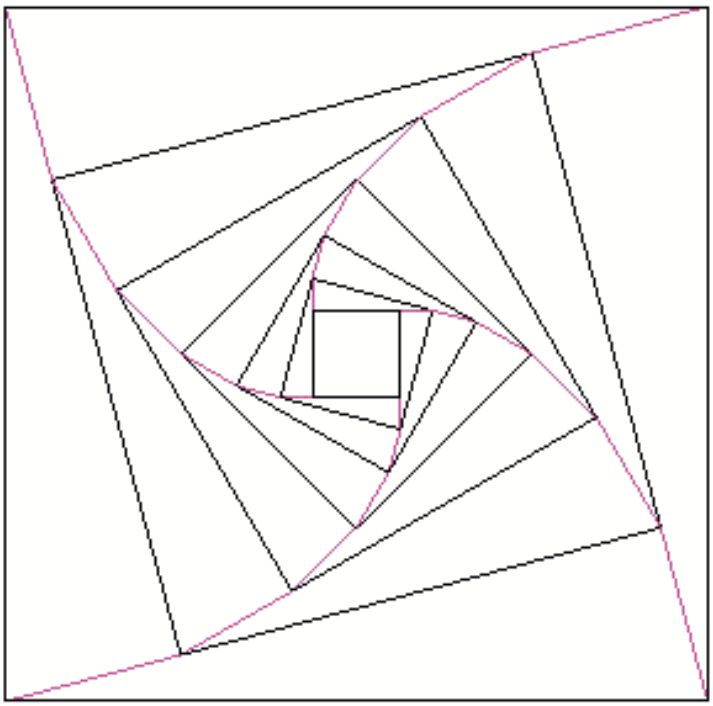
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 74
OCTUBRE DE 2006

ÍNDICE

Págs.

XXIV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas 5
Problemas propuestos en el XXIV Concurso 9
El ICM de Madrid,
por *Fernando Etayo Gordejuela* 12
Construcción del "Soddy's Hexlet" por reducción a un caso trivial,
por *E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano* 16
Nota sobre problemas desconcertantes,
por *Julio Fernández Biarge* 28
Las Matemáticas de la Epidemiología: una introducción para no (necesariamente) matemáticos,
por *Víctor Jiménez López* 33
El Zorro y las Matemáticas en México,
por *Mª del Carmen Carro Alfós* 54
Las sucesiones de Fibonacci, Lucas y Pell como casos particulares de la sucesión generalizada de Fibonacci,
por *Sergio Falcón y Ángel Plaza* 62
Radiografía diferencial del teorema de MacLaurin-Cauchy para series numéricas,
por *J.C. Cortés y G. Calbo Sanjuán* 68
Transformaciones especiales de coordenadas,
por *Jose María Fernández Cristóbal* 77
Reseña de libros 93
Instrucciones para el envío de originales 94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín 95
Boletín de inscripción 96

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es
Página web: www.ucm.es/info/secdealg/puigadam
Nueva página web en preparación (en servicio parcial):
htttp://www.sociedadpuigadam.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:
JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO (Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ (Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Mantenedoras página web:
BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

XXIV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Cada año, desde 1983, nuestra Sociedad y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, han celebrado el *Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas* que ya se ha hecho tradicional y en 2006 ha tenido lugar por vigésimo cuarta vez.

En estos veinticuatro años, hemos tenido la satisfacción de ver cómo muchos de los alumnos premiados han obtenido posteriormente notables éxitos en las Olimpiadas Matemáticas, tanto nacionales como internacionales.

El Concurso de este año, convocado en nuestro Boletín nº 72 (en el que aparecen las Bases), se celebró en la mañana del sábado 10 de Junio de 2006. Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en el mismo lugar.

La concurrencia, en un sábado de vacaciones, con un calor agobiante, fue parecida a la años anteriores, de 78 alumnos que, según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 7 puntos. Al final de esta crónica damos sus enunciados.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de enhorabuena a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a todos los que han contribuido al éxito del Concurso.

Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

NIVEL I

1. D. Moisés HERRADÓN CUETO, *del Colegio Brains de Madrid* y
D. Rubén JIMÉNEZ BENITO, *del I.E.S. José Hierro de Madrid*
3. D. Yago REGO GARCÍA, *del I.E.S. Juan Miró de Madrid* y
D. Lucas SICILIA MARTÍNEZ, *del Colegio Retamar de Madrid*
5. D. Amadeo TIERNO RODRÍGUEZ, *del Colegio Divina Pastora de Madrid*

NIVEL II

1. **D. Diego IZQUIERDO ARSEGUET,** *del Liceo Francés de Madrid*
2. **D. Gabriel FÜRSTENHEIM MILERUD**, *Colº Nª Sª de la Sabiduría-Madrid*
3. **D. David ALFAYA SÁNCHEZ,** *del I.E.S. José Luis Sanpedro de Tres Cantos*
4. **D. Pedro FERNÁNDEZ GASPAR**, *del Colegio Retamar de Madrid*
5. **D. Alejandro GIMENO SANZ**, *del Colegio San José de Valladolid*

NIVEL III

1. **D. Manuel LÓPEZ SHERIFF**, *del Colegio Arturo Soria de Madrid*
2. **Dª. Nora CASCANTE ESTEPA**, *del Colegio Mirabal de Madrid* y
   D. Francisco FERNÁNDEZ GASPAR, *del Colegio Retamar de Madrid.*
4. **D. José María PÉREZ RAMOS**, *del Colegio Valdeluz de Madrid*
5. **D. Miguel MONTERO MUÑOZ**, *del Colegio Fray Luis de León de Madrid.*

Nos complace señalar que los tres primeros premiados del Nivel II fueron también premiados en el Nivel I en el Concurso del año pasado.

Ha sido sorprendente que el problema 4º del Nivel I no hay sido resuelto correctamente por ningún participante y no porque sea difícil, sino porque la mayoría ha dicho que "se observa" que el radio de extremo O en la circunferencia K1 es paralelo e igual al diámetro vertical de la K2, sin dar justificación alguna. Tampoco ha habido alumnos que hayan dado solución al 2º del Nivel II ni al 3º de Nivel III. Como se ve, todos ellos de geometría.

Nuestra enhorabuena a todos los premiados, al resto de los participantes y a los padres y profesores que los han preparado y animado a participar.

J. F. B.

Problemas propuestos en el XXIV Concurso

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos indicando para cada uno la calificación media para todos los presentados, la calificación media obtenida por los cinco premiados y el número de soluciones correctas presentadas (calificadas con 7 o 6).

NIVEL I

(19 presentados. Calificaciones de 0 a 7 en cada problema)

Problema 1º

En una etapa ciclista en línea, cuando el vencedor llegó a la meta, el segundo clasificado estaba a 3 km y el tercero estaba a 4,35 km. Conservando sus velocidades respectivas, el segundo llegó a la meta sacando de ventaja al tercero 1,5 km. ¿Cuál fue la longitud de la etapa?

(Media = 4,7 . Media premiados = 6,6 .Soluciones correctas = 11)

Problema 2º

Considera el cuadrado ABCD, de centro O y lado 1. A_1, B_1, C_1 y D_1 son los puntos medios de los segmentos AO, BO, CO y DO respectivamente. ¿Cuál es el área de la región común a los paralelogramos AB_1CD_1 y A_1BC_1D?

(Media = 1,8. Media premiados = 6,8 . Soluciones correctas = 5)

Problema 3º

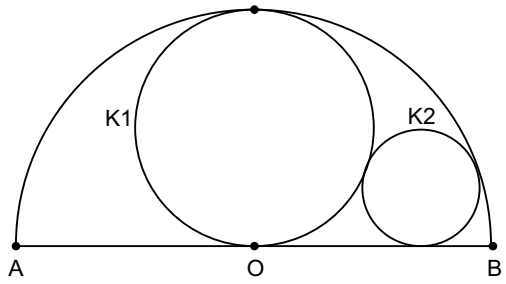
¿Cuántos enteros positivos tienen exactamente 3 divisores propios de forma que cada uno de estos divisores propios sea menor que 50?

(Recuerda: un divisor propio de un número es un divisor positivo menor que el número)

(Media = 1,4. Media premiados = 2,2 . Soluciones correctas = 0)

Problema 4º

Consideramos una semicircunferencia de centro O y diámetro AB. Dos circunferencias, K_1 y K_2, tangentes exteriores, son tangentes a la semicircunferencia, y tangentes a su diámetro AB, la primera de ellas precisamente en el punto O.



Si AB = 8, determina el radio r de la circunferencia K_2.

(Media = 0,0. Media premiados = 0,0 . Soluciones correctas = 0)

NIVEL II

(31 presentados. Calificaciones de 0 a 7 en cada problema)

Problema 1º

Se escribe la fracción $\dfrac{535353.....53}{9009}$ El numerador se forma escribiendo el par 53 n veces. Hallar el menor valor de n para que la fracción sea un entero.

(Media = 3,0. Media premiados = 5,2 . Soluciones correctas = 5)

Problema 2º

En el triángulo ABC, D es el punto medio de AB y E, que está en BC, verifica BE = 2 EC. Si son iguales los ángulos ADC y BAE, ¿cuánto mide el ángulo A del triángulo dado?

(Media = 0,0. Media premiados = 0,0 . Soluciones correctas = 0)

Problema 3º

Las dimensiones de un trapecio isósceles ABCD (con AD = BC) son AB = 9, CD = 7 y AD = $\sqrt{17}$. Hallar sobre la base mayor AB un punto P tal que el área del trapecio ABCD sea 4 veces el área del triángulo isósceles PDM, con M en CD y PD = PM

(Media = 4,8. Media premiados = 7,0 . Soluciones correctas = 20)

Problema 4º

Encuentra todas las ternas de enteros (*a, b, c*) tales que $a^2 + b^2 - 8c = 6$.

(Media = 1,2. Media premiados = 5,0 . Soluciones correctas = 2)

NIVEL III

(28 presentados. Calificaciones de 0 a 7 en cada problema)

Problema 1º

En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de las camisetas sea impar?

(Media = 1,2. Media premiados = 5,4 . Soluciones correctas = 5)

Problema 2º

En el triángulo *ABC*, $\overline{AB} = 3$, $\overline{BC} = 5$ y $\overline{AC} = 7$, y además las bisectrices $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ se cortan en P. Calcular $\overline{AP}$.

(Media = 0,6. Media premiados = 2,2 . Soluciones correctas = 1)

Problema 3º

En el triángulo ABC, la bisectriz del ángulo B corta al lado AC en el punto D. Demostrar que la longitud del segmento BD es menor que la media geométrica de los lados BA y BC.

(Media = 0,1. Media premiados = 0,0 . Soluciones correctas = 0)

Problema 4º

Los números a, b, c, d, e, f, g, son siete enteros positivos consecutivos cuya suma es un cubo. La suma $b + c + d + e + f$ de los cinco centrales es un cuadrado. Hay infinitas soluciones para el primero, a. Ordenadas de menor a mayor, calcular cual es la segunda.

(Media = 1,6. Media premiados = 4,8 . Soluciones correctas = 4)

El ICM de Madrid

Del 22 al 30 de agosto de 2006 se ha celebrado en Madrid el Congreso Internacional de Matemáticos, ICM. Por primera vez España era la sede de este congreso. El ICM es un congreso especial entre los matemáticos. Se podría pensar que por sus dimensiones: el número de asistentes, la duración y el número de comunicaciones sobrepasan a los de los demás reuniones matemáticas. Pero lo que lo hace especial es que viene a ser como los Juegos Olímpicos de las Matemáticas:

- se celebra cada cuatro años (ésta era la vigésimoquinta edición),

- en una reunión celebrada la semana anterior al congreso (en esta ocasión tuvo lugar en Santiago de Compostela) se elige la sede del próximo congreso (el 2010 se celebrará en la India),

- se entregan las medallas Fields, que desempeñan el papel del inexistente premio Nobel de Matemáticas,

- se debaten no sólo las cuestiones científicas de las Matemáticas, sino su papel en la sociedad, su divulgación, su historia y su docencia..

El Congreso ha sido un éxito de participación y organización. La comunidad matemática española ha obtenido gran reconocimiento internacional y por primera vez un español, Manuel de León, formará parte del Comité Ejecutivo de la Unión Matemática Internacional

La Prensa ha recogido variada información sobre el acontecimiento. No cabe duda de que todo cuanto divulgue la actividad de los matemáticos irá en beneficio de nuestra disciplina, tantas veces incomprendida. Cierto es que la renuncia de Perelman a recibir la medalla Fields ha eclipsado otras informaciones y, en particular, el mérito de los otros galardonados: Tao, Werner y Okounkov también con la medalla Fields, Kleinberg con el premio Nevalina e Ito con el premio Gauss. La entrega de las medallas por parte del Rey es muestra de la importancia que se ha concedido a la reunión. También es cierto que estos días las Matemáticas han aparecido en la prensa como nunca lo habían hecho hasta ahora. Esperemos que el interés despertado cristalice en acciones concretas a favor de las Matemáticas.

De modo paralelo al desarrollo del congreso se han programado una serie de actividades para mostrar al gran público aspectos menos conocidos de la actividad matemática: las exposiciones "¿Por qué las Matemáticas?" y "Arte Fractal" desarrolladas en el Centro Cultural Conde Duque, "La Vida de los Números" en la Biblioteca Nacional, la dedicada a Gödel en el Jardín Botánico de la Universidad Complutense, la de historia de conocimiento matemático a través de los libros antiguos de la Complutense en el caserón de Noviciado. Además, en el propio Palacio de Congresos se exponía "El ICM a través de la historia". En general estas actividades han gozado de muy buena acogida y el número de asistentes ha superado con creces las previsiones de los organizadores, viéndose colas de espera en alguna de ellas, lo cual no es frecuente en exposiciones científicas.

El Congreso estaba organizado del siguiente modo: por las mañanas tenían lugar las actividades organizadas en común para todos los asistentes, como la apertura y entrega de medallas, las conferencias plenarias y las de los premiados. Normalmente a partir de las tres de la tarde tenían lugar, de modo simultáneo, las sesiones por cada una de las veinte secciones en que estaba dividido el congreso. Se componían de conferencias invitadas de 45 minutos de duración, de comunicaciones de 20 minutos y de sesiones de posters. Al finalizar la jornada se celebraban meses redondas, proyecciones, presentación de software, etc. Además, aprovechando el ICM se han desarrollado gran cantidad de congresos satélite sobre temas específicos. Y en el propio Palacio de Congresos de Madrid se situaban stands de las más importantes editoriales y sociedades matemáticas de todo tipo.

La organización del Congreso ha sido posible gracias a la eficaz y duradera colaboración de muchos matemáticos españoles, lo que ha contribuido a estrechar los lazos entre ellos. Además de resolver temas de financiación, logística, organización de horarios, certificaciones, alojamientos, protocolo, existencia de acceso a internet, y otros, el congreso requería que muchas personas estuvieran dedicadas al examen previo para la aceptación o no de los trabajos, a la búsqueda de moderadores para todas las sesiones, etc.

Además, han participado alumnos de todas las universidades españolas, que han actuado como voluntarios del Congreso. No cabe duda de que para ellos, para las futuras generaciones, el haber participado en esta actividad será un recuerdo imborrable y una gran enseñanza sobre el mundo científico.

También se han presentado actividades españolas como Divulgamat y Estalmat, que tratan, respectivamente, de divulgar las Matemáticas y de estimular el talento matemático precoz.

Pero además de todo lo anterior, de la gran cantidad de actividades y del trabajo bien hecho, la mayor satisfacción ha sido la de que el congreso ha seguido fiel a su nombre: a diferencia de lo que ocurre en la mayoría de los casos, el congreso se llama de "matemáticos", de las personas dedicadas a nuestra ciencia, y no se llama de "Matemáticas". Y, efectivamente, se ha podido ver a los matemáticos reunidos, bien por afinidades temáticas, bien por nacionalidades, bien por simple amistad, charlando de modo distendido en los diferentes espacios disponibles para ello en el Palacio de Congresos y en las comidas dentro y fuera del local. Como alguien decía, las *matemáticas verdaderas son las que se pueden contar paseando*. No sé si es una afirmación algo exagerada, porque el lápiz y el papel son siempre nuestros compañeros de viaje, pero es cierto que en esos ratos de conversaciones que hemos vivido hemos aprendido a veces mucho más que de otro modo.

Algunas cifras:

Participantes: cerca de 3500
Participantes españoles: más de 1300
Voluntarios: 360
Sesiones científicas: 20
Conferencias plenarias: 20
Conferencias de secciones: aproximadamente 200
Comunicaciones breves: centenares

Posters: centenares
Presentaciones de software matemático: más de 20
Mesas redondas: 4
Stands de expositores: 45
Conferenciantes invitados españoles: 11
Congresos satélites: más de 60, la mayor parte en España

Fernando Etayo Gordejuela

Construcción del "Soddy's Hexlet" por reducción a un caso trivial *

E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano
Sec. Dept. Algebra, Fac. Educación UCM
{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

Abstract

Three spheres are given, two of them contained in the third one and each one tangent to the two other spheres. With this configuration, sequences of tangent spheres that are externally tangent to the first and second given spheres and internally tangent to the third one are to be found. Curiously, these sequences are finite, i.e., cyclic, consisting exactly of six spheres. Such a finite sequence is called a "Soddy's Hexlet". A constructive method to determine such a sequence, that reduces the general case to a trivial one and is original of the authors of this article, is presented. The corresponding algorithm is also detailed below. It has been implemented on a computer algebra system by the authors.

Introducción

Por brevedad, hablaremos de *esferas* con el significado de superficies esféricas. Sean α, β, γ tres esferas tales que α y β son tangentes exteriormente y ambas son tangentes interiormente a γ. Se considera una sucesión de esferas, $\{\sigma_n\}$, todas ellas tangentes exteriormente a α y a β y tangentes interiormente a γ y tales que cada σ_n sea tangente exteriormente a σ_{n-1} y distinta de σ_{n-2}. Nos referiremos a $\{\sigma_n\}$ como una *cadena de esferas entre* α, β, γ.

Sorprendentemente, la sucesión $\{\sigma_n\}$ resulta ser cíclica de orden 6. Por ello y por haber sido descubierta, analizando acoplamientos atómicos, por el

*Parcialmente subvencionado por el proyecto *MTM2004-03175* del Ministerio de Educación y Ciencia.

Premio Nobel de Química (1921) Sir Frederick Soddy [1] esta configuración es denominada "Soddy's Hexlet". Realmente Soddy redescubrió la configuración, ya aparece mencionada en las tablas japonesas Singaku en 1822 [9].

Este curioso problema ha motivado numerosos trabajos. Entre ellos, uno de H.S.M. Coxeter [2] sobre collares de esferas mutuamente tangentes, otro de S. Ogilvy [3] incluyendo nuevas propiedades de la configuración, otro de T. Rothman [9] estableciendo que la suma de curvaturas de cada par de esferas opuestas de un Hexlet es constante, o el muy reciente [4]. Por otra parte, recientemente se han elaborado implementaciones del "Soddy's Hexlet", que pueden verse en [10, 11], por ejemplo. En el presente trabajo nos ocupamos de la determinación de las seis esferas $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_6$, dadas α, β, γ.

La primera idea que se nos ocurrió fue observar que, una vez determinada σ_i, entonces σ_{i+1} es una de las esferas tangentes a las cuatro esferas $\alpha, \beta, \gamma, \sigma_i$. Pero este es el problema de Apolonio, de los círculos tangentes a tres dados, cuya extensión a dimensión 3 desarrollamos en [6], requiere elegir la solución adecuada, entre las posibles, lo que complicaba el problema.

Proponemos aquí un método de determinación de $\sigma_1, ..., \sigma_6$, consistente en reducir por inversión-3D al caso trivial en que las tres esferas dadas tienen centros colineales, siendo iguales las dos interiores. Para conseguir dicha alineación de centros podría hacerse uso del método general que desarrollamos en [7], pero hemos preferido aplicar un método "ad hoc", teniendo en cuenta la posición relativa muy particular de las tres esferas dadas. El proceso de construcción de la cadena desarrollado conduce a un algoritmo muy simple, que hemos implementado en un sistema de computación algebraica.

1 Descripción del método de construcción

Codificaremos cada esfera por la lista de su centro y radio. Por ejemplo, la esfera ρ de centro R y radio r será denotada $\rho = [R, r]$. Las tres esferas dadas, denotadas $\alpha = [A, a]$, $\beta = [B, b]$, $\gamma = [C, c]$, las supondremos, en principio, que son de centros no colineales. Como gran parte del proceso puede restringirse al plano ABC, interesa considerar sus círculos de intersección con este plano, que, por brevedad, denotaremos así mismo, α, β, γ, decidiendo el contexto si se trata de círculos o esferas. El proceso se resume en cuatro pasos descritos en las cuatro subsecciones siguientes.

1.1 Alineación de centros de las tres esferas dadas

Siendo A, B, C no colineales, los puntos de tangencia $T = \alpha \cap \beta$, $U = \beta \cap \gamma$, $V = \alpha \cap \gamma$, tampoco son colineales. Sea δ la circunferencia que pasa por T, U, V (Figura 1) y sea O el punto de δ diametralmente opuesto del T. Sean $M \in \alpha$ y $N \in \beta$ los puntos diametralmente opuestos del T en α y β, respectivamente, y sea C' el punto medio del segmento $\overline{MN}$.

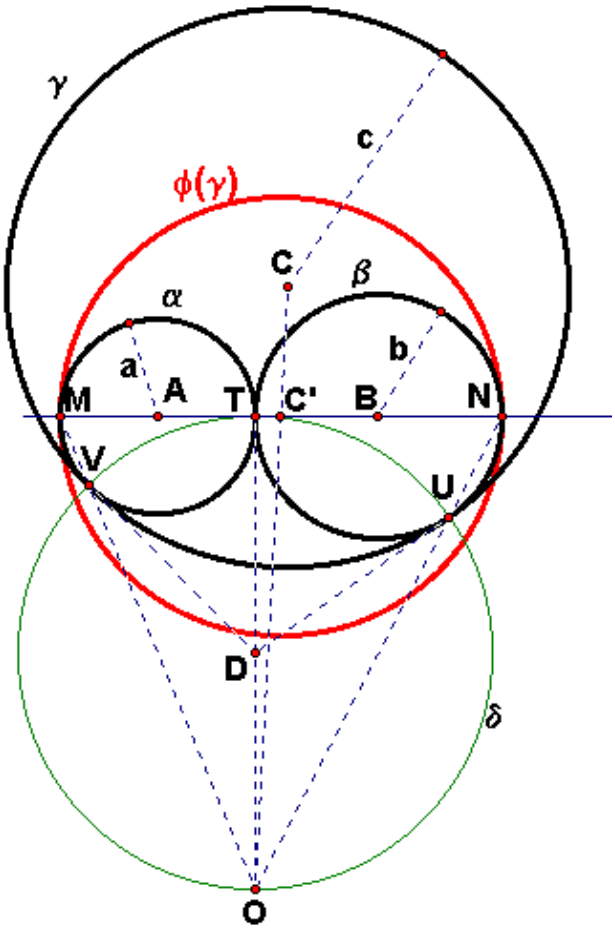


Figura 1: *Alineación de centros*

Proposición 1.1. *La inversión ϕ de polo O tal que $\phi(T) = T$ deja invariantes a α y a β, transformando a γ en la esfera de diámetro $\overline{MN}$, es decir, en la esfera $\phi(\gamma) = [C', c']$, donde $c' = a + b$.*

Demostración. Las tangentes comunes en T, U, V concurren en el centro radical, D, de α, β, γ. Por tanto $TD \perp AB$ y en consecuencia $OT \perp AB$. Al ser la potencia de ϕ igual a $\overline{OT}^2$, es decir, la potencia geométrica de O respecto de α, o de β, estas dos esferas son invariantes por ϕ (aunque no de puntos invariantes). Por otra parte, $O \in \delta \cap OT$ implica que $\phi(\delta)$ sea la recta ortogonal a $\phi(OT) = OT$ por el punto T, es decir, $\phi(\delta) = AB$. Además, por ser γ ortogonal a δ, sus imágenes en la transformación isogonal ϕ también son ortogonales, y por tanto, $\phi(\gamma)$ tendrá su centro en la recta $AB = \phi(\delta)$. Por otra parte, como $V \in \delta \cap \alpha$ y $U \in \delta \cap \beta$, sus respectivos inversos verifican $\phi(V) \in AB \cap \alpha$ y $\phi(U) \in AB \cap \beta$, luego $\phi(V) = M$ y $\phi(U) = N$. Por tanto, $\phi(\gamma)$ es la esfera con centro en la recta AB y que pasa por M y N, luego M, N son puntos diametralmente opuestos de $\phi(\gamma)$. Por tanto, el centro de $\phi(\gamma)$ es el punto medio, C', del segmento $\overline{MN}$, siendo su radio $\overline{MN}/2 = a + b$. Finalmente, el centro C' ha de estar alineado con O y C, luego $C' = OC \cap AB$. □

En adelante supondremos pues que $\alpha, \beta, \phi(\gamma)$ tienen centros colineales, pero los radios de α y β son, en general, distintos.

