y, por otra parte, estos tres puntos son no coplanarios por no serlo las rectas VA_1, VA_2, VA_3. En consecuencia el plano polar π queda determinado por V y por $A_1, ..., A_7$, siendo pues independiente de la cuádrica no degenerada σ. En consecuencia, el punto $Q_4 = VA_4 \cap \pi$ queda determinado por V y por $A_1, ..., A_7$, luego queda igualmente determinado el punto $A_8 \in VA_4$, armónicamente separado del A_4 respecto de V y Q_4. Y al ser, $P_4 = L_4 \cap L_8$, este punto también queda determinado por los mismos elementos iniciales. □

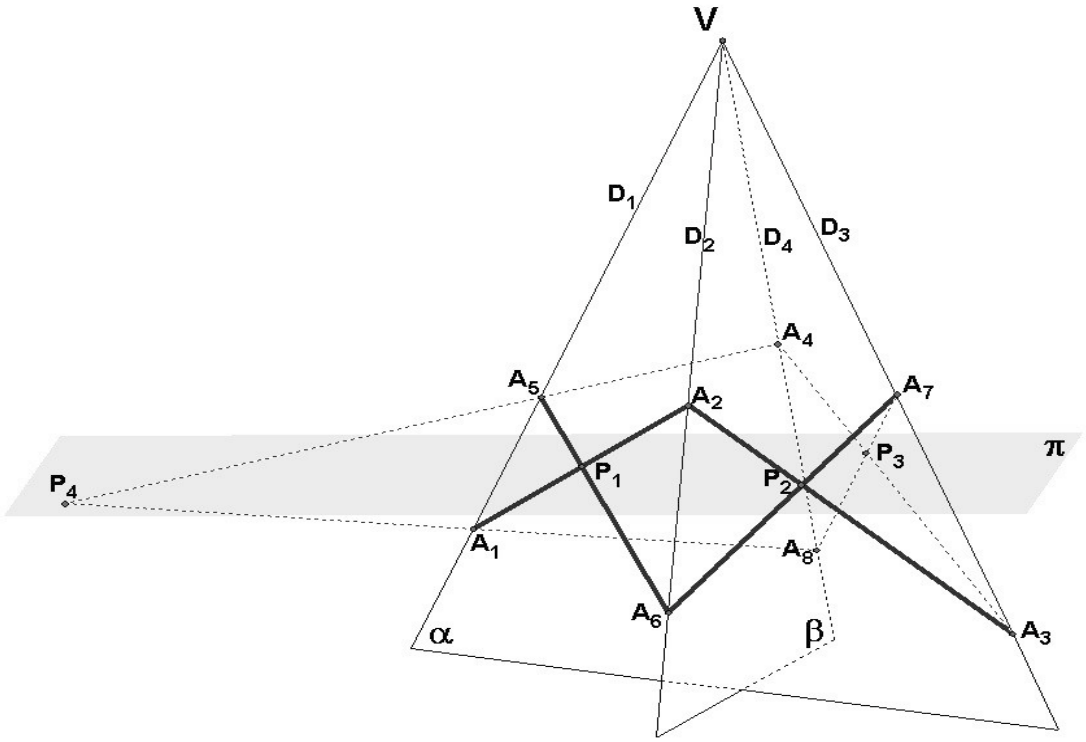


Figura 7: *Configuración de Pappus 3D completa*

Definición 3.7. *A la configuración geométrica consistente en los elementos considerados en la definición 2.1, junto con las cuatro diagonales principales de la poligonal y su punto de concurrencia, V, la llamaremos configuración completa de Pappus 3D (Fig. 7). Al punto V, de concurrencia de diagonales principales, lo denominamos* centro de Pappus *de la configuración.*

4 Generación de la configuración completa

De acuerdo con los resultados de la sección anterior, para generar una configuración de Pappus 3D completa es preciso elegir apropiadamente los vértices de la poligonal cerrada octogonal. El teorema 3.6 proporciona un método constructivo para generarla, que se resume en los siguientes pasos:

1) dados dos planos distintos, α y β, hallar su recta de intersección, r

2) elegir un punto V en la recta r

3) elegir el vértice A_1 en el plano α, que no esté en r

4) elegir el vértice A_2 en el plano β, que no esté en r

5) elegir el vértice A_3 en el plano α, que no esté en r, ni en la recta VA_1

6) elegir el vértice A_4 en el plano β, que no esté en r, ni en la recta VA_2

7) determinar las diagonales principales $D_i = A_iV,\ i = 1, 2, 3, 4$

8) elegir el vértice A_5 en la recta $D_1 = A_1V$, distinto de V y de A_1

9) elegir el vértice A_6 en la recta $D_2 = A_2V$, distinto de V y de A_2

10) elegir el vértice A_7 en la recta $D_3 = A_3V$, distinto de V y de A_3

11) elegir dos puntos distintos entre sí, M y N, que no estén en α ni en β

12) determinar la cuádrica auxiliar σ que pasa por los nueve puntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, M y N, comprobando que no es degenerada y no pasa por V (en otro caso, sustituir M y N por otros dos puntos)

13) hallar el otro punto de intersección, A_8, de σ con VA_4 (además del A_4)

14) determinar las rectas-lados $L_1 = A_1A_2,\ L_2 = A_2A_3,\ ...,\ L_8 = A_8A_1$

15) hallar los puntos de intersección de rectas-lados opuestas $P_1 = L_1 \cap L_5,\ P_2 = L_2 \cap L_6,\ P_3 = L_3 \cap L_7,\ P_4 = L_4 \cap L_8$

16) comprobar que $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4$ son coplanarios y determinar el plano π que pasa por ellos (plano de Pappus)

Nota 4.1. De acuerdo con el teorema 3.6, al ser π el plano polar de V respecto de σ, el punto P_4 también puede ser determinado como intersección de π con la recta-lado $L_4 = A_4A_5$. Por otra parte, el proceso constructivo anterior se hace más cómodo sustituyendo sus seis primeros pasos por la elección de los cinco puntos V, A_1, A_2, A_3, A_4 como objetos iniciales de la configuración, para, a partir de ellos, definir α=*plano*(V, A_1, A_3), β=*plano*(V, A_2, A_4) y $r = \alpha \cap \beta$. Dichos puntos deben ser elegidos de modo que las diagonales principales $D_i = A_iV;\ i = 1, 2, 3, 4$ sean no coplanarias tres a tres.

5 Automatización de cálculos

Al tratar de calcular analíticamente las coordenadas y ecuaciones de los elementos de la configuración en casos no tan simples, aparecen expresiones extraordinariamente largas, que requieren hacer uso de un sistema computacional con aritmética exacta.

Para ello hemos aprovechado el paquete *paramGeo3D*, implementado en el sistema Maple, que habíamos desarrollado para el trabajo descrito en [7], complementándolo con otros comandos y procedimientos útiles para automatizar los cálculos a efectuar en el presente trabajo. Describimos a continuación los comandos de mas interés para este trabajo.

- `point(A)` devuelve la lista $[a_0, a_1, a_2, a_3]$, cuyos elementos son coordenadas proyectivas del punto $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$
- `plane(A,B,C)` devuelve la ecuación del plano que pasa por los tres puntos A, B, C, supuestos no colineales (advirtiendo del error en caso de ser colineales)
- `line(A,B)` devuelve una lista de ecuaciones de dos planos que pasan por los puntos A y B, supuestos distintos (advirtiendo del error en caso de ser coincidentes)
- `pointOnLine(A,B,r)`, devuelve el punto P de la recta que pasa por los puntos A y B, tal que $\overrightarrow{AP} = r \cdot \overrightarrow{AB}$, donde r es un número real o ∞
- `quadric` devuelve la ecuación de la cuádrica correspondiente, al aplicarlo a nueve puntos distintos

- `intersection` devuelve los puntos de intersección, al aplicarlo a dos objetos previamente definidos por ecuaciones de grado ≤ 2

- `Vertex(A,S)` devuelve la lista $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ de coordenadas proyectivas de $A = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ e incorpora $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ a la lista $VERTICES$, en caso de no haber sido incorporado previamente a dicha lista (advirtiendo de error en otro caso)

- `newVertex(r,S)` devuelve el punto de intersección de la recta r con la cuádrica S no contenido en la lista $VERTICES$ e incorpora dicho punto a esta lista

- `isIn(A,Ob)` devuelve *true/false*, según que el punto A pertenezca, o no, al objeto Ob (recta, plano o cuádrica)

- `collinearPoints(A,B,C)` devuelve *true/false*, según que los tres puntos A, B, C sean, o no sean, colineales

- `coplanarPoints(A,B,C,D)` devuelve *true/false*, según que los cuatro puntos A, B, C, D sean, o no sean, coplanarios

- `polarPlane(A,S)` devuelve la ecuación del plano polar del punto A respecto de la cuádrica S, de ecuación $f(x_0, x_1, x_2, x_3) = 0$ es decir,

$$\left[\frac{\partial(f)}{\partial(x_0)}\right]_A x_0 \ + \ \left[\frac{\partial(f)}{\partial(x_1)}\right]_A x_1 \ + \ \left[\frac{\partial(f)}{\partial(x_2)}\right]_A x_2 \ + \ \left[\frac{\partial(f)}{\partial(x_3)}\right]_A x_3 \ = 0$$

Nota 5.1. Dos puntos, A y B, se dicen conjugados respecto de la cuádrica S, si están armónicamente separados por los puntos de intersección de la recta AB con S. El lugar de los puntos conjugados del A respecto de S es un plano, denominado *plano polar* de A respecto de S.

Código para la generación automática de la configuración

Respecto de un sistema de referencia proyectivo apropiado, los cinco puntos iniciales de la configuración mencionados en la nota 4.1 pueden ser elegidos, sin pérdida de generalidad, en la forma: $V = (1, 0, 0, 0)$, $A_1 = (0, 1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 0, 1, 0)$, $A_3 = (0, 0, 0, 1)$ y $A_4 = (1, 1, 1, 1)$.

Una vez cargado el paquete `paramGeo3D` en una *worksheet* de Maple, puede ejecutarse el proceso de generación de la configuración descrito anteriormente, ejecutando el siguiente código (algunos outputs son omitidos por ser expresiones extensas, que no contienen información esencial):

```
V:=point(1,0,0,0):
A[1]:=point(1,1,0,0):
A[2]:=point(1,0,1,0):
A[3]:=point(1,0,0,1):
A[4]:=point(1,1,1,1):
collinearPoints(V,A[1],A[3]);
```

$$false$$

```
alpha:=plane(V,A[1],A[3]);
```

$$\alpha := x_2 = 0$$

```
collinearPoints(V,A[2],A[4]);
```

$$false$$

```
beta:=plane(V,A[2],A[4]);
```

$$\beta := -x_1 + x_3 = 0$$

```
r:=intersection(alpha,beta);
```

$$r := [x_2 = 0, -x_1 + x_3 = 0]$$

```
for i to 4 do D[i]:=line(V,A[i]) od;
```

$$D_1 := [-x_3 = 0, x_2 = 0]$$
$$D_2 := [x_3 = 0, -x_1 = 0]$$
$$D_3 := [-x_2 = 0, x_1 = 0]$$
$$D_4 := [-x_2 + x_3 = 0, x_1 - x_3 = 0]$$

```
A[5]:=Vertex(pointOnLine(t[1],V,A[1]));
```

$$A_5 := [1, t_1, 0, 0]$$

```
A[6]:=Vertex(pointOnLine(t[2],V,A[2]));
```

$$A_6 := [1, 0, t_2, 0]$$

```
A[7]:=Vertex(pointOnLine(t[3],V,A[3]));
```

$$A_7 := [1, 0, 0, t_3]$$

```
for i to 6 do L[i]:=line(A[i],A[i+1]) od;
```

$$L_1 := [-x_3 = 0, x_0 - x_3 - x_1 - x_2 = 0]$$
$$L_2 := [-x_1 = 0, x_0 - x_3 - x_1 - x_2 = 0]$$
$$L_3 := [x_1 - x_2 = 0, -x_0 + x_1 - x_2 + x_3 = 0]$$
$$L_4 := [-t_1(x_2 - x_3) = 0, x_0 t_1 - t_1 x_2 - x_1 + x_3 = 0]$$
$$L_5 := [-t_1 x_3 t_2 = 0, x_0 t_1 t_2 - t_1 x_3 t_2 - x_1 t_2 - t_1 x_2 = 0]$$
$$L_6 := [-x_1 t_2 t_3 = 0, x_0 t_2 t_3 - x_1 t_2 t_3 - x_2 t_3 - x_3 t_2 = 0]$$

```
M:=point(1,1,2,3):
N:=point(1,3,2,1):
S:=quadric(A[1],A[2],A[3],A[4],A[5],A[6],A[7],M,N);
f:=factor(lhs(S));
```

$$(-1 + t_2)(t_1 - 1)(t_3 - 1)(-2t_3 t_1 t_2 x_2 x_3 - 4t_3 x_0 x_3 t_2 t_1 - .....)$$

```
sigma:=op(4,f)=0;
```

