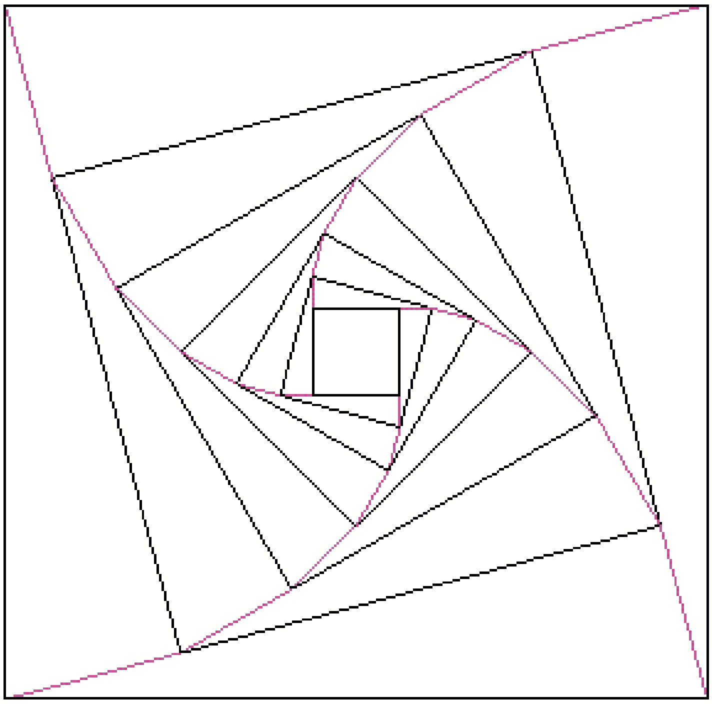
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 73
JUNIO DE 2006

ÍNDICE

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es
Página web: www.ucm.es/info/secdealg/puigadam
Nueva página web en preparación (en servicio parcial):
htttp://www.sociedadpuigadam.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:

JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

Vicesecretaria:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Mantenedoras página web:

BEATRIZ BARRERO DÍAZ
CAROLINA BRAVO SANZ

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2006 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en le Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 22 de abril de 2006, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil seis.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

Se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 70, 71 y 72 del boletín, los dos primeros en homenaje al fallecido profesor Miguel de Guzmán.

Se informa que, el día 11 de junio de 2005 se celebró con el éxito ya tradicional, el XXIII Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración don el Colegio de Licenciados. Como en años anteriores, la prueba tuvo lugar en la Facultad de Matemáticas. En el Boletín de octubre se recoge información sobre los concursantes y los resultados obtenidos.

Se informa también de la colaboración de la Sociedad en la Olimpiada Matemática y en el Concurso Intercentros.

Se informa que, mientras se celebra la Asamblea de la Sociedad, también se celebra en la misma Facultad de Matemáticas, el XX Concurso de Primavera de la Comunidad de Madrid, donde algunos miembros del equipo organizador son miembros de la Sociedad.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Las cuentas quedan aprobadas por unanimidad, concluyéndose que no resulta necesario modificar la actual cuota.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

El Presidente manifiesta que quiere que conste en acta su voluntad de dejar la Presidencia y como consecuencia presenta su dimisión, alegando que ya han transcurrido cuatro años para los que fue nombrado (actas de junio de 2002).

Después de un intenso debate entre los asistentes, se aprueba:

Nombrar a D. José Javier Etayo Gordejuela como Presidente.

Renovar al resto de los miembros cesantes de la Junta Directiva y seguir dejando vacante la plaza de Bibliotecario.

5. Asuntos de tramite.

D. Víctor Sánchez manifiesta su interés por dejar la coordinación del tradicional Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados. En su lugar se hace cargo D Javier Peralta.

Se aprueba un gasto de unos 90 € para contratar un hosting y una dirección IP para crear un sito Web dinámico donde estén todos los asuntos de la Sociedad.

6. Ruegos y preguntas.

El Vicepresidente D Eugenio Roanes Macías comunica que sobran boletines de números atrasados y que estaría bien regalarlos con el fin de captar nuevos socios.

Sin más asuntos que tratar, el Presidente levanta la sesión a las doce y cuarenta y siete minutos del día de la fecha arriba indicada.

V° B° El Presidente *El Secretario*

XLII Olimpiada Matemática Española

Fase nacional 2006 (Sevilla)

La fase nacional de la XLII Olimpiada Matemática Española se ha celebrado en Sevilla, entre los días 23 y 26 del pasado mes de marzo. Allí se dieron cita los 120 estudiantes seleccionados en los diferentes Distritos, acompañados por sus profesores.

Paralelamente a la Olimpiada se celebró un Seminario para profesores, cuyo tema central era el estímulo matemático para los estudiantes de Bachillerato, organizado conjuntamente por la Real Sociedad Matemática Española y por la Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Las pruebas tuvieron lugar en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla los días 24 y 25 de marzo, como de costumbre en dos sesiones de tres horas y media cada una, y con los siguientes problemas.

Primera sesión (24 marzo)

Problema 1

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros. Demostrar que si existe un entero k tal que ninguno de los enteros $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ es divisible por k, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.

Media de todos: 1,28
Media Oros: 7

Problema 2

Las dimensiones de un paralelepípedo de madera son enteras. Pintamos toda su superficie (las seis caras), lo cortamos en cubos de una unidad de arista y observamos que exactamente la mitad de los pequeños cubos no tienen ninguna cara pintada. Probar que el número de paralelepípedos con tal propiedad es finito.

(Puede resultar útil tener en cuenta que $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = 0{,}79\ldots < 1{,}8$).

Media de todos: 0,82
Media Oros: 2,83

Problema 3

ABC es un triángulo isósceles con *AB* = *AC*. Sea *P* un punto cualquiera de la circunferencia tangente a los lados *AB* en *B* y a *AC* en *C*.
Llamamos *a*, *b* y *c* a las distancias desde *P* a los lados *BC*, *AC* y *AB* respectivamente. Probar que: $a^2 = b \cdot c$

Media de todos: 1,58
Media Oros: 5,5

Segunda sesión (25 marzo)

Problema 4

Hallar todas las funciones $f:(0,\infty) \to R$ que satisfacen la ecuación

$$f(x)f(y) + f\left(\frac{\lambda}{x}\right)f\left(\frac{\lambda}{y}\right) = 2f(xy)$$

para todo par de números reales x e y positivos, siendo λ un número real positivo tal que $f(\lambda) = 1$.

Media de todos: 0,94
Media Oros: 4

Problema 5

Probar que el producto de cuatro naturales consecutivos no puede ser ni cuadrado ni cubo perfecto.

Media de todos: 0,61
Media Oros: 3,33

Problema 6

Las diagonales AC y BD de un cuadrilátero convexo $ABCD$ se cortan en E. Denotamos por S_1, S_2 y S a las áreas de los triángulos ABE, CDE y del cuadrilátero $ABCD$ respectivamente.

Prueba que $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} \le \sqrt{S}$. ¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Media de todos: 1,76

Media Oros: 5,33

La representación de la Comunidad de Madrid, capitaneada por Joaquín Hernández, a quien asistía el ex olímpico Luis Hernández Corbato, estuvo integrada por los nueve premiados en la fase local madrileña. Tuvieron una excelente participación, con los siguientes resultados:

Medalla de Oro para *Hugo Fernández Hervás* (2º de Bachillerato, IES San Juan Bautista) y para *Javier de la Nuez González* (2º de Bachillerato, Liceo Italiano de Madrid). Ocuparon los dos primeros lugares en la clasificación general, consiguiendo así, por segundo año consecutivo, un puesto en el equipo olímpico nacional de 2006.

Medalla de Plata para *Diego Izquierdo Arseguet* (4º de ESO, Liceo Francés de Madrid), octavo en la clasificación general, para *David Alfaya Sánchez* (4º de ESO, IES José Luis Sampedro de Tres Cantos), y para *Carlos Ramírez Carrillo* (2º de Bachillerato, Colegio San Viator). Ocuparon los lugares décimo cuarto y décimo quinto.

Obtuvieron Medalla de Bronce, en los lugares vigésimo cuarto y vigésimo octavo, respectivamente, *Michael Ernesto López Lehman* (2º de Bachillerato, IES de Colmenarejo) y *José María Pérez Ramos* (1º de Bachillerato, Colegio Valdeluz).

Javier Torres Niño (2º de Bachillerato, Colegio San Viator y *Andrés Rodríguez Reina* (4º de ESO, Colegio SEK-Ciudalcampo), ocuparon los lugares 39 y 56 de la clasificación general.

Obtuvieron Medalla de Oro, además de Hugo y de Javier, *Diego Gimeno Sanz*, de Valladolid; *Andrés David Martínez Martínez*, de Albacete, *Xavier Ros Otón*, de Barcelona, y *Marc Viñals Pérez*, de Palamós (Girona). Los seis, de 2º de Bachillerato, viajarán en próximo 10 de julio a Eslovenia para participar en la 43 Olimpiada Internacional de Matemáticas: les deseamos mucha suerte.

María Gaspar

XX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

El pasado mes de septiembre tuvo lugar en Cartagena de Indias (Colombia) la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Fue precisamente en ese país, en Paipa, donde tuvo lugar su primera edición. En estos veinte años, la Olimpiada, bien afianzada, ha crecido y ha tenido gran influencia en la formación matemática de profesores y estudiantes de los países de su zona de influencia, particularmente en los caribeños y andinos. Ha servido de modelo para la creación de otras Olimpiadas regionales, como la del Cono Sur, la Rioplatense y la Centroamericana, y ha facilitado la incorporación a la Olimpiada Internacional de estudiantes de esos mismos países.

Al igual que el año pasado cuando se celebró en Castellón asistieron todos los países invitados, que son los 22 miembros de la OEI.: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, España, Guatemala, Honduras, México, Nicaragua, Panamá, Paraguay, Perú, Portugal, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela.

El equipo español estuvo formado por los madrileños Elisa Lorenzo García, Javier de la Nuez González y Hugo Fernández Hervás, y por Marc Viñals Pérez, de Palamós. Les acompañaban Juan Manuel Conde, de la Universidad de Alicante como Jefe de Delegación, y Sergi Elizalde Torrent como Profesor Tutor. Este último, ya doctor en Matemáticas, fue olímpico en el 96 en Bombay, donde obtuvo Mención de Honor.

Los cuatro estudiantes españoles recibieron premios:

Medalla de Plata, *Elisa Lorenzo* y *Javier de la Nuez.*
Medalla de Bronce, *Hugo Fernández* y *Marc Viñals*.

La XXI Olimpiada Iberoamericana se celebrará en septiembre de 2006 en Guayaquil (Ecuador).

María Gaspar

Problemas propuestos en la XX Olimpiada Iberoamericana

Problema 1

Determine todas las ternas de números reales (x, y, z) que satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} xyz = 8 \\ x^2y + y^2z + z^2x = 73 \\ x(y-z)^2 + y(z-x)^2 + z(x-y)^2 = 73 \end{cases}$$

Problema 2

Una pulga salta sobre puntos enteros de la recta numérica. En su primer movimiento salta desde el punto 0 y cae en el punto $1.$ Luego, si en un movimiento la pulga saltó desde el punto a y cayó en el punto $b,$ en el siguiente movimiento salta desde el punto b y cae en uno de los puntos $b+(b-a)-1, b+(b-a), b+(b-a)+1.$

Demuestre que si la pulga ha caído dos veces sobre el punto $n,$ para n entero positivo, entonces ha debido hacer al menos t movimientos, donde t es el mayor entero mayor o igual que $2\sqrt{n}.$

Problema 3

Sea $p > 3$ un número primo. Si $\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{4^p} = \frac{n}{m},$ donde el máximo común divisor de n y m es $1,$ demuestre que p^3 divide a $n.$

Problema 4

Dados dos enteros positivos a y $b,$ se denota por $(a\nabla b)$ el residuo que se obtiene al dividir a por $b.$ Este residuo es uno de los números $0, 1, \ldots, b-1.$ Encuentre todas las parejas de números (a, p) tales que p es primo y se cumple que

$$(a\nabla p) + (a\nabla 2p) + (a\nabla 3p) + (a\nabla 4p) = a + p.$$

Problema 5

Sea O el circuncentro de un triángulo acutángulo ABC y A_1 un punto en el arco menor BC de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Sean A_2 y A_3 puntos en los lados AB y AC respectivamente, tales que $\angle BA_1A_2 = \angle OAC$ y $\angle CA_1A_3 = \angle OAB$. demuestre que la recta A_2A_3 pasa por el ortocentro del triángulo ABC.

Problema 6

Dado un entero positivo n, en un plano se consideran $2n$ puntos alineados $A_1, A_2, ..., A_{2n}$. cada punto se colorea de azul o de rojo mediante el siguiente procedimiento:

En el plano se trazan n circunferencias con diámetros de extremos A_i y A_j, disyuntas dos a dos. Cada $A_k, 1 \leq k \leq 2n$, pertenece exactamente a una circunferencia. Se colorean los puntos de modo que los dos puntos de una misma circunferencia lleven el mismo color.

Determine cuántas coloraciones distintas de los $2n$ puntos se pueden obtener al variar las n circunferencias y la distribución de los colores.

X Concurso de Primavera de Matemáticas

A lo largo del presente curso escolar, un gran número de alumnos se ha venido preparando para participar en la décima edición de este concurso, convocado por la Facultad de Matemáticas de la UCM, y con la colaboración de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, Ediciones SM, El Corte Inglés, Grupo Anaya y Yalos Instruments. En la primera fase, la realizada el pasado 1 de marzo en cada uno de los *más de 300 Centros inscritos*, participaron unos *20000 alumnos*. En la segunda, la celebrada el sábado 22 de abril en la mencionada Facultad, lo hicieron *unos 2500 estudiantes*. Este número hubiese sido bastante mayor de no existir la limitación que tienen los colegios de no enviar a más de 4 ó 5 alumnos por nivel. Esta limitación viene impuesta por el número de aulas disponibles.

Con este concurso se pretende motivar y estimular a una gran mayoría de estudiantes, haciéndoles ver que es posible disfrutar pensando, haciendo y aprendiendo matemáticas. Cada estudiante puede concursar en uno de los niveles siguientes: *Primer Nivel:* Alumnos de 5° y 6° de Primaria; *Segundo Nivel:* Alumnos de 1° y 2° de ESO; *Tercer Nivel:* Alumnos de 3° y 4° de ESO; *Cuarto Nivel:* Alumnos de Bachillerato.

En cada uno de estos niveles se propone una prueba, de 25 cuestiones de elección múltiple, a desarrollar individualmente durante una hora y media.

El 26 de abril, a las 19 horas, tuvo lugar el acto de entrega de premios, en el que se entregó el diploma correspondiente y un pequeño obsequio a cada uno de los 150 ganadores de esta segunda fase. También se entregaron, en este mismo acto, los diplomas a los representantes españoles en la Olimpiada de Mayo del pasado curso. Pocas veces se ha visto el Salón de Actos "Rey Pastor" de la Facultad de Matemáticas tan abarrotado y animado como en esta ocasión. Los "superganadores" del concurso, que son los tres alumnos mejores de cada nivel, han sido en esta edición los siguientes (que aparecen detallados por sus *apellidos, nombre, curso, centro, localidad, premio obtenido*):

Esteban de la Iglesia, Lorenzo, 6º de Primaria, Colegio Fray Luis de León, Madrid, Tercer Premio

Pérez Gómez, Bernardo, 5º de Primaria, CEIP Escuelas Bosque, Madrid, Segundo Premio

Peña Castillo, Diego, 6º de Primaria, Colegio Amor Misericordioso, Madrid, Primer Premio

*Ibarrondo Luis, Alb*erto, 2º de ESO, Colegio Nuestra Señora de las Maravillas, Madrid, Tercer Premio

González Fernández, Alberto, 1º de ESO, Colegio Joyfe, Madrid, Segundo Premio

Herradón Cueto, Moisés, 2º de ESO, Colegio Brains, Alcobendas, Primer Premio

Alfaya Sánchez, David, 4º de ESO, IES José Luis Sampedro, Tres Cantos, Primer Premio

Izquierdo Arseguet, Diego, 4º de ESO, Liceo Francés de Madrid, Primer Premio

Casanova Jaquete, Juan, 3º de ESO, Colegio Base, Alcobendas, Primer Premio

Nuez González, Javier, 2º de Bto, Liceo Italiano de Madrid, Tercer Premio

Rodrigo Rey, Teresa, 1º de Bto, IES Príncipe Felipe, Madrid, Segundo Premio

Fernández Hervás, Hugo, 2º de Bto, IES San Juan Bautista, Madrid, Primer Premio

Por otra parte, los 25 estudiantes con mejor puntuación que no hayan cumplido 13 años el 31 de Diciembre de 2005, y los 25 estudiantes con mejor puntuación que no hayan cumplido 15 años el 31 de Diciembre de 2005 están invitados a participar, junto con otros estudiantes de toda España, en *la XII OLIMPIADA DE MAYO***,** competición iberoamericana organizada por la Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas, que se celebrará el *sábado 20 de mayo de 2006* simultáneamente en los países de habla hispana y portuguesa.

Pero no se acaban aquí las oportunidades de participar en este tipo de actividades: nuestros muchachos aún pueden inscribirse, antes del 10 de mayo de 2006, en el *XXIV Concurso "Puig Adam"*, que se celebrará el próximo 10 de junio (más información: www.cdlmadrid.es). Y, si siguen con ganas de pelea, pueden continuar con las Olimpiadas: Española, Internacional, Iberoamericana, etc. (Más información y fotos en: www.mat.ucm.es)

Victor Manuel Sánchez
Joaquín Hernández

Acciones Formativas de Posgrado en "Educación Matemática"

Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid

Año Académico 2006-07

Relación provisional de cursos

1. *El tratamiento del azar: Probabilidad y Modelos de Distribuciones*. Juan José Prieto, UCM. 30 horas, tres créditos.

2. *Estadística.* María Jesús Ríos, UCM. 30 horas, tres créditos.

3. *Las Matemáticas en Secundaria: un enfoque distinto del habitual*. Joaquín Hernández, UCM. 30 horas, tres créditos.

4. *Problemas de máximos y mínimos: una aproximación a la Investigación Operativa.* Teresa Ortuño y Victoria López, UCM, 30 horas, tres créditos.

5. *Sistema GPS: Fundamentos matemáticos y aplicaciones prácticas.* Gracia Rodríguez, UCM, 30 horas, 3 créditos.

6. *Historia de la Astronomía Antigua.* Jesús Fortea, UCM, 30 horas, 3 créditos.

7. *La Matemática: una filosofía y una técnica.* Actividades en Secundaria. (Seminario de trabajo). Inés Mª Gómez Chacón, UCM 30 horas, 3 créditos.

8. *Una introducción al desarrollo de contenidos digitales en formatos estándares en el ámbito de las matemáticas de Secundaria.* Antonio Sarasa, UCM, 30 horas, 3 créditos.

9. *Introducción a la Filosofía de la Ciencia y a la Teoría de la Relatividad.* José Mendoza y Eduardo Aguirre, UCM, 30 horas, 3 créditos.

Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro
Directora de los Cursos

Carolina

Dejadme escribir sólo su nombre como título, puesto que todos la llamábamos así. De más está decir que es Carolina Cuartero Segura, profesora y compañera leal, que nos dejaba el pasado 10 de marzo. He de confesar que me gustaría no tener que escribir ahora sobre ella pero me lo han pedido, creo que con razón, y parecería mal que no dijese algo aunque me entristezca, aunque preferiría callar y recordarla a lo largo de una amistad de más de cuarenta años.

Me contaba que cuando se examinaba de Licenciatura en San Bernardo asistió con una de sus compañeras a la lectura de mi tesis doctoral; yo sí vi allí a dos chicas que no conocía pero no supe quién era hasta que comenzó el curso siguiente y se incorporó, con Antonio Valle y Antonio Pardo, compañeros suyos de curso, al equipo de D. Pedro Abellanas en el que yo me encontraba. De ahí data nuestra relación que no se interrumpió aunque el grupo empezó pronto a disgregarse al buscar cada uno su acomodo profesional.

Yo, que fui a Zaragoza, me trasladé dos años después a la cátedra de Madrid de cuya adjuntía quise que se encargase. Lo hizo a conciencia, como todo lo que abordaba, y juntos sorteamos unos años bastante difíciles en los que no sé si era ella mi mano derecha o más bien era yo su mano izquierda. Porque en ella podía descansar siempre, sabiendo que acudiría a solventar cuantos problemas se fueran presentando. Más de una vez tuve que encomendarle determinadas misiones que de sobra sabía que no le agradaban: ni un solo gesto, ni la menor reserva; las resolvía sin rechistar. Todo ello sin hurtarse a otras obligaciones: encargos de curso en la Facultad, oposiciones y traslados de cátedras de Instituto, Segovia, Guadalajara, Orcasitas, el "Isabel la Católica" finalmente en Madrid, del que también fue directora. Y una tesis doctoral que, con tantos avatares y con la meticulosidad que ponía siempre en todos los detalles, fue prolongándose pero que culminó felizmente.

Fue una mujer de una pieza, valiente y firme en sus convicciones, exigente consigo misma y con los demás en cuanto afectase a los deberes profesionales y sociales, pero esa rectitud, pura consecuencia de conducta, no era seca ni distante y estaba para todos embalsamada de afecto. Porque era esencialmente buena, guió y ayudó a todo el que se le acercó, siempre generosa y espléndida en la dedicación de su tiempo y de su trabajo. Ofrecía su amistad sin trabas y los amigos pasaban a ser casi miembros de su familia, lo mismo que ella entraba en la nuestra. Por los amigos y la familia se desvivía hasta rebasar sus mismos deseos. Disfrutaba de sus afectos y también de otros placeres del espíritu. Le encantaba viajar, adentrarse en paisajes y monumentos, con una tendencia muy particular a visitar países exóticos. Muy aficionada a la música pero con un acento muy selectivo: yo creo que no entraba en la ópera, por ejemplo, pero le apasionaba escuchar a un concertista o una sinfonía.

No sé qué más puedo decir, aunque se me acumulan anécdotas, evocaciones y recuerdos, pero ni creo que es el momento ni me siento con ánimos para hacerlo. Por otra parte no le habría gustado nada este pequeño despliegue: ella, que estaba dispuesta a sacrificarse por los demás era extrañamente tímida ante cuanto supusiera no ya un homenaje sino una atención cualquiera para con ella y huía de verse como centro u objeto de deferencia. Espero que esto me lo perdone.

Pronto hará un año, a finales de julio, me telefoneó para contarme que acababa de volver de Galicia, donde solía pasar algunas temporadas; me pareció contenta y tan vital como siempre y nos despedimos hasta después del verano. Cuando volví, a primeros de septiembre, supe que a los pocos días de nuestra conversación había sufrido un ataque, le habían operado de urgencia y su estado era delicado. Desde entonces fueron pasando unos meses en los que la hemos visto apagarse; Valle y yo la visitamos algunas veces y salíamos cada vez más apenados al comprobar la marcha, que se anunciaba irreversible, de su enfermedad. Poco a poco fue sumiéndose en una casi palpable oscuridad, aunque tampoco le faltaban arrestos para desgranar el Angelus a la hora precisa. De familia profundamente cristiana, se nos ha muerto ejemplarmente, fiel a las ideas fundamentales que siempre sustentó, creyendo en lo mismo que practicó en vida, con sencillez absoluta, libre de toda vanidad. Esa imagen es la que al menos a mí me deja cuando ya no puedo hacer otra cosa que reflejarla. O acaso sí: recordar la última palabra, creo yo, que me dirigió cuando, atribulado por mi impotencia ante su situación, le pregunté si podía hacer algo por ella. Y así me contestó: rezar.

Descanse en la paz de los justos.

José Javier Etayo

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 73 (Junio 2006)

Los matemáticos y el SUDOKU

Julio Fernández Biarge
Profesor emérito de la Universidad Politécnica de Madrid
jfbiarge@telefonica.net

Abstract

This paper shows some comments about the mathematical questions suggested by the popular pastime SUDOKU. Their study leads to difficult problems, some of those have not still been resolved.