1.2 Igualación de radios de las dos esferas interiores

Se trata ahora de transformar $\alpha, \beta, \phi(\gamma)$ en otras tres tales que los radios de las dos primeras sean iguales y se conserve la alineación de centros.

Partiremos, en principio, de la situación más general, en que $a \neq b$, lo que implica $T \neq C'$. Sea σ la esfera de diámetro $\overline{TC'}$ (Figura 2), sea O' el punto de intersección de la recta AB con plano radical de σ y $\phi(\gamma)$ y sean A' y B' los respectivos puntos medios de los segmentos $\overline{NC'}$ y $\overline{MC'}$.

Proposición 1.2. *La inversión ψ de polo O' tal que $\psi(M) = N$ deja invariante a $\phi(\gamma)$, transformando a α y a β en las esferas de centros los puntos medios de los respectivos segmentos $\overline{NC'}$ y $\overline{MC'}$, es decir: $\psi(\alpha) = [A', a']$, $\psi(\beta) = [B', b']$, $a' = b' = (a + b)/2$.*

Demostración. Al ser M y N inversos en ψ, la esfera $\phi(\gamma)$ es invariante por ψ. Por tanto, O' es centro de una esfera, ω, ortogonal a $\phi(\gamma)$. Por estar O' en el plano radical de $\phi(\gamma)$ y σ, son iguales las potencias de O' respecto de $\phi(\gamma)$ y σ. Por tanto, σ también es ortogonal a ω, luego σ también es invariante por ψ, lo que implica que T y C' sean inversos en ψ. Ahora, como M y T puntos

diametralmente opuestos de la esfera α y alineados con el polo O' de ψ, sus inversos, $N = \psi(M)$ y $C' = \psi(T)$ serán puntos diametralmente opuestos de la esfera $\psi(\alpha)$, cuyo centro y radio son pues A' y $\overline{NC'}/2 = (a+b)/2$. De modo análogo, $M = \psi(N)$ y $C' = \psi(T)$ serán puntos diametralmente opuestos de la esfera $\psi(\beta)$. $\square$

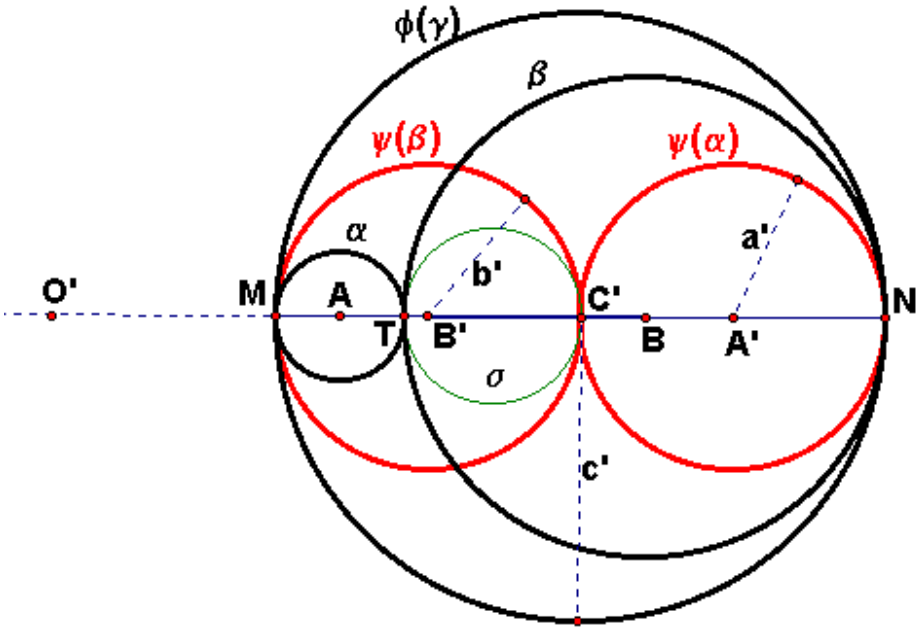


Figura 2: *Igualación de radios*

En adelante supondremos pues que las esferas $\psi(\alpha), \psi(\beta)$ y $\phi(\gamma)$ tienen centros colineales, siendo iguales los radios de las dos primeras.

1.3 Cierre de la cadena en el caso trivial

Se van ahora a considerar las cadenas de esferas para el caso trivial en que $\psi(\alpha)$ y $\psi(\beta)$ son dos esferas de centros respectivos A', B' y radios iguales de medida a', que se tocan exteriormente en el punto C', centro de la esfera $\phi(\gamma)$ de radio $2a'$.

Proposición 1.3. *Toda cadena de esferas entre $\psi(\alpha), \psi(\beta), \phi(\gamma)$ es cíclica de orden 6, es decir, su sexta esfera es tangente exteriormente a la primera y distinta de la quinta esfera. Sus esferas tienen todas el mismo radio, $r = \frac{2}{3}a'$,*

siendo sus centros los vértices de un hexágono regular de centro C' y lado $2r$ contenido en un plano perpendicular a $A'B'$.

Demostración. Sea $\rho = [R, r]$ una cualquiera de las esferas de la cadena. El triángulo $A'C'R$ es rectángulo en C' (por simetría de la configuración respecto del plano perpendicular a $A'B'$ por el punto C') y en consecuencia $\overline{A'R}^2 = \overline{A'C'}^2 + \overline{C'R}^2$, es decir, $(r + a')^2 = a'^2 + (2a' - r)^2$, de donde resulta $r = \frac{2}{3}a'$. En consecuencia, denotando por S al punto en que ρ toca a la siguiente esfera de la cadena, el triángulo $C'SR$ es rectángulo en S, por lo que el ángulo $SC'R$ tiene por medida $arcsen(\frac{\overline{SR}}{\overline{C'R}}) = arcsen(r/(2a' - r)) = arcsen(1/2) = \pi/6$. Por tanto, el ángulo bajo el cual se ve desde C' el segmento que une los centros de dos esferas consecutivas de la cadena es $\pi/3$. En consecuencia, la cadena es cíclica de orden 6. El resto es ahora trivial. □

1.4 Regreso al caso de las tres esferas dadas inicialmente

Como es bien conocido, la inversión 3D es una transformación involutiva que convierte esferas en esferas, preservando su tangencia y conservando o cambiando la propiedad de que dicha tangencia sea exterior/interior, según que la posición del polo de inversión respecto de las esferas sea exterior o interior, respectivamente. Estas propiedades, junto con las tres proposiciones precedentes, conducen al siguiente resultado general.

Teorema 1.4. *Toda cadena de esferas entre α, β, γ es cíclica de orden 6.*

Demostración. Sea $\{\sigma_n\}$ una cadena de esferas entre α, β, γ. Por ser los polos de inversión O y O' puntos exteriores a γ y, en consecuencia, exteriores a todas las esferas consideradas, la imagen de $\{\sigma_n\}$ en la transformación producto $\psi \circ \phi$, es decir, $\{\psi(\phi(\sigma_n))\}$, es una cadena de esferas entre $\psi(\alpha), \psi(\beta), \phi(\gamma)$. Pero, de acuerdo con la proposición 1.3, esta última cadena es cíclica de orden 6. Aplicando pues a esta última cadena la transformación inversa de $\psi \circ \phi$, es decir, $\phi \circ \psi$, resulta que la cadena inicial, $\{\sigma_n\}$, de esferas entre α, β, γ, es también cíclica de orden 6. □

2 Algoritmo e implementación

Para construir un Soddy's Hexlet, se ha de comenzar determinando las tres esferas dadas, que, como se ha indicado anteriormente, codificaremos por la listas de sus centros y radios: $\alpha = [A, a], \beta = [B, b], \gamma = [C, c]$.

Las posiciones relativas de estas tres esferas quedan determinadas por el triángulo ABC, de vértices los centros de estas tres esferas. Pero los lados de ABC están relacionados con los radios de α, β, γ por las condiciones de tangencia que han de verificar estas tres esferas: $\overline{AB} = a + b$, $\overline{BC} = c - b$, $\overline{CA} = c - a$.

Por tanto, para determinar las posiciones relativas de las tres esferas basta elegir sus radios, a, b, c, con la única condición $a + b \leq c$ (consecuencia de la desigualdad triangular $\overline{AB} \leq \overline{BC} + \overline{CA}$).

Por comodidad puede comenzarse trabajando en el plano ABC. Para ejecutar fácilmente los cálculos, puede elegirse un sistema de referencia métrico de origen A, primer semieje positivo de coordenadas pasando por B y segundo semieje positivo de coordenadas contenido en el semiplano de borde la recta AB y que contenga a C.

De acuerdo con lo indicado anteriormente, las coordenadas de A, B, C son ahora inmediatas de obtener, usando la fórmula de Herón para calcular $dist(C, AB)$. A partir de estos simple cálculos quedan determinadas las tres esferas dadas por las listas de sus centros y radios.

La posición de la primera esfera de la cadena, respecto del plano ABC, queda determinada por el *ángulo inicial*, θ, de la semirrecta de origen C' y que pasa por el centro, S_1, de $\psi(\phi(\sigma_1))$ con el semiplano de borde AB y que contiene a C.

2.1 Algoritmo para generar las esferas de la cadena

Estas consideraciones, junto con las tres proposiciones y el teorema de la sección 1 conducen al siguiente algoritmo de generación de las seis esferas de la cadena entre α, β, γ, que conforman el Soddy's Hexlet. Estas seis esferas son obtenidas como "output", codificadas como listas de sus centros y radios respectivos.

Por brevedad, denotaremos $\alpha' = \psi(\alpha)$, $\beta' = \psi(\beta)$, $\gamma' = \phi(\gamma)$ y denotaremos $\sigma_i' := \phi(\sigma_i)$ y $\sigma_i'' = \psi(\sigma_i')$, para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

Algoritmo geométrico

Entradas o "input": a, b, c, θ (radios de α, β, γ y ángulo inicial)
Salidas o "output": $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_6$ (como listas de sus centros y radios)

Pasos o "steps":
1. $T :=$ punto del segmento $\overline{AB}$ tal que $dist(AT) = a$
2. $M :=$ punto de la recta AB, tal que $dist(AM) = a$ y $M \notin \overline{AB}$
3. $N :=$ punto de la recta AB, tal que $dist(BM) = b$ y $N \notin \overline{AB}$
4. $C' :=$ punto medio del segmento $\overline{MN}$
5. $\gamma' := [C', a + b]$ (esfera de centro C' y radio $a + b$)
6. $A' :=$ punto medio del segmento $\overline{C'N}$
7. $\alpha' := [A', (a + b)/2]$
8. $B' :=$ punto medio del segmento $\overline{MC'}$
9. $\beta' := [B', (a + b)/2]$
10. $s :=$ recta del plano ABC, que pasa por C' y es perpendicular a AB
11. $S_0 :=$ punto de la recta s, tal que $dist(C'S_0) = 2(a + b)/3$ y está contenido en el mismo semiplano que C respecto de la recta AB
12. $S_1 :=$ imagen de S_0 en la rotación de amplitud θ alrededor de $\overrightarrow{AB}$
13. $S_i :=$ imagen de S_1 en la rotación de amplitud $i\pi/3$ alrededor de $\overrightarrow{AB}$; $i = 2, 3, 4, 5, 6$
14. $\sigma''_i := [S_i, (a+b)/3]$; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (esferas de la cadena entre α', β', γ')
15. $O' :=$ punto de la recta AB, tal que $\overrightarrow{O'M} \cdot \overrightarrow{O'N} = \overrightarrow{O'T} \cdot \overrightarrow{O'C'}$
16. $\psi :=$ inversión de polo O' y potencia $\overrightarrow{O'M} \cdot \overrightarrow{O'N}$
17. $\sigma'_i := \psi(\sigma''_i)$; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (esferas de la cadena entre α, β, γ')
18. $V :=$ punto de intersección de α y γ
19. $D :=$ punto de intersección de la recta perpendicular a VT por V y la recta perpendicular a AB por T
20. $O :=$ punto de la recta TD simétrico del T respecto de D
21. $\phi :=$ inversión de polo O y potencia $\overline{OT}^2$
22. $\sigma_i := \phi(\sigma'_i)$; $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (esferas de la cadena entre α, β, γ)

2.2 Implementación y ejemplo de ejecución

El proceso constructivo descrito en el algoritmo anterior requiere hacer uso de aritmética exacta, para asegurar decisiones correctas en los condicionales, lo que exige que la implementación se realice en un sistema de computación algebraica. Nosotros lo hemos implementado en el sistema Maple.

Puesto que dicho proceso requiere hacer uso de la inversión 3D, hemos utilizado una implementación de esta transformación que ya habíamos desarrollado previamente y puede encontrarse descrita en la sección 4 de [7].

Por otra parte, dicho proceso también requiere hacer uso de rotaciones 3D, para lo que hemos utilizado una implementación de esta transformación que ya habíamos desarrollado previamente y puede encontrarse descrita en la sección 4 de [5].

El procedimiento principal, denominado `SoddyHexlet` admite como argumentos la lista de radios $[a, b, c]$ y el ángulo inicial θ, devolviendo la sucesión de las seis esferas $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_6$, codificadas por las listas de sus centros y radios, en aritmética exacta. Si estas son excesivamente incómodas (extensas), basta dar alguno de los cuatro datos en expresión decimal, para obtener la sucesión de las seis esferas de modo análogo (en expresiones decimales). En todo caso, las sucesiones $\{\sigma_n\}$, $\{\sigma'_n\}$ y $\{\sigma''_n\}$ quedan automáticamente alojadas en variables globales, para ser representadas, si se desea.

Si los radios no verifican condición $a + b \leq c$, anteriormente mencionada, el programa devuelve un mensaje indicando el "error" cometido.

La lista de radios puede ser sustituida por la lista de centros $[A, B, C]$, que al ser detectada por el programa, calcula automáticamente los correspondientes radios (unívocamente determinados por aquellos) y prosigue efectuando los cálculos a partir de los radios calculados. La ventaja de partir de la lista de centros es la de poder elegir la situación de la configuración en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$.

Una vez calculada la cadena, el procedimiento `dibSoddyHexlet` permite dibujarla, junto con las tres esferas que la determinan (la exterior con un nivel de transparencia suficiente que permita ver el resto de la configuración, contenida en su interior). Según que este procedimiento se aplique a uno de los argumentos 0, 1, 2, se obtiene como output la configuración correspondiente a $\{\sigma''_n\}$, $\{\sigma'_n\}$ ó $\{\sigma_n\}$. La cadena, una vez calculada, también puede dibujarse con el sistema de representación de superficies *DPGraph*.

Ejemplo: Para las tres esferas de radios $a = 3, b = 4, c = 8$ y ángulo inicial $\theta = \pi/4$, se obtiene la sucesión de las seis esferas y la representación gráfica de la configuración del correspondiente Soddy's Hexlet del modo siguiente:

```
SoddyHexlet([3,4,8],π/4);
```

$$[[\frac{2025}{763} + \frac{48\sqrt{3}}{763}, \frac{72\sqrt{2}\sqrt{3}}{763} - \frac{1704\sqrt{2}}{763}, \frac{48\sqrt{2}\sqrt{3}}{109} - \frac{264\sqrt{2}}{109}], \frac{264}{109} - \frac{48\sqrt{3}}{109}]$$

$$[[\frac{24\sqrt{3}}{427} + \frac{1089}{427}, -\frac{852\sqrt{2}}{427} + \frac{564\sqrt{2}\sqrt{3}}{427}, \frac{60\sqrt{2}}{61} + \frac{84\sqrt{2}\sqrt{3}}{61}], \frac{192}{61} - \frac{24\sqrt{3}}{61}]$$

$$[[\frac{1089}{427} - \frac{24\sqrt{3}}{427}, \frac{852\sqrt{2}}{427} + \frac{564\sqrt{2}\sqrt{3}}{427}, \frac{-60\sqrt{2}}{61} + \frac{84\sqrt{2}\sqrt{3}}{61}], \frac{192}{61} + \frac{24\sqrt{3}}{61}]$$

$$[[\frac{2025}{763} - \frac{48\sqrt{3}}{763}, \frac{72\sqrt{2}\sqrt{3}}{763} + \frac{1704\sqrt{2}}{763}, -\frac{48\sqrt{2}\sqrt{3}}{109} - \frac{264\sqrt{2}}{109}], \frac{264}{109} + \frac{48\sqrt{3}}{109}]$$

$$[[\frac{531}{193} - \frac{24\sqrt{3}}{1351}, \frac{852\sqrt{2}}{1351} - \frac{204\sqrt{2}\sqrt{3}}{193}, -\frac{-204\sqrt{2}}{193} - \frac{180\sqrt{2}\sqrt{3}}{193}], \frac{336}{193} + \frac{24\sqrt{3}}{193}]$$

$$[[\frac{531}{193} - \frac{24\sqrt{3}}{1351}, -\frac{204\sqrt{2}\sqrt{3}}{193} - \frac{852\sqrt{2}}{1351}, -\frac{180\sqrt{2}\sqrt{3}}{193} + \frac{-204\sqrt{2}}{193}], \frac{336}{193} - \frac{24\sqrt{3}}{193}]$$

```
dibSoddyHexlet(2);
```

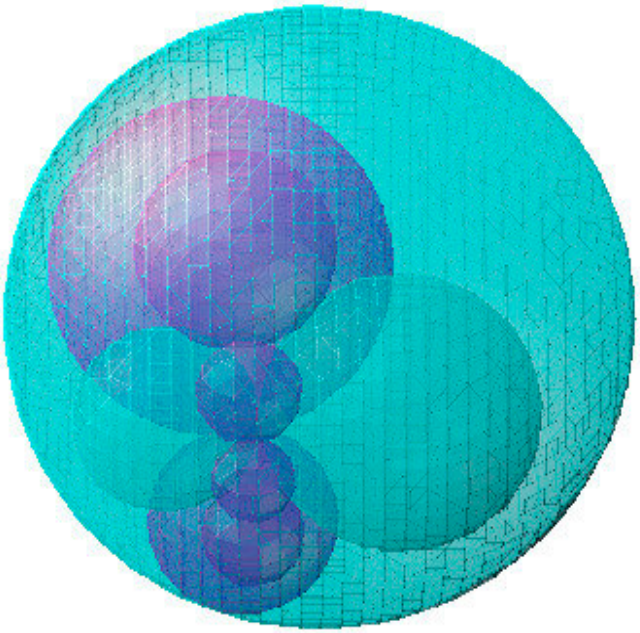


Figura 3: *Configuración dibujada con el sistema DPGraph*

Conclusión

El método propuesto de construcción del "Soddy's Hexlet" , consistente en reducir a un caso trivial, ha permitido definir un algoritmo muy simple para determinar cómodamente la cadena de las seis esferas y para representar gráficamente la configuración, con la ayuda de un sistema de cómputación algebraica.

Referencias

[1] F. Soddy, The Hexlet, *Nature* **138**, 958 (1936).

[2] H.S.M. Coxeter, Interlocked rings of spheres, *Scripta Mathematica* **18** 113-121 (1952).

[3] C.S. Ogilvy, *Excursions in Geometry*, Dover Publications Inc., New York (1990)

[4] H. Maehara and A. Oshiro, On Soddy's Hexlet and a Linked 4-Pair, en *Discrete and Computational Geometry*, (Edited by J. Akiyama, M. Kano, M. Urabe), pp. 188-193. Springer-Verlag (Lecture Notes in Computer Science 1763), Berlin-Heidelberg (2004).

[5] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, Estudio de transformaciones lineales de con Sistemas de Cómputo Algebraico, en *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, **43** 40-60 (1996).

[6] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, Geometric determination of the spheres that are tangent to four given ones, en *Computational Science - ICCS 2002, Part II*, (Edited by P.M.A. Sloot, J.J. Dongarra, C.J.K. Tan, A.G. Hoekstra), pp. 52-61. Springer-Verlag (Lecture Notes in Computer Science 2330), Berlin-Heidelberg (2002).

[7] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, Transformación que alinea los centros de tres esferas preservando tangencias, en en *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, **72** 27-38 (2006).

[8] E. Roanes-Macías and E. Roanes-Lozano, A Maple Package for Automatic Theorem Proving and Discovery in 3D-Geometry, en *Automated Deduction in Geometry*, (Editado by F. Botana and E. Roanes-Lozano), pp. 125-140. Universidade de Vigo, Pontevedra (2006).

[9] T. Rothman, Japanese Temple Geometry, In *Sci. Amer*, **278** 85-91 (1998).

[10] `URL: http//www.dpmms.ac.uk/∼etc21/hexlet/hexlet3d.html`

[11] E.W. Weisstein, Hexlet, In: *MathWorld – A Wolfram Web Resource.* `http://mathworld.wolfram.com/Hexlet.html`

Nota sobre problemas desconcertantes

Julio Fernández Biarge
Profesor emérito de la Universidad Politécnica de Madrid
jfbiarge@telefonica.net

Abstract

In this note, we consider some problems that can produce bewilderment among the students or, at least, to cause in them very diverse reactions.

1. Un problema desconcertante para algunos

En las oposiciones al cuerpo de Profesores de IES para la asignatura de Matemáticas celebradas en Valencia en 1977 se propuso el siguiente problema, que merece algún comentario:

"Determinar el lugar geométrico de los ortocentros de los triángulos inscritos en una hipérbola equilátera dada."

La actitud de los opositores ante este problema puede ser muy variada. Algunos bien formados y con tendencia a una postura crítica, que tratan de examinar a fondo el enunciado, antes de ponerse a trabajar sobre él, pueden verse muy desconcertados: los problemas de lugares geométricos suelen referirse a puntos de intersección de dos líneas dependientes del mismo parámetro y basta eliminarlo entre sus ecuaciones. En este caso, la familia de triángulos depende de tres parámetros, lo que le resulta desconcertante. Como el ortocentro es relativamente incómodo de manipular analíticamente, puede incluso pensar que sería más sencillo intentar hallar el lugar geométrico de sus baricentros, lo que se ve enseguida que no conduce a nada. Incluso es fácil que renuncie a trabajar sobre el problema.

En cambio, otros opositores menos críticos, con el atrevimiento que da la ignorancia, comenzarán por tomar los ejes de modo que la hipérbola quede en la

forma $y = 1/x$ y los tres vértices del triángulo $A(a,1/a)$, $B(b,1/b)$, $C(c,1/c)$. Habrán introducido tres parámetros, pero no quieren pensar qué podrán hacer con ellos. Continuarán trabajando:

La dirección del lado AB es la del vector $(b - a ,(a - b)/(ab))$ o sea la del $(ab , -1)$, con lo que la ecuación de la altura h_C será $y - 1/c = ab(x - c)$ y análogamente la de h_B , $y - 1/b = ca(x - b)$. El ortocentro, tiene, por tanto, las coordenadas $x = -1/(abc)$, $y = -abc$. Casi milagrosamente, resulta que éstas dependen sólo del producto de los tres parámetros y éste se elimina fácilmente, dando el lugar a $y = 1/x$, o sea *la misma hipérbola de partida.* Problema resuelto.

Por último, otros opositores con mayores conocimientos de geometría, no tendrán que escribir ecuación alguna: Pensarán que las cónicas que pasan por los vértices de un triángulo y por su ortocentro forman un haz, cuyas cónicas degeneradas son los pares de rectas perpendiculares formados por cada lado y la altura correspondiente. Cortado este haz con la recta del infinito se obtiene la involución rectangular, con lo que todas las cónicas del haz serán hipérbolas equiláteras. Recíprocamente, si *A, B, C,* pertenecen a un hipérbola equilátera η , la recta AB junto con la perpendicular a ella por C, forman una cónica degenerada que determina con η un haz de cónicas, todas ellas hipérbolas equiláteras. Si O es la otra intersección de h con η, las otras cónicas degeneradas (pares de rectas perpendiculares) pasarán también por O y en consecuencia este punto es el ortocentro de ABC, y ello conduce a la solución del problema.