$$\begin{aligned}\sigma := {} & -2t_3 t_1 t_2 x_2 x_3 - 4t_3 x_0 x_3 t_2 t_1 - 2t_3 x_1 x_2 t_2 t_1 + 12t_3 t_2 t_1 x_1 x_3 - 4t_1 t_2 t_3 x_0 x_2 \\ & -4t_1 t_3 t_2 x_0 x_1 + 4t_3 t_2 t_1 x_0^2 - 4t_3 t_1 x_2 x_3 - 4t_3 x_1 x_2 t_1 + 4t_3 t_1 x_2^2 + 8t_3 t_1 x_1 x_3 \\ & -4t_3 t_1 x_0 x_2 + 12t_3 t_2 x_1 x_3 - 4t_3 t_2 x_0 x_1 - 3t_3 t_2 x_2 x_3 + 4t_3 t_2 x_1^2 - 9t_3 x_1 x_2 t_2 \\ & +4t_2 t_1 x_3^2 - 4x_0 x_3 t_2 t_1 - 3x_1 x_2 t_2 t_1 - 9t_1 t_2 x_2 x_3 + 12t_2 t_1 x_1 x_3 = 0\end{aligned}$$

```
A[8]:=newVertex(D[4],sigma);
```

$$A_8 := [2t_3 t_2 t_1 + t_3 t_1 + t_2 t_3 + t_2 t_1, t_3 t_2 t_1, t_3 t_2 t_1, t_3 t_2 t_1]$$

```
L[7]:=line(A[7],A[8]);
```

$$L_7 := [x_1 t_3 - x_2 t_3 = 0, -x_0 t_3 + x_1 t_3 - x_2 + x_3 = 0]$$

```
L[8]:=line(A[8],A[1]);
```

$$L_8 := [-x_2 + x_3 = 0, x_0 - x_2 - x_1 + x_3 = 0]$$

```
for i to 4 do P[i]:=intersection(L[i],L[i+4]) od;
```

$$P_1 := [t_1 - t_2, -t_1(-1 + t_2), -t_2 + t_2 t_1, 0]$$
$$P_2 := [t_2 - t_3, 0, -t_2(t_3 - 1), -t_3 + t_2 t_3]$$
$$P_3 := [t_3(2t_2 t_1 + t_1 + t_2), t_3 t_2 t_1 - t_2 t_1, t_3 t_2 t_1 - t_2 t_1, t_3(2t_2 t_1 + t_1 + t_2)]$$
$$P_4 := [-t_3 t_1 - t_2 t_3 + t_3 t_2 t_1^2 - 2t_3 t_2 t_1 - t_2 t_1, -(t_3 t_1 + 2t_2 t_3 + t_2 t_1)t_1,$$

$$t_3t_2t_1^2 - t_3t_2t_1, t_3t_2t_1^2 - t_3t_2t_1]$$

```
coplanarPoints(P[1],P[2],P[3],P[4]);
```

$$true$$

```
pi:=plane(P[1],P[2],P[3]);
```

$$\pi := 2x_0t_3t_2t_1 - t_2t_3t_1x_1 - t_2t_3t_1x_2 - t_2t_3x_3t_1 - x_1t_2t_3 - t_1x_3t_2 - t_3t_1x_2 = 0$$

```
p:=polarPlane(V,S):
isIn(P[1],p), isIn(P[2],p), isIn(P[3],p), isIn(P[4],p);
```

$$true,\ true,\ true,\ true$$

6 Conclusiones

Para extender a 3D, de modo natural, la configuración clásica de Pappus 2D, se han sustituido las dos rectas sobre las que yacen alternativamente los vértices de la poligonal por dos planos y se han sustituido los tres puntos (colineales) de intersección de lados opuestos por cuatro puntos (coplanarios) de intersección de lados opuestos. En consecuencia, se ha de sustituir la poligonal hexagonal por otra octogonal.

Pero en 3D se ha de asegurar que cada recta-lado de la poligonal intersecte a su opuesta (no se cruce con ella). Ahora bien, basta que tres de las rectas-lados intersecten a sus respectivas opuestas, para que la cuarta recta-lado sea también coplanaria con su opuesta.

En caso de que así ocurra, esos cuatro puntos de intersección están en un mismo plano (*plano de Pappus*), del mismo modo que en el caso 2D los puntos de intersección de rectas-lados opuestas estaban en una misma recta (*recta de Pappus*). Además las cuatro diagonales principales de la poligonal son concurrentes y su punto común (*punto de Pappus*) está en la recta intersección de los planos α y β (lo que facilita el proceso de generación de la configuración).

Finalmente, para evitar degenerar en la configuración de Pappus 2D, no debe haber tres diagonales principales coplanarias, para lo que basta que ninguno de los vértices de la poligonal esté en la recta $\alpha \cap \beta$.

Referencias

[1] M. Berger, *Geometry I*, Springer-Verlag, 1987.

[2] D. Pedoe, *Geometry. A Comprehensive Course*, Dover, 1988.

[3] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, Automatic determination of geometric loci. 3D-Extension of Simson-Steiner Theorem. En: John A. Campbell, Eugenio Roanes-Lozano (eds.), *Procs. of Artificial Intelligence and Symbolic Computation AISC 2000*. Springer LNCS **1930** (2001), págs. 157–173.

[4] E. Roanes-Macías, E. Roanes-Lozano, Geometric determination of the spheres that are tangent to four given ones. En: P.M.A. Sloot, J.J. Dongarra, C.J.K. Tan, A.G. Hoekstra (eds.), *Procs. of Computational Science ICCS 2002*. Springer-Verlag LNCS **2330** (2002), págs. 52–61.

[5] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, A Completion of Hypotheses Method for 3D-Geometry. 3D-Extensions of Ceva and Menelaus Theorems. En: J. M. Diaz Bánez, A. Márquez and J.R. Portillo (eds.), *Procs. of* 20^{th} *European Workshop on Computational Geometry*. Universidad de Sevilla (2004), págs. 85–88.

[6] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, A method for outlining 3D-problems in order to study them mechanically. Application to prove the 3D-version of Desargues Theorem. En: L. González Vega and T. Tecio (eds.), *Actas de los Encuentros de Algebra Computacional y Aplicaciones EACA 2004*. Univ. of Cantabria (2004), págs. 237–242.

[7] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, Aplicación de la transformación inversión 3D a construir cadenas de Steiner de esferas. En: F. Santos y D. Orden (eds.), *Actas de los XI Encuentros de Geometria Computacional*. Universidad de Cantabria (2005), págs. 141-148.

[8] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, A Maple Package for Automatic Theorem Proving and Discovery in 3D-Geometry. En: F. Botana and E. Roanes-Lozano (eds.), *Automated Deduction in Geometry*. Universidade de Vigo (2006), págs. 125-140.

[9] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, 3D-extension of Steiner's chain problem. *Mathematics and Computer Modeling* **45** (2007), págs. 137-148.

[10] E. Roanes-Macías y E. Roanes-Lozano, Sobre la extension a 3D de la configuración de Pappus. En: A. González-Escribano, D. Orden, B. Palop (eds.), *Actas de los XII Encuentros de Geometría Computacional*. Universidad de Valladolid (2007), págs. 145-152.

Rectas Proyectivas sobre $\mathbb{R}$_álgebras bidimensionales y Cuádricas en el espacio proyectivo

Santiago Mazuelas Franco

Dpto. de Álgebra, Geometría y Topología. Univ. Valladolid
smazuelas@cedetel.es

Abstract

The classic Riemann Sphere construction, that is, the real plane compactification by means of a sphere or equivalently via the complex projective line; is widely known and used. This construction achieves, for example, a clear description of cycles and a linear representation of the inversive group of the euclidean plane by means of the Moebius group.

In this paper we study the analog construction for the other types of bidimensional $\mathbb{R}$_algebras: paracomplex and dual numbers, and for the other types of real and irreducible quadrics in the projective space: hyperboloid and real cone. We make a especial emphasis in the definition of the projective lines over rings with zero divisors.

Thereby we show that it is possible to perform a construction completely analogous to the Riemann Sphere for the other types of bidimensional $\mathbb{R}$_algebras and quadrics in the projective space and we also show the relation of these constructions with the hyperbolic and degenerate metrics of the real plane.

1 Introducción

En dos artículos publicados anteriormente en esta misma revista [1] y [2] hemos estudiado con cierto detalle dos herramientas algebrogeométricas:

- las proyecciones estereográficas de cuádricas reales e irreducibles de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$
- las $\mathbb{R}$_álgebras bidimensionales

Esas dos herramientas permiten dotar a un plano afín real con una estructura más rica, que es esencialmente una métrica, sumergiéndolo en una cuádrica o dotándolo de estructura de $\mathbb{R}$_álgebra. Así, no sólo se pueden estudiar propiedades de la geometría de la métrica desde un punto de vista distinto, sino que también se obtienen en la cuádrica una estructura lineal sobre el álgebra real construido.

Para el caso del plano euclídeo, su inmersión en la esfera de Riemann, la posibilidad de identificarlo con el cuerpo complejo y la relación de las dos construcciones, obtenida al observar que la esfera es la compatificación lograda al dotar de estructura de recta proyectiva al cuerpo de los números complejos; han sido ampliamente utilizados por la comunidad matemática. En este artículo, vamos a obtener resultados análogos para los otros tipos de cuádricas y $\mathbb{R}$_álgebras estudiadas en [1] y [2]; observándose así la profundidad y alcance de la utilización de las herramientas mencionadas anteriormente.

El hecho de que las $\mathbb{R}$_álgebras, puedan poseer divisores de cero complica la definición de la estructura de recta proyectiva sobre ellos; por lo que en este artículo definimos con precisión tales rectas proyectivas, obtenemos resultados para tales estructuras proyectivas como son el teorema de Staudt, dotamos a esas rectas proyectivas de estructura de variedad analítica bidimensional y demostramos que son isomorfas analíticamente a cuádricas reales e irreducibles de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

2 Rectas proyectivas sobre $\mathbb{R}$_álgebras bidimensionales

Definición 1 *Sea $\mathbb{K}$ un anillo conmutativo y con elemento unidad, $S_0 \subset \mathbb{K}$ el subconjunto multiplicativo de los no divisores de cero. Al anillo*

$$S_0^{-1}\mathbb{K} = \{(a,b)^{\sim} : a \in \mathbb{K},\ b \in S_0\}$$

donde $(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$, se le llama anillo total de fracciones de $\mathbb{K}$. Si $S_0^{-1}\mathbb{K} = \mathbb{K}$, se dice que $\mathbb{K}$ es un anillo total de fracciones.

Proposición 1 *Sea* $\mathbb{K}$ *un anillo conmutativo y con elemento unidad.* $\mathbb{K}$ *es un anillo total de fracciones si y sólo si los elementos no inversibles coinciden con los divisores de cero.*

Demostración

$\lfloor \Rightarrow \rceil$ En un anillo los divisores de cero siempre son no inversibles y recíprocame si $z \in \mathbb{K}$ es un elemento no inversible, si z no fuera divisor de cero $z \in S_0$ $\Rightarrow (1,z)^{\sim} \in S_0^{-1}\mathbb{K} = \mathbb{K} \Rightarrow \exists\ z' \in \mathbb{K}$ tal que $zz' = 1$ lo cual es absurdo

$\lfloor \Leftarrow \rceil$ Sea $(z_1, z_2) \in S_0^{-1}\mathbb{K}$, $z_2 \in S_0 \Rightarrow z_2$ inversible $\Rightarrow (z_1, z_2)^{\sim} = (z_1 z_2^{-1}, 1)^{\sim} \in \mathbb{K}$ ■

Corolario 1 *Sea* $\mathbb{K}$ *una* $\mathbb{R}$*_álgebra bidimensional y con uno. Entonces* $\mathbb{K}$ *es un anillo total de fracciones.*

Demostración Basta con observar el estudio realizado en [2] acerca de los divisores de cero y elementos inversibles en $\mathbb{R}$_álgebras bidimensionales.

Proposición 2 *Sea* $\mathbb{K}$ *una* $\mathbb{R}$*_álgebra bidimensional con uno,* z_1 *y* z_2 *dos elementos de* $\mathbb{K}$*. Son equivalentes:*

1. (z_1, z_2) *es complementable en el* $\mathbb{K}$*_módulo libre* $\mathbb{K}^2$
2. *El ideal generado por* z_1 *y* z_2 *es todo el anillo* $\mathbb{K}$
3. *Si existe* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ *tal que* $\lambda z_1 = \lambda z_2 = 0$*, entonces* $\lambda = 0$

Demostración

$\lfloor 1) \Leftrightarrow 2) \rceil$ (z_1, z_2) es complementable si existe otro par $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{K}^2$ tal que $\{(z_1, z_2), (\mu_1, \mu_2)\}$ es una base de $\mathbb{K}^2$ es decir si y sólo si existe un $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{K}^2$ tal que

$$\begin{vmatrix} z_1 & \mu_1 \\ z_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = 1$$

lo cual es equivalente a que el ideal generado por z_1 y z_2 sea todo el anillo $\mathbb{K}$

$\lfloor 2) \Rightarrow 3) \rceil$ si $\lambda z_1 = \lambda z_2 = 0$ como el ideal generado por z_1 y z_2 es todo $\mathbb{K}$ se tiene que existen μ_1 y μ_2 tales que $\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 = 1$ por lo tanto $\mu_1 z_1 \lambda + \mu_2 z_2 \lambda = \lambda$ entonces $\lambda = 0$

$\lfloor 3) \Rightarrow 2) \rceil$ como $\mathbb{K}$ es un dominio de ideales principales, el ideal generado por z_1 y z_2 coincide con el ideal generado por otro elemento $z \in \mathbb{K}$ y el ideal generado por z_1 y z_2 será el anillo total si y sólo si z es inversible. Sean ahora μ_1 y μ_2 elementos de $\mathbb{K}$ tales que $z_1 = \mu_1 z$ y $z_2 = \mu_2 z$; si z no fuese inversible entonces sería divisor de cero y por lo tanto existiría $\lambda \neq 0$ tal que $z_1 \lambda = \mu_1 z \lambda = 0$ y $z_2 \lambda = \mu_2 z \lambda = 0$ lo cual es absurdo.

