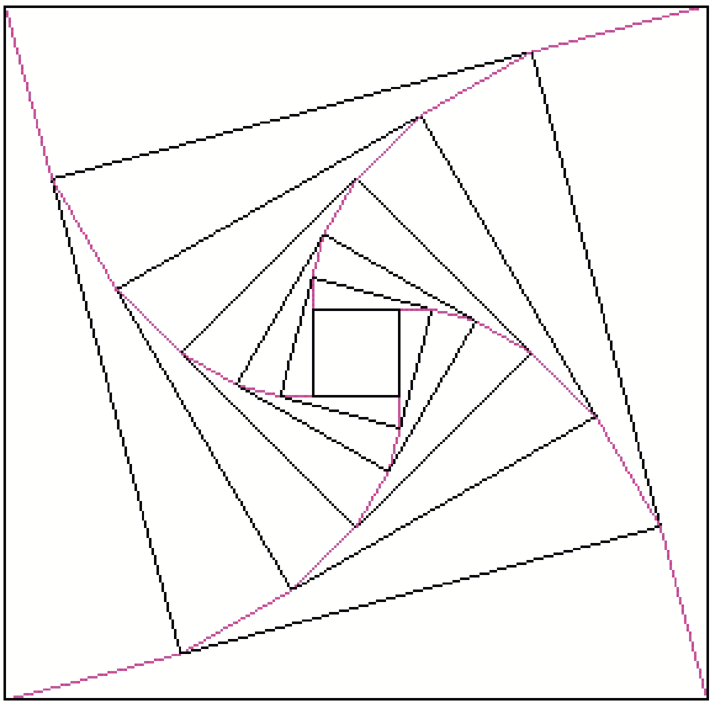
# SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



**BOLETÍN N.º 79**
**JUNIO DE 2008**

# ÍNDICE

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE
ENTRE LOS SOCIOS DE LA
SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en**
**Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261
Depósito Legal: M-7762-1995
Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Telf.: 91 611 59 94 – e-mail:loureiro@graficasloureiro.es

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Algebra) Despacho 3005
Rector Royo Villanova, s/n - 28040 - Madrid
Teléf.: 91 394 6248

Todos lo relativo a publicación en el Boletín (de artículos, etc), debe hacerse a través del correo electrónico: puigadam@mat.ucm.es

Página web de la Sociedad “Puig Adam”:
http://www.sociedadpuigadam.es

## JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

| | |
|---|---|
| JULIO FERNÁNDEZ BIARGE | (Redacción de publicaciones) |
| ENRIQUE RUBIALES CAMINO | (Relaciones Institucionales) |
| EUGENIO ROANES LOZANO | (Gestión de publicaciones) |
| JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ | (Actividades y concursos) |

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
ANTONIO HERNANDO ESTEBAN

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

# Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2008 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 29 de marzo de 2008, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil ocho.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

## 1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea de 14 de abril de 2007, que queda aprobada por unanimidad.

## 2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

Se recuerda que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 76, 77 y 78 del Boletín.

Hemos recibido un escrito de la American Mathematical Society, según el cual ante el exceso de original, Mathematical Reviews ha dejado de recensionar los artículos publicados en nuestro Boletín.

El Presidente da la palabra a D. Joaquín Hernández para que informe de los *Concursos Puig Adam e Intercentros*:

- *Concurso "Puig Adam"*: Se celebro el sábado 9 de junio de 2007, con buena participación, unos 100 estudiantes, destacando que siguen viniendo alumnos de Galicia, Requena y de la Comunidad de Castilla León. Este año se celebrará el 7 de junio.
- *Concurso "Intercentros":* Al igual que otros años, se celebró el penúltimo sábado de noviembre, con una participación de 250 estudiantes. Resultó ganador el IES José Luís San Pedro, 2º Liceo Francés y 3º Nuestra Señora

de las Maravillas, con la participación de 40 Centros de la Comunidad de Madrid.

También se informa de que el próximo sábado 19 de abril se celebrará el XII Concurso de Primavera de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, que está teniendo un gran éxito como en años anteriores. Este año participarán más de 3000 alumnos en la 2ª fase del Concurso, que se celebra en la Facultad de Matemáticas de la UCM. Hay que destacar que algunos miembros del equipo organizador del Concurso son miembros de la Sociedad.

## 3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. A la vista del informe realizado por el Tesorero se desprende que la cuota social es ya insuficiente para sufragar el presupuesto de gastos, en el que la parte fundamental viene constituida por la publicación del Boletín. En consecuencia, el Presidente, a petición del Tesorero, propone un incremento de 9 € de la cuota de socio que corresponde a nuestra Sociedad. Hasta el momento, la cuota global era de 40 € y constaba de dos partes: desde hace muchos años la de nuestra Sociedad es de 21 € y la parte que se abona a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas es desde el año pasado de 19 €. Por lo tanto, la propuesta supone una cuota global de 49 €, donde 30 € son la de la Sociedad, y 19 € de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Se somete la propuesta a aprobación. Se aprueba por unanimidad.

También se someten a aprobación las cuentas desde el 14 de abril de 2007 hasta 29 de marzo de 2008. Pasando a la votación, quedan aprobadas por unanimidad.

## 4. Elección de nuevos cargos directivos.

El Presidente manifiesta que en la Asamblea del 17 de abril de 2004 se renovó el cargo de Secretario y por tanto en el año 2008 procede su cese y nombramiento de nuevo cargo. Después de tomar la palabra los distintos miembros de la Asamblea, se decide por unanimidad, nombrar Secretario de la Sociedad a D. José Mª Sordo Juanena.

También se propone ocupar la plaza de Bibliotecario que estaba vacante. Después de algunas intervenciones de los asistentes, se procede a la votación de las distintas propuestas, recayendo por unanimidad dicho nombramiento en la persona de D Antonio Hernando Esteban.

### 5. Asuntos de trámite:

No hubo.

### 6. Ruegos y preguntas:

La Federación nos manda 10 ejemplares de la Revista Suma. Su finalidad es que no se quede ninguno de nuestros socios sin recibirla. Si alguien no la recibe en su domicilio, puede pasar por nuestra Sede para recogerla.

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las trece y treinta minutos del día de la fecha arriba indicada.

Vº Bº El Presidente El Secretario

# Nota sobre el incremento de la cuota anual

Como se expone en el Acta de la Asamblea 2008, para cursos sucesivos la cuota anual de la Sociedad pasa a ser de 49 €. De ellos, 19 € son para la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, que distribuye a nuestros socios la Revista Suma, y 30 € son para nuestra Sociedad, que distribuye a nuestros socios el Boletín de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta última parte de la cuota llevaba muchos cursos sin incrementarse, por lo que era insostenible mantenerla inalterada por más tiempo.

# XLIV Olimpiada Matemática Española

**Valencia, 27 – 30 de marzo de 2008**

Durante el último fin de semana de marzo, entre los días 27 y 30, se ha celebrado en Valencia la fase nacional de la XLIV Olimpiada Matemática Española. En la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia, se reunió para realizar las pruebas el grupo de ganadores de las fases locales: un total de 119 estudiantes de toda la geografía nacional, a los que acompañaban sus profesores. Tenemos que agradecer a los organizadores locales, encabezados por el Decano de la Facultad, Rafael Crespo, y por el Delegado de la Olimpiada, José Ramón Martínez-Verduch, sus esfuerzos para que todo funcionara a la perfección y todos pudiéramos disfrutar de la Olimpiada en la primavera valenciana recién estrenada.

El día 27, en el acto de apertura, celebrado en el magnífico Paraninfo de la Universidad, los estudiantes recibieron el diploma que les correspondía como ganadores de la primera fase de la OME. Después, entre examen y examen, tuvieron ocasión de pasearse por la Valencia antigua, mientras que en la tarde del sábado, mientras los sufridos correctores terminaban su trabajo, visitaron la Ciudad de las Artes y de las Ciencias.

En la dirección www.uv.es/facmat/Olimpiada08/ pueden encontrarse los cuatro Boletines, las OME News, que se elaboraron durante la Olimpiada.

Estos son los problemas que se propusieron. Cada problema se califica sobre 7 puntos.

## Problema 1

Halla dos enteros positivos $a$ y $b$ conociendo su suma y su mínimo común múltiplo. Aplícalo en el caso de que la suma sea $3972$ y el mínimo común múltiplo $985928$.

*Media de todos:* 0,94
*Media de los oros:* 5

## Problema 2

Prueba que para cualesquiera números reales $a, b$ tales que $0 < a, b < 1$, se cumple la desigualdad siguiente:

$$\sqrt{ab^2 + a^2 b} + \sqrt{(1-a)(1-b)^2 + (1-a)^2(1-b)} < \sqrt{2}.$$

*Media de todos:* 1,41
*Media de los oros:* 7

## Problema 3

Sea $p \geq 3$ un número primo. Se divide cada lado de un triángulo en $p$ partes iguales y se une cada uno de los puntos de división con el vértice opuesto. Calcula el número máximo de regiones, disjuntas dos a dos, en que queda dividido el triángulo.

*Media de todos:* 1,46
*Media de los oros:* 4,8

## Problema 4

Sean $p$ y $q$ dos números primos positivos diferentes. Prueba que existen enteros positivos $a$ y $b$, tales que la media aritmética de todos los divisores positivos del número $n = p^a q^b$ es un número entero.

*Media de todos:* 1,43
*Media de los oros:* 6

## Problema 5

Dada una circunferencia y en ella dos puntos fijos $A$, $B$, otro variable $P$ y una recta $r$; se trazan las rectas $PA$ y $PB$ que cortan a $r$ en $C$ y $D$ respectivamente. Determina dos puntos fijos de $r$, $M$ y $N$, tales que el producto $CM \cdot DN$ sea constante al variar $P$.

*Media de todos:* 0,59
*Media de los oros:* 3

## Problema 6

A cada punto del plano se le asigna un solo color entre siete colores distintos. ¿Existirá un trapecio inscriptible en una circunferencia cuyos vértices tengan todos el mismo color?

*Media de todos:* 0,47
*Media de los oros:* 5

En el Jardín Botánico tuvo lugar, en la noche del sábado, la proclamación de los ganadores de 2008. Recibieron Medalla de Oro los seis primeros clasificados, es decir:

- *Diego Izquierdo Arseguet*, 2º deBachillerato, Liceo Francés de Madrid.
- *Alejandro Gimeno Sanz*, 2º de Bachillerato, Colegio San José de Valladolid
- *Juan José Mdrigal Martínez*, 1º de Bachillerato, IES Marius Torres de Lleida
- *Arnau Messegué Buisán*, 2º de Bachillerato, IES Ciutat de Balaguer, de Balaguer (Lleida)
- *Gabriel Fürstenheim Milerud*, 2º de Bachillerato, IES Ramiro de Maeztu de Madrid
- *David Alfaya Sánchez*, 2º de Bachillerato, IES José Luis Sanpedro de Tres Cantos.

Clasificado en séptimo lugar, obtuvo la primera Medalla de Plata uno de los benjamines del grupo, *Moisés Herradón Cueto*, alumno de 4º de ESO en el Colegio Brains de Madrid.

Pero después de la Olimpiada de Matemáticas viene la de Física, y en ella resultó ganador Alejandro. Ante la incompatibilidad de participación en ambas Internacionales, ha optado por participar en la de Física, de manera que Moisés es el sexto miembro del equipo de Matemáticas en la Internacional de 2008, que como es sabido, comienza el próximo 10 de julio en Madrid. A ellos les toca pues jugar en casa, ser el equipo anfitrión, algo que difícilmente se repetirá, y desde luego nunca en un futuro próximo.

Entre los chicos madrileños, a los tres oros de Diego, Gabriel y David, repitiendo resultados del año pasado en Torrelodones, y a la plata de Moisés, se suman otras dos, de Andrés Rodríguez Reina (2º de Bachillerato, Colegio SEK Ciudalcampo) y Nabil Abderramán Elena (2º de Bachillerato, IES Ortega y Gasset), y el bronce de Jaime Roquero (1º de Bachillerato, Liceo Francés). Además, David Alfaya obtuvo también oro en física, y Gabriel Fürstenheim en Química, aunque han elegido quedarse en el equipo de matemáticas.

Resultados excelentes, en los que mucho tiene que ver el trabajo que con enorme generosidad y entrega realizan con ellos, sábado tras sábado, nuestros antiguos olímpicos, con Elisa Lorenzo y Hugo Fernández a la cabeza. Muchísimas gracias, chicos. ¡Qué satisfacción ver que tenemos el relevo asegurado!

**María Gaspar**

# XXII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

De nuevo la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas se ha celebrado en la vieja Europa, pero en esta ocasión, por primera vez en su historia, en Portugal. En Coimbra se reunieron 22 países: Argentina, Brasil, Bolivia, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, República Dominicana, Ecuador, El Salvador, España, Honduras, Méjico, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, Venezuela, y Mozambique, que nunca antes había participado.

El equipo español, con Salvador Villegas (Granada) como Jefe de Delegación, y Carles Romero (Barcelona) como Tutor, estuvo integrado por Diego Izquierdo Arseguet, Gabriel Fürstenheim Milerud, Glenier Bello Burguet y David Alfaya Sánchez.

Diego Izquierdo obtuvo Medalla de Oro, y Gabriel y David merecieron sendos bronces.

En septiembre, la Iberoamericana se celebrará en Brasil.

## Problema 1

Dado un entero positivo *m*, se define la sucesión $\{a_n\}$ de la siguiente manera:

$$a_1 = \frac{m}{2},\ a_{n+1} = a_n[a_n],\ \text{si } n \geq 1$$

Determinar todos los valores de *m* para los cuales $a_{2007}$ es el primer entero que aparece en la sucesión.
*Nota*: Para un número real *x* se define $[x]$ como el mayor entero que es menor o igual a *x*

## Problema 2

Sean *ABC* un triángulo con incentro *I* y $\Gamma$ una circunferencia de centro *I*, de radio mayor al de la circunferencia inscrita y que no pasa por ninguno de los vértices. Sean $X_1$ el punto de intersección de $\Gamma$ con la recta *AB* más cercano a *B*; $X_2, X_3$ los puntos de intersección de $\Gamma$ con la recta *BC* siendo $X_2$ más cercano a *B*, y

$X_4$ el punto de intersección de Γ con la recta *CA* más cercano a *C*. Sea *K* el punto de intersección de las rectas $X_1X_2$ y $X_3X_4$. Demostrar que *AK* corta al segmento $X_2X_3$ en su punto medio.

## Problema 3

Dos equipos, *A* y *B*, disputan el territorio delimitado por una circunferencia.

*A* tiene *n* banderas azules y *B* tiene *n* banderas blancas ($n \geq 2$, fijo). Juegan alternadamente y *A* comienza el juego. Cada equipo, en su turno, coloca una de sus banderas en un punto de la circunferencia que no se haya usado en una jugada anterior. Cada bandera, una vez colocada, no se puede cambiar de lugar.

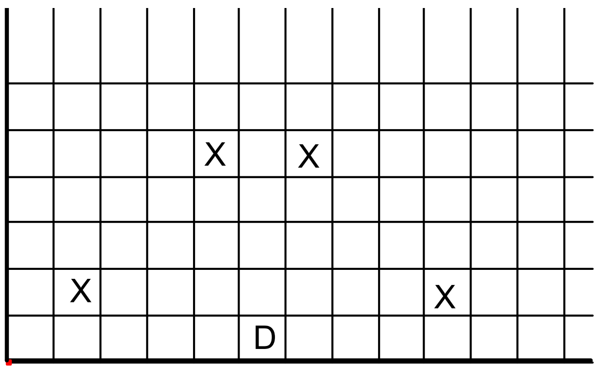
Una vez colocadas las 2*n* banderas se reparte el territorio entre los dos equipos.

Un punto del territorio es del equipo *A* si la bandera más próxima a él es azul, y es del equipo *B* si la bandera más próxima a él es blanca. Si la bandera azul más próxima a un punto está a la misma distancia que la bandera blanca más próxima a ese punto, entonces el punto es neutro (no es de *A* ni de *B*). Un equipo gana el juego si sus puntos cubren un área mayor que el área cubierta por los puntos del otro equipo. Hay empate si ambos cubren áreas iguales.

Demostrar que, para todo *n*, el equipo *B* tiene estrategia para ganar el juego.

## Problema 4

En un tablero cuadriculado de tamaño 19 x 19, una ficha llamada *dragón* da saltos de la siguiente manera: se desplaza cuatro casillas en una dirección paralela a uno de los lados del tablero y una casilla en dirección perpendicular a la anterior.




Desde D,el dragón puede saltar a una de las cuatro posiciones X

Se sabe que, con este tipo de saltos, el dragón puede moverse de cualquier casilla a cualquier otra.

La *distancia dragoniana* entre dos casillas es el menor número de saltos que el dragón debe dar para moverse de una casilla a otra.

Sea $C$ una casilla situada en una esquina del tablero y sea $V$ la casilla vecina a $C$ que la toca en un único punto.

Demostrar que existe alguna casilla $X$ del tablero tal que la distancia dragoniana de $C$ a $X$ es mayor que la distancia dragoniana de $C$ a $V$.

## Problema 5

Un número natural es *atrevido* si el conjunto de sus divisores, incluyendo al 1 y al $n$, se puede dividir en tres subconjuntos tales que la suma de los elementos de cada subconjunto es la misma en los tres. ¿Cuál es la menor cantidad de divisores que puede tener un número atrevido?

## Problema 6

Sea $F$ la familia de todos los hexágonos convexos $H$ que satisfacen las siguientes condiciones:

(a) Los lados opuestos de $H$ son paralelos;
(b) Tres vértices cualesquiera de $H$ se pueden cubrir con una franja de ancho $1$

Determinar el menor número real $l$ tal que cada uno de los hexágonos de la familia $F$ se puede cubrir con una franja de ancho $l$.
*Nota*: una franja de ancho $l$ es una región del plano comprendida entre dos rectas paralelas que están a distancia $l$ (incluidas ambas rectas paralelas).

**María Gaspar**

# XII Concurso de Primavera de Matemáticas

## El sábado 19 de abril se celebró "La gran fiesta de las matemáticas" de la Comunidad de Madrid en la Facultad de Matemáticas de la UCM

Año tras año, cuando llega la primavera, los estudiantes madrileños interesados por las matemáticas, saben que se acerca el *Concurso de Primavera*. Una cita abierta a todos los estudiantes, desde 5º de primaria hasta 2º de bachillerato.

Un grupo de doce profesores de la enseñanza pública organiza este concurso con toda la ilusión y muchísimo esfuerzo para inculcar en nuestros adolescentes el gusto y la pasión por las matemáticas.

La prueba está dividida en dos fases: la primera se realizó el 27 de febrero en cada centro escolar y sirvió para elegir a sus representantes que acudieron el sábado 19 abril a la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, donde se realizó la segunda fase, ya definitiva.

Este año se han inscrito 414 centros educativos. En la primera fase participaron 26.124 alumnos y en la segunda, 2.837. Y año tras año va aumentando la participación.

Todo ello convierte a este concurso en la concentración matemática más numerosa de nuestro país.

Surgen, casi de manera natural, dos preguntas.

*¿Qué tienen las matemáticas para ser capaces de convocar a casi 3.000 estudiantes un sábado por la mañana?* La respuesta es bien sencilla: son matemáticas, punto. No hay que buscar grandes premios ni artilugios ni disfraces. Las matemáticas han sido y serán siempre un reto para nuestras mentes. El simple hecho de enfrentarse a un problema bien elegido es ya un estímulo para nuestros estudiantes y si además se da con la respuesta correcta, mejor que mejor.

*¿Qué tienen las matemáticas para seguir produciendo tanto rechazo entre nuestros estudiantes?* Ay, qué lío, ¿no habíamos quedado en que las matemáticas tenían una atracción extraordinaria? Tal vez la filosofía de este concurso nos aporte algunas ideas para comprender esta paradoja. Una simple comparación entre los problemas a los que sometemos a nuestros alumnos en las aulas y los

problemas del Concurso de Primavera, puede abrirnos los ojos. Para resolver ambos tipos de problemas, nuestros alumnos necesitan las mismas herramientas, sin embargo es mucho más atractivo pedirles que escriban un múltiplo de once que tenga veinte cifras, todas impares, que preguntarles si 38.753 es múltiplo de once o no. Una elección cuidadosa y bien secuenciada de los problemas puede hacer que no se nos descuelguen los estudiantes a las primeras de cambio. Los temarios se empeñan en potenciar la mecánica en detrimento de los razonamientos y los profesores debemos luchar por lo contrario. Son los razonamientos los que enganchan y los polinomios los que desenganchan.

