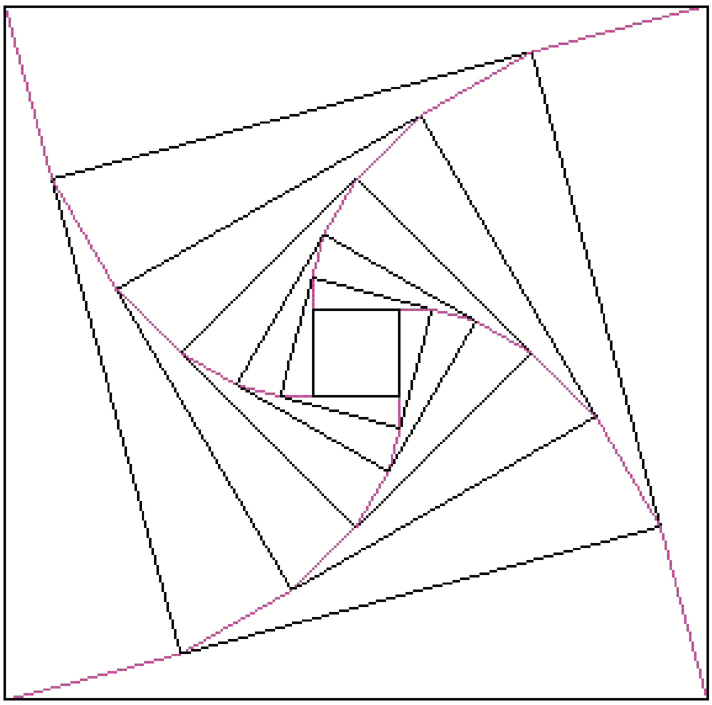
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 71
OCTUBRE DE 2005

Número especial dedicado al profesor Miguel de Guzmán

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que adoptada como logotipo de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Esta figura ya apareció en portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia debe dirigirse a la sede de nuestra Sociedad, ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es
Página web: www.ucm.es/info/secdealg/puigadam

JUNTA DIRECTIVA

XXIII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Como todos los años, desde 1983, nuestra Sociedad y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, han celebrado el ya tradicional *Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas* que esta vez lleva el número XXIII. En estos veintitrés años, hemos tenido la satisfacción de ver cómo muchos de los alumnos premiados han obtenido posteriormente notables éxitos en las Olimpiadas Matemáticas, tanto nacionales como internacionales.

El Concurso de este año, convocado en nuestro Boletín nº 69 (en el que aparecen las Bases), se celebró en una calurosa mañana, el sábado 11 de Junio de 2005, en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, donde también se efectuó la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde. La concurrencia fue algo mayor que en años anteriores. Del primer nivel (3º de ESO), se presentaron **26** alumnos, del Segundo (4º de ESO), **22** y del Tercero (1º de Bachillerato), **36**. O sea, en total, **84**.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificó de 0 a 7 puntos. A continuación de esta crónica damos sus enunciados.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de enhorabuena a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a todos los que han contribuido al éxito del Concurso. En el Nivel I se dio la circunstancia de que tres participantes obtuvieron la máxima puntuación de 28 puntos, quedando empatados para los primeros premios. Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles.

NIVEL I

1. D. Rodrigo BELLOT RODRÍGUEZ, *del Colegio Retamar de Madrid.*
1. D. Gabriel FURSTENHEIM, *del Colegio Nª Sª se la Sabiduría de Madrid.*
1. D. Diego IZQUIERDO ARSEGUET*, del Liceo Francés de Madrid*
4. D. David ALFAYA SÁNCHEZ*, del Instituto José Luis Sanpedro de Tres Cantos (Madrid)*
5. D. Andrés RODRÍGUEZ REINA, *del Colegio S.E.K. Ciudalcampo de Madrid*

NIVEL II

1. D. Guillermo BERNARDO DE QUIRÓS GONZALO, *del Colegio Fray Luis de León de Madrid*
2. D. Francisco FERNÁNDEZ GASPAR*, del Colegio Retamar de Madrid*
3. D. Miguel MONTERO MUÑOZ, *del Colegio Fray Luis de León de Madrid*
4. D. Juan José FERNÁNDEZ SÁNCHEZ-ROMATE, *del Colegio de Huérfanos de la Armada de Madrid*
4. D. Álvaro MATEOS GONZÁLEZ, *del Liceo Francés de Madrid*