Todos nuestros lectores se habrán visto invitados por los medios de comunicación a resolver algún SUDOKU. Muchos habrán caído en la tentación de hacerlo y unos pocos reconocerán haber adquirido una verdadera adicción por ese tipo de pasatiempos. El SUDOKU, que al parecer apareció en los Estados Unidos en los años sesenta, pero recibió su nombre actual en el Japón, en los ochenta (ver figura), lleva varios años teniendo multitud de aficionados en Europa; en España, desde Junio de 2005, casi todos los periódicos los proponen diaria o semanalmente. En las librerías se encuentran docenas de libros con colecciones de SUDOKUs propuestos y descripción de estrategias para resolverlos. Ver [1] y [2].

			6		2		9	
6		9						
		1		9		5	6	
3			7		4			9
		4				2		
9			2		5			8
	8	7		5		1		
						7		6
	6		4		8			

数 独
sū doku

Figura 1ª

Como es bien conocido, este pasatiempo utiliza un *“damero”* de 81 *“celdas”,* dispuestas en 9 *“filas”* y 9 *“columnas”,* como el de la figura, en la que se distinguen 9 *“cajas”* de 9 celdas (es decir, 3x3) cada una.

Tres cajas formadas por celdas de las mismas filas, diremos que forman una *banda* y tres cajas formadas por celdas de las mismas columnas, una *pila.*

Algunas de las celdas aparecen “rellenas” con cifras del 1 al 9, que constituyen los *“datos*” y el problema consiste en terminar de rellenar el damero con cifras del 1 al 9 de manera que se cumplan las “reglas del SUDOKU”, que son:

1) En toda fila aparecen las cifras 1 al 9 sin repetirse.
2) En toda columna aparecen las cifras 1 al 9 sin repetirse.
3) En toda caja, aparecen las cifras 1 al 9 sin repetirse.

La *“solución”* del *“problema”* anterior aparece en la Figura 2ª, donde se han señalado en negrita y fondo gris los datos originales.

5	4	8	**6**	1	**2**	3	**9**	7
6	3	**9**	5	4	7	8	2	1
7	2	**1**	8	**9**	3	**5**	**6**	4
3	5	2	**7**	8	**4**	6	1	**9**
8	7	**4**	1	6	9	**2**	3	5
9	1	6	**2**	3	**5**	4	7	**8**
2	**8**	**7**	9	**5**	6	**1**	4	3
4	9	5	3	2	1	**7**	8	**6**
1	**6**	3	**4**	7	**8**	9	5	2

Figura 2ª

Llamaremos *“un SUDOKU”* a cualquier damero relleno con cifras 1 a 9 de modo que se cumplan las tres reglas enunciadas antes y llamaremos un *“problema SUDOKU”* a un conjunto de datos dados en algunas de las celdas del damero. Una solución de un problema SUDOKU es un SUDOKU que incluya los datos de ese problema. Así la Figura 2ª representa un SUDOKU que es solución del problema SUDOKU propuesto en la Figura 1ª.

Un problema SUDOKU puede no tener solución, tener una sola o tener varias. Un problema SUDOKU con una solución y sólo una, diremos que es un problema “*unívoco”*. Si al suprimir uno cualquiera de los datos de un problema unívoco, resulta un problema que ya no es unívoco (es decir, que no hay datos redundantes), diremos que el problema es *"correcto"*. Los problemas SUDOKU que aparecen en los periódicos son normalmente unívocos y, salvo excepciones, correctos. Los originales problemas SUDOKUs creados en Japón satisfacían además a la exigencia de que las celdas ocupadas por los datos formasen una figura simétrica respecto al centro del damero (como ocurre en la Figura 1ª). Esta condición figura en la patente registrada en Japón y hoy día muchos de los que se proponen en los periódicos la cumplen, pero otros no. Los problemas SUDOKUs correctos que cumplen esa condición, los llamaremos *japoneses*.

Un matemático suele disfrutar resolviendo los primeros SUDOKUs, pero pronto quiere profundizar en las propiedades matemáticas del pasatiempo. Lo primero que reconoce es que los valores de las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 utilizadas no juegan papel alguno. Son meros símbolos y podrían cambiarse por las letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, o por nueve colores, sin que nada se alterase. En efecto, el matemático reconocerá enseguida que el problema es del tipo de los de coloraciones de grafos. En este caso, los 81 vértices del grafo son las celdas del damero, y como cada celda tiene otras 20 que están en la misma fila, en la misma columna o en la misma caja que ella, en el grafo habrá 810 arcos, debiendo atribuirse a cada vértice alguno de los 9 colores de manera que sean distintos los asignados a dos enlazados por un arco. Además de encajar el problema entre otros conocidos, al matemático no le pasará desapercibido que un SUDOKU es un caso particular de los *"Cuadrados latinos"* que ya fueron estudiados por Leonhard Euler en el siglo XVIII. (En muchas publicaciones, incluso en el programa [13], se atribuye erróneamente a Euler la invención del Sudoku). En efecto, todo SUDOKU es un cuadrado latino, pero no a la inversa, pues en estos no se impone la tercera condición de las mencionadas.

El primer problema que se ocurrirá al matemático es el de evaluar el número $\mathbf{N_S}$ de SUDOKUs , es decir, el cardinal del conjunto **S** de todos ellos. Seguro que intentará poner en juego sus conocimientos sobre combinatoria, pero pronto llegará a la conclusión de que el problema es mucho más difícil de lo que aparenta. La gran dificultad encontrada no le causará sorpresa si conoce que S. Bammel y J. Rothstein, resolvieron en 1975 (Ver [3] y [4]) el problema, más sencillo, de determinar el número de cuadrados latinos de 9X9 cuyo resultado es el enorme y extraño número

$$5{,}524{,}751{,}496{,}156{,}892{,}842{,}531{,}225{,}600$$

que puede escribirse como $(9!)^2 \cdot 2^{21} \cdot 5231 \cdot 3824477 \approx 5.52 \cdot 10^{27}$.

Muy recientemente, en Mayo de 2005, Bertram Felgenhauer y Frazer Jarvis lograron calcular el número de SUDOKUs, obteniendo

$$\mathbf{N_S} = 9! \cdot 9^2 \cdot 2^{13} \cdot 27704267971 = 6{,}670{,}903{,}752{,}021{,}072{,}936{,}960 \approx 6.67 \cdot 10^{21}$$

Lo más sorprendente de este resultado es que el factor de 11 cifras que aparece en la expresión ¡es primo! . Acerca de este resultado pueden consultarse [5], [6], [7], [8] y sobre todo, el foro [9], al que nos referiremos después.

Aun conocido este resultado, las inquietudes de un matemático no descansarán. Observará que un SUDOKU puede sufrir ciertas transformaciones sin dejar de ser SUDOKU. Por ejemplo, cualquier permutación de las nueve cifras (o colores) utilizadas, convierte un SUDOKU en otro. Tenemos así un grupo finito **g** de transformaciones de **S** cuyo orden es $\mathbf{N_g} = 9! = 362.880$. De cada SUDOKU pueden obtenerse otros 362.879, diferentes con seguridad, aplicándole las transformaciones de **g**. En el conjunto **S** queda definida una relación de equivalencia ~ cuyas clases, de 9! elementos, están constituidas por elementos transformables unos en otros.

Pero además, podemos considerar las transformaciones del damero en sí mismo que transforman cualquier SUDOKU en otro. Esas transformaciones pueden engendrarse mediante las 6 permutaciones de filas de cada banda, las 6 permutaciones de columnas de cada pila, las 6 permutaciones de las bandas completas y las 6 permutaciones de las pilas. También mediante un giro del damero de 90º, que cambia filas por columnas (el giro de 180º no hace falta considerarlo, pues puede generarse mediante permutaciones de las citadas antes). Esas transformaciones generan un grupo que llamaremos **G ,** designando con $\mathbf{N_G}$ a su orden. $\mathbf{N_G}$ es $6^8 \cdot 2 = 3.359.232$. El grupo **G** establece también una relación de equivalencia ≈ (*equivalencia geométrica*) que descompone **S** en clases de SUDOKUs transformables entre sí.

Las transformaciones de **G** permiten deducir de cada SUDOKU otros $\mathbf{N_G} - 1$, pero no puede afirmarse sin demostrarlo que estos sean todos distintos. Esto plantea otro problema interesante: ¿Existe algún SUDOKU *"geométricamente simétrico"*, s , en el sentido de que se transforme en sí mismo en *alguna* de las transformaciones (distinta de la identidad) de **G** (es decir, tal que $\exists T \in \mathbf{G}$, $T \neq I$ y $T(s) = s$) ? ¿cuántos? ¿quizás todos lo son? ¿puede construirse algún ejemplo? Si existen tales SUDOKUs geométricamente simétricos, las clases de equivalencia en que ≈ descompone a **S** tendrán menos de $\mathbf{N_G}$ elementos.

Ni el grupo **g** ni el **G** son conmutativos, pero todas las transformaciones de **g** conmutan con todas las de **G** . Las transformaciones de esos dos grupos, conjuntamente, engendran un grupo **G*** cuyos elementos pueden expresarse siempre (por la conmutatividad señalada) en la forma T.t , con $T \in \mathbf{G}$ y $t \in \mathbf{g}$. Sea $\mathbf{N_G}^*$ su orden. Será $\mathbf{N_G}^* \leq \mathbf{N_G} \cdot \mathbf{N_g}$, pero no puede afirmarse la igualdad sin demostrarla. De cada SUDOKU pueden deducirse otros mediante las $\mathbf{N_G}^*$ transformaciones de **G*** , pero no puede afirmarse sin más que sean todos distintos.

Diremos que dos SUDOKUs *s* y *s'* son *"equivalentes"* y escribiremos $s \cong s'$ si $\exists T \in \mathbf{G}^*$, s' = T(*s*). Diremos también que un $s \in \mathbf{S}$ es *"simétrico"* si $\exists T \in \mathbf{G}^*$, $T \neq I$ y T(s) = s. Si existen tales simétricos, las clases de equivalencia en que $\cong$ descompone a **S** tendrán menos de $\mathbf{N_G}^*$ elementos. Se plantean los problemas siguientes: ¿Existe algún SUDOKU simétrico? ¿Cuántos? ¿Se pueden generar o caracterizar?. Nótese que si no existiesen simétricos y además fuese $\mathbf{N_G}^* = \mathbf{N_G} \cdot \mathbf{N_g}$, este número sería divisor de $\mathbf{N_S}$, lo que no ocurre ($\mathbf{N_G} \cdot \mathbf{N_g}$ tiene cuatro factores primos 3 más que $\mathbf{N_S}$. Dos SUDOKUs que no puedan transformarse uno en otro mediante una transformación de **G***, diremos que son *esencialmente diferentes*. Surge inmediatamente el problema de determinar el número $\mathbf{N_E}$ de SUDOKUs esencialmente diferentes entre sí (o sea el número de clases de equivalencia respecto a $\cong$) y acaso el de generarlos. Invitamos a nuestros lectores a razonar sobre los problemas señalados.

También los "problemas SUDOKU" plantean interesantes temas de trabajo para un matemático. En primer lugar, el de encontrar una caracterización sencilla de un conjunto de datos, que permita asegurar que el problema es unívoco, o al menos condiciones sencillas que sean necesarias o suficientes para ello.

Pero el problema que ha preocupado a muchos y que hoy día está sin resolver es el de determinar el mínimo número de datos de los problemas SUDOKU unívocos. Se han llegado a construir problemas unívocos con 17 datos y no se ha conseguido hacerlo con menos; tampoco se ha conseguido crear un problema SUDOKU japonés con menos de 18 datos. Pero hasta el momento, no se ha podido demostrar que con menos de 17 datos, sea imposible plantear uno unívoco. Sobre este tema, puede consultarse [10]. En [15] se encuentra una página titulada "Minimun Sudoku" en la que se ofrecen 36.628 problemas SUDOKU correctos con sólo 17 datos, esencialmente diferentes en el sentido dado antes. Ninguno de ellos es "japonés". El autor no ha encontrado problemas SUDOKU correctos con 16 datos, pero tampoco ha demostrado que no pueda haberlos.

El matemático también estará interesado en idear generalizaciones del SUDOKU, comenzando por la sustitución del número 9 por otro mayor, e incluso por una variable n^2 . Por ejemplo, en [2] se encuentran SUDOKUs generalizados que piden rellenar con 16 símbolos, dameros de 16x16 = 256 celdas. Estos suscitan problemas análogos, con cálculos numéricos más tediosos, pero no parecen aportar novedades de interés. También pueden añadirse condiciones a las 1), 2) y 3) dadas al principio. Por ejemplo es fácil construir SUDOKUs que cumplan además la "4) En las dos diagonales del damero aparecen las cifras 1 al 9 sin repetirse". Existe una versión de pasatiempo análogo al SUDOKU, "para niños", con un damero de 6x6 celdas, distribuidas en 6 cajas de dos filas y tres columnas, en las que deben colocarse las cifras 1 al 6. En [7] se puede encontrar información sobre muchas generalizaciones de otros tipos. Una variante más interesante es el pasatiempo denominado KAKURU, cuya descripción puede encontrarse en [11].

Si el matemático es además informático, quizás se interese en confeccionar programas que resuelvan problemas SUDOKUS y determinen si son unívocos y correctos . Y también en desarrollar programas que generen estos problemas, asegurando su corrección y quizás graduando su grado de dificultad. En Internet se encuentran cientos de páginas que ofrecen gratuitamente el uso de programas que resuelven problemas SUDOKU, comprueban si una solución suministrada por el usuario es correcta y determinan si el problema es imposible, unívoco o admite más de una solución. También existen numerosos programas que generan problemas SUDOKU correctos, incluso prefijando su grado de dificultad. Pueden verse, por ejemplo: *"Simple Soduku 4.1s",* [12], *"Sudoku Jes 3.3"* [13], *"Pure Sudoku 1,7"* [14].

Pero el verdadero propósito de este artículo informativo es mostrar las virtudes que ofrece, desde el punto de vista didáctico, el foro antes citado [9] y [10]. Todo foro utilizado por matemáticos es interesante, pero así como los relativos a otros temas son sólo asequibles a especialistas del mismo, éste tiene sus discusiones comprensibles por cualquier lector con conocimientos de matemática e informática elementales.

Ese foro comenzó en Marzo de 2005, cuando Steveb planteó los dos problemas que, con nuestra nomenclatura, son: determinar $\mathbf{N_S}$ y determinar el mínimo número de datos que puede dar lugar a un problema unívoco. *"Si alguien conoce las respuestas,* -- decía – *comuníquemelas"*. Es interesantísimo seguir, uno por uno, los mensajes cruzados entre los participantes en el foro, hasta que, en poco más de dos meses, fue dada la primera de las respuestas pedida. El foro continúa abierto, sin que haya perdido interés. En él se encuentra incluso alguna intervención tan pintoresca como la de uno que, tras conocer el valor hallado para $\mathbf{N_S}$, observa que es prácticamente igual a la masa de Oberón (satélite de Saturno) ¡expresada en libras!. Es un deleite observar la sucesión de sugerencias, conjeturas, análisis críticos, errores y fracasos parciales, que han conducido la investigación a los resultados finales, como fruto de la colaboración entre un grupo de matemáticos entregados deportivamente a la tarea.

Referencias

[1] http://www.rincondelcurioso.com/sudoku/historia.php

[2] **Robin Wilson.** *"SUDOKU. La guía definitiva".* Punto de Lectura. Madrid, 2005.

[3] **S. F. Bammel, J. Rothstein.** *The number of 9x9 Latin squares.* Discrete Mathematics, **11** (1975) 93-95

[4] http://mathworl.wofram.com/LatinSquare.html

[5] **Juan M.R. Parrondo.** *"Finalmente… Sudoku"* Revista "Investigación y Ciencia", Diciembre 2005. sección "Juegos Matemáticos", págs 80 y 81.

[6] **Bertram Felgenhauer** y **Frazer Jarvis.** *Enumerating possible Sudoku grids.* (2005). http://shef.ac.uk/~pm1afj/sudoku/sudoku.pdf

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematics_of_Sudoku

[8] http://en.wikipedia.org/wiki/Talk:Mathematics_of_Sudoku

[9] http://www.sudoku.com/forums/viewtopic.php?t=44

[10] http://www.sudoku.com/forums/viewtopic.php?t=2334

[11] http://www.kakurolive.com o http://kakuro.com

[12] http://www.angusj.com/sudoku (de 02/11/05)

[13] http://www.telefonica.net/web2/santi (de 28/11/05)

[14] http://Zikitrake.com (de 21/10/05) (PureSudoku)

[15] http://www.csse.uwa.edu.au/~gordon/sudokumin.php

Un problema diofántico

Ricardo Moreno Castillo
I.E.S. Gregorio Marañón
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid.
moreno.castillo@terra.es

Abstract

This work presents a method for finding infinite solutions to problem VI in book III of Diophantos's Arithmetic.

Introducción

En el problema VI del libro III de su *Aritmética*, Diofanto de Alejandría se propone encontrar tres números racionales tales que sumados den un cuadrado, y que sumados dos a dos también den cuadrados. Diofanto proporciona dos soluciones, una formada por los números 80, 320 y 41, y otra por los números $840/36$, $385/36$ y $456/36$. Según Paul Ver Eecke, la segunda es debida a un comentarista posterior. El objeto de esta nota es dar un procedimiento para encontrar infinitas soluciones al problema, aunque no su solución general, porque de él no se puede deducir ninguna de las dos que aparecen en *Aritmética*.

Dejo constancia de mi gratitud a mi compañera Capi Corrales, quien tuvo la paciencia de leer el borrador de este trabajo y después me asesoró con sabias y prudentes razones.

1. Descomposición del número dos como suma de cuadrados

Comenzaremos descomponiendo el número dos como suma de cuadrados racionales de todas las maneras posibles. Esto quiere decir encontrar todas las ternas de números enteros x, y y z para los que sucede lo siguiente:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2+\left(\frac{y}{z}\right)^2=2$$

Esto equivale a que $x^2+y^2=2z^2$, o lo que es igual, $y^2-z^2=z^2-x^2$, lo cual nos lleva a su vez a que $(y+z)(y-z)=(z+x)(z-x)$. Entonces han de existir cuatro números enteros *u*, *v*, *w* y *t* tales que $ut=vw$, y además:

$$\left.\begin{array}{l} y+z=w \\ y-z=v \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} z+x=u \\ z-x=t \end{array}\right\}$$

Despejando z en ambos sistemas, tenemos que $w-v=u+t$. Sustituimos t por wv/u, y unas cuentas elementales nos llevan a lo que viene a continuación:

$$\frac{w}{u}=\frac{u+v}{u-v}$$

Esta expresión nos permite calcular *x*, *y* y *z*:

$$2x=u-t=u-\frac{wv}{u}=u-v\frac{u+v}{u-v}=\frac{u^2-v^2-2uv}{u-v}$$

$$2y=v+w=u+u\frac{w}{u}=v+u\frac{u+v}{u-v}=\frac{u^2-v^2+2uv}{u-v}$$

$$2z=u+t=u+\frac{wv}{u}=u+v\frac{u+v}{u-v}=\frac{u^2+v^2}{u-v}$$

Entonces los números racionales buscados son:

$$\frac{x}{z}=\frac{u^2-v^2-2uv}{u^2+v^2} \qquad \frac{y}{z}=\frac{u^2-v^2+2uv}{u^2+v^2}$$

Nos serán útiles más adelante los cuadrados de las expresiones anteriores:

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2=1-\frac{4uv\left(u^2-v^2\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2} \qquad \left(\frac{y}{z}\right)^2=1+\frac{4uv\left(u^2-v^2\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}$$

2. Descomposición del número dos como suma de tres cuadrados

Ahora vamos a descomponer dos en una suma de tres cuadrados racionales. Para ello partimos de la descomposición obtenida anteriormente y buscamos tres números a, b y c tales que:

$$a^2 = 1 - \frac{4uv\left(u^2 - v^2\right)}{\left(u^2 + v^2\right)^2} \qquad b^2 + c^2 = 1 + \frac{4uv\left(u^2 - v^2\right)}{\left(u^2 + v^2\right)^2}$$

En este caso, b y c han de formar parte de una terna pitagórica, y en consecuencia, para cualquier racional t, nos sirven los valores:

$$b^2 = \left(1 + \frac{4uv\left(u^2 - v^2\right)}{\left(u^2 + v^2\right)^2}\right)\left(\frac{2t}{t^2 + 1}\right)^2 \qquad c^2 = \left(1 + \frac{4uv\left(u^2 - v^2\right)}{\left(u^2 + v^2\right)^2}\right)\left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1}\right)^2$$

Con esto ya tenemos que $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Nos van a interesar aquellas descomposiciones en las que los tres cuadrados son menores que uno, que son aquellas para las cuales:

$$b^2 + c^2 < mín\left\{\left(\frac{t^2 + 1}{2t}\right)^2, \left(\frac{t^2 + 1}{t^2 - 1}\right)^2\right\}$$

3. Resolución del problema

Vamos ahora con nuestro problema. Si tres números x, y y z suman un cuadrado, dividiéndolos por dicho cuadrado podemos suponer que $x + y + z = 1$. Además, queremos que $y + z = a^2$, $x + z = b^2$ y $x + y = c^2$. De esto se deduce que $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Obtenida la descomposición de 2, con los tres sumandos menores que uno, tenemos que $x = 1 - a^2$, $y = 1 - b^2$ y $z = 1 - c^2$. De este modo, podemos tener infinidad de soluciones para el problema. Ahora bien, aunque descompusimos el dos de infinitas maneras como suma de tres cuadrados, no se han cubierto todas las posibilidades. Por esta razón, no todas las soluciones al problema se pueden obtener mediante el procedimiento que acabamos de explicar. De hecho, ninguna de las dos que da el propio Diofanto. Lo veremos con la primera. Si los números son 80, 320 y 41, tenemos que:

$$x = \frac{80}{441} \qquad y = \frac{320}{441} \qquad z = \frac{41}{441}$$

En consecuencia:

$$a^2 = 1 - x = \frac{361}{441} = \left(\frac{19}{21}\right)^2$$

$$b^2 = 1 - y = \frac{121}{441} = \left(\frac{11}{21}\right)^2$$

$$c^2 = 1 - z = \frac{400}{441} = \left(\frac{20}{21}\right)^2$$

Y no hay entre estos números dos que sean parte de una terna pitagórica.

Ahora vamos a encontrar nuevas soluciones, como aplicación del método recién esbozado.

I. Si hacemos $u = 2$ y $v = 1$, encontramos la siguiente descomposición de dos como suma de cuadrados:

$$2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2$$

Si tomamos $t = 5/12$, entonces:

$$(t^2 + 1)^2 = \left(\frac{169}{144}\right)^2 \qquad (t^2 - 1)^2 = \left(\frac{119}{144}\right)^2 \qquad (2t)^2 = \left(\frac{120}{144}\right)^2$$

Como $(7/5)^2 < (169/120)^2$ y $(7/5)^2 < (169/119)^2$, la elección de t proporciona una descomposición del dos en suma de tres cuadrados, *todos ellos menores que la unidad*. Los cuadrados son los siguientes:

$$a^2 = \frac{1}{25} \qquad b^2 = \frac{693889}{714025} \qquad c^2 = \frac{705600}{714025}$$

Y de aquí ya tenemos la solución:

$$x = 1 - a^2 = \frac{24}{25} \qquad y = 1 - b^2 = \frac{20136}{714025} \qquad z = 1 - c^2 = \frac{8425}{714025}$$

Reduciendo a común denominador, obtenemos una solución formada por los números enteros 685464, 20136 y 8425.

II. Si en lugar de $5/12$ tomamos para *t* el valor de $22/9$, entonces:

$$\left(t^2 + 1\right)^2 = \left(\frac{565}{81}\right)^2 \qquad \left(t^2 - 1\right)^2 = \left(\frac{403}{81}\right)^2 \qquad (2t)^2 = \left(\frac{396}{81}\right)^2$$

Como $(7/5)^2 < (565/403)^2$ y $(7/5)^2 < (565/396)^2$, la nueva elección de *t* da los siguientes tres cuadrados cuya suma es dos:

$$a^2 = \frac{1}{25} \qquad b^2 = \frac{7683984}{7980625} \qquad c^2 = \frac{7958041}{7980625}$$

Y de aquí ya tenemos la solución:

$$x = 1 - a^2 = \frac{24}{25} \qquad y = 1 - b^2 = \frac{296641}{798025} \qquad z = 1 - c^2 = \frac{22584}{7980625}$$

Reduciendo a común denominador, obtenemos una solución formada por los números enteros 7661400, 296641 y 22584.