Si algún docente de fuera de la Comunidad de Madrid está interesado en organizar un evento de este tipo, por favor que no dude en ponerse en contacto con nosotros. Nos encantaría extender este concurso por todo el ámbito nacional.

Toda la información está a vuestra disposición en nuestra página web, en la que encontraréis las pruebas de este año y años anteriores:

www.mat.ucm.es/~conprim/.

Naturalmente que a los chicos que mejor lo han hecho, les gusta recibir algún premio. A los 150 primeros, repartidos entre todos los cursos, les damos un diploma y un pequeño regalo. ¿Que por qué son sólo 150? Muy simple: la entrega de premios se realiza el miércoles siguiente (este año el 23 de Abril) en el salón de actos de la Facultad de Matemáticas de la Complutense y como por cada estudiante van al menos 3 al acto (padres, abuelos, hermanos...), la capacidad del salón (500 asientos) es quien decide. Todos los años comentan las autoridades de la mesa que es el acto más numeroso y más bonito que se celebra en la Facultad de Matemáticas (después de la prueba del sábado anterior –decimos nosotros-).

Los 12 estudiantes con más alta puntuación reciben un premio algo especial, no reciben ni ordenadores, ni viajes, ni videoconsolas, ni premios que requieran algún dinero, puesto que no tenemos prácticamente ninguno. Pero en reconocimiento a su trabajo y a su talento, aquí van sus nombres:

## Primer nivel (Primaria)

1º *Barrero Santamaría, Miguel* (6º de Primaria) CEIP Ciudad Pegaso
3º *Domínguez de Tena, Joaquín* (5º de Primaria) CEIP Ermita del Santo
2º *López Rodríguez, Miguel* (6º de Primaria) CEIP Henares

## Segundo nivel (1º y 2º ESO)

1º *Esteban de la Iglesia, Lorenzo* (2º de ESO) Colegio Fray Luis de León
2º *Martínez de la Orden, Ander* (1º de ESO) IES Ramiro de Maeztu
3º *Hernández Martín, Arturo* (2º de ESO) IES La Serna

## Tercer nivel (3º y 4º ESO)

1º *Zhao Lin, Ou* (4º de ESO) IES Avenida de los Toreros
2º *Martínez Olondo, Juan* (3º de ESO) Colegio Santa María del Pilar
3º *Herradón Cueto, Moisés* (4º de ESO) Colegio Brains

## Cuarto nivel (Bachillerato)

1º *Fürstenheim Milerud, Gabriel* (2º Bachillerato) IES Ramiro de Maeztu
1º *Izquierdo Arseguet, Diego* (2º Bachillerato) Liceo Francés
2º *Jiménez Benito, Rubén* (1º Bachillerato) IES José Hierro

Nuestra enhorabuena a ellos, a sus profesores y a sus padres.

**Esteban Serrano Marugán**
**Miembro del Comité Organizador**

# Curso de Verano de El Escorial

Del 7 al 11 de julio de 2008, en el marco de los *Cursos de Verano de El Escorial* (`http://www.ucm.es/info/cv/presenta.html`), tendrán lugar los *Cursos de Formación para el Profesorado de Enseñanza Secundaria*, organizados por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) y la Universidad Complutense de Madrid.

Entre ellos, y como es habitual, hay uno dedicado a la enseñanza de la matemática, titulado *Desarrollo de competencias básicas a través de las matemáticas.* El director del curso es el miembro de la Junta Directiva de nuestra Sociedad Eugenio Roanes Lozano y la secretaria del mismo la profesora de Secundaria Elisa de Dios Álvarez
(`http://www.ucm.es/info/cv/subweb/prog/programas/FG04.html`).

El MEC otorga becas a los profesores de Secundaria en activo en centros sostenidos con fondos públicos. Además, el curso tiene el reconocimiento del MEC para profesores de enseñanzas no universitarias con 3 créditos.

Los conferenciantes serán: el director del curso, y

- Mª Dolores Rodríguez Soalleiro (Asesora Técnico Docente, CNICE, MEC),
- Eugenio Roanes Macías (UCM),
- M. Francisca Blanco (Universidad de Valladolid),
- Tomás Recio (Universidad de Cantabria),
- Antonio R. Quesada (University of Akron, Ohio),
- Vicente Rivière (Subdirector General de Relaciones con las administraciones territoriales, Dirección General de Cooperación Territorial y Alta Inspección, MEC).

Además, el curso constará de tres mesas redondas, moderadas por el director del curso, y dedicadas, respectivamente: al papel de la historia de la matemática en la adquisición de competencias; a los concursos, olimpiadas y búsqueda de talentos; y a presentar una comparativa internacional. En ellas, participarán, respectivamente:

- Francisco A. González Redondo (UCM), Francisco Javier Peralta Coronado (UAM), Mariano Martínez Pérez (UCM)
- Eugenio Hernández (UAM), José Javier Etayo (UCM), Mercedes Sánchez Benito (UCM), Joaquín Hernández (UCM).
- Enrique Roca Cobo (director del Instituto de Evaluación, MEC), Tomás Recio (Universidad de Cantabria), Antonio R. Quesada (University of Akron, Ohio).

## Resumen

El curso se orienta de una manera utilitaria, siendo su fin principal el de hacer meditar a los profesionales de la enseñanza de las matemáticas de secundaria que asistan, sobre posibles mejoras en su forma de impartir esta asignatura, teniendo en cuenta su objetivo último: la adquisición de competencias.

No se trata de sentar cátedra, dando normas o técnicas milagrosas (matemáticas, didácticas, pedagógicas, tecnológicas…), sino de presentar nuevas perspectivas y puntos de vista, nuevos posibles usos de herramientas tecnológicas… a quienes son profesionales de la enseñanza secundaria: los asistentes, para que ellos puedan adaptar algunas de estas ideas, estos novedosos recursos… a sus necesidades. En la medida en que lo logremos, el curso habrá tenido éxito.

Por ello, el curso se ha concebido con un carácter bidireccional, tratando de que haya una retroalimentación de los asistentes, por lo que se estructura en nueve charlas (seguidas todas de un coloquio que se espera sea ágil y activo), además de tres mesas redondas en las que se tratarán los temas más susceptibles de llevar a un intenso diálogo.

Señalaremos, por último, que los ponentes destacan, tanto por su conocimiento de los temas abordados y su capacidad de comunicación, como por su interés en temas didácticos, siendo todos profesores de secundaria y/o universidad.

**Eugenio Roanes Lozano**

# Acciones Formativas de Posgrado en Educación Matemática

*Curso 2008/09*

**Organizados por la Cátedra UCM "Miguel De Guzmán"**

**Facultad de Ciencias Matemáticas de la UCM**

Todos los cursos tienen una duración de 30 horas (3 créditos) y son independientes unos de otros. Se expedirá un certificado de aptitud a los alumnos de cada uno de ellos que superen la evaluación requerida.

Relación provisional de cursos. La información definitiva aparecerá más adelante en la página web `www.mat.ucm.es` (entrando en Estudios):

1. "De la Secundaria a la Universidad: ¿Son posibles puentes suaves e ilusionantes?". Joaquín Hernández Gómez (profesor de Bachillerato y de la UCM).
2. "Introducción a la Filosofía de la Ciencia y a la Teoría de la Relatividad" . José Mendoza Casas (UCM) y Eduardo Aguirre Dabán (UCM).
3. "Algunas cuestiones de geometría", Juan Tarrés Freixenet (UCM) y Domingo García Casado (UCM).
4. "Sistemas de posicionamiento por satélites: Conceptos matemáticos y aplicaciones". Gracia Rodríguez Caderot (UCM).
5. "Aplicaciones informáticas para la interiorización de la Matemática en la Enseñanza Secundaria". Ignacio Fábregas Alfaro (UCM) y Francisco Javier Crespo Yánez (UCM).
6. "Adquisición de competencias vía experimental con sistemas de cómputo algebraico y sistemas de geometría dinámica". Eugenio Roanes Macías (UCM).
7. "Problemas de máximos y mínimos: una aproximación a la investigación operativa". Rosa María Ramos Domínguez (UCM).

8. “Probabilidad y Estadística”. María Jesús Ríos Insúa (UCM).
9. “Enseñar, aprender y comunicar en Matemáticas”. Inés Gómez Chacón (UCM) (se impartirá este curso o el siguiente).
10. “Desarrollar el razonamiento matemático de los estudiantes” Inés Gómez Chacón (UCM)
11. “Magia y Matemáticas”, Nelo Alberto Maestro.
12. “Arte y Matemáticas”, Francisco Martín Casaldelrrey (profesor del IES “Juan de la Cierva” de Madrid)

**Raquel Mallavibarrena**

*Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 79 (Junio 2008)*

# Una generalización del teorema de Pascal al espacio de tres dimensiones

**Julio Fernández Biarge**
Profesor emérito de la Universidad Politécnica de Madrid
jfbiarge@telefonica.net

**Abstract**

*A generalization of the Pascal's theorem to three dimensions is to attain by considering orderly sets of six tangent planes to a ruled quadric surface, in such a way that each couple of consecutive planes shares a generator line. It is proved that the three straight lines that are intersection of opposed planes are situated on a plane.*

## 1. Introducción

En coordenadas proyectivas homogéneas $(x,y,z,t)$, la ecuación de una cuádrica reglada $\Gamma$, mediante la elección conveniente del sistema de referencia, puede escribirse en la forma

$$xy = zt \tag{1.1}$$

Siendo $p$ y $q$ números reales, designaremos con G($p$) a la generatriz $\{x=pz\ ,\ t=py\}$ y con H($q$) a la $\{x=qt\ ,\ z=qy\}$. Para todos los números reales $p$ , las G($p$) forman un sistema de generatrices de $\Gamma$ (excepto la generatriz $\{z=0\ ,\ t=0\}$, que si se desea, puede designarse con G($\infty$)) y análogamente, para todos los $q$ , las H($q$) forman el otro sistema de generatrices (excepto la generatriz $\{t=0\ ,\ y=0\}$, que si se desea, puede designarse con H($\infty$)).

Es fácil ver que G($p$) y H($q$) están en el plano (tangente a $\Gamma$)

$$x + pqy - pz - qt = 0 \tag{1.2}$$

y se cortan en el punto (de tangencia de ese plano) de coordenadas

$$(pq\ ,\ 1\ ,\ q\ ,\ p) \qquad (1.3)$$

que es el polo del plano (1.2) respecto a Γ.

## 2. Teorema de Pascal para las hexageneratrices

Llamaremos *hexageneratriz* de Γ a un conjunto ordenado cíclicamente de seis generatrices de Γ, alternativamente de uno y otro sistema. Llamaremos *caras* de una hexageneratriz a los planos definidos por pares de generatrices consecutivas y *vértices* de la misma a los puntos de intersección de esos pares. Las caras son planos tangentes a Γ y los vértices sus puntos de tangencia.

Consideremos la hexageneratriz *ABCDEF*, siendo

$$A = \mathrm{G}(a)\ ,\ B = \mathrm{H}(b)\ ,\ C = \mathrm{G}(c)\ ,\ D = \mathrm{H}(d)\ ,\ E = \mathrm{G}(e)\ ,\ F = \mathrm{H}(f)$$

Aplicando (1.2) y (1.3), se tiene:

| Par de Generatrices | Ecuación de la cara | Coordenadas del vértice | |
|---|---|---|---|
| $AB$ | $x + aby - az - bt = 0$ | $(ab\ ,\ 1\ ,\ b\ ,\ a)$ | (2.1) |
| $BC$ | $x + bcy - cz - bt = 0$ | $(bc\ ,\ 1\ ,\ b\ ,\ c)$ | (2.2) |
| $CD$ | $x + cdy - cz - dt = 0$ | $(cd\ ,\ 1\ ,\ d\ ,\ c)$ | (2.3) |
| $DE$ | $x + dey - ez - dt = 0$ | $(de\ ,\ 1\ ,\ d\ ,\ e)$ | (2.4) |
| $EF$ | $x + efy - ez - ft = 0$ | $(ef\ ,\ 1\ ,\ f\ ,\ e)$ | (2.5) |
| $FA$ | $x + fay - az - ft = 0$ | $(fa\ ,\ 1\ ,\ f\ ,\ a)$ | (2.6) |

Ahora resulta inmediato el siguiente teorema.

**Teorema:** *Si ABCDEF es una hexageneratriz de* Γ, *las rectas de intersección de los pares de caras opuestas AB con DE, BC con EF y CD con FA son coplanarias y las rectas que unen pares de vértices opuestos son concurrentes.*

Para demostrarlo, basta comprobar que los determinantes de los coeficientes de (2.1), (2.4), (2.2) y (2.5) son nulos y lo mismo ocurre con los de los coeficientes de (2.2), (2.5), (2.3) y (2.6), lo que es inmediato (puede usarse, si se desea, un programa adecuado, como *MAPLE*).

La segunda parte puede comprobarse análogamente con las coordenadas de los vértices, pero no es necesario, pues resulta consecuencia de lo anterior, mediante la polaridad respecto a $\Gamma$, al ser cada vértice el polo de una cara.

Este teorema es evidentemente una generalización del teorema de Pascal de la geometría plana y también del de Brianchon, pero además, cortando $\Gamma$ con un plano no tangente a esa cuádrica, se obtiene una cónica y las caras de una hexageneratriz determinan en él los lados de un hexágono inscrito en ella, cuya recta de Pascal es la intersección con el plano secante del plano que contiene las tres rectas de las que habla el teorema.

El plano $\pi$ que contiene a las tres rectas de intersección citadas resulta ser el de ecuación

$$\begin{aligned}
&(ab-bc+cd-de+ef-fa)x \\
&+(abcd-bcde+cdef-defa+efab-fabc)y \\
&+(ade-adc+cfa-cfe+ebc-eba)z \\
&+(bde-bda+dfa-dfc+fbc-fbe)t=0
\end{aligned} \tag{2.7}$$

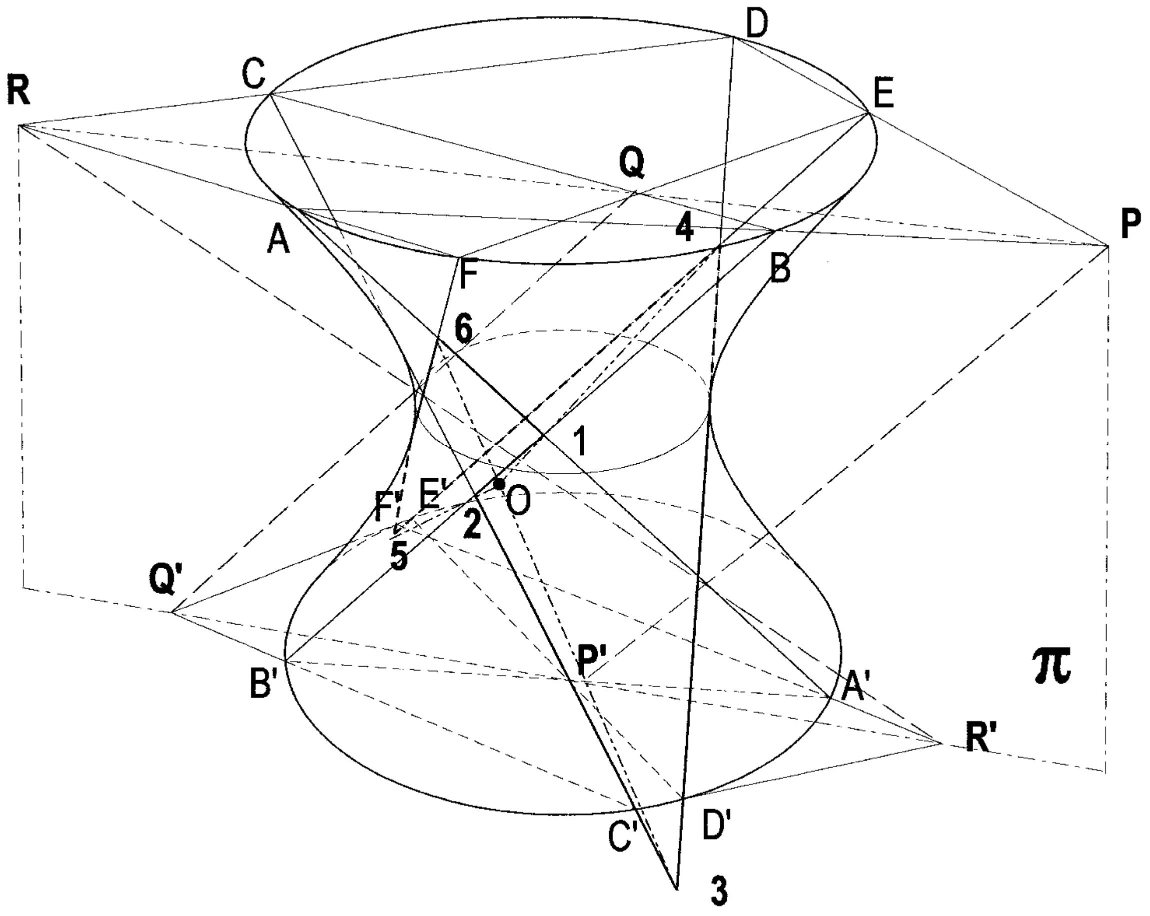
y el punto $O$ donde concurren las rectas que unen vértices opuestos es su polo, de coordenadas:

$$\begin{aligned}
O_x &= abcd-bcde+cdef-defa+efab-fabc \\
O_y &= ab-bc+cd-de+ef-fa \\
O_z &= -bde+bda-dfa+dfc-fbc+fbe \\
O_t &= -ade+adc-cfa+cfe-ebc+eba
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Una generalización tan simple no podía ser ignorada por los geómetras del siglo XX. Efectivamente, buscando en la bibliografía se encuentra que ya Michel Chasles propone (sin prueba) una parecida en su *Aperçu,* en 1889, que fue redescubierta por Salmon en [1], por Court en [2] y por Fox en [3] así como generalizada en algún aspecto a $n$ dimensiones por Bottema en [4], aunque todas expresadas en términos distintos de los utilizados aquí y sin hacer referencia a la segunda parte, que puede considerarse generalización del teorema de Brianchon.

Así como en el plano el teorema de Brianchon resulta del de Pascal mediante una correlación, la generalización que hemos expuesto es correlativa de sí misma.

## 3. Una figura mostrando un ejemplo




En esta figura puede verse un ejemplo de lo descrito en el teorema. La cuádrica reglada es un hiperboloide de revolución; la hexageneratriz está constituida por las seis generatrices *AA', BB', CC', DD', EE'* y *FF'*. Los vértices son los señalados con 1 , 2 , 3 , 4 , 5 y 6. Las recta de intersección de la cara *AA'BB'* con la opuesta *DD'EE'* es la *PP'*; la de intersección de la cara *BB'CC'* con la *EE'FF'* es la *QQ'* y la de intersección de la *CC'DD'* con la *FF'AA'* es la *RR'* . Las rectas *PP' , QQ'* y *RR'* son coplanarias y están en el plano π . Las rectas que unen vértices opuestos: 1 con 4 , 2 con 5 y 3 con 6 se cortan en el punto *O*.

En las dos secciones circulares presentadas en la figura se pueden ver configuraciones del teorema de Pascal de 2 dimensiones referidas a los hexágonos *ABCDEF* (con la recta de Pascal *PQR*) y *A'B'C'D'E'* (con la *P'Q`R'*).

## Referencias


[1] George SALMON. *A treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions* New York, 1912.

[2] N. A. COURT. *Pascal's theoremin space.* Duke Math. J. vol. 20, 1953.

[3] Charles FOX. *The Amer. Math. Monthly.* Vol. 65, 1958.

[4] O. BOTTEMA. *A Generalization of Pascal's Theorem.* Duke Math. Vol 22, 1955.