Nota 1 *Obsérvese que en el caso de algebras bidimensionales los pares no complementables son:*

- *Caso* $\mathbb{C}$*, únicamente el par* $(0, 0)$
- *Caso* $\mathbb{M}$*, los pares* $(\lambda_1 + \lambda_1 j, \lambda_2 + \lambda_2 j)$ *y* $(\lambda_1 - \lambda_1 j, \lambda_2 - \lambda_2 j)$ *con* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$
- *Caso* $\mathbb{D}$*, los pares* $(\lambda_1 \varepsilon, \lambda_2 \varepsilon)$ *con* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

Por lo tanto se observa que una pareja (z_1, z_2) *es complementable si y sólo si* $z_1 \in \mathbb{K}^*$ *o* $z_2 \in \mathbb{K}^*$ *o* $z_1 - z_2 \in \mathbb{K}^*$*.*

Proposición 3 *Sea* $\mathbb{K}_0^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{K}^2$ *tales que* (z_1, z_2) *no es complementable en* $\mathbb{K}^2$*. La relación* $\sim$ *definida en* $\mathbb{K}^2 \setminus \mathbb{K}_0^2$ *por*

$$\mathbf{v} \sim \mathbf{w} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ con } \lambda \mathbf{v} = \mathbf{w}$$

es una relación de equivalencia.

Definición 2 *Llamaremos recta proyectiva asociada al* $\mathbb{R}$*_álgebra* $\mathbb{K}$ *a*

$$\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} = \frac{\mathbb{K}^2 \setminus \mathbb{K}_0^2}{\sim}$$

2.1 Referencias en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$

Definición 3 *Sean* $A = [a_0, a_1], B = [b_0, b_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ *diremos que son un par de puntos fuertemente independientes si* $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ *es un elemento inversible de* $\mathbb{K}$.

Nota 2 *La definición anterior es independiente del representante elegido.*

En efecto, sean

$$A = [a_0, a_1] = [a'_0, a'_1] \Leftrightarrow a'_0 = \alpha a_0,\ a'_1 = \alpha a_1$$

$$B = [b_0, b_1] = [b'_0, b'_1] \Leftrightarrow b'_0 = \beta b_0,\ b'_1 = \beta b_1$$

con α y β elementos inversibles de $\mathbb{K}$.

$$\begin{vmatrix} a'_0 & a'_1 \\ b'_0 & b'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_0 & \alpha a_1 \\ \beta b_0 & \beta b_1 \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

que es inversible si $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ lo es.

Proposición 4 *Sean* A *y* B *un par de puntos fuertemente independientes. Entonces para todo* $C \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ *existen* $\gamma_1,\ \gamma_2 \in \mathbb{K}$ *tales que si* $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$, $C = [c_0, c_1]$

$$[c_0, c_1] = [\gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1]$$

el par (γ_1, γ_2) *es único salvo producto por unidades.*

`Demostración`

La existencia es trivial por que A y B son fuertemente independientes.

Dos pares (γ_1, γ_2) y (γ'_1, γ'_2) cumplen la condición de la proposición si existe un $\alpha \in \mathbb{K}$ inversible tal que

$$\begin{cases} \gamma_1 a_0 + \gamma_2 b_0 = \alpha(\gamma'_1 a_0 + \gamma'_2 b_0) \\ \gamma_1 a_1 + \gamma_2 b_1 = \alpha(\gamma'_1 a_1 + \gamma'_2 b_1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\alpha\gamma'_1 - \gamma_1)a_0 + (\alpha\gamma'_2 - \gamma_2)b_0 = 0 \\ (\alpha\gamma'_1 - \gamma_1)a_1 + (\alpha\gamma'_2 - \gamma_2)b_1 = 0 \end{cases}$$

sistema que tiene únicamente solución trivial ya que A y B son fuertemente independientes por lo tanto $(\gamma_1, \gamma_2) = \alpha(\gamma'_1, \gamma'_2)$ ■

Definición 4 *Diremos que tres puntos A, B y C de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ forman una referencia si A y B son fuertemente independientes y existen representantes de los tres puntos tales que $(c_0, c_1) = (a_0, a_1) + (b_0, b_1)$.*

Proposición 5 *Son equivalentes:*

1. *$\{A, B, C\}$ es una referencia.*
2. *A y B son fuertemente independientes y existen γ_1, γ_2 inversibles tales que*
$$(c_0, c_1) = \gamma_1(a_0, a_1) + \gamma_2(b_0, b_1)$$
3. *$\{A, B\}$, $\{A, C\}$ y $\{B, C\}$ son fuertemente independientes.*

`Demostración`

- 1) $\Leftrightarrow$ 2) trivial.
- 2) $\Rightarrow$ 3) Veamos por ejemplo que B y C son fuertemente independientes.

  $(c_0, c_1) = \gamma_1(a_0, a_1) + \gamma_2(b_0, b_1) \Rightarrow (a_0, a_1) = \gamma_1^{-1}(c_0, c_1) - \gamma_1^{-1}\gamma_2(b_0, b_1)$

  entonces la ecuación $(a_0, a_1) = x(c_0, c_1) + y(b_0, b_1)$ tiene solución $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ es inversible.
- 3) $\Rightarrow$ 2) como $\{A, B\}$ son fuertemente independientes

  $$(c_0, c_1) = \gamma_1(a_0, a_1) + \gamma_2(b_0, b_1)$$

  si γ_1 no fuese inversible existiría $\gamma_1' \neq 0$ con $\gamma_1\gamma_1' = 0$ entonces

  $$\gamma_1'(c_0, c_1) = \gamma_1'\gamma_2(b_0, b_1)$$

  lo cual es absurdo ya que $\{C, B\}$ son fuertemente independientes. De la misma forma se ve que γ_2 es inversible. ■

Proposición 6 *Sea $\{A, B, C\}$ una referencia de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, se tiene que todo punto $X \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ es fuertemente independiente con algún punto de la referencia.*

`Demostración`

Basta con observar que como el punto $X = [x_0, x_1]$ pertenece a $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, se tiene que alguno de los determinantes

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ x_0 & x_1 \end{array}\right|, \left|\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{array}\right| \ o \left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ x_0 & x_1 \end{array}\right|$$

ha de ser inversible

2.2 Proyectividades en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ y razón doble

Sea M una matriz 2×2 de elementos de $\mathbb{K}$ defino la correspondencia:

$$\begin{array}{rccc} \psi_M : & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ & [x_0, x_1] & \longmapsto & [y_0, y_1] \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Nota 3 *Dos matrices inducen la misma correspondencia si y sólo si $M = \rho N$ con ρ un elemento inversible de $\mathbb{K}$*

Proposición 7 *Si $\det(M) \in \mathbb{K}^*$ entonces la correspondencia ψ_M es una aplicación bien definida.*

`Demostración`

Sea $(x_0, x_1) \notin \mathbb{K}^2_0$, si

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^2_0$$

existe un $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que

$$\lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det(M)$ es inversible

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \notin \mathbb{K}^2_0$$

pero

$$\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = M^{-1}\lambda \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual es absurdo ■

Proposición 8 *La aplicación dada por una matriz M lleva pares de puntos fuertemente independientes en pares fuertemente independientes si y solo si el determinante de M es inversible.*

`Demostración`

Sean $A = [a_0, a_1]$ y $B = [b_0, b_1]$ dos puntos fuertemente independientes y $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\psi_M(A)$ y $\psi_M(B)$ son fuertemente independientes si

$$\begin{vmatrix} \alpha a_0 + \beta a_1 & \alpha b_0 + \beta b_1 \\ \gamma a_0 + \delta a_1 & \gamma b_0 + \delta b_1 \end{vmatrix}$$

es inversible,

$$\begin{vmatrix} \alpha a_0 + \beta a_1 & \alpha b_0 + \beta b_1 \\ \gamma a_0 + \delta a_1 & \gamma b_0 + \delta b_1 \end{vmatrix} = \left| \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= det(M) \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$

que es inversible si lo es el determinante de M ■

Definición 5 *Sea Φ una correspondencia $\Phi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Decimos que Φ es una proyectividad algebraica τ_semilineal de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ si existen $M \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{K})$ con $detM \in \mathbb{K}^*$ y un automorfismo de la $\mathbb{R}$_álgebra $\mathbb{K}$, τ, tal que*

$$\phi([x, y]) = \psi_M([\tau(x), \tau(y)])$$

Nota 4 *Obsérvese que como se vio en [2], los únicos automorfismos de las $\mathbb{R}$_álgebras $\mathbb{K}$ son la identidad y la conjugación.*

Proposición 9 *Sea $\{A, B, C\}$ una referencia. Entonces $\forall X \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ existen (α,β) únicos salvo producto por unidades tales que*

$$(c_0, c_1) = (a_0, a_1) + (b_0, b_1)$$

$$(x_0, x_1) = \alpha(a_0, a_1) + \beta(b_0, b_1)$$

Definición 6 *Si $\{A, B, C\}$ forman una referencia, defino la razón doble de cuatro puntos $A, B, C, X \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$,*

$$[A, B, C, X]_{\mathbb{P}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

siempre que α y β sean inversibles.

Nota 5 *La razón doble está definida siempre que los cuatro puntos sean fuertemente independientes dos a dos.*

Proposición 10 *Sean $\{A, B, C\}$ y $\{D, E, F\}$ dos referencias. Entonces existe una única proyectividad algebraica lineal ($Id_semilineal$) que transforma una referencia en otra.*

`Demostración`

- Existencia: Sean $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$, $C = [c_0, c_1]$, $D = [d_0, d_1]$, $E = [e_0, e_1]$ y $F = [f_0, f_1]$ con

  $$(c_0, c_1) = (a_0, a_1) + (b_0, b_1)$$
  $$(f_0, f_1) = (d_0, d_1) + (e_0, e_1)$$

  las matrices

  $$M = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} d_0 & e_0 \\ d_1 & e_1 \end{pmatrix}$$

  tienen determinante inversible y la aplicación dada por la matriz NM^{-1} manda una referencia en otra.

- Unicidad: Sean M_1 y M_2 dos matrices que mandan una referencia en otra entonces $M_1 M_2^{-1}$ deja fijos los puntos de la referencia, por lo tanto es la identidad y $M_1 = M_2$.

Nota 6 *Sean $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Siendo $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$, $C = [c_0, c_1]$ y $D = [d_0, d_1]$, las coordenadas de los puntos en alguna referencia de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, se tiene que la razón doble*

$$[A, B, C, D] = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_0 & b_0 \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_0 & b_0 \\ d_1 & b_1 \end{vmatrix}}$$

Definición 7 *Sean $A, B, C \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tres puntos fuertemente independientes dos a dos. Defino el ciclo no degenerado de la recta proyectiva $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ determinado por los puntos $A, B, C \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ como los puntos $D \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tales que $[A, B, C, D] \in \mathbb{R}$.*

Proposición 11 *Sea $\Phi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ una proyectividad algebraica τ_semilineal, se tiene que*

$$[\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(D)] = \tau([A, B, C, D])$$

para todos los $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ fuertemente independientes dos a dos.