Estas tres actitudes tan diferentes ante el problema pueden ser muy interesantes para un conocimiento del perfil del opositor.

2. Una trivialidad algo desconcertante

Puede pensarse en otro problema, en cierto modo relacionado con éste, que a pesar de ser casi trivial, puede desconcertar al alumno al que se le proponga:

"Los lados de un triángulo ABC *tienen medidas conocidas* a, b *y* c. *Sea* O *su ortocentro y sean* A' , B' , C' *los ortocentros de los triángulos* BCO, CAO *y* ABO. *Calcular el perímetro del triángulo* A'B'C'.*"*

Las distancias entre ortocentros no son fácilmente manipulables, por lo que el problema tiene, a primera vista, aspecto de difícil. No obstante, es trivial si se observa que A' coincide con A , B' con B y C'con C, con lo que la solución es

simplemente a + b + c . Cualquiera de los cuatro puntos A, B, C y O es ortocentro del triángulo definido por los otros tres. Si el alumno desconocía este hecho, o no le es fácil descubrirlo, puede verse desconcertado por el enunciado.

3. Otro problema desconcertante

Es posible generar enunciados de problemas que probablemente causarán desconcierto a muchos de los alumnos a quienes se los propongan. Sirva de ejemplo éste:

"Llamaremos hipotenusa *de una elipse a la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo que tiene como catetos un semieje mayor y otro menor. En un plano, dado un punto* O *, se consideran todas las elipses de centro en* O *e hipotenusa dada* h *. Se pide hallar el lugar geométrico de los puntos desde los que pueden trazar dos tangentes perpendiculares a una cualquiera de esas elipses.".*

El alumno puede verse desorientado por el hecho de que la familia de elipses depende de dos parámetros. No obstante, es posible que conozca que, para una elipse dada, el lugar de los puntos desde los que se le pueden trazar dos tangentes perpendiculares es una circunferencia con el mismo centro que la elipse y radio igual a su hipotenusa, o si no lo conoce, que considere primero una sola elipse y lo demuestre, lo que no es difícil. Como todas las elipses de la familia considerada tienen el mismo centro y la misma hipotenusa, la circunferencia de centro O y radio h es la solución.

4. Otro más, pero por otra razón

También puede resultar desconcertante el problema siguiente:

"Cuatro circunferencias de radio r , γ_i (i = 1,2,3,4) *tiene sus centros* O_i *en los vértices de un rectángulo (siendo* O_1O_2 *paralelo a* O_4O_3 *y* O_1O_4 *a* O_2O_3 *). Una quinta circunferencia* γ_0 *, del mismo radio es tangente a los lados* O_1O_4 *y* O_2O_3 *. Representando con* $p_i(P)$ *la potencia del punto P respecto a la circunferencia* γ_i *, los vértices de un triángulo ABC satisfacen a las siguientes relaciones:*

$$p_0(A) = p_0(B) = 0,\ \ p_1(A) = p_2(A) + 2r^2,\ \ p_1(B) = p_2(B) + 2r^2,\ \ p_4(C) = p_3(C) + 8r^2$$

Determinar el área de ABC ".

La causa del desconcierto puede resultar del hecho de que no se conoce la situación de ninguno de los vértices del triángulo y ni siquiera la longitud de O_1O_4. Pero a pesar de ello, recordando que el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de los cuadrados de las distancias a dos puntos dados es una recta perpendicular al segmento que une a estos y llamando s a la paralela media de O_1O_4 y O_2O_3 se sabe que A y B están sobre γ_0, en una recta paralela a s que dista $r/2$ de su centro, con lo que la longitud de AB será $r\sqrt{3}$. Por otro lado, C estará en una paralela a s situada a distancia $2r$ de ella, al mismo lado que AB, con lo que la altura del triángulo será $3r/2$, y el área pedida

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$$

5. Un problema que puede provocar variadas reacciones

En las últimas oposiciones al cuerpo de Profesores de IES para la asignatura de Matemáticas celebradas en Madrid se propuso un problema que era un caso particular (con $\rho = 1/2$) del siguiente:

"En un triángulo ABC, de área S, se consideran los puntos A', B' y C' situados respectivamente sobre los lados BC, CA y AB, de modo que BA'/A'C = CB'/B'A = AC'/C'B = ρ (conocido). Hallar el área del triángulo determinado por las rectas AA', BB' y CC'."

No hay motivo para que este problema resulte desconcertante para los opositores en el sentido de los indicados antes. No obstante, puede ser muy instructivo considerar las distintas actitudes que los opositores pueden adoptar ante ese enunciado: Algunos querrán ensayar las técnicas de la geometría analítica más elemental, comenzando por escoger un sistema cartesiano de referencia conveniente, para continuar determinando sucesivamente las coordenadas o ecuaciones de los elementos mencionados. Los cálculos se les harán sumamente engorrosos, pero aún así, es posible que, si no cometen errores, lleguen a la solución deseada. Otros, dominando más técnicas, recurrirán al uso de coordenadas baricéntricas, con $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$ y si recuerdan la expresión del área de un triángulo (tomando como unidad la de ABC), llegarán elegantemente, aunque no sin trabajo, a la solución. Por último, habrá algunos que, antes de ponerse a trabajar, reflexionarán sobre la naturaleza del problema, descubriendo que tanto las razones simples como la razón de áreas son invariantes afines. Como cualquier triángulo

ABC es transformable mediante una afinidad en otro equilátero de lado = 2, bastará resolver el problema para este caso, en el que podemos aprovecharnos de sus conocidas propiedades métricas y de su simetría. En este caso, por simetría, el triángulo Δ determinado por las rectas *AA', BB'* y *CC'* es también equilátero y tiene el mismo centro, *O* , de *ABC*. Podemos tomar unos ejes de modo que sea $A(0,\sqrt{3})$, $B(-1,0)$, $C(1,0)$. El centro del triángulo dado es $O\ (0,1/\sqrt{3})$ y su apotema mide $1/\sqrt{3}$. El punto *A'* será $(k,0)$, con $k = (1 - \rho)/(1 + \rho)$. La ecuación de la recta *AA'* será $\dfrac{x}{k} = \dfrac{\sqrt{3} - y}{\sqrt{3}}$, y escrita en forma normal, $\dfrac{x\sqrt{3} + ky - k\sqrt{3}}{\sqrt{3 + k^2}} = 0$.

La distancia del centro *O* a esa recta (apotema del triángulo Δ) será el valor absoluto de $2k/\sqrt{(9 + 3k^2)}$ y la relación del área de *ABC* a la de Δ , será el cuadrado de la relación de sus apotemas, o sea $(3 + k^2)/(4k^2)$ que, en función de ρ resulta ser $(\rho^2 + \rho + 1)/(1 - \rho)^2$. El área pedida de Δ es, por tanto,

$$\frac{S(1-\rho)^2}{\rho^2 + \rho + 1}$$

(En el caso particular de la oposición, con $\rho = 1/2$, resulta $S/7$).

Las Matemáticas de la Epidemiología: una introducción para no (necesariamente) matemáticos

Víctor Jiménez López
Dpto. de Matemáticas, Universidad de Murcia
vjimenez@um.es

Abstract

This paper aims to survey in an informal way the fundamentals of so called Mathematics of Epidemiology*. It is oriented to a wide spectrum audience (solid mathematical background is not required to understand it).*

1 De funciones, derivadas e incluso cuentakilómetros

El objeto de este trabajo es presentar al lector, de una manera informal, amena y si es posible divertida, los rudimentos de una apasionante y en general poco conocida rama de las matemáticas: la que atañe al estudio de la propagación de enfermedades. He procurado que el artículo resulte inteligible a una audiencia lo más amplia posible (incluso estudiantes aventajados de bachillerato), por lo que los tecnicismos se han reducido al mínimo. No ignoro que muchos de mis potenciales lectores son matemáticos, así que les pido disculpas de antemano si encuentran triviales algunas de mis explicaciones. Dado que además de a las Matemáticas de la Epidemiología me iré refiriendo en las próximas páginas a la (presunta) torpeza de los meteorólogos, la (supuesta) coherencia de algunos de los recientes planes de estudios universitarios, y hasta a un (posible) nuevo melodrama para Hollywood, albergo la esperanza de que incluso los lectores de menos inclinación por las matemáticas encuentren algo de interés en lo que sigue.

La materia prima con la que vamos a trabajar son las *funciones*, así que debería empezar, probablemente, recordándoles qué significado damos los matemáticos a esa palabra. De momento les diré que las "funciones" tienen que ver con lo que en nuestra jerga llamamos *variables*, es decir, con cualidades que pueden cuantificarse. En este sentido el precio del petróleo, el número de turistas que visitan anualmente España o los litros por metro cuadrado de lluvia que caen en Andalucía serían "variables"; el amor que una madre siente por su hijo no lo es (o, al menos, no debería serlo).

En general, dos variables dadas pueden o no estar interconectadas entre sí. No parece, por ejemplo, que el precio de la gasolina vaya a verse significativamente afectado por el número de discos vendidos por los animosos chicos de "Operación Triunfo", pero es claro que dependerá fuertemente de las fluctuaciones en el cambio euro/dolar y del nivel de producción de crudo de los países exportadores. A veces, puede incluso ocurrir que el valor de una variable (la variable *dependiente*) venga dado, exclusivamente, "en función" del de otra (la variable *independiente*). Cuando ello ocurre, llamamos *función* a la relación o "fórmula" que conecta a ambas. Por ejemplo, sabemos desde Newton (del que volveremos a hablar dentro de un rato) que la distancia s hasta el suelo de una bola que dejamos caer desde una altura de 600 metros viene dada, en función del tiempo t en segundos que ha transcurrido desde que la soltamos, por la fórmula $s = 600 - 9.81t^2/2$ (así, pasados $t = 3$ segundos desde que comenzó la caída, su distancia al suelo se habrá reducido hasta $s = 600 - 9.81 \cdot 3^2/2 = 555.85$ metros). Aquí, "s" (la distancia) sería la variable independiente, "t" (el tiempo) la variable independiente, y $s = 600 - 9.81t^2/2$ la función. Por simplificar se suele uno referir a una función como la anterior mediante "$s = s(t)$" o, simplemente, como $s(t)$. Esta costumbre es particularmente útil en los casos en que, como veremos, uno necesita manipular una función pero desconoce por el momento la naturaleza exacta de la fórmula que la describe.

En lo que sigue estaremos interesados exclusivamente en funciones $f(t)$ que, como la anterior, describen situaciones que evolucionan respecto del tiempo, así que la variable independiente será siempre t, "el tiempo". En este contexto, y al objeto de medir de forma efectiva el ritmo al que se va produciendo dicha evolución, se introduce el concepto de *derivada* de la función. Técnicamente, *la derivada de la función $f(t)$ en un cierto instante*

t_0, denotada como $f'(t_0)$, es el valor al que se aproxima el cociente $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ conforme t se aproxima a t_0. Tal vez recuerden más o menos nebulosamente esta extraña definición de sus tiempos de estudiantes. En aquella época uno intentaba olvidarla cuanto antes y aplicar las cómodas reglas de derivación que le enseñaban. Por ejemplo, si $f(t) = 4t^3 + t + e^t$ (aquí e denota al célebre *número* e, $e = 2.71828\ldots$) entonces $f'(t) = 12t^2 + 1 + e^t$; así, si $t_0 = 6$ entonces $f'(t_0) = f'(6) = 12 \cdot 6^2 + 1 + e^6 = 836.42879\ldots$. Por desgracia, ahora no tendremos más remedio que manejarla.

La idea de derivada se visualiza muy bien de la siguiente manera. Imaginen que viajamos en un coche por una carretera que conecta dos ciudades, la de salida A y la de llegada B. Digamos que, por ejemplo, la distancia que separa a ambas ciudades es de 12 Km, y que tardamos 10 min en cubrirla. Si $s(t)$ es la función que, en cada instante t (medido en segundos desde que arrancamos el coche), nos dice la distancia s (medida en metros) que llevamos recorrida, se tendrá que $s(0) = 0$ y $s(600) = 12000$; por tanto, nuestra velocidad media habrá sido de $12000/600 = 20$ m/seg o, si ustedes prefieren 72 Km/h. Sin embargo, es improbable que siempre hayamos mantenido el acelerador pisado de la misma manera: según el momento t, el velocímetro habrá marcado velocidades $v(t)$ diferentes; este valor, $v(t)$, es la derivada $s'(t)$ de la función $s(t)$ en el instante t.

No sé hasta qué punto resulta claro a ustedes que $v(t)$ y $s'(t)$ son la misma cosa, pero en todo caso debo confesarles que les he engañado un poco. Las funciones $v(t)$ y $s'(t)$ son "casi la misma cosa", pero no exactamente lo mismo. Permítanme entonces ser más preciso.

Ignoro cómo funciona el velocímetro de un coche (imagínenlo digital, por favor), pero sería plausible diseñarlo como un cronómetro conectado a una de las ruedas del coche, que computa los tiempos $h_1, h_2, h_3, \ldots$ que la rueda va tardando en completar giros sucesivos, y que va enviando mensajes al salpicadero para que aparezcan, también sucesivamente, los datos $l/h_1, l/h_2, l/h_3, \ldots$, donde l es la longitud de la circunferencia de la rueda (muchas veces los datos se van repitiendo y por eso tenemos la sensación de que el marcador no se altera). Si al mirar el velocímetro en un cierto momento t'_0 observamos que la cifra marcada es v_0, lo que ha ocurrido es que en un tiempo t_0 anterior al instante t'_0 el cronómetro ha iniciado el cómputo del tiempo h de giro, de modo que el valor v_0 que interpretamos como la veloci-

dad que el coche llevaba en el instante t_0' es en realidad l/h. De hecho, dado que los tiempos t_0 y t_0' son prácticamente coincidentes e indistinguibles para los sentidos, podemos considerarlos iguales a todos los efectos. Entonces l sería el espacio recorrido por el coche entre los instantes de tiempo t_0 y t_0+h, es decir, $s(t_0+h)-s(t_0)$, y la correspondiente velocidad $v(t_0)$ en este instante vendría dada por

$$v(t_0) = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{(t_0+h)-t_0} = \frac{s(t_0+h)-s(t_0)}{h};$$

como h es pequeño, $t = t_0 + h$ será muy próximo a t_0 y $v(t_0)$ coincidirá aproximadamente con $s'(t_0)$.

Obsérvese que si nos movemos en intervalos de tiempo suficientemente pequeños para que la velocidad no varíe (los datos que el cronómetro manda al salpicadero se repiten), entonces

$$\frac{s(t_0+2h)-s(t_0)}{2h} = \frac{2l}{2h} = \frac{l}{h} = v(t_0),$$

y en general $v(t_0) = \frac{s(t_0+kh)-s(t_0)}{kh}$ siempre que la cantidad kh sea pequeña. Si en particular hemos elegido la unidad de tiempo para que sea pequeña (supongan por ejemplo que nuestro cuentakilómetros da los resultados en m/seg), entonces podemos computar $v(t_0)$ como $v(t_0) = \frac{s(t_0+1)-s(t_0)}{1} = s(t_0+1) - s(t_0)$. Dado que $v(t_0)$ aproxima a $s'(t_0)$, podríamos decir $s'(t_0) \approx s(t_0+1) - s(t_0)$.

La moraleja del párrafo anterior es la siguiente: si se escoge una escala de medida para t tal que el tiempo transcurrido en cada una de sus unidades sea tan pequeño que, en ese intervalo, la función $f(t)$ varía a un ritmo aproximadamente constante, entonces es razonable escribir $f'(t) \approx f(t+1) - f(1)$. Es importante enfatizar que, como ilustrarán los ejemplos venideros, y dependiendo del fenómeno en cuestión, la unidad de medida no tiene por qué ser "pequeña" en un sentido convencional (usaremos días o incluso años); la clave es que el ritmo de variación de la función no se altere sustancialmente en la unidad de tiempo seleccionada.

2 Newton, la navaja de Ockham y la gonorrea

No me consta que los ejecutivos de Hollywood hayan descubierto todavía el potencial cinematográfico de la biografía de Johannes Kepler. Es una pena, porque daría para uno de esos tremendos dramones lacrimógenos que tanto agradan al gran público. Y es que la vida de Kepler es un rosario de desgracias, penurias y desengaños que más parecen sacadas de la perversa imaginación de algún guionista sádico que de un libro de Historia de la Ciencia. Arruinado su padre y él mismo víctima perpetua de una y mil enfermedades, se ganaba la vida a duras penas como astrólogo. Su mujer y uno de sus hijos fallecieron en un intervalo de 11 días, una de epilepsia y el otro de viruela, y su madre (acusada de hechicería) escapó a duras penas de la tortura. Entretanto, año tras año, sacando fuerzas de no se sabe dónde y manejando una abrumadora cantidad de datos experimentales, Kepler iba cuajando su *obra magna*: la formulación de las tres leyes que rigen el movimiento planetario. Tras semejante ordalía y eufórico por el éxito final es quizás disculpable que se le fuera un tanto la mano cuando escribió [7, pp. 158–159]:

"Lo que profeticé hace veintidós años, cuando descubrí los cinco cuerpos geométricos entre las órbitas celestes, lo que creí firmemente mucho antes de haber leído la Harmórica *de Ptolomeo, lo que prometí a mis amigos en el título de este libro, al que di nombre antes de estar seguro de mi descubrimiento, lo que apremié durante dieciséis años para que se buscara, aquello por lo que me uní a Tycho Brahe, por lo que me instalé en Praga, por lo que he dedicado la mayor parte de mi vida a las observaciones astronómicas, al fin he logrado aclararlo y reconozco su verdad entre mis esperanzas más íntimas. Aún no hace dieciocho meses desde que el primer rayo de luz, tres meses desde que la aurora, y pocos días desde que el Sol descubierto, el más admirable para ser contemplado, me iluminaron. Nada me detiene; dejaré libre mi furia sagrada; triunfaré sobre la humanidad con la honesta confesión de que he robado las vasijas de oro de los egipcios para construirle un tabernáculo a mi Dios, lejos de los confines de Egipto. Si me perdonan, me alegro; si están enfadados, puedo soportarlo; la suerte está echada; he escrito mi libro; lo leerán ahora o en la posteridad, no importa cuándo; bien puede esperar un siglo un lector, puesto que Dios ha esperado seis mil años un intérprete de sus palabras".*

Estoy seguro de que Steven Spielberg, por ejemplo, hubiera aprovechado este momento para rematar la película adornándolo con una fanfarria espectacular de John Williams.

La continuación de la historia es mucho menos melodramática pero bastante interesante para los amantes de la ciencia pues el siguiente personaje que aparece en la historia es el legendario Isaac Newton. Es una suerte que Kepler abandonara este mundo antes de que Newton naciera, pues hubiera sido todo un trago contemplar como éste deducía las misteriosas leyes planetarias sin esfuerzo aparente, sin más que aplicar una nueva herramienta matemática de su invención y un principio general ("dos cuerpos se atraen con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa").

La herramienta matemática inventada por Newton es lo que hoy conocemos como el *Cálculo Diferencial*. La idea crucial de la misma es que si se sabe alguna relación que ligue a una función con su derivada, entonces es posible deducir cómo es exactamente la función. A la ecuación que expresa esa relación es lo que llamamos una *ecuación diferencial*; si en lugar de una función tenemos varias funciones y otras tantas ecuaciones conectándolas entre sí y con sus derivadas, obtenemos un *sistema de ecuaciones diferenciales*.[1]

Para que entiendan bien el concepto de ecuación diferencial (dejamos los sistemas para el apartado siguiente), veamos algún ejemplo sencillo y concreto: $f'(t) = -f(t) + t^2 + t - 1$. En esta ecuación la "incógnita" es la función $f(t)$: lo que buscamos es una función que verifique que al sumarla a su derivada nos dé el polinomio t^2+t-1. Esta función podría ser por ejemplo $f(t) = t^2 - t$ pues $f'(t) = 2t - 1$ y por tanto $f'(t) + f(t) = 2t - 1 + t^2 - t = t^2 + t - 1$. Sin embargo, la función $t^2 - t$ no es la única solución de nuestra ecuación: si recuerdan que la derivada de la función e^{-t} es $-e^{-t}$ entonces

[1]En realidad, y para ser precisos, de lo que estamos hablando aquí es de un tipo particular de ecuaciones y sistemas diferenciales, *los de primer orden*, que son los únicos que nos van a interesar en lo sucesivo. Pueden encontrar el sistema de ecuaciones diferenciales —de segundo orden— que Newton presumiblemente usó para deducir las leyes del movimiento planetario en [4, pp. 159–163]. Merece la pena reseñar aquí que, aunque parezca extraño, Newton mantuvo en secreto durante bastante tiempo su descubrimiento del Cálculo Diferencial. De hecho, aunque lo usaba para demostrar sus teoremas, buscaba luego pruebas alternativas, al estilo de los clásicos griegos, para evitarse problemas con la censura eclesiástica: y es que la facilidad con la que el nuevo cálculo permitía resolver problemas otrora considerados como insolubles parecía —literalmente— cosa del demonio...

podrán comprobar sin esfuerzo que $f(t) = ce^{-t} + t^2 - t$ es también solución de la ecuación, siendo c un parámetro al que podemos dar el valor que nos plazca (es decir, $f(t) = -35e^{-t} + t^2 - t$ o $f(t) = \frac{1657}{3}e^{-t} + t^2 - t$ serán soluciones). Es posible demostrar (aunque no es nada fácil) que si tenemos una ecuación diferencial y fijamos adicionalmente el valor que nuestra función debe tomar en un instante t concreto, entonces la solución de la ecuación queda determinada sin ambigedad. Así, por ejemplo, $f(t) = t^2 - t$ es la única solución de la ecuación que en el instante $t = 3$ toma el valor 6.

Enseguida les explicaré cómo las ecuaciones diferenciales pueden ayudarnos a erradicar la gonorrea en la población homosexual de una cierta ciudad.[2] Sin embargo necesito un párrafo más para describirles un instrumento que será de gran utilidad en nuestro propósito: la *navaja de Ockham*.

No se asusten. Ockham no es el nombre de ningún *psichokiller* homófobo y aficionado a los cuchillos, sino el de un monje británico que en el siglo XIII introdujo un famoso postulado, conocido como el "principio de economía" o la "Navaja de Ockham", de una influencia capital en los fundamentos del pensamiento científico moderno: "*Entia non sunt multiplicanda sine neccesitate*" ("no hay que multiplicar los entes sin necesidad"). Traducido al cristiano, lo que esto significa es que no debemos suponer la existencia de más cosas que las estrictamente necesarias para describir los hechos; ante varias hipótesis que puedan explicar un cierto fenómeno, la más sencilla es la que seguramente se acercará más a la verdad, y en todo caso es la que debemos escoger hasta que los datos empíricos no la refuten. Lo bueno del caso es que la Naturaleza parece estar de acuerdo con Ockham, y los científicos se han beneficiado durante siglos de ello: las pautas fundamentales que rigen los fenómenos parecen dominar de tal forma a las accesorias que en la práctica podemos despreciar éstas últimas sin peligro. La deducción por Newton de las leyes planetarias de la que antes les hablé es un ejemplo soberbio de lo que digo. Si queremos predecir la evolución futura de los astros del Sistema Solar hasta el punto de poder calcular con una exactitud casi milagrosa cuándo

[2] Me apresuro a aclarar que he elegido este ejemplo, extraído de [1, pp. 465–475], por motivos estrictamente técnicos. Al concentrarnos en los homosexuales conseguimos una población mucho más homogénea y por tanto más fácil de estudiar. Una peculiaridad de la gonorrea, además, es que apenas presenta síntomas visibles en las mujeres. En un hombre, por el contrario, los efectos son aparentes a los pocos días, así que su comportamiento ulterior es bastante más predecible.

y dónde se producirán eclipses totales de sol los próximos tres mil años, lo único que necesitamos saber (¡aparte de bastantes matemáticas!) es que dos cuerpos se atraen con una fuerza proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa; nada más. Poco importan la mayor o menor redondez de la Tierra, las mareas, las tormentas solares y un millón de cosas más.