# Razones metálicas en un circuito eléctrico ilimitado

**Alberto Martín, Ángel Plaza y Sergio Falcón**
Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
alberto.martin107@estudiantes.ulpgc.es,
aplaza@dmat.ulpgc.es, sfalcon@dma.ulpgc.es

**Abstract**

*The k-Fibonacci numbers generalize the classical Fibonacci. Beginning with the initial values 0 and 1, each k-Fibonacci number is the weighted sum of the two preceding numbers, where the preceding one is multiplied by k. The ratio of two consecutive k-Fibonacci numbers converges to the so called Metallic Mean. In this paper we find the metallic means in electric circuit theory.*

## 1. Introducción

Los números de Fibonacci [1-3], indicados por $F_n$, son los términos de la sucesión $\{0,1,1,2,3,5,8,13,\ldots\}$, en la que cada término es la suma de los dos anteriores, con valores iniciales $F_0 = 0$ y $F_1 = 1$. El cociente de dos números de Fibonacci consecutivos tiende a la razón áurea

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Este número aparece frecuentemente en diversos campos de la ciencia, como la Arquitectura [4], las Ciencias Naturales y el Arte [5–6] e incluso la Física de partículas de alta energía y la Física Teórica [7-8].

Los números de Fibonacci han sido generalizados de diversas formas. Una de las más sencillas son los llamados números $k$-Fibonacci [9,10], que denotaremos por $F_{k,n}$, definidos para un número natural $k$, por la relación

$$F_{k,n+2} = kF_{k,n+1} + F_{k,n}$$

y con valores iniciales

$$F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1$$

El cociente de dos de estos números $k$-Fibonacci consecutivos tiende a la razón metálica

$$\varphi_k = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

## 2. Los números metálicos en los circuitos eléctricos

En este artículo mostramos que los números metálicos aparecen, de forma sorprendente, en la resistencia resultante de un circuito eléctrico infinito [11].

Consideremos el circuito eléctrico de la Figura 1, cuyas resistencias tienen la misma impedancia en ohmios y hallemos la resistencia equivalente entre los puntos $a$ y $b$.

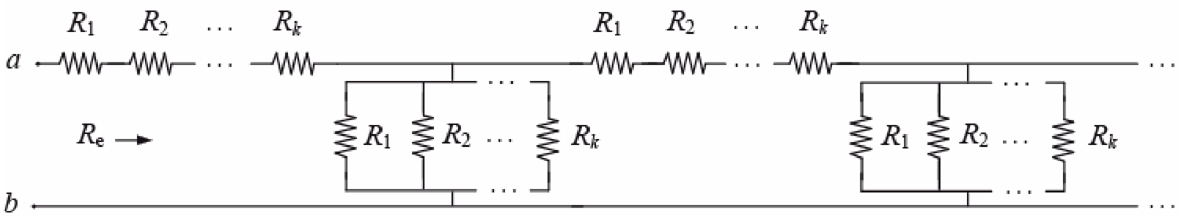



Figura 1: *Circuito ilimitado*

En primer lugar, dividimos el circuito en dos partes, del modo descrito en la Figura 2.

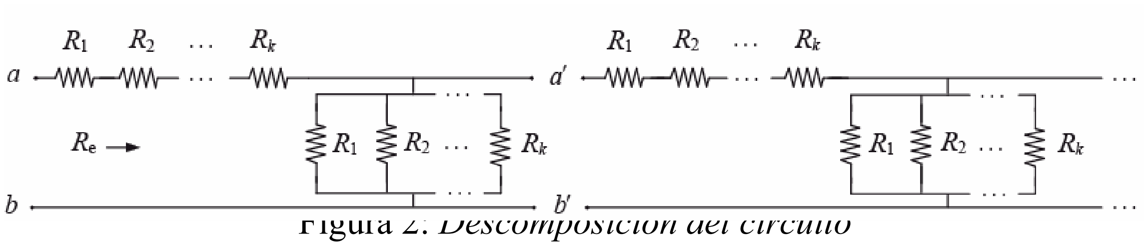



Figura 2: *Descomposición del circuito*

Como el circuito es infinito[1], la resistencia equivalente a la derecha de los puntos $a'$ y $b'$, es la misma que entre los puntos a y b, por lo que podemos simplificar el circuito de la forma descrita en la Figura 3.

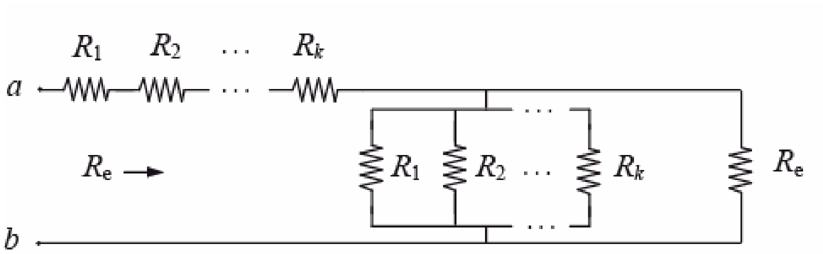



Figura 3: *Circuito equivalente*

La resistencia equivalente, por tanto, vendrá dada por la suma de las resistencias en serie con la equivalente de las resistencias en paralelo:

$$R_e = \sum_{i=1}^{k} R_i + \frac{1}{\dfrac{1}{R_e} + \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{R_i}} = k \cdot R + \frac{1}{\dfrac{1}{R_e} + \dfrac{k}{R}}$$

donde, en la última igualdad, se ha tenido en cuenta que todas las resistencias $R_i$ son iguales entre sí, es decir, $R_i = R$. Desarrollando esta última expresión

[1] En la práctica, basta un circuito con un número suficientemente grande de resistencias insertadas repetidamente en la forma descrita y que se simplifica en la Figura 3.

$$R_e = k \cdot R + \frac{R \cdot R_e}{R + k \cdot R_e}$$

se obtiene

$$R_e^{\,2} - k \cdot R \cdot R_e - R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_e = \frac{k \pm \sqrt{k^2+4}}{2} \cdot R$$

Puesto que $R_e$ no puede ser negativa, sólo se acepta la solución:

$$R_e = \frac{k + \sqrt{k^2+4}}{2} R = \varphi_k R$$

Queda así comprobado que la resistencia equivalente entre los puntos *a* y *b* de la Figura 1 es *R* veces la razón metálica correspondiente.

Podemos hallar la razón metálica siguiendo otro método, si cabe, más sencillo e intuitivo. Para ello, buscamos la resistencia equivalente de combinaciones serie-paralelo sucesivas, empezando por una combinación singular como la indicada en la Figura 4:

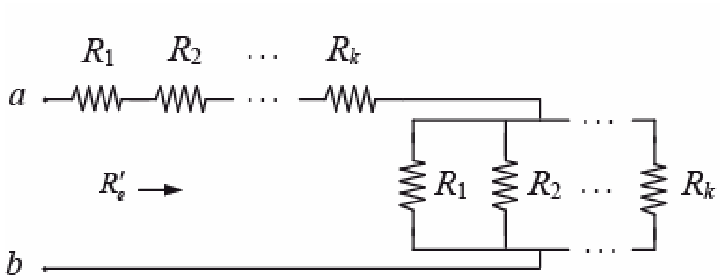



Figura 4: *Circuito de k resistencias en serie y k resistencias en paralelo*

En este caso,

$$R_e' = k \cdot R + \frac{1}{\frac{k}{R}} = \left(k + \frac{1}{k}\right) \cdot R$$

En analogía con el método anterior, una combinación de *k* combinaciones serie-paralelo podrá ser expresada como la resistencia equivalente de una combinación simple en paralelo con la resistencia equivalente de una combinación de $k-1$ combinaciones. Así pues, simplificamos una combinación doble como se refleja en la Figura 5.

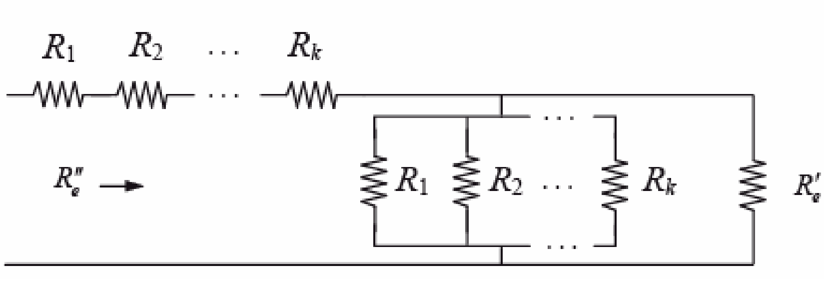



Figura 5: *Circuito simplificado*

$$R_e'' = k\cdot R + \frac{1}{\frac{k}{R}+\frac{1}{R_e'}} = k\cdot R + \frac{1}{\frac{k}{R}+\frac{1}{\left(k+\frac{1}{k}\right)R}} = k\cdot R + \frac{R}{k+\frac{1}{k+\frac{1}{k}}}.$$

Se deduce así, que para una combinación infinita, aparece la razón metálica expresada en forma de fracción continua:

$$k\cdot R + \frac{R}{k+\frac{1}{k+\frac{1}{k+\ldots}}} = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\cdot R = \varphi_k R$$

## Bibliografía


[1] V.E. Hoggat, Fibonacci and Lucas numbers. Palo Alto (CA): Houghton-Mifflin; 1969.

[2] M. Livio, The golden ratio: The story of Phi, the world's most astonishing number. New York: Broadway Books; 2002.

[3] S. Vajda, Fibonacci and Lucas numbers, and the golden section. Theory and applications. Ellis Horwood Limited; 1989.

[4] V.W. Spinadel, en: Williams Kim, editor. *The metallic means and design,* Nexus II: architecture and mathematics. Edizioni dell'Erba; 1998.

[5] B.K. Kirchoff, R. Rutishauser, *The phyllotaxy of Costus (Costaceae),* Bot Gaz 1990; 151(1) pp. 88–105.

[6] G. J.Mitchison, *Phyllotaxis and the Fibonacci series,* Science 1977; 196(4287) pp. 270–275. New Series.

[7] M.S. El Naschie, *Stability analysis of the two-slit experiment with quantum particles*, Chaos, Solitons & Fractals 2005; 26 pp. 291–294.

[8] M.S. El Naschie, *Towards a quantum golden field theory*, Int J Nonlinear Sci Numer Simul 2007; 8(4) pp. 477–482.

[9] S. Falcón, Á. Plaza, *On the Fibonacci k-numbers,* Chaos, Solitons & Fractals 2007; 32(5) pp. 1615–1624.

[10] S. Falcón, Á. Plaza, *The metallic ratios as limits of complex valued transformations*, Chaos, Solitons & Fractals 2008; en prensa.

[11] G. Manuel, A. Santiago, *An unexpected appearance of the golden ratio*, The College Math J. 19(2) (1988) pp. 168-170.

# Un Estudio Teórico de los Cambios de Representación en los Espacios de Problemas

**Antonio Hernando**
Departamento de Sistemas informáticos y Computación
Facultad de Informática, Universidad Complutense de Madrid
ahernando@fdi.ucm.es

**Luis de Ledesma y Luis M. Laita**
Departamento de Inteligencia Artificial
Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
{ledesma,laita}@fi.upm.es

**Abstract**

*This paper introduces a theoretical approach to representation changes applied to problem solving, leading to new techniques in the field of Artificial Intelligence and Cognitive Science.*

## Introducción

El objetivo del presente artículo es exponer una aproximación teórica al estudio de los cambios de representación, que se halla en la base de la implementación de ciertas técnicas nuevas para su empleo en la resolución de problemas. Para ello procederemos a definir de manera formal lo que se entiende por problema (apartado 0), cómo los cambios de representación modifican la concepción del problema (apartado 0), y las propiedades que el problema original tiene en común con el problema fruto del cambio de representación (apartado 0). El apartado 0 se introduce un tipo particular de representación muy importante por las propiedades que conlleva. Todos estos contenidos quedan ilustrados con el ejemplo de un problema concreto.

El estudio teórico descrito en este artículo constituye la base para la elaboración de un programa informático que modifica la representación de los problemas teniendo en cuenta estas nuevas técnicas de transformación y abstracción de los espacios de estados [1, 2, 3, 4].

## 1. Espacio de estados de un problema

Para los propósitos de nuestra investigación adoptamos la visión clásica de un problema como un *espacio de estados* [5]: esta terminología resulta particularmente esclarecedora, y está muy ampliamente aceptada en el contexto de los estudios sobre problemas y cambios de representación. Esta aproximación es muy común en el campo de la Inteligencia Artificial, donde los sistemas computacionales llamados *Problem Solvers* tratan de resolver problemas. De acuerdo con la visión de Simon y Newell [5], enunciar un problema conlleva describir su espacio de estados asociado (ver definición 1.1), el cual consta de: un conjunto de estados, $S$, un conjunto de operadores posibles, $O$, que permiten transitar de un estado a otro; un estado inicial, $s_0$; y un conjunto de estados-solución, $S_G$.

**Definición 1.1 (Espacio del problema).** Un problema es una 4–upla ($S$, $O$, $s_0$, $S_G$), donde $S$ es un conjunto de elementos (llamamos *estado* a cada elemento de $S$); $O$ es un conjunto de correspondencias unívocas definidas de $S$ en $S$ (llamamos *operador* a cada elemento de $O$); $s_0 \in S$ es un estado especial llamado *estado inicial*; y $S_G \subseteq S$ es un subconjunto de $S$ (llamamos *estado-solución* a cada estado de $S_G$). No es preciso que cada operador $op \in O$ tenga que estar definido sobre cada estado $s \in S$, es decir, $\mathrm{Dom}(op) \subseteq S$.

Un espacio de problema ($S$, $O$, $s_0$, $S_G$) tiene asociado un grafo dirigido donde cada nodo representa un estado de S y cada arco dirigido que comunica un nodo *a* con un nodo *b* representa la posible aplicación de un operador que transforma el estado representado por el nodo *a* al estado que representa el nodo *b*. En la figura 1 del apartado 5 se puede observar el grafo de un espacio de estados.

Conforme a esta descripción, dado un espacio de problema, la *solución de un problema* es la secuencia de operadores que permite transitar desde el estado inicial hasta alguno de los estados solución (ver definición 1.2).

**Definición 1.2.** El problema asociado a un espacio de problema ($S$, $O$, $s_0$, $S_G$) consiste en encontrar una secuencia de operadores $<op_1 \ldots op_N>$ (a la que se llamará secuencia solución de operadores) y una secuencia de estados $<s_0, s_1 \ldots s_N>$ (a la que se llamará secuencia solución de estados) que cumplen:

i) $s_0$ es el estado inicial $(S, O, s_0, S_G)$

ii) $\forall i \in \{1 \ldots N\}\ s_{i-1} \in \text{Dom}(op_i)$

iii) $\forall i \in \{1 \ldots N\}\ op_i(s_{i-1}) = s_i$

iv) $s_N \in S_G$

No es nada frecuente que en el enunciado de un problema se enumere exhaustivamente el conjunto de sus estados, identificado cada uno de ellos con una etiqueta. Lo habitual es que los estados queden definidos como estructuras en donde se almacena información. Cuando se enuncia un problema, se describe comprensivamente el conjunto de los posibles estados, detallando el tipo de información que guarda cada estado (la cual define la representación de los estados), y especificando el estado inicial, los posibles operadores que se pueden aplicar, y el requisito que un estado debe cumplir para ser considerado como estado-solución del problema (esto es, la condición-solución del mismo). Toda esta información presente en el enunciado describe el espacio de estados del problema. Así, por ejemplo, en el apartado 5 detallamos distintas representaciones posibles de los estados del problema de los camaleones.

## 2. Los cambios de representación

Cuando se produce un cambio de representación se transforma un espacio de estados en otro. Al espacio de estados de partida lo llamaremos *espacio de estados concreto*, considerando que especifica el llamado "*problema concreto*", tal como se ha presentado originalmente; a su vez, el espacio de estados de destino será conocido como *espacio de estados abstracto*, pues especifica el llamado "*problema abstracto*", resultante de la aplicación de un criterio de abstracción que modifica la representación original del problema. Este tipo de transformación consiste, fundamentalmente, en agrupar o equiparar algunos estados del problema concreto como si fueran iguales para los objetivos del problema. Por tanto, se puede considerar que una abstracción del problema está definida a través de una relación de equivalencia entre los estados, que nos informa de cuándo dos estados del problema concreto pueden pasar a considerarse como equivalentes. Esta relación no es suficiente para dar una definición completa de espacio de estados abstractos, porque aunque gracias a ella se ha definido el conjunto de los estados abstractos, no se ha definido ni el estado abstracto inicial, ni los estados abstractos solución, ni los operadores abstractos.

Para satisfacer esta necesidad, hemos considerado adecuado el siguiente criterio: el estado abstracto inicial es aquel que contiene el estado concreto inicial; un estado abstracto es estado-solución si contiene al menos un estado-solución concreto; y cada operador concreto, *op*, se traduce en un operador abstracto, *op'*, de manera que si desde un estado concreto, $s_1$, se puede pasar a un estado concreto, $s_2$, a través de la aplicación de *op*, $op(s_1)=s_2$, entonces el operador abstracto *op'* permite transitar desde el estado abstracto de $s_1$ al estado abstracto de $s_2$.

No obstante, esta definición presenta una dificultad en cuanto a la definición de operadores, ya que con ella un operador abstracto puede dejar ser función. Para evitarlo, hemos impuesto una restricción a la forma de agrupar los estados concretos en abstractos (definición 2.1). En la definición 2.2. se da una definición de operador abstracto que deja los operadores abstractos como funciones de estados abstractos. Por último, en la definición 2.3 se define formalmente el espacio abstracto del problema.

**Definición 2.1 (Cambio de representación).** Sea $(S, O, s_0, S_G)$ un espacio de estados del problema. Sea $S'$ un conjunto cualesquiera. Se dice que una función $f{:}S\rightarrow S'$ induce un *cambio de representación* si se cumple que:

$$\forall s_1, s_2 \in S \text{ tal que } f(s_1)=f(s_2), \quad \text{tenemos que} \quad f(op(s_1)) = f(op(s_2))$$

**Definición 2.2 (Operador abstracto de un operador).** Sea $(S, O, s_0, S_G)$ un espacio de estados del problema. Sea $S'$ un conjunto genérico y $f{:}S\rightarrow S'$ una función que induce un cambio de representación. Sea $op\in O$ un operador. Se define el *operador abstracto* de *op*, como la función $op'{:}\ S'\rightarrow S'$ que cumple:

$$op'(s_1') = s_2' \text{ syss } \exists s\in \mathrm{Dom}(op) \text{ tal que } f(s)=s_1' \text{ y } f(op(s))=s_2'$$

Dada una función $f{:}S\rightarrow S'$ que induce un cambio de representación, es fácil demostrar que un operador abstracto es efectivamente una función. Utilizamos la notación $O'$ para nombrar el conjunto de operadores abstractos del espacio del problema $(S, O, s_0, S_G)$.

**Definición 2.3 (Espacio de estados abstracto).** Sea $(S, O, s_0, S_G)$ un espacio de estados del problema. Sea $S'$ un conjunto genérico y $f{:}S\rightarrow S'$ una función que induce un cambio de representación. Se denomina *espacio del problema abstracto* inducido por la función $f$ a ($S'$, $O'$, $f(s_0)$, $f(S_G)$), donde $O'$ es el conjunto de operadores abstracto. Al espacio del problema ($S$, $O$, $s_0$, $S_G$) se le denominará en lo sucesivo *espacio del problema concreto*.

Como se puede observar, al ser $f$ una función suprayectiva, el espacio del problema abstracto puede llegar a ser mucho más pequeño que el problema concreto. En consecuencia puede ser más cómodo trabajar con el espacio abstracto del problema que sobre el espacio concreto. Como se demostrará en el siguiente apartado, existe una relación importante entre la resolución del espacio de estados abstracto y el espacio de estados concreto.

## 3. Propiedades de los cambios de representación

En lo que se refiere a la resolución de un espacio de estados, existe una importante relación entre el espacio de problema abstracto y el espacio de problema concreto. En efecto, en el teorema 3.1, se demuestra que la resolución del problema concreto implica necesariamente la resolución del problema abstracto. Este teorema es de gran utilidad, ya que la imposibilidad de conseguir los objetivos del problema abstracto implica la imposibilidad de conseguir los objetivos del problema concreto.

