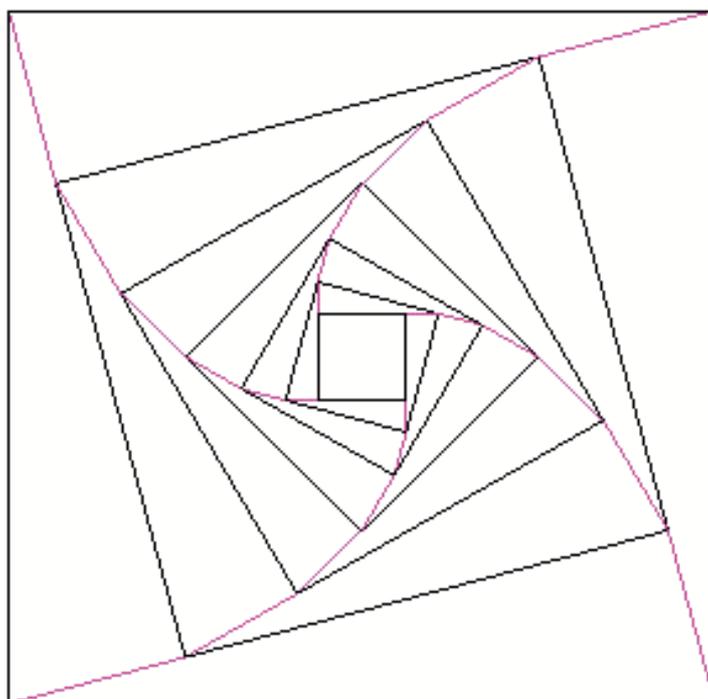


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»  
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 72  
FEBRERO DE 2006**

## ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2006 .....	5
Nota sobre la cuota anual de la Federación .....	5
XXIV Concurso de Resolución de Problemas .....	6
V Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, por <i>Juan Jesús Donaire Moreno</i> y <i>Joaquín Hernández Gómez</i> .....	7
XLII Olimpiada Matemática Española (Comunidad de Madrid), por <i>Joaquín Hernández Gómez</i> .....	9
Problemas Propuestos en la Primera Fase de la XLII Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid .....	11
Recensiones en “Zentralblatt (ZDM)” y en “Mathematical Reviews” .....	13
Redes de Steiner de esferas, por <i>Julio Fernández Biarge</i> .....	14
Transformación que alinea los centros de tres esferas preservando tangencias, por <i>E. Roanes Macías</i> y <i>E. Roanes Lozano</i> .....	27
Sobre el método Monte-Carlo basado en funciones de densidad, por <i>J.C. Cortés</i> y <i>G. Calbo Sanjuán</i> .....	39
Una fórmula sencilla para demostrar o generar identidades combinatorias, por <i>Luis González</i> .....	54
Programa TGP para la enseñanza de las transformaciones geométricas en el plano, por <i>José Fábrega</i> y <i>M<sup>a</sup> Carmen Morillo</i> .....	64
Sobre la noción de continuo en las matemáticas medievales, por <i>Pablo Martín Prieto</i> .....	76
Reseña de libros .....	89
Reseña y ofrecimiento de cd-rom .....	91
Anuncio de curso de la Sociedad Thales .....	93
Instrucciones para el envío de originales .....	93
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín .....	95
Boletín de inscripción .....	96

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en  
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews**

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).  
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado “La Matemática y su enseñanza actual”, publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

**SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**

Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)

C/ Rector Royo Villanova, s/n

28040 - Madrid

Teléf. y fax: 91 394 62 48

e-mail: [puigadam@mat.ucm.es](mailto:puigadam@mat.ucm.es)

Página web: [www.ucm.es/info/secdealg/puigadam](http://www.ucm.es/info/secdealg/puigadam)

## **JUNTA DIRECTIVA**

**Presidente:**

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

**Vicepresidentes:**

EUGENIO ROANES MACÍAS

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

**Vocales:**

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

ENRIQUE RUBIALES CAMINO

(Relaciones Institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

(Actividades y concursos)

**Secretario:**

JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

**Vicesecretaria:**

MARÍA GASPAS ALONSO-VEGA

**Tesorero:**

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

**Mantenedoras página web:**

BEATRIZ BARRERO DÍAZ

CAROLINA BRAVO SANZ

# Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2006

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2006 para el sábado *día 22 de abril del 2006*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

## ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

## **Nota sobre la cuota anual de la Federación**

Como saben todos nuestros socios, la cuota anual consta de dos partes: la de la nuestra Sociedad, que está establecida por la Asamblea General en 21 euros anuales, y la que se abona a la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Esta última ha sido elevada de 12 a 19 euros, lo que supone automáticamente que el recibo anual pasa a partir de ahora de 33 a 40 euros.

**La Junta Directiva**

# XXIV Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas  
y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Letras

## BASES DEL CONCURSO

**Primera:** Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

- a) *Primer nivel:* alumnos de 3º de E.S.O.
- b) *Segundo nivel:* alumnos de 4º de E.S.O.
- c) *Tercer nivel:* alumnos de 1º Bachillerato

**Segunda:** Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *10 de junio del 2006* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

**Tercera:** A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

**Cuarta:** Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 10 de Mayo del 2006, dirigiéndose por correo electrónico, carta o fax al presidente de nuestra Sociedad:

*Prof. Javier Etayo Gordejuela*  
*Departamento de Algebra*  
*Facultad de Ciencias Matemáticas*  
*28040-Madrid - Fax: 91 394 4662*  
*Correo electrónico: jetayo@mat.ucm.es*

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

**Quinta:** Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2005-2006.

# V Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

Como viene ocurriendo en los últimos años, el penúltimo sábado de noviembre fue un día de fiesta en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. Organizado por nuestra Sociedad y dicha Facultad, se celebró el V Concurso Intercentros que reunió a 270 estudiantes provenientes de 45 centros quienes, junto a sus profesores y a algunos padres de los pequeños, le daban a los pasillos de la Facultad un aire equiparable al día del Concurso de Primavera en su segunda fase.

La prueba nos trajo algunas pequeñas sorpresas: por ejemplo, los pequeños (1º y 2º de ESO) tuvieron muchísimas dificultades en decidir qué número es mayor  $8^{10}$ ,  $9^9$ , ó  $10^8$ : aunque hubo algunos -sin utilizar nada de álgebra- que supieron resolver un problema nada elemental: *Dos pasajeros de un avión llevan, entre los dos, 135 kilos de equipaje. El primero pagó 13,5 euros por su exceso de equipaje y el segundo 27 euros por el exceso del suyo. Si el total del equipaje perteneciera a una sola persona habría pagado 81 euros por el exceso del equipaje. ¿Cuántos kilos de equipaje son permitidos a cada persona sin tener que pagar nada adicional?*

Los mayores, Bachillerato, se liaron muchísimo -salvo muy pocos- al *calcular el área encerrada por la grafica de  $y^3 - xy^2 - 3y^2 = 4x^2y - 4x^3 - 12x^2$*

Y como siempre, la prueba más excitante fue la de relevos. Todos los problemas del concurso están en nuestra página web. Y dentro de muy poco meses, podréis leer en *NIVOLA* los enunciados con soluciones desarrolladas de todos los problemas que han aparecido en las cinco ediciones que llevamos.

En la relación de ganadores, aparecen centros y estudiantes ya conocidos, aunque hay que destacar la entrada del colegio Nuestra Señora de las Maravillas que, en su primer año de participación, ha obtenido el primer puesto en la relación de centros ganadores. Estos fueron:

## Centros Ganadores

- 1.- Colegio Ntra Sra De Las Maravillas
- 2.- Ies Ramiro De Maeztu
- 3.- Colegio Retamar

## **Estudiantes Ganadores**

### 1º Nivel (1º-2º Eso)

- 1º. Moisés Herradón Cueto (2º Eso, Colegio Brains)
- 2º. Alberto Ibarrondo Luis (Colegio Ntra Sra de las Maravillas)

### 2º Nivel (3º- 4º Eso)

- 1º. Gabriel Furstenheim Milerud (4º Eso Colegio Ntra Sra de la Sabiduría)
- 2º. Andrés Rodríguez Reina (4º Eso, Colegio Sek Ciudadcampo)

### 3º Nivel (Bachillerato) Empate para el Primer Puesto, por orden alfabético:

- 1º. Eduardo Casanova Cuesta (2º Bachillerato, Colegio Joyfe)
- 1º. Hugo Fernández Hervás (2º Bachillerato, IES San Juan Bautista)
- 1º. Daniel Luque Arriero (2º Bachillerato, IES Ramiro de Maeztu)
- 1º. Ding Ru (2º Bachillerato, IES Ramiro de Maeztu)

Y recordad esta fecha: penúltimo sábado de noviembre. Nos vemos el próximo año.

**Juan Jesús Donaire**  
**Joaquín Hernández**

# XLII Olimpiada Matemática Española

## Comunidad de Madrid

Siguiendo la línea marcada el año pasado, la Fase Local de la O.M.E. en nuestra Comunidad ha constado de dos pruebas: la primera, celebrada el último viernes de noviembre –fecha que mantendremos todos los próximos años– reunió a 239 estudiantes de nuestra Comunidad, la mayoría de Bachillerato aunque había algunas excepciones –y ya veremos luego qué excepciones– de estudiantes de ESO.

Esta prueba consistió en la resolución de 30 cuestiones de opción múltiple durante tres horas. La afluencia y, sobre todo, la intensidad con la que todos los estudiantes trabajaron durante esas tres horas, nos confirma que el camino elegido haciendo esta prueba de selección es el correcto. Cada cuestión se puntuaba con 5, 2 ó 0 puntos según estuviera correcta, en blanco o erróneamente respondida respectivamente.

Los estudiantes que sobrepasaban los 80 puntos, y fueron 88, pasaban a la segunda prueba, que tuvo lugar en dos sesiones de tres horas y media cada una durante el fin de semana del 20-21 de enero, en la que los estudiantes resolvieron los seis problemas que se pueden ver más abajo.

Los nueve ganadores de nuestra Comunidad asistirán a la Fase Nacional que se celebrará en Sevilla entre los días 23 y 26 de marzo y en la que estaríamos orgullosos si se repitieran los resultados del año pasado: 3 estudiantes de la Comunidad de Madrid entre los 6 componentes del equipo nacional que asistió a la Olimpiada Internacional de Mérida: Elisa Lorenzo García, nuestra ganadora en Madrid en los últimos años, ya es estudiante universitaria, mientras que Javier de la Nuez y Hugo Fernández Hervás, van a intentar, como veis, repetir este año.

Estos han sido los ganadores de este año.

### Primer Premio

Diego Izquierdo Arseguet (4º ESO, Liceo Francés de Madrid)

Javier de la Nuez González (2º Bach, Liceo Italiano de Madrid)

Hugo Fernández Hervás (2º Bach, IES San Juan Bautista)

### Segundo Premio

David Alfaya Sánchez (4º ESO, IES José Luis Sampedro, Tres Cantos)

Andrés Rodríguez Reina (4º ESO, Colegio SEK Ciudalcampo)

Javier Torres Niño (2º Bach, Colegio San Viator)

### Tercer Premio

Carlos Ramírez Carrillo (2º Bach, Colegio San Viator)

José María Pérez Ramos (1º Bach, Colegio Valdeluz)

Michael Ernesto López Lehmann (2º Bach, IES de Colmenarejo)

Como podéis observar, los nombres y centros de procedencia empiezan a sernos familiares. Pero merece la pena señalar que Diego Izquierdo Arseguet, estudiante del curso equivalente a 4º ESO en el Liceo Francés, ha obtenido 42 puntos sobre 42 puntos posibles. Diego viene quedando en primer lugar en todos los Concursos de Primavera en que ha participado y ha obtenido diversos premios en la Olimpiada de Mayo. Pero junto a Diego están David Alfaya y Andrés Rodríguez Reina, los dos también de 4º ESO. Con toda probabilidad, estos chicos nos auguran un futuro fantástico en los resultados de la Olimpiada en los próximos años.

También nos complace señalar que cinco de estos nueve estudiantes, Diego Izquierdo Arseguet, Javier de la Nuez, David Alfaya, Javier Torres Niño y José María Pérez Ramos han asistido al proyecto ESTALMAT, de estímulo del talento matemático que, bajo la financiación de la Fundación Vodafone, se desarrolla en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense.

En los dos próximos años tendremos más trabajo: en el próximo, la fase nacional se celebrará en Torrelodones y en el 2008, como ya sabéis, la Olimpiada Internacional se celebrará en nuestro país. Pero con estos chicos aspiramos a todo.

**Joaquín Hernández**

# Problemas propuestos en la Fase Local de la XLII OME

Primera sesión: viernes 20 de enero

## Problema 1

En el sótano del castillo, 7 gnomos guardan su tesoro. El tesoro está detrás de 12 puertas, cada una de ellas con 12 cerraduras. Todas las cerraduras son distintas. Cada gnomo tiene llaves para algunas de las cerraduras. Tres gnomos cualesquiera tienen conjuntamente llaves para todas las cerraduras. Probar que entre todos los gnomos tienen por lo menos 336 llaves.

*Media de todos: 4.71*

*Media premiados: 7*

## Problema 2

Determinar todos los enteros  $n$  tales que

$$\sqrt{\frac{25}{2} + \sqrt{\frac{625}{4} - n}} + \sqrt{\frac{25}{2} - \sqrt{\frac{625}{4} - n}}$$

es entero.

*Media de todos: 2.23*

*Media premiados: 3.9*

## Problema 3

Dos esferas de radio  $r$  son tangentes exteriores. Tres esferas de radio  $R$  son tangentes exteriores entre sí, cada una tangente a las otras dos. Cada una de estas esferas es, además, tangente exterior a las dos primeras. Encontrar la relación existente entre  $R$  y  $r$ .

*Media de todos: 1.74*

*Media premiados: 6.9*

Segunda sesión: sábado 21 de enero

**Problema 4**

Calcular los números  $p$  y  $q$  tales que las raíces de la ecuación

$$x^2 + px + q = 0$$

sean  $D$  y  $1 - D$ , siendo  $D$  el discriminante de esa ecuación de segundo grado.

*Media de todos: 4.05*

*Media premiados: 6.9*

**Problema 5**

Los números naturales 22, 23, y 24 tienen la siguiente propiedad: los exponentes de los factores primos de su descomposición son todos impares:

$$22 = 2^1 \cdot 11^1; \quad 23 = 23^1; \quad 24 = 2^3 \cdot 3^1.$$

¿Cuál es el mayor número de naturales consecutivos que pueden tener esa propiedad?. Razónese la contestación.

*Media de todos: 3.14*

*Media premiados: 6*

**Problema 6**

Los vértices del cuadrilátero convexo  $ABCD$  están situados en una circunferencia. Sus diagonales  $AC$  y  $BD$  se cortan en el punto  $E$ . Sea  $O_1$  el centro del círculo inscrito en el triángulo  $ABC$ , y  $O_2$  el centro del círculo inscrito en el triángulo  $ABD$ . La recta  $O_1O_2$  corta a  $EB$  en  $M$  y a  $EA$  en  $N$ . Demostrar que el triángulo  $EMN$  es isósceles.

*Media de todos: 0.4*

*Media premiados: 2.9*

## Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)* y *Mathematical Reviews* incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

### RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM, VOL. 37 (5) DE 2005

- #2384 (Sección I24). La importancia de llamarse coseno hiperbólico, por *Fernando Etayo Gordejuela*. Bol. Soc. Puig Adam 69 (feb 2005), págs. 16-26.
- #2107 (Sección D30). ¿Por qué Juanito no sabe sumar? (1973) ¿Por qué Juanito no sabe sumar aún? (2004), por *J. M. Aroca Hernández-Ros*. Bol. Soc. Puig Adam 69 (feb 2005), págs. 27-39.
- #2490 (Sección M60). Construcción, basada en la Lógica y el Álgebra Computacionales, de un Sistema Experto para diagnóstico de la Depresión, por *Luis M. Laita, Vanessa Serrano, Carlos Rodríguez Solano, Eugenio Roanes Lozano, Laura Laita*. Bol. Soc. Puig Adam 69 (feb 2005), págs. 40-52.
- #2351 (Sección G90). Una desigualdad en los triángulos rectángulos, por *Juan-Bosco Romero Márquez*. Bol. Soc. Puig Adam 69 (feb 2005), págs. 53-59.
- #2555 (Sección U80). “Pokémon”: Una propuesta tecnológica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, por *Benjamín García Gigante*. Bol. Soc. Puig Adam 69 (feb 2005), págs. 60-68.
- #2511 (Sección N40). Sobre el método Monte-Carlo de la altura media en el Cálculo Integral en varias dimensiones, por *J.C. Cortés y G. Calbo Sanjuán*. Bol. Soc. Puig Adam 69 (feb 2005), págs. 69-81.
- #2407 (Sección I50). Volumen de la n-esfera, por *Sergio Falcón, Ángel Plaza y José P. Suárez*. Bol. Soc. Puig Adam 69 (feb 2005), págs. 82-90.

# Redes de Steiner de esferas

**Julio Fernández Biarge**

Profesor emérito de la  
Universidad Politécnica de Madrid  
jfbiarage@telefonica.net

## Abstract

*In this paper, we study a generalization of the Steiner's chains of circles. We consider two spherical surfaces, one inside the other, and a set of spheres tangent to both these surfaces, so that each one be externally tangent to at least three of the others. We call Steiner's networks to these sets; we consider some particular cases and we prove several properties, including the generalization of the familiar Steiner's alternative.*

## 1. Introducción

En el reciente artículo [1] de E. Roanes-Macías y E. Roanes-Lozano sobre las cadenas de Steiner de esferas se considera una generalización al espacio de las cadenas de Steiner de circunferencias, que no es la única posible. Vamos a considerar otra que llamaremos “redes de Steiner de esferas”, consideradas como conjuntos de superficies esféricas, todas ellas tangentes interiormente a una superficie esférica y exteriormente a otra contenida en el interior de aquella, satisfaciendo además ciertas condiciones de tangencia entre ellas.

En lo que sigue, para simplificar el lenguaje, hablaremos de “esferas” con el significado de “superficies esféricas” y las denotaremos con las letras  $E$ ,  $S$  o  $T$ , afectadas de subíndices, acentos, etc.; si usamos la letra  $E$ , representaremos el centro y la longitud del radio de cada una con las letras  $O$  y  $R$  afectadas de los mismos subíndices, acentos, etc.; si usamos las letras  $S$  o  $T$ , emplearemos para sus centros  $O_S$  y  $O_T$  y para sus radios,  $\sigma$  y  $\tau$ .

## 2. Redes de Steiner de esferas

Siendo  $S$  una esfera situada en el interior de otra  $T$ , designaremos como *red de Steiner entre  $S$  y  $T$*  a un conjunto  $\Phi = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  de  $n$  esferas (con  $n \geq 4$ ) todas ellas tangentes exteriores a  $S$  y tangentes también a  $T$ , pero situadas en el interior de ésta, siendo además cada una de las  $E_i$  exterior a las restantes  $E_j$  pero tangente por lo menos a tres de ellas.

Una red de Steiner  $\Phi$  se dirá *conexa* si para cada dos elementos distintos de ella  $E_i, E_j$  existe un subconjunto ordenado de elementos de  $\Phi$  cuyo primer elemento es  $E_i$  y cuyo último es  $E_j$  tal que cada uno de los restantes elementos es tangente al que le precede y al que le sigue. No es evidente la existencia de redes de Steiner que no sean conexas, pero más adelante pondremos algunos ejemplos de ellas.

En el caso de que las esferas  $S$  y  $T$  sean concéntricas (de centro en  $O_S = O_T$ , que llamaremos  $O$ ), diremos que la red de Steiner es *centrada*.

En una red de Steiner centrada, las  $n$  esferas  $E_i$  son evidentemente de igual radio,  $R = (\tau - \sigma)/2$ . Además, los centros de las  $E_i$  están situados en una superficie esférica  $E_c$ , también concéntrica, de radio  $R_c = (\tau + \sigma)/2$  y existe otra superficie esférica  $E_0$ , de centro en  $O$ , que corta ortogonalmente a todas las  $E_i$ , siendo  $R_0^2 = \sigma \cdot \tau$  (= potencia de  $O$  respecto a cualquiera de las  $E_i$ ). Nótese que  $R_c$  es la media aritmética de  $\tau$  y  $\sigma$ , mientras  $R_0$  es su media geométrica.

Los centros de las esferas  $E_i$  de una red de Steiner centrada conexa  $\Phi$  son los vértices de un poliedro  $\Omega_n$  de  $n$  vértices inscrito en la esfera  $E_c$ ; en este poliedro, en cada vértice concurren al menos tres aristas de longitud  $2R$ , que unen centros de esferas de  $\Phi$  tangentes entre sí (aunque pueden concurrir además otras de mayor longitud).

## 3. Transformación de una red de Steiner en otra centrada

Proposición 1. *Si una red de Steiner no es centrada, puede transformarse en otra centrada mediante una inversión.*

En efecto, las esferas  $S$  y  $T$ , al no ser secantes, definen un haz de esferas con dos puntos límites (esferas de radio nulo del haz)  $P$  y  $Q$ . Sea  $P$  el punto límite situado en el exterior de ambas. Es sabido que las esferas que pasan por  $P$  y por  $Q$  (que tienen sus centros en el plano radical de  $S$  y  $T$ ) cortan ortogonalmente a todas las del haz.

Recordaremos que una inversión transforma las esferas que pasan por su polo en planos, y conserva la condición de cortarse ortogonalmente; por tanto, una inversión de polo en  $P$  transformará las esferas que pasan por  $P$  y por  $Q$  en los planos de una radiación, que cortarán ortogonalmente a las esferas transformadas  $S'$  y  $T'$ , o sea que serán planos diametrales de ellas; por tanto,  $S'$  y  $T'$  serán concéntricas. Designaremos simplemente con  $O$  al centro coincidente de  $S'$  y  $T'$  (es decir,  $O = O_{S'} = O_{T'}$ ).

Como la inversión conserva las relaciones de tangencia y, al ser  $P$  exterior a  $T$ , también las propiedades de ser interiores o exteriores, las transformadas  $E_i'$  de las  $E_i$  de la red  $\Phi$ , formarán otra red de Steiner centrada,  $\Phi'$ , entre  $S'$  y  $T'$ . Si además, como potencia de inversión, se toma la potencia de  $P$  respecto a  $T$ , esta esfera quedará invariante, o sea  $T' = T$  y  $O_T = O$ . Llamaremos  $\Pi$  a esta inversión.

Por medio de esta inversión podemos deducir interesantes propiedades de las redes de Steiner y proceder a considerar tipos especiales de ellas. En la Figura 1ª hemos representado la sección de una red de Steiner y de la centrada transformada de ella mediante la inversión  $\Pi$ , mediante un plano que pasa por la recta  $r$  que contiene los puntos alineados  $P$ ,  $O_S$  y  $O$ , y el centro  $O_1$  de una de las esferas de la red,  $E_1$ . Observemos que todas las secciones de esferas representadas son secciones diametrales.