Corolario 2 *Las proyectividades algebraicas dejan invariante la razón doble de puntos de un ciclo no degenerado.*

Corolario 3 *Las proyectividades algebraicas transforman ciclos no degenerados en ciclos no degenerados.*

Proposición 12 *Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{K}$ entonces*

$$[z_1, z_2, z_3, z_4]_{\mathbb{K}} = [[1, z_1], [1, z_2], [1, z_3], [1, z_4]]_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}$$

Definición 8 *Decimos que cuatro puntos $A, B, C, D \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ forman una cuaterna armónica en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ si*

$$[A, B, C, D] = -1$$

Definición 9 *Sea Φ una correspondencia $\Phi : \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Decimos que Φ es una proyectividad de Staudt si Φ es biyectiva, transforma pares fuertemente independientes en pares fuertemente independientes y conserva cuaternas armónicas.*

Lema 1 *Se tiene que*

1. *$\forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ con $\{\alpha, \beta\} \cap \{0, 1\} = \emptyset$ y $\alpha \neq \pm\beta$ se tiene que*

$$[[1, \alpha], [1, \beta], [0, 1], [1, \frac{(\alpha + \beta)}{2}]] = -1$$

2. $\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ *se tiene que*

$$[[1,0],[1,\alpha],[0,1],[1,\frac{\alpha}{2}]] = -1$$

3. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ *con* $\alpha \neq \pm\beta$ *se tiene que*

$$[[1,\alpha],[1,\beta],[1,0],[\alpha+\beta, 2\alpha\beta]] = -1$$

Teorema 1 Φ *es una proyectividad de Staudt si y sólo si es una proyectividad algebraica.*

`Demostración`

$\lfloor \Leftarrow \rceil$ Trivial

$\lfloor \Rightarrow \rceil$

Sea Φ una proyectividad de Staudt, $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$ una referencia en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, su imagen por Φ, $\mathcal{R}' = \{\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C)\}$, también es una referencia por la prop. 5. Para cada $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0,1\}$ llamo $X_\lambda = [x, y]$ al único punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ con

$$(x, y) = (a_0, a_1) + \lambda(b_0, b_1)$$

y $A = [a_0, a_1]$, $B = [b_0, b_1]$, $C = [c_0, c_1]$

$$(c_0, c_1) = (a_0, a_1) + (b_0, b_1)$$

se tiene que en la referencia $\mathcal{R}$, $X_\lambda = [1, \lambda]$ o equivalentemente que

$$[A, B, C, X_\lambda] = \lambda$$

de esta forma definimos la correspondencia

$$\begin{array}{rccc} \tau: & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & 0 & \longmapsto & 0 \\ & 1 & \longmapsto & 1 \\ & \lambda \notin \{0,1\} & \longmapsto & [\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(X_\lambda)] \end{array}$$

1. τ está bien definida: sean $[x', y'] = \Phi(X_\lambda)$, $[a'_0, a'_1] = \Phi(A)$, $[b'_0, b'_1] = \Phi(B)$ y $[c'_0, c'_1] = \Phi(C)$, con $(a'_0, a'_1) + (b'_0, b'_1) = (c'_0, c'_1)$, si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ con

$$(x', y') = \alpha(a'_0, a'_1) + \beta(b'_0, b'_1)$$

$\alpha \neq 0$ porque $\Phi(X_\lambda)$ y $\Phi(B)$ son fuertemente independientes, al serlo X_λ y B. Si α no fuera invertible, existiría un $\alpha' \neq 0$ con $\alpha'(x', y') = \alpha'\beta(b'_0, b'_1)$, luego

$$\alpha'\beta \begin{vmatrix} x' & y' \\ b'_0 & b'_1 \end{vmatrix} = \alpha' \begin{vmatrix} x' & y' \\ \beta b'_0 & \beta b'_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \alpha'(x'\beta b'_1 - y'\beta b'_0) = x'\alpha' y' - y'\alpha' x' = 0$$

lo cual es absurdo ya que $\Phi(X_\lambda)$ y $\Phi(B)$ son fuertemente independientes y $\alpha'\beta \neq 0$ porque $\Phi(X_\lambda) \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, así pues la razón doble $[\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(X_\lambda)] = \frac{\beta}{\alpha}$ está definida.

2. τ es inyectiva. Obsérvese que si $\lambda \notin \{0, 1\}$ entonces

$$[\Phi(A), \Phi(B), \Phi(C), \Phi(X_\lambda)] \notin \{0, 1\}$$

ya que Φ es inyectiva.

Si $\tau(\lambda) = \tau(\mu)$ entonces $[1, \tau(\lambda)] = [1, \tau(\mu)] \Rightarrow \Phi([1, \lambda]) = \Phi([1, \mu])$ y como Φ es inyectiva se tiene que $\lambda = \mu$.

3. τ es sobreyectiva ya que Φ lo es.

4. τ es homomorfismo de anillos.

- $\tau(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\tau(\alpha)}{2}$. Por el lema anterior, si $\alpha \neq 0, 1$, en la referencia $\mathcal{R}$

$$[[1, 0], [1, \alpha], [0, 1], [1, \frac{\alpha}{2}]] = -1$$

y como Φ es una proyectividad de Staudt, se tiene que

$$[\Phi([1, 0]), \Phi([1, \alpha]), \Phi([0, 1]), \Phi([1, \frac{\alpha}{2}])] = -1$$

que escrito en la base $\mathcal{R}'$ queda

$$-1 = [[1,0],[1,\tau(\alpha)],[0,1],[1,\tau(\frac{\alpha}{2})]] = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \tau(\frac{\alpha}{2}) & \tau(\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \tau(\frac{\alpha}{2}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \tau(\alpha) \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \tau(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\tau(\alpha)}{2}$$

- $\tau(\alpha+\beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$. Si $\alpha = \beta$ es trivial por el apartado anterior. Si $\alpha \neq \beta$ por el lema anterior, en la referencia $\mathcal{R}$ se tiene que

$$[[1,\alpha],[1,\beta],[0,1],[1,\frac{\alpha+\beta}{2}]] = -1$$

y por lo tanto

$$[\Phi([1,\alpha]),\Phi([1,\beta]),\Phi([0,1]),\Phi([1,\frac{\alpha+\beta}{2}])] = -1$$

y así en la referencia $\mathcal{R}'$

$$[[1,\tau(\alpha)],[1,\tau(\beta)],[0,1],[1,\tau(\frac{\alpha+\beta}{2})])] = -1$$

$$\Rightarrow \tau(\frac{\alpha+\beta}{2}) = \frac{\tau(\alpha)+\tau(\beta)}{2}$$

y por el apartado anterior se tiene que $\tau(\alpha+\beta) = \tau(\alpha) + \tau(\beta)$.

- $\tau(\alpha^2) = (\tau(\alpha))^2$. Para $\alpha \neq -\beta$ por el lema anterior, se tiene que

$$[[1,\alpha],[1,\beta],[1,0],[\alpha+\beta,2\alpha\beta]] = -1$$

en concreto, para $\beta = 1-\alpha$ y $\alpha \neq \frac{1}{2}$, se tiene que

$$[[1,\alpha],[1,1-\alpha],[1,0],[1,2\alpha(1-\alpha)]] = -1$$

y como Φ conserva cuaternas armónicas, en la referencia $\mathcal{R}'$ tenemos que

$$[[1,\tau(\alpha)],[1,\tau(1-\alpha)],[1,0],[1,\tau(2\alpha(1-\alpha))]] = -1$$

como $\alpha \neq \frac{1}{2} \Rightarrow \tau(\alpha) \neq \frac{1}{2}$ ya que τ es inyectiva y $\tau(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, por lo que razonando como antes para $\tau(\alpha)$, se tiene que

$$-1 = [[1, \tau(\alpha)], [1, 1 - \tau(\alpha)], [1, 0], [1, 2\tau(\alpha)(1 - \tau(\alpha))]] =$$

$$= [[1, \tau(\alpha)], [1, \tau(1 - \alpha)], [1, 0], [1, 2\tau(\alpha)(1 - \tau(\alpha))]]$$

y por lo tanto

$$\tau(2\alpha(1 - \alpha)) = 2\tau(\alpha)(1 - \tau(\alpha))$$

Entonces $\tau(\alpha^2) = (\tau(\alpha))^2$ y es trivial que $\tau((\frac{1}{2})^2) = (\tau(\frac{1}{2}))^2$.

- $\tau(\alpha\beta) = \tau(\alpha)\tau(\beta)$. Como $(\tau(\alpha + \beta))^2 = \tau((\alpha + \beta)^2)$ entonces

$$(\tau(\alpha) + \tau(\beta))^2 = (\tau(\alpha))^2 + (\tau(\beta))^2 + 2\tau(\alpha)\tau(\beta) = \tau(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) =$$

$$= \tau(\alpha^2) + \tau(\beta^2) + \tau(2\alpha\beta)$$

de donde se deduce que

$$2\tau(\alpha)\tau(\beta) = \tau(2\alpha\beta) \Rightarrow \tau(\alpha)\tau(\beta) = \tau(\alpha\beta)$$

De esta forma Φ es la proyectividad algebraica τ_semilineal que transforma la referencia $\mathcal{R}$ en $\mathcal{R}'$ ■

Lema 2 *El automorfismo τ del teorema anterior es independiente de la elección de la referencia $\mathcal{R} = \{A, B, C\}$.*

`Demostración` En efecto, sean $\mathcal{R}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ y $\mathcal{R}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ dos referencias en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, sea π la proyectividad algebraica tal que $\pi(A_i) = A'_i$, $\pi(B_i) = B'_i$ y $\pi(C_i) = C'_i$. Si P es un punto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, con coordenadas $[x_0, x_1]$ y $[t_0, t_1]$ en las referencias $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ y $\pi(P)$ tiene coordenadas $[y_0, y_1]$ y $[z_0, z_1]$ en las referencias $\{A'_1, B'_1, C'_1\}$ y $\{A'_2, B'_2, C'_2\}$. Se verifica que si los automorfismos asociados a π en las dos parejas de referencias son τ y σ

$$[y_0, y_1] = \pi[x_0, x_1] = [\tau(x_0), \tau(x_1)]$$

$$[z_0, z_1] = \pi[t_0, t_1] = [\sigma(t_0), \sigma(t_1)]$$

Sea ψ_M y ψ_N las proyectividades algebraicas que pasan de $\mathcal{R}_1$ a $\mathcal{R}_2$ y de $\mathcal{R}_2'$ a $\mathcal{R}_1'$ respectivamente, se tiene que

$$\rho \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\mu \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

con $\rho, \mu \in \mathbb{K}^*$, aplicando σ a la primera de las ecuaciones y sustituyendo las y y z en la segunda se obtiene

$$\sigma(\rho) \begin{pmatrix} \sigma(t_0) \\ \sigma(t_1) \end{pmatrix} = \sigma(M) \begin{pmatrix} \sigma(x_0) \\ \sigma(x_1) \end{pmatrix}$$

$$\mu \begin{pmatrix} \tau(x_0) \\ \tau(x_1) \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \sigma(t_0) \\ \sigma(t_1) \end{pmatrix}$$

substituyendo y agrupando los factores de proporcionalidad

$$\lambda \begin{pmatrix} \tau(x_0) \\ \tau(x_1) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \sigma(x_0) \\ \sigma(x_1) \end{pmatrix}$$

con $\lambda = \lambda([x_0, x_1])$ variable según el punto y $P = N\sigma(M)$. Como τ y σ son automorfismos, se tiene que $\sigma(1) = \tau(1) = 1$ y $\sigma(0) = \tau(0) = 0$, luego si

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

se tiene que (sustituyendo la ecuación anterior para los puntos $[1,0]$, $[0,1]$ y $[1,1]$) $a = \lambda([1,0]), c = 0, d = \lambda([0,1])$ y $\lambda([1,0]) = \lambda([1,1])$; por lo tanto P se puede tomar como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\lambda([y_0, y_1]) \begin{pmatrix} \tau(y_0) \\ \tau(y_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma(y_0) \\ \sigma(y_1) \end{pmatrix}$$

como $\tau(1) = \sigma(1) = 1$ entonces $\lambda([1, y]) = 1 \ \forall y \in \mathbb{K} \Rightarrow \tau(y) = \sigma(y) \ \forall y \in \mathbb{K}$
■

Nota 7 *Así pues a partir de ahora llamaremos a las proyectividades de Staudt o proyectividades algebraicas simplemente proyectividades.*

3 Rectas proyectivas y cuádricas

3.1 Estructura de Variedad Diferenciable bidimensional

Proposición 13 *Sean* $\{P_1, P_2, P_3\}$ *una referencia de* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, $U_1 = \{R \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} : R \text{ y } P_2 \text{ son fuertemente independientes }\}$, $U_2 = \{R \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} : R \text{ y } P_1 \text{ son fuertemente independientes}\}$ *y* $U_3 = \{R \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} : R \text{ y } P_3 \text{ son fuertemente independientes }\}$ *. Se tiene que* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ *y las aplicaciones*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & U_1 \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{K} \simeq \mathbb{R}^2 \\ & [x_0, x_1] & \longmapsto & \frac{x_1}{x_0} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 : & U_2 \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{K} \simeq \mathbb{R}^2 \\ & [x_0, x_1] & \longmapsto & \frac{x_0}{x_1} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \varphi_3 : & U_3 \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{K} \simeq \mathbb{R}^2 \\ & [x_0, x_1] & \longmapsto & \frac{x_0}{x_1 - x_0} \end{array}$$

están bien definidas y son biyectivas

`Demostración`

- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ gracias a la proposición 6
- el hecho de que estén bien definidas se desprende directamente de la definición de los conjuntos U_i.
- Inyectividad: el único caso que no es inmediato es el tercero; en ese caso, sean $[x_0, x_1], [y_0, y_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ tales que $\varphi_3([x_0, x_1]) = \varphi_3([y_0, y_1]) \Leftrightarrow \frac{x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_0}{y_1 - y_0}$, entonces

$$[x_0, x_1] = [\frac{x_0}{x_1 - x_0}, \frac{x_1}{x_1 - x_0}] = [\frac{y_0}{y_1 - y_0}, 1 + \frac{x_0}{x_1 - x_0}] =$$

$$= [\frac{y_0}{y_1 - y_0}, 1 + \frac{y_0}{y_1 - y_0}] = [\frac{y_0}{y_1 - y_0}, \frac{y_1}{y_1 - y_0}] = [y_0, y_1]$$

- la sobreyectividad es trivial

Proposición 14 *La familia de subconjuntos*

$$\mathcal{T} = \{U \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} : \ \varphi_i(U \cap U_i) \text{ es una abierto en } \mathbb{R}^2, \ i = 1, 2, 3\}$$

define una topología sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$*. Con esa topología,* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$*, es Hausdorff y tiene una base numerable.*

`Demostración`

- Es trivial que $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \in \mathcal{T}$ ya que $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^2$ $i = 1, 2, 3$
- Sean $U_\alpha \in \mathcal{T}$ con $\alpha \in I$, es trivial que $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha$ pertenece a $\mathcal{T}$ ya que $\bigcup_{\alpha \in I} \varphi_i(U_\alpha \cap U_i)$ es un abierto de $\mathbb{R}^n$, análogamente si I es finito $\bigcap_{\alpha \in I} U_\alpha \in \mathcal{T}$

Las propiedades de ser Hausdorff y tener una base numerable se desprenden directamente de la topología usual de $\mathbb{R}^2$

Proposición 15 *Las aplicaciones* φ_1*,* φ_2 *y* φ_3 *anteriores, dotan a* $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ *de estructura de variedad analítica bidimensional.*

`Demostración`

Veamos que $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)_{i=1}^3\}$ es un atlas analítico de dimensión 2 en el espacio topológico $(\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}, \mathcal{T})$.