**Teorema 3.1.** Sea ($S$, $O$, $s_0$, $S_G$) un espacio de estados del problema. Sea $f$:$S \rightarrow S'$ una función que induce un cambio de representación y sea ($S'$,$O'$,$f(s_0)$,$f(S_G)$) el espacio de estados abstractos inducido por la función $f$. Si

$<s_0 \ldots s_N>$ $<op_1 \ldots op_N>$ es una solución en el ($S$, $O$, $s_0$, $S_G$),

entonces

$<f(s_0) \ldots f(s_N)>$ $<op_1' \ldots op_N'>$ es una solución en ($S'$,$O'$,$f(s_0)$,$f(S_G)$)

*Demostración.* Supongamos que $<s_0 \ldots s_N>$ $<op_1 \ldots op_N>$ es una solución en el ($S$, $O$, $s_0$, $S_G$). Entonces, se cumple que:

i) $f(s_0)$ es el estado inicial de ($S'$,$O'$,$f(s_0)$,$f(S_G)$)

Y ya que $\forall i \in \{1 \ldots N\}$ $op_i(s_{i-1})=s_i$, tenemos que $op_i'(f(s_{i-1}))=f(s_i)$. Por lo tanto:

ii) $\forall i \in \{1 \ldots N\}$ $f(s_{i-1}) \in$ Dom($op_i'$)
iii) $\forall i \in \{1 \ldots N\}$ $op_i'(f(s_{i-1}))=f(s_i)$
iv) $f(s_N) \in f(S_G)$ porque $s_N \in S_G$

Por contra, el teorema inverso no se cumple necesariamente. En efecto, es posible que un problema concreto no se pueda resolver y sí se pueda resolver el correspondiente problema abstracto. Esto se debe a que una transición de un primer estado abstracto a otro segundo estado abstracto a través de un operador abstracto no pueda traducirse en términos de operadores concretos desde cualquier estado concreto del primer estado abstracto a otro estado concreto del segundo estado abstracto.

## 4. Cambios de Representación Fieles

En este apartado se introduce un tipo de cambio de representación que resulta muy interesante en cuanto a las propiedades que presenta.

Como se dijo en el apartado anterior, es posible que la resolución del problema abstracto no implique necesariamente la resolución del problema concreto correspondiente. Esto es, sin duda, un inconveniente en las representaciones y de hecho, las representaciones no sólo se deben valorar por el tamaño del espacio de estados, sino por la "probabilidad" de que la solución abstracta pueda traducirse en la concreta y la dificultad de efectuar dicha traducción. Hay un tipo de cambio de representación, al que llamaremos *"cambio de representación fiel"*, que garantiza la posibilidad de encontrar la solución del problema concreto siempre que se encuentre en el problema abstracto, y de esa manera tratar de resolver el problema concreto resulta totalmente equivalente a intentar resolver el abstracto.

**Definición 4.1 (Cambio de representación fiel).** Sea $(S, O, s_0, S_G)$ un espacio de estados del problema. Sea $S'$ un conjunto genérico. Se dice que una función $f{:}S\rightarrow S'$ induce un *cambio de representación fiel* si $f$ induce un cambio de representación y además se cumple:

i) $\forall s\in S$ tal que $f(s)\in f(S_G)$, se cumple que $s\in S_G$

ii) $\forall op\in O\ \forall s\in S$ tal que $f(s)\in \mathrm{Dom}(op')$, se cumple que $s\in \mathrm{Dom}(op)$

**Teorema 4.1.** Sea $(S, O, s_0, S_G)$ un espacio de estados del problema. Sea $f{:}S\rightarrow S'$ una función que induce un cambio de representación *fiel* y sea $(S',O',f(s_0),f(S_G))$ el espacio de estados abstractos inducidos por la función $f$.

Si $<s_0'\ldots s_N'>$ $<op_1'\ldots op_N'>$ es una solución en $(S',O',f(s_0),f(S_G))$, entonces existe una secuencia solución de estados $<s_0\ldots\ s_N>$ y de operadores $<op_1\ldots op_N>$ en $(S,O,s_0,S_G)$.

*Demostración*

Supongamos que $<s_0'\dots s_N'>$ $<op_1'\dots op_N'>$ es una solución en $(S',O',f(s_0),f(S_G))$. Definimos el camino de estados $<s_0\dots s_N>$ y de operadores $<op_1\dots op_N>$ como sigue:

$\forall i\in \{1\dots N\}$ $s_i= op_i(s_{i-1})$, donde $op_i'$ es el operador abstracto de $op_i$.

Vamos a demostrar que están bien definidas estas secuencias porque se cumple:

$\forall i\in \{1\dots N\}$ $f(s_i)= s_i'$ y $s_{i-1}\in \mathrm{Dom}(op_i)$

Se demuestra por inducción:

<u>Caso base $i$=1</u>.

Ya que $f$ induce una representación fiel y $f(s_0)=s_0'\in \mathrm{Dom}(op_1')$, se tiene que:

$s_0\in \mathrm{Dom}(op_1)$

Como además se cumple que $f(op_1(s_0))= f(s_1)$ y $f(s_0)=s_0'$, tenemos que

$op_1'(s_0') = f(s_1)$

Es decir

$s_1' = f(s_1)$

<u>Caso inducción</u>.

Suponemos que $f(s_{i-1})= s_{i-1}'$ (hipótesis de inducción). Ya que $f$ induce una representación fiel, $f(s_{i-1})= s_{i-1}'\in \mathrm{Dom}(op_i')$, y se tiene que:

$s_{i-1}\in \mathrm{Dom}(op_i)$

Como además se cumple que $f(op_i(s_{i-1}))= f(s_i)$ y $f(s_{i-1})= s_{i-1}'$, tenemos que:

$op_i'(s_{i-1}') = f(s_i)$

Es decir:

$s_i' = f(s_i)$

Comprobemos que $<s_0\dots s_N>$ $<op_1\dots op_N>$ es solución en $(S,O,s_0,S_G)$:

i) $s_0$ es el estado inicial de $(S, O, s_0, S_G)$
ii) $\forall i\in \{1\dots N\}$ $s_{i-1}\in \mathrm{Dom}(op_i)$

iii) $\forall i \in \{1 \ldots N\}$ $op_i(s_{i-1}) = f(s_i)$
iv) $s_N \in S_G$ ya que f induce un cambio de representación fiel y se cumple que

$f(s_N) = s_N' \in f(S_G)$

Por otra parte, el desear en lo posible cambios de representación fieles no implica desestimar los que no lo son. Es posible además que, aunque un cambio de representación no sea fiel, en la práctica los operadores abstractos que se aplican para tratar de resolver el problema puedan ser traducidos casi siempre en el espacio de problema concreto: estos cambios de representación, por tanto, podrían ser considerados, en la práctica, tan interesantes como los fieles.

## 5. Un ejemplo: El problema de los camaleones

Se toma como punto de partida un conjunto de 20 camaleones amarillos, 19 camaleones rojos y 18 camaleones verdes. Cuando dos camaleones de diferente color se miran mutuamente, ambos alteran su color al restante (tercer) color. Se tiene la posibilidad de girar dos camaleones para que se miren mutuamente. El objetivo del problema es conseguir que todos los camaleones tengan el mismo color.

Una primera representación de los estados del problema consiste en definir una tabla en donde se describan las características de cada uno de los camaleones. Por cada camaleón se describe un nombre que lo identifica, ID; su color, COLOUR; y el camaleón al que mira, FACE. Cada configuración diferente de la tabla representa un posible estado del espacio del problema. Existe además un operador que permite girar dos camaleones de tal forma que ambos se miren y cambien de color. Es decir, este operador modifica el valor de las columnas COLOUR y FACE en dos filas de la tabla. El estado inicial está representado por una tabla (ver tabla 1) que consta de 20 filas con valor YELLOW en la columna COLOUR, 19 filas con valor RED en la columna COLOUR y 18 filas con valor GREEN en la columna COLOUR. Un estado es estado-solución del problema si y solo si en todas las filas de la tabla aparece el mismo valor.

Aún es posible aplicar otro cambio de representación fiel consistente en considerar que el nombre del color de los camaleones es irrelevante y que en consecuencia, por ejemplo, el estado (20,19,18) debe ser el mismo que el estado (19,20,18). Con este cambio de representación, los estados estarían representados por una terna no ordenada de números describiendo el número de camaleones de cada color sin especificar el color asociado a cada número. Adoptando esta representación, el estado inicial del problema sería {20,19,18}, y el único estado-solución, {57,0,0}.

| ID | COLOUR | FACE |
|---|---|---|
| Camaleón1 | Red | Camaleón2 |
| Camaleón2 | Yellow | Camaleón3 |
| Camaleón3 | Red | Camaleón1 |
| … | … | … |

**Tabla 1.** *Ejemplo de estado en el problema de los camaleones*

Los cambios de representación anteriores son fieles (es fácil realizar la comprobación), y por tanto es equivalente resolver el problema con cualquiera de las tres representaciones. Sin embargo, aunque con el último cambio de representación expuesto el espacio del problema se ha reducido considerablemente, su tamaño sigue dificultando una rápida resolución.

Sorprendentemente, el problema se resuelve de manera inmediata recurriendo a un cambio de representación no fiel (lo que apunta a no despreciar los cambios de representación no fieles). Este cambio de representación no fiel consiste en considerar el número de camaleones de cada color módulo 3. De esta manera, cada estado queda representado por una terna no ordenada de números que indican la cantidad de camaleones de cada color modulo 3 sin especificar el color. Con esta representación, el estado inicial sería {0,1,2} y el estado solución {0,0,0}, y como puede observarse en la siguiente figura, donde se describe el grafo asociado al espacio del problema, es imposible transitar desde el estado inicial al estado-solución. Aunque esta representación no es fiel, podemos concluir, gracias al teorema 3.1, que es imposible conseguir que todos los camaleones sean del mismo color. Se alcanza así, con un coste mínimo, la demostración de la imposibilidad de resolver el problema planteado.

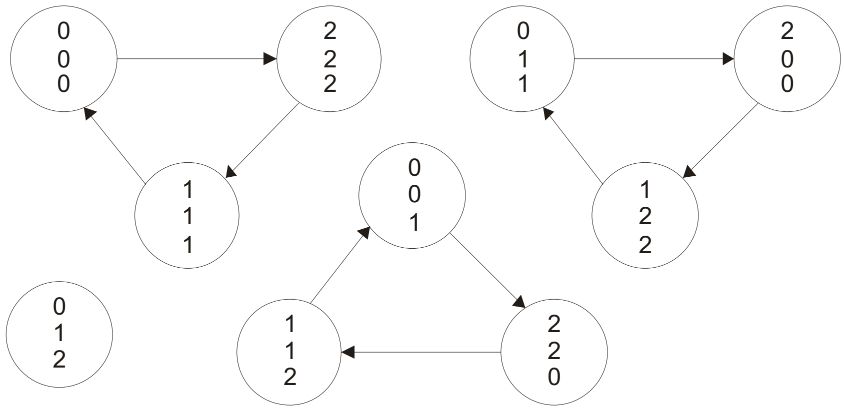



Figura 1. *Espacio de estados del problema utilizando una representación no fiel*

## Conclusiones

Partiendo del paradigma teórico de los problemas como espacios de estados, pueden inducirse modificaciones en su disposición y topología con arreglo a distintos criterios de abstracción, dando lugar a representaciones equivalentes del problema en su presentación original. La ventaja en términos de menor coste computacional de algunas de estas representaciones respecto del problema original facilita el proceso de resolución. La introducción del concepto de representación fiel resulta útil, por cuanto garantiza la total equivalencia entre unas representaciones y otras. Finalmente, se comprueba que algunos cambios de representación no fieles pueden resultar cruciales para conseguir la solución de los problemas.

## Bibliografía


[1] A. Hernando, L. De Ledesma, L. M. Laita, "Toward an AI Theory of Insight", *Procs. 12th IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling*, Marbella, 2003, 181-186.

[2] A. Hernando, L. De Ledesma, L. M. Laita, "A Programme embodying Insight and Representation Changes in Problem Solving", *Procs. 9th WMSCI World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics*, Orlando, 2005, 58-63.

[3] A. Hernando, L. De Ledesma, L. M. Laita, "An Approach to Representation Changes While Executing Problem Solver Intelligent Systems",

*Procs. 6th IEEE International Conference. on Cognitive Informatics,* Lake Tahoe, 2007, 35–42.

[4] A. Hernando, L. De Ledesma, L. M. Laita, "A System Simulating Representation Change Phenomena While Problem Solving", *Mathematics and Computers in Simulation*, 78 (2008) 89–106.

[5] A. Newell, H. A. Simon, *Human Problem Solving*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1972.

# Un sistema predictivo para la toma de decisiones inspirado por el modelo gravitacional*

Eugenio Roanes-Lozano†, Luis M. Laita‡,
Eugenio Roanes-Macías†

† Depto. de Álgebra, Universidad Complutense de Madrid
‡ Depto. de Inteligencia Artificial, Universidad Politécnica de Madrid

{eroanes,roanes}@mat.ucm.es ; laita@fi.upm.es

**Abstract**

*A very simple decision taking system inspired by gravitation forces and which input are the data of a sample is presented. The system obviously needs that the variables measured are related to the variable to be predicted. Also, that the different variables take values in a similar range is very important. It has been tested on small real and invented examples. An implementation in the computer algebra system* Maple *has been developed.*

## 1 Introducción

Hemos realizado diversos trabajos sobre extracción de conocimiento y verificación de consistencia en sistemas expertos basados en reglas (RBES) [2, 3]. Además, hemos desarrollado aplicaciones concretas en el ámbito de la informática médica, en el desarrollo y verificación de guías de práctica clínica [4] y de RBES para la detección, evaluación y tratamiento de enfermedades [5, 6].

---

*Versión extendida de una comunicación presentada al congreso *12th International Conference on Applications of Computer Algebra*, sesión *Non-Standard Applications of Computer Algebra*, Varna (Bulgaria), 26-29 de Junio de 2006 [1].

Los RBES en medicina están frecuentemente orientados al diagnóstico médico. Pero tanto las guías de práctica clínica como los sistemas expertos para medicina parten muy frecuentemente de conocimiento resumido en tablas, a su vez basadas en el conocimiento de un panel de expertos, no directamente en datos experimentales.

Los métodos estadísticos se aplican generalmente a confirmar o rechazar experimentalmente una hipótesis. En consecuencia trabajan sobre datos detallados de unas variables de una cierta muestra, a los que se aplican métodos estadísticos estándar y software como *BMDP* o *SPSS*.

El sencillo sistema de ayuda a la decisión presentado aquí trata de predecir, por ejemplo, el resultado de un cierto tratamiento quirúrgico, basándose en un conjunto de historias clínicas que recogen diversos datos de los pacientes y una evaluación del resultado de dicho tratamiento quirúrgico en una muestra de pacientes ya tratados.

Por tanto, a diferencia de un RBES, no hay ni base de conocimiento ni motor de inferencia, sino un algoritmo de decisión, y, como en un estudio estadístico usual, hay un conjunto de datos previos (muestra), a partir de los que se realiza una predicción sobre un resultado.

# 2 Aproximación al problema

## 2.1 Estructuración de los datos

Sea $n$ el número de variables consideradas para cada elemento de la muestra y para los nuevos casos a predecir. Cada variable se considera valorada en $\mathbb{R}$, o, mejor, en $[0,1]$, al igual que el resultado.

Por ejemplo, para el caso de la variable correspondiente a la prueba preoperatoria “fracción de eyección ventricular izquierda” (LVEF), podríamos asignar:

$$\begin{aligned} &0 \equiv \text{LVEF} < 30\% \\ &\tfrac{1}{2} \equiv 30\% \leq \text{LVEF} \leq 60\% \\ &1 \equiv \text{LVEF} > 60\% \end{aligned}$$

y los resultados de un tratamiento quirúrgico podrían asignarse así:

$$0 \equiv \text{la prótesis falló,}$$

$\frac{1}{2} \equiv$ la prótesis tuvo un éxito parcial,
$1 \equiv$ la prótesis fue un éxito.

En resumen, identificamos cada caso con un punto de $[0,1]^n$ o $\mathbb{R}^n$, y cada resultado con un punto de $[0,1]$.

## 2.2 Idea subyacente y descripción del algoritmo

Como $n$ es el número de variables consideradas para cada elemento de la muestra, la idea es colocar en un espacio $n$-dimensional "objetos" (puntuales) cuyas coordenadas corresponden a las "n-plas" de valores de las variables para cada uno de los elementos de la muestra. La "masa" de cada uno de estos "objetos" es el número de ocurrencias del correspondiente elemento en la muestra.

El nuevo caso a predecir corresponderá con un nuevo punto de ese espacio $n$-dimensional.

Hay tres posibilidades:

- Las características del nuevo caso coinciden con las de exactamente un caso en la muestra (de otro modo: el nuevo punto coincide con un "objeto" de masa 1): el sistema devuelve el resultado para ese caso idéntico en la muestra.
- Las características del nuevo caso coinciden con las de varios casos en la muestra (de otro modo: el nuevo punto coincide con un "objeto" de masa $> 1$), cuyos resultados pueden no concordar: el sistema devuelve los resultados para esos casos idénticos en la muestra.
- Las características del nuevo caso no coinciden con las de ningún caso en la muestra (de otro modo: el nuevo punto no coincide con ninguno de los "objetos" del espacio considerado): el valor asignado como predicción para este nuevo punto es una media ponderada de los resultados para los elementos de la muestra. La media se pondera del modo siguiente: el resultado de cada elemento de la muestra afecta de modo proporcional a su masa (e.e., al número de ocurrencias de ese caso) y de modo inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al nuevo punto. Además, se multiplica por un factor corrector previamente calculado ($G$) para que el valor que se predice yazga exactamente en el rango $[0,1]$.

## 2.3 Un ejemplo en una única variable

Supongamos que los casos que tenemos en la muestra fueran

$$[0, 2, 2, 3]$$

y que para ellos tuviéramos [éxito,éxito,éxito,fracaso], que identificamos, respectivamente, con

$$[1, 1, 1, 0]$$

Si el nuevo caso por predecir fuera 1, los cuadrados de las distancias a los casos dados serían:

$$(0-1)^2 = 1 \quad , \quad (2-1)^2 = 1 \quad , \quad (2-1)^2 = 1 \quad , \quad (3-1)^2 = 4$$

y por tanto la suma de los inversos de los cuadrados de las distancias al caso propuesto serían, respectivamente:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

por lo que el coeficiente corrector interesará que sea $\frac{4}{13}$ (para obtener una predicción en $[0, 1]$).

Por tanto, si el nuevo caso fuera un 1, la predicción sería:

$$\frac{4}{13} \cdot (\frac{1}{1} \cdot 1 + \frac{1}{1} \cdot 1 + \frac{1}{1} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0) = \frac{12}{13} \simeq 0.923$$

esto es, que el resultado sería, muy probablemente, "éxito" (pues el valor así obtenido es muy próximo a 1).

## 2.4 Detalle del algoritmo cuando se consideran $n$ variables

Consideremos que para cada caso se consideran $n$ variables y describamos la situación más general del algoritmo, en que no tenemos ningún caso anterior en la base de datos con exactamente las características que el nuevo caso.

Cada nuevo resultado afecta a la predicción para el nuevo caso de modo inversamente proporcional a su distancia al nuevo punto. Más explícitamente:

- sea $dim(muestra)$ el número de elementos en la muestra (por ejemplo, el número de pacientes tratados y seguidos durante varios años),

- representemos por $P_i$ (en lo sucesivo $0 \neq i \in \mathbb{N}$) al vector de coordenadas del punto de $[0,1]^n$ o $\mathbb{R}^n$ correspondiente al elemento $i$-ésimo de la muestra (por ejemplo, los datos de los pacientes en la muestra conocidos previamente al tratamiento quirúrgico),
- y denotemos por $P_{i,j}$ a la $j$-ésima coordenada de $P_i$ (por ejemplo, $P_{3,4}$ puede ser la LVEF del paciente 3),
- sea $R_i \in [0,1]$ el resultado correspondiente al elemento i-ésimo de la muestra (por ejemplo, el resultado del tratamiento quirúrgico del paciente i-ésimo de la muestra).

(observemos que el subíndice $i = 0$ se reserva al nuevo caso por predecir).

El cuadrado de la distancia de $P_0$ a cada $P_i$ es

$$D_i = \sum_{j=1}^{n} (P_{0,j} - P_{i,j})^2$$

Si denotamos por $G$ a la inversa de la suma de los inversos de los cuadrados de las distancias de $P_0$ a $P_i$

$$G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{dim(muestra)} \frac{1}{D_i}}$$

entonces la predicción que hemos considerado viene dada por la expresión:

$$\sum_{i=1}^{dim(muestra)} G \cdot \frac{1}{D_i} \cdot R_i$$

## 2.5 Observaciones

Los datos y el sistema predictivo están completamente aislados uno de otro. El sistema comprueba automáticamente el número de elementos de la muestra y la dimensión del espacio (número de variables consideradas). Por tanto, se pueden incluir nuevos elementos a la muestra o correcciones a los datos de la muestra sin que tengan que hacerse alteraciones en el código correspondiente al sistema predictivo.