Llamaremos  $\mu$  al cociente de los radios de las esferas concéntricas  $S'$  y  $T'$  o sea  $\mu = \sigma' / \tau$ , y  $d$  a la distancia  $O_S O_T$  entre los centros de  $S$  y  $T$ , y trataremos de relacionar los valores de  $\mu$ ,  $d$ ,  $\sigma$  y  $\tau$ . Sean  $U$  y  $V$  las intersecciones de  $r$  con  $S$ , y  $U'$  y  $V'$  sus transformadas en  $\Pi$  y sea  $p$  la distancia  $PO$ . La potencia de la inversión  $\Pi$  es  $p^2 - \tau^2$ , pero también es el producto de  $PU = p - d - \sigma$  por  $PU' = p + \sigma'$  y el de  $PV = p - d + \sigma$  por  $PV' = p - \sigma'$ . Igualando las expresiones obtenidas para dicha potencia y eliminando  $p$ , se obtiene la siguiente proposición.

Proposición 2. Si una red de Steiner entre las esferas  $S$  y  $T$ , cuyos radios son  $\sigma$  y  $\tau$ , y cuyos centros distan  $d$ , se transforma mediante una inversión en otra centrada entre las esferas  $S'$  y  $T'$ , el cociente de los radios de éstas,  $\mu = \sigma' / \tau'$  satisface a la relación

$$(\tau - \mu \cdot \sigma)(\mu \cdot \tau - \sigma) = \mu d^2 \quad (1)$$

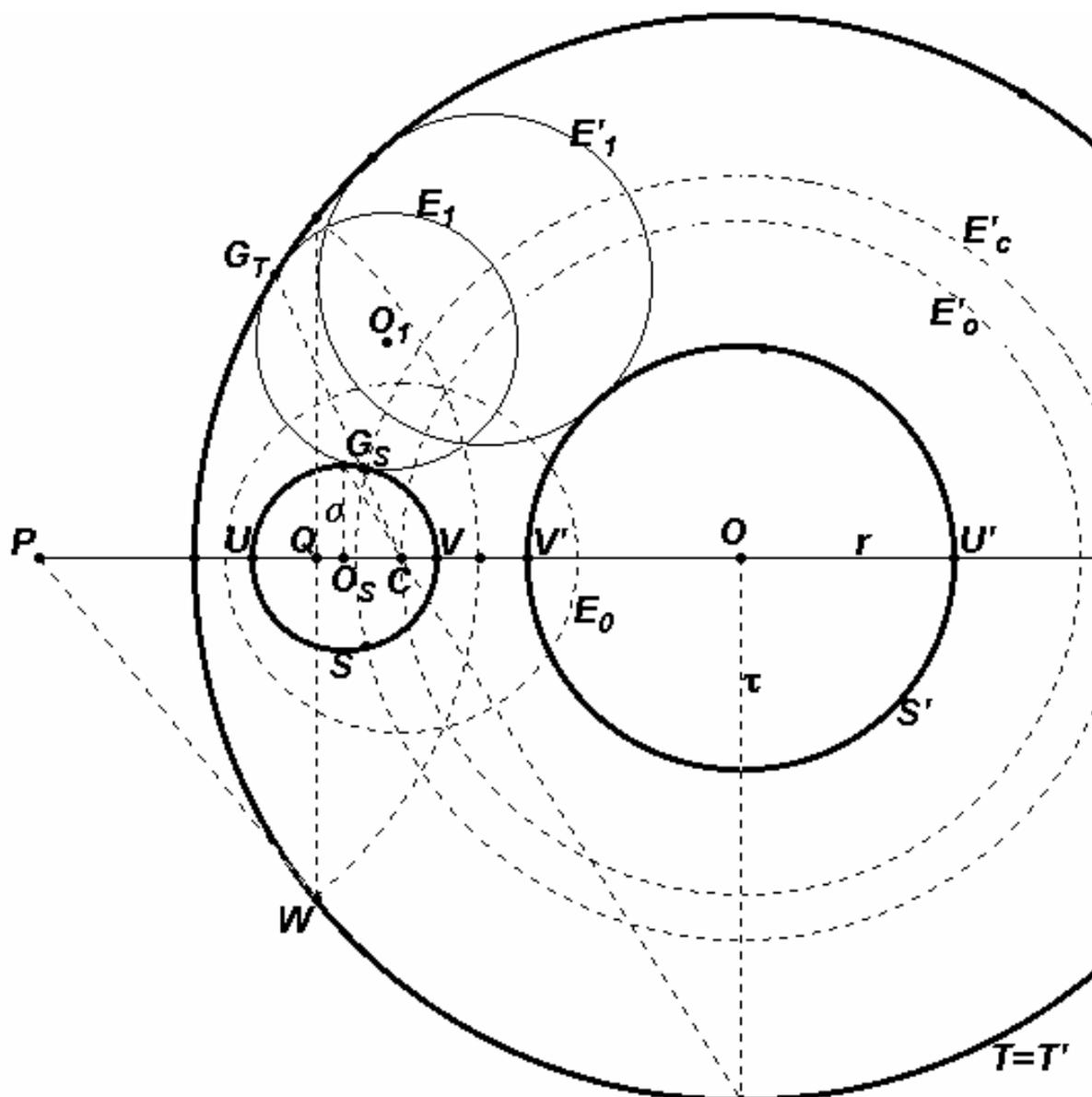


Figura 1

Nótese la semejanza de la fórmula (1) con la obtenida en [2] para el caso de dos dimensiones.

Como hemos dicho antes, al ser centrada la red de las  $E_i'$ , existirá una superficie esférica  $E_0'$  ortogonal a todas ellas, transformada en  $\Pi$  de otra  $E_0$ , que será ortogonal a todas las  $E_i$  de la red original y pasará por los puntos de tangencia entre ellas. Es decir:

*Proposición 3. Dada cualquier red de Steiner, se puede construir una superficie esférica que corta ortogonalmente a todas sus esferas y pasa por los puntos de tangencia entre ellas.*

Por otra parte, si  $C$  es el centro de la homotecia de razón negativa que transforma  $S$  en  $T$ , es sabido que  $C$  es también el polo de una inversión  $\Psi$  de potencia positiva que transforma cada una de estas superficies esféricas en la otra. Ese punto  $C$  tiene la misma potencia respecto a las  $n$   $E_i$ , o sea que es el centro radical de ellas. La inversión  $\Psi$  transforma cada una de las esferas  $E_i$  en sí mismas y conserva las relaciones de tangencia. Por tanto, podemos enunciar:

*Proposición 4. Toda red de Steiner entre las esferas  $S$  y  $T$  es invariante (analgmática) en una inversión  $\Psi$  de potencia positiva que transforma éstas, cada una en la otra. En consecuencia, los puntos de tangencia  $G_S$  y  $G_T$  de cada  $E_i$  con  $S$  y con  $T$  están alineados con el polo  $C$  de  $\Psi$ .*

#### **4. Redes de Steiner regulares**

Hemos visto que en una red de Steiner centrada conexa, los centros de las  $E_i$  son vértices de un poliedro  $\Omega_n$  de  $n$  vértices inscrito en una esfera  $E_c$ . Esto nos permite considerar tipos especiales de redes de Steiner.

Por ejemplo, si al transformar una red de Steiner  $\Phi = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  en otra centrada  $\Phi' = \{E_1', E_2', \dots, E_n'\}$ , el poliedro  $\Omega_n$  cuyos vértices son los centros de las esferas  $E_i'$  resulta ser regular, diremos que aquella es una *red de Steiner regular* y hablaremos de *redes de Steiner tetraédricas, octaédricas, hexaédricas, icosaédricas o dodecaédricas regulares*, según que el valor de  $n$  (número de vértices) sea, respectivamente, 4, 6, 8, 12 o 20 (únicos posibles). De igual manera se puede hablar de *redes de Steiner semirregulares*, cuando el citado poliedro lo sea. Por supuesto que las redes de Steiner regulares o semirregulares son siempre conexas.

En la figura 2ª se ha representado una red de Steiner icosaédrica regular centrada. (de 12 esferas con centros en los vértices de un icosaedro)

Si  $R'$  es el radio de las esferas  $E_i'$ , y  $R_c'$  es el radio de  $E_c'$ , o sea el radio de la esfera circunscrita a  $\Omega_n$ , será  $\sigma' = R_c' - R'$  y  $\tau' = R_c' + R'$  y, en definitiva,

$$\mu = \frac{\sigma'}{\tau'} = \frac{R_c' - R'}{R_c' + R'}$$

La longitud de las aristas de  $\Omega_n$  es  $2R'$ , valor íntimamente ligado al de  $R_c'$ : el valor de

$$\lambda = \frac{R_c'}{R'}$$

es conocido para cada tipo de poliedro regular (ver cualquier libro de geometría, [3]; podríamos citar incluso el libro XIII de los Elementos de Euclides) y

$$\mu = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 1}$$

Es fácil deducir los valores dados en la siguiente tabla:

$\Omega_n$	$n$	$\lambda$	$\mu$
tetraedro	4	$\sqrt{6}/2$	$5 - 2\sqrt{6} \approx 0,101021$
octaedro	6	$\sqrt{2}$	$3 - 2\sqrt{2} \approx 0,171573$
hexaedro	8	$\sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3} \approx 0,267949$
icosaedro	12	$\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/2$	$4 - \sqrt{5} - (3 - \sqrt{5})\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}/2 \approx 0,310847$
dodecaedro	20	$(\sqrt{15} + \sqrt{3})/2$	$8 - 3\sqrt{5} + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{15} \approx 0,474032$

Tabla 1ª

Está claro que si  $\Phi = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$  es una red de Steiner poliédrica regular entre  $S$  y  $T$ , la red transformada mediante  $\Pi$ ,  $\Phi' = \{E_1', E_2', \dots, E_n'\}$ , está entre dos esferas concéntricas  $S'$  y  $T'$ , por lo que puede transformarse en otra mediante cualquier giro en torno a un eje que pase por el centro de esas esferas. La inversión  $\Pi$  aplicada de nuevo a la  $\Phi'$  girada nos da así nuevas redes de Steiner de igual tipo entre las  $S$  y  $T$ .

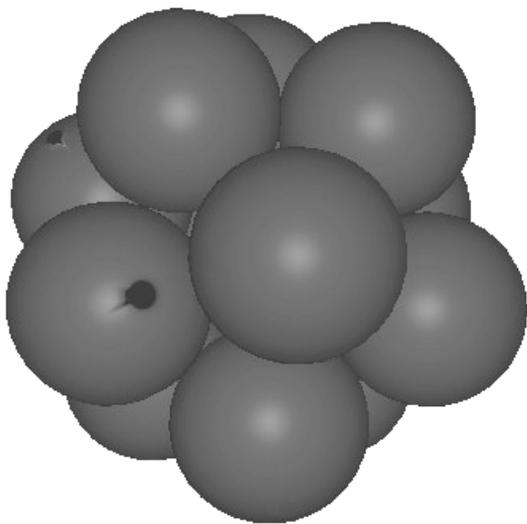


Figura 2

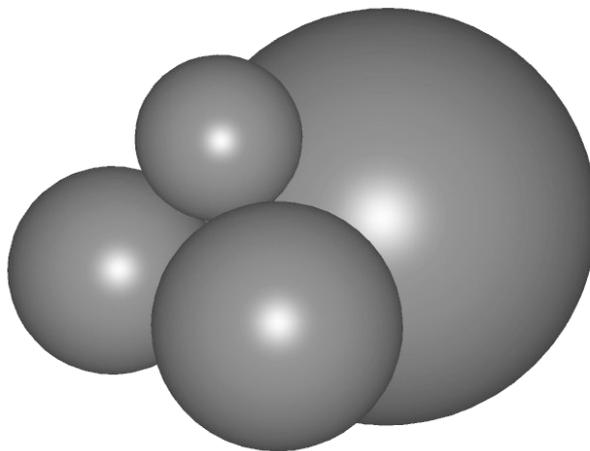


Figura 3

La elección del giro antedicho nos ofrece *tres grados de libertad*, aunque uno de ellos se reduce a un giro arbitrario en torno a la recta que une el polo de  $\Pi$  con el centro, dando, en consecuencia, figuras congruentes. Quedan, por tanto, *dos grados de libertad* para escoger el eje antedicho, que dan lugar a redes diferentes. Resulta así la siguiente proposición.

**Proposición 5 (Alternativa de Steiner).** *Si los radios  $\sigma$  y  $\tau$  de dos superficies esféricas y la distancia  $d$  entre sus centros satisfacen a (1) con alguno de los valores de  $\mu$  dados en la tabla 1<sup>a</sup>, existen redes poliédricas de Steiner regulares entre ambas, del tipo correspondiente, y éstas se pueden escoger de infinitas maneras (con dos grados de libertad además de un giro arbitrario en torno a la recta que une sus centros). Si  $\sigma$ ,  $\tau$ , y  $d$  no satisfacen a (1) con alguno de dichos valores de  $\mu$ , no existen tales redes poliédricas regulares.*

## 5 Redes de Steiner tetraédricas

Una red de Steiner tetraédrica consta de cuatro esferas  $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  tangentes dos a dos. (Figura 3<sup>a</sup>). Los radios  $R_i$  de las  $E_i$  no son totalmente arbitrarios, pues aunque se pueden elegir libremente tres de ellos, el cuarto no debe ser inferior a un cierto valor, para que la cuarta esfera sea tangente las tres primeras, y

además, debe superar a otro valor para que una esfera  $T$  tangente a las cuatro, las contenga en su interior.

Podemos hacer uso de un teorema (que se remonta en el fondo a Descartes) que relaciona los radios  $R_i$  de cinco esferas tangentes dos a dos (cada una exteriormente a las restantes o a todas en su interior, en cuyo caso el radio  $R_i$  se considera negativo), y que también incluye el caso de que una de las esferas se sustituya por un plano, poniendo en la fórmula 0 en lugar de  $1/R_i$ . Este teorema (ver [4]) establece que:

$$\left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right)^2 = 3 \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_3^2} + \frac{1}{R_4^2} + \frac{1}{R_5^2} \right) \quad (2)$$

Para comodidad del cálculo escribiremos

$$s_m = \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_m} \right) \quad \text{y} \quad c_m = \left( \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \dots + \frac{1}{R_m^2} \right) \quad (3)$$

con lo que (2) queda en la forma

$$s_5^2 = 3c_5.$$

Conocidos los radios  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , de las esferas tangentes dos a dos consideradas, la ecuación (2) permite calcular el radio  $R_5$  de una quinta esfera tangente a ellas, obteniéndose

$$\frac{1}{R_5} = \frac{1}{2} \left( s_4 \pm \sqrt{3s_4^2 - 6c_4} \right) \quad (4)$$

Si las cuatro esferas dadas  $E_i$  forman una red de Steiner, las dos soluciones obtenidas son los recíprocos de los radios de  $S$  y de  $T$ , pero este último con signo menos, para indicar que  $T$  las contiene. Por tanto, para que uno de los valores de (4) sea negativo, deberá cumplirse  $s_4^2 > 3c_4$ . Si no se cumple esto, las esferas no forman una red de Steiner. A su vez, para que se cumpla esta desigualdad, si  $R_4$  es el menor de los cuatro radios  $R_i$ , y llamamos  $x$  a su recíproco, debe ser  $(s_3 + x)^2 > 3(c_3 + x^2)$ , o sea

$$\frac{1}{R_4} < \frac{1}{2} \left( s_3 + \sqrt{3s_3^2 - 6c_3} \right)$$

Resulta así:

Proposición 6. Cuatro esferas  $\{ E_1, E_2, E_3, E_4 \}$  tangentes exteriormente dos a dos, forman una red de Steiner si y sólo si sus radios cumplen (con las notaciones (3))  $s_4^2 > 3c_4$ , o sea, siendo  $R_4$  es el menor de los cuatro radios, si

$$\frac{1}{R_4} < \frac{1}{2} \left( s_3 + \sqrt{3s_3^2 - 6c_3} \right)$$

Si esa condición se cumple,  $\{ E_1, E_2, E_3, E_4 \}$  es una red de Steiner tetraédrica regular.

La regularidad del tetraedro  $\Omega_4$  cuyos vértices son los centros de las esferas transformadas en  $\Pi$  y cuyas aristas miden todas  $2R'$ , es evidente.

## 6 Otras redes de Steiner

Si al transformar una red de Steiner mediante la inversión  $\Pi$ , resulta otra centrada cuyas esferas tienen sus centros en los vértices de un poliedro semi-regular  $\Omega_n$ , diremos que aquella es poliédrica *semi-regular*.

Podemos considerar, en particular, los casos de los poliedros semi-regulares “triviales”: los *prismas regulares* cuyas bases son polígonos regulares iguales de  $m$  lados y cuyas caras laterales son cuadrados y los *prismatoides regulares*, con dos bases que son polígonos regulares de  $m$  lados y cuyas caras laterales son triángulos equiláteros. La existencia de estas redes de Steiner, cualquiera que sea  $m$ , prueba que el número de esferas de que constan éstas puede ser tan grande como se quiera.

En el caso del prisma, sus aristas laterales, iguales a los lados de las bases, miden

$$\frac{2R_c \operatorname{sen}(\pi / m)}{\sqrt{1 + \operatorname{sen}^2(\pi / m)}}$$

lo que permite calcular los valores de  $\lambda$  y  $\mu$  dados en la tabla 2<sup>a</sup>. Nótese que para  $m = 4$ , resulta el caso del hexaedro regular.

En el caso del prismaoide, las aristas laterales, iguales a los lados de las bases, miden

$$\frac{2R_c \operatorname{sen}(\pi/m)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2(\pi/m) + \cos^2(\pi/2m)}}$$

obteniéndose los valores de  $\lambda$  y  $\mu$  dados en la tabla 2<sup>a</sup>. Nótese que para  $m = 3$ , resulta el caso del octaedro regular. En la figura 4<sup>a</sup> mostramos una red de Steiner centrada del tipo que estamos considerando con  $m = 9$ , que en consecuencia consta de 18 esferas. En gris claro se ha representado la esfera  $S$  a la que son tangentes exteriormente todas ellas.

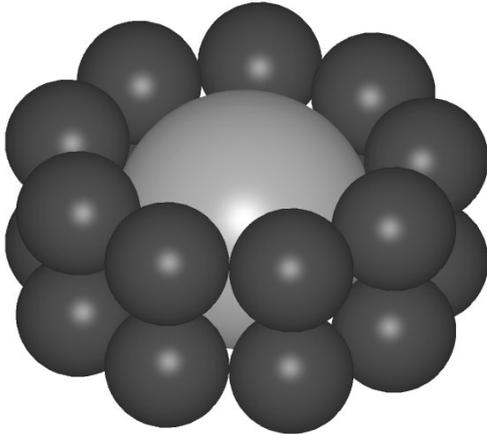


Figura 4

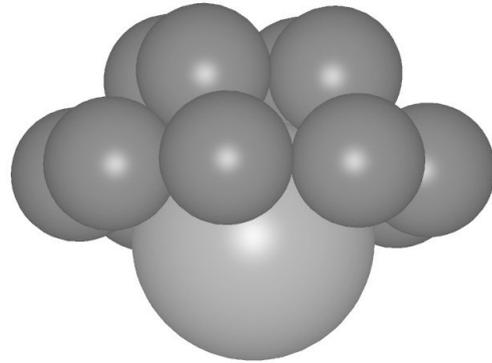


Figura 5

Otro tipo interesante de redes de Steiner es el de las que al transformarlas en otra centrada, el poliedro  $\Omega_n$  es un prismatoide cuyas bases son polígonos regulares de  $m$  y  $2m$  lados ( $m > 2$ ) y cuyas caras laterales son  $m$  cuadrados y  $m$  triángulos equiláteros. Llamaremos “*cascos*” a estas redes. La red tiene  $3m$  esferas ( $n = 3m$ ), de las que  $m$  son tangentes a cuatro de las restantes y  $2m$  tangentes a otras tres.

Consideremos el caso  $m = 4$ . El casco resultante consta de 12 esferas. En la figura 5<sup>a</sup> se ha representado uno, junto con la esfera  $S$  tangente exteriormente a todas ellas (en gris más claro). Un cálculo sencillo pero tedioso nos dice que la distancia del centro  $O$  al plano de la base octogonal del prismatoide es igual al radio de las esferas de la red,

$$R = \sqrt{(10 - 4\sqrt{2})/17} R_c$$

En consecuencia, las 8 esferas que tienen sus centros en los vértices del octógono, son tangentes a un plano diametral de  $S$  y  $T$ . Esta red de Steiner  $\Phi$  se transforma en otra  $\Phi'$  mediante una simetría respecto al centro  $O$ . (debe notarse que  $\Phi \cup \Phi'$  es la red de Steiner de 24 esferas correspondiente a un  $\Omega_{24}$  semi-regular de 26 caras: 18 cuadradas y 8 triangulares, denominado a veces “pequeño rombo-cubo-octaedro”). Si  $\Phi'$  se gira  $1/16$  de vuelta en torno al eje perpendicular al plano citado antes, se obtiene una nueva red  $\Phi''$  cuyas 12 esferas no tienen puntos comunes ni de tangencia con las de  $\Phi$ , por lo que la unión de ambas,  $\Phi \cup \Phi''$ , es una red de Steiner no conexas, quedando así probada la existencia de redes de este tipo advertida antes.

En la Figura 6ª se ha representado una red de Steiner semi-regular centrada, con  $n = 12$ , correspondiente a un cubo-octaedro (o cubo truncado), que tiene 12 caras (8 triangulares y 6 cuadradas), 12 vértices y 24 aristas iguales; cada esfera es tangente a otras cuatro, de las cuales, dos son tangentes entre sí y las otras dos también.

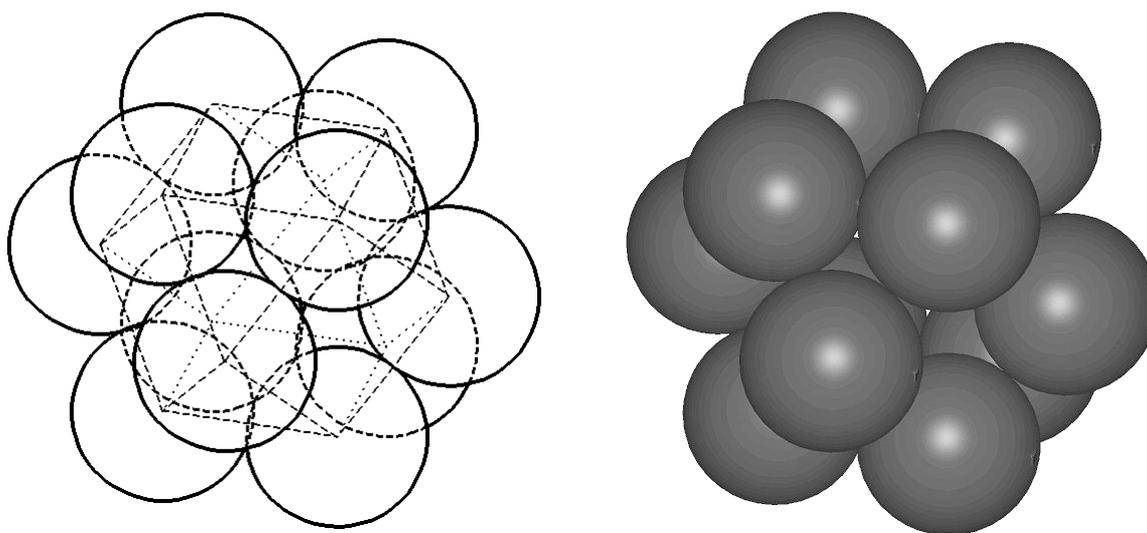


Figura 6

No todos los poliedros que suelen considerarse como generalización de los regulares o semi-regulares corresponden a redes de Steiner, pues en una red de Steiner centrada, las condiciones que ha de cumplir el poliedro  $\Omega_n$  son:

1) debe ser inscriptible en una superficie esférica.