III. La siguiente solución la vamos a buscar a partir de una diferente descomposición del dos como suma de cuadrados. Por ejemplo, si $u = 4$ y $v = 3$, encontramos la siguiente expresión de dos como suma de cuadrados:

$$2 = \left(\frac{17}{25}\right)^2 + \left(\frac{31}{25}\right)^2$$

Como $31/25 < 7/5$, esta nueva descomposición permite una mayor holgura en la búsqueda de *t*. Pongamos $t = 1/2$. En este caso:

$$\left(t^2 + 1\right)^2 = \frac{25}{16} \qquad \left(t^2 - 1\right)^2 = \frac{9}{16} \qquad (2t)^2 = 1$$

La elección de t es válida, porque $(31/25)^2 < (25/16)$ y $(31/25)^2 < (25/9)$, y tenemos lo siguiente:

$$a^2 = \frac{289}{625} \qquad b^2 = \frac{15376}{15625} \qquad c^2 = \frac{8649}{15625}$$

En consecuencia:

$$x = 1 - a^2 = \frac{336}{625} \qquad y = 1 - b^2 = \frac{249}{15625} \qquad z = 1 - c^2 = \frac{6976}{155625}$$

La reducción a común denominador nos lleva a otra solución entera formada por los números 8400, 249 y 6976.

Referencias

[1] Ore, O. (1988), *Number Theory and Its History*. Dover Publications, Imc., New York.

[2] Diophante d'Alexandrie, (1959), *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones.* Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, París.

Notas sobre puntos fijos y Matemática experimental

Leoncio Fernández Maroto
lfmaroto@gmail.com

Abstract

Starting from general considerations on mathematical experiments implemented by computer, the present experimentalization of Mathematics is acknowledged. Some elementary geometrical examples are exposed, and the paper concludes with a short study of results experimentally obtained examining and graphically interpreting the transcendental equations sin(1/ x)=0 and sin(1 /sqrt(x^2+ y^2)) = 0.

Introducción

En un extenso e interesante documento publicado hace algunos años en Internet por el Centro para la Matemática Experimental y Constructiva de la Universidad canadiense Simon Fraser (*www.cecm.sfu.ca/organics/vault/expmath*) se exponían unas consideraciones generales, muy acertadas a nuestro juicio y que a continuación reproducimos, sobre la influencia de la aparición del ordenador en la evolución de la ciencia matemática, manifestando que los filósofos han venido distinguiendo normalmente a ésta de las ciencias físicas, desarrolladas experimentalmente en el mundo *real,* dejando a los matemáticos desenvolverse más o menos dentro del mundo abstracto de la mente. Esta situación ha servido bien a los matemáticos durante milenios. Pero con su aparición, el ordenador ha comenzado a cambiarla. Porque nos ha proporcionado, siguen diciendo las referidas consideraciones, la "capacidad de contemplar nuevos e inimaginablemente vastos panoramas, creando mundos matemáticos que hubieran permanecido inaccesibles a la mente humana no ayudada. Sin embargo, ese acceso tiene un precio: Muchos de esos mundos, por ahora, sólo pueden conocerse de manera *experimental*. El ordenador nos ha permitido, por ejemplo, volar a través de enrarecidos dominios de espacios hiperbólicos, o producir miles de millones de dígitos del número π. Ahora bien, experimentar un mundo y comprenderlo son dos cosas muy diferentes. Guste ello o no, el mundo del matemático se está experimentalizando. Y los ordenadores del futuro prometen la exploración de mundos aún más desconocidos…"

Experimento (del latín *experimentum*, y griego πειρα, experiencia) se define en un diccionario anglosajón como "cualquier acción o proceso emprendido para descubrir algo que todavía no se conoce o para demostrar algo ya conocido". Esta es una definición de gran amplitud, y aquí debemos limitarnos al aspecto matemático.

Toda experimentación requiere agente experimentador y medios o instrumentos para experimentar. El agente experimentador en la ciencia matemática es la mente humana, y sus medios e instrumentos han evolucionado hasta el momento presente, en que surge la informática ("Computer Science"), disciplina rectora del funcionamiento de los ordenadores, que como instrumentos de experimentación matemática superan en determinadas posibilidades y prestaciones (por ejemplo: visualización, velocidad de cálculo y dibujo, precisión numérica) a lo logrado anteriormente.

Para un usuario normal con inclinación matemática, el campo de visualización y/o posible experimentación es fundamentalmente la pantalla de su ordenador. En ella se reflejarán sus cálculos, programas, representaciones geométricas, etc. La estructura y características de una pantalla actual de ordenador ha necesitado desarrollos tecnológicos muy notables para alcanzar el grado de versatilidad y posibilidades hoy logrado, que permite disponer de una red de "pixels" de gran densidad (1024 por 768 es hoy una definición común de pantalla, ya muy superada) Es evidente que nunca podrá identificarse el concepto de píxel con el indefinible e irrepresentable concepto estricto de punto geométrico, al cual ya Euclides atribuyó la carencia de extensión, pero no es menos cierto que la miniaturización del píxel lograda por la tecnología informática permite conseguir en pantalla grados de representabilidad y precisión suficientes para muchísimas aplicaciones teóricas y prácticas.

El gran progreso logrado en la creación de software específico para la realización de una enorme diversidad de finalidades y aplicaciones imaginables ha producido la aparición de lenguajes y programas concebidos especialmente desde un punto de vista adecuado a cada finalidad y aplicación. Lo que aquí nos interesa son los programas o sistemas de interés matemático general, cuya interfaz de usuario los hace utilizables en principio para el aprendizaje y la experimentación en diversos niveles, accesibles a un colectivo de personas que creemos ya muy numeroso y que juzgamos aumentará en un futuro inmediato de manera llamativa, a medida que se incremente el nivel medio de la educación matemática.

1 Sistema y programa informático

Para la realización de los cálculos y gráficos de este trabajo utilizamos el programa "Graphing Calculator", en su versión 3.2, propiedad de Pacific Tech, U.S.A., 1119 Ward St., Berkeley, CA 94702. Su "Home Page" en Internet es la siguiente: http://www.PacificT.com/. En ella y sus subdivisiones se puede ver información detallada sobre las capacidades operativas del referido programa.

Existe un manual "on line" sobre las instrucciones básicas y funcionamiento del referido programa, cuyo autor es Tim Erickson, y puede lograrse por medio de la compañía propietaria del programa.

Es pertinente hacer constar que dicho programa admite el uso de dos variables adicionales función de las cartesianas x e y, que son $r=\text{sqrt}(x^2+y^2)$ y $\theta=\arctan(y/x)$, que permiten el uso de coordenadas polares.La repetición de figuras en casos determinados, p.ej. al representar senx+seny=1 es consecuencia de la consideración de la periodicidad de las funciones circulares.

2 Cálculos numéricos

La introducción, en notación normal, de la instrucción para un determinado cálculo, determina la realización inmediata del mismo.

3 Temas geométricos

Al inscribir la expresión de un objeto geométrico, el programa intenta su representación gráfica. Existe la posibilidad de superponer figuras. Por ejemplo, si quisiéramos tener en un mismo cuadro la representación de todas las funciones circulares y las hiperbólicas del primer cuadrante del plano euclidiano, podríamos realizar un gráfico como el siguiente, que figura a continuación, en el que se han incluído los gráficos de todas las funciones circulares e hiperbólicas que se sitúan en la zona contigua al origen de dicho primer cuadrante dotado de coordenadas cartesianas rectangulares, así como la bisectriz del primero y tercer cuadrantes, constituyendo en conjunto la Figura 1.

Si en otro supuesto, nos interesase averiguar el punto fijo de la función secante hiperbólica de x , es decir: $y = \text{sech } x$, representaríamos dicha función y al propio tiempo la bisectriz $y = x$ del primero y tercer cuadrantes, cuyo punto de intersección con tal función, valorado con el cursor, nos daría el punto fijo buscado, que satisface la ecuación $\text{sech } x = x$ del punto fijo interesado, que en este caso es único (Figura 2).

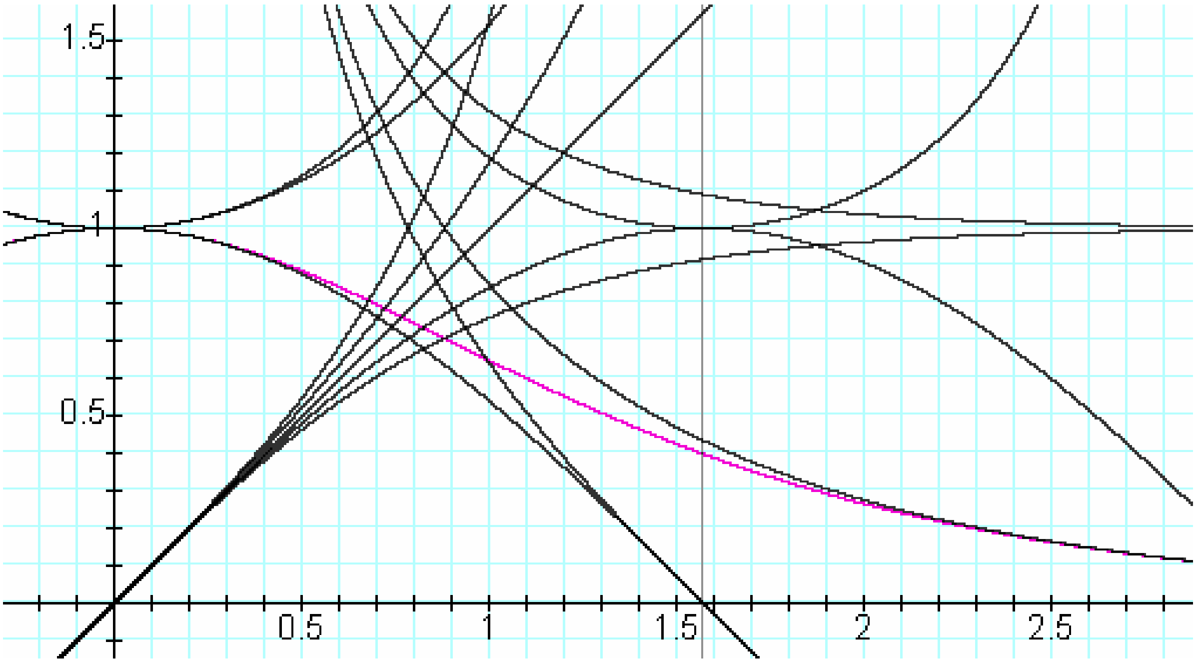


Figura 1

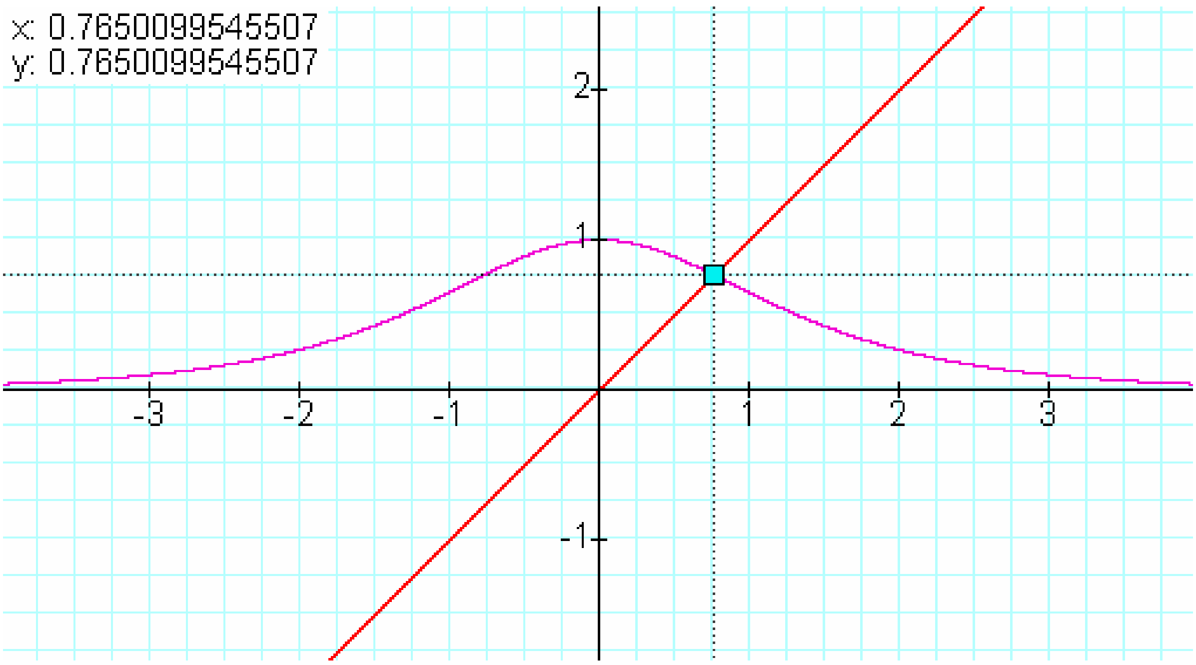


Figura 2

Consideremos ahora el caso de funciones con infinitos puntos fijos. Por definición de punto fijo, se comprende que dichas funciones han de poseer infinitos puntos de cruce o tangencia con y=x, bisectriz de los cuadrantes primero y tercero. Tomemos la función $y = x + \operatorname{sen} \pi x$; en este caso la gráfica es la de la FIGURA 3, en la que se puede apreciar que los puntos fijos obtenidos son los términos de la sucesión doblemente infinita siguiente:

$$\ldots(-n,-n),\ldots,(-3,-3), (-2,-2), (-1,-1), (0,0), (1,1), (2,2), (3,3),\ldots,(n,n),\ldots$$

que representa el conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros.

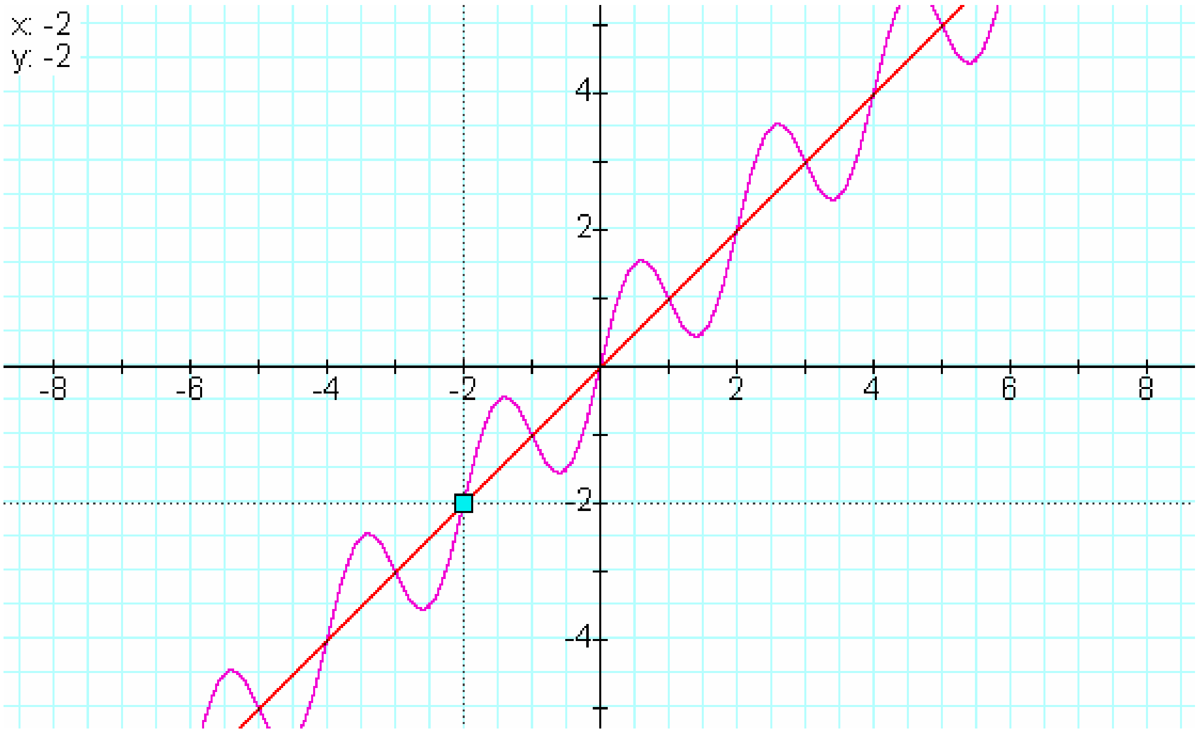


Figura 3

Existen muchas otras funciones con infinitos puntos fijos, por su propia naturaleza. Un ejemplo peculiar es la función $y = x \cdot \operatorname{sen}(x)$, cuyos puntos fijos son todos los de tangencia con la bisectriz del primero y tercer cuadrantes. Hemos representado dicha función en la Figura 4, juntamente con los puntos de tangencia señalados por la ecuación que iguala a uno la derivada de la función, es decir:

(x.cosx + senx) = 1. Los puntos de tangencia del primer cuadrante son: ($\pi/2$, $\pi/2$), ($5\pi/2$, $5\pi/2$), ($9\pi/2$, $9\pi/2$), ($13\pi/2$, $13\pi/2$),...., como se comprueba con el cursor valorado del programa.

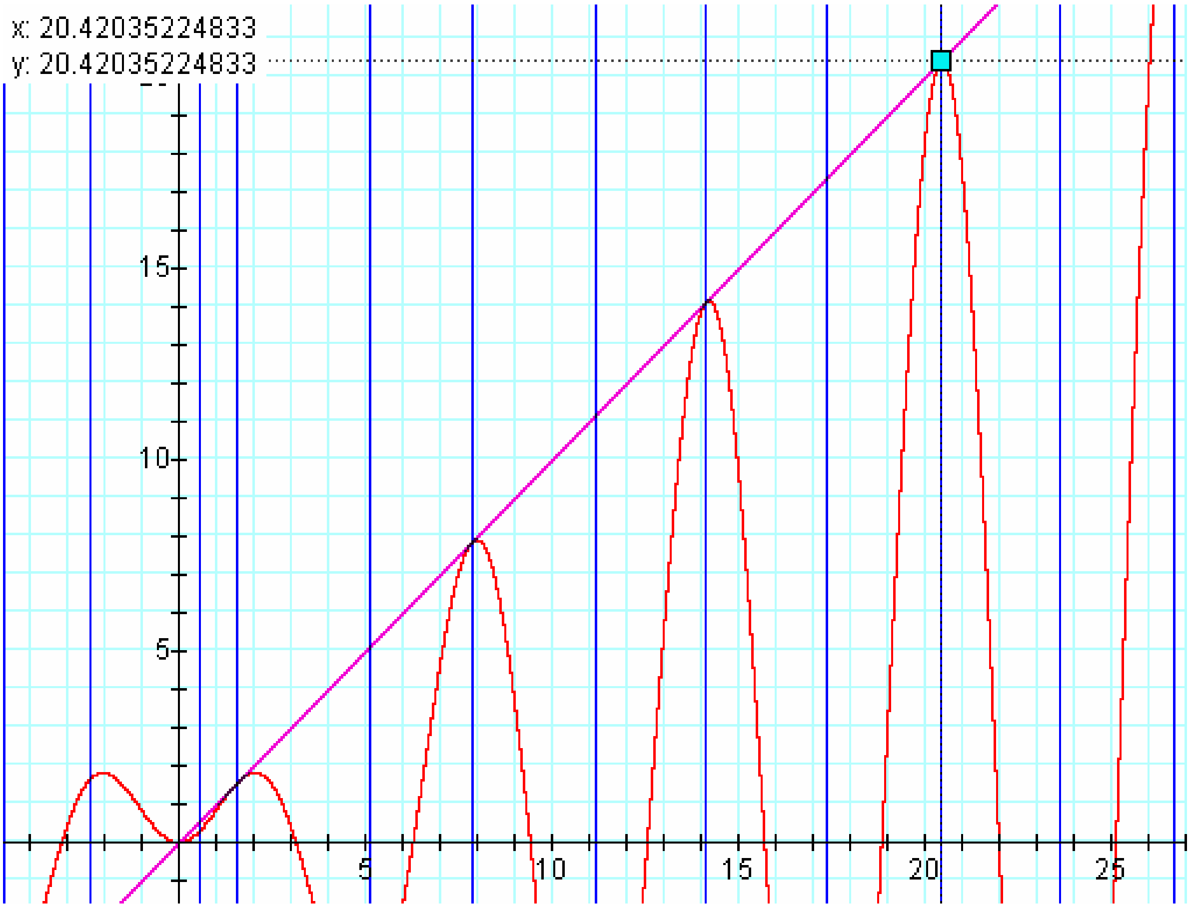


Figura 4

Otros casos de infinidad de puntos fijos se presentan en las espirales, tanto en la espiral de Arquímedes, cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho = a\phi$, como en las espirales hiperbólicas, de ecuación $\rho = a/\phi$ ($a>0$, $-\infty < \phi < 0$, $0 < \phi < \infty$), y logarítmicas, de ecuación: $\rho = a\ e$^($k\phi$) (1) ($a>0$, $-\infty < \phi < \infty$) Estas dos últimas tienen ambas un punto asintótico en el origen, al cual se acercan indefinidamente los puntos fijos originados por la trayectoria de las curvas al cruzar la bisectriz.