Observemos que suponemos que el experto ha seleccionado variables que están razonablemente relacionadas a la variable “resultado” o que se ha comprobado (estadísticamente) que cada una de estas variables está correlada con la variable “resultado”. En otro caso un intento de extraer una predicción de los datos iniciales no tiene sentido.

### 2.6 Otras aproximaciones relativamente similares

Observemos que estamos considerando un modelo “gravitacional” que realiza un interpolación dependiente del cuadrado de la distancia de los datos iniciales al nuevo punto.

Es algo similar al “análisis discriminante” de estadística, sin agregar puntos.

Es también similar al “algoritmo de los $k$ vecinos más próximos” (“$k$-nearest neighbors algorithm”), pero, en nuestro caso:

- $k$ coincidiría con el tamaño de toda la muestra,
- en lugar de usar mayoría simple entre los vecinos para tomar la decisión, todos los valores iniciales influyen en el valor predicho (inversamente al cuadrado de su distancia al nuevo punto).

No tiene ninguna relación con el método “gravitacional” que se que trata necesidades de transporte entre dos ciudades.

## 3 Implementación

Se ha elegido para realizar la implementación el sistema de cómputo algebraico *Maple* por su comodidad para realizar cómputos y presentar gráficas, así como por la experiencia de los autores con este sistema.

El paquete está organizado en tres archivos:

- Una *Maple worksheet*, donde el usuario puede interactuar con el sistema, y que trabaja como interfaz de usuario.
- Un archivo de código *Maple*, donde está implementado el sistema, que se carga desde la *worksheet*. De esta forma la *worksheet* queda más diáfana y el código se preserva de alteraciones involuntarias. El contenido de este archivo se incluye en el Apéndice.

- Un archivo de texto conteniendo los datos de la muestra.

Si quisiéramos añadir un nuevo caso a la muestra, sólo habría que añadir una nueva línea de texto con los datos (en el orden adecuado y en formato "lista" de *Maple*: ente corchetes y seguida de punto y coma) al archivo de texto con los datos de la muestra.

Para un nuevo caso, el sistema puede devolver la predicción tanto como un valor numérico (por ejemplo en el intervalo $[0, 1]$) como en el rango: fallo / dudoso / éxito.

Además, si nos restringimos a una o dos variables de las consideradas para la muestra, ($d$ ó ($d_1$,$d_2$)) y denotamos el resultado (predicción) por $r$, el sistema puede representar la nube de puntos $(d, r)$ en 2D (respectivamente, $(d_1, d_2, r)$ en 3D).

# 4 Experimentación

**Ejemplo 1.-** El sistema fue testado para tratar de predecir el resultado del empleo de un cierta prótesis de cadera sin cemento. El estudio está basado en una evaluación a medio plazo de 42 pacientes (50 caderas), todos ellos mayores de 60 años cuando tuvo lugar la cirugía. Todas las operaciones quirúrgicas fueron llevadas a cabo durante 1996 por el mismo especialista, y todos estos pacientes fueron seguidos durante 10 años.

Antes de la cirugía se evalúan 6 datos de cada paciente: edad (dividida por 100), género (asignamos 0.4/0.6), la evaluación del estado de la cadera "Harris hip score" (dividida por 100), tipo de fémur $(1/2, 2/3, 1)$, tipo de acetábulo $(1/2, 2/3, 1)$ y espesor antes de la operación de la pared media del acetábulo (en cm).

Después de la cirugía se estiman 15 datos por cada paciente, a partir de los cuales los expertos asignan un valor "éxito" o "fracaso" a la cirugía practicada a ese paciente en concreto.

Los datos se introducen al sistema en la forma:

```
> data:=[[73/100,.6,43/100,2/3,2/3,17/10],
>        [72/100,.6,43/100,2/3,2/3,10/10],
>        [73/100,.6,40/100,2/3,1  ,13/10],
>        [72/100,.4,22/100,2/3,1  , 3/10],
```

```
>           ...]:
```

y los resultados de la cirugía:

```
> res:=[1,2,2,2,...]:
```

donde éxito y fracaso han sido representados, respectivamente, por 1 y 2. Notemos que los puntos suspensivos no representan notación *Maple* sino simplemente que se introducen más casos.

Sea ahora $P_0$ un nuevo caso a predecir:

```
> P_0:=[73/100,.4,43/100,2/3,2/3,17/10]:
```

y pidamos la predicción para el nuevo caso `P_0` respecto de los datos en la lista de listas `data` y los resultados en la lista `res`:

```
> evalf[3](predict(P_0,data,res));
                              1.890
```

(en *Maple* `evalf[3]` aproxima con 3 cifras). También es posible pedir la distancia del nuevo caso a los casos conocidos.

El sistema no funcionó bien en este estudio: comparando la predicción (para cada variable) partiendo de un caso experimentado y la muestra excepto ese caso, sólo se conseguían aciertos aproximadamente en un 80% de los casos, y claramente predecía demasiados éxitos.

Tratando de rastrear la razón, encontramos que ¡no hay correlación entre cada una de las 6 variables medidas "a priori" en cada paciente y la variable "resultado"!, como se puede deducir por ejemplo en la Figura 1 (donde ninguno de los seis puntos tienen un peso despreciable).

Curiosamente, esto satisfizo a los médicos que seguían el trabajo: no hay razones para rechazar como candidato a ningún grupo de pacientes).

Se confirma pues, como era de esperar, que el que exista tal correlación (en el sentido estadístico habitual) es una condición necesaria para aplicar esta metodología.

**Ejemplo 2.-** Supongamos que estamos tratando de predecir el peso en gramos de las peras obtenidas de unos perales en función de la edad del árbol y de la cantidad de riego y de abono proporcionados a estos frutales.

Si los datos de la muestra para [edad del árbol/20,peso medio de la las peras en gramos, % de riego, % de abono] son, por ejemplo:

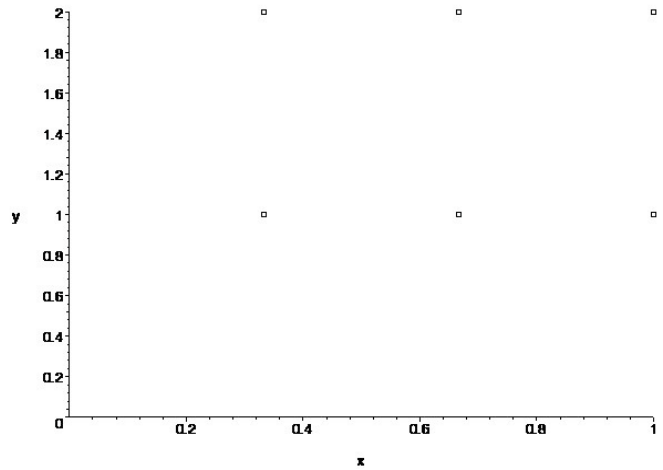



Figura 1: *Nube de puntos correspondiente a las variables "tipo de fémur" y "resultado de la cirugía".*

```
> data:=[[12/20,75/100,75/100],
>        [12/20,75/100,50/100],
>        [12/20,75/100,50/100],
>        [12/20,75/100,25/100],
>        [12/20,50/100,75/100],
>        [12/20,50/100,50/100],
>        [12/20,50/100,25/100],
>        [12/20,50/100,25/100],
>        [11/20,75/100,25/100],
>        [11/20,75/100,50/100],
>        [11/20,50/100,50/100],
>        [11/20,75/100,75/100],
>       ]:
```

y los pesos correspondientes

```
> res:=[140,130,135,120,135,130,120,110,110,120,120,135];
```

para un nuevo caso como:

```
> P_0:=[11/20,50/100,75/100]:
```

las distancias a los casos conocidos son:

```
> evalf[3]( dists2(P_0,data) );
  [0.0650, 0.128, 0.128, 0.315, 0.00250, 0.0650, 0.252, 0.252, C
        0.125, 0.0625, 0.0625]
```

y el resultado previsto es:

```
> evalf[3](predict(P_0,data,res));
                                            134.
```

lo que parece muy razonable a la vista de las distancias a los casos dados. En este caso sí se aprecia una correlación entre las variables % de riego y % de abono, como se aprecia en la Figura 2.

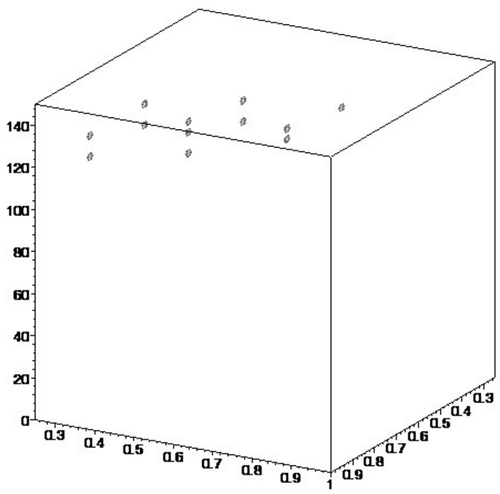



Figura 2: *Nube de puntos correspondiente a las variables "porcentaje de riego aplicado", "porcentaje de abono aplicado" y "peso medio del ejemplar de pera".*

# 5 Futuro desarrollo

Habría que investigar la posibilidad de estandarizar las variables, por ejemplo usando "Z-scores" para cada una de ellas.

Sería interesante tener una medida de la confianza en la predicción, aunque esto parece complicado.

# 6 Agradecimientos

Este trabajo está parcialmente subvencionado por el proyecto de investigación MTM2004-03175 (Ministerio de Educación y Ciencia, Spain).

# 7 Conclusiones

Creemos que este es un sencillo y novedoso sistema predictivo basado en la información contenida en muestras. Deben desarrollarse, no obstante, aspectos como la estandarización de las variables, su aplicabilidad y la confianza en los datos obtenidos.

# 8 Apéndice: Código Maple

El archivo externo de código *Maple* es muy breve y se incluye a continuación:

```
dists2:=proc(L::list,LL::list)  #input: nuevo caso, muestra
  local i,j,dim,n,LD;
   dim:=nops(L);         #núm. de variables consideradas
   n:=nops(LL);          #núm. pacientes muestra
   LD:=[]:
   for j to n do
       LD:=[op(LD),sum((op(i,L)-op(i,op(j,LL)))^2,i=1..dim)];
    od;
  end:

sumaL:=proc(L::list)     #suma los elementos de una lista
  local i;
```

```
   add(i,i=L);
  end:

 predict:=proc(L::list,LPR::list,LRE::list) #input: nuevo caso,
   local dim,D,S,G,i,k,m,n;                 #muestra y result
    dim:=nops(L);          #núm. de variables consideradas
    D:=dists2(L,LPR);      #lista de distancias cuad. a nube
    if not L in LPR
       then S:=sum(1/op(i,D) , i=1..nops(D));
            G:=1/S;
            evalf[3](sum((G/op(i,D))*op(i,LRE),i=1..nops(D)))
       else
            print(`Such case(s) found in our records.
                   Result(s):`);
            m:=0;
            n:=0;
            for k to nops(D) do
                if L=op(k,LPR) then print(op(k,LRE));
                                    m:=m+op(k,LRE);
                                    n:=n+1;
                 fi;
             od;
            print(`Average for these data:`);
            m/n;
     fi;
   end:
```

# Referencias


[1] E. Roanes Lozano, B. de la Torre, L.M. Laita, E. Roanes Macías: A Clinical Histories-Based "Gravitational" Decision Support System (Resumen). Abstracts of The 12th International Conference on Applications of Computer Algebra (ACA'2006). Institute of Mathematics and Informatics, Bulgarian Academy of Sciences (2006) 45.

[2] E. Roanes-Lozano, L. M. Laita, E. Roanes-Macías: Maple V in A.I.: The Boolean Algebra Associated to a KBS. CAN Nieuwsbrief 14 (1995) 65–70.

[3] E. Roanes Lozano, L. M. Laita and E. Roanes-Macías, A Polynomial Model for Multivalued Logics with a Touch of Algebraic Geometry and Computer Algebra. Mathematics and Computers in Simulation 45/1 (1998) 83–99.

[4] L.M. Laita, E. Roanes-Lozano, V. Maojo, L. de Ledesma, L. Laita, (2000). An Expert System for Managing Medical Appropriateness Criteria Based on Computer Algebra Techniques. Computers and Mathematics with Applications 51/5 (2000) 473–481.

[5] C. Pérez-Carretero, L.M. Laita, E. Roanes-Lozano, L. Lázaro, J. González-Cajal, L. Laita: A Logic and Computer Algebra-Based Expert System for Diagnosis of Anorexia. Mathematics and Computers in Simulation 58 (2002) 183–202.

[6] C. Rodríguez-Solano, L.M. Laita, E. Roanes Lozano, L. López Corral, L. Laita, A Computational System for Diagnosis of Depressive Situations. Expert System with Applications 31 (2006) 47–55.

# Las fuentes del *Resumen Histórico* de los *Elementos de aritmética, álgebra y geometría* de Juan Justo García Rodríguez

**J. Cabezas Corchero**
Catedrático de matemáticas de Secundaria (jubilado)
justocabezas@terra.es

**Abstract**

*In this article, one of the sources consulted by Juan Justo García Rodríguez to write the historical summary in the beginning of the first edition of his* Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría *is identified. The relation between this summary and the source is analyzed and the conclusion is that this source was almost the only one used.*

## 1. Los *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*

Juan Justo García Rodríguez (Zafra, 1752; Salamanca, 1830) fue catedrático de álgebra de la Universidad de Salamanca. Entre sus obras está el libro de texto *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*, que terminó en 1779 y publicó en 1782 en Madrid y que fue texto único en todas las universidades. El libro tuvo sucesivas ediciones: Salamanca 1794, Salamanca 1801, Madrid 1814-1815 y Madrid 1821-1822.

## 2. El Resumen Histórico

La obra comienza con un Resumen Histórico *(sic)* que ha sido considerado por muchos estudiosos como una joya de las matemáticas de esa época. Así Cuesta [1] la califica de magnífica y opina que el autor «parecía tener una información muy puntual y precisa sobre las matemáticas que se hacían en Europa por esos años». Hace constar que el autor tenía treinta años cuando escribe esta «completísima introducción histórica» [2]. Indica que en los Colegios de Salamanca disponían de los más importantes libros y revistas y opina que «se ve, en la magnífica introducción histórica, que el autor manejó muchos de esos libros que tenía a mano».

Sánchez [3] tacha el Resumen Histórico de admirable. Cobos y Fernández-Daza [4] señalan que «es de destacar el resumen histórico [...] hecho que demuestra que los ocho años que tarda en componerlo los pasó estudiando. Hace un análisis histórico de gran valor».

Teixedó [5] también cita el Resumen Histórico: «que ha sido considerado espléndido por algunos y como lo más llamativo de la obra por otros», Maz [6] lo califica de interesante y extenso, y comenta que «demuestra que conoce la teoría y los principales problemas que hay planteados en cada una de estas materias» (aritmética, álgebra y geometría).

En la bibliografía consultada no hemos encontrado ningún dato preciso sobre las fuentes que consultó Juan Justo García para esta historia de la aritmética, álgebra y geometría.

La introducción histórica fue modificada en las siguientes ediciones. Un análisis de estas modificaciones puede verse Cabezas y Moreno [7] (donde, por cierto, también incidíamos en la conclusión de Cuesta en el uso de diversas fuentes). En este artículo nos referimos exclusivamente a la primera edición.

## 3. Las fuentes utilizadas

En el presente artículo intentaremos demostrar que Juan Justo García sustentó su introducción histórica casi exclusivamente en una única fuente: *Histoire des progres de l'esprit humain dans les sciences et dans les arts qui en dépendent*, de Alexandre Saverien, o mejor, en la traducción que de esta obra hace Manuel Rubin de Celis *Historia de los progresos del entendimiento humano en las ciencias exactas y en las artes que dependen de ellas a saber, la arismetica, algebra, geometría, navegación, óptica, maquinaria, hidráulica, acústica y música. Con un compendio de la vida de los Autores más celebres que han escrito sobre estas ciencias*.

Alexandre Saverien (1720-1805) fue un ingeniero de marina francés, autor de diversas obras científicas. La que nos ocupa tuvo su primera edición en París, en 1766 y la segunda, corregida, en 1776. La traducción al español de Manuel Rubín de Celis es de 1775, en Madrid, en la imprenta de Antonio de Sancha.

## 4 Comparación de ambos textos

Además del paralelismo de ambos textos, que pasaremos inmediatamente a exponer, existen otras coincidencias en el formato. Así las tres primeras artes que figuran en la obra de Saverien son las mismas y en el mismo orden que figuran en el Resumen Histórico de Juan Justo García. Además se respetan otras características, como la de escribir en cursiva los nombres de los autores y los títulos de las obras.

La coincidencia de ambos textos en algunas expresiones traducidas del francés inclina a pensar que Juan Justo García no trabajó directamente sobre el texto de Saverien, sino sobre la traducción de Rubín de Celis. Así, por ejemplo, éste explica, en una nota a pie de página, que traduce *Maître des Requetes* por Magistrado, que es la palabra que emplea Juan Justo García.

### 4.1 Historia del álgebra

Para no extender demasiado este trabajo hemos seleccionado la historia del álgebra. Conocida la fuente del Resumen Histórico, es inmediato comprobar que en las otras partes se mantiene el citado paralelismo.

La columna de la derecha contiene el texto íntegro de la historia del álgebra según Juan Justo García y la de la izquierda la de la traducción de Rubín de Celis. Como quiera que ésta es bastante más extensa, hemos suprimido los párrafos que no utilizó Juan Justo García, pero no se ha alterado el orden en que figuran escritos ninguno de los dos libros en ningún caso. Se ha procurado conservar en lo posible el texto original (puntuación, tildes, etcétera).