Lo prometido es deuda. Imaginen que p denota al número de homosexuales que habitan una determinada ciudad y que $I(t)$ es el número de infectados por gonorrea entre esta población p en cada momento t. Me apresuro a aclarar que no busco aquí el morbo fácil. Los síntomas de la gonorrea son bastante diferentes en el hombre y la mujer y trabajar con una población homogénea simplifica mucho el análisis del problema. No tenemos en principio una idea muy clara de cómo es esta función (más allá del hecho obvio de que $0 \leq I(t) \leq p$ para cada t), aunque lo deseable sería, evidentemente, que el valor $I(t)$ fuera aproximándose a 0 con el paso del tiempo. Sí parece razonable admitir al menos que el ritmo al que esta función va evolucionando no cambiará sustancialmente de un día para otro, así que a la luz de lo comentado en el último párrafo de la sección anterior mediremos el tiempo t en días. Ahora, en la variación de $I(t)$ influirán dos factores, uno que hará que la función crezca y el otro que disminuya. Por una parte, $I(t)$ disminuirá tanto más rápidamente cuanto mayor sea el número de infectados que acudan a los hospitales a medicarse y más efectivo sea el tratamiento empleado. Como podemos aceptar que el método de curación será más o menos estándar, no es disparatado estimar que si no hubiesen otros factores en juego entonces $I(t)$ disminuirá de un día para otro en proporción directa al número de infectados en ese momento, es decir, $I(t+1) - I(t) = -aI(t)$, donde $a > 0$ es una constante que será más o menos grande en función de la propensión de los infectados a acudir a las clínicas (téngase en cuenta que el enfermo puede temer que, eventualmente, su condición de homosexual quede al descubierto) y la eficacia del tratamiento que reciban.

Es obvio que si no hubiesen nuevas infecciones la enfermedad terminaría por desaparecer. Sin embargo, cabe esperar que los infectados por gonorrea, antes de que aparezcan los síntomas, hayan mantenido inalterado su nivel de relaciones sexuales. Así pues, cada día aparecerá una cantidad de nuevos casos, proporcional al número de encuentros sexuales entre la población

infectada $I(t)$ y la susceptible de serlo $p - I(t)$ y por tanto al producto $I(t)(p - I(t))$ de ambas poblaciones. La conclusión es que podemos conjeturar que $I(t+1) - I(t) = -aI(t) + bI(t)(p - I(t))$, siendo $b > 0$ una constante que (amén de la promiscuidad) mediría de algún modo la probabilidad de que en una relación sexual entre infectado y susceptible se produzca el contagio. Si recordamos que las cantidades $I(t+1) - I(t)$ e $I'(t)$ podían identificarse, y nos ceñimos a la convención, habitual cuando se escriben ecuaciones diferenciales, de escribir I y I' en vez de $I(t)$ e $I'(t)$, llegamos a $I' = -aI + bI(p - I)$. Si añadimos a esto una condición inicial como $I(0) = I_0$ (el número de infectados al comienzo de nuestro estudio), el proceso queda perfectamente descrito y nuestra función $I(t)$ está caracterizada sin ambigedad. No está de más resaltar aquí que esta función $I(t)$ tomará en general valores no enteros, es decir, puede tenerse por ejemplo $I(3) = 234.5$. Esto no significa, evidentemente, que el tercer día vayan a haber 234 personas y media infectadas, o ni siquiera que dicho día puedan haber 234 o 235. A lo sumo, y con suerte, la cifra real rondará más o menos esa cifra. No es razonable aspirar a mucho más pues, navaja de Ockham o no, es imposible que una sola ecuación pueda aprehender en toda su esencia un fenómeno tan complicado como el que pretendemos investigar.

Lo pertinente a continuación sería solucionar la ecuación y decir con exactitud cuál es la función $I(t)$. En general, resolver una ecuación diferencial es muy complicado (aunque en este caso concreto se puede hacer), pero existen métodos numéricos fácilmente implementables en un ordenador que nos permiten encontrar sus soluciones con una más que aceptable precisión. El problema es que los valores a, b y p no se conocen, pero si tuviéramos datos clínicos fiables del número de infectados en unos cuantos momentos t entonces jugaríamos con los parámetros y la condición inicial I_0, e iríamos comparando las correspondientes soluciones de la ecuación que el ordenador proporciona con los datos reales, para encontrar la que mejor se ajusta a la realidad. Siempre, claro está, que exista *alguna* solución que se ajuste bien a los datos, es decir, que nuestra modelización de la infección tenga sentido (por si no lo han notado, la navaja de Ockham ha trabajado a destajo: entre otras muchas simplificaciones, hemos admitido que no hay fallecimientos entre la población, que los homosexuales no tienen relaciones heterosexuales y por tanto no pueden ser contagiados por personas externas al grupo, etc.).

Si admitimos que el modelo es correcto entonces, con independencia de que en la práctica podamos conocer los parámetros y la condición inicial que caracterizan a nuestra función $I(t)$, el mero estudio matemático de la ecuación nos permite obtener algunas conclusiones interesantes. Por ejemplo puede demostrarse que la función $I(t)$ sólo puede evolucionar en el tiempo de dos formas posibles: o bien se aproxima a la cantidad $p - a/b$ (cuando ésta sea positiva), o bien tiende a cero (cuando $p - a/b \leq 0$). Las alternativas son, pues, que la infección tiende o bien a estabilizarse o desaparecer, y lo segundo será más probable cuanto más grande sea a y/o más pequeña sea b, lo que a la vista de la definición de ambos parámetros es perfectamente coherente. Observen que, aunque no parece sencillo alterar el valor de a, las autoridades sanitarias de la ciudad tienen a su disposición un método bastante sencillo para intentar rebajar b: hacer una campaña intensiva a favor del uso del preservativo entre la población de riesgo. ¿No les resulta esto familiar?

3 ¿Desaparecerá la Humanidad tras un ataque bacteriológico a escala planetaria?

Como antes les dije, si queremos estar completamente seguros de que el modelo que estamos proponiendo para describir un fenómeno se adecúa razonablemente a la realidad, no tenemos más alternativa que, tarde o temprano, contrastarlo con datos empíricos. No siempre es fácil conseguir estos datos y desconozco si se ha hecho para el modelo de infección por gonorrea que consideramos en la sección precedente. El que analizamos a continuación, en todo caso, fue verificado con éxito por Kermack y McKendrick con los datos de una plaga que asoló Bombay entre la segunda mitad de 1905 y la primera de 1906, en el artículo [5] que estos biomatemáticos publicaron en 1927 y el que sentaron las bases del estudio matemático de las enfermedades infecciosas: sus detalles están bien explicados en [1, pp. 458–465].

Para poder obtener un modelo manejable impondremos de nuevo fuertes simplificaciones, una de ellas que la población bajo estudio p permanece constante en el periodo de tiempo bajo consideración (no hay nacimientos, inmigración o inmigración, ni fallecimientos ajenos a la enfermedad). Dividimos la población en tres grupos, $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$, que varían con el tiempo pero cuya suma permanece constante y es la población total p. La clase $S(t)$ es

la de los individuos *susceptibles*, es decir, aquellos que no están infectados en ese momento t pero que pueden enfermar en el futuro. Los *infectados* $I(t)$ son los que en el instante t están padeciendo la enfermedad. Por último, el grupo $R(t)$ de los *retirados* es el formado por los individuos que se han infectado y o bien han muerto, se han curado (inmunizándose en el proceso), están vacunados, o han sido aislados para evitar el posible contagio.

Si han comprendido bien las explicaciones de la sección anterior, creo que considerarán plausible el siguiente sistema (en su trabajo, Kermack y McKendrick usaron las semanas como unidad de tiempo):

$$S' = -rIS \ ; \quad I' = -sI + rIS \ ; \quad R' = sI.$$

Por ejemplo, la segunda ecuación $I' = -sI + rSI$ es análoga a la que vimos anteriormente (téngase en cuenta que en el caso de la gonorrea sólo existían susceptibles e infectados, con lo que $p - I(t)$ era allí el número de susceptibles en el instante t), con la constante $r > 0$ teniendo un significado análogo al de la constante b allí. La constante $s > 0$ es también, en cierto sentido, equivalente a la constante a del modelo de la gonorrea. La diferencia es que mientras los infectados por gonorrea se curan y vuelven a ingresar en el grupo de susceptibles, el porcentaje de infectados sI que eliminamos de la clase de los infectados en nuestro nuevo modelo pasa ahora a engrosar la clase de retirados (no es posible que una persona se infecte dos veces por la enfermedad).

Es esencial notar aquí que lo que estamos manejando es un *sistema de ecuaciones diferenciales* (en este caso tres), en el que las incógnitas son las funciones $S(t)$, $I(t)$ y $R(t)$. Análogamente a lo que ocurre cuando se maneja una única ecuación, es posible demostrar que, si se fijan condiciones iniciales en el mismo momento para las tres funciones (por ejemplo $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$ y $R(0) = 0$) el sistema tendrá solución única.

Es una pena que no podamos adentrarnos en los vericuetos del análisis matemático del modelo (les aseguro que las complicaciones técnicas no son, ni mucho menos, tan grandes como tal vez teman, así que animo a los más valientes a que consulten las páginas de [1] que indiqué en el pie de página 2). Las conclusiones, en todo caso, son muy instructivas. No les sorprenderá, supongo, que guarden relación con el llamado *umbral* de la enfermedad (el cociente s/r), al igual que en caso anterior era el cociente a/b el que marcaba

la pauta: noten que el umbral será tanto mayor cuanto mayor sea s y menor sea r, es decir, será más elevado cuanto más rápido se pase de la condición de infectado a retirado —cuanto más mortífera sea la enfermedad, por ejemplo— y menos hacinada se encuentre la población.

Para empezar, puede demostrarse que habrá epidemia o no (es decir, la función $I(t)$ crecerá durante un tiempo a partir de su valor inicial I_0, o por el contrario decrecerá hacia cero) según que la cantidad de susceptibles S_0 supere o no el valor s/r. Así pues, y como es lógico, la probabilidad de que se produzca una epidemia crece en función del hacinamiento y la falta de higiene; sin embargo, contrariamente a lo que dicta la intuición, no depende en absoluto del número de infectados iniciales. Es curioso también, y consolador hasta cierto punto, que a mayor mortandad haya menos riesgo de epidemia.

La otra conclusión interesante de Kermack y McKendrick es que, pase lo que pase, la infección termina por desaparecer, es decir, hay un tiempo t_0 para el que $I(t_0) = 0$ y en ese momento $S(t_0) > 0$: siempre habrá supervivientes a la epidemia. Puede incluso hasta demostrarse que, bajo ciertas condiciones, el número de susceptibles $S(t_0)$ en este momento (los supervivientes a la epidemia) dista del valor umbral aproximadamente lo mismo que la cantidad inicial de susceptibles, esto es, $s/r - S(t_0) \approx S_0 - s/r$.

Este notable resultado, conocido como el *teorema del umbral*, es la piedra angular de las Matemáticas de la Epidemiología y garantiza que ningún virus salido de los laboratorios de un terrorista demente debería ser capaz de borrarnos de la faz de la tierra: todo un alivio en los atribulados tiempos que corren.[3]

4 De la vacunación, o el milagro de los panes y los peces

Como he procurado enfatizar, estamos trabajando con simplificaciones extremas de nuestros procesos que, sorprendentemente, hasta funcionan en

[3]Otra cosa, por desgracia, es si sobreviviríamos en cantidad suficiente para que nuestra civilización, tal y como la conocemos, pueda perdurar. Si les interesa el tema y les gusta la ciencia ficción, me permito recomendarles un libro absolutamente fascinante: *La Tierra permanece* de George R. Stewart [9] (depresivos, abstenerse).

ciertos casos muy particulares. Es obvio que si deseamos tener un mejor control y una información más precisa sobre los mismos habremos de buscar modelos más sofisticados. Por ejemplo, en el caso estudiado en el apartado anterior incluíamos entre los "retirados" a aquellos que no podían volver a contraer la enfermedad, pero desde luego no es lo mismo estar retirado por haberse inmunizado frente a la misma que por haber fallecido, así que sería muy importante poder distinguir quién es quién dentro de este apartado.

En particular, un aspecto crucial al que no hemos prestado atención es al de la vacunación: lo haremos ahora. Para ello paso a describirles un reciente modelo que simula la efectividad de la vacunación universal frente al virus de la hepatitis B introducido por Torrea Hernández y Garuz Bellido en [10].

Distinguiremos nada menos que siete clases diferentes de individuos, cuya suma total, como siempre, admitiremos constante. (De hecho la población con la que trabajaremos es, a tiempo cero, de recién nacidos; dado que manejaremos un intervalo de tiempo de 50 años y que la esperanza media de vida puede cifrarse en unos 75, no creo que les parezca una hipótesis particularmente descabellada.)

La clase de los *susceptibles*, S, es como siempre la formada por los individuos que no han tenido contacto con el virus (VHB). La primera novedad concierne al grupo de los *infectados*, que ahora dividiremos entre los *infectados subclínicos o asintomáticos*, I_s, cuyo curso clínico es sin síntomas y no precisan de asistencia médica, y los *infectados clínicos* I_c, cuyo cuadro clínico incluye pérdida de apetito, cansancio, náuseas y vómitos, dolor abdominal e ictericia, y entre los cuales la enfermedad puede llegar a ser fatal.

El paso por la clase de infectado es temporal y de aquí se pasa a las clases de *portador*, *inmune* o *fallecido* por hepatitis B, todo ello en un plazo nunca superior al año —que es la unidad de tiempo que usaremos ahora—. Entre los portadores crónicos del virus distinguiremos dos subclases: *portadores de alta replicación* P_a y *portadores con baja replicación* P_b, caracterizados por la presencia o no de ciertos marcadores virales tras la infección aguda. Debe enfatizarse que, tras haber sufrido la infección, un mismo individuo puede ser alternativamente portador de ambos tipos a lo largo del tiempo.

La clase de los *inmunes* N está integrada por aquellos individuos que habiendo tenido en el pasado contacto con el virus, han desarrollado anticuerpos frente al antígeno de superficie y no vuelven a ser susceptibles de

enfermar, e incluirá igualmente a las personas que responden adecuadamente a la vacuna. La última clase es la de *fallecidos* M por la hepatitis B, cuya definición es la obvia.

Como en las secciones anteriores necesitaremos un *coeficiente de transmisión* de la enfermedad b, análogo a los b y r de entonces, pero ahora surge el problema de que el riesgo de infección varía con la edad de los individuos, aumentando en la adolescencia (con la iniciación a las drogas y a las relaciones sexuales), manteniéndose durante la juventud y decreciendo posteriormente hasta un valor más estable. En otras palabras, $b = b(t)$ será una función del tiempo t, que coincide aquí con la edad de los individuos estudiados (recuérdese que a tiempo 0 nuestros individuos son recién nacidos). Estrictamente hablando b no debería depender sólo de t sino también de s, donde $b(t, s)$ aludiría al riesgo de contagio entre los individuos de edades t y s. Para que la suposición $b = b(t)$ tenga sentido es preciso admitir que los contactos infectantes se producen por lo general entre individuos de parecida edad (los adultos de 40 años no infectan a los chicos de 13), pero dado el particular carácter de la enfermedad bajo estudio esto se antoja más o menos razonable. El valor de la función $b(t)$, estimado experimentalmente por los autores del trabajo, es el siguiente:

$$b(t) = \begin{cases} 0.000175 & \text{si } t \leq 12, \\ 0.000175 \cdot [(t/6) - 1] & \text{si } 12 \leq t \leq 17, \\ 0.000175 \cdot (11/6) & \text{si } 17 \leq t \leq 30, \\ 0.000175 \cdot [(10/6) + 10 - (t/3)] & \text{si } 30 \leq t \leq 35, \\ 0.000175 \cdot (1/6) & \text{si } 35 \leq t. \end{cases}$$

Ahora no tengo más remedio que remitirles a la fuente [10], que describe de manera bastante legible las relaciones que entrelazan las distintas clases

de individuos y permiten formular el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} S' = -b(t)(I_s/4 + I_c/8 + P_a/4 + P_b)S \\ I_s' = -I_s + 0.8b(t)(I_s/4 + I_c/8 + P_a/4 + P_b)S \\ I_c' = -I_c + 0.2b(t)(I_s/4 + I_c/8 + P_a/4 + P_b)S \\ P_a' = 0.025(I_s + 0.999I_c) + 0.01P_b - 0.1P_a - 0.05c(t)P_a \\ P_b' = 0.075(I_s + 0.999I_c) + 0.1P_a - 0.03P_b \\ N' = 0.9(I_s + 0.999I_c) + 0.02P_b \\ M' = 0.001I_c + 0.05c(t)P_a \end{cases}$$

Es innegable que la cosa se ha complicado, pero les garantizo que las ideas que se manejan para formularlo son básicamente las mismas que anteriormente usamos. Lo único que queda es fijar las condiciones iniciales. Partimos de una cohorte de 100000 recién nacidos. Evidentemente casi todos serán, de partida, susceptibles, aunque unos pocos estarán en otras clases al haber nacido de madres portadoras, infectadas o inmunes. Como pretendemos diseñar un modelo lo más realista posible recurrimos a datos empíricos, que nos dicen que la probabilidad de un recién nacido pertenezca a las clases P_a, P_b y N es, respectivamente, del 0.05%, 0.15% y 0.03%. En consecuencia, $S(0) = 99770$, $I_s(0) = 0$, $I_c(0) = 0$, $P_a(0) = 50$, $P_b(0) = 150$, $N(0) = 30$ y $M(0) = 0$ serán condiciones plausibles.

Utilizando un método numérico para resolver las ecuaciones vemos que el comportamiento de la infección, cualitativamente hablando, es más o menos el que cabría esperar y análogo en lo fundamental al predicho por el modelo de Kermack y McKendrick: el número de infectados agudos entre la población en un momento dado t crece durante los primeros veinte años, alcanzándose un tope de unos 1650 enfermos, para luego decrecer hasta que la enfermedad prácticamente desaparece al cabo del periodo de 50 años estudiado. El total de víctimas por la enfermedad a lo largo de este tiempo es de 766.

Permítanme en este punto una pequeña disgresión. En los últimos años las universidades se han visto inmersas en ambiciosas reformas de planes de estudios, que han afectado significativamente a la gran mayoría de licenciaturas que se imparten en sus facultades. Por desgracia los intereses que han primado en la redacción de los nuevos planes no siempre han sido los más convenientes o beneficiosos para los estudiantes. En mi opinión (y la de mu-

chos otros docentes), un efecto secundario particularmente nocivo ha sido el de la excesiva especialización: debido a la presión de los departamentos más influyentes, muchas de las materias "limítrofes" de los antiguos programas han sido recortadas drásticamente o eliminadas sin más. En el ámbito de los estudios de Ciencias (Químicas, Biológicas, Medicina,...), por ejemplo, lo que ha ocurrido con las asignaturas de Matemáticas es paradigmático, y uno ha oído a algún que otro insigne catedrático afirmar, seguramente bajo los efectos de un pantagruélico ataque de voracidad, que en su carrera no se necesitan más matemáticas que la regla de tres. (Hay que reconocer, todo sea dicho, que nosotros los matemáticos somos en buena medida culpables de la situación, pues demasiado a menudo hemos enseñado unos contenidos abstrusos, aburridos y, lo que es peor, completamente inútiles para el estudiante medio.)

De acuerdo: estudiemos cómo la vacunación de parte de los individuos susceptibles a la hepatitis B altera la evolución futura de la enfermedad, y veamos si la "regla de tres" es útil o no en este caso. A partir de nuestro modelo esto puede analizarse de una manera muy simple. Por ejemplo, si vacunamos a los recién nacidos susceptibles de infectarse con el virus y la eficacia de la vacuna es del 90%, lo único que hay que hacer es alterar las condiciones iniciales del modelo $S(0) = 99770$ y $N(0) = 30$ y dejar todo lo demás sin tocar. Concretamente, como de la población susceptible inicial de 99770 bebés hemos inmunizado al 90%, es decir a 89793, los susceptibles serán ahora $S(0) = 99770 - 89793 = 9977$, mientras que los inmunes subirán a $N(0) = 30 + 89793 = 90823$. Y ahora, ¿qué debería ocurrir? Si algo parecido a la regla de tres funcionará aquí con una mínima solvencia entonces, en el supuesto de que la eficacia de la vacuna se redujera a la mitad, cabría esperar aproximadamente que el número de infectados y fallecidos se duplicara.

Nada de eso. Si se consideran eficacias de vacunación de un 79.7% y un 39.8% se obtienen, respectivamente, 43 y 550 como cotas máximas para el número de infectados agudos, siendo 47 y 411 las cifras correspondientes a los fallecimientos totales. En otras palabras: ¡una mejora en la eficacia de un 50% conduce a una situación clínica un 1000% mejor! En Epidemiología este fenómeno se conoce como "efecto rebaño": la presencia de vacunados entre los susceptibles hace que, de alguna manera, éstos últimos estén más separados entre sí, con lo que el riesgo de contagio entre ellos disminuye; es

como si se produjese una especie de inmunización "virtual".

El ejemplo que les acabo de mostrar es sintomático: la realidad, por lo general, se comporta de un modo fuertemente no lineal. Ningún científico serio, sea o no catedrático, debería jamás olvidar esto.

5 Más allá hay monstruos

Como seguramente imaginarán las cosas no se detienen aquí, y a poco que uno rebusque aparecen nuevos e interesantes fenómenos. Otro ejemplo relativo a la vacunación. Es bien sabido que la varicela es una enfermedad que casi todos los niños terminar por padecer. Los síntomas son relativamente benignos y tras la infección el individuo queda inmunizado de por vida. Se trata por otro lado de una enfermedad bastante contagiosa, y es común que en los colegios se produzcan de súbito verdaderas epidemias, que pueden llegar a alterar de manera significativa el normal desarrollo de las actividades escolares. Cabe imaginar, entonces, que en determinadas coyunturas algunos sectores (padres, educadores, prensa) presionen a las autoridades sanitarias para que organicen campañas de vacunación masiva entre los más pequeños o, incluso, que algún político de turno decida implantarlas *motu propio*. Es más que probable que ante una situación así, y abandonados a su libre albedrío, 99 de cada 100 políticos se decanten sin titubear por la vacunación (salvo, claro está, que los costes económicos de la medida excedan lo "razonable"). El político restante, quizás, decidiría consultar a un *verdadero* experto, que le contestaría: ¡cuidado!

El quid estriba en que a diferencia de lo que ocurre con (nuestro modelo de) la hepatitis B, la varicela se transmite con alguna frecuencia entre personas de distinta edad (de hijos a padres, por ejemplo), y en los adultos los efectos de la enfermedad son mucho más peligrosos; si la padece una embarazada, por ejemplo, existe un grave riesgo de que el feto sufra serias malformaciones. En la línea de lo explicado en la sección anterior se tendrá que, por supuesto, la cantidad *total* de susceptibles a la enfermedad decrecerá de manera sustancial. Sin embargo, el estudio de las matemáticas del fenómeno revela un hecho desagradable e inesperado: entre la población *adulta* no vacunada el riesgo de contraer la enfermedad *aumenta*. (Sin entrar en detalles, aquí los susceptibles, infectados, etc. se describen como *fun-*

ciones de dos variables, el tiempo t y la edad e, de modo que, por ejemplo, $S(t, e)$ denotaría el número de personas de e años de edad que en el instante t son susceptibles de contraer la enfermedad. La herramienta matemática a utilizar ahora es una generalización de la idea de ecuación diferencial, la *ecuación en derivadas parciales*, cuyo manejo en la práctica en de bastante dificultad; véase [3].) Ahora nuestro político (acaso arrepentido por no haber seguido el ejemplo de sus 99 colegas) habrá de ganarse su sueldo y decidir si merece la pena aguantar las críticas de los medios por no vacunar a algunos miles de niños de la varicela a cambio de que, *tal vez*, unos cuantos niños nazcan sin taras en los años venideros.

Temo que su paciencia, si no se ha agotado ya, está pronta a hacerlo; es hora de terminar. Me he reservado para el final un efecto realmente espectacular, que haría removerse a Ockham incómodo en su tumba: la llamada *dependencia sensible respecto a las condiciones iniciales* o, más popularmente, el *caos determinista*.