Es trivial que las aplicaciones $\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son homeomorfismos gracias a la definición de topología dada sobre $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ y $\{U_i\}_{i=1}^3$ es un recubrimiento abierto de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$. Por lo tanto solo falta ver que para todo $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{R}^2$$

es una aplicación analítica.

Sean $i = 1$ y $j = 2$, los demás casos son análogos. Veamos que la aplicación

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \quad \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^2 \quad \longrightarrow \quad \varphi_2(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^2$$

es analítica.

$z = (x, y) \in \varphi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{K}$ si y sólo si $z \in \mathbb{K}^*$, entonces $\varphi_2(\varphi_1^{-1}(z)) = \varphi_2([1, z]) = \frac{1}{z}$, $\Rightarrow \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x, y) = (\frac{x}{x^2 - \xi^2 y^2}, \frac{y}{x^2 - \xi^2 y^2})$, por lo tanto analítica ■

3.2 Estructura de Cuádrica en $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

Siguiendo la misma notación que en el artículo [1]. Sea $[Q]$ una cuádrica real e irreducible de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, P y P' dos puntos de $[Q]$ que no están en el vértice. Sea $\mathcal{R}$ la referencia de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ en la que $P = [1,0,0,1]$, $P' = [1,0,0,-1]$ y la matriz de $[Q]$ es $diag(-1,\varepsilon_1,\varepsilon_2,1)$. Llamamos $[\mathcal{S}]$, $[\mathcal{H}]$ y $[\mathcal{D}]$ a las tres cuádricas reales e irreducibles de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, concretamente $[\mathcal{S}]$ es la cuádrica de puntos que tiene matriz $diag(-1,1,1,1)$, $[\mathcal{H}]$ es la cuádrica de rectas que tiene matriz $diag(-1,1,-1,1)$, y $[\mathcal{D}]$ es el cono real que tiene matriz $diag(-1,1,0,1)$.

Sea α, la proyección estereográfica de $[Q]$ desde P sobre el plano afín $P'^{\perp} \setminus P^{\perp} \simeq \mathbb{K}$. Llamamos α_P a la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \alpha_P: & [Q] \setminus P^{\perp} & \longrightarrow & U_1 \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ & R & \longmapsto & [1, \alpha(R)] \end{array}$$

Gracias a que $\alpha : [Q] \setminus P^{\perp} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es un homeomorfismo [1] y a como se ha definido la topología en $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, se tiene que α_P es un homeomorfismo.

Lema 3 *Sean $\mathbb{K}_1 = \mathbb{C}$, $\mathbb{K}_2 = \mathbb{M}$ y $\mathbb{K}_3 = \mathbb{D}$ las 3 $\mathbb{R}$_álgebras bidimensionales y $[Q_1] = [\mathcal{S}]$, $[Q_2] = [\mathcal{H}]$ y $[Q_3] = [\mathcal{D}]$ las 3 cuádricas reales irreducibles de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$. Si llamamos I^i, T^i_a y M^i_u a las proyectividades lineales de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}_i}$ dadas por las matrices*

$$M_{I^i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; M_{T^i_a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \; a = a_0 + \xi a_1 \in \mathbb{K}_i$$

$$M_{M^i_u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix} \; u = u_0 + \xi u_1 \in \mathbb{K}_i^*$$

y C^i a la proyectividad semilineal de matriz identidad y automorfismo conjugación. Se tiene que existen proyectividades de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, $\widetilde{I}^i$, $\widetilde{T}^i_a$, $\widetilde{M}^i_u$ y $\widetilde{C}^i$ que dejan invariante a la cuádrica $[Q_i]$ y cumplen que

1. $$\widetilde{I}^i|_{[Q_i]\setminus(P^{\perp}\cup P'^{\perp})} = \alpha_P^{-1} \circ I^i \circ \alpha_P$$

2. $$\widetilde{T}^i_a|_{[Q_i]\setminus P^{\perp}} = \alpha_P^{-1} \circ T^i_a \circ \alpha_P$$

3.

$$\widetilde{M_u^i}|_{[Q_i]\setminus P^\perp} = \alpha_P^{-1} \circ M_u^i \circ \alpha_P$$

4.

$$\widetilde{C^i}|_{[Q_i]\setminus P^\perp} = \alpha_P^{-1} \circ C^i \circ \alpha_P$$

Nota 8 *Este lema muestra la relación existente entre los pares recta proyectiva - cuádrica ($\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$,$[\mathcal{S}]$), ($\mathbb{P}^1_{\mathbb{M}}$,$[\mathcal{H}]$) y ($\mathbb{P}^1_{\mathbb{D}}$,$[\mathcal{D}]$). A continuación vamos a ver que esa relación es más estrecha, ya que de hecho ambos objetos son analíticamente equivalentes*

Teorema 2 *Se tiene que*

- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ *es analíticamente difeomorfo a* $[\mathcal{S}]$
- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{M}}$ *es analíticamente difeomorfo a* $[\mathcal{H}]$
- $\mathbb{P}^1_{\mathbb{D}}$ *es analíticamente difeomorfo a* $[\mathcal{D}] \setminus V_{[\mathcal{D}]}$

`Demostración`

En lo que sigue la pareja $(\mathbb{K}, [Q])$ será $(\mathbb{C}, [\mathcal{S}])$ o $(\mathbb{M}, [\mathcal{H}])$ o $(\mathbb{D}, [\mathcal{D}])$.
Sean $\psi_1 = Id_{\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}}$,

$$\begin{array}{rccc} \psi_2 : & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ & [\alpha_0, \alpha_1] & \longmapsto & [\alpha_1, \alpha_0] \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \psi_3 : & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} \\ & [\alpha_0, \alpha_1] & \longmapsto & [\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_0] \end{array}$$

estas tres aplicaciones cumplen que $\psi_i(U_i) = U_1$ y son proyectividades lineales de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$ con matrices asociadas

$$Id, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente, por lo tanto $\psi_1 = Id$, $\psi_2 = I^i$ y $\psi_3 = I^i \circ T^i_{-1}$ y las proyectividades de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, $\widetilde{\psi}_1 = Id$, $\widetilde{\psi}_2 = \widetilde{I^i}$ y $\widetilde{\psi}_3 = \widetilde{I^i} \circ \widetilde{T^i_{-1}}$ verifican

$$\widetilde{\psi_i}|_{\alpha_P^{-1}(U_1 \cap U_i)} = \alpha_P^{-1} \circ \psi_i \circ \alpha_P$$

De esta forma, se tiene que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathbb{P}^1_{\mathbb{K}} & \longrightarrow & [Q] \\ & X \in U_i & \longmapsto & \widetilde{\psi}_i^{-1} \circ \alpha_P^{-1} \circ \psi_i(X) \end{array}$$

es un difeomorfismo analítico.

Bibliografía

[1] S. Mazuelas Franco, *Proyecciones estereográficas y Geometrías en el plano*. Boletín de la Sociedad Puig Adam, **75** (2007), págs. 38–55.

[2] S. Mazuelas Franco, *R-álgebras de dimensión 2 y métricas del plano real*, Boletín de la Sociedad Puig Adam, **78** (2008), págs. 46–62.

[3] J.M. Aroca, M.J. Fdez. Bermejo, *Notas de geometría proyectiva*, Preprint U.V.A, 2003.

[4] Encyclopédie des Sciences Mathématiques Pures et Appliquées, *Tome III (premier volume) Fondements de la Géométrie*, Ed. Jacques Gabay, 1991.

[5] F. Klein, *Geometría elemental desde un punto de vista superior*, Ed. CSIC Madrid, 1954.

[6] F. Klein, *Über die Sogenannte nicht Euklidische Geometrie*, Math. Ann., **4** (1871), págs. 254–305.

[7] F. Klein, *Vorlesungen Über nicht Euklidische Geometrie*, Chelsea New York, 1967 (Reedición).

[8] A. Cayley, *A Sixth Memoir upon Quartics*, Phil. Trans. Royal Society London, **149** (1859), págs. 61–90.

[9] J. Rey Pastor, *Fundamentos de la Geometría Proyectiva Superior*, Junta para la Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas, 1916.

Reseña de software: Las matemáticas en MAX, la distribución de software libre de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid

Ismail Alí Gago
Área de Tecnologías de la Información y la Comunicación
Dirección General de Infraestructuras y Servicios
Consejería de Educación. Comunidad de Madrid
Coordinador del Grupo de Desarrollo MAX: MAdrid_linuX
ismail.ali@madrid.org

Fernando Lisón Martín
IES Juan Carlos I. Ciempozuelos. Madrid
Miembro del Grupo de Desarrollo MAX: MAdrid_linuX
fernando.lison@educa.madrid.org

Abstract

In this paper we show the free software distribution elaborated by the Consejería de Educación of the Comunidad Autónoma de Madrid, called MAX. Its most distinctive feature is its strong educative nature, because it includes several environment for the elaboration of your own activities (Hot Potatoes, JClic, Malted...) and an extensive collection of specific applications of many of the curriculum areas of the non-university teachings.

Introducción

Desde finales del año 2002, y casi coincidiendo con el nacimiento del Área de Tecnologías de la Información y la Comunicación de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, se han venido desarrollando iniciativas para la incorporación del software libre al sistema educativo madrileño. Una de estas

iniciativas ha sido el desarrollo de una distribución propia dirigida específicamente al entorno educativo.

Así durante el curso 2003-2004 nace MAX, la distribución GNGU/Linux de Madrid. En nuestra distribución siempre se ha puesto especial énfasis en incorporar todas aquellas aplicaciones necesarias para impartir los contenidos de Informática incorporados en los currícula de la enseñanza no universitaria y aquellas aplicaciones educativas y entornos de desarrollo que permitan, al profesorado no especialista, la utilización, la elaboración y distribución de contenidos educativos en formato digital. La distribución, en cada una de sus versiones, ha incorporado el sistema operativo y un conjunto de aplicaciones didácticas, respetando al máximo la configuración de los equipos informáticos de los posibles usuarios, así como su eventual convivencia con otros sistemas ya instalados.

Cuatro años después de aquella primera versión, se acaba de presentar la versión MAX 4.0 en la IX Feria Madrid es Ciencia, celebrada recientemente.

1. Objetivos

Con la distribución se pretenden alcanzar los siguientes objetivos:

4 Promover el uso de tecnologías de código abierto en los ámbitos educativos.

5 Facilitar a los centros educativos, y en general a los miembros de la comunidad educativa, software que contribuya a su integración en la sociedad de la información y del conocimiento.

6 Facilitar aplicaciones de calidad e interés educativo sin costes adicionales para el alumnado y el profesorado.

7 Disponer de un entorno de código abierto que se utilice de forma generalizada en procesos de formación e investigación.

2. Características generales

La versión 4 de MAX está basada en Ubuntu Hardy 8.04 y está disponible en tres soportes diferentes: DVD, CD y dispositivo USB.

En los tres soportes, MAX 4.0 puede funcionar en modo "live", es decir cargándose directamente en memoria sin tener que estar instalada en el disco duro del ordenador.

La versión más completa es la que se distribuye en DVD y que incluye, además, el instalador de las diferentes versiones:

- Versión de escritorio.
- Versión para equipos de tipo alumno de las aulas de informática dotadas por la Comunidad de Madrid a los centros.
- Versión para equipos de tipo profesor de las aulas de informática dotadas por la Comunidad de Madrid a los centros.
- Versión para servidores.
- Versión para servidor de clientes ligeros.
- Versión para dispositivos USB.

Al instalar desde el DVD de MAX 4.0, sea cual sea la opción elegida (excepto la instalación en dispositivo USB) nos instalará todas las aplicaciones de MAX 4.0 junto a los tres escritorios incluidos en MAX: Gnome, KDE y XFCE.

La versión en CD está pensada y dirigida a equipos con recursos limitados e incluye solamente el escritorio XFCE, pero todas las aplicaciones educativas.