Solamente algunas líneas del la historia del álgebra del Resumen Histórico de García Rodríguez, que hemos subrayado, no figuran en Saverien. El primer párrafo está redactado nuevamente y el último es una cita a un texto que no existía cuando se publicó el libro de Saverien.

| | |
|---|---|
| No obstante los esfuerzos que hicieron los matemáticos para perfeccionar la arismética , [...] se reconoció sin embargo que sus límites eran estrechísimos. Como los números son determinados , el que se sirviere de ellos para resolver problemas , solo podrá dar soluciones particulares. | Viendo los Aritméticos la limitacion de las espresiones numéricas, en las que es preciso repetir nuevo cálculo para cada diferente problema que se proponga, |
| Cada problema de un mismo género , pide su resolucion particular. La cosa que se busca, está casi expresada , aunque no designada especialmente : sin embargo , hay problemas en que los números no pueden representar la incógnita , y es menester para indicarla un carácter simbólico sin valor ninguno : de lo que carece la arismética.<br><br>... | sustituyeron á los números, caractéres generales simbólicos é indeterminados, y valiéndose de ciertos signos, formaron una nueva y universal Aritmética, con suyo auxîlio trasladando al papel con suma facilidad y concision los pensamientos y discursos más delicados, no solo lograron generalizar todos los cálculos y resoluciones, sino que encontraron medios de resolver innumerables problemas, que en vano habian intentado desatar por las reglas de la Aritmética. |
| los Griegos enseñaron esta invención á los Arabes […] que se servian de caractéres griegos [...] y formaron de esta manera una arismética simbólica , ó un arte que llamaron *Algial Walmul-Kabala* , que quiere decir componer , restablecer , lo que nosotros explicamos con la palabra *álgebra.* | La invencion de esta ciencia que se llamó Álgebra de *Algial Walmul-Kabala*, palabras arábigas que equivalen a *composicion*, *restitucion*, se atribuye con variedad á los *Indianos Árabes*, y también á los griegos; |

| | |
|---|---|
| si *Diofanto* , que vivia á la mitad del quarto siglo , no nos hubiese conservado la memoria de él : puede pasar tambien este autor por el primer Algebrista. Intitúlase su libro *Qüestiones Arisméticas :* en él se ven los progresos que los Arabes habian hecho [...], porque habian resuelto qüestiones, en que la incógnita es un quadrado | pero solo podemos asegurar que las *Cuestiones aritméticas de Diofanto*, que vivió en la mitad del siglo quarto, es la primera obra de Álgebra que se conoce. En ella usa de caractéres griegos, y segun lo que promete ya se alcanzaban entonces á resolver los problemas de segundo grado. |
| Esta obra , [...] fué comentada por *Hipatia ,* hija de *Teon* geómetra célebre : muger sábia […] y el pueblo [...] , atribuía al arte mágica los sucesos de *Hipatia.* […] Los enemigos de su mérito publicaron ella era la causa de la desavenencia que habia entre *San Cirilo* , Patriarca de Alexandría , y el Gobernador *Orestes*.[...] El pueblo , que se ap**o**deró de esta ilustre doncella, y la quitó la vida. ... | Esta obra tuvo diferentes Comentadores entre ellos la sabia *Hipátia*, hija del Filósofo *Teon*, muerta desgraciadamente en un tumulto del Pueblo, que la creía mágica, y cómplice en las desavenencias de *San Cirilo Patriarca de Alexandría* y el *Governador Orestes*. |
| por el siglo octavo un Arabe , llamado *Mohammed-Ben-Musa* compuso un tratado de álgebra, en que expuso la resolucion de los problemas del segundo grado , que aun no se habian resuelto perféctamente. | Por los años 800 de *Jesu-Christo* se publicó la obra más antigüa que conocemos de los Árabes en esta facultad, su Autor *Mohammet Ben-Musa*: espone en ella la resolucion de las equaciones de segundo grado, que aun parece no se habían resuelto enteramente |

| | |
|---|---|
| En el año de 1494 publicó estas reglas *Lucas del Burgo* en un libro intitulado *Summa Arithmetica ,y Geometria :* de este modo las estendió en Europa : los primeros que las usaron fueron los Italianos , y volvieron tomar el álgebra desde donde los antiguos la habian dexado , esto es , desde la resolucion de los problemas del tercer grado.<br>Un matemático , llamado *Scipion Ferreo* , halló una resolucion particular de este género de problemas [de tercer grado] , [...] y solo le comunicó á uno de sus dicípulos , llamado *Flórido* : pero este [...] desafió á los mas hábiles matemáticos [...] dirigiendo particularmente este desafio á *Tartalea* , [...] Tubo la dicha de encontrarla de un modo tan general , que [...] : quedó admirado su Rival, y tanto mas corrido y mortificado, quanto no pudo resolver ninguno de los problemas que *Tartalea* le propuso. | Hácia la mitad del siglo quince trajo estos conocimientos á *Europa* *Leonardo de Pisa*, desde el país de los Árabes á donde le había llevado el deseo de instruirse(*);<br><br>pero no se publicaron hasta que en 1494 dió á luz *Lucas del Burgo* su ya citada *Suma*, donde en su tratado de *arte mayor* (así llama al Álgebra)(**) esplica sus principios hasta las equaciones de segundo grado.<br>Disfrutaron esta obra los Italianos los primeros,y á poco tiempo *Scipion Ferreo*, Boloñés, halló la solucion de un caso particular de las equaciones de tercer grado: el qual hallazgo comunicó solo á su discípulo *Flórido*. Este creyó acreditarse desafiando a los Matemáticos y en especial á *Tartalea* (llamado así porque era tartamudo) á resolver estos problemas; pero habiendo este último logrado hallar un método general de resolver dichas equaciones, llenó de confusion á su *Rival*, y proponiéndole otros á que no pudo satisfacer. |

(*) El texto subrayado, erróneo (Leonardo de Pisa vivió entre 1170 y 1250), no figura en el libro de Saverien. En la tercera edición de los Elementos no aparece.

(**) Algo más adelante figura en Saverien:... imitando en esto á *Lucas del Burgo* que la llama en su obra *arte magiovre*.

| | |
|---|---|
| No obstante, habló de él al célebre *Cardano :* conociendo este el valor de semejante invencion , instó al autor para que le descubriese su método , y fueron sus instancias tan eficaces , que *Tartalea* se dexó vencer ; pero con la condicion expresa de que no habia de comunicar el secreto á nadie. Todo lo prometió Cardano , y | No fue tan feliz este Sabio en el proyecto de revelar su invencion; porque rendido á las instancias de *Cardáno*, se la comunicó, aunque despues de haberle exîgido juramento de jamas descubrirla: |
| nada cumplió : no solo divulgó este método , sino que se vendió por autor de él en un libro que publicó en el año de 1545 con el título de *arte magna :* nombre que dió á la álgebra , imitando en esto á *Lucas del Burgo* que la llama en su obra *arte magiovre. Tartalea* sintió con justa razon esta accion de *Cardano , y* se quejó fuertemente del perjuro , y del plagio.<br>... | y este en breve tiempo no solo faltó á su palabra publicando dicho método, sino que se vendió por autor de él en su libro *de Arte magna* que dió á luz pública en 1545: infidelidad de que se quejó amargamente *Tartalea*, |
| Con esto se encendió entre los dos una guerra de emulacion, que duró hasta que murió *Tartalea* en el año 1557. | y que fué ocasion de que se encendiese entre los dos una guerra, que duró hasta la muerte de este Matemático, sucedida en el año 1557. |
| Es cierto que *Cardano* obró injustamente ; pero es menester confesar que perfeccionó muchísimo la teórica de los problemas del tercer grado, | Aunque el proceder de *Cardano* fué injusto no se puede negar que publicó mucho mas perfecta la Teoría de los problemas de tercer grado, que se la había comunicado *Tartalea*. |

| | |
|---|---|
| y procuró igualmente resolver los del quarto. Dió motivo á esta indagacion un problema que le propuso un tal *Juan Colla* en que la incógnita estaba elevada á la quarta potestad. *Cardano* propuso á un jóven muy activo , y hecho al arte del cálculo, que trabajase en la solucion de este problema. Hízolo *Luis Ferrari* , (este era el nombre del jóven) añadiendo ciertas cantidades á cada miembro de la equacion que daba el problema, y exponiéndole de cierto modo , logró extraer la raiz , y por consiguiente resolverle ... | También contribuyó á la solucion de las equaciones de quarto grado, no solo con sus observaciones, sino escitando à un joven su discípulo llamado *Luis Ferrari*, también *Boloñés*, á desatar un problema de este grado que había propuesto un cierto *Juan Colla*, cuya solucion consiguió al cabo *Ferrari* á fuerza de reflexîones. |
| *Rafael Bombelli* compuso algunos años despues un tratado de álgebra para ilustrar , y facilitar mas todos estos descubrimientos. ... | Y estos son los descubrimientos con los que puestos en orden y algunas otras cosas que añadió, publicó su Álgebra *Rafael Bombelli* en 1589(*). |
| Monsieur *Viete* fué el primero que se sirvió de las letras del alfabeto para expresar las cantidades conocidas. Era este un Magistrado (*Maître des Requetes* ) de una capacidad singular para meditar. | Facilitó mucho los cálculos algébricos el pensamiento debido á M. *Viete* de espresar por letras del alfabeto las cantidades tanto incógnitas como conocidas; pues ahorró el embarazo que ocasionaba la multitud y diversidad de signos, caractéres y números de que hasta entonces se habia usado. |

(*) Esta fecha no figura en Saverien y es errónea (la primera edición es de 1572). En la tercera edición de los *Elementos* aparece la fecha de 1579, que es la de la segunda edición del Álgebra de Bomballi.[8]

| | |
|---|---|
| Este descubrimiento le conduxo á otro , que fué extraer la raiz de las equaciones literales por aproxîmacion ,<br>...<br><br>Hizo mas : [...] descubrió el arte de hallar las cantidades , ó raices incógnitas por medio de lineas : lo que se llama *construccion geométrica.* | Con esta ventaja averigüó muchas verdades acerca de la composicion de las equaciones; halló otra solucion particular de las de tercer grado(*), y otra de las de todos grados por aproxîmacion: y lo que es mas, fué el primer inventor de la *construccion geométrica* de las equaciones ó del modo de hallar sus raices en lineas, construyendo hasta las de tercer grado.<br>Este ilustre *Magistrado* nació en *Fontenay* cerca del año de 1540, y murió en el 1603(**).<br>En este mismo siglo florecieron otros muchos Matemáticos en *Italia*, *Francia*, *Inglaterra*, *Alemania*, *Holanda* y *España*, que publicaron diferentes obras y tratados de Álgebra, entre las cuales merece contarse la que dió á luz el *Portugues Pedro Nuñez*: |
| *Harriot,* matemático Ingles , enseñó el modo de aclarar , *y* separar estos términos. Para expresar las cantidades introduxo el uso de las letras minúsculas en lugar de las grandes, y juntándolas suprimió los signos [...] | pero hasta *Harriot* ninguno adelantó cosa notable á lo que dejamos referido. Este célebre *Ingles* substituyó las letras minúsculas á las mayúsculas que habia introducido *Viete*, suprimiendo tambien algunos signos que podian escusarse. |

(*) La frase: *Hizo ver con especialidad , que ciertos casos particulares del tercer grado podian resolverse* figura unas líneas antes en Saverien pero referidas a Bomballi.

(**)Los datos biográficos de Vieté son de la obra de Saverien, en la sección de biografías. Dice: *Viete nació en Fontenay, en Poitou, cerca del año 1540* [...] *murió tres años después* [de 1600].

| | |
|---|---|
| hacia pasar [los términos conocidos] al mismo lado de los demas, y poniéndoles signos contrarios á los que tenian , igualaba toda la expresion á cero<br><br>...dio con un importantísimo hallazgo : y es , que todas las equaciones compuestas , ó de órden superior , son productos de equaciones simples; de que concluyó que [...] en una equacion del segundo grado , la incógnita tiene dos valores , en una equacion del tercero , tres valores , &c.<br>… | Esplicó diestra y menudamente la composicion de las equaciones, considerándolas formadas de equaciones simples, é infiriendo de aquí el número de las raices de cada una, y las dió diferente forma, igualando á cero todos los términos que colocó en un solo miembro. |
| Este algebrista expuso todos estos descubrimientos en un libro que publicó en el año de 1631 cuyo título es : *Artis anayticae praxis.* | Todo esto y algunas cosas mas, se encuentran en su libro *Artis analyticae praxis*, publicado diez años despues de su muerte, que se verificó en Londres en 1621. |
| Mientras que él componia este libro , un geómetra Holandes , llamado *Alberto* Girardo, publicó otro , intitulado : *Nueva invencion en la álgebra ,* en que trató muy doctamente de las raices negativas [...], y mostró que en ciertas ecuaciones cúbicas , ó del tercer grado , hay siempre tres raices , [...]. Descubrió como á lo léxos *Girardo* otras verdades ; | Ya en 1629(*) habia salido á luz *la nueva invencion en el Álgebra del Holandés Alberto Girardo* con diferentes observaciones acerca de las raices negativas (**) de las equaciones de tercer grado, donde tambien se ven como de lejos algunos otros descubrimientos; |

(*) Esta fecha figura en el margen del texto de Saverien.
(**)Es posible que falte «y».

| | |
|---|---|
| ...pero para aclaradas era necesario [...] un ingenio de primera clase. Vino *Descartes* al mundo.<br>... | pero era necesario un genio como *Descartes* para aclararlos. |
| Este grande hombre mudó [...] el modo de expresar las potestades. Para la segunda […] , puso un 2 encima de la letra [...]. Para el cubo [...] , puso un 3 , y un 4 para la quarta : añadió [...] una regla para determinar en vista de los signos el numero de las raices verdaderas , ó falsas de una equacion. | Este hombre, célebre á todas luces, nacido en 1593(*), inventó los esponentes para la mas cómoda espresion de las potencias: determinó por los signos el número de raices positivas y negativas de una equacion que no las tiene imaginarias, lo cual demostró analíticamente despues M. *de Gua* en las *Memorias de la Academia del año de* 1741; |
| Igualmente dió un método para reducir las equaciones del quarto grado á ecuaciones del segundo , y este método se llama : *método de las indeterminadas*, ...<br>… | halló asimismo el método que llaman de las *Cascadas*, por el que redujo las equaciones de cuarto grado á dos de segundo(**): |
| Ultimamente , descubrió una regla para hallar todas las raices conmensurables , ó los divisores de todas las dimensiones que se quieran<br>... | y descubrió una regla para hallar todas las raices ó divisores conmensurables de las equaciones de todos grados |
| *Beaune* ,[...], quiso hacer mas sencillo este método : intentó buscar los limites de las equaciones,<br>....<br>*Newton […]* trabajó en hacer mas general esta regla. | M. *Beaune* cultivó este método por medio de los límites de dichas raices, y el incomparable *Newton* trabajó en lo mismo, y le siguieron *Watsenaer*, *Hudd*, *Merrey* y otros.(***) |

(*) Descartes nació en 1696 y así figura en la sección de biografías de Saverien. Esta fecha aparece corregida en la tercera edición de los Elementos.

(**) Saverien cita el método de las cascadas, de Rolle, unas páginas más adelante. La confusión aparece corregida en la siguiente edición.

(***) Hudd se refiere a Hudde, según la tercera edición. Watsenaer y Merrey no figuran en el índice [9] y no aparecen en la tercera edición de los *Elementos*.

| | |
|---|---|
| ...*Leibnitz* tiene parte en la gloria de esta invencion. [...] , encontró tambien el medio de extraer las raices irracionales de las equaciones. ...<br>y de esta manera resolvió las dos expresiones radicales que componen la fórmula de *Cardano* en una serie infinita. | Tambien *Leibniz* ha contribuido con un método admirable para el caso irreducible, esto es, para quando las raíces de la equacion cúbica son reales y aparecen en forma imaginaria, reduciendo á serie infinita las espresiones radicales de *Cardano*. M. *Nicole* le ha ilustrado despues. *Moivre* halló un modo de estraer las raices de las cantidades en parte reales y en parte imaginarias. A *Lagni* se debe otro para resolver qualesquiera equaciones numéricas que perficionó M. *de la Grange*, y es generalísimo para todo género de raices.(*) |
| *Newton , [...]*, juzgó que el único medio era determinarlas por aproxîmacion | Sin embargo, por quanto en muchísimos casos aun no son suficientes estos descubrimientos, se recurrió por último á buscar las raices por aproxîmacion. En este género es escelente el método que tenemos de *Newton*, |
| *Newton* propuso otro infinítamente mas general , y despues de él *Wallis, Halley , Rapson , Juan Bernoulli , y Wolfio* han hallado otros , pero todos se reducen al de *Newton.* | que viene á ser el mismo que los de *Halley*, *Rapson*, *Ward(**)*, y *Juan Bornoulli*, aunque sacados por diferente camino. Tambien son apreciables los de Tailor y Tomas Simpson ingleses |

(*) Este párrafo, que no figura en Saverien, no aparece en la tercera edición de los Elementos de Juan Justo García.
(**) Este nombre no figura en Saverien ni en la tercera edición de los Elementos.

| | |
|---|---|
| *Newton* habia hallado una regla bastante sencilla [para conocer en las equaciones el numero de las raices imaginarias], pero era imperfecta.<br><br>Las reglas que han dado *MacLaurin* y *Campbell ,* algebristas Ingleses , y *de Gua,* y *Fontaine* matemáticos Franceses, son mas perfectas que las de *Newton.* Sobre todo , el último, que hizo estudio particular de esta materia , ha prometido dar tablas , que facilitando mucho la práctica de estas reglas...<br><br>… el mas ingenioso uso que se ha hecho de esta arismética universal, es haber computado por medio de ella las probabilidades , y los acasos. | Últimamente debemos á *Newton* una regla muy sencilla para conocer el número de raices imaginarias que hay en una equacion, cuya demostracion que no quiso publicar, se encuentra en los *Elementos de Álgebra de Clairaut*(*).<br><br>Aún son mas perfectas las que despues han descubierto *Maclaurin* y *Campbell* ingleses, y *Guay*, *Fontaine* franceses: en especial *Fontaine*, que dió la última mano á esta materia, en la que nada deja que desear con las tablas que promete para facilitar la práctica de su método.<br>Solo me resta añadir, para concluir esta noticia histórica del Álgebra, la aplicacion que se ha hecho de ella al conocimiento de *las probabilidades y acasos*.<br>Esta aplicacion de que en el dia se hace mucho caso, y con razon, se reduce á juzgar, ó inferir de ciertos antecedentes y circunstancias el número de veces que podrá suceder una cosa contingente, ó si sucederá bien ó mal: pero en la inteligencia de que el mayor, ó menor acierto de estas consecuencias ó resultados será siempre á proporcion del número y calidad de dichos antecedentes. |

(*) Esta frase figura en Saverien unas líneas antes: *Newton* quando publicó su método , reservó en si la demostracion de él. […] y Monsieur *Clairaut* en sus *elementos de álgebra* mostró el camino por donde pudo hallarse este método.

| | |
|---|---|
| Monsieur *Huygens* fué el primero que se sirvió de ella para determinar la fortuna de los jugadores. *Pascal* tambien escribió sobre esta materia , y Monsieur de *Moivre* compuso un tratado sobre lo mismo , intitulado : *De Mensura sortis.* | *Huygbens* fué el primero que aplicó el cálculo á los juegos de suerte, y despues *Pascal* y *Moivre*. |
| Monsieur de *Montmort,* […] publicó a principios de este siglo [...] *Ensayo de la analisis sobre los juegos de suerte.* En este tratado da la solucion de diferentes problemas sobre los juegos de de cartas que entónces se estilaban como son los *cientos ,* el *hombre ,* &c. *y* los de suerte , corno el *faraon ,* la *banca ,* el *sacanete ,* y el t*rece.* Determina la pérdida , y la ganancia de los jugadores en todas las circunstancias ... | M. *Montmort* publicó á principios de este siglo sus *Ensayos del análisis sobre los juegos de suerte,* donde en todos los casos posibles, determina la ganancia, ó pérdida de los jugadores en los juegos *del Faraón*, *la Banca*, *El Trece*, *el Sacanete*, *el Hombre y los Cientos* que entonces se usaban, valiéndose de sutiles y preciosas reglas, hijas de una profunda meditacion sobre la materia |
| Observando estas dos reglas , determinó el Doctor *Halley* el grado de la mortalidad del género humano : y el fruto que saca de la solucion de este problema , es hallar á que interes se deban pagar los réditos del fondo perdido ó vitalicio. Reduce su calculo á una tabla suputada por diferentes edades de cinco en cinco años, desde uno hasta setenta. ... | Por las mismas determinó despues el *Doctor Halley* el grado de mortandad del género humano, por el que averigüa el interés á que deben pagarse los réditos del *Fondo perdido ó vitalicio*, de lo que formó tablas, llevando cuenta en ellas con la edad y número de personas en cuya cabeza se impone el principal |

| | |
|---|---|
| *Struiks* , sabio geómetra Holandes , […] determinó por medio de otras tablas semejantes la duracion de los matrimonios | *Struiks*, sabio Geómetra *Holandés*, determinó en otras la duracion de los matrimonios.<br><br>A estas obras se siguieron otras muchísimas en todas lenguas, pero ninguna elementar, hasta que *Emerson* publicó sus tres tratados sobre los tres puntos á que se puede aplicar el cálculo de los acasos; á saber, 1º *Leyes de casualidad*, 2º *Rentas ó Pensiones anuales*, 3º *Compañías*, escritos con el mayor pulso, los quales se hallan en sus *Miscelaneas sobre diferentes asuntos de Matemática*, impresas en *Londres* en 1776, y compone un tomo en 8º. |

## 4.2 El resto del Resumen Histórico

Mantiene las mismas características que la historia del álgebra. Adjuntamos dos fotografías de un párrafo de la historia de la aritmética y de otro de la geometría pertenecientes a ambos autores.