4 Ecuaciones trascendentes: sen(1/x) = 0, y sen(1/sqrt(x^2+y^2)) = 0

La ecuación que iguala a cero la función sen(1/x) representa un lugar geométrico que aparece trazado en la Figura 5 y consiste en una configuración asintótica de rectas paralelas al eje Oy, cuyas intersecciones con la parte positiva del eje Ox , calculadas como de costumbre con el cursor valorado del programa, resultan ser:

0,318309886…
0,159154943…
0,106103295…
0,079577471…
0, 063661977…
0,053051647…

es decir, los valores:

$1 / \pi$, $1 / 2\pi$, $1 / 3\pi$, $1 / 4\pi$, $1 / 5\pi$, $1 / 6\pi$, ……

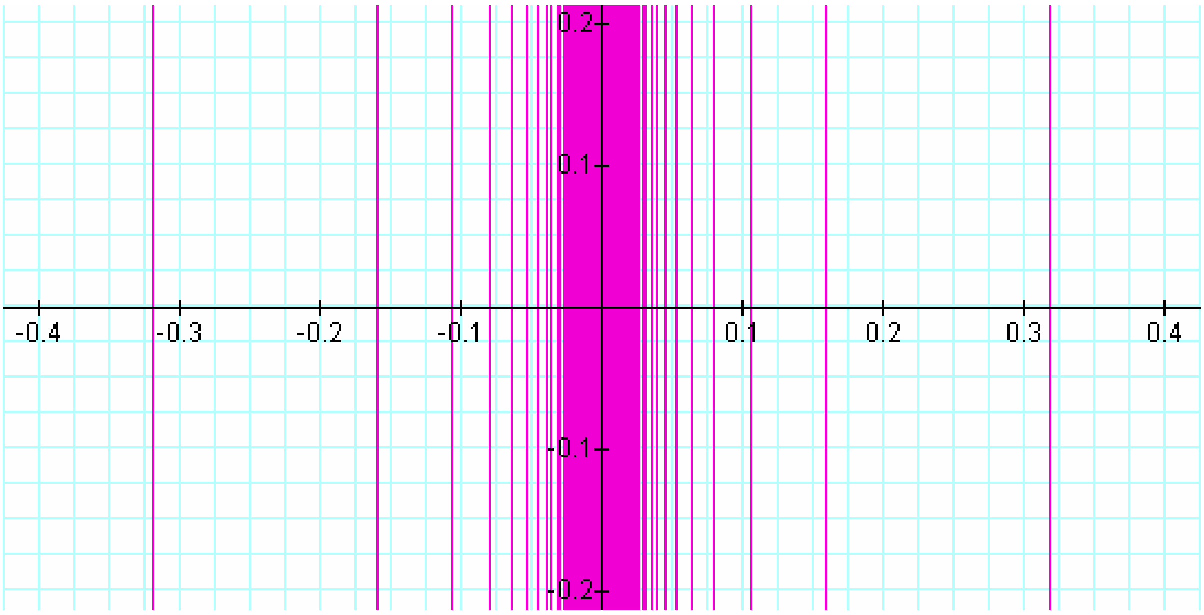


Figura 5

y los valores opuestos negativos, en la parte negativa del eje Ox. Ello está de acuerdo con la solución de la ecuación trascendente sen (1/x) =0 antes referida, en la que tomando arco-senos de sus dos miembros, resulta:

$$(1/x) = \text{arc sen } 0 = 0, \pm k\pi, \quad \{k = 1, 2, 3, \ldots\ldots\}$$

y, en consecuencia,

$$x = 0, \pm(1/\pi), \pm(1/2\pi), \pm(1/3\pi), \ldots\ldots, \pm(1/k\pi) \pm \ldots$$

que, con la exclusión del cero, para cuyo valor no está definido el primer miembro, son las infinitas soluciones de la ecuación planteada, observándose la coincidencia con los valores numéricos obtenidos. La ampliación automática del gráfico y la utilización ulterior del cursor valorado para las abscisas siguientes a las halladas, hasta el límite visual de resolución de la pantalla del ordenador nos permiten comprobar la permanencia de la ley que rige la evolución de los valores de dichas abcisas, autorizándonos a concluir que estamos ante la representación física factible de una sucesión numérica de Cauchy de término general $1/k\pi$, $k = 1,2,3,\ldots$,cuyo límite es cero. Si considerásemos la función (3), $y = \text{sen}(\pi / x)$, los puntos de intersección, prescindiendo del caso $x = 0$, tendrán como abscisas, con sus respectivos signos:

$$1, \ 1/2, \ 1/3, \ 1/4, \ 1/5, \ 1/6, \ldots\ldots, 1/n, \ldots\ldots$$

términos de la serie armónica, cuyos número y suma pueden ser mayores que cualquier número imaginable por grande que éste sea; es decir, son infinitos. No es necesario advertir que esto nos sitúa ante una faceta de lo infinito (o indefinido), cuya presencia en la matemática " constituye un reto insoslayable" (2)

Una generalización de sen(1/x) = 0 es la expresión

sen [1 /sqrt(x^2+y^2)] = 0

que nos da la gráfica de la figura 6, juntamente con la bisectriz $y = x$:

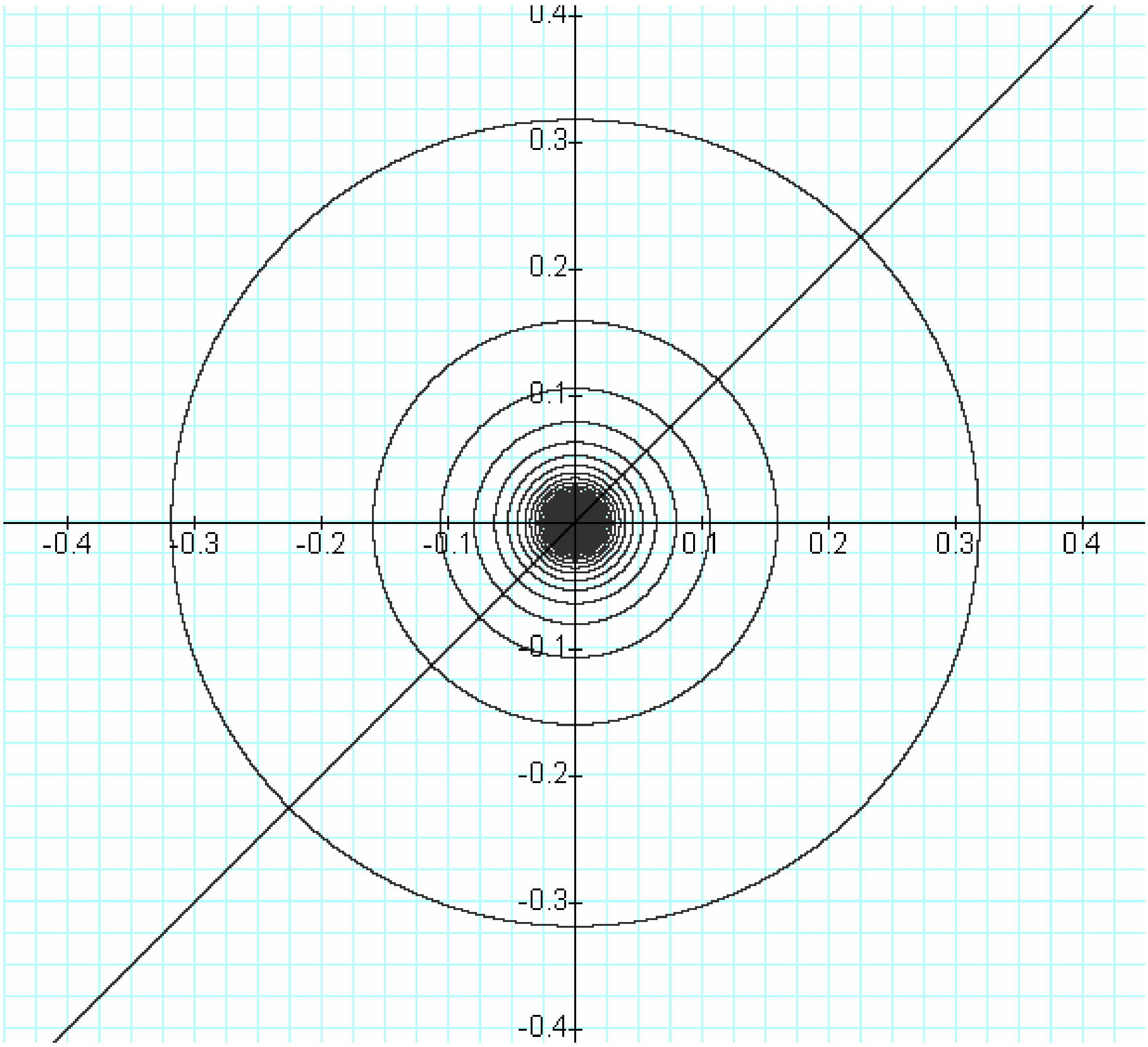


Figura 6

La apariencia geométrica a primera vista de esta figura es la de un conjunto de circunferencias concéntricas en el origen, en número no evidente, con radios decrecientes a partir del primero de ellos, cuyo valor resulta ser de 0,318309886…, es decir : $1/\pi$. Si, con ayuda de los recursos del programa, incluida la ampliación adecuada de escalas de los ejes Ox y Oy, determinamos el valor numérico de las abscisas y ordenadas de las intersecciones de las sucesivas circunferencias con dichos dos ejes, obtenemos sucesiones de valores que coinciden exactamente con la sucesión de Cauchy encontrada anteriormente al representar la expresión sen(1/x)=0 en la Figura 5, es decir, la sucesión cuyo primer término es $1/\pi$, y el n-ésimo $1/n\pi$, que tiende a cero al crecer indefinidamente n. Podemos, en consecuencia y por analogía a lo anterior, decir que estamos ante la representación físico-geométrica factible de una sucesión infinita de circunferencias cuyos radios siguen la ley: $1/k\pi$ (k=1,2,3,…..). Sucede que el programa ha solucionado la ecuación que ha producido la Figura 6. Pues tomando como antes arco-senos de los dos miembros, obtenemos:

$$1/\mathrm{sqrt}(x^2+y^2) = \text{arc sen } 0 = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \ldots\ldots\pm n\pi\ldots$$

expresión de infinitos términos por la periodicidad del seno, y de la cual, prescindiendo del cero, se deduce para cada término del segundo miembro la posibilidad de despejar “y”. Por ejemplo:

$$1/\mathrm{sqrt}(x^2 + y^2) = \pi \rightarrow 1/\pi^2 = x^2 + y^2 \rightarrow y = \mathrm{sqrt}(1/\pi^2 - x^2)$$

La ultima de estas es precisamente la ecuación de la semicircunferencia superior de la circunferencia de radio máximo, $1/\pi$, de las que componen la Figura 6. De manera idéntica se hallaría la ecuación de cualquiera otra de dichas circunferencias.

Queda así puesto de relieve el poder de expresión gráfica de la fórmula generalizada, que no debe enjuiciarse como “el seno de una función de dos variables”, sino como la anulación de una función circular, cuyo argumento no tiene necesariamente que ser un ángulo en grados o un arco en radianes, pudiendo ser, conforme a la definición analítica de las funciones circulares, simplemente un número real del intervalo $(-\infty,\infty)$. Recordemos que la región de convergencia de las series potenciales del seno y coseno es $|x| < \infty$

Con respecto al enfoque sobre puntos fijos de la figura 6, hemos de tener en cuenta que no se trata de una función, sino de un conjunto de infinitas funciones, cada una de las cuales tiene sus puntos fijos en los correspondientes cruces con la bisectriz y=x, fáciles de calcular, conocidos los radios y el ángulo, $\pi/4$, de la bisectriz.Su expresión general será por ello: $(1/n\pi)(\mathrm{sqrt}(2)/2)$, n=(1,2,3,…).

Admitiendo que en las condiciones expresadas, la fórmula generalizada representa el referido conjunto infinito de circunferencias, vamos a considerar éste como un objeto matemático ideal coherentemente definido, que designaremos por C, conjunto de puntos que cumplen:

$$C = \{(x, y) \in \Re^2 : x^2 + y^2 = \rho^2 \ , \ \rho = 1 / n\pi \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots\ldots)\}$$

Indagando las características y naturaleza de este objeto matemático, construido realizando un proceso de carácter experimental, vemos en primer lugar que las circunferencias que lo componen se obtienen a partir de la primera, de radio $1/\pi$, por una serie de transformaciones homotéticas de centro el origen, que adquiere así el claro carácter de punto asintótico, manifestado por la sucesión de los radios.

Llamemos c_n (n=1,2,3,...) a las circunferencias de radios respectivos $r=1/n\pi$ (n = 1,2,3,....). La ley de formación de los radios sucesivos será que cada r se formará multiplicando el anterior r_{n-1} por (n-1)/n, lo cual determinará que sea $r_n < r_{n-1}$, decrecimiento monótono hacia cero de acuerdo con la sucesión ya mencionada. Así pues, el conjunto infinito de las circunferencias resulta ser *numerable* y construible mentalmente mediante el producto de $1/\pi$ por el siguiente producto de factores:

$$(1/2)(2/3)(3/4)(4/5)(5/6)(6/7)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(n-1)/n\ldots\ldots = 1 / n \ ,$$

algoritmo que cuando n tiende a ∞ es un producto infinito cuyo límite es cero.

Aspecto de C digno de atención es el de que las transformaciones homotéticas que llevan desde c_1 hasta c_n, por tener el mismo centro forman grupo; (4) igualmente sucede con el resto de las transformaciones que componen C, es decir que estamos ante un grupo infinito de transformaciones homotéticas. Para comprobar el cumplimiento de las condiciones de existencia de grupo, teniendo en cuenta las razones variables de homotecia: ½, 2/3, ¾,...(n-1)/n.... que determinan cada circunferencia en función de la anterior, basta recordar que la ecuación genérica de una homotecia H centrada en el origen, de razón k es (5) :

$$H\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

Así como que la matriz inversa de la transformación es:

$$\begin{pmatrix} 1/k & 0 \\ 0 & 1/k \end{pmatrix}$$

y el elemento unidad neutral es la matriz 2x2 unidad.

Esta circunstancia permite intentar el cálculo de la suma de las longitudes de *todas* las circunferencias de la Figura que nos ocupa es la de conocer la sucesión de sus radios. La suma de los radios es :

$$1/\pi + 1/2\pi + 1/3\pi + 1/4\pi + 1/5\pi + 1/6\pi + \dots\dots\dots$$

es decir,

$$(1 / \pi)(1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 +\dots\dots\dots)$$

pero la suma del paréntesis es la suma de la serie armónica, es decir, infinito; luego también será infinito la suma de las longitudes de todas las circunferencias en cuestión, que resulta multiplicando la última expresión por 2π. Ahora bien, si pretendemos calcular la suma de las áreas de los círculos determinados por todas las circunferencias referidas, multiplicaremos la suma de los cuadrados de los términos de la expresión penúltima por π, y separando el factor común $1/\pi$, obtenemos, sumando:

$$(1/\pi)(1 + 1/4 + 1/9 + 1/ 16 + 1/ 25 +\dots\dots\dots+ 1/n^2 +\dots\dots)$$

pero, dado que la suma de la serie entre paréntesis es $(\pi^2 / 6)$ (6) , concluimos que la suma buscada de las áreas de los círculos vale $\pi/6 = 0,523598775\dots$, cantidad finita en evidente y *paradójico* contraste con la infinitud de la suma de las longitudes de las circunferencias que limitan dichos círculos, según acabamos de ver.

Intentando precisar otro aspecto de la naturaleza de la Figura 6, entendemos que ofrece marcadas características de figura fractal. Recordemos que B. Mandelbrot no ha querido dar una definición precisa del vocablo “fractal”, para que la definición dada no excluya “ciertos conjuntos que uno preferiría considerar incluídos” (7).

Señalemos pues, sin intención exhaustiva, las siguientes características de C :

1) La evidente autosemejanza (autohomotecia) de sus elementos componentes, las circunferencias c_n .

2) El proceso indefinido (infinito) de construcción de la Figura, similar al de fractales clásicos, como el conjunto ternario de Georg Cantor o la curva de Helge von Koch.

3) Invariancia ante el cambio de escala gráfica. Esta circunstancia se comprueba usando el mecanismo o proceso automático para ampliación o reducción simultánea de las escalas de los ejes Ox y Oy, que incorpora el programa “Graphing

Calculator", versión 3.2, y constatando que los radios de las circunferencias graficadas son siempre los mismos, es decir, los términos de la sucesión de los radios.

4) Representar, con similitud a lo que sucede con otros fractales, el conjunto de puntos del plano que son soluciones de una determinada ecuación. En este caso la ecuación

$$\text{sen}\,(1/\text{sqrt}(x^2 + y^2)) = 0$$

Esta ecuación viene a ser así una justificación de la existencia matemática de la Figura 6. Como dicen Peitgen, Jürgens y Saupe (8) , "desde este punto de vista, los fractales pueden considerarse como extensiones de la Geometría tradicional, de igual modo que los números irracionales pueden concebirse como extensiones de los números racionales que resuelven determinadas ecuaciones".

Referencias

(1) Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, *Taschenbuch der Mathematik",* Verlag Harri Deutsch, 2001, pág. 106, Archimedische, Hyperbolische, Logarithmische Spiralen.
(2) Miguel de Guzmán Ozámiz, *¿Matemáticas y… Estructura de la Naturaleza?,* o bien, *Entre el caos y el cosmos.*
(3) J.Rey Pastor,*Elementos de la Teoría de Funciones,* 3ª edición, Madrid-Buenos Aires, 1953, pág.67.
(4) P. Puig Adam, *Curso de Geometría Métrica,* Tomo I, Quinta edición, Madrid, 1956, página 118.
(5) M. de Guzmán, M.A.Martín, M. Morán, M. Reyes: *Estructuras Fractales y sus Aplicaciones.* Editorial Labor, S.A. Madrid, 1993, página 163.
(6) Bronstein, Semendjajew, Musiol, Mühlig, loc. cit., 7.2.4.1: Summenwerte einiger Reihen mit konstanten Gliedern, página 426.
(7) Benoît B. Mandelbrot, *La Geometría Fractal de la Naturaleza,* Tusquets Editores S.A., Barcelona, 1997, página 504.
(8) Peitgen, Jürgens, Saupe, *"Chaos and Fractals",* , Springer Verlag, 1992, página 177. New Frontiers of Science.

Sobre una particularización del método Monte-Carlo de la altura media en el Cálculo Integral

J.C. Cortés
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
jccortes@mat.upv.es

G. Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

Abstract

In this article we study a interesting particularization of a method that belongs to Monte-Carlo procedures in order to evaluate definide integrals. Several illustrative examples are included.

Introducción

En los trabajos anteriores [1]-[3] se estudiaron tres métodos tipo Monte-Carlo (M.C.) para calcular de forma aproximada la integral definida

$$I = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad \textbf{(1)}$$

El primer método, denominado M.C. geométrico, está basado en la interpretación geométrica de la integral (1) como el área bajo una curva junto con la interpretación frecuencialista de la probabilidad.

El segundo método, denominado M.C. de la altura media, está basado en la representación de (1) a través de sumas tipo Riemann y en las propiedades de la media muestral como buen estimador de la media poblacional. Como se verá más adelante, el método que estudiaremos en este trabajo está fundamentado en la aplicación del M.C. de la altura media a una representación integral adecuada de (1).

El tercer método, denominado M.C. basado en funciones de densidad, tiene cierta similitud con el que estudiaremos en este trabajo en el sentido de que está basado en una representación apropiada de (1) que requiere la introducción de una función de densidad.

El objetivo de este breve trabajo es enriquecer las aportaciones de los anteriores, estudiando una particularización interesante de [2], aunque las ideas pueden extenderse a los métodos dados en [1] y en [3]. Los fundamentos estadísticos que se requieren en el desarrollo que sigue pueden encontrarse en [1]-[3].

1 Particularizando el método Monte-Carlo de la altura media

El método se basa en aproximar (1) mediante

$$\breve{I}(N) = \frac{b-a}{N}\sum_{i=1}^{N}(f(x_i) - g(x_i)) + \int_a^b g(x)dx \qquad \textbf{(2)}$$

donde $\{x_i\}_{i=1}^{N}$ son N valores independientes (obtenidos vía simulación) de una variable aleatoria (v.a.) X uniforme en $[a,b]$: $X \propto Un([a,b])$ y $g(x)$ es una función que satisface las siguientes condiciones:

C.1. $g(x) \cong f(x) \quad , \quad \forall x \in [a,b]$.

C.2. $\int_a^b g(x)dx$ es computable analíticamente.

Es decir, la propuesta del método está fundamentada en sustituir una función $f(x)$, la cual no se sabe integrar, por otra función $g(x)$ que la aproxima bastante bien sobre el intervalo de integración (condición C.1.) y cuya integral sobre dicho intervalo sí es calculable (condición C.2.).

Aunque la expresión (2) nos pueda parecer artificial, en realidad se trata de una particularización del M.C. de la altura media aplicado a primera integral (ya que la segunda, sí sabemos calcularla según C.2.) del miembro derecho de la siguiente representación de la integral (1):

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx + \int_a^b g(x)dx\,. \quad \textbf{(3)}$$

Desde el punto de vista estadístico el método funciona porque el estimador utilizado:

$$\breve{I} = (b-a)(f(X) - g(X)) + \int_a^b g(x)dx \quad , \quad X \propto \mathrm{Un}([a,b]) \quad \textbf{(4)}$$

tiene la siguiente propiedad fundamental

$$\begin{aligned} E[\breve{I}] &= (b-a)E[f(X) - g(X)] + \int_a^b g(x)dx \\ &= (b-a)\int_a^b (f(x) - g(x))\frac{1}{b-a}dx + \int_a^b g(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx = I \end{aligned}$$

i.e., la media del estimador $\breve{I}$ dado por (4) es precisamente la integral cuyo valor deseamos calcular. En consecuencia como la media muestral es un buen estimador de la media, la expresión (2), aproximará bien a (1).

Además, obsérvese que la varianza del estimador es

$$\mathrm{Var}[\breve{I}] = (b-a)^2\,\mathrm{Var}[f(X) - g(X)]$$

y si se exige la condición C.1., se tendrá la siguiente propiedad deseable:

$$\mathrm{Var}[f(X) - g(X)] \cong 0 \Rightarrow \mathrm{Var}[\breve{I}] \cong 0$$

2 Aplicación al cálculo de integrales definidas

En este apartado se desarrollarán varios ejemplos con objeto de ilustrar cómo se lleva a la práctica el método descrito.

Ejemplo 1. Es bien sabido que la siguiente integral no es calculable aplicando la regla de Barrow al no conocerse una primitiva del integrando

$$I_1 = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Para construir la aproximación de I_1 a través del M.C. estudiado, tomaremos como aproximación $g(x)$ de $f(x) = \exp(-x^2/2)$ el desarrollo de Taylor de orden cuatro

$$e^{-\frac{x^2}{2}} \cong 1 + \left(-\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} = g(x),$$

cuya integral sí sabemos evaluar:

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{103}{120},$$

por tanto, aplicando (2) podemos tomar como estimación

$$\breve{I}_1(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{e^{-\frac{x_i^2}{2}} - \left(1 - \frac{x_i^2}{2} + \frac{x_i^4}{8}\right)\right\} + \frac{103}{120}, \ \{x_i\}_{i=1}^{N} \in X \propto \mathrm{Un}\big([0,1]\big) \ \text{indep.}$$

en la tabla 1 tomamos $N = 10$ y obtenemos

$$\breve{I}_1(10) = \frac{-0.05424126821}{10} + \frac{103}{120} = 0.8529092065$$

este valor puede compararse con el que obtiene Derive® al aproximar I_1 por el método determinista de los trapecios: $I_1 \cong 0.8556243918$.

Del mismo modo que hicimos en [1]-[2], podemos programar con Derive® el cálculo de esta integral (y fácilmente generalizar el proceso) para cualquier N. A continuación damos la rutina básica particularizada para $N = 1000$. Obsérvese que las líneas 4 y 5 pretenden mejorar el resultado promediando las aproximaciones finales:

```
#1:G(x):=TAYLOR(ê^(-x^2/2),x,0,4)
#2:Y(n):=ê^(-0.5(ABS(RANDOM_VECTOR(1,1))n/n)^2)-
G(RANDOM_VECTOR(1,1))n/n
#3:(1/1000)*SUM(Y(n),n,1,1000)+INT(G(x),x,0,1)
#4:Z(m):=((1/1000)*SUM(Y(n),n,1,1000)+INT(G(x),x,0,1)*
m)/m
#5:SUM(Z(m)/10,m,1,10)
```

que proporciona la aproximación: 0.8502267137 .

Simulación	r_i	$v_i = \exp\left(-x_i^2/2\right)-\left(1-x_i^2/2+x_i^4/8\right)$
1	0.5744827687	-0.00071899224
2	0.9085190132	-0.01060008712
3	0.8353277490	-0.00650118301
4	0.7978474231	-0.00497200270
5	0.9243058653	-0.01171451458
6	0.9700232673	-0.01549266878
7	0.2206409413	- 2.389117408·10^(-6)
8	0.6458383624	-0.00143617860
9	0.7176009900	-0.00267075471
10	0.4321013710	-0.00013249736
		$\sum_{i=1}^{10} v_i$ = -0.05424126821

Tabla 1. Cálculos basados en la simulación para el ejemplo 1.

Ejemplo 2. Aproximemos ahora la integral

$$I_2 = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

cuyo valor exacto sí conocemos: $I_2 = 0.5\left(\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right) \cong 1.147$. Como aproximación $g(x)$ de $f(x)=\sqrt{1+x^2}$ tomaremos el desarrollo de Taylor de orden dos

$$\sqrt{1+x^2} \cong 1+\frac{1}{2}x^2 = g(x) \quad , \quad |x|<1 ,$$

cuya integral es:

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{7}{6} ,$$

como antes, por (2) la estimación del método es

$$\breve{I}_2(N) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left\{\sqrt{1+x_i^2} - \left(1+\frac{x_i^2}{2}\right)\right\} + \frac{7}{6} \quad , \quad \{x_i\}_{i=1}^{N} \in X \propto \mathrm{Un}([0,1]) \text{ indep.}$$

Ahora la aproximación la realizamos con Derive® obteniéndose

$$\breve{I}_2(1000) = 1.160095501$$

a partir de la siguiente rutina:

```
#1:G(x):=TAYLOR(SQRT(1+x^2),x,0,2)
#2:Y(n):=sqrt(1+(ABS(RANDOM_VECTOR(1,1))n/n)^2)-
G(RANDOM_VECTOR(1,1))n/n
#3:(1/1000)*SUM(Y(n),n,1,1000)+INT(G(x),x,0,1)
#4:Z(m):=((1/1000)*SUM(Y(n),n,1,1000)+INT(G(x),x,0,1)*
m)/m
#5:SUM(Z(m)/10,m,1,10)
```

El resultado se mejora aumentando el orden de la aproximación de Taylor, aunque el tiempo de cálculo es notablemente superior.