NIVEL III

1. D. Hugo FERNÁNDEZ HERVÁS*, del I.E.S.San Juan Bautista de Madrid*
2. D. Diego GIMENO SANZ*, del Colegio. San José de Valladolid*
3. D. Carlos RAMÍREZ CARRILLO*, del Colegio de San Viator de Madrid*
4. D. Eduardo CASANOVA CUESTA*, del Colegio Joyfe de Madrid*
5. Dª. Sara BERNABÉ MORODO*, del Colegio de San Viator de Madrid.*

Nos complace señalar que el alumno **Hugo FERNÁNDEZ HERVÁS***,* que ha recibido el primer premio del Nivel III, también recibió el primer premio de nivel II el año pasado y el de nivel I en 2003. Este alumno, participó en la XLI Olimpiada Matemática Española, obteniendo un segundo premio en la fase local de Madrid y medalla de oro en la fase final. También fue premiado en el IX Concurso de Primavera de Madrid (4º Nivel). Así mismo, **Carlos RAMÍREZ CARRILLO,** 3º de ese Nivel, fue 5º del Nivel II en 2004. El 4º del Nivel II, **Álvaro MATEOS GONZÁLEZ,** obtuvo el primer premio del Nivel I el año pasado.

Es de destacar la insistente aparición entre los premiados, año tras año, de alumnos de determinados Centros de Enseñanza, lo que prueba una eficaz y perseverante labor de formación por parte de los mismos, a los que debemos felicitar. Por ejemplo, de los últimos diez Concursos, en nueve de ellos han sido premiados alumnos del I.E.S. San Juan Bautista y del Colegio San Viator. También han participado habitualmente con gran brillantez el I.E.S. Fortuny, los de Requena (Valencia), y los colegios Retamar, Joyfe, Nª Sª del Pilar, Alemán y otros.

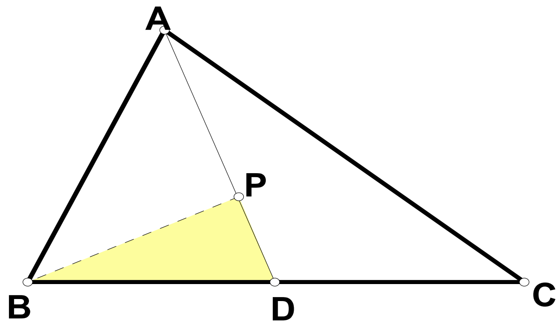
Nuestra enhorabuena a todos los premiados, al resto de los participantes y a los padres y profesores que los han preparado y animado a participar.

J. F. B.

Problemas propuestos en el XXIII Concurso de Resolución de Problemas

1er nivel

1. En la mediana *AD* del triángulo *ABC* de la figura, señalamos un punto *P*. Si la longitud de *AD* es *x*, la de *AP* es *y*, y el área del triángulo *ABC* es *z*, escribe el área del triángulo *BPD* en términos de *x*, *y*, *z*.



2. Hallar cinco enteros consecutivos tales que la suma de los cuadrados de los tres primeros coincida con la suma de los cuadrados de los dos últimos.

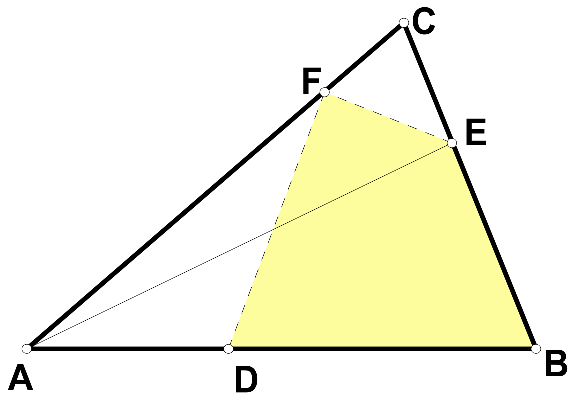
3. En un concurso de cinco problemas, cada problema se puntuó con un número entero, de 0 a 5. La moda de mis puntuaciones en cada problema ha sido 1 punto más alta que la mediana, que a su vez ha sido 1 punto más alta que la media. ¿Qué puntuación he obtenido en cada problema?

4. Unos padres hablan con su hijo. El padre le dice al hijo*: "Bien, Martín, nuestras tres edades suman ahora 72 años. Como yo soy seis veces más viejo de lo que tú eres ahora, puede decirse que cuando sea el doble que tú, nuestras tres edades sumadas serán el doble de lo que son ahora*". ¿Qué edad tiene la madre?