La versión para dispositivos USB, denominada Nano MAX puede ejecutarse directamente desde un *pendrive* en equipos que dispongan de la posibilidad de arrancar desde un dispositivo *usb*, e incluye como escritorio predeterminado el escritorio XFCE.

Como avance importante, esta versión Nano incluye una *home* persistente que permite guardar los documentos generados, la posibilidad de instalar más aplicaciones, si el *pendrive* dispone de espacio suficiente, y de guardar configuraciones (tarjetas de red, impresoras, etc).

Como en las versiones anteriores, el usuario *alumno* está configurado en modo "quiosco", de manera que al cerrar la sesión se restauran todas las configuraciones que tengamos establecidas. Así, los alumnos se encuentran siempre el mismo entorno al iniciar su sesión en el aula de informática.

También en esta versión se incluyen aplicaciones de asistencia para personas con discapacidades sensitivas y/o motóricas, como *dasher*, *orca* y *gok*.

Como novedades más destacables de esta nueva versión de MAX podemos mencionar las siguientes:

- Puesta al día del kernel, acoplándonos directamente a los desarrollos mas recientes de Ubuntu, versión Hardy 8.04, lo que nos permitirá centrarnos en el desarrollo de los metapaquetes educativos de MAX.
- Inclusión de TCOS (Thin Client Operating System), sistema que tiene dos funcionalidad diferentes:
    - el funcionamiento y control de dispositivos de tipo terminales ligeros atendidos por un ordenador servidor
    - el control y supervisión de los equipos de un aula de informática (encendido y apagado, control de programas en ejecución, capturas de pantalla, control remoto por vnc...), que incluye, además. importantes funciones didácticas como la difusión de vídeo, la ejecución directa de programas, el envío de mensajes y archivos, la exposición de la pantalla del profesor o la de cualquier alumno en los demás equipos...
- Inclusión de Backharddi, sistema que permite la generación y restauración de imágenes y de maquetas de los equipos informáticos, tanto desde un DVD o

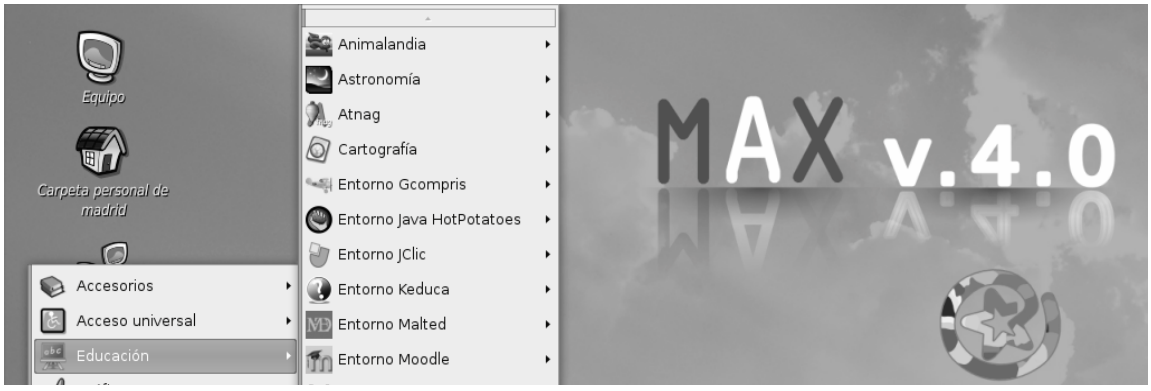
disco duro que contenga las imágenes como desde un servidor de red que almacene las imágenes.

- La actualización de todas las aplicaciones presentes en versiones anteriores a sus versiones más recientes, destacando, por ejemplo, la inclusión de Open Office 2.4, Moodle 1.9 o Firefox 3 (en versión beta), y las aplicaciones de generación de contenidos JClic, Hot Potatoes, Squeak, Malted, etc.

- La detección del hardware más moderno: pantallas táctiles, Tablet PCs, lectores de huella digital, redes inalámbricas de tipo N y, en la versión de servidor se incluye soporte para equipos con tecnología de 64 bits.

3. Aplicaciones matemáticas

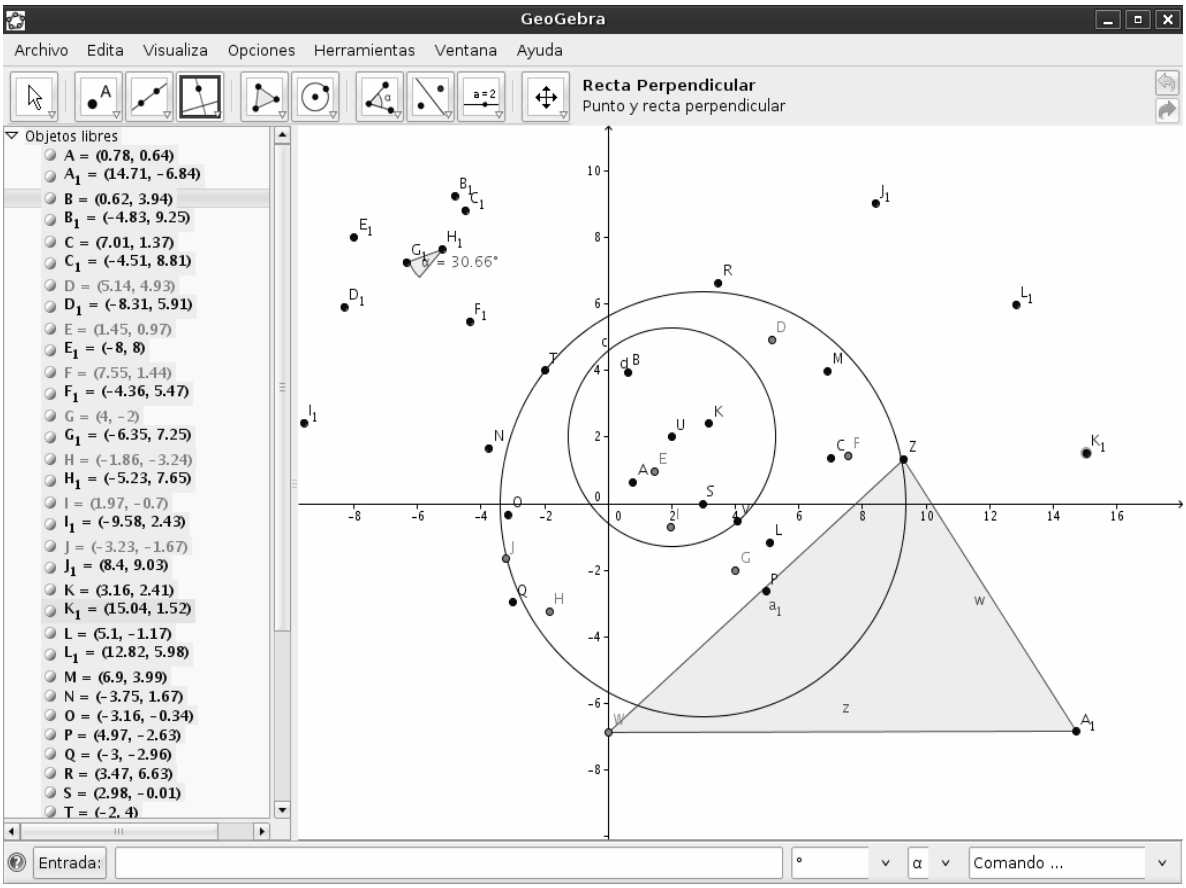
El área de Matemáticas tiene su propio submenú dentro del menú Educación de MAX 4.0.. Se han incluido las siguientes aplicaciones.



3.1. Geogebra

Por un lado, es un sistema de geometría dinámica que permite realizar construcciones con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas y con funciones que después se pueden modificar dinámicamente.

Por otra parte se pueden introducir ecuaciones y coordenadas directamente, de manera que maneja variables vinculadas a números, vectores y puntos, permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un amplio repertorio de comandos de análisis matemático para identificar puntos singulares de las funciones.

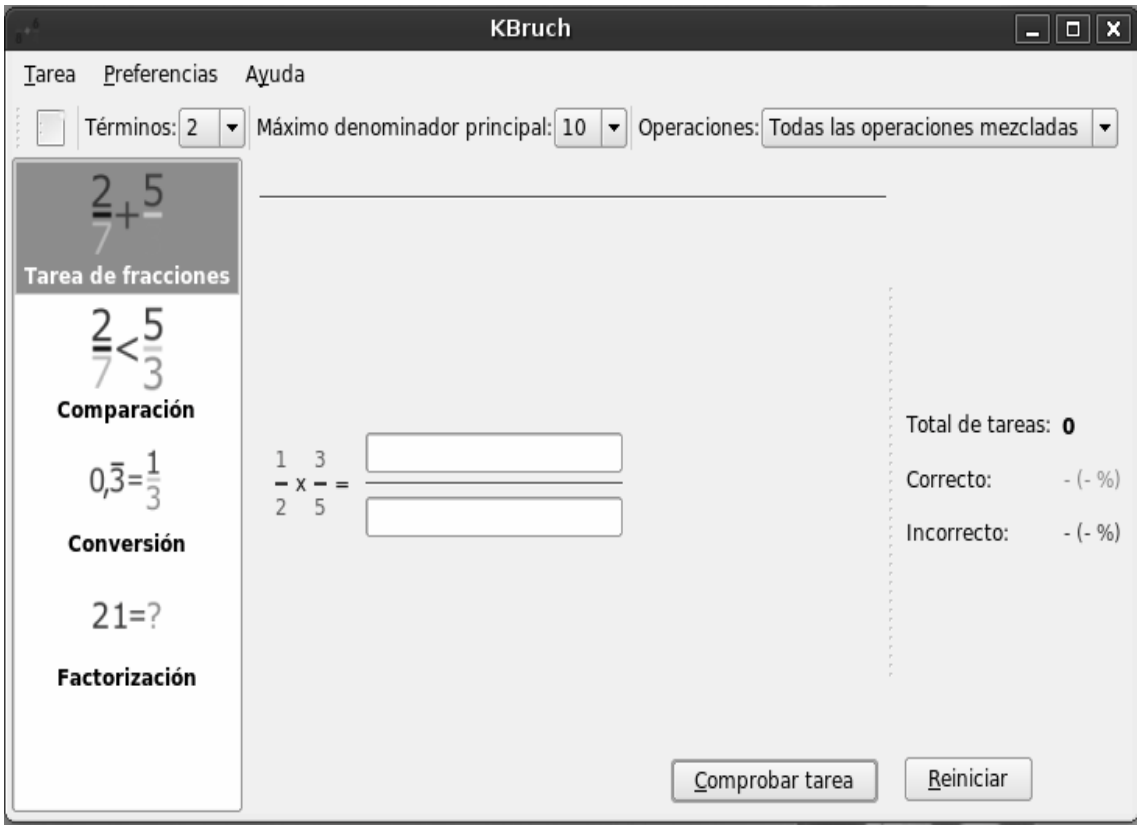


3.2 KBruch

Es un pequeño programa para practicar cálculos con fracciones. El programa genera una tarea y el usuario debe resolverla. Se comprueba la entrada del usuario y se da información sobre ella. También se lleva la cuenta de los ejercicios intentados y resueltos correctamente.

Se ofrecen 4 tipos de ejercicios diferentes:

- resolver una operación con fracciones;
- determinar cual de las dos fracciones dadas es mayor;
- convertir un número en una fracción;
- factorizar un número dado en sus factores primos.