Bibliografía

[1] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Sobre el método Monte-Carlo geométrico en el Cálculo Integral*. Bol. Puig Adam nº 66 (2004), 63-73.

[2] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Sobre el método Monte-Carlo de la altura media en el Cálculo Integral en varias dimensiones*. Bol. Puig Adam nº 69 (2005), 69-81.

[3] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Sobre el método Monte-Carlo basado en funciones de densidad*. Bol. Puig Adam nº 72 (2006), 39-53.

Acerca de las matrices de Hamburgo (Peters, Jammeram y Argelander)

Jesús Pablo Martín Hernández
Centro particular de estudios teóricos Escalona 33. Madrid 28024
Martinpablo@auna.com

Abstract

In this work have integrated the Hamburg matrix with the structure of linear space and the number theory. As a consequence we can present a method based on the algebraic geometry to resolve certain type of cubic equations.

Introducción

La matemática lejos de ser una disciplina unitaria y autocontenida tiene aplicaciones en las ramas del saber más dispares. Estas aplicaciones pasan por la biología, la ingeniería, la Física, la Química, la psicología etc. Sin olvidar la medicina.

En este artículo mostramos la relación que existe entre la matemática y ciertos test psicológicos de instrucción, concretamente, los test de atención que se pasan a los escolares con edades comprendidas entre 8 y 10 años.

Si bien la parte de la matemática que más se utiliza en psicología es la estadística, en el test de atención de Peters, Jammeram y Argelander se descubre una inusitada relación entre dos ramas de la matemática bien diferenciadas, de una parte la estructura de espacio lineal, y de otra, la disciplina reina de las matemáticas: la teoría de números.

El test de atención para escolares más antiguo es el test de Bourdon. En él se presenta un texto al alumno de forma que éste tiene que tachar una serie de letras fijadas de antemano. Después está el test de Hamburgo que pasamos a describir.

Se dispone de una colección de símbolos colocados unos tras otros formando una secuencia que se repite. Cada grupo que se repite se dispone en un conjunto de filas de una determinada longitud. La longitud de la fila puede ser mayor o menor que la longitud de la estructura que se repite. Se trata de que el alumno coloque la secuencia en las filas hasta donde sea posible.

Esta tarea, que puede resultar trivial para una persona adulta, no es ni mucho menos tal cosa para un escolar.

Seguidamente mostramos un ejemplo para una longitud de la secuencia de p=4 y una longitud para cada fila de “n=7” (número de columnas de la matriz)

$$\begin{pmatrix} A & B & X & C & A & B & X \\ C & A & B & X & C & A & B \\ X & C & A & B & X & C & A \\ B & X & C & A & B & X & C \end{pmatrix}$$

Designamos este tipo de matrices con el nombre de matrices de Hamburgo.

1. Algunas propiedades de las matrices de Hamburgo

1.1 El periodo característico de una matriz de Hamburgo

En toda construcción de esas características llega un momento en el cual la secuencia que se repite vuelve a adoptar la posición inicial. El número de filas transcurridas hasta que eso ocurre constituye el periodo característico de la matriz.

En el ejemplo anterior, T=4 y la relación que proporciona el periodo en función de los parámetros “p” y “n” (respectivamente longitud de la secuencia y número de filas) viene a ser:

$$T=m.cm(p,n)/n$$

Notemos que si “p” y “n” son primos entre sí ,entonces el periodo característico es T=p.

Esta expresión para el periodo puede mirarse, fijado el valor de “p”, como una aplicación del conjunto IN de los números naturales en un subconjunto de IN mo-dificando la variable natural, es decir, modificando el número de columnas.

Aparece entonces una función periódica cuyo periodo no debe confundirse con el característico ya que el periodo de estas funciones es idéntico al parámetro “p”.

La primera de estas funciones, la más simple, la designamos f(2,n) es del tipo: F(2,n):IN→{1,2} corresponde a una secuencia que se repite de longitud dos. Y viene dada explícitamente por:

$$f(2,n)=\begin{cases} 1, si, n, es, par \\ 2, si, n, es, impar \end{cases}$$

En el grafo de esta función puede apreciarse cláramente el periodo(el periodo caracteristico oscila entre los valores de uno y dos)

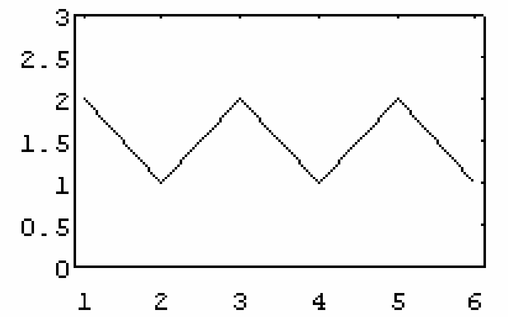


Figura 1ª: Representación f(2,n)

A medida que el parámetro “p” va creciendo se van obteniendo funciones periódicas cada vez más complejas. Notemos que todas estas funciones están acotadas superior e inferiormente. Para p=3 tenemos una función del tipo:

$$f(3,n)=\begin{cases} 1, si, n\in \{3m\}_{m=1,2,3...} \\ 3, si, n\notin \{3m\}_{m=1,2,3} \end{cases}$$

F(3,n) está acotada ,también lo está f(4,n) solamente que ahora esta última función tiene el aspecto: (En general f(p,n) está acotada superiormente por el parámetro “p”)

$$f(4,n)=\begin{cases} 1, si, n\in \{4m\}_{m=1,2....} \\ 2, si, n\in \{2+4m\}_{m=0,1,2..} \\ 4, si, n\in \{1+2m\}_{m=0,1,2....} \end{cases}$$

Seguidamente mostramos los grafos de f(3,n) y f(4,n) en los dos casos se trata de funciones del tipo: f(3,n):IN→{1,3} y f(4,n):IN→{1,2,4}.

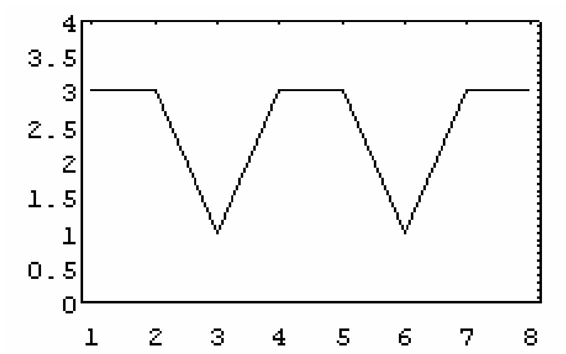


Figura 2ª: Representación de f(3,n)

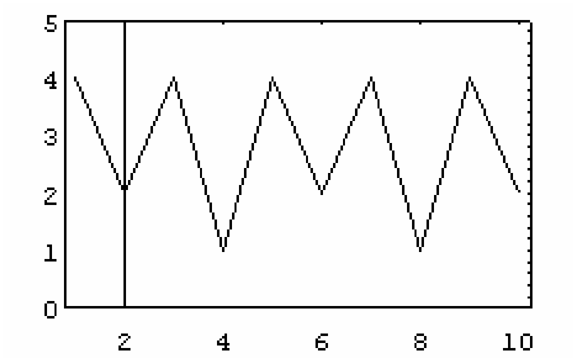


Figura 3ª: Representación de f(4,n)

1.2 Propiedad de invariancia de la suma de las columnas

Para una matriz de Hamburgo de clase (p,n) si estos números son primos entre sí entonces los elementos de cada columna suman una cantidad invariante en el supuesto de una matriz con coeficientes en el cuerpo de los números reales.

Esta propiedad se observa a simple vista y es mucho más difícil demostrarla que ponerla de manifiesto. Por ejemplo, para una (3,4) el invariante es "a+b+c".

$$\begin{pmatrix} a & b & c & a \\ b & c & a & b \\ c & a & b & c \end{pmatrix}$$

La idea estriba en que las columnas de la matriz son una selección de permutaciones ordinarias de esos elementos y todas las permutaciones suman lo mismo.

1.3 La estructura de espacio lineal que subyace

El conjunto de las matrices de Hamburgo de clase (p,n) que designamos H(p,n) guarda las operaciones lineales. La suma de dos matrices de la misma clase vuelve a ser otra matriz de la misma clase y lo mismo ocurre para multiplicación por escalares. De esta forma el conjunto {H(p,n),+,×} tiene estructura de subespacio lineal del conjunto de las matrices de orden Txn.

Consideremos un elemento de H(p,n) y consideramos el conjunto de los símbolos de la secuencia que se repite y ponemos nuestra atención en la matriz que resulta de sustituir un símbolo por la unidad, y el resto igualamoslos a cero. Si se procede de forma análoga para cada símbolo se obtiene un sistema de generadores para el subespacio H(p,n). Consideremos a modo de ejemplo una Hamburgo de clase (3,4). La matriz general toma la forma:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & A \\ B & C & A & B \\ C & A & B & C \end{pmatrix}$$

Debemos notar que esa matriz está en la envolvente lineal de un conjunto de matrices que constituyen una base para el mencionado subespacio.

$$H(3,4) = L\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Se puede demostrar que ese sistema de generadores es a su vez un sistema libre,es decir, linealmente independiente con lo cual es una base para el subespacio y además tenemos el resultado general:

$$\dim_{IR}\{H(p,n);+;\times\} = p$$

1.4 Un enunciado de imposibilidad

No existen matrices de Hamburgo cuadradas salvo el caso trivial de p=n=1. La demostración se raliza por el método de reducción al absurdo. La prueba es análoga a la que se realiza para demostrar que raíz de dos es irracional.

Si la matriz es cuadrada, entonces se cumple la relación:

$$T = n \to m.c.m(p,n) = n^2$$

Sea entonces d=m.c.m(p,n), entonces existen números p´y n´que satisfacen la relación p=dp´ n=dn´ con m.c.d(p´n´)=1(primos entre sí). De otra parte se sabe que m.c.m(p,n)×m.c.d(p,n)=pn, por consiguiente se cumple que:

$$n^2 \times d = pn \to dn = p \to p' = dn' (d \neq 1)$$

Se llega al resultado absurdo de que un número es múltiplo del otro y simultáneamente son primos entre sí.

2. La relación entre la estructura lineal y la teoría de números

2.1 El rango de una matriz de Hamburgo de clase (3,2)

Consideramos una Hamburgo de clase ya indicada en el epígrafe. El rango de la matriz tiene una interpretación en términos lineales, el rango es la dimensión del espacio lineal que generan los vectores columna. Así es:

$$Rang\begin{pmatrix} x & y \\ z & x \\ y & z \end{pmatrix} = \dim_{IR} L\left\{\begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}\right\}$$

Los vectores son linealmente dependientes (sistema ligado) si los números x,y,z satisfacen un sistema no lineal de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$x^2 = yz, y^2 = xz; z^2 = xy$$

Sumando miembro a miembro se encuentra una ecuación que puede resolverse para "z" por ejemplo. Se trata de una ecuación de segundo grado dada por:

$$z^2 - z(x+y) + x^2 + y^2 - xy = 0$$

La solución para esta ecuación conduce al hecho de que para que z sea real se precisa que el discriminante sea igual o mayor que cero y eso únicamente acontece para la solución trivial x=y=z = parámetro arbitrario:

$$z = \frac{x + y \pm \sqrt{(x+y)^2 + 4xy - 4x^2 - 4y^2}}{2}$$

Existe otro punto de vista geométrico de tratar el problema. La solución puede mirarse como la intersección de dos superficies. Para cada valor del parámetro λ tenemos un punto de tangencia entre las superficies. Se trata por tanto de la intersección entre una familia de superficies.

$$\{x^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2\} \bigcap \left\{ z = \frac{\lambda^2 - xy}{x + y} \right\}$$

Para el valor del parámetro igual a la unidad es x=y=z= inverso de la raíz cuadrada de tres.

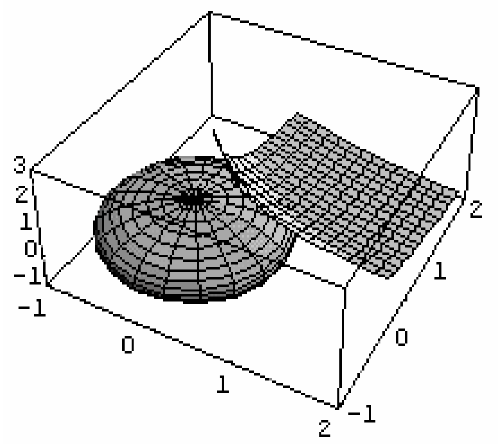


Figura 4ª: Intersección con λ=1

2.2 El rango de una matriz de Hamburgo de clase (3,4)

Consideramos una Hamburgo de clase como en el encabezamiento. El rango de la matriz es a lo sumo tres y es inferior a tres si los números x,y,z verifican una determinada ecuación cúbica.

Se trata de una ecuación de tercer grado con tres incógnitas que admite la solución trivial que se observa a simple vista x=y=z (rango unidad).

El propósito de esta sección reside en comprobar que existen soluciones distintas a la trivial. Para ello es oportuno citar a A.O. Guelfond y su libro sobre teoría de números. En él se apunta que para ecuaciones en números enteros con dos incógnitas siempre es posible responder a la pregunta sobre la existencia de una cantidad finita o infinita de soluciones. En cambio, para ecuaciones con más incógnitas (como es nuestro caso) y de grado superior al segundo solamente se puede responder a la pregunta en casos muy particulares. La parte original de nuestro artículo reside en la exposición de un método que sí permite hallar soluciones a una gamma suficientemente extensa de ecuaciones cúbicas.

Puesto que la ecuación cúbica representa geométricamente una superficie en el espacio, el contexto del problema que se trata puede clasificarse en la rama de la matemática conocida como geometría algebraica. Y como además se utiliza un microordenador para determinar las soluciones, el mencionado contexto se enmarca en la geometría algebraica computacional.

$$Rang\begin{pmatrix} x & y & z & x \\ y & z & x & y \\ z & x & y & z \end{pmatrix} < 3 \rightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$$

En general investigamos soluciones en el campo de los números reales y se procede inicialmente considerando valores no nulos de las variables con lo cual se tiene:

$$\frac{x^2}{yz} = a; \frac{y^2}{xz} = b; \frac{z^2}{xy} = c$$

Se tiene entonces la ecuación del plano a+b+c=3 en el espacio$\{$(a,b,c)$\}$. Se procede hallando una de las ecuaciones paramétricas. Una de ellas puede ser:

$$(a,b,c) = (3,0,0) + \lambda(0,-3,3) + \mu(-3,0,3)$$

Entonces las ecuaciones paramétricas de nuestra superficie se escriben en función de los dos parámetros en la forma:

$$\frac{x^2}{yz} = 3 - 3\mu; \frac{y^2}{xz} = -3\lambda; \frac{z^2}{xy} = 3(\lambda + \mu)$$

La técnica algebraica que se utiliza consiste en efectuar un corte de la superficie por un plano Z=Zo constante, para proseguir resolviendo el sistema que tiene por solución general una curva intersección de la superficie con el plano. Finalmente se pegan de forma continua todas las curvas para obtener el acabado final constituido por la superficie solución de la cúbica.

Dado que el método es laborioso se comprende la necesidad de utilizar un ordenador para realizar el cometido que nos hemos propuesto.

2.2.1 Solución trivial con base en el primer cuadrante

Las ecuaciones anteriores pueden contemplarse como las ecuaciones de tres cónicas, dos parábolas y una hipérbola con sus respectivos grafos en el primer cuadrante para ciertos valores de los parámetros:

$$y = \frac{x^2}{3z_0(1-\mu)}; \mu < 1$$

Representa la ecuación de una parábola hacia arriba en el plano XY con su eje coincidiendo con la parte positiva del eje de ordenadas. De otra parte tenemos:

$$y = \sqrt{3z_0 x|\lambda|}; \lambda < 0$$

Esa ecuación representa una parábola con su grafo en el primer cuadrante y con su eje coincidiendo con la parte positiva del eje de abscisas.

Finalmente tenemos la ecuación de un hipérbola con su grafo en los cuadrantes uno y tres que viene dada por:

$$y = \frac{z_0^2}{3(\mu - |\lambda|)x}; \mu > |\lambda|$$

En este primer caso se define un recinto en el plano $\{(|\lambda|,\mu)\}$ donde los parámetros pueden tomar valores, es decir, los valores permitidos para los parámetros que en este caso son los pertenecientes al conjunto $R=\{(|\lambda|,\mu)/\mu<1,,\mu>|\lambda|\}$

Se prosigue utilizando el método de igualación, primera cónica igual a la segunda cónica igual a la tercera. Si asi se procede se encuentran los siguientes valores para la variable x:

$$x = 3z_0\sqrt[3]{|\lambda|(1-\mu)^2}; x = z_0 / 3\sqrt[3]{(\mu - |\lambda|)^2|\lambda|}$$

De esta igualdad surge una nueva ecuación que relaciona los parámetros.Esa ecuacón puede resolverse para el parámetro μ como función del parámetro $|\lambda|$ resultando una solución correspondiente a una ecuación de segundo grado siendo el parámetro μ la indeterminada.

$$(1-\mu)(\mu-|\lambda|)=1/(27|\lambda|)\rightarrow\mu(\lambda)=\frac{1+|\lambda|\pm\sqrt{(1-|\lambda|)^2-4/(27|\lambda|)}}{2}$$

Con ayuda de un programa como mathemática podemos representar el discriminante de esa ecuación y determinar el dominio de definición de la función μ(λ).

Esencialmente el discriminante presenta dos raíces 1/3 y 4/3 de tal forma que el dominio de definición es D={|λ|=1/3,o,|λ|≥4/3}

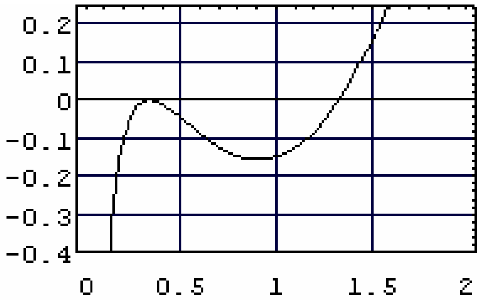


Figura 5ª: Discriminante en función de |λ|. Raíces 1/3 y 4/3

Escribimos la función μ(λ) en una forma mucho más fácil de manejar para nuestros propósitos, en la forma:

$$\mu(\lambda)=\left(1+|\lambda|\pm f(\lambda)\right)/2$$

Ahora desarrollamos un razonamiento algebraico que conduce a la conclusión de que únicamente existe solución trivial con base en el primer cuadrante.

Sea μ<1. Entonces la expresión que va con el signo mas es: (1+|λ|+*f*(λ))/2<1 que implica que |λ|+*f*(λ)<1 desigualdad que se cumple si |λ|=1/3 pero deja de cumplirse si |λ|>4/3. De otra parte la expresión que va con el signo menos es (1+|λ|−*f*(λ))/2<1 que implica que |λ|<1+*f*(λ) que se cumple si el módulo de lambda es igual a 1/3 pero deja de cumplirse para la segunda condición, efectivamente si |λ|>4/3 entonces los dos miembros de la siguiente igualdad son positivos. |λ|−1<*f*(λ) entonces debería conservarse la desigualdad al elevar al cuadrado, esto es:

$$(|\lambda|-1)^2 < f(\lambda)^2 \rightarrow (|\lambda|-1)^2 < (|\lambda|-1)^2 - 4(27|\lambda|)$$

Desigualdad que resulta imposible.

Sea $\mu>|\lambda|$ entonces tenemos la desigualdad $(1+|\lambda|\pm f(\lambda))>2|\lambda|\rightarrow 1\pm f(\lambda)>|\lambda|$la expresión que va con el signo más se cumple si el valor del parámetro es 1/3 pero deja de cumplirse si la magnitud del parámetro supera los 4/3 dado que se halla la misma desigualdad absurda que en el apartado anterior. Finalmente la expresión que va con menos se cumple igualmente si $|\lambda|=1/3$ pero deja de cumplirse en el otro caso pues al ser $f(\lambda)$ positiva y $|\lambda|>4/3$ la suma $|\lambda|+f(\lambda)$ nunca podrá se inferior a la unidad.

Resumiendo, los parámetros únicamente pueden tomar valores discretos, $|\lambda|=1/3$ y $\mu=2/3$ por lo tanto se genera un objeto de dimensión uno en el espacio, es decir, la recta correspondiente a la solución trivial.

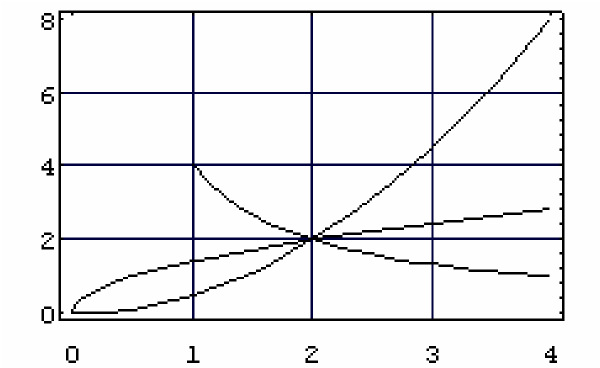


Figura 6ª: Representación Zo=1

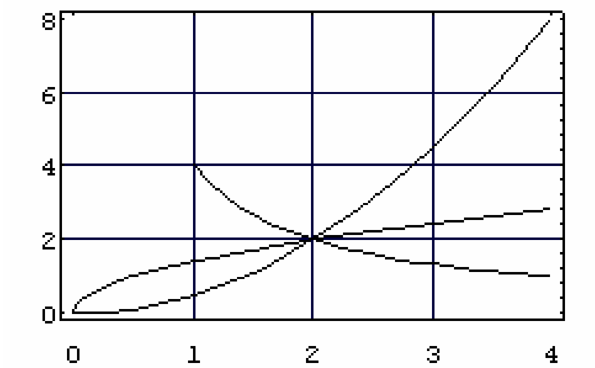


Figura 7ª: Representación Zo=2

2.2.2 Existencia de soluciones no triviales con base en el segundo cuadrante.

Para estudiar este caso consideramos tres cónicas con sus respectivos grafos en el segundo cuadrante, así en primer lugar tenemos:

$$y = \frac{x^2}{3z_0(1-\mu)}; \mu < 1$$

Esta cónica es idéntica a la considerada en la sección 2.2.1. De otra parte cambia la cónica siguiente que ahora es una parábola con su grafo en el segundo cuadrante y su eje coincide con la parte negativa del eje de abcisas.

$$y = \sqrt{-3\lambda z_0 x}; \lambda > 0; x \leq 0$$

Finalmente tenemos una hipérbola con su grafo en los cuadrantes 2 y 4 y viene dada por:

$$y = \frac{z_0^2}{3(\lambda + \mu)x}; \mu < -\lambda$$

Ahora el recinto donde pueden tomar valores los parámetros viene dado simplemente por R={(λ,μ)/μ<–λ} donde esta condición contiene la primera que aparece en la primera cónica.

Procediendo por el método de igualación, de la igualdad entre la primera y segunda cónica, y de la igualdad de la segunda a la tercera se hallan los siguientes valores de x.

$$x = -3z_0 \sqrt[3]{\lambda(1-\mu)^2}; x = -z_0 / 3\sqrt[3]{\lambda(\lambda+\mu)^2}$$

De aquí se desprende la ecuación que liga los parámetros y también la función que expresa el parámetro mú como función del parámetro lambda. Esta función es en esta ocasión distinta a la hallada en el apartado 2.2.1 y está definida para todo valor del parámetro mayor o igual que cero.

$$(1-\mu)(\lambda+\mu) = -1/27\lambda \rightarrow \mu(\lambda) = \left(1 - \lambda \pm \sqrt{(1+\lambda)^2 + 4/(27\lambda)}\right)/2$$

Se comprueba trivialmente que la solución válida es la que va con el signo menos. Ahora podemos determinar las ecuaciones paramétricas de nuestra superficie con base en el segundo cuadrante. Se observa que al existir una dependencia funcional entre los parámetros (ahora ya no toman valores discretos sino continuos)se genera un objeto de dimensión dos en el espacio.

$$x=-3z_0\sqrt[3]{\lambda(1-\mu(\lambda))^2};y=3z_0\sqrt{\lambda\sqrt[3]{\lambda(1-\mu(\lambda))^2}};z=z_0$$

De donde a través del programa Mathematica se comprueba que efectivamente existen soluciones para un rango de la matriz de Hamburgo inicial igual a dos.