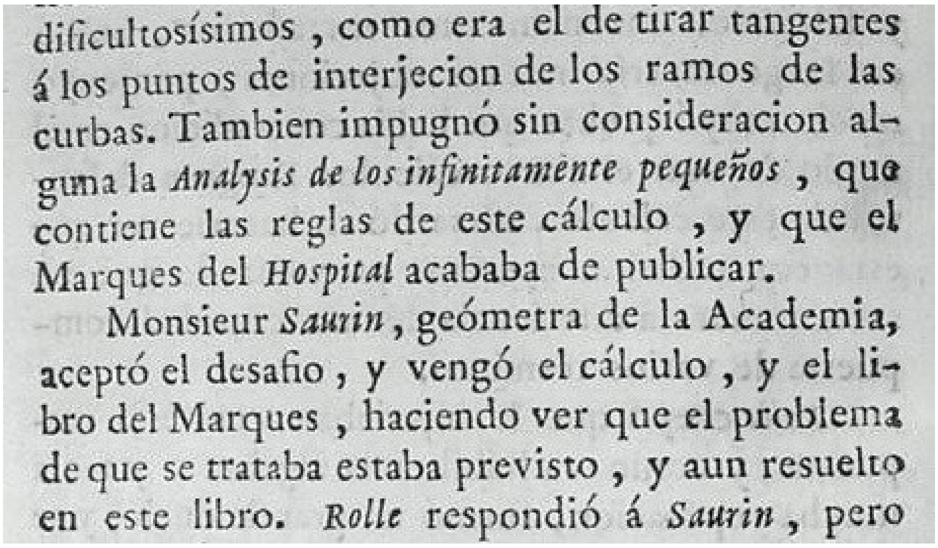
números , á fin de facilitar el cálculo. Monsieur *Weigel* , profesor de matemáticas en Ginebra, creyó que podria hacer mas sencillo este arte por medio de solos tres caractéres , y en el año de 1687 publicó una arismética con el título de *arismética tetráctica* , llamándola así porque solo se

se sirve de los caractéres 1. 2. 3. y 0. y no cuenta mas que hasta 4. como nosotros contamos hasta 10. en la arismética comun.

Parcial de las páginas 23 y 24 del texto traducido por Rubín de Celis

Aumentadas de este modo las meditaciones sobre las razones de los números , M. *Wigel* , Profesor de Matemáticas en *Ginebra*, con el designio de facilitar aun mas los cálculos , ideó y publicó en 1687 un sistema de aritmética que apellidó *Tetráctica* , con el que contando solo hasta quatro , esto es , usando únicamente de los números 1 , 2 , 3 y *cero* , egecutaba todas las reglas de arit-

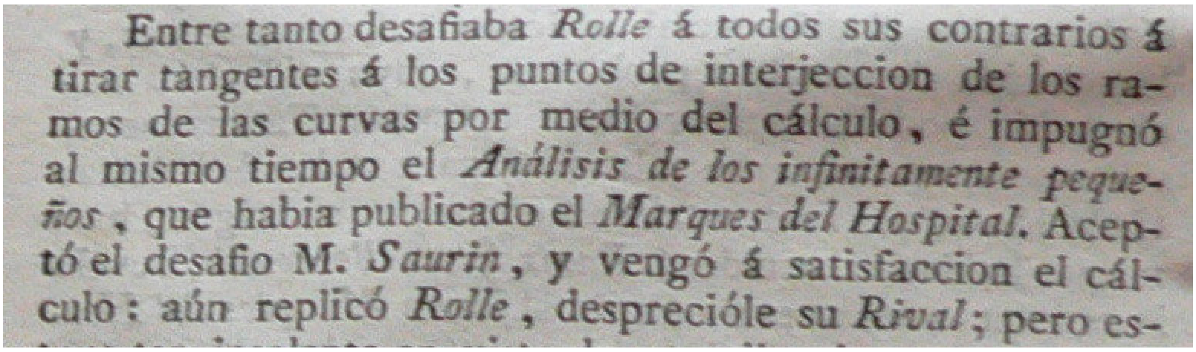
Parcial de la página VI del texto de Juan Justo García



dificultosísimos , como era el de tirar tangentes á los puntos de interjecion de los ramos de las curbas. Tambien impugnó sin consideracion alguna la *Analysis de los infinitamente pequeños* , que contiene las reglas de este cálculo , y que el Marques del *Hospital* acababa de publicar.

Monsieur *Saurin* , geómetra de la Academia, aceptó el desafio , y vengó el cálculo , y el libro del Marques , haciendo ver que el problema de que se trataba estaba previsto , y aun resuelto en este libro. *Rolle* respondió á *Saurin* , pero

Parcial de la página 110 del texto traducido por Rubín de Celis



Entre tanto desafiaba *Rolle* á todos sus contrarios á tirar tangentes á los puntos de interjeccion de los ramos de las curvas por medio del cálculo, é impugnó al mismo tiempo el *Análisis de los infinitamente pequeños* , que habia publicado el *Marques del Hospital*. Aceptó el desafio M. *Saurin* , y vengó á satisfaccion el cálculo: aún replicó *Rolle* , desprecióle su *Rival*; pero es-

Parcial de la página XXVI del texto de Juan Justo García

## Conclusión

Del fuerte paralelismo de ambos textos, siendo escrito con anterioridad y más extenso el de Saverien, unido a que los párrafos de Juan Justo García no contenidos en el texto de Saverien son pocos y a veces erróneos, podemos concluir que la fuente casi exclusiva en la que está fundado el Resumen Histórico de los *Elementos de aritmética, álgebra y geometría* de Juan Justo García en la edición de 1782 es la traducción de Rubín de Celis citada.

## Bibliografía


[1] Cuesta Dutari, Norberto. *El maestro Juan Justo García*. Universidad de Salamanca. Salamanca, 1974. **162**.

[2] Cuesta Dutari, Norberto. *El maestro Juan Justo García*. Universidad de Salamanca. Salamanca, 1974. **180**.

[3] Sánchez Pérez, José Augusto. *Las matemáticas en la biblioteca de El Escorial*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1929. **124**.

[4] Cobos, J. M. y Fernández-Daza, C. *El cálculo infinitesimal en los ilustrados españoles: Francisco de Villalpando y Juan Justo García*. Univ. de Extremadura. Cáceres, 1997. **72.**

[5] Teixedó, F. *Científicos Extremeños*. Universitas Editorial. Badajoz, 1997. **188.**

[6] Maz Machado, Alexander. *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX* (tesis doctoral), Granada 2005, **234.** `http://cumbia.ath.cx:591/pna/ Archivos/MazA05-2802.PDF` (5 abril 2008).

[7] Cabezas, J. y Moreno, F. «Un análisis de los *Elementos de aritmética, álgebra y geometría* de Juan Justo García Rodríguez» en: Boletín de la Sociedad Puig Adam, 60 (2002), **63-70.**

[8] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies /Bombelli.html` (5 abril 2008).

[9] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/BiogIndex. html` (5 abril 2008).

# Una aproximación a la Física-Matemática en el aula en el contexto del Efecto Compton Inverso

**Jesús Pablo Martín Hernández**
Centro particular de Estudios Teóricos Escalona 33, Madrid 28024
martinpablo@auna.com

**Abstract**

*Compton formula, which gives the wavelength shift of a photon scattered by an electron at rest , can be generalized to the case in which the electron has a non negligible linear momentum. This generalization is based in the conservation of relativistic energy and momentum. The contrast with the Inverse Compton Effect is also considered.*

## Introducción

El efecto Compton constituye una confirmación experimental de la teoría de Einstein de los fotones y de la teoría de los cuantos de Planck. En el proceso, un fotón impacta con un electrón en reposo y le cede parte de su energía de tal forma que se produce un aumento en la longitud de onda del fotón final. Todo ello lo corrobora la fórmula de Compton que establece que el corrimiento en la mencionada longitud de onda del fotón depende exclusivamente de su ángulo de difusión en el LAB.

Ahora pasamos a estudiar lo que llamamos el Efecto Compton generalizado. Ello consiste en la difusión de un fotón por un electrón en movimiento con una velocidad no nula, por consiguiente. Entonces se produce un desplazamiento secundario en el efecto Compton estándar. Efectivamente, si los electrones viajan al encuentro de los fotones se produce un desplazamiento hacia la izquierda ami-norando el efecto Compton normal. Por el contrario, si los momentos del electrón y el fotón apuntan en el mismo sentido entonces se produce una aumento respecto al desplazamiento Compton normal.

Este desplazamiento secundario lo refleja la fórmula generalizada de Compton que pasamos a hallar. Para deducir esa fórmula se procede de manera análoga al proceso que se sigue para hallar la fórmula de Compton normal, solo que ahora se tiene en cuenta el movimiento de los electrones. A partir de aquí puede hallarse tanto el ángulo como la energía cinética de retroceso del electrón (*the electrón back scattering*) y lo más importante, se establece la consistencia con el llamado Efecto Compton Inverso.

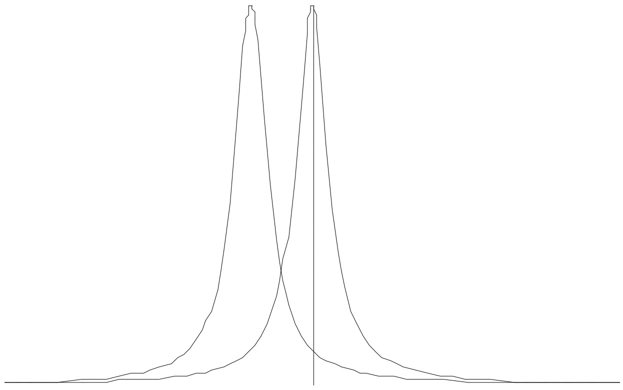


Figura 1: *Representación cualitativa del desplazamiento Compton secundario en la situación en la que los electrones viajan al encuentro de los fotones. (En abscisas, desplazamiento en la longitud de onda)*

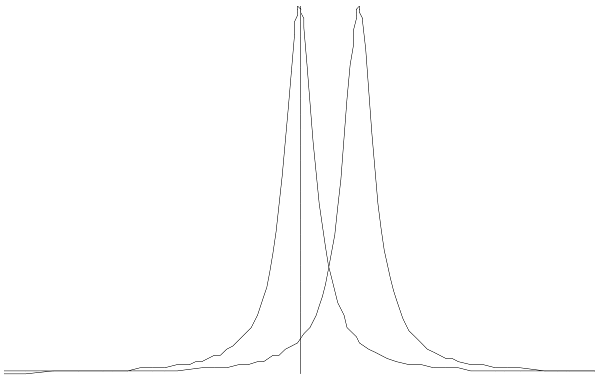


Figura 2: *Representación cualitativa del desplazamiento Compton secundario en la situación en la que los momentos de las particulas apuntan en el mismo sentido. (En abscisas, desplazamiento en la* longitud de onda y en ordenadas, en ambos casos, intensidad recogida a un cierto ángulo distinto de cero)

Si el ángulo de difusión del fotón es de cero grados ( difusión hacia delante) entonces no se produce desplazamiento en la longitud de onda ni en el efecto Compton normal ni en el desplazamiento secundario.

## 1 La fórmula de Compton generalizada

Planteamos seguidamente los principios de conservación de la energía cinética relativista y momento. Así la conservación del momento en dirección longitudinal produce:

$$\Delta = p_0 - p = p_\gamma \cos(\theta) + p(e)\cos(\phi)$$

donde Po es el momento entrante del fotón, "p" es el momento entrante del electrón, $P_\gamma$ es el momento saliente del fotón y p(e) es el momento saliente del electrón. Además en la fórmula aparecen los ángulos de difusión del fotón "θ" y "Φ" para el electrón.

La conservación del momento en dirección transversal adquiere la forma:

$$p_\gamma sen(\theta) = p(e) sen(\phi) \rightarrow p(e)^2 = \Delta^2 + p_\gamma^2 - 2p_\gamma \Delta \cos(\theta)$$

Introducimos esta relación en la ecuación de conservación de la energía cinética , con lo cual se halla la relación:

$$h\nu_0 + k_1 = h\nu + k_2 \rightarrow \frac{h\nu_0 - h\nu}{c} = p_0 - p_\gamma =$$
$$\frac{1}{c}\sqrt{m_0^2 c^4 + c^2(\Delta^2 + p_\gamma^2 - 2\Delta p_\gamma \cos(\theta))} - \frac{1}{c}\sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$$

donde aparece el final del segundo sumando la energía relativista total del electrón inicial.

Ahora se procede a elevar al cuadrado la relación anterior con lo cual se halla la expresión:

$$(p_0 - p_\gamma)^2 + (E/c)^2 + 2(p_0 - p_\gamma)E/c = m_0^2 c^2 + \Delta^2 - 2p_\gamma \Delta \cos(\theta) + p_\gamma^2$$

Notemos que las dimensiones de todos los sumandos de la expresión anterior son de momento al cuadrado. Si desarrollamos esa expresión resulta una ecuación de primer grado en la variable "momento emergente del fotón", a saber:

$$p_0^2 + p_\gamma^2 - 2p_0 p_\gamma + \left(\frac{E}{c}\right)^2 + \frac{2Ep_0}{c} - \frac{2Ep_\gamma}{c} = m_0^2 + \Delta^2 - 2\Delta p_\gamma \cos(\theta) + p_\gamma^2$$

Procedemos a despejar el momento emergente del fotón para ello damos la siguiente relación intermedia:

$$p_\gamma \left[2\Delta\cos(\theta) - 2E/c - 2p_0\right] = m_0^2 c^2 + \Delta^2 - 2Ep_0/c - (E/c)^2 - p_0^2$$

Teniendo en cuenta que para fotones la longitud de onda se relaciona con la cantidad de movimiento a través de la constante de Planck (Hipótesis de Broglie) tenemos para la longitud de onda del fotón emergente la expresión:

$$\lambda_\gamma = \frac{2h(\Delta\cos(\theta) - E/c - p_0)}{m_0^2 c^2 + \Delta^2 - 2Ep_0/c - (E/c)^2 - p_0^2}$$

Seguidamente desarrollamos el denominador de la expresión anterior con objeto de hallar la expresión simplificada final que estamos buscado, así es:

$$D = m_0^2 c^2 + p_0^2 + p^2 - 2pp_0 - 2Ep_0/c - \frac{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}{c^2} - p_0^2 =$$
$$= -2p_0(p + E/c)$$

De modo que el corrimiento en la longitud de onda en el efecto Compton generalizado se expresa en la forma:

$$\delta\lambda = \lambda_\gamma - \lambda_0 = \left(\frac{h}{p_0}\right)\left\{\frac{E/c + p_0 - \Delta\cos(\theta)}{p + E/c} - 1\right\} = \left(\frac{h}{p_0}\right)\left\{\frac{\Delta(1 - \cos(\theta))}{E/c + p}\right\}$$

Esta fórmula estable que el corrimiento en la longitud de onda del fotón depende de tres parámetros: Los momentos entrantes para las partículas y el ángulo de difusión del fotón en el LAB.

Cuando el LAB coincide con el sistema del centro de masa, los momentos iniciales del fotón y el electrón son idénticos y en esta situación el fotón se difunde sin cambio en su longitud de onda.

Para observar la tendencia que se sigue representamos la cantidad adimensional dada por:

$$f(p, p_0, \theta) = m_0 c \delta\lambda / h$$

Efectuamos entonces la representación de la función anterior para difusión transversal y hacia atrás del fotón con un momento entrante del fotón de 1 MeV/c.

$$f(p,1,\theta) = 0.511\left\{\frac{(1-p)(1-\cos(\theta))}{p+\sqrt{0.511^2 + c^2 p^2}}\right\}, \theta = \pi/2, y, \pi$$

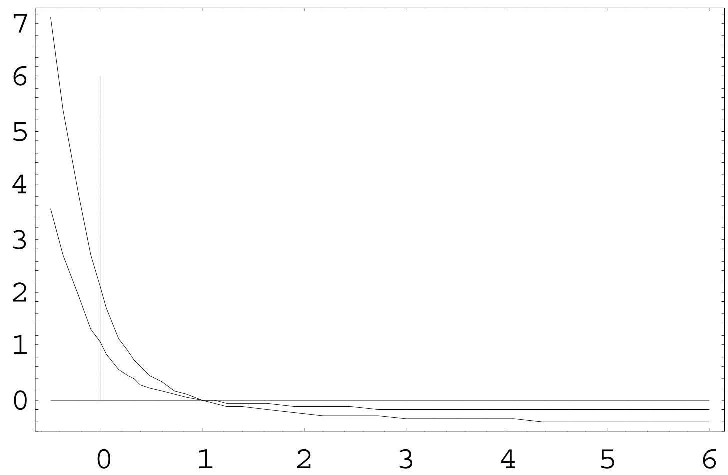



Figura 3: *Momento entrante del electrón(MeV/c).*
*Se representan las cantidades adimensionales f(p,1,π/2) y f(p,1,π) en función del momento entrante del electrón.*

Notemos en la Figura 3 cómo existe un límite asintótico de pérdida de longitud de onda que acontece cuando el electrón es ultrarelativista. La longitud de onda del fotón final es menor que la longitud de onda del fotón entrante. El límite de pérdida es:

$$A(\theta) = Lim_{p\to\infty} m_0 c\delta\lambda / h = -\frac{m_0 c}{2p_0}(1-\cos(\theta))$$

Esa ecuación no es más que la especificación de las asíntotas horizontales para la representación efectuada de las distintas funciones adimensionales en la figura 3.

Seguidamente pasamos efectuar un estudio de las características del electrón de retroceso como son su energía cinética y su ángulo de difusión en el LAB. Necesitamos utilizar el programa MATHEMATICA para llevar a cabo el mencionado estudio. Hay un comando en el mencionado programa que permite fusionar un mismo gráfico una colección de gráficos independientes, este comando es:

Show[%,%%,%%%...........................]

## 2 La energía cinética del electrón de retroceso

Partimos de la fórmula generalizada para difusión transversal del fotón y se llega a una relación que da el momento final del fotón en función de los momentos iniciales de las partículas en la forma:

$$p_\gamma = p_0\left(\frac{p + E/c}{p_0 + E/c}\right)$$

De esta forma la energía cinética de retroceso del electrón para difusión transversal del fotón depende solamente de esos dos parámetros en el modo:

$$k_2 = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2\Delta^2 + c^2 p_0^2\left(\frac{p + E/c}{p_0 + E/c}\right)^2} - m_0 c^2$$

Seguidamente programamos en MATHEMATICA  para representar esa energía:

```
F[p_]=Sqrt[0.511^2+p^2]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(50-p)^2+50^2*((p+F[p])/(50+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,300},
Frame->True,PlotRange->{0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(70-p)^2+70^2*((p+F[p])/(70+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,300},
Frame->True,PlotRange->{0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(90-p)^2+90^2*((p+F[p])/(90+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,300},
Frame->True,PlotRange->{0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(110-p)^2+110^2*((p+F[p])/(110+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,
300},Frame->True,PlotRange->{0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(130-p)^2+130^2*((p+F[p])/(130+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,
300},Frame->True,PlotRange-> {0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(150-p)^2+150^2*((p+F[p])/(150+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,
300}, Frame->True,PlotRange->{0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(170-p)^2+170^2*((p+F[p])/(170+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,
300}, Frame->True,PlotRange->{0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(190-p)^2+190^2*((p+F[p])/(190+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,
300}, Frame->True,PlotRange->{0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(210-p)^2+210^2*((p+F[p])/(210+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,
300},Frame->True, PlotRange->{0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(230-p)^2+230^2*((p+F[p])/(230+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,
300,Frame->True,PlotRange->{0,250}]
```

```
Plot[Sqrt[0.511^2+(250-p)^2+250^2*((p+F[p])/(250+F[p]))^2]-0.511,{p,-300,
300},Frame->True,PlotRange->{0,250}]
```

Este programa representa de forma individual once curvas. Para fusionar todas las curvas en un mismo gráfico, que es la representación que interesa, utilizamos el comando Show en la forma:

```
Show[%,%%,%%%,%%%%,%%%%%,%%%%%%,%%%%%%%,%%%%%%
%%,%%%%%%%%%,%%%%%%%%%%,%%%%%%%%%%%]
```

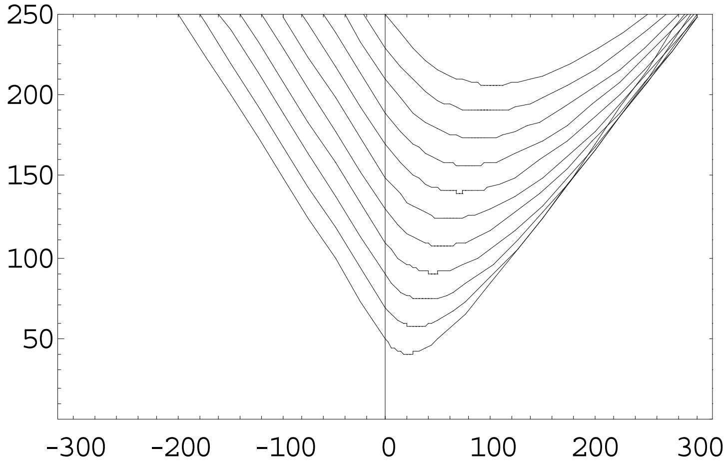



Figura 4: *Momento inicial del electrón en MeV/c.*
Se representa la energía cinética del electrón de retroceso
en Mev frente al momento de los electrones entrantes
para los siguientes valores del momento inicial del fotón:
50, 70, 90, 110, 130, 150, 170, 190, 210, 230 y 250 Mev.