Consideren el siguiente sistema, en apariencia más o menos similar al de la Sección 3 y desde luego menos complicado que el de la Sección 4, donde S, I y R denotan como viene siendo habitual los susceptibles, infectados y retirados por una cierta enfermedad:

$$S' = -r(t)I^2S + w - wS \ ; \quad I' = -(s+w)I + r(t)I^2S \ ; \quad R' = sI - wR$$

aquí s y w son parámetros y $r(t) = 16w(a + b\ sen(ct))$ para otros ciertos parámetros a, b y c. No merece la pena detenerse en la explicación precisa de todo lo anterior; lo más relevante es que los retirados tienen la posibilidad de convertirse de nuevo en susceptibles, a semejanza de lo que ocurría en el ejemplo de la gonorrea (ver [2] para más detalles).

Ciertamente, uno no esperaría grandes sorpresas. A partir de las condiciones iniciales las diversas clases iran evolucionando hasta, presumiblemente, estabilizarse; a lo sumo, lo peor que *debería* ocurrir es que las clases, en lugar de tender hacia valores concretos, fluctuaran periódicamente, en correspondencia con épocas de mayor o menor incidencia de la enfermedad. En todo caso sería cuestión de aplicar un método numérico de resolución de ecuaciones (como en el caso del sistema de la sección anterior, no hay método analítico para resolver el que nos ocupa) y salir de dudas.

Sin embargo, para ciertos valores de los parámetros ocurre una cosa muy curiosa: la fiabilidad de los datos que el ordenador proporciona es, lisa y

llanamente, nula. La razón radica en la dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales de la que hablábamos antes, que consiste en lo siguiente: el comportamiento futuro del sistema a partir de ciertas condiciones iniciales, digamos $S(0) = 10000$, $I(0) = 100$ y $R(0) = 0$ *puede ser* radicalmente distinto al que se tendría si, por ejemplo, $S(0) = 10001$. Dado que cuando se manejan datos reales es imposible afinar tanto, y que los métodos numéricos de resolución de ecuaciones por ordenador involucran *per se* errores similares o mayores, quedamos completamente inermes; toda nuestra capacidad predictiva se evapora; nuestro bonito entramado teórico se derrumba por la base. Sería como si, cuando Galileo experimentaba desde lo alto de la torre de Pisa para calcular con qué aceleración caen los cuerpos por efecto de la gravedad, hubiera traído un día de su casa una bola un poquito más pequeña de lo habitual y al soltar ésta, en lugar de bajar, saliera disparada hacia los cielos.

La sorprendente situación que acabamos de describir se reproduce incluso para un sistema de apariencia tan poco sospechosa como

$$x' = a(y - z) \ ; \quad y' = x(b - z) - y \ ; \quad z' = xy - cz$$

si tomamos $a = 10$, $b = 28$ y $c = 8/3$ como valores de los parámetros. A pesar de que no está emparentado con la epidemiología he traído a colación este último sistema (las llamadas *ecuaciones de Lorenz*) porque su trascendencia histórica es monumental (fue la primera vez que aparecía semejante comportamiento en un sistema de ecuaciones asociado a un fenómeno de la "vida real") y sobre él se han escrito miles de páginas (el libro [8], por citar sólo un ejemplo). Las ecuaciones fueron propuestas por el meteorólogo Edward Lorenz en 1963 en un artículo ya mítico [6] y provienen de un modelo ultrasimplificado del clima terrestre. La verdad es que Lorenz descubrió el intrigante efecto descrito por pura casualidad, pero eso es lo de menos. Lo importante es lo que implica, que es nada menos que la imposibilidad de predecir el tiempo atmosférico siquiera a medio plazo. Entiéndanlo: no es que los "hombres del tiempo" sean unos ineptos, o que dispongan de pocos medios para su trabajo. Es que una diferencia de una décima de grado hoy, en Pekín, puede determinar que dentro de 15 días llueva o haga sol en Nueva York. Así de fuerte.

6 Conclusiones

En este artículo he pretendido ofrecerles una suerte de rápida visita guiada a una fascinante rama de la ciencia interdisciplinar, las llamadas Matemáticas de la Epidemiología. Usando como medio de transporte, por así decirlo, esa fantástica creación del intelecto humano conocida como Cálculo Diferencial, han tenido la oportunidad de contemplar, siquiera de pasada, algunos vistosos monumentos de la disciplina. Así, por ejemplo, les he mostrado el sorprendente "teorema del umbral", que postula que por muy mortífera que sea una enfermedad siempre dejará supervivientes, y han sabido del paradójico "efecto rebaño", de acuerdo con el cual la proximidad de personas vacunadas contra un cierto virus no sólo no aumenta el riesgo de contagio para las que no lo están sino que incluso les confiere unas especie de inmunidad a distancia. Por otro lado hemos visto que en lo que se refiere a la vacunación no todo es color de rosa, ya que proteger a sectores de población de una cierta edad (por ejemplo, niños) puede dejar más vulnerables a los de otra para la que los efectos de la enfermedad sean mucho más perniciosos. Han aprendido, por último, que hay epidemias que presentan comportamientos imprevisibles, tan caóticos y aberrantes como los del propio tiempo atmosférico que con tanto denuedo y no tanto acierto los meteorólogos se empeñan en predecir.

En realidad, todo hay que decirlo, las cosas no son tan desesperadas; después de todo, si yo anuncio que el 15 de Julio del año que viene va a hacer un calor terrible en Murcia es muy problable que me equivoque. Lo que es seguro es que para entender este tipo de situaciones hacen falta nuevos modelos y nuevas matemáticas, aún por desgracia (o por suerte para nosotros, los profesionales del ramo) escasamente desarrolladas. Posiblemente éste sería un buen tema para otro artículo. En lo que a éste respecta, hemos concluido.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado en parte por el MEC (Mnisterio de Educación y Ciencia) y el FEDER (Fondo Europeo de Desarrollo Regional), proyecto MTM2005-03868, y la Fundación Séneca (Comunidad Autónoma de la Región de Murcia), proyecto 00684/PI/04.

Referencias

[1] M. Braun, *Differential equations and their applications. Fourth Edition*, Springer-Verlag, Nueva York, 1993.

[2] P. Glendinning y L. Perry, *Melnikov analysis of chaos in a simple epidemiological model*, J. Math. Biol. **35** (1997), 359–373.

[3] M. E. Halloran, S. L. Cochi, T. A. Lieu, M. Wharton y L. Fehrs, *Theoretical epidemiologic and morbidity effects of routine varicella immunization of preschool children in the United States*, Am. J. Epidemiol. **140** (1994), 81–104.

[4] V. Jiménez López, *Ecuaciones diferenciales: cómo aprenderlas, cómo enseñarlas*, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Murcia, Murcia, 2000.

[5] W. O. Kermack y A. G. McKendrick, *Contributions to the mathematical theory of epidemics*, Proc. Royal. Stat. Soc. A **115** (1927), 700–721.

[6] E. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, J. Atmospheric Sci. **20** (1963), 130–141.

[7] J. R. Newman, *Sigma. El mundo de las Matemáticas*, Vol. I, Grijalbo, Barcelona, 1983.

[8] C. Sparrow, *The Lorenz equations: bifurcations, chaos, and strange attractors*, Springer-Verlag, Nueva York-Berlín, 1982.

[9] G. R. Stewart, *La Tierra permanece*, Minotauro, Barcelona, 1995.

[10] J. L. Torrea Hernández y R. Garuz Bellido, *Efectividad de la vacunación universal frente al virus hepatitis B. Simulación con un modelo matemático*, Gac. Sanit. **8** (1994), 294–303.

El Zorro y las Matemáticas en México

Mª del Carmen Carro Alfós
Catedrática de Matemáticas
I.E.S. Gabriel García Márquez de Madrid
Profesora de Estadística aplicada a las Ciencias Sociales
Centro Asociado de Móstoles de la UNED
carroalfos@hotmail.com

Abstract

The aim of this article is to establish the connection between William Lamport, on whose life the movie character "ElZorro" is based on, and the circle of scientists who gathered around Fray Diego Rodríguez, the first Professor of Astrology and Mathematics at the University of Mexico, to reflect abaut the hermetic doctrines, questioning not only the hierarchy of the Cosmos, but also the political and ecclesiastical one resulting from it.

Resumen

Este artículo pretende relacionar a William Lamport, personaje real en el que se basa la figura llevada al cine con el sobrenombre de "El Zorro" con el círculo de científicos reunidos en torno a fray Diego Rodríguez, primer catedrático de Astrología y Matemáticas de la universidad de México y observar los intereses comunes de todos ellos por las doctrinas herméticas, cuestionando no sólo la jerarquización del cosmos sino también la paralela jerarquización política y eclesiástica.

Mis recuerdos de adolescencia en las tardes de los domingos están ligados a las sesiones de cine y a las películas de "El Zorro". Nunca pensé que aquel personaje que amenizaba aquellas horas de descanso tuviera alguna relación con lo que más tarde sería mi dedicación, mi afición y mi trabajo: Las Matemáticas. Nada en aquellas películas lo hacía presagiar; es más, este personaje de ficción nada tenía que ver con ellas. Sin embargo, el hombre real de carne y hueso en que se basa, sí

tuvo una fuerte vinculación con esta materia, tanto que por su afición al "levantamiento de figuras astrológicas" el Santo Oficio le llevaría a la cárcel y, más tarde, a la hoguera.

Pero, ¿quién era este personaje conocido por "El Zorro"?

El verdadero nombre de "El Zorro" era William Lamport (1615- 1659) y había nacido en Wesford (Irlanda) en el seno de una familia católica y adinerada. Su abuelo Patrick, inglés, invirtió parte de su fortuna en un castillo al sur de Wesford. Este abuelo era un fanático de la escaramuza, le gustaba batirse cuerpo a cuerpo y disfrutaba contando a su nieto este tipo de historias. Su nieto heredaría de él su espíritu aventurero y justiciero.

William estudió con los agustinos y franciscanos en Wesford y con los jesuitas en Dublín. En 1628, su padre, alarmado por su comportamiento indolente, ocioso y alocado que llevaba su hijo en la capital irlandesa, lo matriculó en una escuela de Londres con el fin de que sentara la cabeza.

En el viaje en barco se interesó por la historia que le contó un marinero sobre las injusticias que sufría la gente común bajo el gobierno de Oliver Cronwell, lo que le hizo despertar la conciencia social y el gusto por la escaramuza inculcado por su abuelo. Nada más llegar al puerto de Portsmuth en Inglaterra, se unió al marinero y se enroló en la tripulación de un barco de piratas que navegaba por el Atlántico participando con ellos en toda clase de asaltos y abordajes, convirtiéndose en un maestro del sable y en un experto espadachín.

Al cabo de dos años llegó al puerto de A Coruña – donde había una colonia de irlandeses-, abandonó temporalmente la vida que llevaba y se matriculó en el colegio de San Patricio y, más tarde, en el Colegio Imperial de Madrid. Llegó a hablar con pericia varias lenguas.

En España, cambió su nombre por el de Guillén Lombardo y, al poco tiempo, comenzó a alternar sus estudios con la espada y la escaramuza en distintos tipos de batalla: primero se enroló en uno de los regimientos irlandeses que peleaban bajo las órdenes de la Corona y, una vez abandonado el colegio, ingresó como Capitán en la Armada española y participó en batallas en Nördlingen en 1634 y en Fuenterrabía en 1638. Todos sus logros militares están registrados en los anales de The Honourable Society of Irisch Brigada, sociedad dedicada al estudio de los regimientos o soldados irlandeses que han prestado servicios fuera de su país.

Por esta época, Guillén ya había escalado puestos y obtenido una buena posición, convirtiéndose en consejero del duque de Olivares. Cuando éste en 1643 cayó en desdicha, Lampart fue enviado a México como espía -haciéndose pasar por profesor de latín- con la misión encubierta de averiguar si el ex – virrey Cadereyta apoyaba secretamente una rebelión en Portugal.

Antes de partir para el Nuevo Mundo, había cosechado fama de consejero lúcido, espadachín invencible, pero también de mujeriego. Esta conducta licenciosa la mantuvo al llegar a Nueva España, donde fue sorprendido con la ex – virreina , siendo la causa que le terminaría complicando la vida ya que su marido no cejaría hasta conseguir llevarlo a prisión.

Pero cuando Guillén llegó a México no sólo encontró una ciudad donde podía dedicarse a su afán de caballero conquistador, sino que también su afición a la astrología encontraba la forma de darle rienda suelta. En efecto, desde principios de los años cuarenta venía funcionando una *tertulia científica* o *academia informal* en torno a la figura del fraile mercedario fray Diego Rodríguez, primer catedrático de Astrología y Matemáticas de la Universidad. Este religioso supo imprimir en este puesto un giro nuevo, ya que junto a las enseñanzas de corte clásico introdujo otras de índole totalmente moderno. En ella se leía en *castellano* a Tycho Brahe, Copérnico, Kepler, Juan de Monterregio, Erasmus Reinhold y Purbach en Astronomía y a Tartaglia, Cardano, Bombelli, Neper y Stevin en Matemáticas. Esta cátedra estuvo abierta a las novedades, lo que provocó confrontaciones con los partidarios de la tradición. Cuestionando la tradición científica confrontando las autoridades de la ciencia clásica con las nuevas obras de los rebeldes cósmicos, fray Diego inició la transición del viejo al nuevo paradigma científico. En las obras redactadas por este catedrático desaparece la vieja noción de " filosofía natural" que abarcaba todas esas disciplinas y logra desvincular a las ciencias exactas de la metafísica y de la teología, tal y como aparecían en el paradigma escolástico- medieval profesado en la Universidad. A partir de la apertura de la cátedra de matemáticas en 1637 gran parte de la ciencia colonial en Nueva España fue hecha por individuos alejados de esas viejas preocupaciones metafísicas, tales como ingenieros, astrónomos o naturalistas que colaboraron en sus investigaciones al margen de la universidad y de los prejuicios escolásticos que la paralizaban.

Paralelamente a esta cátedra de matemáticas tuvo lugar la creación de la ya mencionada *tertulia.* A ella asistía un reducido número de sabios novohispanos interesados en las ciencias y, en particular en las matemáticas y en la astronomía. Esta *tertulia* consagrada a la musa *Urania* tuvo durante diez años su centro en el

Convento Grande de la Merced, si bien sus reuniones se celebraban en las casas de algunos de sus miembros propietarios de ricas bibliotecas o en librerías e imprentas cuyos dueños eran proclives a las labores intelectuales. Estaba formada por maestros universitarios, médicos, bachilleres, latinistas, arquitectos, "chymicos" y por todos aquellos " que sin haber cursado por destino las facultades, con su mucho ingenio y alguna aplicación podían hacer, no en vano, muy buen juicio de todo". A ellos debemos sumar los discípulos del P. Rodríguez.

Casi todos sus miembros fueron criollos, adictos a las doctrinas herméticas que usaron un lenguaje semisecreto con el fin de ocultar ciertos conocimientos, manteniéndolos sólo en el círculo de los íntimos. Los libros y, sobre todo, aquellos que eran considerados heterodoxos en el campo científico eran prestados y compartidos por todos ellos con el fin de conocer y difundir entre los mismos su contenido novedoso. De esta manera, la *academia* o *tertulia* fomentaba la lectura y discusión y hacía un proselitismo moderado. Éste se pone de manifiesto por el hecho de que las doctrinas herméticas que profesaban cuestionaban profundamente no sólo la cosmovisión jerarquizada de los aristotélicos, sino la paralela jerarquización de una sociedad donde ellos, los criollos, eran desplazados de los principales puestos políticos y eclesiásticos por los peninsulares.

Hasta 1646 esta *tertulia* corrió sin problemas, incluso contó con el apoyo de algunos personajes de la burocracia civil y eclesiástica, aunque la Inquisición siempre vio con aprensión a algunos de sus miembros. A partir de ese momento, debido a una represión inquisitorial más severa, la *academia* entró en un período de declive que duraría hasta su disolución en 1655. A partir de 1646 se inician procesos contra algunos de sus miembros acusados de heterodoxia científica o de practicar la astrología judiciaria. Sus bibliotecas son confiscadas y sus manuscritos decomisados. Una y otra vez son llamados a declarar sus componentes; sin embargo, ellos siempre contestarán dando testimonio de la ortodoxia del acusado, diferenciando entre astrología judiciaria y racional (lo que para nosotros es astronomía y meteorología) e incluso atreviéndose a expresar que en materia de ciencia no hay autoridad reconocida y que tampoco debe haber censura académica.

En esta actitud represiva de los inquisidores contra los hombres de ciencia sospechosos de heterodoxia tuvo mucho que ver el proceso contra Guillén de Lampart.

En efecto, a los pocos meses de su llegada a México Lampart fue arrestado por revolucionario, por urdir una rebelión contra el Gobierno. Además, acusado de hereje por practicar la astrología y por los usos cabalísticos que hacía de la

ciencia, fue entregado a la Inquisición quien lo juzgó y lo encarceló. Su proceso se reinició en 1650, después del recrudecimiento consecuencia del Gran Auto de Fe de 1649 con el nuevo Inquisidor General Sáenz de Mañozca. En la noche del 25 de diciembre de 1650 consiguió escaparse de la prisión, colocó panfletos por toda la ciudad denunciando la corrupción de la Inquisición, proclamó la independencia de España y se proclamó virrey . El hecho de ser el primero que proclamara la independencia en el Nuevo Mundo, hizo que más tarde fuera representado en el primer escalón del monumento del Ángel Libertador en el paseo de La Reforma de México. Sus ideales consistían en abolir la esclavitud, separar la Iglesia del Estado, democratizar la elección del monarca, promover la igualdad racial y la reforma de la tierra. Entre otras ideas Lampart exponía:

La misma aflicción y pena que la mala situación de los indios de la que antes hablé, causa la tiranía, la esclavitud de tanto número de negros, mulatos, berberiscos y otros infinitos ramos que penden de estos troncos, cuyo derecho de naturaleza está usurpado, con poco temor de Dios, por los españoles, pues de libres que los crió Dios, los reducen a la miseria, esclavitud y servidumbre, pena la más fatal, pues antepone la libertad, más dulce y amable que la vida misma.

A los pocos días fue capturado de nuevo y, durante los nueve años restantes que estuvo en la cárcel escribió 917 salmos en latín. Finalmente, en 1659 fue quemado en la hoguera, a pesar de que la Inquisición mexicana había recibido órdenes contrarias de Madrid.

En el juicio contra Lampart las autoridades civiles y eclesiásticas tomaron conciencia de las potencialidades de subversión política que se ocultaban tras esas aparentemente inocuas tertulias de científicos criollos. Lampart era astrólogo, pero como todos en su época, astrónomo, matemático y agrimensor, de tal forma que no fue difícil para los inquisidores identificar a los astrólogos con conspiradores encubiertos y las tertulias con focos de disidencia política. Las causas inquisitoriales que se van a suceder entre 1650 y 1655 ya revelan esta nueva preocupación.

Así, el 3 de noviembre de 1650 el Santo Oficio arrestó al astrólogo mulato Gaspar Rivero Vasconcelos, acusándole de practicar la astrología judiciaria, de haber calumniado al Santo Oficio y a sus ministros y de ser sospechoso de herejía. En su proceso fueron mencionados varias veces los nombres de fray Diego Rodríguez y del " maestro mayor de obras" de la Catedral, el arquitecto, bibliófilo y astrólogo Melchor Pérez de Soto; y aunque los cargos eran graves y ambos parecían suficientemente implicados en prácticas astrológicas consideradas ilícitas,

sólo Pérez de Soto fue encarcelado, procesado y su biblioteca confiscada. En este proceso el P. Rodríguez fue eximido de culpa por alegar que él practicaba la astrología racional – astronomía de observación y el estudio de fenómenos meteorológicos-y no la judiciaria. Pérez de Soto confesó que sus maestros en el estudio de la astrología habían sido el agustino Felipe de Castro y el P. Rodríguez; sin embargo, las declaraciones de un testigo del proceso llamado Nicolás de Robles manifestando la renuencia del mercedario a los puntos de vista astrológicos del acusado y la censura que le había manifestado por su exagerado anhelo en adivinar los "futuros contingentes" hicieron que fray Diego quedara en libertad, no así el bibliófilo quien el 12 de diciembre de 1654 fue formalmente acusado " por sus muchos delitos contra la fe", por poseer libros prohibidos y por vivir " usando y practicando la judiciaria". El proceso en su contra comenzó el 13 de enero de 1655, arrestándole en su domicilio y confiscándole su biblioteca. En este proceso fueron llamados a declarar varios miembros de la *tertulia*: el propio fray Diego, el médico Gabriel López Bonilla- quien ya había tenido que declarar en el proceso contra Lampart-, el almirante Pedro Porter Casanate, el librero Antonio Calderón Benavides y el latinista ya mencionado Nicolás de Robles. De las declaraciones de los testigos se desprende que el mercedario y López Bonilla eran los más cercanos al acusado y que el interés por las ciencias astronómicas era compartido por igual, pero que el procesado había traspasado el nivel de lo permitido. Más aún, esa relación intelectual entre los tres explicaba el intercambio de libros que existía entre ellos. Pérez de Soto declaró que fray Diego le prestaba libros de astrología y, si tenemos en cuenta que uno de los motivos para llevarlo ante la Inquisición y decomisarle su biblioteca fue el hecho de que se le acusara de tener libros prohibidos, es fácil suponer que algunos de los que le fueron decomisados en el momento de su arresto pertenecieran al catedrático de Matemáticas de la Universidad. No es de extrañar que estos amigos de Pérez de Soto siguieran el proceso contra su contertulio con gran preocupación y que la llamada del tribunal para declarar era una forma clara de reprender y censurar al grupo de científicos que en una discreta *tertulia* se reunían desde hacía más de tres lustros. La trágica muerte de Pérez de Soto el 16 de marzo de 1655, asesinado por su compañero de celda, puso fin a un proceso que quedó bien grabado en la memoria de sus amigos.

Si al miedo que produjo todo este proceso se añade el hecho de que el 26 de octubre de 1647 se hubiera dado un edicto ordenando que todas las personas que compusiesen, escribiesen o imprimiesen pronósticos o lunarios en Nueva España debían tener el permiso del Santo Oficio y que por un Auto Inquisitorial del 30 de julio de 1655- a raíz del proceso de Pérez de Soto- se obligara a los seis libreros

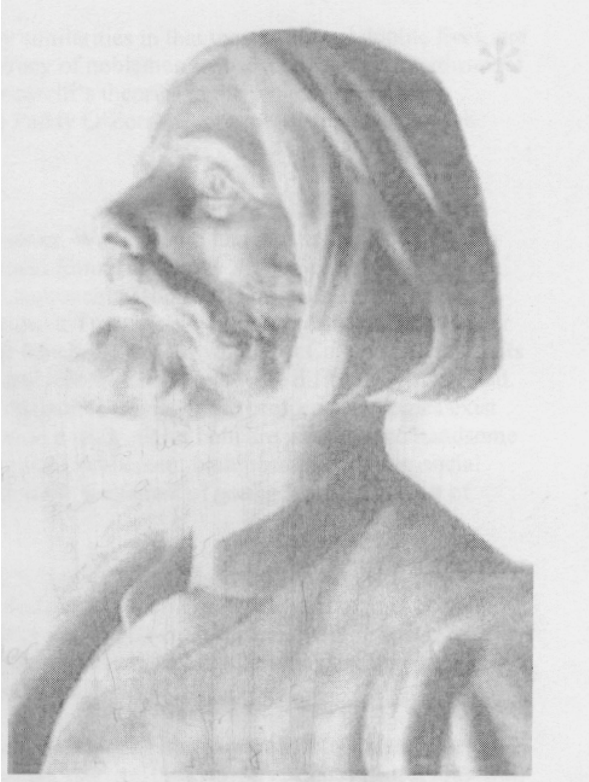
de la ciudad de México a presentar inventarios detallados de los libros que poseían bajo pena de multa y excomunión, hizo que desapareciera la *tertulia* científica y, evidentemente, que cambiase la forma de hacer ciencia, en general, y astronomía, en particular.

En este personaje William Lamport se basó Vicente Riva Palacio para escribir en 1872 *Memorias de un impostor, don Guillén de Lampart, rey de México.* Este buen conocedor de las cifras cabalísticas hace que su personaje se defienda de los embates de la Inquisición fundamentando sus contraataques en el "principio de la vida", en la " chispa divina" o "resplandor" que representa la palabra hebrea *ziza*, cuyo símbolo es la letra *z*. Esta letra dentro de la simbología masónica simboliza la energía vital de la luz de las tinieblas. En palabras del Lampart de la novela : " el amor a la ciencia nos reunió", "pero la ciencia es la luz y la luz es la libertad". Estas expresiones y su conocimiento de la astrología le hacen tener conexiones con la academia de fray Diego, de la que ya sabemos utilizaba el lenguaje y la ciencia bajo la corriente hermética.