Seguidamente mostramos el programa que conduce a la solución:

```
F[t_]=Sqrt[(1+t)^2+4/(27t)]
G[t_]=(1-t-F[t])/2
H[t_]=t(1-G[t])^2
ParametricPlot3D[{-3 z H[t]^(1/3), 3 z Sqrt[t H[t]^(1/3)],z},{t,10^(-6),1},{z,0,2}]
```

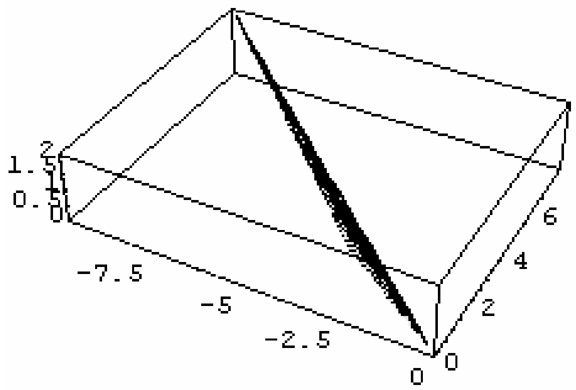


Figura 8ª Solución no trivial con base en el segundo cuadrante

2.2.3 Existencia de soluciones no triviales con base en el tercer cuadrante.

Ahora la primera cónica difiere de las presentadas en los casos anteriores pues tiene su grafo en los cuadrantes 3 y 4. Se trata de una parábola invertida con su eje dado por la parte negativa del eje de ordenadas.

$$y=\frac{x^2}{3(1-\mu)z_0};\mu>1$$

La segunda cónica es de nuevo una parábola con su eje coincidiendo con la parte negativa del eje de abcisas.

$$y = -\sqrt{-3\lambda z_0 x}; \lambda > 0; x < 0$$

La tercera cónica es una hipérbola con su grafo en los cuadrantes uno y tres y viene dada por:

$$y = \frac{z_0^2}{3(\lambda + \mu)x}; \lambda + \mu > 0$$

Ahora el recinto donde toman valores los parámetros viene dado sencillamente por la condición "μ>1".y el resultado de proceder vía el método de igualación produce los siguientes valores de x:

$$x = -3z_0\sqrt[3]{\lambda(1-\mu)^2}; x = -z_0 / 3\sqrt[3]{\lambda(\lambda+\mu)^2}$$

De la igualdad de esos valores de "x" se desprende una ecuación que satisfacen los parámetros y que producen la función buscada de μ(λ).

$$27\lambda(\mu - 1)(\lambda + \mu) = 1 \rightarrow \mu(\lambda) = \left(1 - \lambda \pm \sqrt{(1+\lambda)^2 + 4/(27\lambda)}\right)/2$$

Se comprueba que la solución válida ahora, en contrapartida al caso anterior, es la que va con el signo más, de donde sin más las ecuaciones paramétricas de la solución con base en el tercer cuadrante son:

$$x(\lambda) = -3z_0\sqrt[3]{\lambda(1-\mu(\lambda))^2}; y(\lambda) = -3z_0\sqrt{\lambda\sqrt[3]{\lambda(1-\mu(\lambda))^2}}; z = z_0$$

Ahora las instrucciones en Mathematica difieren apreciablemente del caso anterior aunque el discriminante sea el mismo, cambia el signo de la función f[t].

```
F[t_]=Sqrt[(1+t)^2+4/(27t)]
G[t_]=(1-t+F[t])/2
H[t_]=t(1-G[t])^2
ParametricPlot3D[{-3z t]^(1/3),-3z Sqrt[ t H[t]^(1/3)],z},{t,10^(-6),1},{z,0,10}]
```

Como siempre el techo de la superficie tiene su base en algún cuadrante y en este caso es en el tercero. Es muy importante utilizar la instrucción del punto de vista que incorpora Mathematica para poder observar la solución con distintas perspectivas. Puede hallarse una visión más exacta de la solución modificando los valores de los parámetro que en las instrucciones anteriores con t y z.

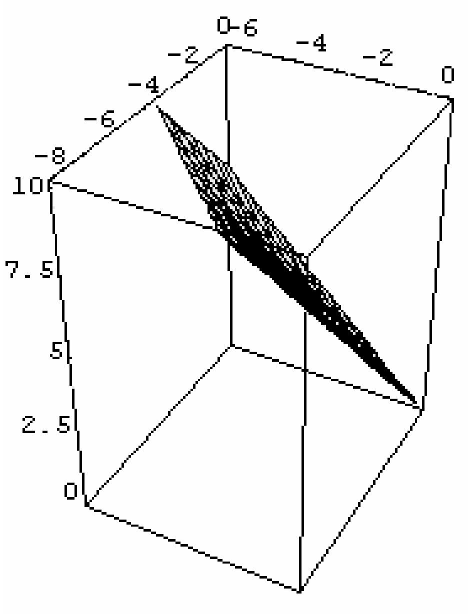


Figura 9ª: Solución no trivial con base en el tercer cuadrante.

2.2.4 Existencia de soluciones no triviales con base en el cuarto cuadrante

La primera cónica es una parábola invertida con su grafo en el semiplano y<0.

$$y = \frac{x^2}{3z_0(1-\mu)}; \mu > 1$$

La segunda cónica es otra parábola con su grafo en el cuarto cuadrante con su eje coincidiendo con la parte positiva del eje de abcisas (la orientación de la parábola).

$$y = -\sqrt{3z_0x|\lambda|}; x > 0, \lambda < 0$$

La última cónica es una hipérbola (como siempre) con su grafo en los cuadrantes dos y cuatro.

$$y = z_0^2 / 3(\mu - |\lambda|)x; \mu < |\lambda|$$

El recinto donde toman los valores los parámetros es en este caso el más complejo de todos los tratados hasta ahora, es:R={(|λ|,μ)/μ>1,μ<|λ|}. Como es costumbre se procede por el método de igualación hallándose los siguientes valores para la coordenada x.

$$x = 3z_0\sqrt[3]{(1-\mu)^2|\lambda|};x = z_0/3\sqrt[3]{|\lambda|(\mu-|\lambda|)^2}$$

Igualando esas cantidades se tiene la ecuación que satisfacen los parámetros:

$$(\mu-1)(|\lambda|-\mu) = 1/(27|\lambda|) \rightarrow \mu(\lambda) = \left(1+|\lambda| \pm \sqrt{(1-|\lambda|)^2 - 4/(27|\lambda|)}\right)/2$$

Lo importante ahora es que son válidas ambas soluciones, tanto la que va con el signo mas como con el signo menos. Consecuencia de ello es que la superficie solución a la cúbica tiene dos hojas, una para cada signo.

De esta forma las ecuaciones paramétricas tienen una doble lectura:

$$x(\lambda) = 3z_0\sqrt[3]{|\lambda|(1-\mu_\pm(\lambda)))^2};y(\lambda) = -3z_0\sqrt{|\lambda|\sqrt[3]{|\lambda|(1-\mu_\pm(\lambda))^2}};z(\lambda) = z_0$$

No vamos a escribir todas las instrucciones de Mathematica porque se siguen fácilmente de las ya mencionadas en el texto, nos limitaremos a presentar las dos soluciones para la cúbica con base en el cuarto cuadrante.

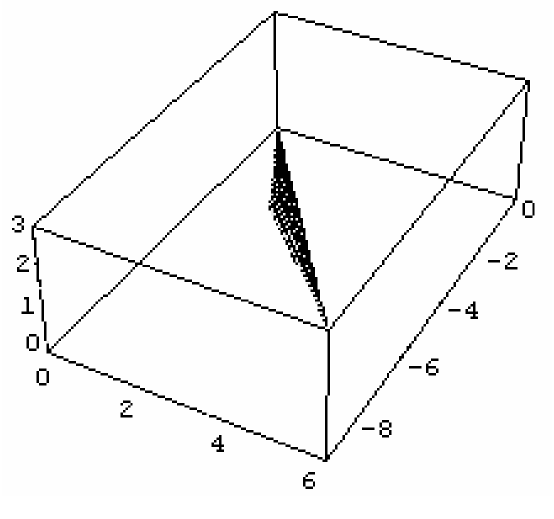


Figura 10ª.Hoja que va con"+"

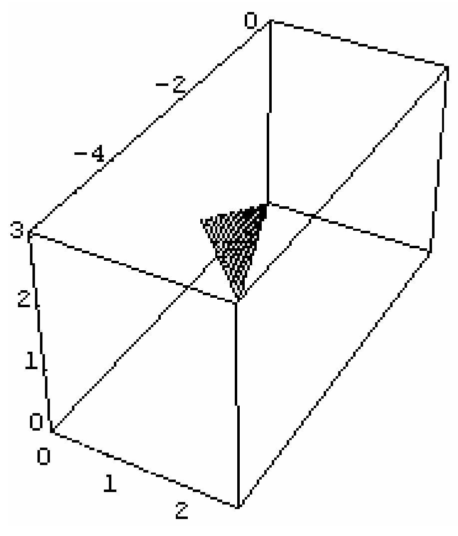


Figura 11ª.Hoja que va con"-"

Conclusiones

Para finalizar decir que queda por demostrar lo que en principio se introdujo a modo de conjetura: el periodo característico de una matriz de Hamburgo.

En lo referente a la existencia de soluciones no triviales se puede decir que en el primer cuadrante únicamente hay solución trivial porque los parámetros únicamente pueden tomar valores discretos de tal forma que se genera un objeto de dimensión uno en el espacio. Por el contrario, si uno de los parámetros es una función continua del otro como ocurre en los cuadrantes 2,3 y 4 se genera un objeto de dimensión dos en el espacio.

Hay que decir que el método utilizado es potente, versátil y ambivalente debido a que a través de él puede abordarse el problema general:

$$\alpha x^3 + \beta y^3 + \gamma z^3 + \delta xyz = 0$$

Para terminar nada mejor que mostrar en breves palabras la esencia del método seguido. Así la ecuación general de una superficie se escribe en la forma f(x,y,z)=0. Se corta la superficie por un plano constante Z=Zo y se resuelven las ecuaciones del tipo f(x,y,zo)=0 que son curvas para cada valor de la altura de corte.Después se pegan de forma continua todas esas curvas para obtener el resultado final de la superficie.

Referencias

[1] Ricardo Aguado Muñoz y Salvador Francisco Cotillas. ; matemáticas para un curso de orientación universitaria.E/El ordenador amigo. Rango de una matriz en pag 70 cap. 3

[2] Máximo Anzola, José Caruncho y Pérez Canales. Problemas de algebra.Anillos, polinomios, y ecuaciones diofánticas. Pág 181-200. Ecuaciones algebraicas pag279-350.

[3] A.Doneddu.Complementos de geometría algebraica. Colección ciencia-Tecnología de Aguilar.cap9 cónicas en geometría afin y cuclideana.

[4] Victor García Hoz. Manual de test para la escuela. Instituto José de Calasanz de pedagogía del CSIC.

[5] A.O. Guelfond. Resolución de ecuaciones en números enteros. E/mir (Moscú)

[6] César Pérez Cálculo simbólico y numérico con Mathematica. E/Rama.

La Matemática española ante Einstein y la Relatividad, 1905-1923

Francisco A. González Redondo
Dpto. Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@edu.ucm.es

Abstract

In this paper the reception of Einstein's Theories of Relativity in Spain is analyzed, from its 1905 seminal articles to his 1923 visit. From Spanish academic point of view, it was Mathematics and mathematicians (not Physics nor physicists) who should take care of Einstein and his contributions… although reality was not that clear at last. In order to clarify these ideas, the significant role played by Blas Cabrera and José Mª Plans is remarked.

1. Introducción

La "confirmación", en noviembre de 1919, de que los rayos de luz cambian de dirección en presencia de campos gravitaciones (una de las "predicciones" de la Relatividad General presentada en 1915), convirtió a Albert Einstein en la figura más importante de la Ciencia mundial en las primeras décadas del siglo XX… y la más reclamada y aclamada desde entonces en todos los países occidentales.

En España, el ámbito de las relaciones científicas con el extranjero no pertenecía, en líneas generales, a las Universidades, sino a dos instituciones más jóvenes y dinámicas, cuyas actividades las llevaban a cabo universitarios… al margen de la Universidad: la *Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas* (radicada en Madrid y dependiente del Ministerio de Instrucción Pública) y el *Institut d'Estudis Catalans* (creado desde la Diputación de Barcelona). De ellas llegará en abril de 1920 la primera iniciativa para que Einstein visitase nuestro país y, en ambos casos y conjuntamente para las dos entidades, el primer interlocutor será Julio Rey Pastor.

Por la índole de sus ocupaciones científicas (Geometría y Análisis) el Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Central no había prestado especial interés por las teorías de la Relatividad. Sin embargo, desde Leipzig, durante su estancia en Alemania en "delegación de la *Junta*" acordada el 29 de enero de ese año[1], el matemático riojano escribía al "Estimado profesor" Einstein el 22 de abril[2]:

> *Como le informé durante mi visita, he comunicado al Institut d'Estudis Catalans y a la Junta para Ampliación de Estudios en Madrid (las dos instituciones más importantes para la alta cultura y la investigación científica en España) que no es imposible que si se le invita usted pueda hacernos el honor de visitarnos.*

Las invitaciones más concretas las realizarán Santiago Ramón y Cajal, en tanto que Presidente de la *Junta*, el 6 de julio de 1920, y Esteban Terradas Illa, Catedrático de Acústica y Óptica de la Universidad de Barcelona y responsable de la Sección de Ciencias Físico-Matemáticas del *Institut*, el 1 de marzo de 1921. Sin embargo, la cada vez más apretada agenda del sabio alemán le impediría aceptar ambas invitaciones hasta febrero de 1923. De hecho, Julio Rey Pastor, a los efectos de la visita de Einstein, no existió. Era nuestro matemático más brillante; el más internacional; sabía alemán… pero estaba físicamente en Argentina en aquellos momentos.

Por otro lado, teniendo en cuenta la disciplina académica que daba nombre a su Cátedra en Madrid ("Física Matemática"), el científico que debía haber jugado el papel principal en la recepción en España de la Relatividad de Einstein y al propio sabio alemán era Pedro Carrasco Garrorena. De hecho, en 1914 ya había impartido un Curso en el Ateneo de Madrid de título "La Teoría de la Relatividad", pero sus investigaciones y trabajos publicados, esencialmente sobre cuestiones astronómicas, seguirán otros caminos. De entre ellos, el más próximo al tema que tratamos se publicaría en 1918, en el Tomo XVII de la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*: "Nuevo método para medir la velocidad de la luz. Determinación de algunas constantes físicas, que dependen de la medida de pequeños intervalos de tiempo". Pero tampoco le corresponderá a Pedro Carrasco el honor de ejercer de anfitrión principal.

---

1 *Memoria correspondiente a los años 1920 y 1921*, p. 72. Madrid: Junta para Ampliación de Estudios, 1922.

2 Carta citada por Sánchez Ron (2005), pp. 23-24. Aparece reproducida en Kormos, D. *et al*. (eds.): *The Collected papers of Albert Einstein*, Vol. 9, pp. 527-529. Princeton University Press.

Parece, por tanto que el estudio de la recepción de las teorías relativistas (desde el punto de vista de la Matemática) a partir de 1905 y hasta la visita de Einstein a nuestro país en 1923, requiere cierto estudio más allá de lo que parecería inmediato. Vamos con ello.

Julio Rey Pastor (1888-1965) y Pedro Carrasco Garrorena (1883-1968).

2. La Matemática española entre 1905 y 1923

Cuando Albert Einstein escribe sus artículos seminales de 1905, la Matemática española comenzaba a dar unos tímidos pasos hacia su encuentro con la que se practicaba en los países de nuestro entorno europeo, mucho más avanzada. Reinaba, en gran medida, un espíritu regeneracionista consecuencia del "desastre de 1898"; y existía cierto cobijo institucional tras la creación del Ministerio de Instrucción Pública en 1900 y la reforma de los Planes de Estudio.

La investigación matemática, de existir, debía hacerse en el único centro universitario en el que podía estudiarse el Doctorado: la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Madrid, una Facultad donde nadie se había apercibido entonces de los trabajos de Einstein y, mucho menos, de la trascendencia que iban a tener. En todo caso, los Catedráticos de la Sección de Exactas eran entonces:

Luis Octavio de Toledo y Zulueta (Análisis Matemático 1º y 2º; Análisis Superior -Doctorado, acumulada-)
José María Villafañé y Viñals (Análisis Matemático 1º y 2º)
Cecilio Jiménez Rueda (Geometría Métrica; Complementos de Álgebra y Geometría -acumulada-)
Miguel Vegas y Puebla-Collado (Geometría Analítica)
José Andrés Irueste (Elementos de Cálculo Infinitesimal)
Faustino Archilla y Salido (Geometría de la Posición)
Eduardo Torroja y Caballé (Geometría Descriptiva; Estudios Superiores de Geometría -Doctorado, acumulada-)
Eduardo León y Ortiz (Astronomía Esférica y Geodesia)
*Francisco Íñiguez e Iñigu*ez (Astronomía del Sistema Planetario -Doctorado-)
*José Ruiz Castizo y Ari*za (Mecánica Racional)
José Echegaray y Eizaguirre (Física Matemática -Doctorado-)

Realmente, en esos momentos todavía era prácticamente nula la contribución original de nuestros matemáticos, y los más productivos, como Zoel García de Galdeano, se encontraban en universidades de provincias.

Julio Rey Pastor será el primer joven matemático al que los catedráticos de las generaciones precedentes, los que se han venido en llamar "sabios" e "intermedios", concederán el honor de equipararse a ellos en la capital: Licenciado en 1908, al "joven y dinámico" doctorando (y luego Doctor) le concederán la cátedra de Análisis Matemático en la Universidad de Oviedo en 1911, como tránsito fugaz hasta traerlo a Madrid en 1913; pondrán en sus manos el futuro de la investigación matemática en nuestro país creando, *para* que él lo dirigiera, el *Laboratorio Seminario Matemático* de la JAE (1915); lo auparon a la gloria institucional eligiéndolo Miembro de Número de la *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* (1917); y lo enviaron a la América española (1917) dentro del programa de misiones culturales organizadas por la JAE con la *Institución Cultural Española* de Buenos Aires.

En todo caso, en el momento de la venida a España de Einstein, la relación de Cátedras quedaba como sigue:

Luis Octavio de Toledo y Zulueta (Análisis Matemático 1º y 2º; Análisis Superior -Doctorado, acumulada-)

Cecilio Jiménez Rueda (Geometría Métrica; Complementos de Álgebra y Geometría -acumulada-)
Julio Rey Pastor (Análisis Matemático 1º y 2º; Elementos de Cálculo Infinitesimal -acumulada-)
Miguel Vegas y Puebla-Collado (Geometría Analítica; Estudios Superiores de Geometría -Doctorado, acumulada-)
José Ruiz Castizo y Ariza (Mecánica Racional; Complemento de Cálculo Infinitesimal -acumulada-)
Faustino Archilla y Salido (Geometría de la Posición)
José Gabriel Álvarez Ude (Geometría Descriptiva)
Francisco Íñiguez e Íñiguez (Astronomía Esférica y Geodesia)
José María Plans y Freyre (Mecánica Celeste -Doctorado-)
Pedro Carrasco Garrorena (Física Matemática -Doctorado-)

Ahora bien, la pregunta es ¿Cuántos de ellos estaban preparados para entender a Einstein? ¿Cuántos o cuáles se dedicaron a estudiar y difundir su obra? Para responder a esas preguntas, por el carácter de las Teorías de la Relatividad, a caballo entre la Física y la Matemática, junto a los Catedráticos de la Sección de Exactas más próximos al mundo de la Relatividad, también debemos dar entrada aquí a varios Catedráticos formalmente "de Física". En conjunto (además de un Julio Rey Pastor que no tendría que hacer muchos esfuerzos adicionales a su de por sí sólida formación) serían: Pedro Carrasco Garrorena (Física Matemática), José Mª Plans y Freyre (Mecánica Celeste), Julio Palacios Martínez (Termología) y, sobre todo, Blas Cabrera Felipe (Electricidad y Magnetismo).

3. La tarea de difusión de Blas Cabrera Felipe

El más importante de todos los físicos dedicados a la Matemática de la Relatividad, y el primero en escribir un tratado al respecto, con carácter de 'libro de texto', fue el Catedrático de Electricidad y Magnetismo de la Universidad Central y Académico de Ciencias Blas Cabrera Felipe. El libro, de título *Principios fundamentales de Análisis Vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el Universo de Minkowski*, apareció publicado por partes entre 1912 y 1913, como colección de artículos con los usuales '(continuará)' en los Tomos XI y XII de la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. En 1996, y en colaboración con el Profesor F. González de Posada, tuvimos el honor de editar su primera versión conjunta, con un denso "Ensayo introductorio", como Vol. II-2 de las "Obras Completas" de Blas Cabrera que, desde 1995, viene publicando Amigos de la Cultura Científica.

Como escribíamos allí, se trata de un libro de actualidad para la época; podríamos decir, incluso, que de suma actualidad, o muy avanzado para la época, más aún si tenemos en cuenta su condición expresa de libro de texto. No puede caber la menor duda acerca de que, como máximo, podrían desarrollarse en otras universidades europeas niveles más o menos próximos.

A finales de 1908 puede considerarse que tiene ya una cierta difusión la teoría de la Relatividad Especial, formulada matemáticamente con sentido analítico en el marco del espacio-tiempo o 'mundo absoluto' de Minkowski. Dado que, como muy tarde, Cabrera concibió y escribió este texto en el año 1911, y que en él se tratan con soltura los temas relativos a tensores, Relatividad restringida y espacio de Minkowski, puede afirmarse que la tradicional distancia docente de España respecto de los principales centros universitarios europeos había sido rebajada drásticamente por Cabrera, en esos momentos y por lo que al campo de la Relatividad se refiere, con su obra.

En 1914 publica "Aplicación a la Física de la Geometría de las cuatro dimensiones", texto de la conferencia dictada el 28 de marzo de ese año en el Instituto de Ingenieros Civiles. Aquí se ocupa del que denomina "aspecto geométrico de la teoría de la relatividad", una teoría matemática (con palabras suyas) que parecía en un principio sin utilidad práctica pero que permitió engendrar un cuerpo de doctrina de lógica impecable. Y, en 1917, aparece *¿Qué es la Electricidad?*, libro propiamente "de Física" que reúne un ciclo de conferencias dictadas en la Residencia de Estudiantes en el mes de enero, y a partir del cual sí puede decirse que Cabrera ha asumido completamente las tesis de la Relatividad Especial de Einstein.

Una vez "corroboradas" experimentalmente las predicciones de Einstein al finalizar 1919, Cabrera pasó a convertirse en el científico español que mejor entendió las implicaciones generales para el conocimiento humano que aportaba la Relatividad General de Einstein, así como el más entregado de sus divulgadores. Así, en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Buenos Aires, y tan pronto como el 4 de noviembre de 1920, dirá (y quedará escrito):

> *La teoría de la relatividad se ha constituido en bien escaso tiempo como una construcción de lógica intachable [...] ha surgido como la única posibilidad para resolver contradicciones fundamentales entre nuestra concepción del mundo y la experiencia [...] tiene por base el postulado de invariancia absoluta de las leyes naturales [...] Esta invariancia supone atribuir a las leyes naturales el carácter de verda-*

des absolutas, que parece en contraposición con el principio filosófico de la relatividad del conocimiento, que en último análisis ha sido el incentivo del pensamiento de Einstein.