Para cada valor del momento inicial del fotón existe un momento inicial del electrón que hace que la energía cinética del electrón de retroceso sea mínima, situación ésta en la que se transfiere el momento máximo al fotón final.

## 3 El ángulo de retroceso del electrón

Consideramos nuevamente la difusión transversal del fotón. El principio de conservación del momento lineal permite aislar el ángulo con el que retrocede el electrón final, el resultado, al igual que en el caso del cálculo de la energía cinética de retroceso, depende sólo de los momentos iniciales de las partículas que interaccionan. Si se especifican los momentos iniciales de los fotones en 50,120 y 150 Mev/c entonces la representación del ángulo se da seguidamente.

$$\phi = ArcTan\left(\frac{p_\gamma}{p_0 - p}\right) = ArcTan\left(\frac{p_0}{(p_0 - p)}\left(\frac{p + E/c}{p_0 + E/c}\right)\right)$$

Se producen discontinuidades de salto finito cuando $p_0$=p , es decir, cuando el LAB coincide con el sistema del centro de masa. En esa situación tanto el fotón como el electrón finales se difunden en un ángulo recto. Esta situación la representamos en el siguiente esquema:

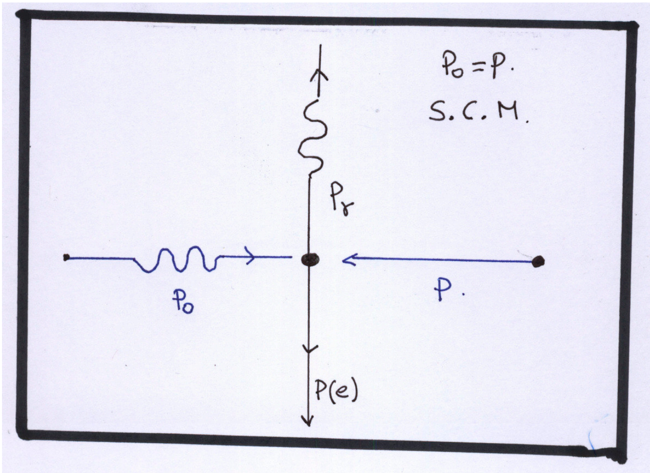



Figura 5: *Representación de una colisión electrón-fotón en el sistema del centro de masa. Los momentos finales de las partículas son idénticos pero están indeterminados.*

Diremos que en esa situación descrita hay libertad en la elección de los momentos de las partículas finales. Se trata de una situación de indeterminación que satisface el principio de conservación del momento lineal tanto en dirección longitudinal como transversal ( en esta situación se exige que $p_\gamma$=p(e) pero no se impone ninguna condición más).

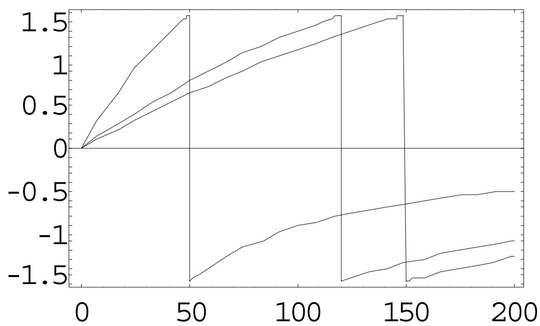



Figura 6: *Momento inicial del electrón MeV/c (Φ en función de "p")*

## 4 El efecto Compton Inverso

El efecto Compton Inverso consiste en la difusión de fotones de escasa energía (del orden de los electrón-voltios) por electrones ultrarelativistas altamente energéticos, por consiguiente. En el proceso el fotón final se difunde hacia atrás. Estamos pues tratando la situación en la cual un haz láser se ilumina con un haz colimado de electrones. En esta situación los electrones viajan al encuentro de los fotones.

La energía del fotón dispersado se escribe en función de la energía de los electrones iniciales a través del siguiente parámetro adimensional:

$$\chi = \frac{4h\nu_0 E}{E_0^2}$$

Donde aparece la frecuencia del fotón inicial, la energía inicial del electrón y la energía en reposo del electrón elevada al cuadrado, de forma que, la energía que adquiere el fotón final se expresa en la forma:

$$E_\gamma = \frac{\chi}{1+\chi} E$$

Consideramos ahora los experimentos que se realizaron en el sincrotrón ARUS en Ereván , en el cual se ilumina un haz laser de energía 1,78 Ev con un haz de electrones de 6 Gev, entonces el parámetro toma el valor: $\chi$=0,1636 y los fotones adquieren una energía extraordinariamente grande dada por: 0,84 Gev.

El Efecto Compton Inverso es de importancia indudable en astrofísica. Se cree que la radiación ambiente de una galaxia se debe a este proceso. También se cree que este proceso interviene en la radiación X procedente de una explosión Supernova y también es el mecanismo por el cual los cuásares emiten rayos X.

Otro efecto importante relacionado con la cuestión que se estudia es el llamado Efecto Sunyaev-Zeldovic que permite determinar alteraciones en el espectro del fondo difuso cosmológico de microondas debidas a la interacción de los fotones del mencionado fondo con los electrones presentes en la vecindad de una galaxia.

Lo que no predice la fórmula de Compton generalizada es el por qué los fotones se difunden hacia atrás. En cambio sí lo explica *la Electrodinámica Cuantica*, sin embargo no vamos a considerar este punto pues requeriría una extensión en el artículo de la cual no disponemos.

El trabajo que resta pasa por contrastar esa expresión para la energía del fotón final y la expresión que se sigue de la fórmula de Compton generalizada.

## 5 El contraste Efecto Compton Inverso y la fórmula generalizada de Compton: la conjetura Compton

Consideramos la fórmula de Compton generalizada en su versión energía para difusión hacia atrás del fotón. Entonces la energía del fotón emergente se escribe en la forma:

$$E_\gamma = \frac{h\nu_0}{1+\dfrac{\alpha}{1+\sqrt{1+x}}}$$

donde seguidamente se describen los parámetros que aparecen: $\nu_0$ es la frecuencia del fotón inicial. El parámetro alfa, que es adimensional viene dado por:

$$\alpha = 2(p_0 / p - 1) = 2(h\nu_0 / E - 1), donde, E \approx cp$$

Se ha tenido presente que para electrones ultrarelativistas su energía total es muy aproximadamente igual el producto de la velocidad de la luz por su momento.

Finalmente el parámetro x es muy pequeño pues viene dado por:

$$x = (E_0 / E)^2$$

donde Eo es la energía en reposo del electrón. Tiene sentido entonces el desarrollo en serie de potencias para la energía final del fotón. El primer término del desarrollo en serie de potencias viene dado por:

$$E_\gamma(0) = \frac{h\nu_0}{1+\alpha/2} = \frac{h\nu_0}{1+h\nu_0/E-1} = E$$

Pasamos a calcular el segundo término del desarrollo en serie de potencias respecto a la variable "x".

$$\frac{dE_\gamma}{dx} = \frac{\alpha h\nu_0}{2\sqrt{1+x}(1+\alpha+\sqrt{1+x})^2}$$

$$\frac{dE_\gamma}{dx}(0) = \frac{\alpha h\nu_0}{8(h\nu_0)^2}E^2 \rightarrow x\frac{dE_\gamma}{dx}(0) = \frac{\alpha}{8(h\nu_0)}E_0^2 = \frac{h\nu_0/E-1}{4h\nu_0/E_0^2} =$$

$$= \frac{h\nu_0 - E}{4h\nu_0 E/(E_0^2)} = -\chi^{-1}E$$

Debemos valorar esta derivada en el punto cero para tener el segundo término. Notemos que se ha efectuado la aproximación de que el fotón tiene una energía (del orden del electrón–voltio) despreciable frente a la energía del electrón (del orden del gigaelectrón-voltio).

El cálculo del tercer término del desarrollo en serie de potencias de la energía comporta el cálculo de la derivada segunda que viene a ser:

$$\frac{d^2E_\gamma}{dx^2} = -\frac{\alpha h\nu_0}{2}\frac{1}{(1+x)\left[1+\alpha+\sqrt{1+x}\right]^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{1+\alpha+\sqrt{1+x}}\right\}$$

Prosiguiendo a valorar la expresión anterior en el origen se tiene que:

$$\frac{d^2E_\gamma}{dx^2}(0) = -\frac{\alpha h\nu_0}{2}\frac{1}{(2+\alpha)^3} \rightarrow \frac{1}{2}x^2\frac{d^2E_\gamma}{dx^2}(0) = -\frac{\alpha h\nu_0}{4}\frac{1}{(2+\alpha)^3}\left(\frac{E_0}{E}\right)^4 =$$

$$= -\frac{1}{16}\frac{(h\nu_0 - E)}{E}\frac{1}{(h\nu_0)^2}\frac{E_0^4}{E} = \frac{E}{(4h\nu_0 E/E_0^2)^2} = \chi^{-2}E$$

Vamos con el cuarto término del desarrollo en serie con objeto de descubrir una ley general del comportamiento de la derivada n-ésima.

La tercera derivada la expresamos en forma fraccionada como sigue:

$$\frac{d^3E_\gamma}{dx^3} = \frac{\alpha h\nu_0}{2}(F(x,\alpha)+G(x,\alpha))M(x,\alpha) + \frac{\alpha h\nu_0}{2}T(x,\alpha)N(x,\alpha)$$

$$F(x,\alpha) = \frac{1}{(1+x)^2\left[1+\alpha+\sqrt{1+x}\right]^2}$$

$$G(x,\alpha) = \frac{1}{(1+x)^{3/2}\left[1+\alpha+\sqrt{1+x}\right]^3}$$

$$M(x,\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{1+\alpha+\sqrt{1+x}}$$

Continuamos con la expresiones independientes para las otras tres funciones:

$$T(x,\alpha) = \frac{1}{(1+x)\left[1+\alpha+\sqrt{1+x}\right]^2}$$

$$N(x,\alpha) = \frac{1}{2(1+x)\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}\left[1+\alpha+\sqrt{1+x}\right]^2}$$

Procedemos a valor la derivada tercera en el origen, se encuentran principalmente los siguientes sumandos:

$$\Gamma_1 = \frac{\alpha h\nu_0}{2}\left(\frac{1}{2+\alpha}\right)^2\left\{1+\frac{1}{2+\alpha}\right\}\left(\frac{1}{2+\alpha}\right) \approx \frac{\alpha h\nu_0}{2}\left(\frac{1}{2+\alpha}\right)^4, pues, 3+\alpha \approx 1$$

$$\Gamma_2 = \frac{\alpha h\nu_0}{4}\left(\frac{1}{2+\alpha}\right)^2\left\{\frac{\alpha^2+4\alpha+5}{(2+\alpha)^2}\right\} = \frac{\alpha h\nu_0}{4}\left(\frac{1}{2+\alpha}\right)^4$$

De modo que el valor de la derivada tercera en el origen es:

$$\frac{d^3E_\gamma}{dx^3}(0)=\Gamma_1+\Gamma_2=\frac{3}{4}\frac{\alpha h\nu_0}{(2+\alpha)^4}$$

$$\frac{1}{6}\frac{d^3E_\gamma}{dx^3}(0)x^3=\frac{1}{8}\frac{1}{16}\frac{\alpha}{(h\nu_0)^3}E^4\left(\frac{E_0}{E}\right)^6=\frac{1}{64(h\nu_0)^3/(E_0^6)}\frac{h\nu_0-E}{E}\left(\frac{1}{E}\right)^2=$$

$$=-\frac{E}{(4h\nu_0 E/E_0^2)^3}=-\chi^{-3}E$$

¿En qué consiste entonces la conjetura Compton?. Se establece que el término general del desarrollo en serie de potencias de la energía final del fotón es proporcional, a través de una potencia del parámetro adimensional, a la energía total relativista inicial del electrón.

Ahora debemos introducir una definición. Se dice que una función real de variable real es analítica en un cierto dominio si para cada valor de la variable en ese dominio la serie de potencias asociada es convergente.

En este sentido la energía del fotón final es una función analítica si y solamente si el parámetro adimensional es superior a la unidad. Es decir, $E_\gamma$ es analítica si $\chi>1$.

Esa condición se desprende de la necesidad de que la siguiente serie geométrica sea convergente.

$$\frac{1}{n!}\frac{d^nE_\gamma}{dx^n}(0)x^n=(-1)^n\chi^{-n}E$$

$$E_\gamma=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^nE_\gamma}{dx^n}(0)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\chi^{-n}E=\frac{1}{1+\chi^{-1}}E=\frac{\chi}{1+\chi}E$$

Ahora cabría la pregunta: ¿Qué significado físico tiene esa restricción del parámetro adimensional?. Se observa consistencia entre la fórmula generalizada de Compton y el Efecto Compton Inverso con restricciones.

Podemos resumir el resultado en el siguiente diagrama:

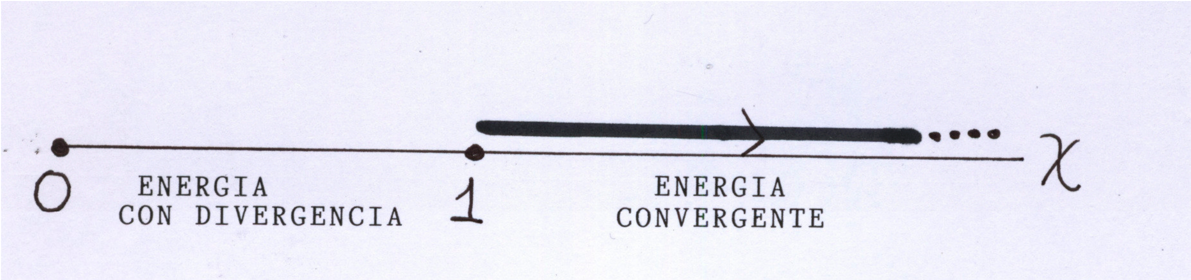



**Figura 7:** *Representación de las regiones de convergencia y divergencia en función del parámetro* $\chi$

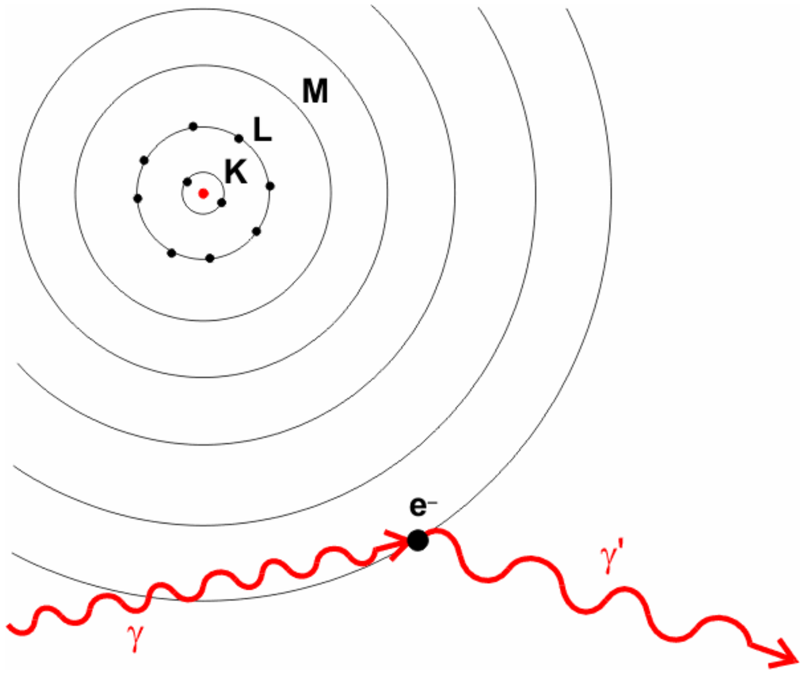



Figura 8: *Se muestra una ilustración sobre el Efecto Compton. Se observa que el fotón inicial degrada su energía a favor de la energía que adquiere el electrón en reposo.*

## Conclusiones

Se ha establecido un nexo de unión entre una fórmula que se deduce de los principios de conservación y la forma de la energía para el Efecto Compton Inverso que establece la electrodinámica. En principio cosas que podrían ser independientes se ha demostrado, con restricciones, que son dos aspectos formales de un mismo concepto. Al mismo tiempo se ha llegado al problema abierto de demostrar la conjetura Compton, es decir, necesitamos una fórmula para la derivada enésima de la energía con objeto de demostrar por inducción matemática la mencionada conjetura.

En cuanto a la idoneidad del tema tratado, sobre relatividad especial, es acorde con los propios trabajos de Pedro Puig Adam pues no olvidemos que su tesis doctoral versaba sobre mecánica relativista.

## Agradecimientos

Mi agradecimiento a los miembros de la Junta Directiva E. Roanes Lozano y E. Roanes Macías, por el ánimo aportado en mis visitas a la Sede de nuestra Sociedad.

## Referencias

[1] A. H. Compton, Phys. Rev. 21, 483, 715 y 22, 409 (1923).

[2] Robert Eisberg y Robert Resnick, Física Cuántica. Pags. 55-61 (El efecto Compton). Ed. Limusa.

[3] Feenberg y Primakoff, Phys. Rev. 73, 449 (1948).

[4] Fiocco y G.Thompson, Phys. Rev. Letters 10, 89 (1963).

[5] A. P. French, Relatividad Especial. MIT PHYSICS COURSE. Pags. 222 y 233 – 234 Ed. Reverté.

[6] R. Milburn, Phys. Rev. Letters, 10, 75 (1963).

[7] Yu. V. Sidorov et tal, Lectures on the Theory of Functions of a Complex Variable. Pag 65, The concept of a regular function (Mir Publishers Moscow).

[8] A. A. Sokolov e I. M. Ternov, Electrodinámica cuántica. Pags. 250-258. Ed. MIR. Moscú.

[9] Michael Spivak. CALCULUS (Cálculo Infinitesimal). Pag. 633. Sobre la serie de Taylor centrada en el origen. Ed. Reverté.

# Reseña de libros

EVA GUTIÉRREZ ADRIÁN, MARTA GUTIÉRREZ ADRIÁN, MIGUEL ÁNGEL QUEIRUGA DIOS: *Una mirada diferente: Fotografía matemática.* ISBN: 978-84-612-2529-3. Editorial Q. Páginas 168.

Marta y Eva, estudiantes de Secundaria, ayudadas por su profesor, nos muestran en este libro sus experiencias con la fotografía matemática.

"*Una mirada diferente: Fotografía matemática*" quiere ser un instrumento para que veamos las matemáticas como algo cercano, que está a nuestro alcance, a nuestro alrededor, entre nosotros.

Hemos utilizado la fotografía como un lenguaje eficaz para comunicar que todo lo que nos rodea es matemática; es decir, utilizamos la imagen captada por la cámara fotográfica como recurso para transmitir información matemática.

Somos conscientes de que la profundidad matemática va más allá de las "identificaciones geométricas" y de crear imágenes más o menos artísticas o reflexiones más o menos descriptivas. Sabemos también que el aprendizaje es más efectivo y se interioriza más, cuantas más percepciones sensoriales intervienen, de ahí que consideremos a la fotografía como un buen recurso didáctico a poner en práctica.

Las fotos son una excusa, un pretexto para que surjan nuevas preguntas, se propongan actividades matemáticas, ejercicios, tareas de investigación, dando opción a conocer a matemáticos y personas relacionadas con el tema, descubrir nuevos conceptos…

En el parque, a nuestros pies, mirando hacia arriba, en un barco, una tarde rural, en la naturaleza, en un museo, en nuestro hogar… allí donde estemos hay matemáticas. Tenemos que ser capaces de acertar con el emplazamiento de la cámara y captar lo que buscamos. Como diríamos con una máquina de fotos tradicional: "cierren un ojo y apunten. Ya verán".

La parte principal del libro es una selección de fotografías con comentarios matemáticos. Hay un segundo apartado en el que hemos incorporado algunas fotografías para que el lector comente; y por último finalizamos el libro con un apéndice matemático en el que se analizan algunos de los conceptos que aparecen a lo largo del libro.

# Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

**Formato**

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

### Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

### Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

### Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

# Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

**35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57,**

**58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79.**

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **3025-0006-24-1400002948** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

**Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004**

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.