2) aunque sus aristas pueden eventualmente no ser todas iguales, si  $2R'$  es la menor de sus longitudes, en cada vértice deben concurrir al menos tres de esa longitud; las esferas de la red tendrán entonces radio igual a  $R'$ .

Esto no ocurre, por ejemplo, en el *rombododecaedro*, que tiene 24 aristas iguales y 14 vértices, por lo que aunque podrían construirse 14 esferas, cada una tangente a tres o cuatro de las restantes, sus centros no distarían todos lo mismo del centro del poliedro y no existirían las esferas  $S'$  y  $T'$  tangentes a todas.

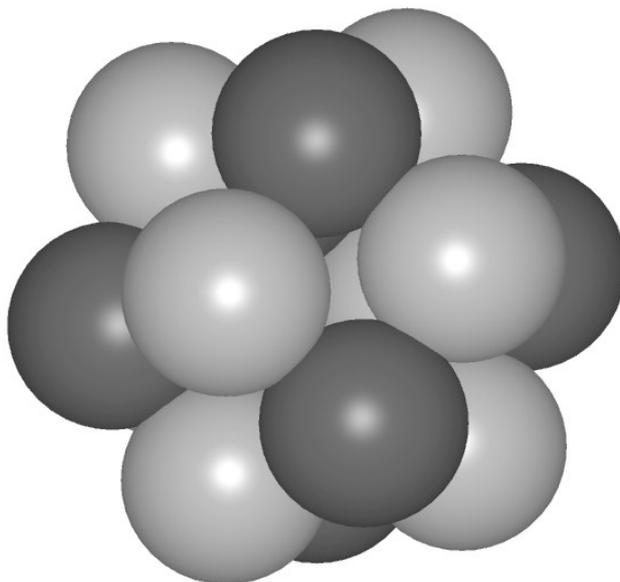


Figura 7

Por ejemplo, el hexaedro apuntado (que resulta de adosar en cada cara de un hexaedro regular una pirámide cuadrangular recta, de modo que su vértice diste del centro del hexaedro lo mismo que los vértices de éste) tiene 14 vértices, 24 caras y 36 aristas: 24 cortas y 12 largas, por lo que da lugar a una red de Steiner poliédrica de 14 esferas, cuyos radios miden la mitad de la longitud de las aristas cortas (Ver Figura 7<sup>a</sup>); de estas 14 esferas, 6 (más oscuras) son tangentes a otras cuatro de la red y las 8 restantes (más claras), sólo a tres de ellas.

Para cada tipo de una de estas redes de Steiner, se pueden calcular los valores de  $\lambda$  y  $\mu$ , como en las regulares. En la tabla 2<sup>a</sup> damos estos valores para cada

uno de los tipos de redes de Steiner considerados antes con  $\Omega_n$  prisma o prismatoide regulares, para el casco ( $m = 4$ ) y para las redes representadas en las figuras 5ª y 6ª. En esta tabla, se ha escrito  $s$  para  $\sin(\pi/m)$  y  $c$  para  $\cos(\pi/(2m))$ .

	Fª	n	$\lambda$	$\mu$
Prisma - $m$	4ª	$2m$	$\sqrt{1+s^2}/s$	$1-2s(\sqrt{1+s^2}-s)$
Prismatoide- $m$	--	$2m$	$\sqrt{s^2+c^2}/s$	$(\sqrt{s^2+c^2}-s)/c^2$
Casco $m=4$	5ª	12	$\sqrt{17/(5-2\sqrt{2})}$	$(\sqrt{17}-\sqrt{5-2\sqrt{2}})^2(6-\sqrt{2})/68 \approx 0,47340$
Cubo-octaedº	6ª	12	2	$1/3 \approx 0,33333$
Hexaedro apuntado	7ª	14	$\sqrt{3+\sqrt{3}}$	$1+(4-2\sqrt{3})(1-\sqrt{3+\sqrt{3}}) \approx 0,37014$

Tabla 2ª

Para todos los tipos de redes de Steiner considerados sigue siendo válida una proposición análoga a la 5ª, o sea una “alternativa de Steiner”, con el valor de  $\mu$  correspondiente a cada caso.

## Referencias

- [1] E. Roanes-Macias y E. Roanes-Lozano (2005). Aplicación de la transformación inversión 3D a construir cadenas de Steiner de esferas. En: F. Santos y D. Orden, editores: *Actas de XI Encuentros de Geometría Computacional. Univ. De Cantabria*. Págs. 141-148.
- [2] J. Fernández Biarge (1992). *En torno al logotipo de la XXVIII Olimpiada Matemática Española*. Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, nº 30.
- [3] P. Puig Adam (1947). *Geometría Métrica*. Madrid. Tomo I, pág. 286 ss.
- [4] H.S.M. Coxeter (1968) *Loxodromic sequences of tangent spheres*. A Equations Mathematicae. Num 1.

# Transformación que alinea los centros de tres esferas preservando tangencias \*

**E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano**  
Sec. Dept. Algebra, Fac. Educación UCM  
{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

## Abstract

*Given three spherical surfaces with non-collinear centers, we try to find a transformation that converts them into spherical surfaces whose centers are collinear points and such that tangency is preserved, if applies. That an inversion-type transformation satisfying these conditions exists is proven. A synthetic geometry constructive method to determine such a transformation, applicable when the three given spherical surfaces satisfy certain conditions, is shown. Moreover, preserving tangent surfaces propriety makes this transformation very useful for solving configuration problems involving spherical surfaces. Finally, an algorithm to implement this method on Computer Algebra Systems is also provided.*

## Introducción

En el número 30 del Boletín [2] se trató el problema clásico de la construcción de una cadena de circunferencias tangentes a dos dadas, una interior a la otra, siendo cada una de las circunferencias eslabones de la cadena tangente exteriormente a sus dos contiguas. En el número 70 del Boletín [4] se mostró otro método de construcción de dichas cadenas de circunferencias, distinto del tradicional de Jakob Steiner, expuesto por ejemplo en [1].

Posteriormente, los dos primeros autores de aquel artículo, hemos tratado de extender a 3 dimensiones el problema anterior, substituyendo circunferencias por superficies esféricas. Se suponen dadas tres superficies esféricas,

---

\*Parcialmente subvencionado por el proyecto *MTM2004-03175* del Ministerio de Educación y Ciencia.

$S_1, S_2, S_3$  tales que  $S_1$  y  $S_2$  no estén contenidas una en la otra y ambas estén contenidas (parcialmente, al menos) en  $S_3$ . A partir de ellas, se consideran cadenas de esferas, cada una tangente exteriormente a sus dos contiguas en la cadena, tangente exteriormente a  $S_1$  y a  $S_2$ , y tangente interiormente a  $S_3$ . El problema lo resolvimos con técnicas computacionales simbólico-numéricas, siendo presentado a los XI Encuentros de Geometría Computacional [5]. Para resolverlo se hizo uso de una inversión que transformaba las tres superficies esféricas  $S_1, S_2, S_3$  en otras tres cuyos centros eran colineales, reduciendo así el problema a otro mucho más simple. Dicha inversión se determinaba aplicando métodos de algebra computacional para resolver exactamente un sistema de ecuaciones algebraicas no lineal.

Interesados por la enjundia del problema de la determinación de dicha inversión desde un punto de vista exclusivamente geométrico, hemos encontrado una solución vía Geometría Sintética, que exponemos a continuación.

Por otra parte, la solución encontrada en este estudio puede ser útil en la resolución de otros problemas geométricos de configuración relativos a superficies esféricas, como son muchos de los expuestos en [3]. De ello nos ocuparemos en otra ocasión, por rebasar el propósito de este artículo.

## 1 Condiciones de contorno del problema

Así pues, el problema a resolver consiste en determinar una inversión que transforme tres superficies esféricas dadas, en otras tres cuyos centros sean colineales. La dificultad del problema proviene del hecho de que, en general, las imágenes de los centros de las superficies esféricas inversas de las dadas no son los centros de dichas inversas.

En adelante, denotaremos por  $S_1, S_2, S_3$  a las tres superficies esféricas dadas, por  $C_1, C_2, C_3$  a sus respectivos centros y por  $r_1, r_2, r_3$  a sus radios.

Comenzamos notando que en el caso bidimensional de las cadenas de circunferencias entre dos circunferencias dadas, a estas dos se les impone la condición de ser una interior a la otra, para asegurar que las cadenas de circunferencias entre ellas puedan dar la vuelta completa, con el fin de poder generar cadenas cerradas, que en definitiva son las más interesantes. Para conseguir este mismo fin en el caso de dimensión 3, a las tres superficies esféricas dadas,  $S_1, S_2, S_3$ , les impondremos condiciones que aseguren la exis-

tencia de cadenas que puedan dar la vuelta completa. Tales condiciones son siguientes:

- i) tanto  $S_1$ , como  $S_2$ , ha de ser interior, tangente interiormente o secante con la tercera,  $S_3$  (es decir, no ha de ser exterior ni tangente exteriormente a  $S_3$ )
- ii) las dos primeras,  $S_1$  y  $S_2$ , han de ser entre sí exteriores, tangentes exteriormente o secantes (es decir, no han de ser tangentes interiormente entre sí o una interior a la otra)
- iii) si  $S_1$  y  $S_2$  tienen puntos comunes, entonces sus puntos comunes han de ser puntos interiores a  $S_3$
- iv) si  $S_1$  y  $S_2$  son exteriores entre sí, entonces sus puntos de intersección con el segmento  $\overline{C_1C_2}$ , de extremos sus respectivos centros, han de ser puntos interiores de  $S_3$ .

Estas cuatro condiciones, que llamaremos *condiciones de contorno*, pueden ser expresadas brevemente como sigue, donde  $\overset{\circ}{S}_3$  denota el interior de  $S_3$ :

$$\left. \begin{array}{l} i) \text{ } dist(C_1, C_3) < r_1 + r_3 \quad \wedge \quad dist(C_2, C_3) < r_2 + r_3 \\ ii) \text{ } dist(C_1, C_2) > |r_1 - r_2| \\ iii) \text{ } S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \implies S_1 \cap S_2 \subset \overset{\circ}{S}_3 \\ iv) \text{ } S_1 \cap S_2 = \emptyset \implies S_1 \cap \overline{C_1C_2}, S_2 \cap \overline{C_1C_2} \in \overset{\circ}{S}_3 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Las cuatro condiciones (1) van a ser esenciales para asegurar la existencia de la inversión anteriormente descrita, como se verá en la sección siguiente.

## 2 Existencia y unicidad de la solución

Dadas tres superficies esféricas de centros no colineales,  $S_1, S_2, S_3$ , que verifiquen las condiciones de contorno (1), se trata de determinar una inversión que las transforme en otras tres de centros colineales. Para ello, por sencillez, elegiremos una inversión en la que dos de las tres superficies esféricas dadas sean invariantes (aunque no de puntos invariantes). Con esta condición, tal

inversión, denotada  $I$ , será única, según muestra el siguiente teorema, que además describe un método para determinarla vía Geometría Sintética.

En adelante, por simplicidad en la descripción del teorema y su demostración, cuando así interese, se restringirá la configuración al plano de centros,  $C_1C_2C_3$ . Las circunferencias de intersección de  $S_1, S_2, S_3$  con el plano diametral común  $C_1C_2C_3$  van a ser denotadas también  $S_1, S_2, S_3$ , respectivamente (el contexto aclarará si se trata de una figura 3D o del plano  $C_1C_2C_3$ ). La restricción de  $I$  al plano  $C_1C_2C_3$ , va a ser denotada también por  $I$ . En consecuencia, las circunferencias  $S_1$  y  $S_2$  son dobles en la inversión  $I$  del plano  $C_1C_2C_3$ . También denotaremos abreviadamente por  $Pot(P, S)$  a la potencia geométrica del punto  $P$  respecto de la superficie esférica o circunferencia  $S$  y por  $Pot(I)$  a la potencia de la inversión  $I$ . Denotaremos por  $p$  al plano radical de las superficies esféricas  $S_1$  y  $S_2$  y también al eje radical de las circunferencias  $S_1$  y  $S_2$ . Denotaremos por  $S_0$  a la superficie esférica, de centro en el plano  $C_1C_2C_3$  y ortogonal a  $S_1, S_2$  y  $S_3$  y también a su circunferencia maximal intersección con su plano diametral  $C_1C_2C_3$ .

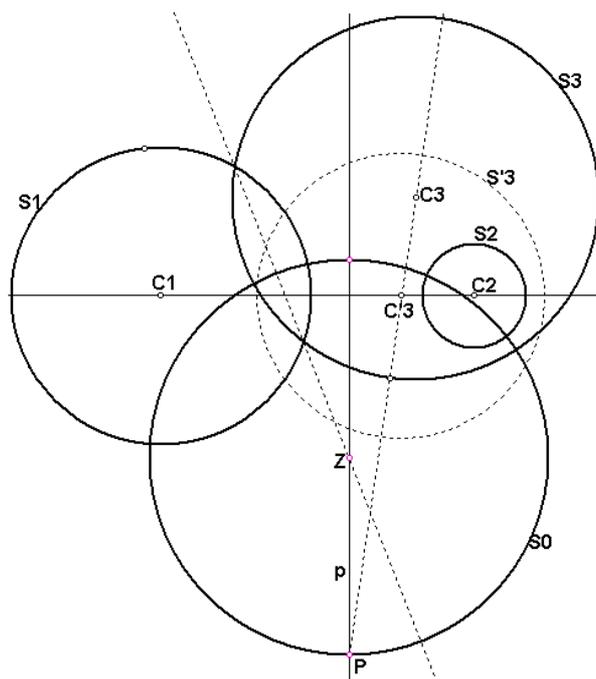


Figure 1: Configuración de alineación de centros restringida al plano  $C_1C_2C_3$

**Teorema 2.1.** Sean  $S_1, S_2, S_3$  tres superficies esféricas de centros no colineales  $C_1, C_2, C_3$ , respectivamente, y radios  $r_1, r_2, r_3$ , que verifican las condiciones de contorno (1). Entonces, existe una inversión,  $I$ , y sólo una, para la que se verifican las tres condiciones siguientes:

- 1)  $S_1$  y  $S_2$  son invariantes por  $I$ , es decir,  $I(S_1) = S_1$  e  $I(S_2) = S_2$
- 2)  $S'_3 = I(S_3)$  tiene su centro en la recta  $C_1C_2$  (Figura 1)
- 3)  $S_1, S_2, S'_3$  también verifican las condiciones de contorno (1) estando el polo  $P$  y la potencia  $\kappa$  de  $I$  determinados así:
  - 4)  $P$  está en el plano/eje radical,  $p$ , de  $S_1$  y  $S_2$
  - 5)  $P$  está en la superficie esférica/circunferencia,  $S_0$ , de centro en el plano  $C_1C_2C_3$  y ortogonal a  $S_1, S_2$  y  $S_3$
  - 6) el centro,  $Z$ , de  $S_0$  es el centro radical de las circunferencias  $S_1, S_2, S_3$  y es punto exterior a  $S_1, S_2, S_3$
  - 7) de los dos puntos de intersección de  $S_0$  con su recta diametral  $p$ , uno es interior a  $S_3$  y el otro exterior
  - 8) el polo  $P$  es el punto exterior a  $S_3$ , de entre los dos mencionados en el apartado anterior
  - 9) la potencia,  $\kappa$ , de  $I$ , es la potencia geométrica de  $P$  respecto de  $S_1$  (o  $S_2$ ).

*Demostración.* Sea  $P$  el polo de una inversión,  $I$ , cuya existencia se trata de probar. Para que  $I$  verifique la condición 1) del teorema, ha de ser  $Pot(I) = Pot(P, S_1) = Pot(P, S_2)$ , luego  $P$  ha de estar en el plano radical,  $p$ , de las superficies esféricas  $S_1, S_2$ . Por otra parte, el polo  $P$  ha de ser colineal con el centro  $C_3$  de  $S_3$  y con el centro,  $C'_3$ , de  $S'_3 = I(S_3)$ , pero este centro ha de estar en la recta  $C_1C_2$ , para que  $I$  verifique la condición 2) del enunciado, luego  $P$  ha de estar en el plano  $C_1C_2C_3$ . En consecuencia,  $P$  estará en el plano/eje radical,  $p$ , de  $S_1$  y  $S_2$ .

Por otra parte, de las condiciones 1) y 2) se sigue que las circunferencias  $S_1, S_2, S'_3$  son ortogonales a la recta  $C_1C_2$ . Al ser esta una recta que no pasa por el polo, su imagen en la transformación isogonal  $I$  será una circunferencia, que pasa por  $P$  y es ortogonal a las tres circunferencias  $S_1, S_2, S_3$ , a la que denotamos  $S_0 = I(C_1C_2)$ , según se indicó anteriormente.

Como consecuencia de esta ortogonalidad, el centro,  $Z$ , de  $S_0$  tiene la

misma potencia respecto de las tres circunferencias  $S_1, S_2, S_3$  (el cuadrado de su propio radio), luego  $Z$  es el centro radical de esas tres circunferencias.

Se trata ahora de probar que  $Z$  es punto exterior respecto de  $S_3$ . En efecto, al tener el centro radical  $Z$  la misma potencia respecto de  $S_1, S_2, S_3$ , tendrá la misma posición relativa respecto de las tres: exterior, en ellas o interior. Vamos a probar que las dos últimas son incompatibles con las condiciones de contorno (1). Si  $Z$  estuviera en las tres circunferencias, ello estaría en contradicción con la condición de contorno *iii)* de (1). Si  $Z$  fuera interior a ellas, entonces  $S_1, S_2$  serían secantes. Sus puntos comunes, denotados  $V, W$  (Figura 2), habrían de ser ambos interiores a  $S_3$ , de acuerdo con la condición de contorno *iii)* de (1). Como el eje radical,  $VW$ , de  $S_1, S_2$  pasa por el punto  $Z$ , que sería interior a  $S_3$ , la recta  $VW$  cortaría a  $S_3$  en dos puntos, denotados  $M, N$ . Si, como muestra la figura 2, fuera  $M$  el contenido en la semirrecta  $ZW$ , de origen  $Z$  y que pasa por  $W$ , entonces,  $\overline{ZW} < \overline{ZM}$ , pero, por tener  $Z$  la misma potencia respecto de  $S_1, S_2, S_3$ , se verificaría  $\overline{ZV} \cdot \overline{ZW} = \overline{ZN} \cdot \overline{ZM}$ , luego  $\overline{ZN} < \overline{ZV}$ , lo que implicaría que  $V$  fuera exterior  $S_3$ , en contradicción con la condición de contorno *iii)* de (1). Se completa así la demostración del apartado 6 del teorema.

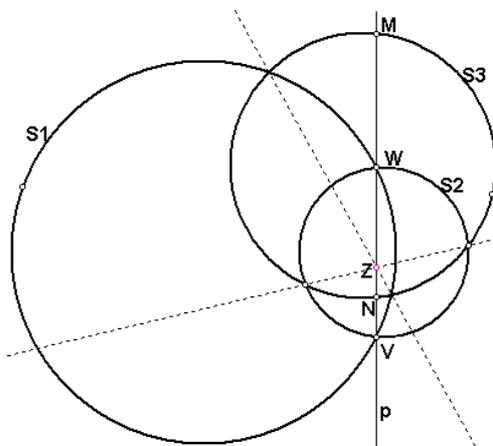


Figure 2: Posición de  $Z$  respecto de  $S_1, S_2, S_3$  no posible

Sea  $H$  el punto de intersección de las rectas  $C_1C_2$  y  $p$  (figura 3), y denotemos por  $P$  y  $Q$  a los puntos de intersección de  $S_0$  con su recta diametral  $p$ , siendo  $Q$  el contenido en la semirrecta  $ZH$  (de origen  $Z$  y que pasa por  $H$ ). Se trata ahora de probar que  $Q$  es punto interior de  $S_3$ . Si, en particular, el

centro,  $C_3$ , de  $S_3$  estuviera en el eje radical,  $p$ , de  $S_1, S_2$ , entonces  $Q$  sería punto límite del haz de circunferencias con centros en  $p$  y ortogonales a  $S_0$ , lo que, teniendo en cuenta que  $S_3$  es una de las circunferencias de dicho haz, implicaría que  $Q$  fuese interior de  $S_3$ . Como este es un caso muy particular, probaremos de otro modo que  $Q$  es siempre punto interior de  $S_3$ . Para ello, se van a considerar distintos casos, según que  $S_1, S_2$  sean secantes, tangentes exteriormente o exteriores (la condición de contorno *i*) excluye otras posibilidades).

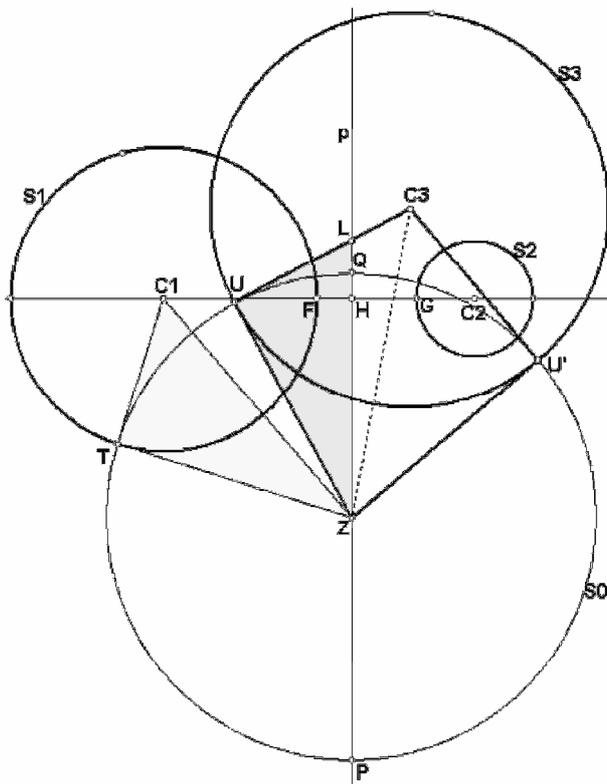


Figure 3: Posición de  $Q$  y  $P$  respecto de  $S_3$

Si  $S_1, S_2$  son secantes, entonces sus puntos comunes,  $V, W$ , han de ser interiores a  $S_3$  (condición de contorno *iii*). Ahora, por ser  $S_0$  ortogonal a  $S_1$  y  $S_2$ , para los puntos colineales  $Z, V, Q, W$ , se tiene  $Pot(Z, S_1) = \overline{ZV} \cdot \overline{ZW} = \overline{ZQ}^2$ , lo que implica  $Q \in \overline{VW}$ , lo cual, teniendo en cuenta que  $V, W$  son puntos interiores de la figura convexa consistente en el círculo de borde  $S_3$ , implica que  $Q$  sea punto interior de  $S_3$ , por serlo  $V, W$ . Si  $S_1, S_2$  son tangentes

exteriormente, entonces sigue siendo válido el razonamiento anterior, para  $Q = V = W$ .