En 1923, como preparación de la llegada de Einstein a España, recopila en un libro, de título *Principio de Relatividad*, las lecciones y conferencias impartidas entre 1920 y 1923 en el Ateneo de Madrid, en la Sociedad Científica Argentina, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Córdoba (Argentina) y en la Facultad de Ciencias de Madrid. Pero el subtítulo que le añade explica su contenido: "Sus fundamentos experimentales y filosóficos y su evolución histórica", y es que, para esos momentos, la divulgación en España de la Matemática implícita en la Relatividad la estaba realizando ya otro ilustre maestro, José Mª Plans.

Blas Cabrera Felipe (1878-1945) y José Mª Plans Freyre (1878-1934).

4. La contribución de José Mª Plans Freyre

Efectivamente, en los años veinte, el científico español que mejor difundió la Matemática relativista fue José Mª Plans. Su primer trabajo fueron unas "Notas sobre la trayectoria de los rayos luminosos en el campo de un centro gravitatorio según la teoría de Einstein", publicadas en 1920 en el Volumen 18 de los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química*.

Sin embargo, el verdadero punto de partida de su contribución debemos buscarlo en el Tema nº 1 (Sección de Ciencias Exactas) de la convocatoria de Premios ofrecidos en 1919 por la *Academia de Ciencias*: "Deducción matemática de las modificaciones imprescindibles en los teoremas y fórmulas principales de la Mecánica general, racional o teórica, a consecuencia del cambio o cambios esenciales que, por causas o hechos perfectamente comprobados, puedan tener alguna o alguna de las leyes fundamentales de aquella Ciencia". La Memoria presentada por Plans, de título *Nociones fundamentales de Mecánica relativista*, resultó premiada en la sesión del 22 de diciembre de 1920, y se publicaría en 1921. Aunque la mayor parte estaba dedicada a la Relatividad Especial, los dos últimos capítulos trataban cuestiones de Relatividad General.

Análogo éxito tuvo Plans en la convocatoria de premios de 1922, cuyo Tema nº 1 era "Necesidad del Cálculo diferencial absoluto. Exposición de los principios fundamentales y de las más importantes aplicaciones del mismo". La Memoria, de título *Nociones de cálculo diferencial absoluto y sus aplicaciones*, resultó premiada en la sesión del 30 de enero de 1924, publicándose ese mismo año. Se centraba en el tratamiento de la Geometría Riemanniana en tanto que teoría matemática necesaria para explicar la Relatividad General, cuestión que también se estudiaba en la Memoria.

A los pocos meses, el 18 de mayo de 1924, Plans leía su Discurso de ingreso en la Academia, titulado "Algunas consideraciones sobre los espacios de Weyl y de Eddington y los últimos trabajos de Einstein".

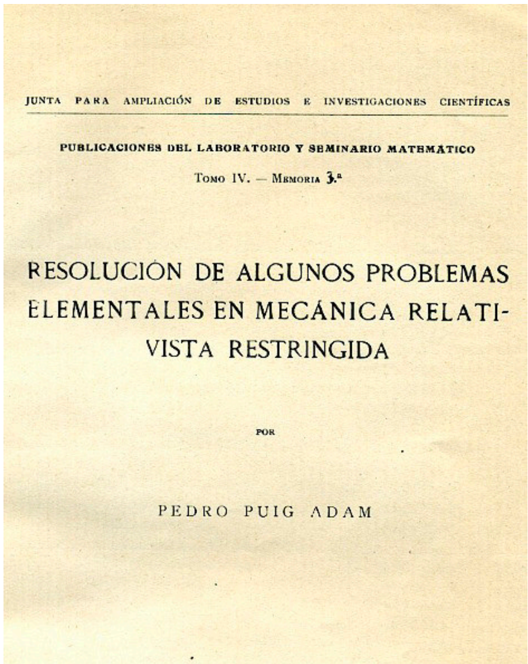
Pero quizá el rasgo más destacado de Plans es su intento de "crear escuela", en este caso en el campo de la Relatividad, frente a la tradición individualista tan española de pensadores y divulgadores aislados. Lo hizo desde el *Laboratorio y Seminario Matemático* de la Junta, desde su condición de Director de "Trabajos de Investigación".

Bajo la dirección de José Mª Plans, Pedro Puig Adam realizó durante el curso 1920-1921 estudios matemáticos en el *Laboratorio* sobre algunos problemas relativistas, (limitados al ámbito de la Relatividad Especial) que constituyeron la base para su Tesis Doctoral[3]. Éstos fueron:

---

[3] Puede verse *Memoria correspondiente a los años 1920 y 1921*, p. 200. Madrid: Junta para Ampliación de Estudios, 1922.

1. Estudio del movimiento rectilíneo general de un punto en los diversos casos de integrabilidad y, en particular, cuando la fuerza es función de la velocidad; con aplicación al movimiento en un campo de fuerzas constante con resistencia de medio proporcional al cuadrado de la velocidad.
2. Estudio del movimiento general de un punto sobre una línea y aplicación al movimiento sobre una circunferencia en un campo constante
3. Otra aplicación del estudio anterior: curva braquistocrónica en Mecánica relativista.
4. Estudio del movimiento general de un punto sobre una superficie esférica en un campo constante.



JUNTA PARA AMPLIACIÓN DE ESTUDIOS E INVESTIGACIONES CIENTÍFICAS

PUBLICACIONES DEL LABORATORIO Y SEMINARIO MATHEMÁTICO

TOMO IV. — MEMORIA 3.ª

RESOLUCIÓN DE ALGUNOS PROBLEMAS ELEMENTALES EN MECÁNICA RELATIVISTA RESTRINGIDA

POR

PEDRO PUIG ADAM

Pedro Puig Adam (1900-1960) y la portada de su Tesis Doctoral.

La Tesis, de título “Resolución de algunos problemas elementales en Mecánica relativista restringida”, apareció impresa por primera vez en 1922, en el Tomo XX de la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. A los pocos meses, en 1923, se editó también como Memoria nº 3 del Tomo IV, de las *Publicaciones del Laboratorio y Seminario Matemático*.

También bajo la dirección de Plans, durante 1922, Lorenzo Martínez Hernández trabajó en el *Laboratorio* sobre Cálculo diferencial absoluto, pero dedicándose especialmente a las aplicaciones a la Hidrodinámica[4].

5. Los matemáticos españoles ante la visita de Einstein

El 8 de enero de 1923 tomaba posesión Blas Cabrera como Presidente de la *Sociedad Española de Física y Química*. Pero no era la Relatividad un tema que les resultase propio a nuestros físicos y químicos en los meses a caballo entre 1922 y 1923[5]. Dos eran sus ocupaciones primordiales en aquellos momentos: científicamente, el caudal de trabajos que presentaban los químicos, especialmente Enrique Moles y sus colaboradores desde el *Laboratorio de Investigaciones Físicas*; institucionalmente, la organización de la *Federación Española de Sociedades Químicas* (también animada por Moles). Ni siquiera Einstein les honrará con su presencia cuando visite España. Y es que los físicos interesados en cuestiones relativistas debían pedir cobijo en otro mundo científicamente próximo: el de los matemáticos.

Nuestra comunidad matemática, concretada en la *Sociedad Matemática Española*, sí prestó atención y preparó la venida de Einstein con esmero[6]. Ya en la sesión del 4 de marzo de 1922 daba cuenta Emilio Herrera (ingeniero militar que sería Vicepresidente de la SME) de "una dificultad que le ha sugerido el estudio de la teoría de la Relatividad", participando en la discusión consiguiente el Padre Pérez del Pulgar y "principalmente" el físico Julio Palacios. El tema se siguió tratando con motivo de la visita de Hermann Weyl, en la sesión del 1 de abril de ese año, quien "hizo atinadas observaciones" al resumen de la problemática planteada por Pérez del Pulgar y Herrera: por su interés, las discusiones científicas al respecto de los científicos españoles continuaron en la sesión del 6 de mayo.

Transcurridos varios meses y nuevas sesiones de la SME, el tema de la Relatividad volvió a surgir con fuerza el 3 de febrero de 1923 una vez confirmada la venida de Einstein, participando en las discusiones el Padre Enrique de Rafael, Pedro Mª. González Quijano, Blas Cabrera, Julio Palacios y Emilio Herrera, y

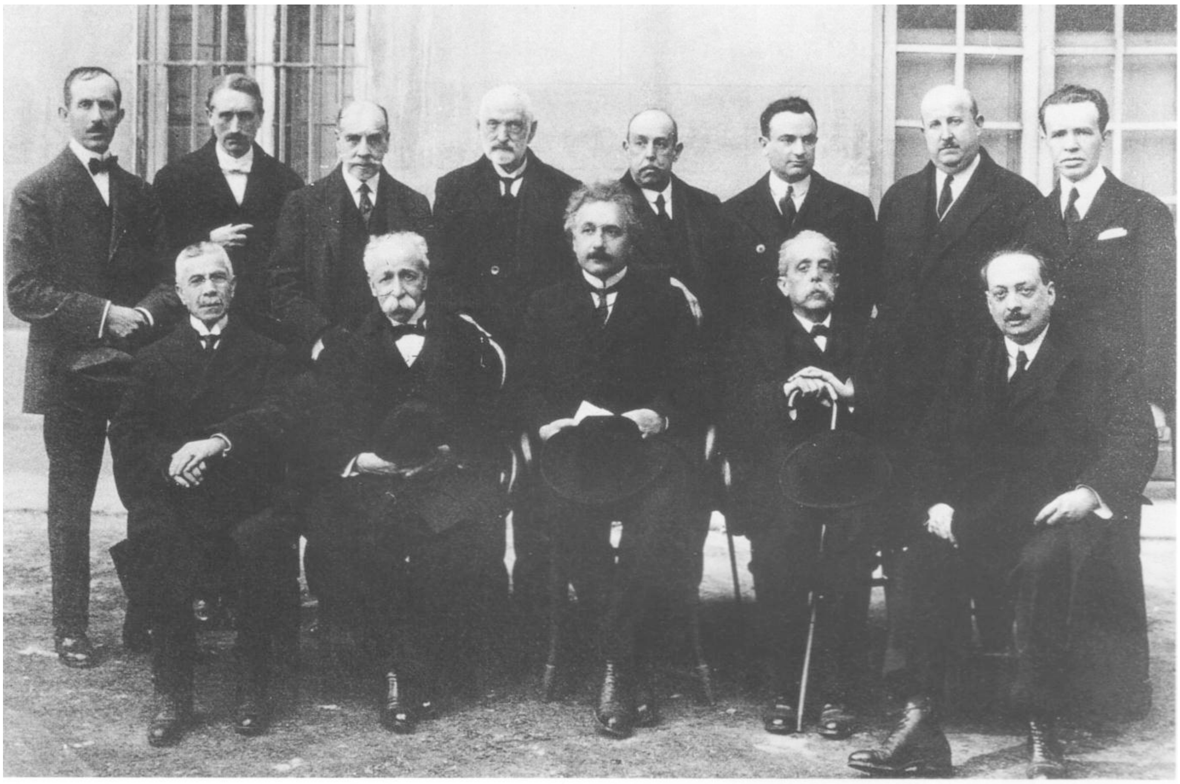
[4] Puede verse *Memoria correspondiente a los cursos 1922-3 y 1923-4*, p. 265. Madrid: Junta para Ampliación de Estudios, 1925.

[5] Puede seguirse la vida institucional de la Sociedad Española de Física y Química en esos años a partir de la Sección "Crónica" de sus *Anales de la SEFyQ*.

[6] Todos los datos que siguen los hemos recogido de la Sección "Crónica" de la *Revista Matemática Hispano Americana*, a lo largo de 1922 y 1923.

emplazándose todos a nuevas sesiones en las que se diera forma precisa a las cuestiones que debían preguntarse al físico alemán cuando visitara la *Sociedad*.

Las nuevas sesiones científicas se celebraron los días 20 y 22 de febrero de 1923, y en ellas participaron, además de Emilio Herrera y Julio Palacios (sus principales animadores), José Mª Plans, Blas Cabrera, Enrique de Rafael, Tomás Rodríguez Bachiller, Manuel Lucini, Vicente Burgaleta, Fernando Peña, Juan López Soler y Pedro Mª. González Quijano.



Einstein en la Facultad de Ciencias de la Universidad Central, 1923.[7]

[7] Sentados, de izquierda a derecha: Miguel Vegas (Geometría Analítica), José Rodríguez Carracido (Rector), Albert Einstein, Octavio de Toledo (Decano) y Blas Cabrera (Electricidad y Magnetismo). De pie: Edmundo Lozano Rey (Zoología), José Mª Plans (Mecánica Celeste), José Madrid Moreno (Histología Vegetal y Animal), Eduardo Lozano (Acústica y Óptica), Ignacio González Martí (Física General), Julio Palacios (Termología), Ángel del Campo (Espectroscopía), Honorato de Castro (Cosmografía y Física del Globo). Nótese que no están Rey Pastor (Análisis Matemático), Álvarez Ude (Geometría Descriptiva) ni Carrasco Garrorena (Física Matemática).

La visita de Einstein al mundo específico de los matemáticos tuvo lugar con motivo de la celebración en el *Laboratorio y Seminario Matemático* de una Sesión de la *Sociedad Matemática Española*[8]:

> *Fue una reunión íntima, pero acaso es más interesante desde el punto de vista científico y provechoso para los concurrentes de cuantos actos se celebraron durante la estancia de dicho eminente profesor en España, pues en instructiva conversación, a guisa de Seminario matemático, estuvo aclarando las dudas y resolviendo las dificultades que se le propusieron referentes a su Teoría de Relatividad.*

Y no mucho más cabría destacar, en lo que a los científicos españoles se refiere, a la hora de determinar quiénes demostraron entender la obra de Einstein y quiénes publicaron trabajos de investigación o divulgación sobre ello. Sí resultaría obligatorio extenderse, analizando su contribución en ambos campos (comprensión y divulgación), con dos filósofos: José Ortega y Gasset y Xavier Zubiri Apalategui. Pero excederíamos los propósitos de este trabajo.

Referencias

[1] Glick, T. F. (1986): *Einstein y los españoles*. Madrid: Alianza.

[2] González de Posada, F. (1995): *Blas Cabrera ante Einstein y la Relatividad*. Madrid: Amigos de la Cultura Científica.

[3] González de Posada, F. y González Redondo, F. A. (1996): "Ensayo Introductorio" a Cabrera Felipe, B. (1912-13): *Principios fundamentales de Análisis vectorial en el espacio de tres dimensiones y en el Universo de Minkowski.* Madrid: Amigos de la Cultura Científica-Gobierno de Canarias.

[4] González Redondo, F. A. (2002): "La Matemática en el panorama de la Ciencia española, 1852-1945". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española* Vol. 3 (nº 3), 779-809.

[5] Sánchez Ron, J. M. (ed.) (1988): *Ciencia y Sociedad en España*. Madrid: El Arquero-CSIC.

[6] Sánchez Ron, J. M. (dir.) (2005): *Einstein en España*. Madrid: Residencia de Estudiantes.

[8] Puede verse la *Memoria correspondiente a los cursos 1922-3 y 1923-4*, p. 266. Madrid: Junta para Ampliación de Estudios, 1925.

Recurso para la enseñanza del concepto de límite

J. M. Sigarreta
Dpto. Matemáticas. UC3M
jsigarre@math.uc3m.es

P. Ruesga
Dpto. Didácticas Específicas. UBU
pruesga@ubu.es

M. Rodríguez
Dpto. Matemáticas. U.P.N.
marodominguez@yahoo.es

Abstract

This paper highlights the significance of the visual representation in the process of mathematical concept construction, as an alternative of inductive way. Furthermore, Methodological suggestions are given based on the visual representation for the construction of the limit concept.

1 Consideraciones sobre la enseñanza-aprendizaje del concepto de límite

En la comunidad matemática actual es común oír que el concepto de límite es uno de los más difíciles de comprender o interpretar por el alumno por su gran nivel de abstracción. Su propio proceso histórico de formalización así lo avala si tenemos en cuenta que hubo que esperar casi doscientos años desde que en las obras de Newton y Leibniz se esbozaran las primeras ideas, aún ambiguas y poco rigurosas.

Es, por tanto, lógico pensar que desde el punto de vista didáctico constituya una meta difícil de alcanzar. Lo que usualmente se discute es cuál de las dos caracterizaciones: la que emplea el lenguaje $\varepsilon - \delta$ o la que emplea sucesiones, es más ventajosa para definir el concepto de límite, es decir, el problema didáctico a resolver se confunde con lo que pudiéramos llamar metas de formalización del concepto y esto no es lo principal, sino el conjunto de procedimientos didácticos necesarios para su asimilación. Es aquí donde radica la principal dificultad para el docente.

Para el alumno, el lenguaje en el que se formula la definición en términos de "para todo...", "existe...", que no puede obviarse, resulta muy complicado.

Muchos conceptos matemáticos, fundamentalmente geométricos, tienen una representación "concreta" pero para los de límite e infinito, que van aparejados, no existe tal posibilidad. Los preconceptos que puede tener el alumno en relación con ellos se acercan a ideas imprecisas de proximidad, el sentido de la palabra en el lenguaje natural distorsiona el sentido matemático de la noción de límite, las ideas de lo infinito se refieren más a la cantidad que a otra cosa, es por ello que el papel de las abstracciones aquí es primordial. Según Sánchez (1987) las abstracciones más comunes en Matemática en relación con el infinito son: la abstracción de la "realización potencial" y la de "el infinito actual"; estas son esenciales para la elaboración del concepto de límite pues permiten al sujeto imaginar curvas que se aproximan cada vez más a una recta aunque su trazado sea imposible por limitaciones materiales y de tiempo, conjuntos de números totalmente acabados, etc. Sin embargo, estas consideraciones raramente se tienen en cuenta en la actividad docente.

Desde el punto de vista metodológico los conceptos se pueden clasificar como: objeto, operación y relación. Aunque se plantea que el de límite es un concepto de relación, no aclara cuáles son las relaciones que se establecen, cuáles son los entes que se vinculan. Al respecto, de forma preliminar, éstas pueden ser interpretadas de la manera siguiente:

- Desde el punto de vista geométrico la relación de "cercanía" o "aproximación" se da entre un punto del plano y una curva (el gráfico de la función) si el límite es puntual, o entre una recta del tipo $y = l$ ($l \in R$) y el gráfico de la función, en el caso del límite al infinito.

- Desde un punto de vista conjuntista la relación se establece entre dos conjuntos de números, que a su vez tienen su interpretación geométrica: un conjunto unitario (el número que representa al límite) y el conjunto de los valores funcionales.

Tomar en cuenta estas consideraciones, debe conducir al profesor a elaborar procedimientos didácticos que muestren al alumno la necesidad de precisar y formular sin ambigüedad los términos "cercanía" y "proximidad", términos estos de fuerte componente geométrico. En este sentido es importante que el alumno logre una representación geométrica del concepto de límite que les permita, dar contenido al mismo y reconocer intuitivamente la existencia o no del límite en un punto a partir de las gráficas de las funciones, de forma tal que pueda aplicar sus conocimientos de forma independiente, pero no plantean cómo lograrlo. Además, es natural en la etapa de formación de conceptos el acercamiento a las representaciones visuales, de manera que la imagen conceptual que se genere, presente menos obstáculos con la definición formal.

Vencer los obstáculos en el aprendizaje de un concepto requiere asumir lo que en éste es esencial. Talizina (1998) establece los parámetros de esencialidad de un concepto en los siguientes aspectos: sus propiedades determinantes, las contradicciones que le son inherentes, las causas de su surgimiento, las leyes de su comportamiento y las tendencias de su desarrollo.

En el caso particular del concepto de límite la formulación de las contradicciones significa la determinación de los contrarios. ¿Cuáles son estos contrarios en el caso del concepto de límite? Los elementos que se contraponen, son respectivamente los valores de la variable independiente y los de la dependiente, estos interactúan y determinan una unidad de la que resulta una "relación cuantitativa" ineludible (que es precisamente el límite o el no-límite), luego esa interacción o unidad es la causa.

Existen importantes precedentes de relaciones ya estudiadas: monotonía, paridad, periodicidad, alcance de valores extremos, continuidad o derivabilidad, que son soporte para apreciar su surgimiento.

Entre las leyes de su comportamiento (también pudieran llamarse, diversidad de manifestaciones del concepto), se pueden señalar: su unicidad, acotación del conjunto de valores funcionales en una vecindad del punto, acotación global, las propiedades aritméticas del límite, los diversos procedimientos para su cálculo, las singularidades (límites notables).

Cuando se habla de las tendencias del desarrollo del concepto de límite, hay que verlo en su constante movimiento hacia nuevos estadios de generalidad, entre los que se pueden indicar: los conceptos de punto adherente y de acumulación, límite en diversos espacios métricos, límite según una topología, límite según un filtro, etcétera. Cuando se estudian estas cuestiones se esta profundizando en la esencialidad del concepto.

2 Tareas para el tratamiento del concepto de límite

Los "objetos visuales" sobre los que se conciben y aplican las tareas son los gráficos de las funciones estudiadas por el alumno, tanto en el período de tránsito entre la educación media y la superior como en el primer curso de Matemática.

Estos resultan idóneos para la búsqueda de las regularidades geométricas propias de la noción de límite: funciones lineales, cuadráticas, función de proporcionalidad inversa, exponenciales y la función seno e involucran dos conceptos geométricos previos:

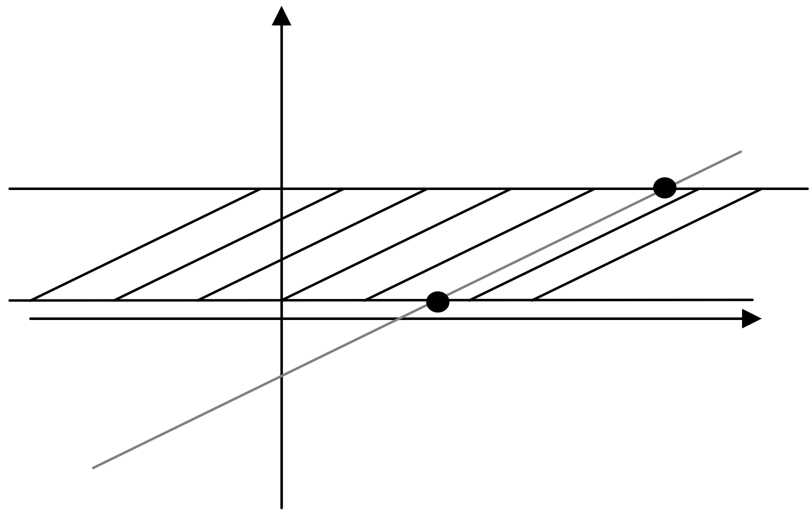
- Banda Horizontal: porción del plano ubicada entre dos rectas paralelas al eje x (las rectas que la limitan puede o no incluirse en la banda) y
- Diámetro de una Banda Horizontal: distancia entre las rectas que determinan la banda.

Sistema de Tareas.

1. *Dibujar los gráficos de tres funciones del tipo $y = mx + n$* considerando los siguientes casos:

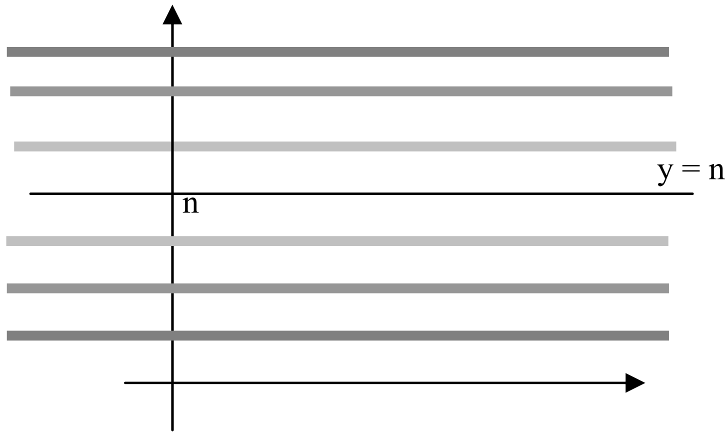
- Cualquier representante con inclinación positiva ($m > 0$)
- Cualquier representante con inclinación negativa ($m < 0$)
- Cualquier representante con pendiente cero ($y = n$), en sistemas de coordenadas rectangulares diferentes.