En 1919 Johnston Mc Culley escribió *The curse of Capistrano*, una novela basada en la anterior, aligerada y aderezada con dos novedades: Guillén pasó a llamarse Diego de la Vega y la *Z* se convirtió en la inicial de su nombre de guerra, " Zorro". Un año más tarde, Douglas Fairbanks escribió un guión basado en el libro de Mc. Culley donde Guillén se parecía más a Robin Hood que a William Lamport. El guión se llevó a la pantalla con el título de *The mark of Zorro.* El propio Fairbanks dio vida al personaje, siendo su imagen muy diferente del retrato de un antepasado de William Lamport realizado por Rubens en 1620 y que tiene por título " Joven capitán". Dicho retrato pertenece a la colección del Timken Museum of Art de San Diego, California.

La historia del hombre real William Lampart supera en interés a la del personaje que el cine nos presenta y, como muchas veces ocurre en la vida, la realidad supera la ficción. A mí me hubiera gustado conocerla cuando asistía a la proyección de aquellas películas que al comienzo de este artículo hacía referencia y en las que se destacaba la faceta de espadachín y defensor de la justicia con los oprimidos y más débiles. Hubiera sido un gran aliciente tener presente su faceta astrológica, astronómica y matemática que tanta importancia jugó en su vida y, desgraciadamente, también en su muerte. Espero que esta historia sea un punto de atracción para el conocimiento de esta época tan interesante e importante para la Ciencia y para las Matemáticas y que cada vez que veamos una de las películas de " El Zorro" leamos entre líneas o entre imágenes su afición por las Matemáticas.

Retratode Guillén Lombardo: ”Joven capitán”, Rubens (1635). *Fotografía de The Putman Fundation, Timkem Museum of Art, San Diego / Album*



Representación de William Lamport en el monumento del Ángel de la Independencia de Alciati en la ciudad de México.

Bibliografía

Ronan, Gerard, *William Lamport 1615-1659 (alias Guillén de Lombardo). A Brief Biography,* Brandon Mount Eagle Publications, 2004.

Soler, Jordi, “Los orígenes de El Zorro”, en *El PaísSemanal*, 27 de febrero de 2005, pp. 43-45.

Trabulse, Elías, *Los orígenes de la ciencia moderna en México (1630-1680)*, México, FCE, 1994.

Las sucesiones de Fibonacci, Lucas y Pell como casos particulares de la sucesión generalizada de Fibonacci

Sergio Falcón y Ángel Plaza
Dpto. Matemáticas de la ULPGC
sfalcon@dma.ulpgc.es

Abstract

In this paper we present a generalized Fibonacci sequence of integer numbers. Some of the basic properties are proven in an elementary way. Finally, Fibonacci, Lucas and Pell sequences are obtained by imposing particular initial conditions and particular coefficients in the generalized Fibonacci sequence.

Introducción

Los números de Fibonacci se definen de forma recursiva del siguiente modo: $F_0 = 0,\ F_0 = 1,\ F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ para n≥1. Estos números aparecen frecuentemente en la naturaleza y están relacionados con la razón áurea $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ [2] y muestran una gran cantidad de propiedades [5]. Por otro lado, se han propuestos diversas generalizaciones de los números de Fibonacci [1,3,4].

El presente documento tiene por objeto encontrar fórmulas de tipo general que sirvan tanto para la sucesión de Fibonacci como para las de Lucas y Pell e incluso para cualquier otra sucesión que se forme siguiendo criterios parecidos a éstas. Las tres sucesiones mencionadas tienen en común que su generación se hace de forma parecida: supuestos conocidos los dos primeros elementos, los restantes se obtienen mediante una combinación lineal de sus dos elementos anteriores.[1]

[1] El presente trabajo ha sido parcialmente financiado por el Proyecto CYCIT número MTM2005-08441-C02-02.

Se llama sucesión generalizada de Fibonacci a la sucesión $\{T_0, T_1, T_2,\ldots\}$ en la que T_0 y T_1 son valores conocidos y donde $T_{n+1} = aT_n + bT_{n-1}$ para $n \geq 1$ con $a,b \in \mathbf{R}^+$.

A continuación hallaremos una fórmula que nos permitirá encontrar cualquier término de una sucesión de este tipo sin necesidad de conocer los dos anteriores.

1. Término general de la sucesión generalizada de Fibonacci

De la relación de recurrencia $T_{n+1} = aT_n + bT_{n-1}$ la tentativa $T_n = r^n$ conduce a $r^{n+1} = a\cdot r^n + b\cdot r^{n-1}$, lo que nos da la ecuación característica $r^2 - a\cdot r - b = 0$ cuyas soluciones son

$$r_1 = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2} \text{ y } r_2 = \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2} \qquad (1)$$

Evidentemente, se verifica que $r_1 > 0$, $r_2 < 0$ y $|r_2| < r_1$

Por lo tanto, el término general es de la forma $T_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$. Para hallar los coeficientes C_1 y C_2, dado que T_0 y T_1 son conocidos, se hace $n = 0$ y $n = 1$ obteniéndose las respectivas ecuaciones $C_1 + C_2 = T_0$, $C_1 r_1 + C_2 r_2 = T_1$. La solución de este sistema de ecuaciones es $C_1 = \dfrac{T_1 - T_0 r_2}{r_1 - r_2}$ y $C_2 = -\dfrac{T_1 - T_0 r_1}{r_1 - r_2}$ por lo que el término general de la sucesión generalizada de Fibonacci tiene la forma

$$T_n = \frac{T_1 - T_0 r_2}{r_1 - r_2} r_1^n - \frac{T_1 - T_0 r_1}{r_1 - r_2} r_2^n \qquad (2)$$

2. Límite del cociente de dos términos consecutivos

Una propiedad muy usada en el estudio de estas sucesiones es la que indica que en toda sucesión generalizada de Fibonacci, si r_1 es la solución característica positiva, entones

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{T_{n-1}} = r_1 \qquad (3)$$

La demostración es sencilla ya que, dividiendo el cociente indicado por r_1^n resulta:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{T_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(T_1-T_0r_2)r_1^n-(T_1-T_0r_1)r_2^n}{(T_1-T_0r_2)r_1^{n-1}-(T_1-T_0r_1)r_2^{n-1}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(T_1-T_0r_2)-(T_1-T_0r_1)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n}{(T_1-T_0r_2)\frac{1}{r_1}-(T_1-T_0r_1)\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n\frac{1}{r_2}}=r_1$$

pues $|r_2|<r_1\to\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n=0$.

3. Suma de los primeros términos

Para hallar la suma del término inicial T_0 más los "n" siguientes términos de una sucesión generalizada de Fibonacci, basta efectuar la suma

$$S_n=\frac{1}{r_1-r_2}\sum_{k=0}^{n}\left((T_1-T_0r_2)r_1^k-(T_1-T_0r_1)r_2^k\right)=\frac{T_1-T_0r_2}{r_1-r_2}\sum_{k=0}^{n}r_1^k-\frac{T_1-T_0r_1}{r_1-r_2}\sum_{k=0}^{n}r_2^k$$

Teniendo en cuenta que $\sum_{k=0}^{n}r^k$ no es más que la suma de los términos de una progresión geométrica, resulta que finalmente que

$$S_n=\frac{T_1-T_0r_2}{r_1-r_2}\frac{r_1^{n+1}-1}{r_1-1}-\frac{T_1-T_0r_1}{r_1-r_2}\frac{r_2^{n+1}-1}{r_2-1} \qquad (4)$$

4. Aplicación a la sucesión de Fibonacci clásica

Se dice que la sucesión $\{F_0, F_1, F_2,\ldots\}$ es de Fibonacci si $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{n+1} = F_n+F_{n-1}$ para $n \geq 1$.

Comparando esta sucesión con la inicial, se deduce que a = b = 1. Sustituyendo estos valores en las fórmulas (1), (2), (3) y (4) se obtienen los resultados que se indican a continuación.

Sucesión de Fibonacci: {0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…}

(1): *Soluciones características*: $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau$ y $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi$

(2): *Término general*: $F_n = \dfrac{\tau^n - \varphi^n}{\tau - \varphi}$. Esta fórmula se puede expresar en términos de números combinatorios sin más que desarrollar los binomios correspondientes a τ y φ, obteniéndose para F_n la expresión más sencilla de calcular

$F_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k$ donde $\left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$ es la parte entera de $\dfrac{n-1}{2}$

(3): *Límite del cociente de dos términos consecutivos*: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{F_n}{F_{n-1}} = \tau$.

(4): *Suma de los "n" primeros términos* (más $F_0 = 0$):

Como $r^2 - r - 1 = 0 \to r(r-1) = 1 \to r - 1 = \dfrac{1}{r}$ por lo que $r_1 - 1 = \tau - 1 = \dfrac{1}{\tau}$ y $r_2 - 1 = \varphi - 1 = \dfrac{1}{\varphi}$. En consecuencia,

$$S_n = \frac{1}{\tau - \varphi}\left(\tau^{n+2} - \tau - \varphi^{n+2} + \varphi\right) = \frac{\tau^{n+2} - \varphi^{n+2}}{\tau - \varphi} - 1$$

o, desarrollando las expresiones de τ y φ, $S_n = -1 + \dfrac{1}{2^{n+1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} 5^k$

5. Aplicación a la sucesión de Lucas

La sucesión de Lucas es la sucesión de Fibonacci clásica pero cuyo término inicial es $L_0 = 2$. Por lo tanto, los valores de a y b son los mismos que los del párrafo anterior y en consecuencia, también lo son r_1 y r_2 con lo que las fórmulas anteriores quedan como se indica a continuación.

Sucesión de Lucas: {2, 1, 3, 4, 7, 11, 18,…}

(1): *Soluciones características*: $r_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau$ y $r_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi$

(2): *Término general*: $T_1 - T_0 r_2 = 1 - 2\varphi = 1 - 2\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \rightarrow \dfrac{T_1 - T_0 r_2}{r_1 - r_2} = 1$

$$T_1 - T_0 r_1 = 1 - 2\tau = 1 - 2\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -\sqrt{5} \rightarrow -\frac{T_1 - T_0 r_1}{r_1 - r_2} = 1$$

Luego: $L_n = \tau^n + \varphi^n$ y en términos combinatorios $L_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k} 5^k$

(3): *Límite del cociente de dos términos consecutivos*: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = \tau$.

(4): *Suma de los "n" primeros términos*: $S_n = \tau^{n+2} + \varphi^{n+2} - 1$ y también

$$S_n = -1 + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n+2}{2k} 5^k$$

6. Aplicación a la sucesión de Pell

Una sucesión es de Pell si $P_0 = 0$, $P_1 = 1$, $P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1}$ por lo que es una sucesión generalizada de Fibonacci con a = 2, b = 1. Sustituyendo estos valores en las fórmulas indicadas se obtienen los valores que se indican.

Sucesión de Pell: {0, 1, 2, 5, 12, 29,…}

(1) *Soluciones características*: $r_1 = \dfrac{2+\sqrt{8}}{2} = 1 + \sqrt{2} = \alpha$ y $r_2 = 1 - \sqrt{2} = \beta$

(2) *Término general*: $P_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ o bien $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{2k+1} 2^k$

(3) *Límite del cociente de dos términos consecutivos*: $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \alpha$

(4) *Suma de los "n" primeros términos*: $S_n = \frac{1}{4}\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right) - \frac{1}{2}$ o bien

$$S_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor} \binom{n+1}{2k} 2^k$$

Referencias

[1] Andrej Dujella. "Generalized Fibonacci numbers and the problem of Diophantus", *The Fibonacci Quart.*, 34 (1996) 164-175.

[2] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics.* Second Ed., New York, 1989.

[3] A. F. Horadam. "Generating functions for powers of a certain generalized sequence of numbers". *Duke Mathematical Journal*, **32** (1965) 437-446.

[4] A. F. Horadam, and A. G. Shannon. "Generalization of identities of Catalan and others". *Portugaliae Mathematica*, **44** (1987) 137-148.

[5] Pravin Chandra, and Eric W. Weisstein. "Fibonacci Number." From MathWorld -A Wolfram Web Resource:

`http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html`

Radiografía diferencial del teorema de MacLaurin-Cauchy para series numéricas

J.C. Cortés
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia d
jccortes@mat.upv.es

G. Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

Abstract

In this article we give a new formulation and proof of the well-known integral criterion to study the carácter of a numerical series which terms are positives. This new approach is more intuitive because it allows to recognize, from a graphical point of view, the kind of functions that define the general term of convergent series as well as divergent ones.

Introducción

Uno de los resultados más útiles para caracterizar la convergencia/divergencia de ciertas series numéricas de términos positivos está dado a través del conocido criterio integral de Cauchy-MacLaurin que enunciamos en el siguiente:

Teorema 1
Sea f *una función positiva decreciente definida para todo* $x \geq 1$. *Para cada* $n \geq 1$ *sean*

$$r_n = \sum_{m=1}^{n} f(m) \quad ; \quad t_n = \int_1^n f(x)dx,$$

entonces ambas sucesiones $\{r_n\}_{n\geq 1}$ *y* $\{t_n\}_{n\geq 1}$ *tienen el mismo carácter, es decir, ambas convergen o ambas divergen.*

El objetivo de este trabajo es proporcionar una reformulación más intuitiva de este resultado, que aporte una *radiografía* en términos de propiedades que dependen de las derivadas primera y segunda para caracterizar un tipo de funciones que definen (como veremos, a través de su primera derivada) series numéricas convergentes y divergentes.

La aportación del trabajo pretende orientarse en dos líneas. La primera, desde el punto de vista matemático, versionar el criterio integral y dar una nueva demostración del resultado -véase la prueba del teorema 1 en (Apóstol, p.485) ó en (Vorobiov, p.58), por ejemplo-, y la segunda, desde el punto de vista docente, dar una caracterización de fácil interpretación gráfica, de la clase de funciones que definen series numéricas convergentes/divergentes vía este importante criterio integral.

1. Reformulación del criterio integral

El principal resultado está dado por el siguiente.

Teorema 2
Supongamos que se cumplen las siguientes condiciones para una función g *:*

- *C1:* $g(x)$ *es continua en* $x \geq 1$.
- *C2:* $\mathrm{g(x)}$ *es derivable en* $x > 1$.
- *C3:* $g(x)$ *es estrictamente creciente en* $x > 1$.
- *C4:* $g(x)$ *es cóncava en* $x > 1$*, es decir,* $g'(x)$ *es estrictamente decreciente en* $x > 1$.

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} g'(n) \ \text{converge}\,(\text{diverge}) \quad \Leftrightarrow \quad M < +\infty \ \ (M = +\infty),$$

siendo $M = \lim_{x \to +\infty} g(x)$.

<u>Demostración</u>
En primer lugar, obsérvese que por C3, se trata de una serie de términos positivos. Fijemos ahora, $m \geq 1$ entero, entonces por C1 y C2, $g(x)$ es continua en $[m, m+1]$ y derivable en $]m, m+1[$, por lo que aplicando en teorema del valor medio se deduce que

$$\exists c_m \in \left]m, m+1\right[: \quad g'(c_m) = g(m+1) - g(m) \qquad \textbf{(1)}$$

Por otra parte, por C4 se tiene que $g'(x)$ es estrictamente decreciente en $x > 1$, y en particular en $\left]m, m+1\right[\subset \left]1, +\infty\right[$, por lo que

$$g'(m+1) < g'(c_m) < g'(m) \qquad \textbf{(2)}$$

De (1) y (2)

$$g'(m+1) < g(m+1) - g(m) < g'(m) \quad \forall m \geq 1 \text{ entero}.$$

Sumando estas desigualdades para $m = 1, \ldots, n$ se tiene

$$\sum_{m=1}^{n} g'(m+1) < g(n+1) - g(1) < \sum_{m=1}^{n} g'(m) \qquad \textbf{(3)}$$

A partir de aquí, veamos primero la caracterización de la divergencia. Para ver el recíproco, supongamos $M = +\infty$, entonces tenemos que probar

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty,$$

siendo $s_n = \sum_{m=1}^{n} g'(m)$.

De la desigualdad (3) se tiene que al ser $M = +\infty$, $g(n+1) - g(1)$ tiende a infinito y lo mismo le ocurrirá a su mayorante s_n luego,

$$\sum_{n \geq 1} g'(n) = +\infty.$$

La implicación directa es inmediata, ya que, como por hipótesis la serie $\sum_{n \geq 1} g'(n)$ diverge, también lo hace la integral de Riemann impropia

$$\int_1^{\infty} g'(x)dx,$$

ahora bien por la regla de Barrow

$$\int_1^{\infty} g'(x)dx = \lim_{x \to \infty} g(x) - g(1) = \infty,$$

de donde al ser $g(1) < \infty$, se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty .$$

Probemos ahora el recíproco del resultado de la convergencia. Para ello, en primer lugar observemos que al ser $g(x)$ una función estrictamente creciente y con derivada estrictamente decreciente en el intervalo $x > 1$ y con asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$, ya que, por hipótesis $M < +\infty$ se tiene $\lim_{n\to+\infty} g'(n) = 0$ o equivalentemente $\lim_{n\to+\infty} g'(n+1) = 0$.

Por otra parte, observemos que de la desigualdad de la izquierda de (3) se deduce

$$s_n - g'(1) + g'(n+1) < g(n+1) - g(1),$$
$$s_n < g(n+1) - g'(n+1) - g(1) + g'(1),$$

luego tomando en esta última desigualdad límites cuando n tiende a infinito ($n \to +\infty$) obtenemos

$$\lim_{n\to+\infty} s_n < M - g(1) + g'(1) < +\infty ,$$

tal y como queríamos probar.

Para justificar la implicación directa del teorema, se razona como en el caso de la prueba de la divergencia, pero apoyándose ahora en que, por ser la serie numérica convergente, entonces según la condición necesaria de convergencia de Cauchy se satisface que su término general tiende a cero, es decir, $\lim_{n\to+\infty} g'(n) = 0$.

2. Aplicaciones y observaciones

En este apartado daremos ejemplos y observaciones de interés práctico para estudiar la convergencia/divergencia de series numéricas a través del teorema 2 anterior.

Aplicación 1

En la tabla 1 se recoge una colección de series cuya convergencia se deduce del teorema 2 (en todos los casos suponemos $x \geq 1$ y comprobamos las hipótesis). Obsérvese que entre ellas están, la serie geométrica de razón entre 0 y 1 y la serie general de las potencias (de exponente mayor que 1) de los inversos de los números naturales.

$g(x)$	$\frac{r^X}{\ln r}$ $(0<r<1)$	$-\frac{1}{x}$	$\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{x^{\alpha-1}}$ $(\alpha>1)$	$\arctan x$
C1	Por ser exponencial	Por ser $x\geq 1$	Por ser $x\geq 1$	Por def$^{\underline{on}}$
C2				
C3	$r^x>0$	$\frac{1}{x^2}>0$	$\frac{1}{x^\alpha}>0$	$\frac{1}{1+x^2}>0$
C4	$r^x\ln r<0$	$-\frac{2}{x^3}<0$	$-\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}}<0$	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}<0$
M	0	0	0	$\frac{\pi}{2}$
serie convergente	$\sum_{n\geq 1} r^n$ $(0<r<1)$	$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$	$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha>1)$	$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{1+n^2}$

Tabla 1. *Series convergentes*

Aplicación 2

En la tabla 2 se recoge una colección de series cuya divergencia se deduce del teorema 2 (en todos los casos suponemos $x\geq 1$ y comprobamos las hipótesis). Obsérvese que entre ellas está la serie armónica.

$g(x)$	$\ln x$	$\ln(\ln(1+x))$
C1	Por definición	Por ser $x\geq 1$
C2		
C3	$\frac{1}{x}>0$	$\frac{(1+x)^{-1}}{\ln(1+x)}>0$
C4	$-\frac{1}{x^2}<0$	$-\frac{1+\ln(1+x)}{((1+x)\ln(1+x))^2}<0$
M	$+\infty$	$+\infty$
serie divergente	$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$	$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(1+n)\ln(1+n)}$

Tabla 2. *Series divergentes*

Observación 1

Gracias a la versión dada en el teorema 2 del teorema 1 podemos identificar gráficamente la familia de funciones $g(x)$ que generan series (con término general su derivada $g'(x)$) convergentes (véase figura 1) y divergentes (véase figura 2).

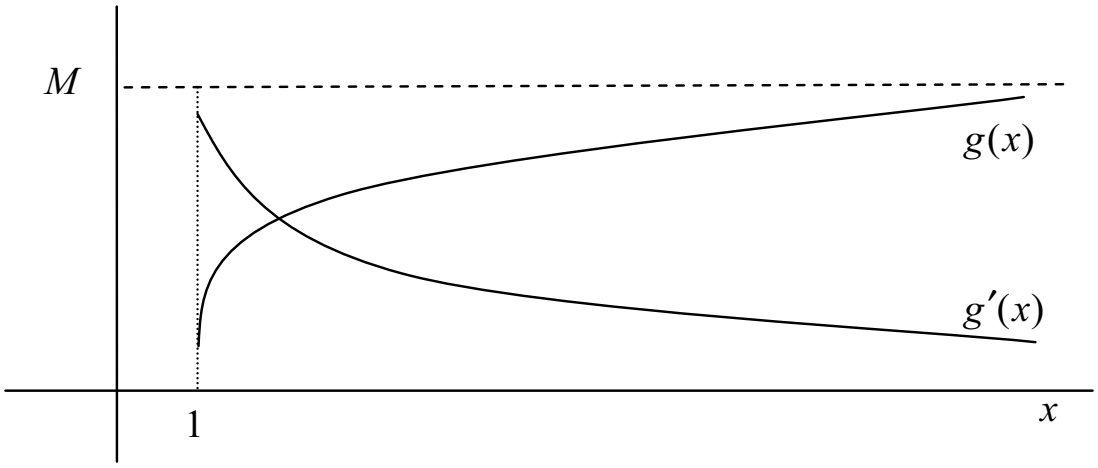


Figura 1. *Gráfica del término general* $g'(x)$ *de una serie convergente*

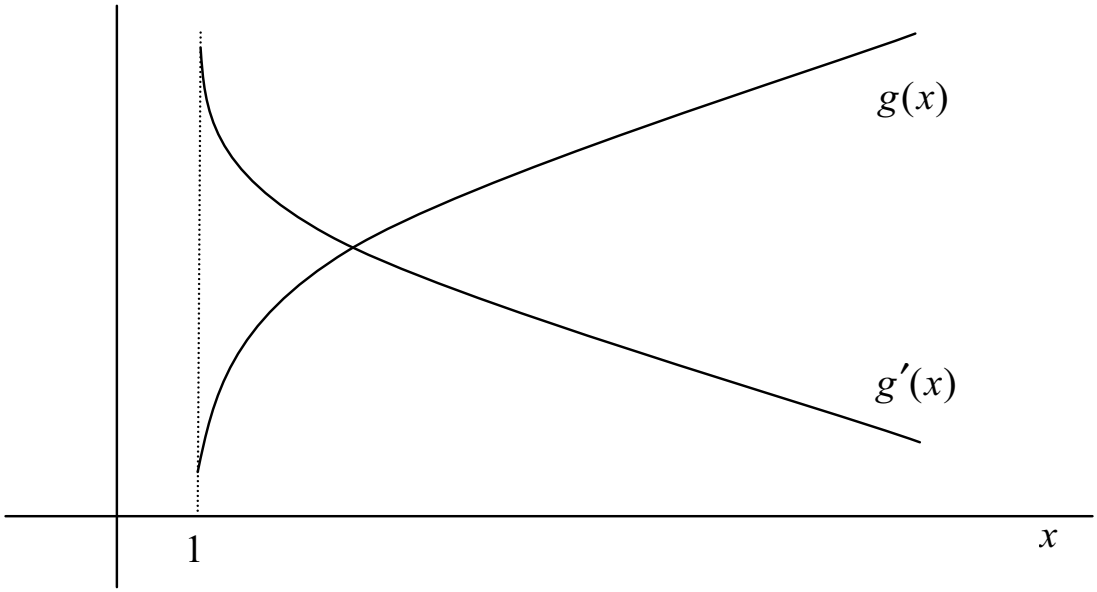


Figura 2. *Gráfica del término general* $g'(x)$ *de una serie divergente*

Observación 2

Es sencillo ver repasando la demostración, que las condiciones C1-C4 del teorema 2 pueden relajarse en el siguiente sentido: basta con que se satisfagan para $x \geq x_0 > 1$ sin importar lo grande, pero finito que sea x_0. En ese caso, entre $[1, x_0]$ es indiferente la monotonía y curvatura de la función mientras que ésta esté acotada.