Si  $S_1$  y  $S_2$  son exteriores entre sí, denotando  $T$  uno de los puntos de intersección de  $S_1, S_0$  y por ser rectángulos los triángulos  $C_1TZ$  y  $C_1HZ$  (figura 3), se tiene:  $\overline{C_1T}^2 + \overline{TZ}^2 = \overline{C_1Z}^2 = \overline{C_1H}^2 + \overline{HZ}^2$ , lo que teniendo en cuenta que  $\overline{C_1H} > \overline{C_1T}$  (pues  $H$  es exterior a la circunferencia  $S_1$ ), implica

$$\overline{ZH} < \overline{ZQ} = \overline{ZT} \quad (5)$$

luego  $H$  es punto interior respecto de  $S_0$ . Por otra parte, de acuerdo con la condición de contorno *iii*, los puntos,  $F, G$ , de intersección de  $S_1, S_2$  (respectivamente) con el segmento  $\overline{C_1C_2}$  son interiores a  $S_3$ , luego todo el segmento  $\overline{FG}$  es interior a  $S_3$ . Ahora bien, por ser  $S_1, S_2$  exteriores entre sí, su eje radical,  $p$ , es exterior a ambas, luego su punto de intersección,  $H$ , con la recta de centros  $C_1C_2$  está en el segmento  $\overline{FG}$ . En consecuencia, el punto  $H \in \overline{FG}$  es interior a  $S_3$ . Así pues, el punto  $H$  es punto interior de la figura intersección de los círculos de borde  $S_3, S_0$ , la cual está contenida en el cuadrilátero convexo  $C_3UZU'$  (Figura 3), donde  $U, U'$  son los puntos de intersección de las circunferencias ortogonales  $S_3, S_0$ , por lo que sus ángulos en  $U, U'$  son rectos. En consecuencia,  $H$  está contenido en uno de los dos triángulos  $ZUC_3, ZU'C_3$ , en que la diagonal  $\overline{ZC_3}$  descompone a dicho cuadrilátero. Suponiendo que  $H$  está contenido en el triángulo  $ZUC_3$ , este punto es, o bien interior de este triángulo, o bien de su lado  $\overline{ZC_3}$  (esto último si  $C_3 \in p$ ). Por tanto, denotando por  $L$  al punto de intersección de la recta  $ZH$  con el lado  $\overline{UC_3}$  (opuesto a  $Z$  en el triángulo  $ZUC_3$ ), se tiene:  $\overline{LC_3} < \overline{UC_3}$ , lo que implica que  $L$  sea interior a  $S_3$ . Ahora, por ser rectángulo en  $U$  el triángulo  $ZUL$  (sombreado en la figura 3), se tiene  $\overline{ZQ} = \overline{ZU} < \overline{ZL}$ , lo que junto con (5) implica  $\overline{ZH} < \overline{ZQ} < \overline{ZL}$  y por tanto  $Q \in \overline{HL}$ , lo que teniendo en cuenta que  $L$  y  $H$  son puntos interiores a  $S_3$ , implica que  $Q$  sea también interior a  $S_3$ .

En resumen,  $Q$  es punto interior de  $S_3$ , en las tres posibles posiciones relativas de  $S_1, S_2$  (secantes, tangentes exteriormente o exteriores). En consecuencia, el otro punto,  $P$ , de intersección de  $p, S_0$  no puede ser interior a  $S_3$ , ya que, si lo fuera, entonces  $Z$  (punto medio del segmento  $\overline{PQ}$ ) también sería interior a  $S_3$ , en contradicción con lo probado anteriormente. Se concluye así la prueba del apartado 7.

Por otra parte, al ser  $Q$  interior a  $S_3$ , la inversión de polo  $Q$  y potencia  $Pot(Q, S_1)$  transforma los puntos considerados en las condiciones de contorno *iii*) y *iv*) en puntos exteriores a  $I(S_3)$ , en contradicción con la condición 3) del teorema, y además transforma una cadena de círculos tangentes interiormente a  $S_3$  en una cadena de círculos tangentes exteriormente a  $I(S_3)$ . Por el contrario, para la inversión de polo el punto  $P$  (exterior a  $S_3$ ) y potencia  $Pot(P, S_1)$ , se verificaría la condición 3 del teorema. Por tanto, la inversión  $I$  no puede ser otra que la de polo  $P$  y potencia  $\kappa = Pot(P, S_1)$ , con lo que quedan probados los apartados 8 y 9 del teorema.  $\square$

### 3 Algoritmo para determinar la transformación

El siguiente algoritmo, construido a partir del teorema 2.1, permite determinar el polo  $P$  y potencia  $\kappa$  de la inversión  $I$ , en que son dobles  $S_1$  y  $S_2$ , y que transforma la superficie esférica  $S_3$ , en otra,  $S'_3 = I(S_3)$ , de centro alineado con los de las esferas  $S_1, S_2$ . En él, cada superficie esférica es codificada por una lista de primer elemento su centro y segundo elemento su radio, es decir,  $S_i = [C_i, r_i]$   $i = 1, 2, 3$ .

#### Algoritmo de reducción a centros colineales

*Entrada:*  $[C_1, r_1], [C_2, r_2], [C_3, r_3]$

*Salida:*  $P, \kappa, S'_3$

*Pasos:*

- (1) si  $C_1, C_2, C_3$  no son colineales, entonces  $c := \text{plano } C_1C_2C_3$
- (2)  $p := \text{plano radical de } S_1, S_2$  (diferencia de sus polinomios-ecuaciones)
- (3)  $p' := \text{recta intersección de los planos } c, p$
- (4)  $p'' := \text{plano radical de } S_1, S_3$
- (5)  $Z := \text{punto de intersección de } p'', p'$
- (6)  $r_0 := \sqrt{Pot(Z, S_1)}$
- (7)  $S_0 := [Z, r_0]$  (superficie esférica de centro  $Z$  y radio  $r_0$ )
- (8)  $\{P_1, P_2\} := \text{puntos de intersección de } S_0 \text{ con su recta diametral } p'$
- (9) si  $Pot(P_1, S_1) > 0$ , entonces  $P := P_1$  y en otro caso  $P := P_2$
- (10)  $\kappa := Pot(P, S_1)$
- (11)  $I := \text{inversión de polo } P \text{ y potencia } \kappa$
- (12)  $S'_3 := I(S_3)$

## 4 Implementación: ejemplo de ejecución

El proceso constructivo descrito requiere hacer uso de la inversión 3D, por lo que es preciso disponer de implementación de esta transformación. Comenzamos pues exponiendo someramente unas ideas muy simples sobre inversión, que permiten implementar cómodamente dicha transformación.

La inversión de polo  $P$  y potencia  $\kappa \neq 0$  es una transformación involutiva en que los puntos  $X$  y  $X'$  (distintos de  $O$ ) se corresponden si y sólo si  $P, X, X'$  son puntos colineales tales que  $\overrightarrow{PX} \cdot \overrightarrow{PX'} = \kappa$ . La figura inversa de una superficie esférica que no pasa por el polo,  $P$ , tal que  $X$  y  $Y$  son puntos diametralmente opuestos y colineales con  $P$ , es la superficie esférica tal que los puntos  $X'$  y  $Y'$  (inversos respectivos de  $X$  e  $Y$ ) son extremos de un diámetro. La figura inversa de una superficie esférica que pasa por  $P$  y por su punto diametralmente opuesto,  $X$ , es el plano perpendicular a la recta  $PX$  por el punto  $X'$ , inverso del punto  $X$ . Con estas simples consideraciones, es posible realizar el cálculo efectivo de imágenes en una inversión-3D de puntos, superficies esféricas y planos.

Para efectuar estos cálculos, es conveniente elegir una codificación apropiada para los tres tipos los objetos geométricos considerados: puntos, superficies esféricas y planos. Una vez elegido el sistema de referencia, el punto  $X$  de coordenadas  $(x_1, x_2, x_3)$  es codificado por la lista de sus coordenadas,  $[x_1, x_2, x_3]$ ; la superficie esférica de centro  $X = [x_1, x_2, x_3]$  y radio  $r$  es codificada por la lista  $[X, r]$ ; finalmente, el plano que pasando por  $X$  es perpendicular al vector  $v = (v_1, v_2, v_3)$ , es codificado por la lista  $[X, v]$ .

Naturalmente, es preciso usar aritmética exacta, para asegurar decisiones correctas en los condicionales, lo que exige que la implementación se realice en un sistema de computación algebraica. Hemos desarrollado sobre *Maple* un paquete con 17 procedimientos, de los cuales mencionamos a continuación los principales, omitiendo por brevedad los subprocedimientos auxiliares.

`invObj(obj, P,  $\kappa$ )` devuelve la imagen del objeto *obj* (superficie esférica/plano/punto, indistintamente) en la inversión  $(P, \kappa)$ , de polo  $P$  y potencia  $\kappa$ .

`contourCond( $S_1, S_2, S_3$ )` devuelve mensaje del “error” cometido, en caso de que  $S_1, S_2, S_3$  no verifiquen alguna de las condiciones de contorno (1), no devolviendo nada en otro caso.

`collinearCentersReductInv(S1, S2, S3)` devuelve una lista con el polo y la potencia de la inversión que dejando invariantes a S<sub>1</sub> y a S<sub>2</sub>, transforma S<sub>3</sub> en otra de centro alineado con los de S<sub>1</sub> y S<sub>2</sub> (que calcula mediante el algoritmo de la sección 3), no devolviendo nada si los centros fueran ya colineales.

**Ejemplo 4.1.** Dadas las tres superficies esféricas (codificadas):

$$S1 := [[-2, 0, 0], 2] :$$

$$S2 := [[2, 0, 0], 3] :$$

$$S3 := [[0, 3/2, 0], 4] :$$

comprobamos que verifican las condiciones de contorno:

$$\text{contourCond}(S1, S2, S3) ;$$

y calculamos la inversión alineadora de centros, *Inv*, de polo *P* y potencia *k*:

$$\text{Inv} := \text{collinearCentersReductInv}(S1, S2, S3) :$$

$$P := \text{Inv}[1] ;$$

$$P := \left[-\frac{5}{8}, -\frac{15}{4} - \frac{3\sqrt{85}}{8}, 0\right]$$

$$k := \text{Inv}[2] ;$$

$$k := -\frac{765}{32} + \frac{45\sqrt{85}}{16}$$

para determinar la imagen  $S'3 = I(S3)$ , en esa inversión:

$$S'3 := \text{invObj}(S3, P, k) ;$$

$$S'3 := \left[\left[-\frac{35}{111} + \frac{5\sqrt{85}}{222}, 0, 0\right], \frac{220}{111} + \frac{16\sqrt{85}}{111}\right]$$

Dada ahora otra superficies esférica tangente exteriormente con S3:

$$S := [[0, 15/2, 0], 2] :$$

ya que la distancia entre sus centros es igual a la suma de radios):

$$\text{dist1}(S[1], S3[1]) - S[2] - S3[2] ;$$

$$0$$

su inversa es también tangente con la inversa de S3:

$$S' := \text{invObj}(S, P, k) ;$$

$$S' := \left[\left[-\frac{777985}{1382221} + \frac{25275\sqrt{85}}{2764442}, -\frac{2992560}{1382221} + \frac{239316\sqrt{85}}{1382221}, 0\right], \frac{40440\sqrt{85}}{1382221} + \frac{274890}{1382221}\right]$$

$$\text{dist1}(S'[1], S'3[1]) - S'[2] - S'3[2] ;$$

$$0$$

## Conclusiones

Se ha descrito un método (vía Geometría Sintética) para determinar una inversión que transforme tres superficies esféricas dadas, en otras tres cuyos centros sean colineales. Por ser dicha transformación una inversión, preserva las tangencias entre superficies.

Por otra parte, dicho método puede ser útil en la resolución de otros problemas geométricos de configuración que incluyan superficies esféricas tangentes entre sí.

## Agradecimientos

Deseamos mostrar nuestro más sincero agradecimiento al Prof. J. Fernández Biarge por las valiosas sugerencias que nos aportó en las sucesivas versiones previas de este artículo.

## Referencias

- [1] M. Berger (1987): *Geometry*. Springer-Verlag. Páginas 315-316.
- [2] J. Fernández Biarge (1992): En torno al logotipo de la XXVIII Olimpiada Matemática Española. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, n 30, páginas 23-30.
- [3] C.S. Ogilvy (1990): *Excursions in Geometry*. Dover Publications, Inc. Páginas 51-54.
- [4] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano, F. Botana Ferreiro, J. Fernández Biarge (2005): Un método recursivo para construir cadenas de Steiner de circunferencias. *Bol. de la Soc. Puig Adam*, n 70, páginas 47-64.
- [5] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (2005): Aplicación de la transformación inversión 3D a construir cadenas de Steiner de esferas. En: F. Santos y D. Orden (editores), *Actas de los XI Encuentros de Geometría Computacional*, Univ. de Cantabria. Páginas 141-148.

# Sobre el método Monte-Carlo basado en funciones de densidad

**J.C. Cortés**

Departamento de Matemática Aplicada  
Universidad Politécnica de Valencia

**G. Calbo Sanjuán**

Departamento de Matemáticas  
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

## **Abstract**

*In this article we study a method that belongs to Monte-Carlo procedures in order to evaluate definite integrals. In particular, we point out through several examples, some computational drawbacks that can appear in its application.*

Este trabajo está dedicado a la memoria de Miguel de Guzmán, a quien nunca tuvimos ocasión de conocer personalmente, pero sí de leer y disfrutar con muchas de sus obras.

## **Introducción**

En los trabajos [1] y [2] se estudiaron dos métodos tipo Monte-Carlo para evaluar de forma aproximada la integral definida

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Para las estimaciones que se dieron en [1] y [2], se utilizaron las notaciones  $\tilde{I}(N)$  y  $\bar{I}(N)$ , respectivamente, siendo  $N$  el número de simulaciones. La fórmula de estimación que daremos en este trabajo se denotará por  $\hat{I}(N)$ . Adelantamos ya este detalle en la notación que utilizaremos, porque entre las aplicacio-

nes que daremos, en el último ejemplo evaluaremos, a modo de comparación, una integral mediante este método Monte-Carlo y las variaciones del mismo estudiadas en [1] y en [2]. También es objetivo de este artículo poner de manifiesto los principales inconvenientes que pueden surgir durante la aplicación de este método.

## 1 El método Monte-Carlo basado en funciones de densidad

La idea de este método está basada en el siguiente resultado elemental de estadística (véase [pág. 16, 3]):

*Si  $X$  es una variable aleatoria (v.a.) continua definida sobre un intervalo  $[a, b]$  con función de densidad de probabilidad (f.d.p.)  $g(x)$  e  $Y = h(X)$  es una nueva v.a. que resulta de aplicar a  $X$  la transformación funcional  $h(x)$ , entonces la media o esperanza de la v.a.  $Y$  está dada por*

$$E[Y] = E[h(X)] = \int_a^b h(x)g(x)dx \quad (2)$$

De esta forma, y en aras de aprovechar (2) para calcular (1), obsérvese que

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} g(x)dx = \int_a^b h(x)g(x)dx \quad (3)$$

por lo tanto, para calcular  $I$ , basta elegir,  $g(x)$  una función que satisfaga las condiciones para ser una f.d.p. sobre  $[a, b]$ , es decir,

$$g(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad (4)$$

(al aparecer en un denominador de (3), sólo se permitirá que  $g(x)$  sea nula en conjuntos de medida nula contenidos en el intervalo de integración  $[a, b]$ , como por ejemplo los extremos) y

$$\int_a^b g(x)dx = 1 \quad (5)$$

ya que, en ese caso, el estimador

$$\hat{I} = \frac{f(X)}{g(X)} \quad (6)$$

tiene la propiedad de ser centrado

$$E[\hat{I}] = E\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \int_a^b \frac{f(x)}{g(x)} g(x) dx = \int_a^b f(x) dx = I$$

Más adelante estableceremos algunas condiciones más que es conveniente que también verifique la función  $g(x)$  para que la aproximación sea buena.

Basándonos en que la media muestral es un estimador de cualquier v.a., tomaremos como estimación de (6) para los cálculos numéricos

$$\hat{I}(N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{g(x_i)} \quad (7)$$

donde los valores  $x_i$  deben ser tales que resulten de la simulación de la v.a.  $X \in [a, b]$  con f.d.p.  $g(x)$ . Para ello, utilizando el método de simulación denominado de inversión o de la transformación inversa (véase [5, pág. 42] y [6, pág. 62]): fijada  $g(x)$  y tomando números aleatorios  $r_i \in ]0,1[$ , elegimos  $x_i$  de modo que cumpla:

$$\int_a^{x_i} g(x) dx = r_i \quad , \quad 0 < r_i < 1 \quad (8)$$

En particular, esto es factible si sabemos calcular una primitiva de  $g(x)$ , digamos  $G(x)$ , y sabemos resolver la ecuación en  $x_i$ :  $G(x_i) - G(a) = r_i$ . Observemos que, en principio, esto puede ser una tarea muy difícil (incluso imposible), pero tenemos cierta libertad en la elección de la función  $g(x)$ .

Profundicemos un poco sobre cómo elegir  $g(x)$  de la mejor forma posible. Para ello tengamos en cuenta que nos interesa que la varianza de la estimación sea tan pequeña como sea posible. Una forma sencilla de garantizar esto, es elegir  $g(x)$  de modo que sobre el intervalo de integración  $[a, b]$  se cumpla

$$\frac{f(x)}{g(x)} = k \quad , \quad k = \text{constante} \quad , \quad x \in [a, b] \quad (9)$$

ya que en ese caso, el estimador (6)

$$\text{Var}[\hat{I}] = \text{Var}\left[\frac{f(X)}{g(X)}\right] = \text{Var}[k] = 0 \quad (10)$$

basándonos en la propiedad de que la varianza de una constante es siempre nula. Obsérvese que elegir  $g(x)$  satisfaciendo la propiedad (9) carece de sentido, porque significa tomar  $g(x)$  como un múltiplo de  $f(x)$  (con constante de proporcionalidad  $1/k$ ) y sin embargo, según (8), el método exige integrar  $g(x)$ , o equivalentemente  $f(x)$ , ¡que es precisamente lo que inicialmente no sabemos hacer, por eso empleamos este método!. Por esta razón en la práctica lo que se busca es una función que verifique (9) de forma aproximada, esto es,

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cong k \quad , \quad k = \text{constante} \quad , \quad x \in [a, b] \quad (11)$$

consiguiendo de esta manera una estimación con varianza pequeña. En las aplicaciones veremos con detalle cómo proceder en este sentido.

## 2 Relación del método Monte-Carlo basado en funciones de densidad con el método Monte-Carlo de la altura media

El método Monte-Carlo basado en las funciones de densidad es una generalización del método de la altura media, que se estudió en [2].

En efecto, este método se obtiene tomando  $g(x) = \frac{1}{b-a}$ , la cual satisface las condiciones (4) y (5)

$$g(x) = \frac{1}{b-a} \geq 0 \quad \forall x \in [a, b] \quad ; \quad \int_a^b g(x) dx = \int_a^b \frac{1}{b-a} dx = 1$$

y en ese caso el estimador dado en (6) se particulariza a

$$\hat{I} = \frac{f(X)}{\frac{1}{b-a}} = (b-a)f(X) \quad (12)$$

que es precisamente el estimador  $\bar{I}$  en el cual se basa el método de la altura media (véase, fórmula (5) en [2]).

### 3 Aplicación al cálculo de integrales definidas

En este apartado se desarrollarán varios ejemplos con objeto de ilustrar cómo se lleva a la práctica el método y las dificultades con que nos podemos encontrar.

#### Ejemplo 0

Calculemos una aproximación  $\hat{I}_0$  de

$$I_0 = \int_0^1 e^x dx$$

A partir del desarrollo de MacLaurin de la función  $e^x$ , podemos conseguir una función  $g(x)$  que satisfaga la aproximación dada en (11). En efecto, como

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

tomemos la estimación lineal  $\tilde{g}(x) = 1 + x$  de  $e^x$ , y a continuación determinemos  $c$  modo que  $g(x) = c \cdot \tilde{g}(x)$  sea una función de densidad sobre  $[0,1]$ , es decir, que cumpla:

$$1 = \int_0^1 c(1+x)dx = c \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}c \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

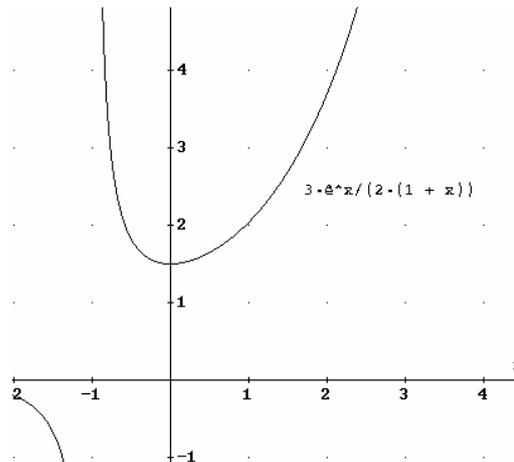
por lo que la función  $g(x) = \frac{2}{3}(1+x)$ , verifica las condiciones (4) y (5),

$$g(x) = \frac{2}{3}(1+x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad ; \quad \int_0^1 \frac{2}{3}(1+x)dx = 1$$

así como la condición (11) sobre el intervalo  $[a,b] = [0,1]$ . Para esto último, obsér-

vese en la figura 0, que la función  $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{3e^x}{2(1+x)}$  no fluctúa en exceso de valor

sobre el intervalo  $[0,1]$ , ya que, toma valores entre 1.5 y 2.1. De hecho, puede verse analíticamente que es una función creciente sobre dicho intervalo.