En los dibujos de las funciones con inclinación positiva y negativa, trazar una banda horizontal cualquiera y señale el intervalo en el cual el gráfico de la función permanece dentro de la banda. Señale los intervalos en los que el gráfico está por encima y por debajo de las rectas borde de la banda.



1.1 Si se escoge otra banda horizontal cualquiera, ¿se produce el mismo comportamiento?

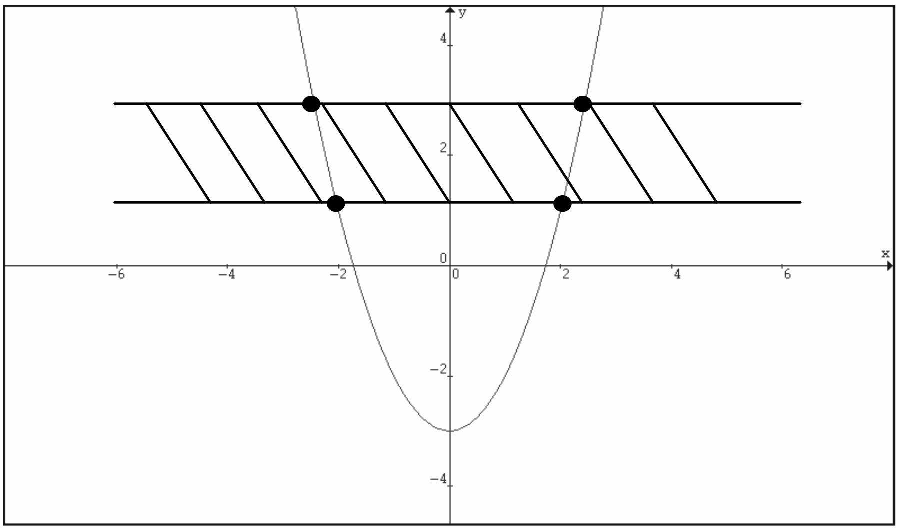
1.2 En el dibujo de la función constante, trazar bandas que contengan el punto de intersección del gráfico con el eje "y". ¿Qué se puede afirmar acerca de la inclusión del gráfico en las diferentes bandas trazadas? Trazar bandas que no contengan el punto indicado. ¿Contienen estas bandas alguna porción del gráfico de la función?



2. *Dibuje los gráficos de dos funciones del tipo $y = ax^2 + bx + c$* en sistemas de coordenadas rectangulares diferentes, considerando los casos:

- El coeficiente **a** es mayor que cero
- El coeficiente **a** es menor que cero

2.1 Trace una banda que corte a los gráficos en ambos dibujos

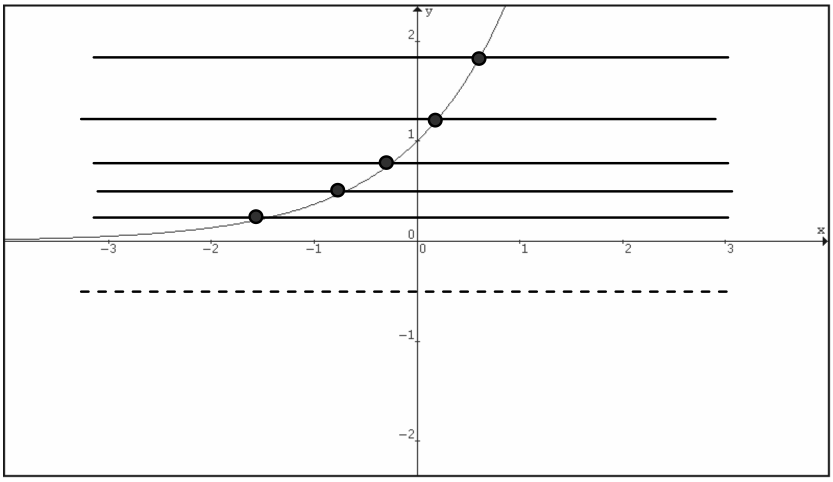


2.2 Señale en cada caso los intervalos en los que el gráfico de la función está incluido en la banda y aquellos en los que los gráficos de las funciones están por encima y por debajo de las rectas limitantes de las bandas.

2.3 Si se escoge otra banda cualquiera ¿se produce el mismo resultado?

3. *Dibuje el gráfico de la función* $y = e^x$

3.1 Trazar una banda horizontal en la que una de las rectas limitantes sea el eje "x" y que corte al gráfico de la función



3.2 Señale en el dibujo el punto donde el gráfico penetra en la banda

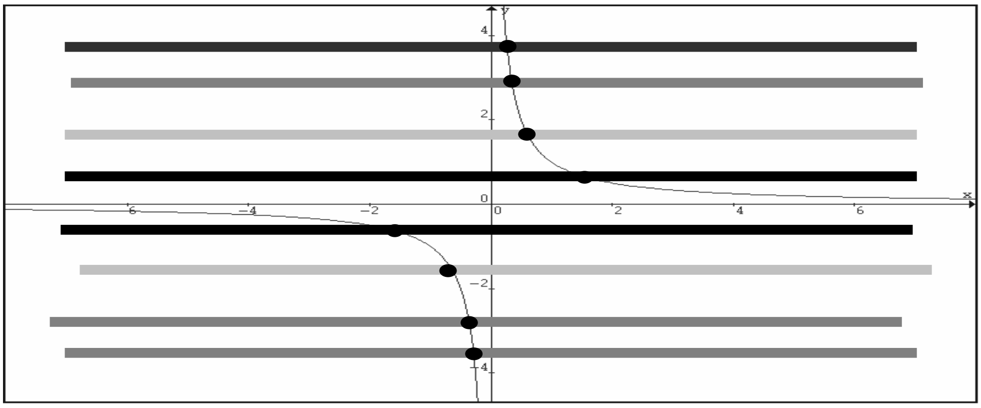
3.3 Valore la permanencia del gráfico dentro de la banda y señale geométricamente el intervalo en el que el gráfico esta dentro de la banda

3.4 ¿En qué dirección el gráfico de la función está por encima de las rectas limitantes de la banda?

3.5 Trazar una banda de diámetro más pequeño que la anterior; señale en el dibujo el nuevo punto de entrada del gráfico a la banda, valore la permanencia del gráfico dentro de la banda e indique en el dibujo el intervalo donde esto ocurre. Valorar si se mantiene el sentido en el cual el gráfico está por encima de las rectas limitantes. Si a las bandas en lugar de disminuirle su diámetro se le aumentara ¿se conserva el mismo comportamiento?

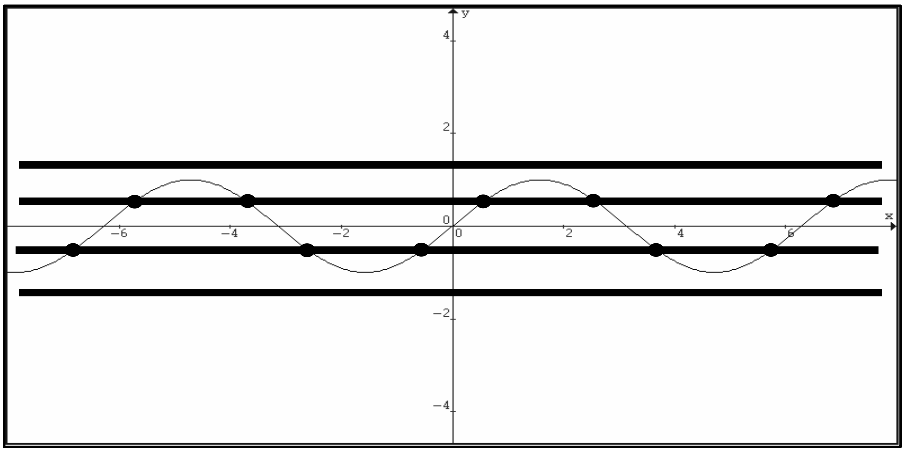
3.6 Si se repite este proceso, ¿Qué cambia? ¿Cuál es el comportamiento que permanece invariante?

4. *Trazar el gráfico de la función* $y = \dfrac{1}{x}$



4.1 Trazar una banda horizontal que contenga al eje “x”
4.2 Señalar en el dibujo los puntos de entrada del gráfico de la función a la banda, valorar la permanencia del gráfico dentro de la banda.
4.3 Trazar una banda de diámetro menor que la anterior, señalar de nuevo los puntos de entrada a la banda y realizar el análisis ordenado en la tarea anterior.
4.4 Si este proceso se repite, utilizando bandas con diámetros cada vez más pequeños, describir el comportamiento en los puntos de entrada y la permanencia del gráfico en las bandas respectivas. ¿La regularidad observada se cumple tanto en el sentido positivo como en el negativo?

5.- *Trazar el gráfico de la función seno*
5.1 Trazar una banda horizontal de manera que ésta incluya totalmente al gráfico de la función o que sus rectas limitantes corten al gráfico, si este es el caso señale geométricamente los puntos de entrada del gráfico a la banda y valorar la permanencia del gráfico en la banda.



5.2 Trazar sucesivamente bandas de diámetro más pequeño, señale geométricamente los puntos de entrada del gráfico a cada banda y valorar la permanencia del gráfico en éstas.

5.3 ¿Qué diferencias se pueden establecer en comparación con los casos anteriores?

Después de cumplimentar este sistema de tareas el estudiante está en condiciones de separar las regularidades en el comportamiento geométrico de las curvas en relación con su ubicación dentro de las bandas a partir de cierto punto y su situación por encima o por debajo de cualquier recta paralela al eje “x”, con posibilidades para discernir además el sentido (positivo o negativo) en que se produce. Estas regularidades se pueden considerar “variables visuales” de acuerdo a la definición dada anteriormente. Así se pueden separar las siguientes variables visuales:

- El gráfico de la función está totalmente incluido en cualquier banda horizontal que contiene a la recta y = l, a partir de cierto punto determinado por cada banda y el gráfico, en un sentido específico.
- El gráfico de la función está por encima de cualquier recta paralela al eje “x”
- El gráfico de la función está por debajo de cualquier recta paralela al eje “x”

El siguiente paso es el reconocimiento por el alumno de las variables visuales que posee cada una de las curvas trabajadas en el sistema, lo que se puede reflejar en una tabla como la siguiente:

Gráfico / Variable visual	Primera variable visual		Segunda variable visual		Tercera variable visual	
	Sentido positivo	Sentido negativo	Sentido positivo	Sentido negativo	Sentido positivo	Sentido negativo
Función lineal (a< 0)	no	no	no	si	si	no
Función lineal (a > 0)	no	no	si	no	no	si
Función constante	si	si	no	no	no	no
Función cuadrática (a >o)	no	no	si	si	no	no
Función cuadrática (a < 0)	no	no	no	no	si	si
Función exponencial de base e	no	si	si	no	no	no
Función y = 1/ x	Si	si	no	no	no	no
Función seno	No	no	no	no	no	no

El objetivo principal, al cumplirse cada una de las etapas del proceso es precisamente, la separación de los rasgos determinantes de la relación que se establece entre gráfico y recta, la que resuelve desde el punto de vista cognitivo las ideas ambiguas en relación con la proximidad o aproximación entre una curva y una recta que puede tener el alumno al comenzar el aprendizaje del concepto de límite al infinito.

Cabe preguntarse entonces ¿qué se forma en el plano mental durante este proceso? En relación con el concepto de límite, no es posible que el alumno después del trabajo realizado, pueda dar una definición, pues en realidad de las relaciones descubiertas no se puede inducir una relación numérica entre los valores de la variable independiente y la dependiente, es decir, con el sistema de tareas cumplido, no se pueden discernir los contrarios implicados en la relación conceptual que prevé el concepto de límite, recuérdese que el límite que se quiere definir es un número y que todo el análisis previo se ha hecho en un sistema de representación semiótico particular (el de las representaciones cartesianas), luego para llegar al concepto sería imprescindible el tránsito a otra forma de representación semiótica (conversión). Sin embargo la relación geométrica descubierta contiene manifestaciones esenciales del límite, que se constituye como una antesala del concepto, por lo que puede considerarse un "preconcepto", luego no se puede definir el concepto antes de la conversión, pero si se puede "describir".

Si se asume que cuando el gráfico de una función respecto a la recta y = l, posee la primera variable visual en el sentido positivo del eje "x", dicha función tiene límite l cuando la variable independiente "tiende al infinito positivo", entonces el alumno es capaz de comprender y dar por si solo la siguiente descripción conceptual "*la función f tiene límite l cuando la variable independiente tiende al infinito positivo si en toda banda horizontal, que incluye la recta y = l, el gráfico de la función está contenido en la banda a partir de un punto determinado por la banda y el gráfico, en el sentido positivo del eje de las abscisas"*. De forma análoga se puede conducir al alumno a la descripción conceptual de "función infinitamente grande" en una semirrecta o sobre toda la recta real, sobre la base de satisfacer las otras dos variables visuales.

La conversión necesaria a registros simbólico-analíticos conducirá definitivamente a la elaboración conceptual, la ganancia conceptual queda garantizada con la plena identificación de las diferentes unidades significantes en uno y otro registro, lo que en la alternativa elaborada es fácil de identificar, así:

- "en toda banda horizontal", se identificará con el "para todo" en el registro analítico- simbólico.

- “a partir de un punto determinado por la banda y el gráfico” le corresponde el “existe A”
- “variable independiente tiende al infinito” se corresponde con $\lim\limits_{x \to +\infty}$
- “que incluye la recta y = l, el gráfico de la función está contenido en la banda” queda representado por $|f(x)-l|<\varepsilon$ cuando x >A.

Que el alumno identifique este paralelismo es la garantía de que reconozca aquellas invariantes en uno y otro registro, lo que constituyen la señal de que se ha producido desde este punto de vista la elaboración conceptual.

3 Experimentación

Para la aplicación de la investigación, se propuso un “problema” concreto del primer curso de la especialidad de Ingeniería Eléctrica. Sobre el mismo, se implementó un sistema de tareas análogo al expuesto anteriormente.

La primera dificultad detectada fue el bajo desarrollo de habilidades en el trazado del gráfico de funciones que hubo que remediar sobre la marcha, la segunda consistió en las insuficiencias en la búsqueda de los puntos de intersección entre una recta y una curva y la tercera, la identificación de la inecuación a resolver y su propia resolución (estas dificultades eran esperadas según diagnóstico); se pudo comprobar que los alumnos identificaron con relativa rapidez las tres variables visuales señaladas, distinguiendo los comportamientos gráficos de las curvas según las indicaciones de las tareas, resultando éstas eficaces para el propósito que fueron elaboradas; las expectativas mayores estaban puestas en dos variables que se constituyen esenciales cuando se utilizan medios visuales en la elaboración conceptual: la “durabilidad” y la “ganancia de significado” sobre la base de la “referencia “ visual lograda.

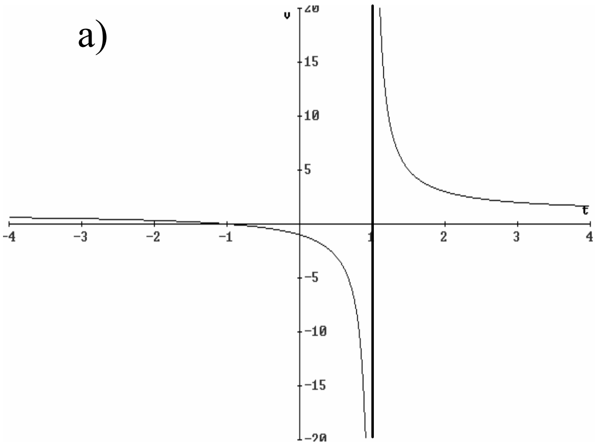
Para medir de alguna manera estas variables se aplicó un instrumento que consistió en responder un cuestionario con las dos preguntas siguientes:

1.- Sean f y g funciones tales que:

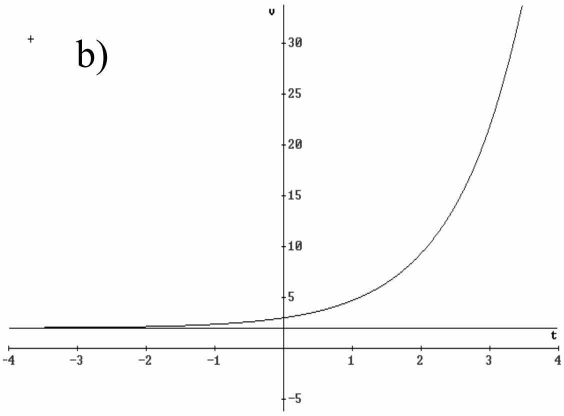
$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$$

¿Cuál de los siguientes gráficos puede ser la representación de f y cuál el de g?

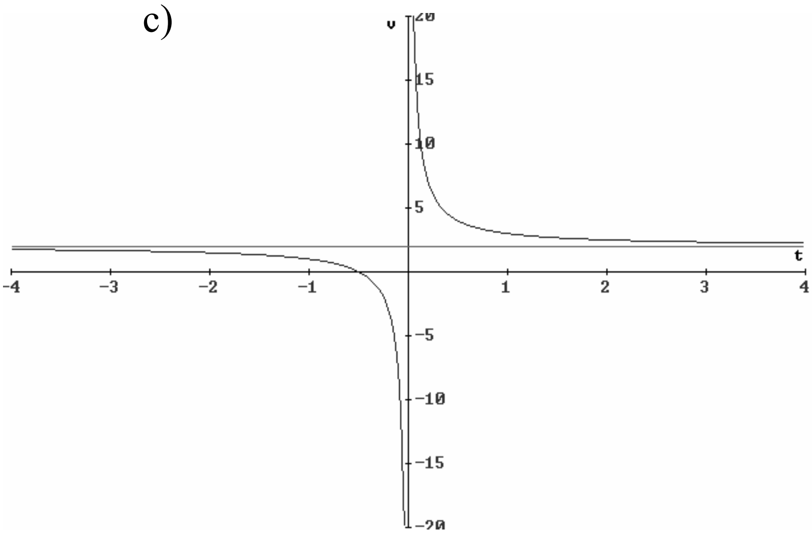
a)



b)

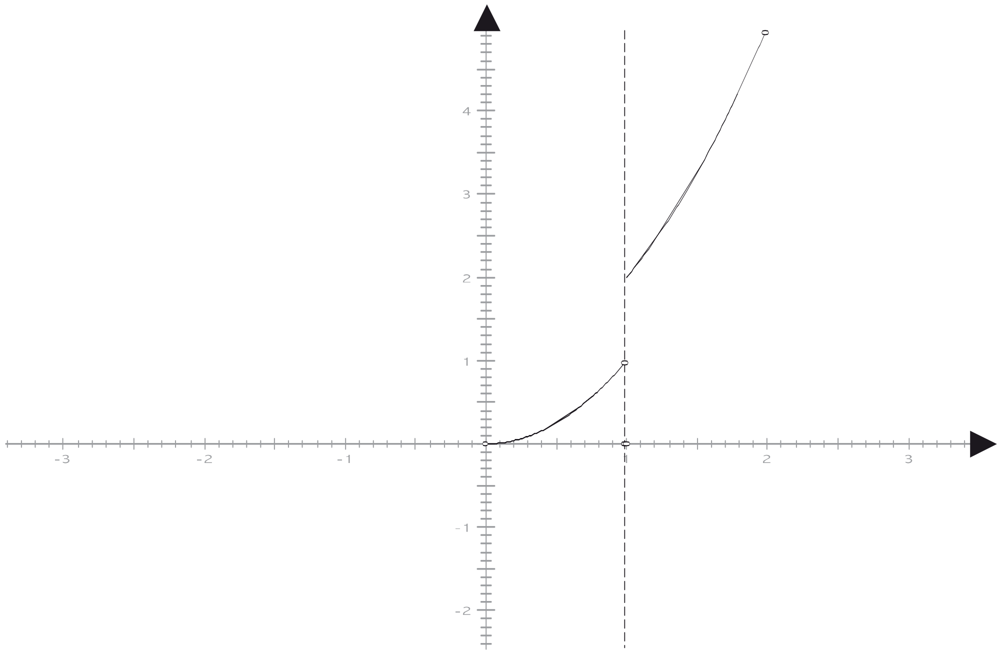


c)



2.- Sea $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{x - 1}$

¿Puede ser el gráfico de f en el intervalo [0; 2], como aparece en el siguiente dibujo?



Seis meses después de aplicada la experiencia, los resultados fueron los siguientes: de los quince estudiantes presentados, trece contestaron correctamente la primera pregunta, la que tenía por objetivo medir, dado el valor del límite, reconocer el comportamiento gráfico; la segunda pregunta tiene un nivel de profundidad mayor pues para responderla hay que movilizar los conocimientos adecuados para tal efecto, es decir, como el dibujo presupone un comportamiento localizado al intervalo $[0,2]$ y con anomalía cuando x = 1, el instrumento más racional es investigar la existencia del límite en esta abscisa; nueve estudiantes escogieron esta vía de solución, dos intentaron realizar un dibujo global de la función con ayuda de las técnicas del Cálculo Diferencial y cuatro no propusieron respuestas satisfactorias al problema.

Los resultados hallados en la experiencia son altamente satisfactorios pues presupone una demostración clara de que el alumno asocia un significado concreto al "objeto" límite, con otras palabras, el límite puntual determina un comportamiento geométrico en una vecindad del punto, estos resultados muestran en primer lugar la perdurabilidad en la memoria de las imágenes gráfico intuitivas lo que facilita un marco referencial poderoso a la hora de movilizar el conocimiento, en segundo lugar pudo resultar un obstáculo para el alumno a la hora de seleccionar el conocimiento a aplicar el hecho de que los temas siguientes en el curso no tuvieron el mismo enfoque y por otra parte se aplicó el instrumento después de los temas de Continuidad y Cálculo Diferencial.

Conclusiones

El modelo desarrollado explica las fases que requiere la elaboración conceptual del concepto de límite cuando se parte de consideraciones puramente geométricas; el mismo puede ser aplicado a otros conceptos tales como: continuidad, derivada, integral definida, etcétera. Los resultados alcanzados tanto desde el punto de vista teórico como práctico ponen de relieve la bondad de este recurso.

Bibliografía

Bishop, A. (1989). *Implicaciones didácticas de la investigación sobre Visualización. Revista de investigación sobre la visualización en Matemáticas*. Universidad de Cambridge. UK.

Sánchez,, C. (1987). *Conferencias sobre Problemas Filosóficos y Metodológicos de la Matemática*. La Habana.

Talizina, N. (1988). *Psicología de La enseñanza*. Editorial Progreso. Moscú.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). *Concept Image and concept definition in Mathematics with particular reference to limit and continuity.* University of Warwick. URL:

Reseña de libros

TERESA FERNÁNDEZ BLANCO y JULIO RODRÍGUEZ TABOADA: *Cuentos geométricos.* Proyecto Sur de Ediciones, Granada 2005. ISBN 84-8254-357-1.

Los autores tratan de acercar a los pequeños a la Geometría Elemental a través del género literario más adaptado a esa edad: el cuento. Consta de 62 páginas distribuidas en dos partes.

<u>1ª Parte: Mosaicos, un cuento en dos dimensiones</u>

Los bien sabidos. El soltero de oro. El pentágono ligón. La edad de oro. Las listas de espera. Los depredadores. Los nuevos genios. Estudio de los mosaicos. Ficha. Ficha-ejemplo.

<u>2ª Parte: Poliedros, aventuras en otra dimensión</u>

Los doce de Platón. Los solidos platónicos. Los sólidos arquimedianos. El amor platónico: los prismas. La parejas de hecho. Narciso y la pirámide. Euler y los convexos. La revolución de los danzantes. Un problema de elasticidad.

Cada apartado contiene una narración, unas ilustraciones gráficas a todo color y una propuesta de actividades a realizar.

Creemos que este ingenioso librito puede contribuir a recuperar la Geometría, tan olvidada hoy como parte de una cultura general de la que ha formado parte durante milenios.

Resultará de valiosa utilidad para alumnos y profesores de Educación Primaria y Secundaria Obligatoria.

E. Roanes Macías

Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo “article” y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,
52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72 y 73

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número

3025-0006-24-1400002948,

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros,
c/. Carranza, 5
Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

– la dirección a donde se han de enviar
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.