Por ejemplo, con la notación del teorema 2, si tomamos $g(x) = |\ln(2x-7)|$ con $x > 3.5$, entonces como se cumplen C1-C4 para todo $x > 4 = x_0$, (véase figura 3) y como $M = \lim_{x\to\infty} |\ln(2x-7)| = +\infty$, la serie $\sum_{n\geq 4} \frac{2}{2n-7}$ diverge.

Observación 3

El teorema 3 nos permite, a partir de funciones $g(x)$ que satisfagan C1-C4, generar series convergentes y divergentes, pero en la práctica la realidad puede ser otra: conocido su término general, $g'(x)$, estudiar su carácter. En este caso, para poder aplicar el teorema 2 primero se ha de buscar una función primitiva $g(x)$ y que además satisfaga C1-C4. Esto exige pasar al cálculo de una integral, pero indefinida frente a la integral impropia que requiere el criterio integral. Aún así, como es de esperar, el teorema 2 se deduce del teorema 1, ya que, basta tomar $f(n) = g'(n)$, la cual es positiva (por C3) y decreciente (por C4) y aplicando el teorema 1 se tiene

$$\sum_{n\geq 1} g'(n) < +\infty \Leftrightarrow \int_1^{\infty} g'(x)dx < +\infty \Leftrightarrow M = \lim_{x\to\infty} g(x) < +\infty .$$

Las hipótesis extras C1 y C2 del teorema 1, a nosotros nos han servido para proporcionar otra prueba del resultado basada en el teorema del valor medio, sin embargo, como se desprende de la observación 2 ambos teoremas son básicamente equivalentes en la mayor parte de las situaciones donde los aplicaremos, aunque esta reformulación más débil del criterio integral resulta más fuerte desde el punto de vista intuitivo.

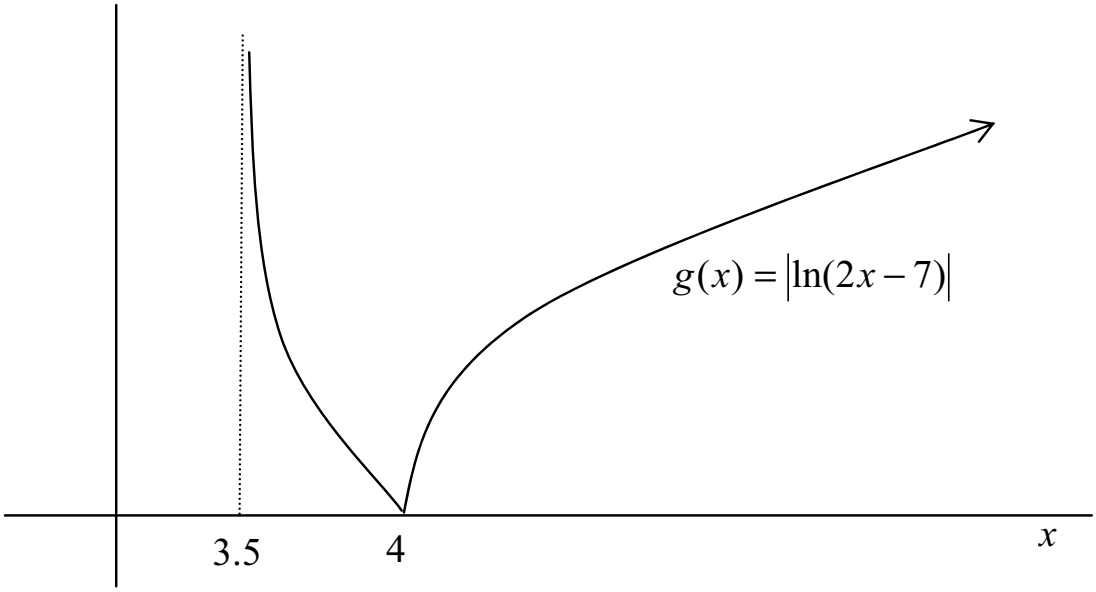


Figura 3. *Gráfica referente a la observación 3*

3. Conclusiones

La última observación dada nos sirve para enlazar con el objeto de este apartado de conclusiones. El artículo pretende proporcionar una visión más intuitiva del conocido criterio integral para series numéricas, el cual siempre se presenta y trabaja en el aula (y en los textos donde aparece) desde una perspectiva exclusivamente algebraica. La aproximación intuitiva a este resultado se hace desde un enfoque gráfico, lo que permite visualizar las características de comportamiento de las funciones que definen series convergentes y divergentes, deducibles a partir del criterio de MacLaurin-Cauchy. Para terminar, señalemos también que el enfoque gráfico nos permite proporcionar otra prueba del resultado.

Agradecimiento

Los autores quieren agradecer al "referee" anónimo los comentarios realizados, los cuales han mejorado la versión final.

Bibliografía

Apostol, T. M. (1989). *Calculus*, Volumen 1, Barcelona, Ed. Reverté.

Vorobiov, N.N. (1995). *Teoría de Series*, Parte 2, Madrid, Ed. Rubiños.

Transformaciones especiales de coordenadas

Jose María Fernández Cristóbal
Profesor de Matemáticas del I.E.S "Mata Jove".Gijón
jfern114@chopo.pntic.mec.es

Abstract

Firstly the special coordinates transformations are defined and the condition to be fulfilled by them is established.The infinitesimal variation which the said transformations induce in the metric tensor, in its determinant, in the affine connection and the Ricci scalar is established.

Introducción

Se conoce [3] que bajo una transformación general de coordenadas $x \to x'$ el elemento de volumen cuadridimensional lo hace de la forma:

$$d^4x \xrightarrow{x \to x'} \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| d^4x' \qquad (1)$$

Por otra parte, sabemos que el tensor métrico se transforma bajo una transformación general de coordenadas como:

$$g_{\mu\nu}(x) \xrightarrow{x \to x'} g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} g_{\sigma\rho}(x) \qquad (2)$$

A partir de esta expresión, el determinante del tensor métrico $g = -det(g_{\mu\nu})$, obviamente lo hace como una *densidad escalar* de peso -2. Es decir, de la forma

$$g \xrightarrow{x \to x'} g' = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right|^2 g \qquad (3)$$

Por tanto, en el caso general lo que es invariante bajo una transformación general de coordenadas no es $\int d^4x$ sino lo que es propiamente denominado *elemento de volumen* inducido por la métrica g: $\int d^4x\sqrt{g}$.

En efecto:

$$\int d^4x\sqrt{g} \xrightarrow{x\to x'} \int d^4x'\sqrt{g'} = \int d^4x \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| \sqrt{g} = \int d^4x\sqrt{g}$$

A partir de (1), queda claro que para que $\int d^4x$ fuese invariante bajo una transformación general de coordenadas se ha de verificar la condición:

$$\left|\frac{\partial x}{\partial x'}\right| = 1 \qquad (4.1)$$

Si se verifica la condición (4.1), no sólo $\int d^4x$ quedará invariante, sino cualquier integral de la forma $\int d^4x.\phi(x)$ siempre y cuando $\phi(x)$ sea un *escalar* (no confundir con una *densidad escalar* como es claro de la discusión anterior (†), ya que entonces $\phi(x)$ es invariante bajo la transformación de coordenadas. Es decir:

$$\phi(x) \xrightarrow{x\to x'} \phi'(x') = \phi(x) \qquad (4.2)$$

En efecto:

$$\int d^4x\phi(x) \xrightarrow{x\to x'} \int d^4x'\phi'(x') \xrightarrow{(4.1),(4.2)} \int d^4x\phi(x)$$

Llamaremos *transformación unimodular* a toda transformación general de coordenadas $x \to x'$ que verifica la condición (4.1) .Lo cual, como hemos visto, equivale a establecer que deja invariante cualquier integral de la forma $\int d^4x.\phi(x)$ siendo $\phi(x)$ un *escalar.*

Es obvio por otra parte que bajo una transformación unimodular de coordenadas (4.1) el determinante de la métrica no varía; es decir, es un escalar: g´(x´)= g(x).

---

† La diferencia entre un *escalar* y una *densidad escalar de peso w* es que bajo una transformación de coordenadas esta última se transforma como la primera salvo por algún factor extra. Para ser más precisos: Sea S (x) un escalar y s(x) una densidad escalar de peso w .Entonces bajo una transformación general de coordenadas $x \to x'$:

$$S(x) = S'(x') \quad y \;\; s'(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^w s(x)$$

Se considerarán variaciones infinitesimales de coordenadas sujetas a la condición de que sean unimodulares (a las mismas se las denominará *transformaciones especiales de coordenadas*).Veremos que han de verificar una condición que denominaremos, por analogía con el gauge de Lorentz en teoría cuántica de campos, *condición de Lorentz.*

Estableceremos las variaciones infinitesimales del tensor métrico y el determinante de la métrica inducidas por tales transformaciones especiales así como en la conexión afín y en el escalar de Ricci.

Quizá convenga aclarar que las transformaciones especiales de coordenadas que estamos considerando, a pesar de (o debido a) lo que el lenguaje algo confuso pueda hacer pensar, no es un mero cambio de coordenadas en sentido usual: es una transformación infinitesimal cualquiera en cada punto de las coordenadas, cualesquiera que sean estas (x, x´, x´´)

1. Transformaciones especiales

Denominamos *transformaciones especiales* a aquellas transformaciones infinitesimales

$$x^{\mu} \to x'^{\mu} = \xi^{\mu}(x) = x^{\mu} + \omega^{\mu}(x) \qquad \text{con} \quad |\omega| << 1 \qquad (5)$$

que son unimodulares.Por tanto, según la condición (4.1):

$$det\left(\frac{\partial \xi^{-1}(x)}{\partial x}\right) = 1 .$$

Supongamos que se dan las condiciones necesarias para que exista $\xi^{-1}(x)$ en todo punto del espacio-tiempo.

Puesto que $det\left(\frac{\partial \xi^{-1}(x)}{\partial x}\right) = e^{Tr\ln(\frac{\partial \xi^{-1}}{\partial x})} = e^{Tr\ln\left(1-\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)}$ se deduce, desarrollando a primer orden en ω, que para que (5) sea una transformación unimodular, se ha de verificar la condición:

$$Tr\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\right) = \partial_{\mu}\omega^{\mu}(x) = 0 \qquad (6)$$

Llamaremos a (6) *condición de Lorentz.*

2. Una pequeña disertación acerca del interés de tales transformaciones

En Matemáticas, Física y otros campos de la Ciencia es frecuente el uso del denominado *método perturbativo o método de perturbaciones* para hallar la solución de un problema, en general complicado.Este método consiste fundamentalmente en obtener la solución añadiendo distintos términos a la solución conocida de un problema menos complicado (donde a menudo las aproximaciones hechas nos permiten hallar la solución exacta). Estos términos se corresponden con distintos órdenes de magnitud (potencias) de un parámetro mucho menor que la unidad (si no se diera esta condición el método no tendría sentido pues evidentemente los primeros órdenes no darían las contribuciones dominantes) de forma que, frecuentemente, es suficiente con quedarse con los primeros órdenes en este término (a veces incluso el primer orden es suficiente) para obtener una solución muy aproximada a la real.

Sabemos que las *ecuaciones de Einstein en el vacío con (sin) constante cosmológica* Λ (=0) son:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$$

siendo $R_{\mu\nu,} R$ *y* $g_{\mu\nu}$ el denominado *tensor de Ricci, su contracción escalar y el tensor métrico, respectivamente.*

Supongamos que se conociese una solución $R_{\mu\nu}{}^{(0)}, g_{\mu\nu}{}^{(0)}$ de esta ecuación y que nos planteamos hallar la solución en cualquier otra métrica $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}{}^{(0)} + \delta g_{\mu\nu}{}^{(1)}$ donde el superíndice (1) indica que es de orden 1 en ω (recordemos $|\omega| \ll 1$) y que además tal variación en la misma $\delta g_{\mu\nu}{}^{(1)} \sim O(\omega)$ viene inducida por una transformación de coordenadas del tipo considerado anteriormente [(5)+(4),(6)] y que denominamos *transformación especial de coordenadas* .

Obviamente la *ecuación de Einstein modificada* que se ha de verificar ahora es (considerando sólo los términos a primer orden en ω):

$$\delta R_{\mu\nu}{}^{(1)} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}{}^{(0)} \delta R^{(1)} - \frac{1}{2} \delta g_{\mu\nu}{}^{(1)} R^{(0)} + \Lambda \delta g_{\mu\nu}{}^{(1)} = 0$$

Hemos de conocer por tanto las transformaciones que sobre la métrica, el tensor de Ricci y su escalar inducen las transformaciones de coordenadas en consideración para lo cual es conveniente y necesario conocer previamente las transformaciones sobre la conexión afín y el determinante de la métrica.

A ello está dirigido este trabajo que por otra parte espero sea fundamentalmente de interés didáctico para cuantos estén interesados en el tema.

3. Variación de la métrica

La transformación infinitesimal que la variación infinitesimal (5) induce en el tensor métrico viene dada por la denominada derivada de Lie [1, 2, 3]

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = g'_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} g_{\rho\sigma}(x') - g_{\mu\nu}(x) =$$
$$\left(\delta^{\rho}_{\mu} + \partial_{\mu}\omega^{\rho}(x)\right) \left(\delta^{\sigma}_{\nu} + \partial_{\nu}\omega^{\sigma}(x)\right) g_{\rho\sigma}(x+\omega) - g_{\mu\nu}(x)$$

Desarrollando a primer orden en ω se obtiene:

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\lambda}\partial_{\nu}\omega^{\lambda} + g_{\lambda\nu}\partial_{\mu}\omega^{\lambda} + \omega^{\lambda}\partial_{\lambda}g_{\mu\nu} \qquad (7.a)$$

Esta puede expresarse de forma covariante como:

$$\delta g_{\mu\nu} = D_{\mu}\omega_{\nu} + D_{\nu}\omega_{\mu} \quad (7.b)$$

siendo D la derivada covariante‡. (Sobre el significado matemático de la derivada covariante y de la conexión afín, ver más adelante. De momento sólo nos interesa constatar esta propiedad: es decir, que tal transformación preserva su forma bajo una transformación general de coordenadas). En efecto:

$$D_{\mu}\omega_{\nu} + D_{\nu}\omega_{\mu} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} + \partial_{\nu}\omega_{\mu} - 2\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\omega_{\rho} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} + \partial_{\nu}\omega_{\mu} -$$
$$2\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu})\omega_{\rho} =$$
$$\partial_{\mu}\omega_{\nu} + \partial_{\nu}\omega_{\mu} - \omega^{\sigma}(\partial_{\mu}g_{\nu\sigma} + \partial_{\nu}g_{\mu\sigma} - \partial_{\sigma}g_{\mu\nu}) = \partial_{\mu}\omega_{\nu} + \partial_{\nu}\omega_{\mu} - \partial_{\mu}(\omega^{\sigma}g_{\nu\sigma}) +$$
$$g_{\nu\sigma}\partial_{\mu}\omega^{\rho} - \partial_{\nu}(\omega^{\sigma}g_{\mu\sigma}) + g_{\mu\sigma}\partial_{\nu}\omega^{\sigma} + \omega^{\sigma}\partial_{\sigma}g_{\mu\nu}$$

‡ La derivada covariante está definida por

$$D_{\mu}X^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots} = \partial_{\mu}X^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots} + \Gamma^{\gamma}_{\mu\lambda}X^{\lambda\delta\ldots}_{\alpha\beta\ldots} + \Gamma^{\delta}_{\mu\lambda}X^{\gamma\lambda\ldots}_{\alpha\beta\ldots} + \ldots - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\mu}X^{\gamma\delta\ldots}_{\lambda\beta\ldots} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\mu}X^{\gamma\delta\ldots}_{\alpha\lambda\ldots} - \ldots$$

Obviamente el primer término se cancela con el tercero y el segundo con el quinto quedando la expresión (7.a).

Para el caso particular en consideración podemos hacer uso de la condición (6) y reescribir la expresión (7.a) de la forma:

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\lambda}\partial_\nu \omega^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu \omega^\lambda + \partial_\lambda (g_{\mu\nu}\omega^\lambda) \qquad (7.b)$$

Ya que $\delta g^{\mu\nu} = -g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \delta g_{\rho\sigma}$ tenemos, aplicando (7.a):

$$\delta g^{\mu\nu}(x) = -\partial^\mu \omega^\nu - \partial^\nu \omega^\mu + \omega^\kappa \partial_\kappa g^{\mu\nu} \qquad (8.a)$$

Podemos obviamente también poner esta expresión en forma covariante

$$\delta g^{\mu\nu} = -(g^{\mu\sigma} D_\sigma \omega^\nu + g^{\nu\sigma} D_\sigma \omega^\mu) \qquad (8.b)$$

o bien:

$$\delta g^{\mu\nu} = -(D^\mu \omega^\nu + D^\nu \omega^\mu) \qquad (8.c)$$

4. Variación del determinante de la métrica

Sabemos que la variación infinitesimal del determinante de la métrica viene dado por [2, 3]:

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\, g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \qquad (9)$$

Por tanto, para (7.a), tenemos:

$$\delta\sqrt{g} = \omega^\lambda \partial_\lambda \sqrt{g} = \partial_\lambda (\omega^\lambda \sqrt{g}) \qquad (10)$$

En efecto:

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}\, g^{\mu\nu}(g_{\mu\lambda}\partial_\nu \omega^\lambda + g_{\lambda\nu}\partial_\mu \omega^\lambda + \omega^\lambda \partial_\lambda g_{\mu\nu}) = \frac{1}{2}\sqrt{g}(\delta^\nu_\lambda \partial_\nu \omega^\lambda + \delta^\mu_\lambda \partial_\mu \omega^\lambda + \omega^\lambda g^{\mu\nu}\partial_\lambda g_{\mu\nu})$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{g}\ (2.\partial_\lambda \omega^\lambda + \omega^\lambda \partial_\lambda \ln g) = \omega^\lambda \partial_\lambda \sqrt{g}$$

En forma covariante, aplicando (7.b):

$$\delta\sqrt{g} = \frac{1}{2}\sqrt{g}g^{\mu\nu}\left(D_\mu\omega_\nu + D_\nu\omega_\mu\right) = \sqrt{g}D_\mu\omega^\mu = \sqrt{g}(\partial_\mu\omega^\mu + \Gamma^\mu_{\mu\rho}\omega^\rho) =$$
$$\sqrt{g}\omega^\rho\partial_\rho \ln\sqrt{g} = \omega^\rho\partial_\rho\sqrt{g}$$

donde hemos hecho uso de la igualdad (17.a) (la forma covariante de las transformaciones no es esencial para nuestro propósito de establecer las mismas, aunque, por supuesto, es importante verificar la covarianza de las mismas).

Así pues bajo transformaciones especiales de coordenadas $((5)+(4))$ el determinante de la métrica considerada como variable dinámica se transforma como un campo escalar.

5. Variación de la conexión afín

Matemáticamente la conexión afín está relacionada con la necesidad de definir una operación de diferenciación covariante (cálculo del gradiente) .Esta operación se denomina habitualmente *conexión geométrica diferencial.*Así, por ejemplo para vectores, la diferenciación covariante es definida por

$$D_\mu\xi^\nu = \partial_\mu\xi^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\sigma}\xi^\sigma \qquad (11)$$

de forma que ésta sea un tensor: es decir se transforme como un tensor de tipo (1,1) bajo una transformación general de coordenadas.

Para cualquier tensor de tipo (p, q) la definición de *derivación covariante* es*:*

$$D_\mu X^{\gamma\delta....}_{\alpha\beta...} = \partial_\mu X^{\gamma\delta...}_{\alpha\beta...} + \Gamma^\gamma_{\mu\lambda}X^{\lambda\delta...}_{\alpha\beta...} + \Gamma^\delta_{\mu\lambda}X^{\gamma\lambda...}_{\alpha\beta...} + \ldots - \Gamma^\lambda_{\alpha\mu}X^{\gamma\delta....}_{\lambda\beta...} - \Gamma^\lambda_{\beta\mu}X^{\gamma\delta...}_{\alpha\lambda...} - \ldots \qquad (12)$$

siendo $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ la denominada *conexión afín* -no es un tensor en general- que está definida por :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial\eta^\kappa}\frac{\partial^2\eta^\kappa}{\partial x^\mu\partial x^\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu} \qquad (13)$$

siendo $\{\eta^\kappa\}$ un *sistema de coordenadas euclídeo* (definido como aquel en que las $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ son nulas; es decir, aquel en que la derivación covariante coincide con la ordinaria) y $\{x^\mu\}$ cualquier otro sistema de coordenadas.

Además del contenido puramente matemático asociado a la conexión afín, podemos ver una interpretación conectada con la Física.

Físicamente $\{\eta^{\kappa}\}$ es un sistema localmente inercial asociado con una partícula en caída libre bajo la acción de una fuerza puramente gravitacional en el cual la ecuación de movimiento de una partícula (suponemos que de masa no nula pues si fuese de masa nula no puede elegirse τ como variable independiente [3]) desplazándose con dicho sistema es:

$$\frac{d^2\eta^{\kappa}}{d\tau^2} = 0 \qquad (14)$$

siendo $d\tau$ el denominado *tiempo propio* definido por $d^2\tau = \zeta_{\mu\nu} d\eta^{\mu} d\eta^{\nu}$, donde $\zeta_{\mu\nu} = diag\ (-1,111)$.

La conexión afín es el campo que determina la fuerza gravitacional de forma que la ecuación de movimiento (14) de dicha partícula (en caída libre en el sistema $\{\eta^{\kappa}\}$), en el sistema $\{x^{\mu}\}$ es:

$$\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\frac{dx^{\lambda}}{d\tau} = 0 \qquad (15)$$

Matemáticamente la ecuación (15) es la denominada *ecuación de las geodésicas.*

Sabemos que hay una relación entre el tensor métrico y la conexión afín dada por:

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda}(\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \qquad (16.a)$$

siendo:

$$\Gamma_{\rho\mu\nu} = g_{\rho\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) \qquad (16.b)$$

verificándose por tanto:

$$\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}\partial_{\mu} g_{\lambda\rho} = \partial_{\mu} \ln\sqrt{g} = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\mu}\sqrt{g} \qquad (17.a)$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} = g^{\lambda\rho}\partial_{\mu} g_{\mu\rho} - \frac{1}{2}\partial^{\lambda} g_{\mu\mu} \qquad (17.b)$$

A partir de la relación (16) podemos establecer a primer orden en $\delta g_{\mu\nu}$ la variación de la conexión afín que viene dada por:

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho}(\partial_{\mu}\delta g_{\rho\nu} + \partial_{\nu}\delta g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}\delta g_{\mu\nu}) + \delta g^{\rho\lambda}\Gamma_{\rho\mu\nu} \qquad (18)$$

o bien, por [2]:

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma}\left(D_{\mu}\delta g_{\sigma\nu} + D_{\nu}\delta g_{\sigma\mu} - D_{\sigma}\delta g_{\mu\nu}\right) \qquad (19)$$

Para las transformaciones especiales en consideración, aplicando (18) o (19) y después de algunos cálculos algebraicos en los que se tienen en cuenta las propiedades de simetría del tensor métrico y de la conexión afín, se tiene (ver sección 7):

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\partial_{\nu}\omega^{\rho} + \Gamma^{\lambda}_{\rho\nu}\partial_{\mu}\omega^{\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\partial_{\rho}\omega^{\lambda} + \omega^{\rho}\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\partial_{\nu}\omega^{\lambda} \qquad (20)$$

A partir de esta expresión se obtienen:

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} = 2\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho}\partial_{\mu}\omega^{\rho} - \Gamma^{\rho}_{\mu\mu}\partial_{\rho}\omega^{\lambda} + \omega^{\rho}\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}_{\mu\mu} + \partial_{\mu}\partial_{\mu}\omega^{\lambda} \qquad (21.a)$$

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} = \partial_{\mu}\partial_{\rho}\left(\omega^{\rho}\ln\sqrt{g}\right) \qquad (21.b)$$

En efecto, para (21.a) basta hacer $\mu = \nu$ en la expresión (20) y darse cuenta que el primer término y el segundo son iguales.