**Figura 0.** Comprobación gráfica de la condición (11) en el ejemplo 0.

Entonces el estimador que utilizaremos, según (6), será

$$\hat{I} = \frac{f(X)}{g(X)} = \frac{3e^X}{2(1+X)}$$

Tomando  $N = 10$  pruebas, aplicando (7), tendremos que

$$\hat{I}_0(10) = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} \frac{3e^{x_i}}{2(1+x_i)} \quad (13)$$

donde los valores  $x_i$  deben verificar la condición (8)

$$\int_0^{x_i} \frac{2}{3}(1+x)dx = r_i \Rightarrow \frac{2}{3} \left( x_i + \frac{x_i^2}{2} \right) = r_i \Rightarrow x_i^2 + 2x_i - 3r_i = 0$$

lo cual nos permite calcular explícitamente  $x_i$ :

$$x_i^2 + 2x_i - 3r_i = 0 \Rightarrow x_i = -1 \pm \sqrt{1+3r_i} \stackrel{0 < x_i < 1}{\Rightarrow} x_i = -1 + \sqrt{1+3r_i}$$

(obsérvese que claramente, como  $0 < r_i < 1$ , entonces de la expresión anterior:  $0 < x_i < 1$ ). En la tabla 0 se especifican los cálculos necesarios para obtener, según (13) la estimación buscada

$$\hat{I}_0(10) = \frac{3}{20} \sum_{i=1}^{10} \underbrace{\frac{e^{x_i}}{1+x_i}}_{v_i} = \frac{3}{20} \sum_{i=1}^{10} v_i = \frac{3}{20} \cdot 12.26780768 = 1.840171151$$

mientras que el valor exacto es  $e - 1 \cong 1.718281$ . Hemos obtenido una estimación no muy precisa, pero hay que subrayar que el número de simulaciones empleadas ha sido muy pequeño. En cualquier caso, y siguiendo la misma técnica que la empleada en el ejemplo 1 del trabajo [2], podríamos calcular el número de iteraciones necesarias para realizar la estimación (en probabilidad) con un error prefijado.

Simulación	$r_i$	$x_i = -1 + \sqrt{1 + 3r_i}$	$v_i = \frac{e^{x_i}}{1+x_i}$
1	0.2310834777	0.3012495660	1.038652872
2	0.9311302541	0.9476628974	1.324496990
3	0.5744827687	0.6502873404	1.161065271
4	0.9085190132	0.9301702099	1.313324907
5	0.8353277490	0.8724271005	1.277866124
6	0.7978474231	0.8421569610	1.260136205
7	0.9243058653	0.9423999577	1.321114445
8	0.9700232673	0.9773896434	1.343948644
9	0.2206409413	0.2891558571	1.035793942
10	0.6458383624	0.7139180514	1.191408289
			$\sum_{i=1}^{10} v_i = 12.26780768$

**Tabla 0.** Cálculos basados en la simulación para el ejemplo 0.

### Ejemplo 1

No sólo para establecer comparaciones con los métodos desarrollados en los trabajos [1] y [2], sino sobretudo para enfatizar en el hecho de que cuando se dispone de una colección de criterios para realizar una misma tarea debemos elegir el más adecuado para el problema concreto que tenemos entre las manos, ahora calcularemos una aproximación  $\hat{I}_1$  de

$$I_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx$$

En el desarrollo que sigue, aflorarán algunos aspectos diferentes respecto del ejemplo anterior, siendo el más importante, la enorme complicación (¡fuera del absurdo que supone aplicar cualquier método Monte-Carlo a este integral inmediata!) que acarrea la aplicación de este método frente a los estudiados en [1] y [2]; sin embargo, pensamos que debido al carácter divulgativo y didáctico del trabajo, tiene interés incluirlo aquí para que quede a disposición de otros docentes que, como nosotros, pretenden mostrar no sólo la potencia del método, sino también sus debilidades.

Como en el ejemplo anterior, para elegir una función  $g(x)$  satisfaciendo la condición (11), utilizaremos un desarrollo de Taylor válido únicamente alrededor del origen, y por esta razón, dividiremos el cálculo de la integral en dos integrales partiendo el recinto de integración en dos intervalos:

$$I_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx = \int_0^1 (4 - x^2) dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx = I_{11} + I_{12}.$$

Para calcular  $I_{11}$ , observemos que en un entorno del origen se satisface:

$$\cos(x) \cong 1 - \frac{x^2}{2!},$$

por lo que

$$\tilde{g}_1(x) = 4 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cong 4 \left( 1 - \frac{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{2!} \right) = 4 - x^2 = f(x)$$

es decir,

$$\frac{f(x)}{\tilde{g}_1(x)} \cong 1 \quad (14)$$

alrededor del cero. Por lo tanto elegiremos  $c_1$  de modo que  $g_1(x) = c_1 \cdot \tilde{g}_1(x)$  sea una f.d.p. en  $[0,1]$ , esto es, satisfaciendo

$$1 = \int_0^1 g_1(x) dx = 4c_1 \int_0^1 \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx = 4\sqrt{2}c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

de donde

$$c_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \quad (15)$$

y

$$g_1(x) = \frac{\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \quad (16)$$

De este modo  $g_1(x)$  dada en (16) verifica la condición (5) y también la (4), ya que,

$$\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1] \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0.$$

Además, con todo ello se garantiza que (11) también se satisfaga en  $[0,1]$  tomando

$$k_1 = 4\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \text{ ya que, de (14) y (15)}$$

$$\frac{f(x)}{g_1(x)} \cong \frac{1}{c_1} = 4\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Esto puede visualizarse muy bien en la figura 1, teniendo en cuenta que

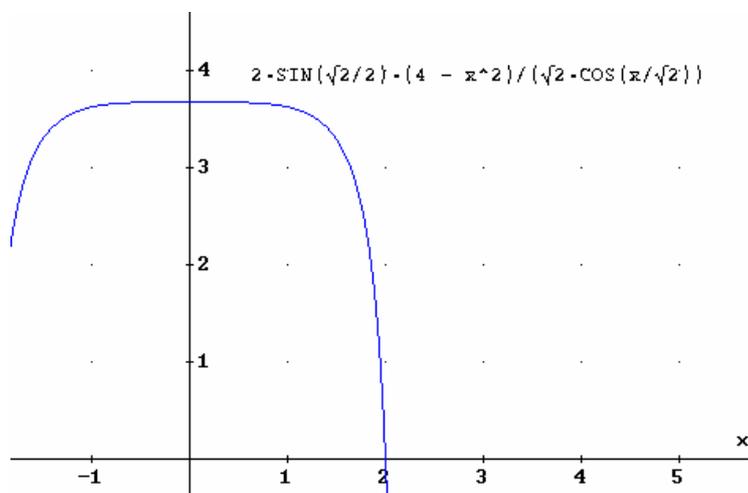
$$4\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cong 3.674901479.$$

Para proceder a realizar la aproximación mediante (7), debemos generar los valores  $x_i$  satisfaciendo (8), es decir,

$$\frac{\sqrt{2}}{2\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \int_0^{x_i} \cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) dx = r_i \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}x_i}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = r_i$$

y despejando

$$x_i = \sqrt{2} \arcsen \left( r_i \cdot \text{sen} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \quad (17)$$



**Figura 1.** Comprobación gráfica de la condición (11) en  $[0,1]$  para el ejemplo 1.

Como hicimos en [2], tomaremos los mismos valores de simulación que se eligieron en la tabla 1 de [1], pero aplicando el método Monte-Carlo basado en la densidad elegida, (véase la tabla 1, donde las simulaciones  $x_i$  se han obtenido mediante (17) siendo  $r_i$  los valores de una v.a. uniforme en  $[0,1]$  que se calcularon en [1] con la función *Random* de una calculadora de bolsillo).

Simulación	$r_i$	$x_i = \sqrt{2} \arcsen \left( r_i \cdot \text{sen} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right)$	$v_i = \frac{(4 - x_i^2)}{\cos(x_i / \sqrt{2})}$
1	0.958	0.950	3.483
2	0.495	0.463	3.889
3	0.491	0.459	3.891
4	0.847	0.824	3.624
5	0.812	0.786	3.661
6	0.269	0.248	3.969
7	0.112	0.103	3.995
8	0.193	0.178	3.984

9	0.664	0.631	3.789
10	0.071	0.065	3.998
			$\sum_{i=1}^{10} v_i = 38.284$

**Tabla 1.** Primera simulación en el ejemplo 1.

Para realizar la estimación de  $I_{11}$  aplicamos (7), obteniéndose:

$$\hat{I}_{11}(10) = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{10} \sum_{i=1}^{10} \frac{(4-x_i^2)}{\cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{\sqrt{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{10} \cdot 38.284 = 3.517$$

Obsérvese que esta aproximación es bastante buena, ya que, el valor exacto de  $I_{11}$  es  $\frac{11}{3} = 3.\widehat{6}$ .

La aplicación del método para estimar  $I_{12}$  pondrá de manifiesto más dificultades con las que nos podemos encontrar cuando apliquemos este método, incluso para la evaluación de integrales tan sencillas como ésta (aunque claro está, y como ya se señaló al principio, nosotros ahora estamos utilizando este método sobre esta integral, a efectos de poder hacer comparaciones de la aproximación que obtengamos con el valor exacto, que en este caso es conocido por la regla de Barrow). Si intentamos aplicar el mismo razonamiento que antes, en primer lugar deberemos cambiar la función de densidad, ya que ahora trabajaremos en el intervalo  $[1,2]$ . Para aprovechar el desarrollo de Taylor aplicado antes, consideramos su traslación al punto  $x_0 = 1$ , entonces sabemos que

$$\cos(x-1) \cong 1 - \frac{(x-1)^2}{2!} = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}$$

por lo que, ajustando mediante un polinomio se tiene:

$$\tilde{g}_2(x) = \cos(x-1) + \left(\frac{7}{2} - x - \frac{x^2}{2}\right) \cong 4 - x^2 = f(x)$$

es decir,

$$\frac{f(x)}{\tilde{g}_2(x)} \cong 1 \quad (18)$$

alrededor del punto  $x_0 = 1$ . Por lo tanto elegiremos  $c_2$  de modo que  $g_2(x) = c_2 \cdot \tilde{g}_2(x)$  sea una f.d.p. en  $[1,2]$ , esto es, satisfaciendo

$$1 = \int_1^2 g_2(x) dx = c_2 \int_1^2 \left( \cos(x-1) + \frac{7}{2} - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = c_2 \left( \frac{5}{6} + \text{sen}(1) \right)$$

de donde

$$c_2 = \frac{6}{5 + 6 \cdot \text{sen}(1)} \quad (19)$$

y

$$g_2(x) = \frac{6}{5 + 6 \cdot \text{sen}(1)} \cdot \left( \cos(x-1) + \left( \frac{7}{2} - x - \frac{x^2}{2} \right) \right) \quad (20)$$

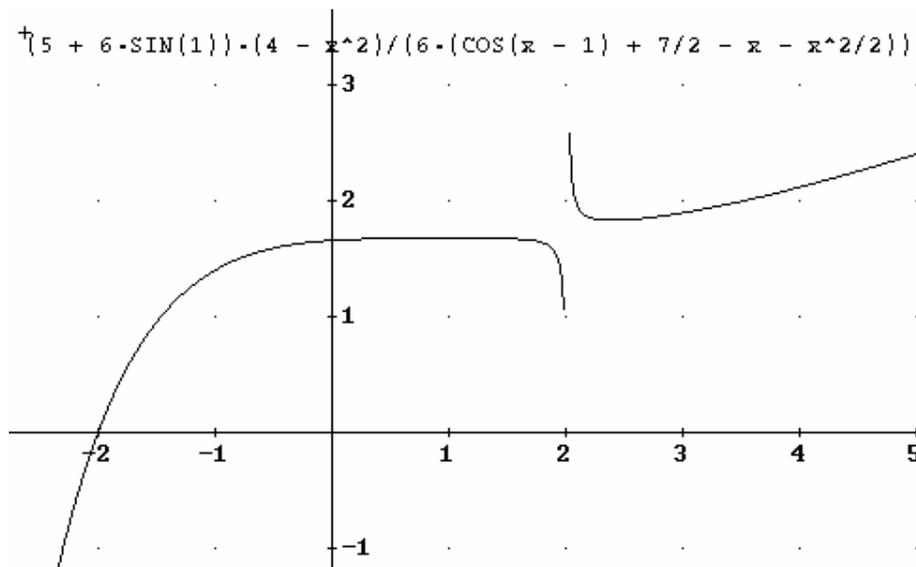
De este modo  $g_2(x)$  dada en (20) verifica la condición (5) y también la (4), ya que,

$$\cos(x-1) + \left( \frac{7}{2} - x - \frac{x^2}{2} \right) \geq 0 \quad \forall x \in [1,2]$$

como puede demostrarse analíticamente. Además, con todo ello se garantiza que (11) también se satisfaga tomando  $k_2 = \frac{5 + 6 \cdot \text{sen}(1)}{6}$ , ya que, de (18) y (19)

$$\frac{f(x)}{g_2(x)} \cong \frac{1}{c_2} = \frac{5 + 6 \cdot \text{sen}(1)}{6}$$

tal y como puede apreciarse gráficamente en la figura 2, considerando que  $\frac{5 + 6 \cdot \text{sen}(1)}{6} \cong 1.674804318$ .



**Figura 2.** Comprobación gráfica de la condición (11) en  $[1,2]$  para el ejemplo 1.

En el siguiente paso de aplicación del método es donde nos encontramos con una gran dificultad: para realizar la aproximación mediante (7), debemos generar los valores  $x_i$  satisfaciendo (8), es decir,

$$\frac{6}{5 + 6 \cdot \text{sen}(1)} \int_1^{x_i} \left( \cos(x-1) + \left( \frac{7}{2} - x - \frac{x^2}{2} \right) \right) dx = r_i$$

esto es,

$$\frac{6\text{sen}(x_i - 1) - x_i^3 - 3x_i^2 + 21x_i - 17}{5 + 6 \cdot \text{sen}(1)} = r_i \quad (21)$$

Sin embargo, la tarea de aislar  $x_i$  en esta expresión resulta imposible; únicamente introduciendo métodos numéricos aproximados, es posible continuar con la aplicación del método. Nosotros utilizaremos Derive<sup>®</sup> para realizar los cálculos. Concretamente, para resolver la ecuación (21) emplearemos el comando NSOLVE(ecuación 21,  $x_i$ , 1, 2) que busca la solución en el intervalo  $[1,2]$  de la ecuación (21) cuya incógnita es  $x_i$ . Los números aleatorios que tomamos son los mismos que para el cálculo de  $I_{11}$ , con objeto de mantener algún tipo de compa-

ración con los métodos utilizados en los trabajos [1] y [2]. Los cálculos están especificados en la tabla 2.

Simul.	$r_i$	$x_i$ solución de (21)	$v_i = \frac{4 - x_2^i}{\cos(x_i - 1) + \frac{7}{2} - x_i - \frac{x_i^2}{2}}$
1	0.958	1.817	0.975
2	0.495	1.312	0.999
3	0.491	1.309	0.999
4	0.847	1.636	0.995
5	0.812	1.594	0.996
6	0.269	1.159	1.000
7	0.112	1.064	1.000
8	0.193	1.112	1.000
9	0.664	1.447	0.999
10	0.071	1.040	1.000
			$\sum_{i=1}^{10} v_i = 9.964$

**Tabla 2.** Segunda simulación en el ejemplo 1.

La estimación de  $I_{12}$  se obtiene de (7):

$$\hat{I}_{12}(10) = \frac{5 + 6\text{sen}(1)}{6} \sum_{i=1}^{10} \frac{4 - x_2^i}{\cos(x_i - 1) + \left(\frac{7}{2} - x_i - \frac{x_i^2}{2}\right)} = \frac{5 + 6\text{sen}(1)}{6} \cdot 9.964 = 1.669.$$

Obsérvese que esta aproximación es muy buena, ya que, el valor exacto de  $I_{12}$  es  $\frac{5}{3} = 1.\hat{6}$ . Por lo tanto la estimación buscada de  $I_1$  por este método Monte-Carlo estará dada por

$$\hat{I}_1(10) = \hat{I}_{11}(10) + \hat{I}_{12}(10) = 3.517 + 1.669 = 5.186$$

frente a las aproximaciones vía Monte-Carlo geométrico y de la altura media, que son respectivamente,  $\tilde{I}_1(10) = 5.600$  y  $\bar{I}_1(10) = 5.321$ . Como  $I_1 = 5.3$ , en este caso, el método objeto de estudio no obtiene mejor precisión que el método de la altura media.

## Conclusiones

En este trabajo pretende ser una continuación de los artículos [1] y [2], y en él se estudia un método tipo Monte-Carlo basado en funciones de densidad, para evaluar integrales definidas, que generaliza el método estudiado en [2]. Se dedica especial atención al desarrollo de ejemplos, a través de los cuales se muestran las dificultades que puede acarrear la aplicación del método, el cual tiene sobretodo interés didáctico por las sencillas bases estadísticas en las que se fundamenta.

*Nota:* los autores quieren agradecer al referee anónimo las observaciones realizadas.

## Bibliografía

- [1] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Sobre el método Monte-Carlo geométrico en el Cálculo Integral*. Bol. Puig Adam nº 66 (2004), 63-73.
- [2] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Sobre el método Monte-Carlo de la altura media en el Cálculo Integral en varias dimensiones*. Bol. Puig Adam nº 69 (2005), 69-81.
- [3] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Métodos Estadísticos. Características de las Distribuciones Unidimensionales*. Volumen III. Ed. Popular Libros, Albacete, (2001).
- [4] DeGroot M.H., *Probabilidad y Estadística*, Addison-Wesley Iberoamericana, México, (1988).
- [5] Ríos Insua, D., Ríos Insua, S. y Martín J., *Simulación. Modelos y Aplicaciones*, Ed. Ra-Ma. Colec. Textos Universitarios. Madrid. (1997).
- [6] Roos S.M. *Simulación*, 2ª edición. Ed. Pearson. Prentice Hall. Madrid. (1999).

# Una fórmula sencilla para demostrar o generar identidades combinatorias

**Luis González**

Departamento de Matemáticas.  
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.  
luisglez@dma.ulpgc.es

## *Abstract*

*A simple recursive formula for proving or generating, in an immediate way, many different combinatorial identities is presented.*

## **Introducción**

En este trabajo presentamos una fórmula recursiva que nos proporciona demostraciones muy simples de una amplia gama de identidades combinatorias. Es importante destacar que esta fórmula permite no sólo probar, sino además generar diferentes tipos de tales identidades, no siendo necesario conocer dichas identidades *a priori*. Nótese que el propósito de este trabajo no es presentar nuevas identidades combinatorias: muchas de las sumas binomiales obtenidas aquí son bien conocidas, pueden encontrarse, por ejemplo, en [1], [2], [3], [4] y [5] y, por supuesto, pueden demostrarse de manera diferente a la empleada aquí.

Nuestro propósito es presentar un método sencillo para demostrar o generar tales identidades, de una forma sistemática y unificada. Si bien muchas otras identidades combinatorias pueden generarse (o demostrarse) a partir de nuestra fórmula, por razones de brevedad, hemos seleccionada aquí sólo unas pocas (Teorema binomial o “binomio de Newton”, Fórmula de convolución de Vandermonde, Identidad de Cesàro para los números de Fibonacci,...), procurando un cierto “orden y simetría” en la presentación.

A continuación describimos muy brevemente la idea básica de este trabajo. Es de sobra conocido que el Triángulo de Pascal puede construirse a partir de las propiedades elementales

$$\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}, \quad \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \quad (1)$$

Estas igualdades constituyen el único conocimiento previo que se requiere para nuestro trabajo. De hecho, a partir de la ecuación (1), establecemos en la Sección 1 la fórmula antes mencionada (Teorema 1), la cual involucra  $n+1$  coeficientes reales arbitrarios  $a_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ). En la Sección 2, generamos de forma inmediata diferentes identidades combinatorias, mediante la asignación de valores adecuados a los parámetros  $a_k$  en nuestra fórmula. De este modo, todas las identidades “fluyen suavemente” a partir de un sencillo Teorema, y nuestro artículo es auto-contenido. Por último, en la Sección 3 presentamos nuestras conclusiones.

## 1 Una fórmula combinatoria recursiva

El siguiente Teorema se deduce inmediatamente de la ecuación (1).

**Teorema 1.** *Sea  $n$  un entero positivo y  $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ . Entonces*

$$\sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + a_{k+1}) \binom{n-1}{k} \quad (2)$$

**Demostración.** Para  $n = 1$ , el resultado es trivial. Para  $n > 1$ , se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} &= a_0 \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \binom{n}{k} + a_n \binom{n}{n} \\ &= a_0 \binom{n-1}{0} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \left[ \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] + a_n \binom{n-1}{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^n a_k \binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \binom{n-1}{k} + \sum_{h=0}^{n-1} a_{h+1} \binom{n-1}{h} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + a_{k+1}) \binom{n-1}{k}. \end{aligned}$$

## 2 Generación de identidades combinatorias

En este trabajo sólo consideramos números combinatorios cuyo numerador y denominador son enteros no negativos, incluyendo el caso particular  $\binom{0}{0} = 1$ .

Haciendo uso exclusivamente de la fórmula (2), obtenemos inmediatamente las siguientes identidades combinatorias, que evalúan otras tantas combinaciones

lineales  $\sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k}$  de los  $n+1$  coeficientes binomiales de la  $n$ -ésima fila del

Triángulo de Pascal. Hemos clasificado estas identidades en tres grupos, correspondientes a las tres subsecciones de esta sección.