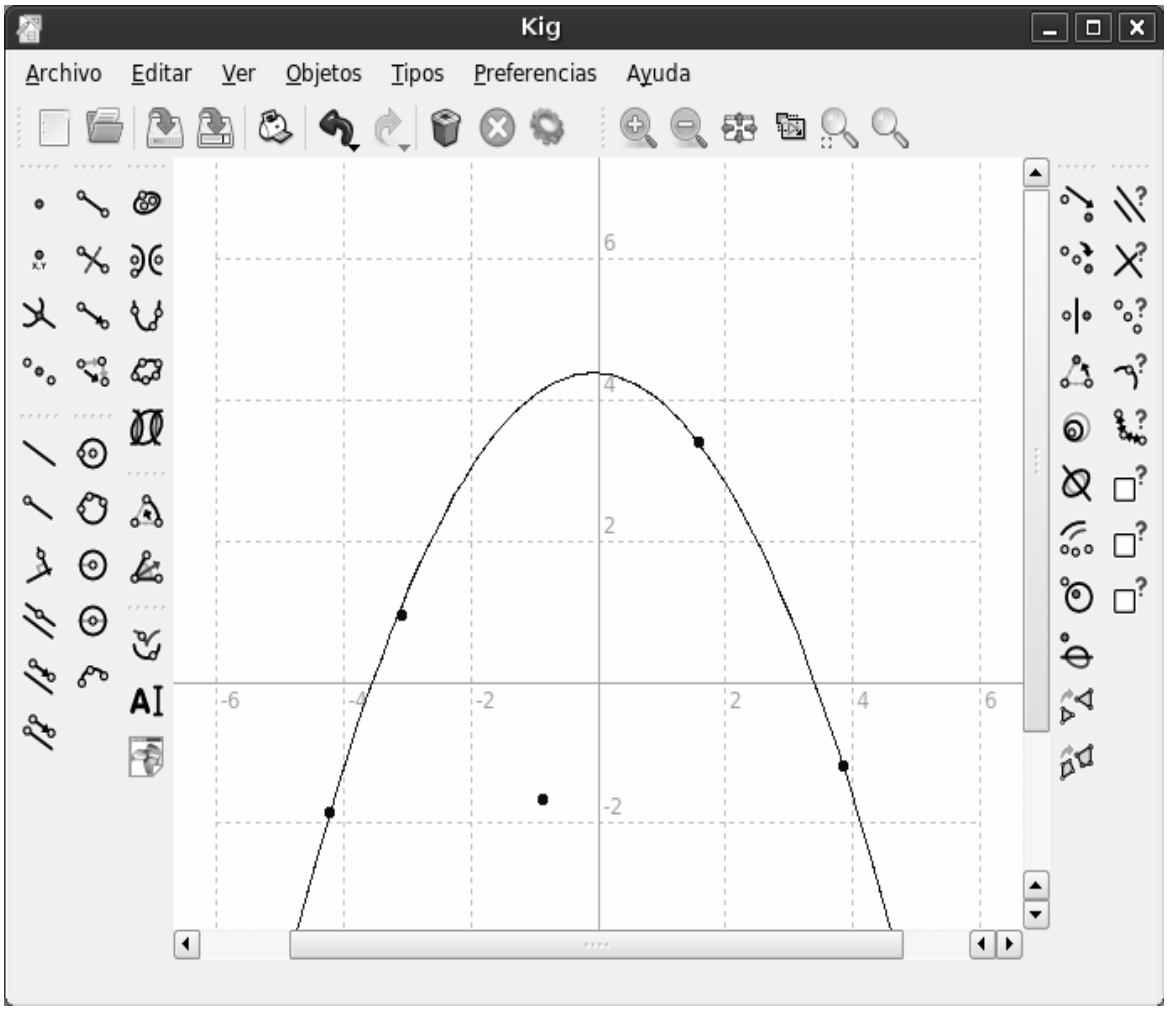


3.3. Kig

Es una aplicación de geometría interactiva que intenta servir para dos propósitos:

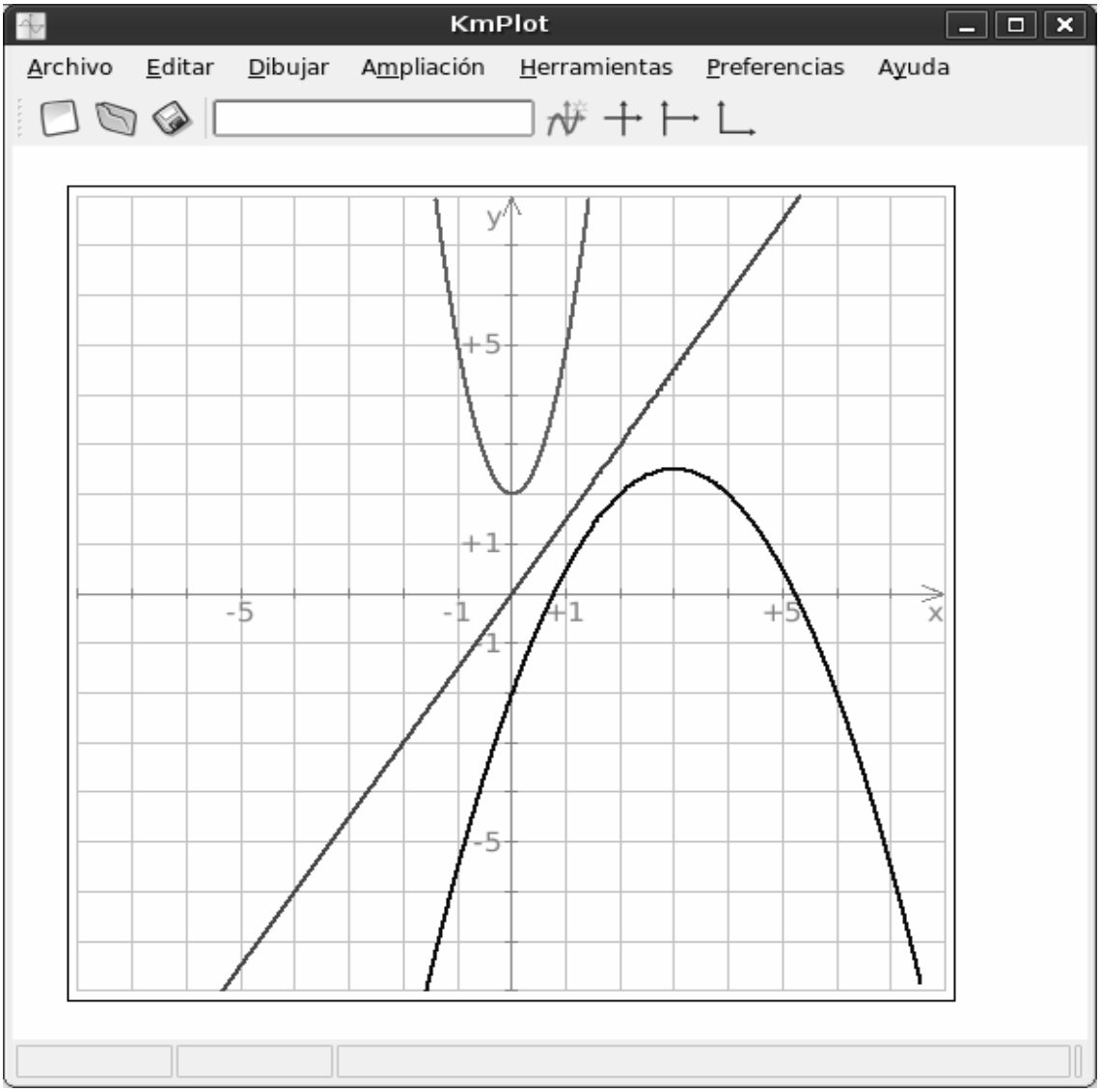
Permitir que los estudiantes exploren figuras y conceptos matemáticos por medio del ordenador.

Servir como editor visual para dibujar figuras matemáticas e incluirlas en otros documentos.



3.4. KmPlot

Es un trazador de funciones matemáticas que, entre otras capacidades, puede trazar diferentes funciones de forma simultánea y combinar sus elementos para construir nuevas funciones.



Admite funciones con parámetros y funciones con coordenadas polares. Hay varios modos de cuadrícula disponibles. Los trazados se pueden imprimir de forma muy precisa y correctamente escalados.

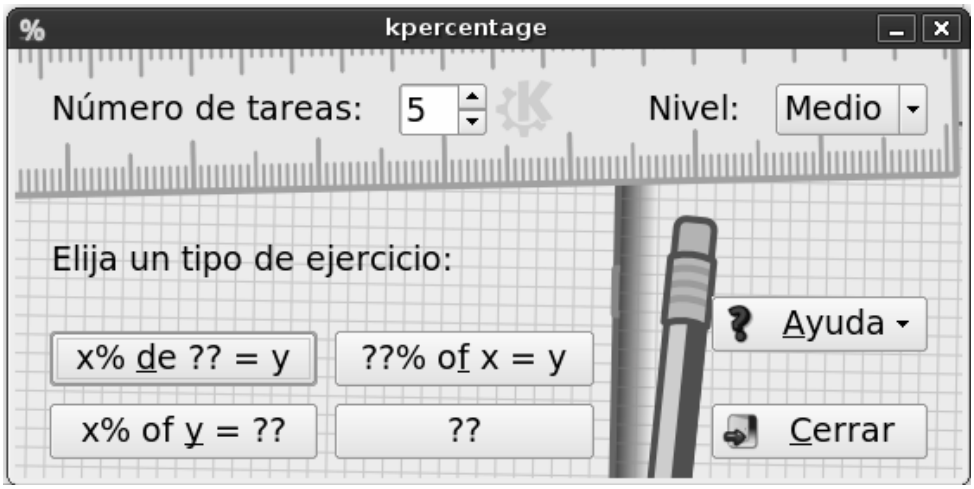
KmPlot también proporciona algunas características numéricas y visuales como:

- Rellenar y calcular el área entre el gráfico y el primer eje.
- Encontrar los valores máximo y mínimo.
- Cambiar parámetros de la función dinámicamente.
- Dibujar funciones derivadas e integrales.

Estas características ayudan a aprender las relaciones entre las funciones matemáticas y su representación gráfica en un sistema de coordenadas.

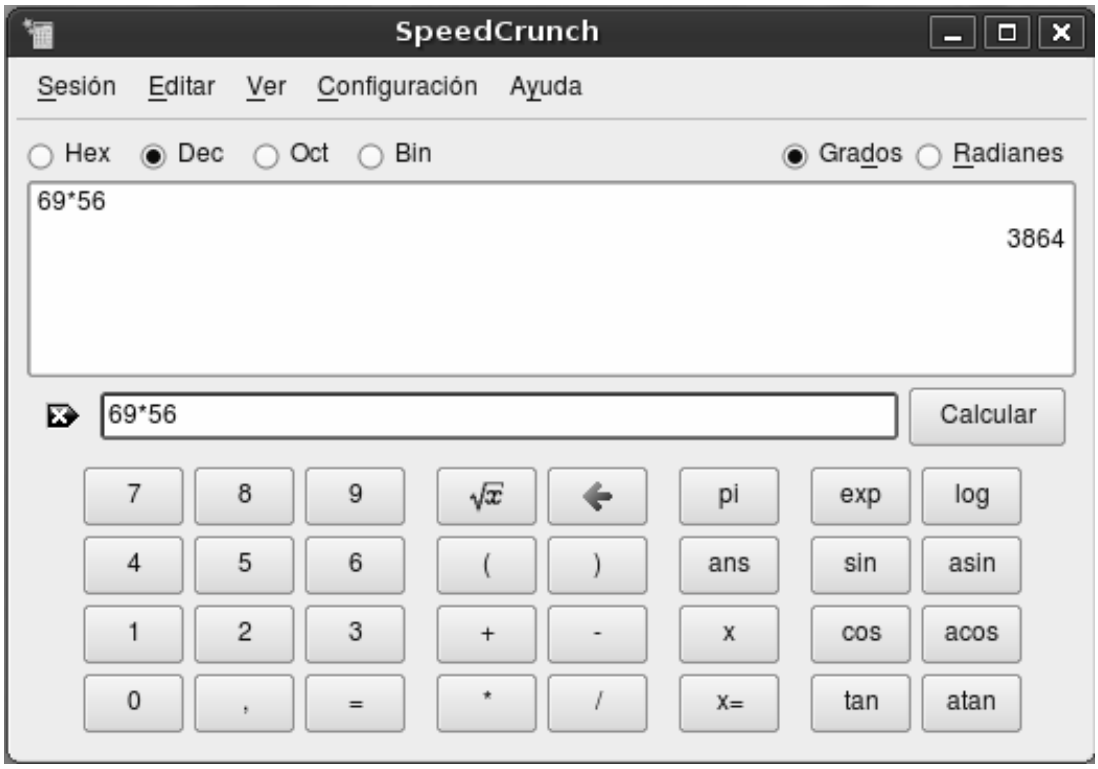
3.5. KPercentage

Es una pequeña aplicación matemática que ayuda a los alumnos a mejorar sus habilidades en el cálculo de porcentajes. Hay una sección especial de entrenamiento para las tres tareas básicas. Por último el alumno puede seleccionar el modo aleatorio, en el que se mezclan las tres tareas al azar.



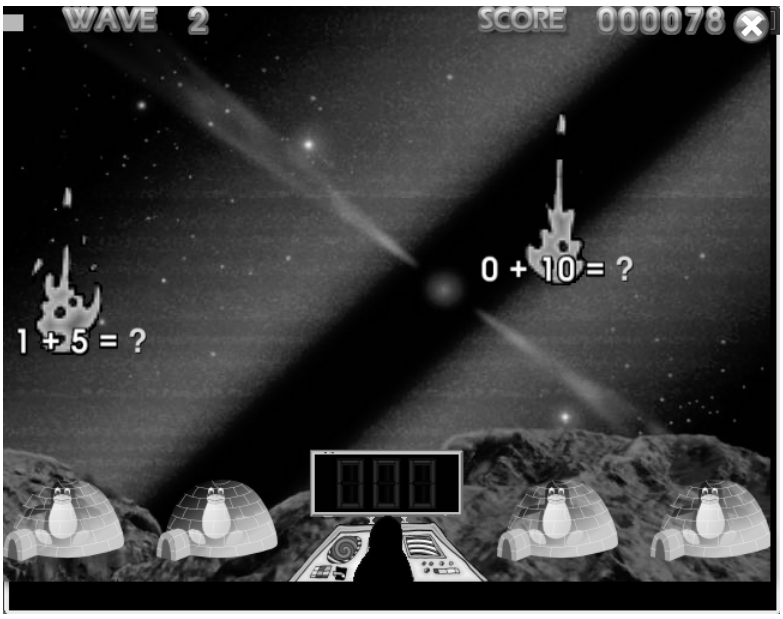
3.6. SpeedCrunch

Es una calculadora científica con hasta 50 decimales de precisión. Permite guardar las sesiones y almacenar las operaciones ya realizadas; incorpora lista con funciones, constantes, variables, fórmulas de áreas y de volúmenes y autocompletado inteligente. Además, la interfaz puede simplificarse para adaptarse a las necesidades de cada uno.