2º nivel

1. Hallar tres números naturales en progresión aritmética de diferencia 2, tales que la suma de sus cuadrados sea un número de cuatro cifras iguales.

2. El triángulo ABC de la figura tiene área 10. Los puntos D, E y F, distintos de los vértices A, B y C, están en los lados AB, BC y CA respectivamente, siendo $AD = 2$ y $DB = 3$. Si el triángulo ABE y el cuadrilátero $DBEF$ tiene la misma área, ¿cuánto vale esa área?

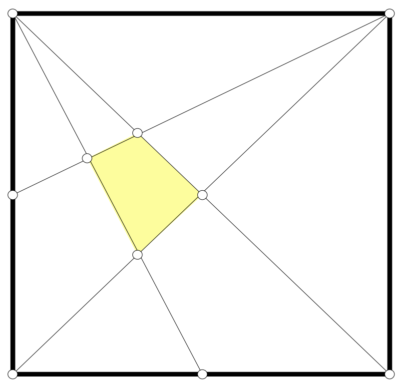


3. Un capitán tiene tres compañías: una de suizos, otra de zuavos y otra de sajones. Si asaltan una fortaleza, les promete una recompensa de 901 escudos con la condición de que cada soldado de la compañía que suba primero recibirá un escudo, repartiendo los demás a partes iguales entre los restantes de la siguiente manera:

- si llegan primero los suizos, los otros soldados recibirán medio escudo;
- si llegan primero los zuavos, los demás soldados recibirán un tercio de escudo;
- si llegan primero los sajones, los demás reciben un cuarto de escudo.

¿Cuántos hombres componen cada compañía? (Euler, siglo XVIII).

4. Si el cuadrado de la figura tiene de lado 2, calcula el área sombreada sabiendo que los extremos de los segmentos que llegan a cada lado son vértices del cuadrado o puntos medios de sus lados.

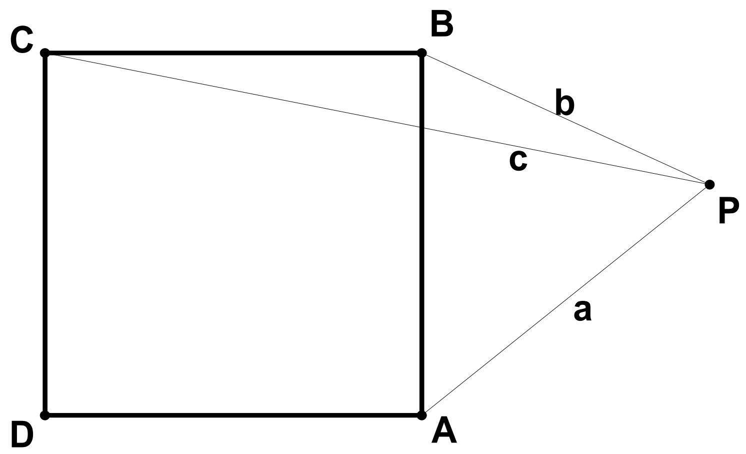


3er nivel

1. Sean z_1 y z_2 números complejos tales que la suma de sus cuadrados es 7 y la suma de sus cubos es 10. ¿Cuáles son todos los valores que puede tomar $z_1 + z_2$?

2. En un cuadrado de vértices $ABCD$ se elige un punto interior P de forma que dista 1, 2 y 3 respectivamente de los vértices A, B y C. ¿Cuánto vale el ángulo APB?

3. En el plano del cuadrado $ABCD$ de lado 1, tomados los vértices A, B, C y D como indica la figura, se encuentra el punto P. Si las distancias de P a A, B y C son, respectivamente, a, b y c, con $a^2 + b^2 = c^2$, ¿cuál es la máxima distancia posible de P a D?



4. Sea $p(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ un polinomio con coeficientes racionales y tal que la diferencia entre dos de sus raíces es un número racional. Demostrar que si alguna raíz de $p(x)$ es racional, entonces lo son todas.

Dedicatoria de este número del Boletín

Como ya anunciamos en los dos números anteriores de nuestro Boletín, la Junta Directiva propuso dedicar el número 70, correspondiente a junio de 2005, en homenaje al Profesor Miguel de Guzmán, fallecido el pasado año.

Como es bien sabido, era catedrático de Análisis Matemático en la Universidad Complutense de Madrid y miembro de la Real Academia de Ciencias desde 1983.