### 2.1 Identidades combinatorias básicas

**Corolario 1.** Para todo  $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

**Demostración.** La fórmula (2) con  $a_k = 1$  ( $0 \leq k \leq n$ ) nos da la siguiente igualdad (\*) y, aplicando reiteradamente dicha igualdad, se obtiene

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \stackrel{(*)}{=} 2 \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} = \dots = 2^n \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} = 2^n.$$

**Corolario 2.** Para todo  $n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

**Demostración.** Aplicando la fórmula (2) con  $a_k = (-1)^k$  ( $0 \leq k \leq n$ ), se tiene

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} [(-1)^k + (-1)^{k+1}] \binom{n-1}{k} = 0.$$

**Corolario 3.** Para todo  $n \geq 1$ :

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$$

**Demostración.** Aplicando la formula (2) con  $a_k = k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) y el Corolario 1, se tiene

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) \binom{n-1}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + 2^{n-1}$$

con lo que denotando

$$S_n := \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} \quad (n \geq 0)$$

se tiene

$$S_n = 2S_{n-1} + 2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

y aplicando reiteradamente esta relación de recurrencia, obtenemos

$$S_n = 2^1 S_{n-1} + 1 \cdot 2^{n-1} = 2^2 S_{n-2} + 2 \cdot 2^{n-1} = \dots = 2^n S_0 + n \cdot 2^{n-1} = n 2^{n-1}.$$

**Corolario 4 (Teorema binomial).** Sea  $n \geq 1$  y sean  $x, y \in \mathbf{R}$ . Entonces

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \binom{n}{k}$$

**Demostración.** La formula (2) con  $a_k = x^k y^{n-k}$  ( $0 \leq k \leq n$ ), nos da la siguiente igualdad (\*) y, aplicando reiteradamente dicha igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n x^k y^{n-k} \binom{n}{k} &\stackrel{(*)}{=} (x+y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{(n-1)-k} \binom{n-1}{k} = (x+y)^2 \sum_{k=0}^{n-2} x^k y^{(n-2)-k} \binom{n-2}{k} \\ &= \dots = (x+y)^n \sum_{k=0}^0 x^k y^{-k} \binom{0}{k} = (x+y)^n. \end{aligned}$$

**Corolario 5 (Ley de simetría).** Para todo  $n \geq 1$  y para todo  $m$  t.q.  $0 \leq m \leq n$  :

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

**Demostración.** Esta propiedad elemental puede también deducirse del Teorema 1, procediendo por inducción sobre  $n$ . En efecto, para  $n = 1$  el resultado es obvio (ecuación (1)). Supongamos que es cierto para  $n - 1$  y  $0 \leq m \leq n - 1$  (hipótesis de inducción). Para probarlo para  $n$  y  $0 \leq m \leq n$ , podemos suponer que  $m \neq n - m$  (en el caso  $m = n - m$ , la fórmula es una identidad) y, aplicando la fórmula (2) con  $a_m = 1$ ;  $a_{n-m} = -1$ ;  $a_k = 0$ ,  $\forall k \neq m, n - m$  se concluye la demostración.

## 2.2 Identidades combinatorias con producto de coeficientes binomiales

**Corolario 6 (Fórmula de convolución de Vandermonde).** Sea  $1 \leq n \leq r \leq m$ . Entonces

$$\sum_{k=0}^n \binom{m}{r-k} \binom{n}{k} = \binom{m+n}{r}$$

**Demostración.** La fórmula (2) con  $a_k = \binom{m}{r-k}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) y la fórmula de Pascal (1) nos dan la siguiente igualdad (\*) y, aplicando reiteradamente dicha igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{m}{r-k} \binom{n}{k} &\stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{m+1}{r-k} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{m+2}{r-k} \binom{n-2}{k} \\ &= \dots = \sum_{k=0}^0 \binom{m+n}{r-k} \binom{0}{k} = \binom{m+n}{r}. \end{aligned}$$

**Corolario 7.** Sea  $1 \leq n \leq r \leq m$ . Entonces

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m+k}{r} \binom{n}{k} = (-1)^n \binom{m}{r-n}$$

**Demostración.** La formula (2) con  $a_k = (-1)^k \binom{m+k}{r}$  ( $0 \leq k \leq n$ ) y la fórmula de Pascal (1) nos dan la siguiente igualdad (\*) y, aplicando reiteradamente dicha igualdad, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m+k}{r} \binom{n}{k} &\stackrel{(*)}{=} -\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{m+k}{r-1} \binom{n-1}{k} = +\sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \binom{m+k}{r-2} \binom{n-2}{k} \\ &= \dots = (-1)^n \sum_{k=0}^0 (-1)^k \binom{m+k}{r-n} \binom{0}{k} = (-1)^n \binom{m}{r-n}. \end{aligned}$$

### 2.3 Identidades combinatorias para números especiales

**Corolario 8 (Una identidad combinatoria para números triangulares).** Sea  $T_k$  el  $k$ -ésimo número triangular  $T_0 = 0$ ,  $T_k = 1 + 2 + \dots + k$  ( $k \geq 1$ ). Entonces para todo  $n \geq 1$

$$\sum_{k=0}^n T_k \binom{n}{k} = 2^{n-2} (T_{n+1} - 1)$$

**Demostración.** Aplicando la formula (2) con  $a_k = T_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) y los Corolarios 1 y 3, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n T_k \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (2T_k + k + 1) \binom{n-1}{k} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} T_k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} T_k \binom{n-1}{k} + (n-1) 2^{n-2} + 2^{n-1} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} T_k \binom{n-1}{k} + (n+1) 2^{n-2} \end{aligned}$$

con lo que denotando

$$S_n := \sum_{k=0}^n T_k \binom{n}{k} \quad (n \geq 0)$$

se tiene

$$S_n = 2S_{n-1} + (n+1)2^{n-2} \quad (n \geq 1)$$

y aplicando reiteradamente esta relación de recurrencia, obtenemos

$$\begin{aligned} S_n &= 2^1 S_{n-1} + (n+1)2^{n-2} = 2^2 S_{n-2} + [n + (n+1)]2^{n-2} \\ &= \dots = 2^n S_0 + [2 + \dots + n + (n+1)]2^{n-2} = 2^{n-2} (T_{n+1} - 1). \end{aligned}$$

**Corolario 9 (Una identidad combinatoria para cuadrados perfectos).** *Para todo  $n \geq 1$*

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = 2^{n-1} T_n$$

**Demostración.** Aplicando la formula (2) con  $a_k = k^2$  ( $0 \leq k \leq n$ ) y los Corolarios 1 y 3, se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n-1} (2k^2 + 2k + 1) \binom{n-1}{k} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \binom{n-1}{k} + 2 \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \binom{n-1}{k} + 2(n-1)2^{n-2} + 2^{n-1} = 2 \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \binom{n-1}{k} + n2^{n-1} \end{aligned}$$

con lo que denotando

$$S_n := \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} \quad (n \geq 0)$$

se tiene

$$S_n = 2S_{n-1} + n2^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

y aplicando reiteradamente esta relación de recurrencia, obtenemos

$$\begin{aligned} S_n &= 2^1 S_{n-1} + n2^{n-1} = 2^2 S_{n-2} + [(n-1) + n]2^{n-1} \\ &= \dots = 2^n S_0 + [1 + \dots + (n-1) + n]2^{n-1} = 2^{n-1} T_n. \end{aligned}$$

**Corolario 10 (Identidad de Cesàro para números de Fibonacci).** Sea  $F_k$  el  $k$ -ésimo número de Fibonacci  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_k = F_{k-2} + F_{k-1}$  ( $k \geq 2$ ). Entonces para todo  $n \geq 1$

$$F_{2n} = \sum_{k=0}^n F_k \binom{n}{k}$$

**Demostración.** La formula (2) con  $a_k = F_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ), nos da la siguiente igualdad (\*) y, aplicando reiteradamente dicha igualdad, se obtiene

$$\sum_{k=0}^n F_k \binom{n}{k} \stackrel{(*)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} F_{k+2} \binom{n-1}{k} = \sum_{k=0}^{n-2} F_{k+4} \binom{n-2}{k} = \dots = \sum_{k=0}^0 F_{k+2n} \binom{0}{k} = F_{2n}.$$

**Nota.** Obsérvese que cada una de las diez identidades combinatorias que hemos presentado en la Sección 2 (Corolarios 1-10) ha sido demostrada por aplicación directa del Teorema 1 (formula (2)). A su vez, otras identidades pueden derivarse como corolarios inmediatos o casos particulares de las aquí obtenidas. A modo de ejemplo, citemos tan sólo las cuatro identidades descritas en el siguiente corolario.

**Corolario 11.** Para todo  $n \geq 1$

$$(i) \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$(ii) \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n+k}{n} \binom{n}{k} = (-1)^n$$

(iii)  $\sum_{k=0}^n P_k \binom{n}{k} = (3T_n - n)2^{n-2}$ , donde  $P_k = \frac{1}{2}k(3k-1)$  ( $k \geq 0$ ) es el  $k$ -ésimo número pentagonal.

(iv)  $\sum_{k=0}^n M_k \binom{n}{k} = 3^n - 2^n$ , donde  $M_k = 2^k - 1$  ( $k \geq 0$ ) es el  $k$ -ésimo número de Mersenne.

### ***Demostración.***

- (i) Basta aplicar Corolario 6 con  $n = r = m$  y Corolario 5.
- (ii) Basta aplicar Corolario 7 con  $n = r = m$ .
- (iii) Basta aplicar los Corolarios 3 y 9.
- (iv) Basta aplicar Corolario 4 con  $x = 2$ ,  $y = 1$  y Corolario 1.

### **3 Conclusiones**

En este trabajo se ha presentado un método sistemático y unificado para la generación (o, alternativamente, para la demostración) de numerosas identidades combinatorias, mediante la asignación en nuestra fórmula (2) (Teorema 1) de los valores adecuados a los parámetros  $a_k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) involucrados en ella. Las principales ventajas son:

- (i) La sencillez y brevedad de las demostraciones, tanto del Teorema 1 como de cualquiera de sus corolarios aquí presentados (o de otros que puedan obtenerse por esta vía).
- (ii) Las identidades combinatorias que pueden generarse inmediatamente a partir de nuestra fórmula (2), por simple asignación de valores a sus parámetros  $a_k$  y sin necesidad de conocer dichas identidades *a priori*, incluyen resultados notables de la Matemática como, por ejemplo, el Teorema binomial (Corolario 4).
- (iii) La potencia y versatilidad del método: Muchas otras identidades combinatorias de diferente naturaleza, no expuestas aquí, pueden generarse/demostrarse como corolario del Teorema 1.

## Referencias

- [1] Brualdi, R.A. (2004), *Introductory Combinatorics, 4th Edition*, Ed. Prentice Hall, New Jersey.
- [2] Gould, H.W. (1972), *Combinatorial Identities: A Standardized Set of Tables Listing 500 Binomial Coefficient Summations*, Ed. Morgantown Printing and Binding Co., Morgantown, W. Va.
- [3] Graham, R.L., Knuth, D.E. y Patashnik, O. (1994), *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science, 2<sup>nd</sup> ed.*, Ed. Addison-Wesley, Reading, MA.
- [4] Riordan, J. (1979), *Combinatorial Identities*, Ed. Robert E. Krieger Publishing, Co., Huntington, New York.
- [5] Rosen, K.H. (Ed.) (2000), *Handbook of Discrete and Combinatorial Mathematics*, Ed. CRC Press, Boca Raton, FL.

# Programa TGP para la enseñanza de las transformaciones geométricas en el plano

**José Fábrega, M<sup>a</sup> Carmen Morillo**

Departamento de Ingeniería Topográfica y Cartografía.

Universidad Politécnica de Madrid

jose.fabrega@upm.es , mariadelcarmen.morillo@upm.es

## **Abstract**

*We present the methodology we used in the development of a program that classifies geometric transformations in the euclidean plane and calculates all the characteristic elements of them or, vice versa, from these elements constructs the transformation matrix which calculates the image of any point of the plane.*

## **Resumen**

*Presentamos la metodología utilizada en el desarrollo de un programa que permite clasificar transformaciones geométricas en el plano euclídeo y obtener sus elementos característicos o, viceversa, construir a partir de dichos elementos la matriz de la transformación que permite calcular la imagen de cualquier punto del plano.*

## **Introducción**

El artículo que se expone constituye un trabajo más en la línea de “hacer matemáticas con ordenador” que está produciendo cambios importantes y positivos en la enseñanza de las matemáticas. El objetivo fundamental del trabajo es describir un programa que permite clasificar y calcular los elementos característicos de una transformación geométrica del plano y viceversa (obtener la ecuación matricial a partir de los elementos característicos). Este programa está diseñado para la enseñanza de las matemáticas.

El programa se diseñó para que pudiera utilizarse tanto en las aulas como en casa de los alumnos, por lo que pensamos que debería funcionar como un programa autónomo en el entorno de Windows de Microsoft. Y por ello, aunque en las aulas utilizamos Derive<sup>TM</sup>, el programa lo desarrollamos en Visual Basic. Esto nos obligó a desarrollar todas las funciones de cálculo y a solucionar una serie de problemas que se describirán más adelante.

Consideramos necesario recordar los conceptos siguientes:

- Transformación geométrica (T): como una aplicación biyectiva que hace corresponder a cada punto otro punto. Siendo las más usuales las traslaciones, giros, simetrías, homotecias y semejanzas.
- Isometría o movimiento: es toda transformación geométrica que conserva las distancias.

El programa TGP que presentamos tiene dos partes. En la primera, se conoce la ecuación matricial para clasificar la transformación y obtener esos elementos que la definen (centro y ángulo de giro, eje de simetría, vector de traslación, etc.). En la segunda parte se construye la matriz de la transformación partiendo de dichos elementos.

Tanto el programa como el método de trabajo seguido se han diseñado especialmente para la didáctica de las Matemáticas, más que por su eficiencia en el cálculo.

## 1 Clasificación de las transformaciones

Como hemos dicho anteriormente, partimos del conocimiento de la ecuación matricial. La matriz que define la transformación en la forma  $X' = N \cdot X$  la llamamos

$$N, \text{ siendo } N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

La matriz  $M = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$  define la transformación de  $V_2$  (espacio vectorial

de dimensión 2) asociada a la transformación geométrica. Sabemos que si la transformación es una isometría o movimiento, entonces la matriz  $M$  es ortogonal y se caracteriza por cumplir que  $M^{-1} = M^t$  y su determinante es  $\pm 1$ .

En primer lugar comprobaremos si la matriz  $M$  es ortogonal. Si lo es, se calcula el determinante de  $M$  para conocer si el movimiento es directo o inverso.

- Si  $\det(M)=1$  se trata de un movimiento directo, transformación que conserva la orientación de las figuras. En el plano, los movimientos directos son la identidad, la traslación y el giro. La distinción entre estos movimientos se hará al calcular los elementos que los caracterizan.
- Si  $\det(M)=-1$  se trata de un movimiento inverso, en el que no se conserva la orientación de las figuras. Los movimientos inversos en el plano son la simetría axial y la simetría deslizante. La distinción entre una y otra simetrías se hará al calcular los elementos que las caracterizan.

Si ocurre que  $M$  no es ortogonal, la transformación no es movimiento. Se estudia entonces si se trata de una homotecia o una semejanza. Para ello se calcula  $k = \sqrt{|\det(M)|}$  y se define una nueva matriz  $Q = \frac{1}{k} M$ , procediéndose a clasificar la transformación de la siguiente forma, siempre que la matriz  $Q$  sea ortogonal:

- Si  $Q=I_2$  se trata de una homotecia de razón positiva.
- Si  $Q=(-1)I_2$  se trata de una homotecia de razón negativa.
- Si  $Q$  es ortogonal y  $\det(Q)=1$ , se trata de una semejanza directa.
- Si  $Q$  es ortogonal y  $\det(Q)=-1$ , se trata de una semejanza inversa.

Cualquier otro caso no clasificado anteriormente, corresponderá a una transformación afín general del plano.

Para obtener los elementos característicos de estas últimas transformaciones se procede de la siguiente forma:

- Se parte de los puntos  $O=(0,0)$ ,  $I=(1,0)$  y  $J=(0,1)$  y se obtienen, mediante la ecuación matricial  $X'=N \cdot X$ , los transformados del origen  $O'=T(0,0)$  y los puntos  $I'=T(1,0)$  y  $J'=T(0,1)$ .

- Se calculan los siguientes elementos

- Traslación del origen  $\vec{i} = \overrightarrow{OO'} = (t_x, t_y)$

- Escala según el eje x:  $e_x = \left| \overrightarrow{O'I'} \right|$
- Escala según el eje y:  $e_y = \left| \overrightarrow{O'J'} \right|$
- Rotación del eje x:  $\alpha_x$  a partir de  $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{O'I'}$
- Rotación del eje y:  $\alpha_y$  a partir de  $\overrightarrow{OJ} \wedge \overrightarrow{O'J'}$

Éstos son los que caracterizan una transformación afín. Teniendo en cuenta que se consideran las escalas siempre positivas, serán los ángulos los que indiquen si las transformaciones son directas o inversas.

Llegados a este punto cabe preguntarse si podía haber sido un método de trabajo adecuado partir de la transformación más general para luego ir particularizando. Por ejemplo, si  $\alpha_x = \alpha_y$  y  $e_x = e_y$ , se trata de una transformación de semejanza directa de razón  $e_x$ . Si, además,  $e_x = 1$ , se trata de un movimiento directo. Y así sucesivamente.

Efectivamente, éste puede ser un método de trabajo para resolver el problema. Sin embargo, nos parece más adecuado desde el punto de vista didáctico obrar como se describe en el artículo, partiendo de los movimientos, que son las transformaciones más sencillas y las que el alumno mejor reconoce, para resolver después las más complejas y generales.

## 2 Obtención de los elementos característicos de las transformaciones geométricas

En el caso de los movimientos, los elementos característicos de una transformación geométrica vienen dados por el subespacio afín de sus puntos invariantes. Estos puntos invariantes se obtienen resolviendo la ecuación matricial  $N \cdot X = X$ , siendo  $N$  la matriz que define el movimiento y  $X$  un punto genérico del plano afín euclídeo de dimensión dos ( $E_2$ ). Expresando dicha ecuación como un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir:

$$\begin{cases} a_{21} + (a_{22} - 1)x + a_{23}y = 0 \\ a_{31} + a_{32}x + (a_{33} - 1)y = 0 \end{cases}$$

Se estudia la solución aplicando el teorema de Rouché-Frobenius a partir de los rangos de las matrices de coeficientes,  $A = (M - I_2)$ , y ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 \end{pmatrix}$$

Se presentan entonces los siguientes casos:

A) Si  $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$ , el sistema es incompatible, luego no hay puntos invariantes.

- Si  $\text{rg}(A)=0$ , lo que implica que  $M = I_2$ ,  $\text{rg}(A^*) = 1$ , se trata de una traslación, puesto que entonces la ecuación matricial del movimiento es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a_{21} \\ y' = y + a_{31} \end{cases}$$

de donde se deduce que  $\vec{v} = (a_{21}, a_{31})$  es el vector de la traslación.

- Si  $\text{rg}(A)=1$  y  $\text{rg}(A^*)=2$ , se trata de una simetría deslizante. Movimiento que es composición de una simetría axial con una traslación.

Para calcular el eje de simetría y el vector de la traslación, se hace el siguiente razonamiento: como el punto  $O'=(a_{21}, a_{31})$  es el transformado del origen de coordenadas  $O=(0,0)$ , el punto

$$P = \left( \frac{a_{21}}{2}, \frac{a_{31}}{2} \right),$$

que es un punto equidistante de  $O$  y  $O'$ , tendrá

que pertenecer al eje de simetría. El transformado de  $P$  será el punto  $P'$  calculado por  $P' = N \cdot P$ . Como el punto  $P$  es del eje de simetría, es invariante por la simetría y sólo quedará afectado por la traslación, por lo que el vector de traslación será  $\vec{v} = \overline{PP'}$ . El eje queda definido por el punto  $P$  y el vector director  $\vec{v} = \overline{PP'}$ .

B) Si  $\text{rg}(A)=\text{rg}(A^*)$ , el sistema es compatible, luego hay puntos invariantes.

- Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 0$  el sistema es compatible indeterminado, donde todos los puntos del plano son invariantes. El movimiento es la identidad.
- Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 1$ . El sistema es compatible indeterminado. Se puede tomar como solución una cualquiera de las ecuaciones del sistema y dicha ecuación es el eje de simetría.
- Si  $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*) = 2$ . El sistema es compatible determinado. Tiene una solución única. El movimiento es un giro. La solución del sistema es el centro de rotación. Si se trata de un giro, como la matriz  $M$  contiene en columnas los vectores transformados de los vectores directores de los ejes coordenados, la matriz se puede ver como  $M = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ , lo que permite calcular el ángulo de rotación.

En los casos de homotecias y semejanzas se procede de la siguiente forma. Para cualquiera de las homotecias, la razón es  $k$  o  $-k$  y para obtener el centro (punto invariante) se resuelve la ecuación matricial  $(N-I_2) \cdot X = 0$

La semejanza directa es el producto de una homotecia por un giro. La razón de la semejanza es  $k$ , el centro el punto invariante resultado de  $(N-I_2) \cdot X = 0$  y el ángulo  $\alpha$  se obtiene a partir de la matriz  $Q$ , la cual tiene la forma de la matriz de un giro  $Q = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

La semejanza inversa es el producto de una homotecia por una simetría axial. La razón de la semejanza es  $k$ , el centro el punto invariante resultado de  $(N-I_2) \cdot X = 0$  y eje de simetría es aquel que pasa por el centro y tiene como vector director el que se obtiene de la ecuación  $Q \cdot \vec{u} = \vec{u}$ , correspondiendo ésta ecuación a un sistema homogéneo donde  $\text{rg}(Q-I_2) = 1$  por ser  $Q$  la matriz de una simetría del espacio vectorial  $V_2$ .

### 3 Obtención de la ecuación matricial de una transformación geométrica

En primer lugar se indica qué tipo de transformación se quiere construir y cuáles son los elementos que la definen. Y como resultado se obtiene la ecuación matricial de la misma. En este caso, por motivos didácticos, se ha preferido expresar la transformación en la forma  $X' = C' + A(X - C)$ . Siendo  $C$  un punto del plano afín y  $C'$  su homólogo;  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  el punto genérico del plano y  $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  su transformado.

A continuación se expone la forma de operar en cada uno de los casos.

- Traslación

El dato de partida es el vector de traslación  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ . Por tanto la

ecuación matricial es: 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Giro

Los datos de partida son el centro  $C = (c_x, c_y)$  y el ángulo de rotación  $\alpha$ . Como  $C$  es el punto invariante de la transformación, directamente se obtiene la ecuación matricial del giro:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix}$$

- Simetría axial

Partimos del eje de simetría en forma vectorial, luego conocemos un punto  $P = (p_x, p_y)$  y el vector director. Entonces  $\vec{v} = (v_x, v_y)$  la pen-

diente del eje se obtiene como  $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_y}{v_x}$ , y por ser  $P$  invariante, la

ecuación matricial de la simetría vendrá expresada de la forma si-

guiente: 
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix}$$

- Simetría deslizante.

Los datos de partida son el eje de simetría y el vector de traslación.