3.7. TuxMath

Es un vídeo juego para practicar el cálculo rápido. Terribles cometas amenazan nuestras edificios o iglús y para neutralizarlos hay que teclear el resultado de la operación que acompaña a los cometas. Las operaciones son configurables para adaptarla a las operaciones que se quieran repasar.

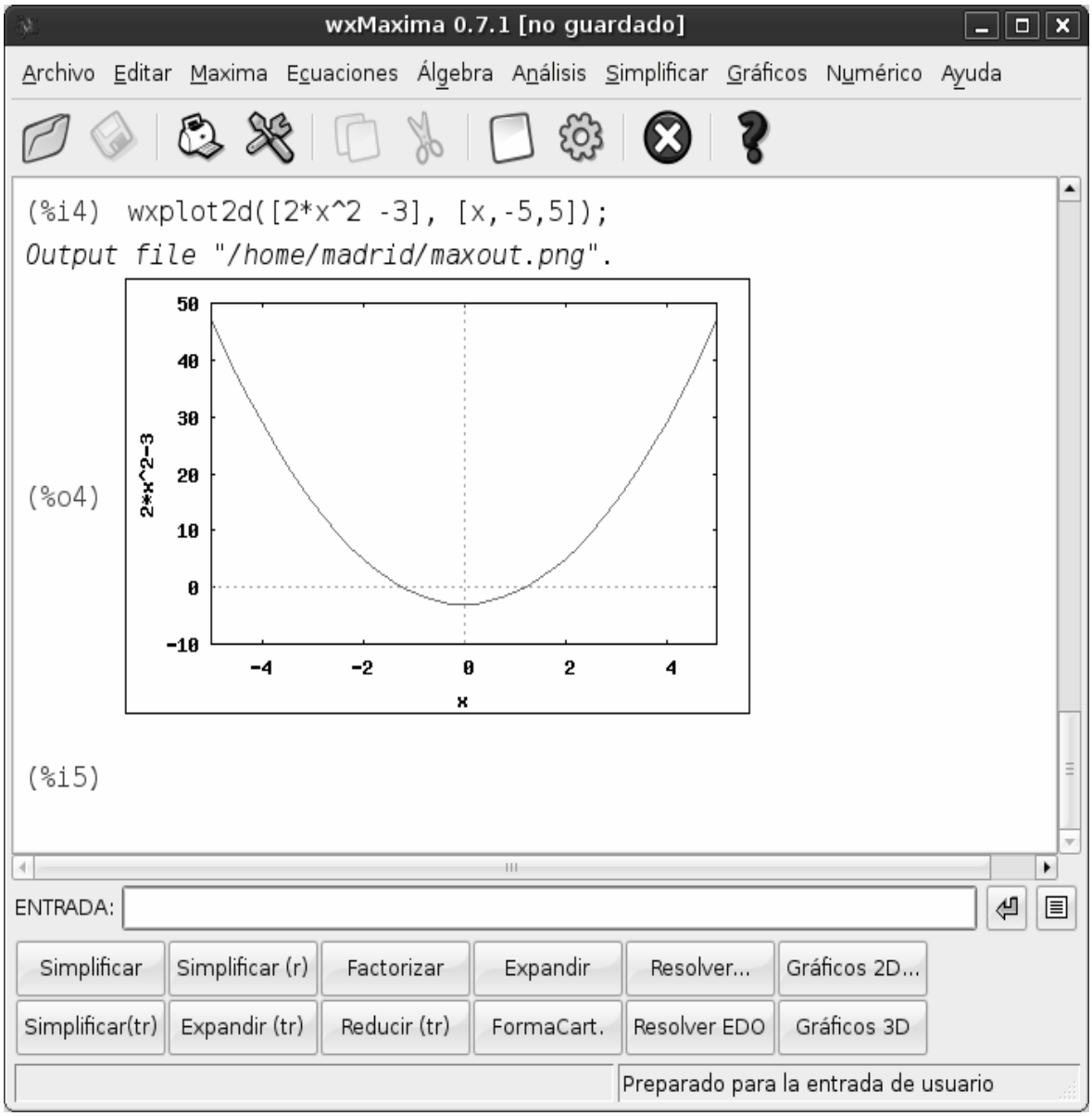


3.8 wxMaxima

Es la interfaz gráfica de Maxima, un sistema de álgebra computacional que cuenta con un amplio conjunto de funciones para hacer manipulación simbólica de polinomios, matrices, funciones, racionales, integración, derivación, gráficos en 2D y 3D, números en aritmética exacta y en coma flotante, series de potencias...

Además de estas aplicaciones específicas, pensamos que también pueden tener cabida en el área de matemáticas otros programas, como:

- Los incluidos en el submenú Astronomía: Celestia, KStars, StarPlot y Stellarium;
- los numerosos entornos de programación incluidos en el menú Programación: KDevelop, Anjuta, Gambas2, NetBeans...
- algunos de los juegos incluidos en el menú Juegos, como Sudoku o Tetravex
- las hojas de cálculo incluidas en el menú Oficina: Gnumeric y OpenOffice Calc.



4. Obtener MAX 4.0

La Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid ha puesto en marcha diferentes vías para hacer llegar esta distribución al mayor número de usuarios que le sea posible.

Para ello, y siguiendo la línea de productos precedentes, se va a distribuir por las siguientes vías:

- Edición de una tirada de DVDs de MAX 4.0.
- Instalación y configuración en todos los equipos de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid.
- Publicación de las imágenes ISO de las versiones de MAX 4.0 en DVD-Live, Nano MAX 4.0 para USB, y MAX 4.0 en CD-Live, accesibles desde dos puntos distintos:
  - Educamadrid:
    `ftp://max.educa.madrid.org/isos/MaX40final/`
  - Rediris:
    `ftp://ftp.rediris.es/mirror/MAX/MaX40final/`

5. Soporte

Paralelamente a la distribución, el grupo de desarrollo de MAX está trabajando intensamente en la generación de todo tipo de documentación, manuales y tutoriales, quedando todos ellos disponibles a través del curso de autoformación sobre MAX disponible en el Aula virtual de Educamadrid:

`http://aulavirtual2.educa.madrid.org/course/view.php?id=41`

(ver pantalla superior en la página siguiente)

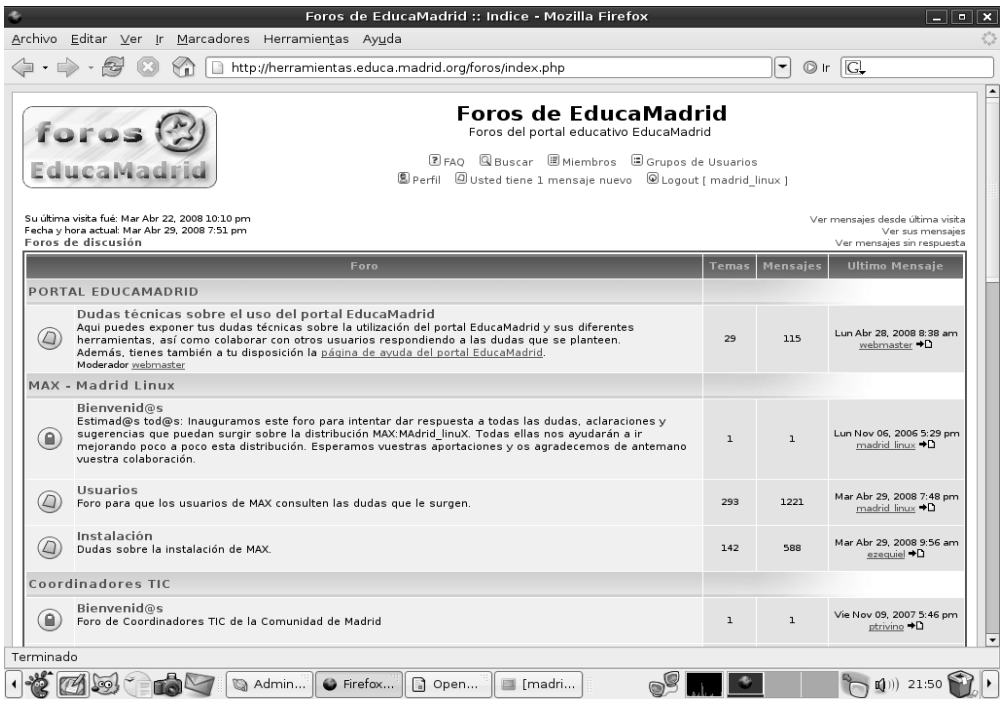
Además existe un foro para los usuarios de MAX que presenta una actividad creciente, lo que certifica la buena salud de la distribución:

`http://herramientas.educa.madrid.org/foros/index.php`

(ver pantalla inferior en la página siguiente)

También se está preparando un curso sobre Software libre en la Educación que formará parte de la oferta formativa a distancia que se ofrecerá a partir del próximo curso académico en el Aula virtual de Educamadrid.

Curso: MAX: MAdrid_linuX - Mozilla Firefox
Archivo Editar Ver Historial Marcadores Herramientas Ayuda
http://aulavirtual2.educa.madrid.org/course/view.php?id=41
Aula Virtual de EducaMadrid
Usted se ha autentificado como Fernando Lisón Martín (Salir)
AulaVirtual ► MAX_SL
Cambiar rol a...
Activar edición
MAX v.4.0
Curso sobre la distribución GNU/Linux de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid
Personas
Participantes
Administración
Activar edición
Configuración
Asignar roles
Grupos
Copia de seguridad
Restaurar
Importar
Reiniciar
Informes
Preguntas
Diagrama de temas
Aplicaciones para Max 4.0
Noticias y novedades, sitios y páginas web interesantes relacionadas con MAX y el SL
MAX 4.0
Lanzamiento de MAX 4.0
Manual de Instalación de MAX 4.0
Guía de Referencia de MAX 4.0
Manual de Telefonia IP
Manual del administrador de TCOS
MAX 3.1
Calendario
julio 2008
Lun Mar Mié Jue Vie Sáb Dom
1 2 3 4 5 6
7 8 9 10 11 12 13
14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27
28 29 30 31
Eventos globales
Eventos de curso
Eventos de grupo
Eventos de usuario
Novedades
Agregar un nuevo tema...
(Sin novedades aún)
Terminado


Foros de EducaMadrid :: Indice - Mozilla Firefox
Archivo Editar Ver Ir Marcadores Herramientas Ayuda
http://herramientas.educa.madrid.org/foros/index.php
foros EducaMadrid
Foros de EducaMadrid
Foros del portal educativo EducaMadrid
FAQ Buscar Miembros Grupos de Usuarios
Perfil Usted tiene 1 mensaje nuevo Logout [madrid_linux]
Su última visita fué: Mar Abr 22, 2008 10:10 pm
Fecha y hora actual: Mar Abr 29, 2008 7:51 pm
Foros de discusión
Ver mensajes desde última visita
Ver sus mensajes
Ver mensajes sin respuesta
Foro
Temas
Mensajes
Ultimo Mensaje
PORTAL EDUCAMADRID
Dudas técnicas sobre el uso del portal EducaMadrid
Aqui puedes exponer tus dudas técnicas sobre la utilización del portal EducaMadrid y sus diferentes herramientas, así como colaborar con otros usuarios respondiendo a las dudas que se planteen.
Además, tienes también a tu disposición la página de ayuda del portal EducaMadrid.
Moderador webmaster
29 115 Lun Abr 28, 2008 8:38 am webmaster
MAX - Madrid Linux
Bienvenid@s
Estimad@s tod@s: Inauguramos este foro para intentar dar respuesta a todas las dudas, aclaraciones y sugerencias que puedan surgir sobre la distribución MAX:MAdrid_linuX. Todas ellas nos ayudarán a ir mejorando poco a poco esta distribución. Esperamos vuestras aportaciones y os agradecemos de antemano vuestra colaboración.
1 1 Lun Nov 06, 2006 5:29 pm madrid_linux
Usuarios
Foro para que los usuarios de MAX consulten las dudas que le surgen.
293 1221 Mar Abr 29, 2008 7:48 pm madrid_linux
Instalación
Dudas sobre la instalación de MAX.
142 588 Mar Abr 29, 2008 9:56 am ezequiel
Coordinadores TIC
Bienvenid@s
Foro de Coordinadores TIC de la Comunidad de Madrid
1 1 Vie Nov 09, 2007 5:46 pm ptrivino
Terminado
Admin... Firefox... Open... [madri... 21:50

6. Autores

No queremos terminar esta reseña sin mencionar que MAX 4.0, al igual que las versiones anteriores, ha sido desarrollada por un grupo de trabajo formado por docentes en activo de diversas áreas y niveles educativos y por desarolladores, y entre todos desempeñan las funciones de traductores, documentadores, artistas gráficos y probadores.

Entre estas personas tenemos que destacar a Eduardo Plá Vall, que recientemente nos ha dejado, pero que siempre estará con nosotros.

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57,

58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79 y 80.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.