Desde el punto de vista de nuestra Sociedad, la característica fundamental de su trayectoria profesional fue su preocupación por la educación matemática en todos sus niveles, incluso terciario, como solía decir, al referirse al nivel universitario.

Con el propósito de fomentar atracción de los estudiantes más jóvenes hacia el quehacer matemático, desarrolló un Proyecto de estímulo del talento matemático en el marco de la Real Academia de Ciencias.

Se interesó también por la educación matemática extendida al público en general, escribiendo en esa línea varios libros, alguno de los cuales fue traducido a varios idiomas.

De 1991 a 1998 ocupó la Presidencia del máximo organo internacional para la educación matemática, el ICMI (International Comission on Mathematical Instruction). Recordemos que en los años 50, otro español, D. Pedro Puig Adam también ocupó la Presidencia de la Comisión Internacional para el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática, promovida por la UNESCO.

En la última Asamblea de nuestra Sociedad se acordó por unanimidad aceptar la propuesta de la Junta de dedicar el número 70 del Boletín al Profesor Miguel de Guzmán, como agradecimiento al trabajo que llevó a cabo en pro de la educación matemática.

Las colaboraciones recibidas han excedido la capacidad de un solo número del Boletín. Por ello, en este y en el número anterior se encontrarán los trabajos que hemos recibido, como muestra del afecto de la comunidad de profesores de Matemáticas hacia la figura del Profesor Miguel de Guzmán.

La Junta Directiva

La visualización en la obra de Miguel de Guzmán

Alfonsa García, Francisco García
Universidad Politécnica de Madrid.
Departamento de Matemática Aplicada. E.U. Informática
{garcial, gmazario}@eui.upm.es

Gerardo Rodríguez
Universidad de Salamanca.
Departamento de Matemática Aplicada. E.P.S. de Zamora
gerardo@usal.es

Agustín de la Villa
Universidad Pontificia Comillas.
Departamento de Matemática Aplicada y Computación. ETSI (ICAI)
Universidad Politécnica de Madrid
Departamento de Matemática Aplicada. E.U.I.T. Industrial.
avilla@upco.es

Abstract

In this paper we present the role of mathematical visualization in Miguel de Guzman's work. We analyze the influence of visualization on his research, teaching and divulgation. Finally we give an example of visualization of Picard's iterations in order to show an experience of teaching according with a Miguel's suggestion.

Introducción

Miguel de Guzmán decía: *"Las ideas, conceptos y métodos matemáticos presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, cuya utilización resulta muy provechosa*". Desde luego, toda su obra parece estar impregnada de esta máxima.

En este trabajo, apoyándonos en nuestra experiencia personal de contacto con Miguel y en el conocimiento de su obra, haremos unas reflexiones sobre lo que, a nuestro entender, era la visualización para él, siendo el hilo conductor de nuestra exposición las publicaciones realizadas a lo largo de su fructífera trayectoria.

En las dos últimas secciones mostraremos sendos ejemplos de visualización, uno como herramienta de investigación y otro como herramienta docente.

El primero cuenta una experiencia de Miguel en relación con su "descubrimiento visual" de un teorema de Steiner. Se trata de un bonito problema, que nos permite seguir fácilmente el proceso de investigación a través de la visualización llevado a cabo por Miguel y nos hace ver cómo las imágenes hacían brotar en su cabeza las ideas, de un modo que se nos antoja altamente intuitivo y natural.

El segundo es un ejemplo de experiencia didáctica basada en una propuesta de Miguel, la visualización de las iteraciones de Picard, que permite mostrar la posibilidad de usar imágenes para ayudar a entender un concepto, sin duda difícil, como es el de la convergencia funcional y ver cómo el uso de esta herramienta puede propiciar la elaboración de conjeturas.

1. La visualización como recurso en la investigación

En su tarea investigadora, dedicada inicialmente al análisis armónico, con incursiones posteriores a la teoría geométrica de la medida y la teoría de los fractales, sus llamadas a la visualización eran constantes. En casi todas sus clases de doctorado aparecían esas figuras de trazo grueso, acompañadas de flechas, coordenadas de algunos puntos, comentarios o cualquier cosa que se le ocurría y que servía para entender mejor el concepto, el teorema, el ejemplo, etc. Esas famosas figuras han sido luego una constante en todas las publicaciones de Miguel, aunque en algunos libros hayan sido sustituidas por otras realizadas con medios mecánicos o, en la última etapa, con ordenador. Una muestra de lo que decimos puede verse en los capítulos del libro "Real Variable Methods in Fourier Analysis" [2].