$\vec{v} = (v_x, v_y)$  paralelo a él. La pendiente del eje es  $\alpha = \text{arc tg } \frac{v_y}{v_x}$  que-

dando:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \alpha & \text{sen} \alpha \\ \text{sen} \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix}$$

- Homotecia

Conocemos el centro de la homotecia  $C = (c_x, c_y)$ , punto invariante de la transformación, y la razón  $k$ . Obteniéndose la ecuación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix}$$

- Semejanza directa

El punto de partida es el centro de la semejanza  $C = (c_x, c_y)$ , que es punto invariante, el ángulo de giro  $\alpha$  y la razón  $k$ . Luego la ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cos \alpha & -k \text{sen} \alpha \\ k \text{sen} \alpha & k \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix}$$

- Semejanza inversa

Los datos de partida son el eje de simetría, dado por un punto  $P = (p_x, p_y)$  y el vector director  $\vec{v} = (v_x, v_y)$ , además de la razón de semejanza  $k$ . La ecuación matricial resultante es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k \cos \alpha & k \text{sen} \alpha \\ k \text{sen} \alpha & -k \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix}$$

siendo  $\alpha = \text{arc tg } \frac{v_y}{v_x}$

#### 4. Descripción básica del visor del programa TGP

La pantalla de inicio llamada “*Transformaciones geométricas*” tiene dos opciones:

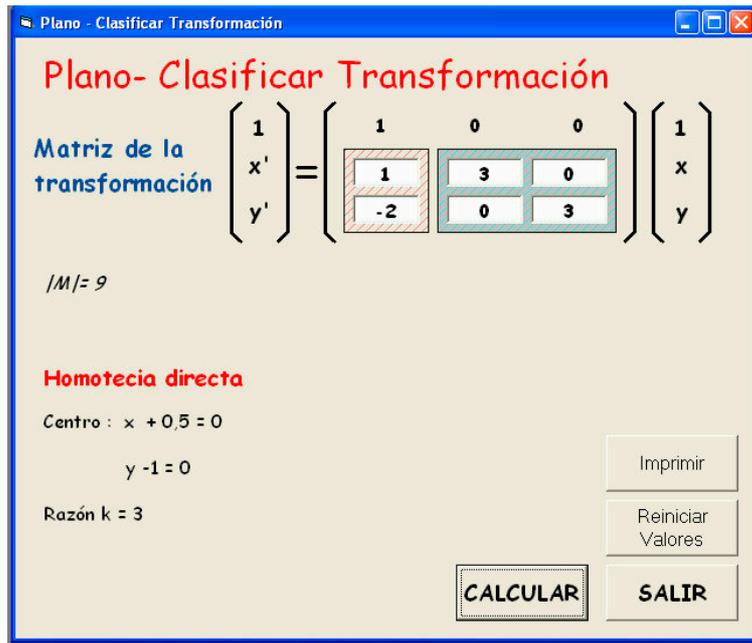
1. Clasificar Transformación.
2. Obtener ecuación.

Se selecciona la opción y a continuación se pulsa el botón “Aceptar”. Aparece una nueva pantalla correspondiente a “Clasificar Transformación” u “Obtener ecuación”. Además, se tiene el botón “Salir” para cerrar el programa.

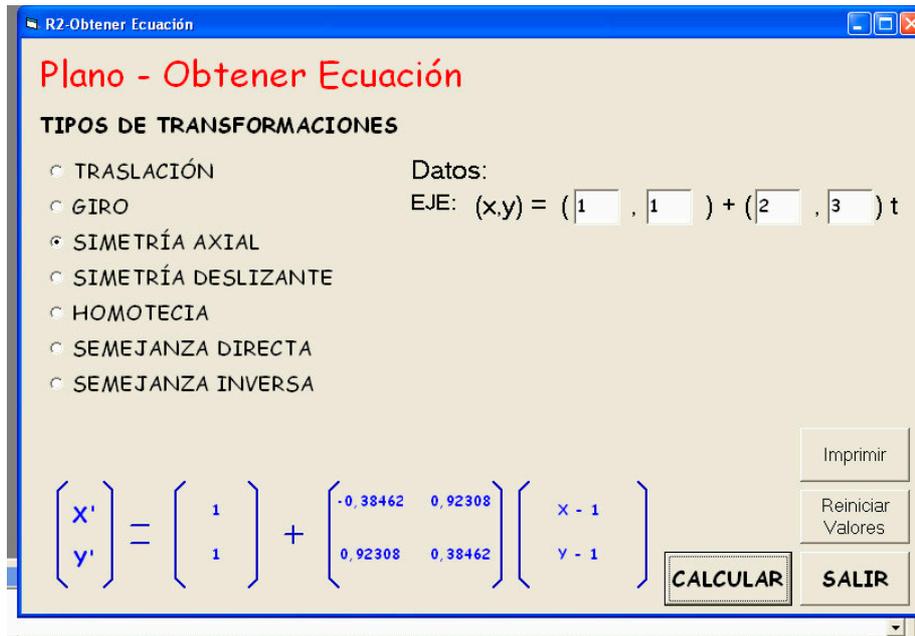


La pantalla “*Clasificar Transformación*” es de manejo muy intuitivo. Se introduce en la matriz de la transformación los datos. A continuación se pulsa el botón “Calcular” y el programa genera el valor del determinante, tipo de transformación, así como sus elementos característicos. Además aparecen los siguientes botones:

- “Imprimir” (imprime la pantalla)
- “Reiniciar Valores” (vuelve a poner la matriz transformación con los valores preestablecidos)
- “Salir” (vuelve a la pantalla anterior).



Pantalla “Obtener Ecuación”:



En esta pantalla aparecen los tipos de transformaciones. Según la transformación seleccionada aparecen sus elementos característicos. Una vez introducidos los

datos de dichos elementos se pulsa el botón “Calcular” y se obtiene la ecuación matricial de la transformación seleccionada. Además, como en la pantalla anterior están los botones de “Imprimir”, “Reiniciar Valores” y “Salir”.

## 6 Desarrollo informático

Como se indicó en la introducción, decidimos realizar un programa que trabajase de forma autónoma y para ello elegimos el entorno Visual Basic v6 sin utilizar ninguna librería específica de funciones.

Se diseñaron una serie de funciones para operar con matrices (suma, producto, inversa, etc.) y resolver los sistemas de ecuaciones resultantes. Se hicieron funciones genéricas para matrices de dimensión  $n$  y se programó el método de Gauss para calcular el rango de las matrices y para resolver sistemas de ecuaciones lineales, también de dimensión  $n$ .

Lo más importante que hay que mencionar en el diseño de estas funciones es que no se pueden utilizar los operadores de comparación de Visual Basic, especialmente el “=” puesto que dada la forma representación interna de las variables de tipo “doble precisión” en los ordenadores siempre hay que tener en cuenta la precisión de los cálculos. Así, por ejemplo, no buscamos si  $|M|=1$  que definiría un movimiento, sino si  $|M|-1$  es menor que una cierta constante, es decir, consideraremos movimientos a aquellas transformaciones cuya razón de semejanza  $k$  cumpla que  $k-1$  sea menor que dicha constante. Por la misma razón, el método de Gauss hay que programarlo teniendo en cuenta esta circunstancia, porque de otra manera, no se encontrarían combinaciones lineales entre las ecuaciones.

En nuestro caso, teniendo en cuenta que los problemas que se presentan en el campo de la ingeniería en el que se desenvuelven nuestros alumnos, y tras calibrar el programa en distintos tipos de problemas, hemos dado a esta constante el valor de  $10^{-8}$ .

## 7 Conclusiones

Se ha diseñado una herramienta cuyo uso es muy intuitivo, y que está orientada fundamentalmente al autoaprendizaje de los alumnos ya que mediante este programa se pueden generar de forma rápida y sencilla todo tipo de problemas-solución, a elección del usuario.

El TGP se utiliza y puede ser utilizado, indistintamente, para el cálculo y para la generación de una amplia y variada gama de ejercicios para desarrollar en las clases prácticas en nuestra asignatura.

## **Bibliografía**

UNIDAD DOCENTE DE MATEMÁTICAS: “*Transformaciones geométricas del espacio euclídeo*”. Escuela de Topografía, 1997.

DÍAZ HERNÁNDEZ, A.M. et al: “Álgebra lineal básica”. Sanz y Torres, 2002

GOLOVINA, L.: “*Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*”. Mir, 1980.

HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, E.: “*Álgebra y Geometría*. Addison-Wesley, 1994.

# Sobre la noción de continuo en las matemáticas medievales

**Pablo Martín Prieto**

Departamento de Historia I y Filosofía  
Universidad de Alcalá de Henares  
pablo\_martin2003@yahoo.es

## **Abstract**

*The aim of this paper is to offer a brief account of some historical developments on the idea of continuity in the context of Western Europe medieval mathematics, as derived from the ancient Greeks' conceptions on the matter.*

## **Introducción**

La idea de continuo no fue formalmente definida hasta los estudios de Georg Cantor comparando la cardinalidad del conjunto de los números racionales (denso pero numerable) con la cardinalidad del conjunto de los números reales (no numerable). Fue sobre este último conjunto que se definió de manera rigurosa la idea de continuo. Sin embargo, aun antes de su correcta definición, esa idea constituía una noción intuitiva que, más o menos clara, había estado presente en el pensamiento matemático desde la Antigüedad. El propósito de este artículo es ofrecer una visión sintética de algunos hitos en la evolución de esta idea, heredada del mundo antiguo, en el contexto del quehacer matemático de los tiempos medievales.

## **1 El planteamiento del problema en la Antigüedad**

Todo el edificio de las matemáticas medievales se asienta inexcusablemente sobre las bases dispuestas en la Antigüedad, y más precisamente, se debe entender incluido dentro de las coordenadas generales establecidas para el desarrollo del pensamiento racional en el seno de la cultura helénica.

Los antiguos griegos elaboraron un pensamiento riguroso y original que, teniendo en cuenta las limitaciones impuestas por la época, no parece exagerado ni especialmente generoso considerar como propiamente científico. Sin duda, el triunfo mayor de este modelo de pensamiento racional se encuentra en la magna compilación de elaboración colectiva conocida bajo el título de *Elementos* y que la tradición atribuye a Euclides. Esta obra constituye, al mismo tiempo, el monumento más acabado de todo el pensamiento racional antiguo, el primer sistema axiomático elaborado por la inteligencia humana y digno de ese nombre, así como una fundamentación rigurosa de los conocimientos matemáticos de la época, sobre todo en el campo de la Geometría, y en menor medida, en el de la Aritmética, que conservará plena vigencia durante toda la Edad Media, hasta alcanzar los tiempos modernos sin mengua apreciable de su prestigio y autoridad.

Sin embargo, aunque capaces de este logro, enfrentados a los desafíos del infinito, los antiguos griegos no supieron superar una serie de paradojas y puntos muertos. Concretamente, el descubrimiento de las magnitudes irracionales (con la conocida demostración de la irracionalidad de  $\sqrt{2}$ ) precipitó, al parecer, la ruina de las comunidades pitagóricas. Asimismo, el manejo prematuro de la noción de infinito, sin disponer todavía del auxilio de una formalización adecuada, dio lugar a las célebres aporías de Zenón de Elea sobre el vuelo de la flecha y la carrera de Aquiles y la tortuga. Éstas tienen que ver con la noción de infinita divisibilidad del espacio, e inducen a considerar con atención la idea de continuo, presente en todo caso, como noción intuitiva, en el ambiente del pensamiento antiguo.

Algunos atomistas pretendieron superar estas aporías concibiendo, en consonancia con el presupuesto fundamental de su sistema físico, y empleando un lenguaje geométrico por entonces inseparable de estas reflexiones, la línea como agregación discreta de puntos singulares o átomos, formada por contigüidad de los mismos. Notaremos, de pasada, que al hacerlo, estos atomistas daban un paso ilegítimo desde el orden físico, al que en todo caso aplicaban sus teorías atomistas, hacia el orden inteligible de los conceptos matemáticos, paso que en general pocos se ahorraron en la Antigüedad.

Entre los seguidores de Platón existió una corriente de oposición a esta noción atomista de la línea como agregado discreto de puntos. Para estos platónicos, la línea debía entenderse más bien como flujo (palabra que, dicho sea de paso, será clave en el sistema de Newton siglos más tarde) de un punto, conforme a un criterio dinámico. Por más que esta concepción desafiara la prevención de la geometría antigua y euclídea ortodoxa contra la utilización del movimiento para definir

conceptos geométricos, constituye un avance en la dirección de transformar la *contigüidad* de los atomistas en *continuidad*.

Aristóteles por su parte, conciliador, buscando el justo medio, hizo uso de sus categorías fundamentales de potencia y acto para distinguir, en el libro III de su *Física*, entre un infinito potencial (relacionado con la generación recursiva de los números según lo que hoy conocemos como la axiomatización de Peano), y un infinito actual (relacionado con la infinita divisibilidad del espacio). Partiendo de este último concepto de infinito actual, aunque sin expresarlo con rigor, Aristóteles parece haber manejado y tenido en cuenta la noción de continuidad, hasta el punto de asignarle a la línea la potencia del continuo. En el pensamiento aristotélico se hace referencia a la circunstancia de que un segmento de una línea no constituye una parte propia de la misma. En el lenguaje de la época, esta declaración ambigua equivale a desautorizar a los atomistas que veían la línea como un mero agregado discreto de puntos yuxtapuestos. Según esta tesis atomista, sustraer un segmento a una línea supondría sustraerle un número discreto de puntos al total. Aristóteles se opone a esta idea: por eso afirma que un segmento no es parte propia o integrante de la línea de la misma manera que lo es una cantidad discreta de elementos de un conjunto finito, puesto que restarle un número de puntos a la línea no supone en caso alguno que la línea resultante pase a tener un número menor de elementos, por tratarse de un conjunto infinito. Evidentemente, los atomistas no creían que el mundo fuera infinito, y este prejuicio lo trasladaban al ámbito de la reflexión matemática, dando ese paso al que antes nos referíamos, desde el orden de la realidad física, al de los inteligibles matemáticos. Para ellos, la línea no era infinitamente divisible, sino tan sólo un agregado de puntos simples o átomos, ellos mismos indivisibles.

La introducción de la distinción cantoriana entre la cardinalidad de los conjuntos infinitos numerables y la del continuo, primer peldaño en la construcción de la aritmética transfinita, nos permite concluir que, evidentemente, restarle a la recta real una cantidad cualquiera de enteros, incluso todos los enteros, y aún más, todos los racionales, no altera la cardinalidad de la recta resultante, que sigue siendo la del continuo.

Sin embargo, lo esencial de la aproximación aristotélica era correcto: su idea de la recta como conjunto infinito presupone de alguna manera la continuidad de la misma, desechando la tesis atomista del agregado discreto de puntos contiguos.

## 2 Visiones del continuo en la Edad Media

Virtualmente, todo el desarrollo de las matemáticas medievales se asienta sobre las bases aristotélica y euclidiana. Durante largo tiempo, en el seno de la Cristianidad latina no se dispuso, para beneficio de los estudios matemáticos, sino de compilaciones más o menos incompletas de la Aritmética escolar romana, con algunas nociones de Lógica principalmente aristotélica, en las obras de autores que se sitúan como bisagra entre la Antigüedad y el Medievo: toda la Alta Edad Media latina, hasta el siglo XI, dependerá estrechamente de los conocimientos recopilados y transmitidos por Boecio, Casiodoro, Isidoro de Sevilla y Beda el Venerable, entre otros. La base aportada por estos autores-puente es, de ordinario, muy exigua, y su pobreza pesa como una losa sobre las posibilidades de desarrollo del pensamiento matemático altomedieval. Con todo, en la obra de estos autores subsisten algunos pálidos reflejos de conocimiento matemático profundo, como en la distinción, que Isidoro de Sevilla transmitió a toda la Alta Edad Media, tal vez sin entenderla él mismo, entre magnitudes discretas y continuas (en el libro III, capítulo 7, de sus *Etimologías*), asociando éstas últimas al concepto de extensión.

A partir del siglo XI, tiene lugar una radical e irreversible ampliación del conocimiento en el seno de la cultura occidental, merced a la recuperación, por medio de traducciones, de la mayor parte del horizonte del saber antiguo que se había perdido al comienzo de la Alta Edad Media. A través de esas traducciones, facilitadas por la intermediación de la cultura musulmana, entran en Occidente la totalidad de Aristóteles, de Euclides, al lado de nuevas aportaciones matemáticas realizadas en tiempo medieval por autores árabes. Gerberto de Aurillac (el papa Silvestre II) y Leonardo de Pisa (llamado Fibonacci) se encargan de introducir y divulgar en Occidente el ábaco y la numeración posicional arábiga. Asociados a este nuevo instrumental llegan los fundamentos del Álgebra. Disponiendo del Álgebra, los universitarios de la Baja Edad Media se hallarán al fin en disposición de aventajar los conocimientos matemáticos heredados de la Antigüedad.

Pues bien, por lo que se refiere al problema del infinito, los pensadores bajo-medievales observaron una dependencia general de la distinción aristotélica entre infinito potencial e infinito actual. Algunos autores, como Pedro Hispano (el papa Juan XXI), llamaron sincategoremático al primero y categoremático al segundo. A pesar de estos nombres, la noción aristotélica apenas había sufrido alteración: el infinito potencial se relaciona con la posibilidad de, dado un número cualquiera, encontrar su sucesor (esto es,  $\forall x \in \mathbf{Z} \exists y \in \mathbf{Z} \text{ tq } y > x$ ); el infinito actual tiene que ver

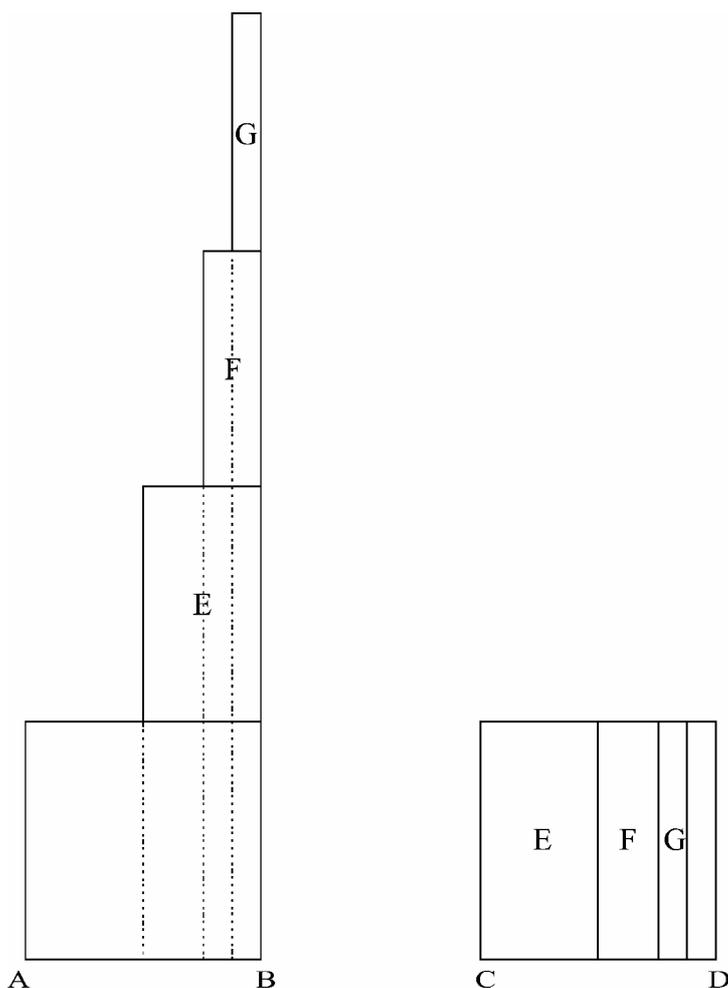
con la infinita divisibilidad de las magnitudes, y en su seno se realiza la noción de continuo.

Diversos autores medievales se dedicaron a trabajar en las propiedades de series infinitas con límite finito. Un ejemplo de esta orientación lo encontramos en la obra del matemático francés Nicolás de Oresme, célebre por su empleo de ejes de longitud y latitud derivados de los procedimientos cartográficos, en clara anticipación a los ejes cartesianos, así como por su desarrollo de teorías sobre la moneda en las que hoy se ve el inicio de la ciencia económica moderna. Este matemático consideró la serie infinita  $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \dots + \frac{n}{2^n}$ . Para demostrar que el límite de esta serie es 2, Oresme ideó una demostración de carácter geométrico, basada en dividir y desplazar indefinidamente un conjunto de piezas, representando los términos de la serie, cuya suma total es 2. Veamos esta demostración, tal como él la expone en el texto de su tratado *De configurationibus qualitatum et motuum* (parte III, capítulo VIII):

*“Accipiatur superficies quadrata pedalis, cuius basis sit linea AB; et sit alia superficies similis et equalis, cuius basis sit linea CD, que ymaginetur in infinitum dividi per partes continue proportionales secundum proportionem duplam super basim CD eodem modo divisam, et sit E prima pars, et F secunda, et G tertia, et sic de aliis. Sumatur igitur prima istarum partium, scilicet E, que est medietas sui totius, et ponatur super primam superficiem versus extremum B. Deinde super totum hoc ponatur secunda pars, scilicet F, et iterum super totum hoc ponatur tertia pars, scilicet G, et ita de aliis in infinitum. Quo facto, ymaginetur basis AB dividi per partes continue proportionales secundum proportionem duplam, eundo versus B. Et statim patebit quod super primam partem proportionalem lineae AB stat superficies alta per unum pedem, et super secundam partem stat superficies alta per duos pedes, et super tertiam per tres et super quartam per quatuor, et sic ulterius in infinitum, et tamen totales superficies non sit nisi duo pedalia prius data in nullo augmentata”.*

*“Tómese una superficie cuadrada de un pie [cuadrado de área], cuya base sea el segmento AB; y sea otra superficie similar e igual, cuya base sea el segmento CD. Imagínese que ésta última se divide indefinidamente, sobre el segmento CD, en partes continuamente proporcionales en razón de dos a uno, del mismo modo que la base. Sean E la primera parte, F la segunda, G la tercera, y así con todas las demás. Así pues, tómese la primera de estas partes, esto es, la E, que representa la mitad del total [de esta superficie], y colóquese sobre la primera superficie, hacia el extremo B. A continuación, sobre todo ello, colóquese la segunda*

parte, esto es, la *F*, y de nuevo, sobre todo ello, colóquese la tercera parte, esto es, la *G*, y así con las restantes, indefinidamente. Hecho lo cual, imagínese que la base *AB* se divide por partes continuamente proporcionales en razón de dos a uno, yendo hacia *B*. De inmediato queda claro que sobre la primera parte proporcional de la línea *AB* hay una superficie de un pie de altura, sobre la segunda parte una superficie de dos pies de altura, sobre la tercera de tres, sobre la cuarta de cuatro, y así sucesivamente hasta el infinito, aunque la superficie total no tiene sino los dos pies [cuadrados] del principio, sin aumento alguno”.

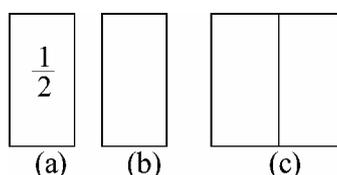


La demostración de Oresme

Luego de exponer esta bella demostración, al final del mismo capítulo, Oresme declara: “*Istud autem alias demonstravi demonstratione subtiliori et difficiliori.*”

*Sed ista est magis conformis huic tractatui et sufficit*. / “Esto mismo he demostrado en otro lugar, con una demostración más sutil y más difícil, pero ésta queda más conforme con el presente tratado y basta”. Esto es, el mismo Oresme confirma su interés por esta interesante serie infinita revelando que dispone de una demostración alternativa, pero que la omite por ser más complicada y no venir tan a cuento en el contexto del tratado en que la expone. De hecho, Oresme aborda la misma serie infinita en otras dos de sus obras: en sus *Quaestiones super geometriam Euclidis*, y en sus *Quaestiones super septem libros physicorum*, pero el tratamiento de la cuestión que realiza en ambos textos no difiere en cosa de substancia del que ya conocemos, ni es siquiera tan detallado. Parece, en consecuencia, que no se tiene noticia de esa otra demostración “más sutil y difícil” que el mismo Oresme decía haber alcanzado. Ya que buscar esta otra demostración en las restantes obras conocidas de Oresme no da gran resultado, nos hemos permitido elaborar una conjetura razonable sobre el particular, proponiendo nuestra propia demostración, ciertamente algo más compleja que la que da Oresme. No es que represente un intento de reconstruir esa otra demostración que el matemático francés tenía en mente, sino tan sólo una demostración alternativa, a título de hipótesis, expresada en términos actuales.