Para (21.b) se toma $\lambda = \mu$ y se sustituye $\nu \to \mu$ en la expresión (20) .El segundo término se cancela con el tercero y el último se anula por la condición (6). Queda entonces:

$$\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\lambda}_{\lambda\rho}\partial_{\mu}\omega^{\rho} + \omega^{\rho}\partial_{\rho}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}$$

y haciendo uso de (17.a) y de (7.a) queda finalmente la expresión (21.b)

Como se ve a partir de la expresión (20), la conexión afín no se transforma como un tensor (como ya habíamos señalado): en este caso debido al último término.Sin embargo, $\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sí es un tensor.

6. Transformación del tensor de Ricci

El *tensor de Ricci* está definido como $R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}$ siendo

$$R^{\rho}_{\mu\lambda\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\rho}_{\nu\mu} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} - (\lambda \leftrightarrow \nu)^{\S} \qquad (22)$$

el denominado *tensor de curvatura de Riemann-Christoffel*.

A partir de (22) se obtienen de forma inmediata las siguientes expresiones para el tensor de Ricci:

$$R_{\mu\nu} = \partial_{\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu} + \Gamma^{\lambda}_{\lambda\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu} \qquad (23.a)$$

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}g^{\mu\nu}\partial_{\rho}\left(\sqrt{g}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}\right) - \partial^{2}\ln\sqrt{g} - g^{\mu\nu}\Gamma^{\rho}_{\nu\sigma}\Gamma^{\sigma}_{\rho\mu} \qquad (23.b)$$

La transformación del tensor de Ricci viene dada por [2]:

$$\delta R_{\mu\nu} = D_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}) - D_{\nu}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}) \qquad (24)$$

El *escalar de Ricci* $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ se transforma como:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + (g_{\mu\nu}D^{2} - D_{\mu}D_{\nu})\delta g^{\mu\nu} \qquad (25)$$

o bien como:

$$\delta R = D_{\lambda}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\mu\mu}) - D_{\mu}(\delta\Gamma^{\lambda}_{\lambda\mu}) \qquad (26)$$

Aplicando a la ecuación (26) las transformaciones especiales que estamos considerando, tenemos (ver sección 8):

$$\delta\, R = -\frac{1}{2}\partial_{\mu}R\omega^{\mu} - 3\, R^{\sigma}_{\mu}\, D_{\sigma}\omega^{\mu} - \left[\, D^{2}, D_{\mu}\,\right]\, \omega^{\mu} \qquad (27.a)$$

$$\delta R = -3.R_{\rho\kappa}\partial^{\kappa}\omega^{\rho} + \omega^{\rho}\left[\partial_{\rho}R - 3.\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_{\sigma}\left(\sqrt{g}R^{\sigma}_{\rho}\right)\right] - \left[\, D^{2}, D_{\rho}\,\right]\, \omega^{\rho} \qquad (27.b)$$

donde

---

§ En algunos textos la definición es la opuesta

$$\left[D^2, D_\rho\right]\omega^\rho = \omega^\rho \left\{\partial^2\partial_\rho\sqrt{g} - g^{\kappa\xi}\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\Gamma^\lambda_{\xi\sigma}\partial_\lambda\sqrt{g} - \partial^\kappa\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\partial_\sigma\sqrt{g} + \partial_\kappa g^{\sigma\kappa}\partial_\sigma\partial_\rho\sqrt{g}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial^\kappa\sqrt{g}\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\partial_\sigma\sqrt{g} - \sqrt{g}\partial_\sigma\partial^\kappa\Gamma^\sigma_{\rho\kappa} - \partial_\kappa g^{\lambda\kappa}\Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\partial_\sigma\sqrt{g}\right\} +$$
$$\partial^\kappa\omega^\rho\left\{2.\partial_\kappa\partial_\rho\sqrt{g} - 2.\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\partial_\sigma\sqrt{g} - 3.\sqrt{g}\partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\kappa\rho} - \sqrt{g}\partial_\rho\partial^\lambda g_{\lambda\kappa} - \sqrt{g}\partial_\rho\partial_\kappa \ln\sqrt{g}\right\} +$$
$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\kappa\partial^\kappa\partial_\rho\sqrt{g} - 2.\sqrt{g}\Gamma^\rho_{\sigma\kappa}\partial_\rho\partial^\kappa\omega^\sigma \tag{28}$$

Por tanto, finalmente, $\delta R =$

$$\omega^\rho\left\{\partial^2\partial_\rho\sqrt{g} - g^{\kappa\xi}\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\Gamma^\lambda_{\xi\sigma}\partial_\lambda\sqrt{g} - \partial^\kappa\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\partial_\sigma\sqrt{g} + \partial_\kappa g^{\sigma\kappa}\partial_\sigma\partial_\rho\sqrt{g} -\right.$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{g}}\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\partial^\kappa\sqrt{g}\partial_\sigma\sqrt{g} - \sqrt{g}\partial_\sigma\partial^\kappa\Gamma^\sigma_{\rho\kappa} - \partial_\kappa g^{\lambda\kappa}\Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\partial_\sigma\sqrt{g} + \partial_\rho R - 3\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\sigma\left(\sqrt{g}R^\sigma_\rho\right)\right\}$$
$$+\partial^\kappa\omega^\rho\left\{2.\partial_\kappa\partial_\rho\sqrt{g} - 2.\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\partial_\sigma\sqrt{g} - 3.\sqrt{g}\partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\kappa\rho} - \sqrt{g}\partial_\rho\partial^\lambda g_{\lambda\kappa} - \sqrt{g}\partial_\rho\partial_\kappa \ln\sqrt{g} - 3R_{\kappa\rho}\right\}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\kappa\partial^\kappa\partial_\rho\sqrt{g} - 2.\sqrt{g}\Gamma^\rho_{\sigma\kappa}\partial_\rho\partial^\kappa\omega^\sigma \tag{29}$$

7. Demostración I

En esta sección se da la demostración de la expresión (20). De (19) se tiene

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}\left(D_\mu\delta g_{\sigma\nu} + D_\nu\delta g_{\sigma\mu} - D_\sigma\delta g_{\mu\nu}\right)$$
$$D_\mu\delta g_{\sigma\nu} = \partial_\mu\delta g_{\sigma\nu} - \Gamma^\kappa_{\sigma\mu}\delta g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu}\delta g_{\sigma\kappa} \qquad (30.1)$$
$$D_\nu\delta g_{\sigma\mu} = \partial_\nu\delta g_{\sigma\mu} - \Gamma^\kappa_{\sigma\nu}\delta g_{\kappa\mu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu}\delta g_{\sigma\kappa} \qquad (30.\ 2)$$
$$D_\sigma\delta g_{\mu\nu} = \partial_\sigma\delta g_{\mu\nu} - \Gamma^\kappa_{\mu\sigma}\delta g_{\kappa\nu} - \Gamma^\kappa_{\nu\sigma}\delta g_{\mu\kappa} \qquad (30.\ 3)$$
$$(30.1) + (30.2) - (30.3) = \partial_\mu\delta g_{\sigma\nu} + \partial_\nu\delta g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma\delta g_{\mu\nu} - 2\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\kappa}$$

pues el segundo término de (30.1) se cancela con el segundo término de (30.3) y el segundo término de (30.2) se cancela con el tercero de (30.3) y los terceros

términos de (30.1) y (30.2) se suman debido a las propiedades de simetría de la conexión afín y del tensor métrico.

$$\partial_\mu \delta g_{\sigma\nu} = \partial_\mu (g_{\sigma\kappa}\partial_\nu \omega^\kappa + g_{\kappa\nu}\partial_\mu \omega^\kappa + \omega^\kappa \partial_\kappa g_{\sigma\nu}) \quad (31.1)$$

$$\partial_\nu \delta g_{\sigma\mu} = \partial_\nu (g_{\mu\kappa}\partial_\sigma \omega^\kappa + g_{\kappa\sigma}\partial_\mu \omega^\kappa + \omega^\kappa \partial_\kappa g_{\sigma\mu}) \quad (31.2)$$

$$\partial_\sigma \delta g_{\mu\nu} = \partial_\sigma (g_{\mu\kappa}\partial_\nu \omega^\kappa + g_{\kappa\nu}\partial_\mu \omega^\kappa + \omega^\kappa \partial_\kappa g_{\mu\nu}) \quad (31.3)$$

Desarrollando estas derivadas se tiene que

$$(31.1) + (31.2) + (31.3) =$$

$$\partial_\nu \omega^\kappa (\partial_\mu g_{\sigma\kappa} + \partial_\kappa g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\kappa}) + \partial_\sigma \omega^\kappa (\partial_\mu g_{\kappa\nu} + \partial_\nu g_{\kappa\mu} - \partial_\kappa g_{\mu\nu})$$
$$+\partial_\mu \omega^\kappa (\partial_\kappa g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\kappa} - \partial_\sigma g_{\kappa\nu}) + \omega^\kappa \partial_\kappa (\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) + 2 g_{\sigma\kappa}\partial_\mu \partial_\nu \omega^\kappa$$

Por otra parte

$$2\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\delta g_{\sigma\kappa} = 2\Gamma^\kappa_{\mu\nu}(g_{\sigma\rho}\partial_\kappa \omega^\rho + g_{\rho\kappa}\partial_\sigma \omega^\rho + \omega^\rho \partial_\rho g_{\sigma\kappa})$$

Así, usando las igualdades (16.a) y (16.b)

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} 2\Big[\Gamma_{\sigma\mu\kappa}\partial_\nu \omega^\kappa + \Gamma_{\kappa\mu\nu}\partial_\sigma \omega^\kappa + \Gamma_{\sigma\kappa\nu}\partial_\mu \omega^\kappa + \omega^\kappa \partial_\kappa \Gamma_{\sigma\mu\nu} + g_{\sigma\kappa}\partial_\mu \partial_\nu \omega^\kappa -$$
$$g_{\sigma\rho}\Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\kappa \omega^\rho - \Gamma_{\rho\mu\nu}\partial_\sigma \omega^\rho - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\omega^\rho \partial_\rho g_{\sigma\kappa}\Big] =$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\partial_\nu \omega^\kappa + g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\kappa\mu\nu}\partial_\sigma \omega^\kappa + \Gamma^\lambda_{\kappa\nu}\partial_\mu \omega^\kappa + g^{\lambda\sigma}\omega^\kappa \partial_\kappa \Gamma_{\sigma\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \omega^\lambda - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\kappa \omega^\lambda - g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\rho\mu\nu}\partial_\sigma \omega^\rho$$
$$-g^{\lambda\sigma}\omega^\rho \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\rho g_{\sigma\kappa}$$

El segundo y el séptimo término se cancelan mutuamente .Por otra parte podemos reagrupar los términos cuarto y octavo para reescribirlos como:

$$\omega^\kappa \Big[g^{\lambda\sigma}\partial_\kappa \Gamma_{\sigma\mu\nu} - g^{\lambda\sigma}\Gamma^\zeta_{\mu\nu}\partial_\kappa g_{\sigma\varsigma} \Big] = \omega^\kappa \Big[\partial_\kappa \left(g^{\lambda\sigma}\Gamma_{\sigma\mu\nu} \right) - \Gamma_{\sigma\mu\nu}\partial_\kappa g^{\lambda\sigma} + g_{\sigma\varsigma}\Gamma^\varsigma_{\mu\nu}\partial_\kappa g^{\lambda\sigma} \Big]$$
$$= \omega^\kappa \Big[\partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma\mu\nu}\partial_\kappa g^{\lambda\sigma} + \Gamma_{\sigma\mu\nu}\partial_\kappa g^{\lambda\sigma} \Big] = \omega^\kappa \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$$

Así pues queda finalmente:

$$\delta\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}\partial_\nu \omega^\kappa + \Gamma^\lambda_{\kappa\nu}\partial_\mu \omega^\kappa + \omega^\kappa \partial_\kappa \Gamma^\lambda_{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu \omega^\lambda - \Gamma^\kappa_{\mu\nu}\partial_\kappa \omega^\lambda$$

8. Demostración II

En esta sección se demuestra la expresión (28) a partir de (25).

Conviene utilizar (7.b) y (8.c) para aprovechar las propiedades de la derivada covariante y en especial la que establece que la derivada covariante del tensor métrico y de su determinante son nulos. Es decir:

$$D_\rho g_{\mu\nu} = 0 \qquad (32.1)$$

$$D_\mu \sqrt{g} = \partial_\mu \sqrt{g} - \Gamma^\rho_{\rho\mu} \sqrt{g} = 0 \qquad (.32.2)$$

A partir de la expresión (25) tenemos:

$$\delta R = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + (-D_\mu D_\nu \delta g^{\mu\nu} + g_{\mu\nu} D^2 \delta g^{\mu\nu}) = R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} D_\mu D_\nu \delta g_{\rho\sigma} + D^2(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu})$$

El primer término es:

$$R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} = -R_{\mu\nu}(g^{\mu\sigma} D_\sigma \omega^\nu + g^{\nu\sigma} D_\sigma \omega^\mu) = -2\, R^\sigma_\mu D_\sigma \omega^\mu = -2\, R^\sigma_\mu (\partial_\sigma \omega^\mu + \Gamma^\mu_{\sigma\rho}\omega^\rho) \qquad (33)$$

El tercer término es:

$$D^2(g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}) = D^2(-2D_\mu \omega^\mu) = -2D^2 D_\mu \omega^\mu \qquad (34)$$

Para obtener el segundo término podemos hacer uso de la ecuación (7.b).Así:

$$g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} D_\mu D_\nu \delta g_{\rho\sigma} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} D_\mu D_\nu (D_\rho \omega_\sigma + D_\sigma \omega_\rho) = g^{\mu\rho}\, D_\mu D_\nu D_\rho \omega^\nu + g^{\mu\rho}\, D_\mu D^2 \omega_\rho$$

Aplicando la propiedad [1]:

$$\left[\, D_\mu \,, D_\nu \,\right] A^\lambda = -R^\lambda_{\kappa\mu\nu}\; A^\kappa$$

$$g^{\mu\rho}\, D_\mu D_\nu D_\rho \omega^\nu + g^{\mu\rho}\, D_\mu D^2 \omega_\rho = g^{\mu\rho}\, D_\mu(-R_{\rho\kappa}\omega^\kappa + D_\rho D_\nu \omega^\nu) + g^{\mu\rho}\, D_\mu D^2 \omega_\rho = -D_\mu(R^\mu_\kappa \omega^\kappa) + \left\{\, D^2, D_\mu \right\}\, \omega^\mu \qquad (35)$$

Puesto que [1]:

$$D_\mu(R^\mu_\kappa) = \frac{1}{2}\partial_\kappa R$$

y consecuentemente

$$\Gamma^\sigma_{\mu\kappa} R^\mu_\sigma = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\rho(\sqrt{g}R^\rho_\kappa) - \frac{1}{2}\partial_\kappa R \quad **$$

el primer término de esta última expresión es:

$$-D_\mu\left(R^\mu_\kappa \omega^\kappa \right) = -\frac{1}{2}\partial_\kappa R\ \omega^\kappa - R^\mu_\kappa\ D_\mu\omega^\kappa$$

siendo el último término de esta expresión igual (salvo el factor 2) a (33).

Sumando (33), (34) y (35) obtenemos:

$$\delta\ R = -\frac{1}{2}\partial_\mu R\omega^\mu - 3\ R^\sigma_\mu\ D_\sigma\omega^\mu - \left[\ D^2, D_\mu\right]\ \omega^\mu \qquad (36)$$

Los dos primeros términos se calculan de forma fácil y dan como resultado (haciendo uso de la propiedad **)

$$-3.R_{\rho\kappa}\partial^\kappa\omega^\rho + \omega^\rho\left[\partial_\rho R - 3.\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\sigma\left(\sqrt{g}R^\sigma_\rho\right)\right] \qquad (37)$$

Finalmente hallaremos el último término de la expresión (36) sabiendo que la divergencia covariante de un vector verifica [1]:

$$D_\mu\omega^\mu = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}.\omega^\mu) = \xrightarrow{(4)} = \frac{\omega^\mu}{\sqrt{g}}\partial_\mu\sqrt{g} = \omega^\mu\partial_\mu \ln\sqrt{g}$$

Por tanto:

$$\left[\ D^2, D_\mu\right]\ \omega^\mu = D^2 D_\mu\omega^\mu - D_\mu D^2\omega^\mu = D^2(\ \frac{\omega^\mu}{\sqrt{g}}\partial_\mu\sqrt{g}) - \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\mu(\sqrt{g}\ D^2\omega^\mu)$$

$$= D^2(\frac{\omega^\mu}{\sqrt{g}}\partial_\mu\sqrt{g}) - \frac{1}{\sqrt{g}}(\partial_\mu\sqrt{g})D^2\omega^\mu - \partial_\mu(D^2\omega^\mu)$$

(38)

Ahora bien,

$$D^2(\frac{\omega^\mu}{\sqrt{g}}\partial_\mu\sqrt{g}) = \frac{1}{\sqrt{g}}\{(\partial_\mu\sqrt{g})D^2\omega^\mu + 2.g^{\kappa\xi}\ D_\kappa(\omega^\mu).D_\xi(\partial_\mu\sqrt{g}) + \omega^\mu\ D^2(\partial_\mu\sqrt{g})\}$$

Es claro que el primer término de esta última expresión se cancela con el segundo término del conmutador (38). Por tanto éste queda finalmente:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\{2.g^{\kappa\xi}\ D_\kappa(\omega^\rho).D_\xi(\partial_\rho\sqrt{g}) + \omega^\rho\ D^2(\partial_\rho\sqrt{g}) - \sqrt{g}\partial_\rho(\ D^2\omega^\rho)\} \qquad (39)$$

Para hallar el tercer término de (39), hacemos uso de la igualdad [1,3]

$$D^2\omega^\rho = \partial^2\omega^\rho + \partial^\kappa(\Gamma^\rho_{\sigma\kappa})\omega^\sigma + 2\Gamma^\rho_{\sigma\kappa}\partial^\kappa\omega^\sigma - g^{\xi\kappa}\Gamma^\sigma_{\xi\kappa}\partial_\sigma\omega^\rho \qquad (40)$$

Ahora bien [1]:

$$g^{\rho\kappa}\Gamma^\sigma_{\rho\kappa} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\rho(g^{\rho\sigma}\sqrt{g}) = -\partial_\rho g^{\rho\sigma} - g^{\rho\sigma}\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\rho\sqrt{g}$$

Por tanto:

$$D^2\omega^\rho = \partial^2\omega^\rho + \partial^\kappa(\Gamma^\rho_{\sigma\kappa})\omega^\sigma + 2\Gamma^\rho_{\sigma\kappa}\partial^\kappa\omega^\sigma + \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\kappa(g^{\kappa\sigma}\sqrt{g}\,)\,\partial_\sigma\omega^\rho$$

Puesto que:

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\kappa(g^{\kappa\sigma}\sqrt{g}\,)\,\partial_\sigma\omega^\rho = \frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\kappa(g^{\kappa\sigma}\sqrt{g}\partial_\sigma\omega^\rho) - \frac{1}{\sqrt{g}}g^{\kappa\sigma}\sqrt{g}\ \partial_\kappa\partial_\sigma\omega^\rho =$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\kappa(\sqrt{g}\ \partial^\kappa\omega^\rho) - \partial^2\omega^\rho$$

$$\partial_\rho D^2(\omega^\rho) = 2\partial_\rho\partial^\kappa(\Gamma^\rho_{\sigma\kappa}\omega^\sigma) - \partial_\rho\omega^\sigma\partial^\kappa\Gamma^\rho_{\sigma\kappa} - \omega^\sigma\partial_\rho\partial^\kappa\Gamma^\rho_{\sigma\kappa} + \partial_\rho(\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\kappa\sqrt{g}\,)\,\partial^\kappa\omega^\rho$$

Así (38), después de algunos cálculos, queda de la forma (28):

$$\left[D^2, D_\rho\right]\omega^\rho = \omega^\rho \left\{\partial^2\partial_\rho\sqrt{g} - g^{\kappa\xi}\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\Gamma^\lambda_{\xi\sigma}\partial_\lambda\sqrt{g} - \partial^\kappa\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\partial_\sigma\sqrt{g} + \partial_\kappa g^{\sigma\kappa}\partial_\sigma\partial_\rho\sqrt{g}\right.$$

$$\left. -\frac{1}{\sqrt{g}}\partial^\kappa\sqrt{g}\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\partial_\sigma\sqrt{g} - \sqrt{g}\partial_\sigma\partial^\kappa\Gamma^\sigma_{\rho\kappa} - \partial_\kappa g^{\lambda\kappa}\Gamma^\sigma_{\lambda\rho}\partial_\sigma\sqrt{g}\right\} +$$

$$\partial^\kappa\omega^\rho\left\{2.\partial_\kappa\partial_\rho\sqrt{g} - 2.\Gamma^\sigma_{\kappa\rho}\partial_\sigma\sqrt{g} - 3.\sqrt{g}\partial_\sigma\Gamma^\sigma_{\kappa\rho} - \sqrt{g}\partial_\rho\partial^\lambda g_{\lambda\kappa} - \sqrt{g}\partial_\rho\partial_\kappa \ln\sqrt{g}\right\} +$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\partial_\kappa\partial^\kappa\partial_\rho\sqrt{g} - 2.\sqrt{g}\Gamma^\rho_{\sigma\kappa}\partial_\rho\partial^\kappa\omega^\sigma$$

Referencias

[1] Dubrovin, B.A.; Fomenko, A.T.; Nóvikov, S.P..*Geometría Moderna.Métodos y aplicaciones.Tomo*1.Ed.: URSS, 1998.

[2] ´t Hooft, G. *Introduction to General Relativity***.** Ed.: Rinton Press, 2002.

[3] Weinberg, S. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity.* Ed.: J.Wiley & Sons, 1972.

Reseña de libros

ALFONSA GARCÍA, FRANCISCO GARCÍA, ANTONIO LÓPEZ, GERARDO RODRÍGUEZ y AGUSTÍN DE LA VILLA*: Ecuaciones diferenciales ordinarias. Teoría y problemas.* Ed. CLAG. Madrid, 2006. ISBN: 84-921847-7-9. Páginas: 432.

Con el mismo esquema que en los libros anteriores, Cálculo I y Cálculo II, de los mismos autores, se tratan en este libro conceptos básicos de ecuaciones diferenciales.

Los cinco primeros capítulos analizan conceptos generales de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas de ecuaciones, así como las técnicas básicas de resolución exacta, Los capítulos 6 y 7 presentan técnicas especiales de resolución, como la transformada de Laplace y la resolución por series de potencias. El estudio de algunos métodos numéricos se aborda en el capítulo ocho. Los dos últimos capítulos se dedican al estudio cualitativo, analizando la estabilidad de las soluciones de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

En estos 10 capítulos se incluyen todos los conceptos indispensables para satisfacer las necesidades de los estudiantes de ciencias e ingeniería, para los que las ecuaciones diferenciales constituyen una imprescindible herramienta de trabajo. Se pueden encontrar en el libro problemas con diferentes tipos de aplicaciones, que lo hacen una obra útil en múltiples disciplinas.

Su contenido se desarrolla de modo intuitivo y junto a la exposición teórica se incluyen: más de 100 cuestiones de tipo test de autoevaluación; más de 250 ejercicios y problemas resueltos; más de 150 ejercicios y problemas propuestos.

El libro se completa con tres apéndices. En el tercero se dan las soluciones a los test de autoevaluación. En los dos primeros se muestran algunos ejemplos sobre las posibilidades de usar los paquetes de cálculo simbólico Maple y Mathematica en el ámbito de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Estos ejemplos y otros muchos vienen desarrollados en el CD que acompaña al libro. En dicho CD también puede verse la resolución de los problemas propuestos llevada a cabo con Maple, Mathematica y una presentación html de estos documentos.

E. Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55,

56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65,66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73 y 74.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número **`3025-0006-24-1400002948`** al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella *la dirección a donde se han de enviar* y el correspondiente *cheque nominativo o resguardo de transferencia*.