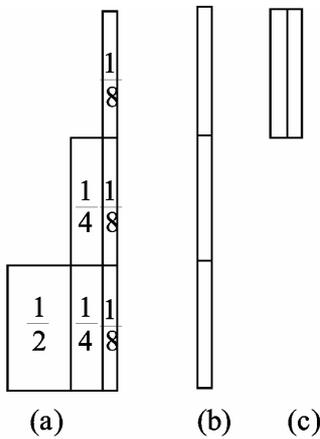
Se trata de una demostración por inducción. Partiendo del área de dos cuadrados de lado unidad, se divide por 2 el área de cada cuadrado, y se separa el primer término de la sucesión,  $\frac{1}{2}$ , como se ve a continuación:



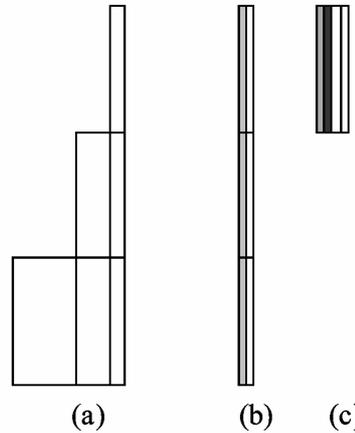
Nuestra demostración: el primer término de la sucesión

De esta manera distinguimos, para los propósitos de la demostración, tres conceptos representados en tres bloques separados: el sumatorio  $\sum_{i=1}^n \frac{n}{2^n}$ , (a), de los  $n$  primeros términos de la serie; un bloque  $\frac{n}{2^n}$ , (b), cuya área es igual a la del último término de la serie incorporado a (a); dos piezas de área  $\frac{1}{2^n}$ , (c). A partir de

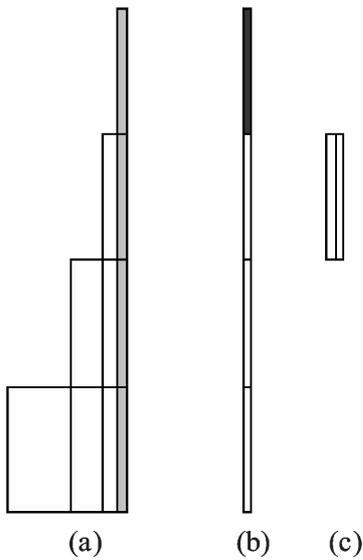
este momento se va aplicando sucesivamente el procedimiento siguiente: 1º dividir por 2 las piezas en (b) y (c); 2º mover una de las mitades de (b) al bloque (a), una pieza de (c) al bloque (a), y otra pieza de (c) al bloque (b). En los siguientes dibujos se representa, como ejemplo, la formación del cuarto término de la serie:



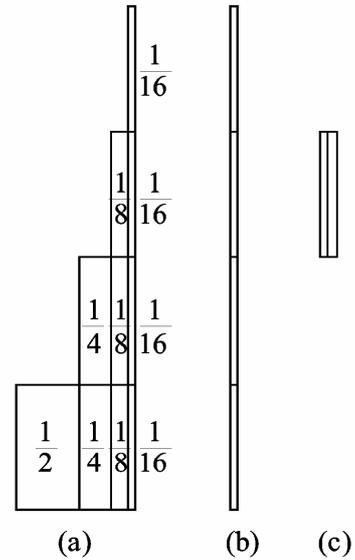
**Figura del término 3**



**Paso 1. Dividir por 2 las piezas en (b) y (c)**



**Paso 2. Mover piezas.**



**Figura término 4**

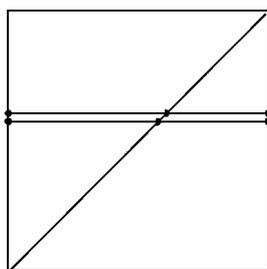
Nuestra demostración: formación del cuarto término

Repitiendo la operación se llega, por inducción, a demostrar que, dado que el área total es constante, y que el área de los bloques (b) y (c) tiende a cero, el área de (a), esto es, del bloque que representa el sumatorio de los  $n$  primeros términos de la serie, tiende a 2. Naturalmente, la idea de infinita divisibilidad de las magnitudes que ilustra esta demostración tiene mucho que ver con la noción de continuo.

Otros autores se ocuparon de obtener demostraciones del continuo. Al insigne franciscano Roger Bacon se debe una demostración geométrica relacionada con la relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado, recogida en el capítulo 39 de su *Opus tertium*. Expresada en términos actuales, la demostración vendría a decir lo siguiente: supuesto que, según la tesis atomista, la recta no fuera sino un agregado discreto de puntos contiguos (esto es, si la recta tuviera la cardinalidad de los enteros), cualquier segmento de esa recta tendría cardinalidad finita, expresable mediante un número entero; si esto fuera así, entonces la relación entre el lado y la diagonal de un cuadrado cualquiera daría siempre un racional, de la forma  $x/y$  ( $x, y \in \mathbf{Z}$ ), lo cual entra en contradicción, si se acepta el teorema de Pitágoras, con el conocido caso del cuadrado de lado unidad. Así, por *reductio ad absurdum*, refutaba Bacon la premisa inicial, concluyendo que la recta no es discreta, sino continua.

En el texto de Bacon, la demostración queda un tanto confusa; aun así, el argumento hará fortuna, y reaparecerá con mayor claridad en la obra del también franciscano Juan Duns Escoto, de cuyo *Opus Oxoniense* (libro II, *distinctio* 2, *quaestio* 9, a. 3, n.13) tomamos y seguimos el siguiente texto: “*Dicit enim illa quinta quod omnium quantitatum commensurabilium proportio est ad inuicem sicut alicuius numeri ad aliquem numerum: et per consequens, sicut vult septima, si lineae aliquae sint commensurabiles, quadrata illarum se habebunt ad inuicem, sicut unus numerus quadratus ad aliquem alium quadratum; quadratum autem diametri non se habet ad quadratum costae, sicut numerus aliquis quadratus ad alium numerum quadratum [...] quadratum diametri est duplum ad quadratum costae [...]; nullus autem numerus quadratus est duplus ad alium numerum quadratum*” / “*La quinta [proposición del libro X de los Elementos de Euclides] dice que la relación entre dos magnitudes conmensurables cualesquiera es como la relación entre dos números [enteros] cualesquiera; y así, como asevera la séptima [proposición del mismo libro X de los Elementos], si varias líneas son conmensurables [esto es, si su longitud puede expresarse mediante un número entero], sus cuadrados guardarán entre sí la relación [que hay] entre un número al*

cuadrado y otro. Sin embargo, el cuadrado de la diagonal [de un cuadrado] no guarda respecto del cuadrado del lado [de dicho cuadrado] la relación del cuadrado de un número [entero] al de otro [...]; el cuadrado de la diagonal [de un cuadrado] es el doble del cuadrado del lado [...], pero no hay número cuadrado que sea el doble de otro número cuadrado”, de lo que deduce que “*diameter est asymmeter costae, id est, incommensurabilis; si autem lineae istae componerentur ex punctis, non essent incommensurabiles*”. / “la diagonal [del cuadrado] es asimétrica, esto es, incommensurable, con el lado. Sin embargo, si esas líneas estuvieran compuestas de puntos, no serían incommensurables”. Pero hay más: si se aceptara la tesis atomista, también se seguiría “*etiam quod essent aequales, quod est plane contra sensu*”. / “incluso que [las líneas] serían iguales, lo cual es claramente un contrasentido”. Para justificar esta última afirmación, establece, mediante paralelas, una biyección entre los puntos de que consta el lado y los puntos de que consta la diagonal del cuadrado:

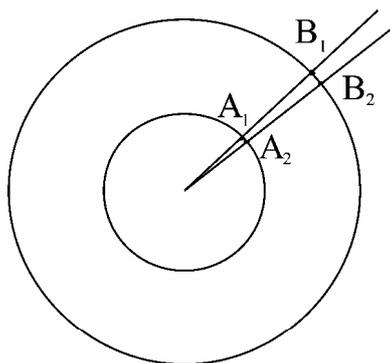


#### Demostración de Roger Bacon y Duns Escoto

“*Accipiantur duo puncta immediata in costa et alia duo opposita in alia costa; et ab istis ad illa ducantur duae lineae rectae aequae distantes ipsi costae: istae secabunt diametrum. Quaero autem: in punctis immediatis, aut mediatis? Si in immediatis, igitur non plura puncta in diametro sunt, quam in costa: igitur non est diameter maior costa. Si in punctis mediatis [...], igitur inter illa duo puncta, quae ponebantur immediata, in costa, est punctus medius*”. / “Tómense dos puntos contiguos en un lado y sus directos opuestos del lado de enfrente; trácense entre ellos dos rectas paralelas a la base: estas rectas cortarán la diagonal. Ahora, pregunto si la cortan en puntos contiguos, o no. Si lo hacen en puntos contiguos, entonces no hay más puntos en la diagonal que en el lado, y en consecuencia, la diagonal no es mayor que el lado. Si la cortan en puntos no contiguos [...], en-

tonces hay un punto intermedio entre los dos puntos del lado que se asumía eran contiguos”.

En la misma obra (libro II, *dist.* 2, *quaest.* 9, a. 3, n. 10), Duns Escoto añadió otra argumentación, relativa a la línea curva, que podemos resumir así: si, de acuerdo con la tesis atomista, dos circunferencias concéntricas de distinto radio constaran cada una de un número discreto y finito de puntos contiguos, entonces resultaría el absurdo de que ambas tendrían el mismo número de puntos, tantos como radios parten de su centro común. Este resultado llevó a Duns Escoto a postular el continuo en una línea cerrada, como medio de explicar lo que hoy llamaríamos la biyección entre ambas circunferencias. El razonamiento textual de Duns Escoto es como sigue. Partiendo de dos circunferencias concéntricas de distinto radio, toma dos puntos contiguos cualesquiera de la mayor y traza las dos semi-rectas que tienen por origen el centro y pasan por dichos puntos. “*Quaero*” prosigue Duns Escoto, “*aut secabunt eam in eodem puncto, aut in alio. Si in alio, igitur tot puncta erunt in minori circulo, sicut in maiori [...] ergo minor circumferentia est aequalis maiori, et per consequens pars est aequalis toti*”. / “*Pregunto, entonces, si estas dos rectas cortan la circunferencia menor en un mismo punto, o en puntos diferentes. Si lo hacen en puntos diferentes, entonces habrá tantos puntos en la circunferencia menor como en la mayor [...]. En consecuencia, la circunferencia menor es igual a la mayor, y por tanto, la parte es igual al todo*”. Dado que este resultado, inevitable cuando se establecen biyecciones entre un conjunto infinito y una parte propia del mismo, le parecía absurdo, consideró suficientemente refutada, una vez más, la tesis de partida, esto es, la de la línea como agregado discreto de puntos contiguos.



Segunda demostración de Duns Escoto

El más célebre pensador medieval, Tomás de Aquino, se opuso asimismo a la tesis atomista, afirmando que, tanto en la línea recta como en la circular, el punto no existe sino en potencia (“*Manifestum est enim quod in linea infinita, et etiam in circulari, non est punctum nisi in potentia*”: *Summa Theologiae, quaest. 85, art. 8*). A esta opinión parece haberse adherido, entre otros seguidores, el arzobispo de Canterbury Thomas Bradwardine. A este último, la necesidad de superar la misma tesis atomista refutada por Bacon y Duns Escoto le indujo a proponer, en su *Tractatus de continuo*, una concepción del continuo como compuesto, no ya por una cantidad de átomos matemáticos (en la línea, puntos), sino por una cantidad infinita de continuos del mismo tipo. Cautivos de las limitaciones que una notación deficiente y un marco conceptual inmaduro imponían en la época a la labor matemática, estos pensadores parecen haber intuido, de alguna manera, la misma clase de motivaciones que mucho más tarde llevarían a generar el conjunto infinito no numerable de los reales (con la potencia del continuo) a partir de sucesiones sobre el conjunto infinito numerable de los racionales (cortaduras de Dedekind).

## Conclusiones

El anterior recorrido ilustra algunos hitos en la evolución de la idea matemática de continuo en la Edad Media, partiendo de la base griega en que se asienta. Los distintos ejemplos mencionados nos transmiten la impresión de que esta idea estaba presente, bien que de manera imprecisa, en la mentalidad de muchos matemáticos, y de que actuaba en el desarrollo de las matemáticas mucho antes de que fuera objeto de una definición formal.

## Bibliografía

- R. Bacon, *Opera quaedam hactenus inedita* (ed. J. S. Brewer), vol. 1, Londres, 1859.
- H. Busard, *Über unendliche Reihen im Mittelalter*, en *L'Enseignement Mathématique* 8 (1962), nos. 3-4.
- M. Clagett (ed.), *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions. A Treatise on the Uniformity and Difformity of Intensities Known as Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum*, Madison (Wisconsin), 1968.

- P. Duhem, *Le système du monde. Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*, vol. 7, Paris, 1954.
- J. Duns Escoto, *Opera Omnia* (ed. L. Wadding), vol. 6, Lyon, 1639.
- K. v. Fritz, *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum*, en *Annals of Mathematics* 2, 46 (1945).
- E. Gilson, *Jean Duns Scot. Introduction à ses positions fondamentales*, Paris, 1952.
- E. Grant (ed.), *A Source Book in Medieval Science*, Cambridge (Massachusetts), 1974.
- J. Hackett (ed.), *Roger Bacon and the Sciences: commemorative essays*, Leiden, 1997.
- J. Quillet (ed.), *Autour de Nicole Oresme: actes du Colloque Oresme (Paris 1989)*, Paris, 1990.
- E. Stamm, *Tractatus de continuo von Thomas Bradwardine. Eine Handschrift aus dem 14. Jahrhundert*, en *Isis* 26 (1936).
- H. Vogt, *Zur Entdeckungsgeschichte des Irrationalen*, en *Bibliotheca Mathematica* 3, 14 (1914).

## Reseña de libros

LUIS M. LAITA, LUIS DE LEDESMA, EUGENIO ROANES LOZANO: *The Genesis of Boole's Logic: Its History and a Computer Exploration*. Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas Naturales. Serie de Ciencias Exactas, Tomo XXXIII. Madrid 2006. XI + 154 páginas. ISBN: 84-87125-44-1. ISSN: 0211-1721.

Esta monografía tiene como punto de partida una colección de trabajos de Luis M. Laita sobre George Boole. Los primeros se remontan a sus tiempos de doctorando en la universidad de Notre Dame en Indiana, bajo la dirección del profesor Michael J. Crowe, y llegan hasta la actualidad, en que es profesor de la Universidad Politécnica de Madrid.

Excepto los artículos sobre historia de la ciencia de la primera época, todos se han realizado en colaboración, pues la labor docente de Luis M. Laita se ha distinguido por haber ido "creando escuela" por aquellas universidades donde ha impartido docencia o con las que ha mantenido una intensa colaboración (Politécnica de Madrid, Sevilla, Complutense, Alcalá,...).

Este libro ha sido escrito conjuntamente con dos de sus más habituales colaboradores: Luis de Ledesma (Catedrático de Inteligencia Artificial de la UPM) y Eugenio Roanes Lozano (Profesor Titular de Álgebra de la UCM).

La obra, escrita en inglés, consta de un prólogo por Enric Trillas (ex-presidente del CSIC) y siete capítulos. Hay capítulos de contenido esencialmente histórico, mientras otros conectan las ideas de Boole con métodos computacionales. Tratan, resumidamente, de:

- Una introducción a la monografía.
- Una biografía comentada de Boole.
- La controversia sobre cuantificación de predicados entre Boole, De Morgan y Hamilton.
- El método de separación de símbolos. Aprovechamiento de algunas de sus ideas para tratar el razonamiento lógico desde el álgebra computacional.
- Utilización de esta aproximación para la extracción de conocimiento y verificación de sistemas expertos basados en reglas.

- El descubrimiento de la lógica clásica por Boole, revisitado computacionalmente desde el punto de vista del descubrimiento científico.
- Factores extracientíficos del descubrimiento científico.

El volumen, muy interdisciplinar, no necesita de técnicas sofisticadas y es de amena lectura. Presenta al lector una interesante combinación, pues conecta la descripción del descubrimiento de la lógica clásica, detallada en su contexto histórico, con técnicas recientes (como bases de Groebner), en un campo moderno como la inteligencia artificial.

**Eugenio Roanes Macías**

BRAULIO DE DIEGO, AGUSTÍN LLERENA, FRANCISCO BAENA, M<sup>a</sup> BELÉN RODRÍGUEZ, J.M. GAMBOA Y JOSÉ M<sup>a</sup> LORENZO: *Problemas de Oposiciones. Matemáticas*, Editorial Deimos. ISBN 84-86379-68-7.

Con el título de “Problemas de Oposiciones. Matemáticas”, la Editorial Deimos ha publicado un volumen que recoge las soluciones que los seis autores han dado a los problemas propuestos en las oposiciones al Cuerpo de Profesores de Enseñanza Secundaria celebradas entre los años 1996 y 2005.

Este es el cuarto volumen de una colección que en los tres anteriores dio cuenta de los problemas propuestos desde el año 1969, y está escrito con la intención de ayudar al que se presenta a estas pruebas a encontrar "las líneas maestras" en la resolución de este tipo de problemas.

En muchos casos se dan varias soluciones de un mismo problema, cuando estas son sustancialmente distintas, alternando los argumentos geométricos de carácter sintético con otros algebraicos que utilizan sistemas de coordenadas.

La exposición de las soluciones es clara, explicando cuando es necesario los fundamentos en que se apoyan, y empleando abundantes figuras, muy cuidadas, siempre que es útil para la mejor comprensión.

**José Javier Etayo**

INFERENCIA ESTADÍSTICA: *M. A. Gómez Villegas*. Editorial Díaz de Santos. Madrid 2005. Encuadernación Rústica. 536 páginas. ISBN 84-7978-687-6

Se trata de un texto de Estadística General - investigación Operativa. Con el presente libro se pretende ofrecer un texto básico para un curso de Inferencia Estadística en Matemáticas, Economía, informática, Ingenierías, Medicina, Biología, Psicología, Sociología y en definitiva para los estudios que necesitan modelizar la incertidumbre mediante la probabilidad para extraer conclusiones de esta modernización.

Contiene los conceptos y métodos de la Estadística moderna: un equilibrio entre el análisis de datos -con especial atención a las representaciones gráficas- y los modelos matemáticos, ambas cosas realizadas con el creciente uso del ordenador.

El índice contiene: Introducción a la estadística matemática y estadísticos muestrales. Reducción de datos. Estimación puntual paramétrica. Estimación por regiones de confianza. Contrastes de hipótesis. Teoría de la decisión. Análisis de la varianza y regresión lineal. Estadística no paramétrica.

**Facilitado por la Editorial**

## CD-ROM: Simposio Internacional “Matemáticas y Nuevas Tecnologías: qué aprender, cómo enseñar”

El 10 y 11 de diciembre de 2003, el tristemente desaparecido Miguel de Guzmán, organizó en la Fundación Ramón Areces un Simposio Internacional titulado “Matemáticas y Nuevas Tecnologías: qué aprender, cómo enseñar”. Además del propio Miguel y del profesor Julio R. Villanueva, que inauguró el Simposio, impartieron conferencias:

- Jean-Baptiste Lagrange, IUFM, Centre de Reims, Francia
- Angela Núñez, CNICE del Ministerio de Educación, Madrid
- Alfonsa Garcia, Universidad Politécnica de Madrid
- Bernhard Kutzler, Linz, Austria
- Antonio Quesada, University of Akron, EE.UU.

- Sebastià Xambó, Universidad Politécnica de Cataluña
- John Olive, University of Georgia, EE.UU.
- Francisco Botana, Univ. de Vigo
- Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano, Univ. Complutense de Madrid
- John Monaghan, University of Leeds, Reino Unido
- Roberto Moriyón, Univ. Autónoma de Madrid
- José Luis Llorens, Universidad Politécnica de Valencia
- Tomás Recio, Universidad de Cantabria
- Bruno Buchberger, Johannes Kepler University, Austria

y tuvo lugar una mesa redonda. El simposio contó con una gran asistencia de público y resultó todo un éxito.

Habíamos comenzado con Miguel la recopilación de material para la realización de un CD-ROM conteniendo las grabaciones (audio) de todas las conferencias (unas en español y otras en inglés), junto con las transparencias presentadas por todos los ponentes y algunos materiales adicionales. Este trabajo concluyó meses después, siendo sus editores Miguel de Guzmán, Eugenio Roanes Lozano, Pedro Ortega Pulido (Universidad Autónoma de Madrid) y Juan Pedro Garbayo Moreno (Universidad Complutense de Madrid).

El CD-ROM incluye además una Presentación por Julio R. Villanueva, una Introducción por Miguel de Guzmán y un Prólogo por Tomás Recio.

Afortunadamente, gracias a la amable colaboración de la Fundación Ramón Areces y al apoyo y subvención de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, se publicó dicho CD-ROM, que fue presentado en el homenaje realizado a Miguel de Guzmán en la Universidad Complutense de Madrid del 13 al 15 de diciembre de 2004.

Muchos de nuestros socios y otros profesores nos han pedido información sobre el modo de conseguir dicho CD. En la Sede de nuestra Sociedad disponemos de un cierto número de copias de dicho CD-ROM, que podemos enviar gratuitamente a los interesados (socios o no de nuestra Sociedad) que nos envíen un sobre adecuado para contener un CD-ROM, con la dirección a la que se debe enviar el mismo ya escrita en el sobre, y franqueado. Dicho sobre ser incluido en otro dirigido a nuestra Sede, cuya dirección aparece en la página 2 de este número del Boletín.

## Anuncio de curso de la Sociedad Thales

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales y el Centro de Informática Científica de Andalucía convocan Cursos de Formación a Distancia Matemáticas 2006 con precios reducidos para socios de las Sociedades Federadas. Para información sobre contenidos e inscripción véase la página web:  
<http://thales.cica.es>

### **Instrucciones para el envío de originales para su publicación en el boletín**

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

#### **Formato**

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTeX. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo "article" y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTeX, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

### **Envío de las copias en papel**

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

### **Envío del fichero o ficheros en formato electrónico**

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

### **Selección de originales**

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.