En sus trabajos sobre fractales, Miguel se muestra cautivado por la belleza gráfica de estas estructuras matemáticas e intenta transmitir a sus discípulos y a una buena parte de la sociedad ese entusiasmo. En el artículo "Miguel de Guzmán: del análisis armónico a la teoría geométrica de la medida y los fractales" [17] tres de sus alumnos de doctorado, M. A. Martín, M. Morán y M. Reyes, nos cuentan cómo les animó a realizar un programa informático para poder visualizar las atractivas imágenes. También en ese artículo nos narran la evolución del pensamiento de Miguel en cuanto a su trayectoria investigadora y se deja traslucir la importancia de los constantes apoyos en imágenes para el proceso de evolución de sus razonamientos.

Sus últimos trabajos de investigación [15] versan sobre tensegridad (estudio de unas estructuras construidas con elementos muy simples, en un equilibrio altamente inestable) y de nuevo apreciamos cómo la visualización le sirve de pilar de apoyo en sus razonamientos.

2. La visualización como herramienta de divulgación

En casi todas sus obras de aspecto más divulgativo aparece, en mayor o menor medida, la visualización. Pondremos algunos ejemplos.

En su libro “Para pensar mejor” [9] después de hacer un análisis de las estrategias de pensamiento profundiza, en la tercera parte del libro, en las propias del pensamiento matemático. En todas las que enumera: *familiarízate con el problema, busca estrategias diversas, empieza por lo fácil, experimenta, hazte un esquema, una figura, un diagrama, escoge un lenguaje adecuado, busca un problema semejante...*, encuentra ejemplos donde la visualización juega un papel importante.

El libro “Aventuras matemáticas” [10] está también impregnado de situaciones de uso importante de la visualización. En los diferentes capítulos de esta obra se muestran, a nuestro entender, dos aspectos destacados de Miguel en relación con las matemáticas, su visión de la belleza matemática y su entusiasmo. El primero de ellos viene reflejado en la vena poética a través de la metáfora al titular las homotecias y las inversiones como algunas metamorfosis del plano. Su entusiasmo, que siempre transmitía en todo: clases, conferencias, cursos, etc., y le llevaba a utilizar un lenguaje con el que captar la atención, puede comprobarse en algunos títulos de los capítulos de dicho libro: *La región perdida*, *Escaleras arriba…hacia el paraíso de Cantor* o *Una curva polivalente*.

En el libro “Mirar y ver” [1] escribió diferentes ensayos de geometría, que según sus palabras de la introducción, tuviesen profundidad y belleza y que, al tiempo, representasen líneas de pensamiento actuales.

Probablemente su publicación paradigmática, en relación con el tema que nos ocupa sea “El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en análisis matemático” [11], que es de hecho un canto a la visualización en matemáticas. En el primer capítulo del libro analiza, en primer lugar, aspectos generales de la visualización, así como sus diferentes tipos (isomórfica, homeomórfica, analógica y diagramática). Posteriormente hace un estudio de la visualización a través del tiempo, pone de manifiesto los posibles obstáculos de la visualización y termina con un análisis de la visualización con y sin ordenador.

Miguel, pionero en casi todas las tareas a las que se dedicó, no podía faltar a la cita con los paquetes de Cálculo Simbólico de los que siempre valoró, por encima de otras capacidades, las posibilidades que ofrecen de cara a la visualización. Aunque ya en otros libros, como "El rincón de la pizarra" [11], Miguel saca un excelente partido de los sistemas de Cálculo Simbólico, es en su última obra de divulgación, "La experiencia de descubrir en Geometría" [13], donde la interacción entre visualización-conjetura-demostración y los sistemas informáticos de cálculo matemático (concretamente DERIVE) alcanza su máximo exponente. Precisamente de esta obra hemos extraído el ejemplo destacado en la sección 4, que permite poner de manifiesto toda la riqueza del pensamiento de Miguel.

También forman parte de su labor divulgativa las innumerables conferencias, cursos y ponencias que Miguel presentó a lo largo de su vida. Muchas veces le hemos oído en estas ocasiones hablar de la visualización. Podemos citar el "2nd International Conference on the Teaching of Mathematics", celebrado en Creta, en el que compartimos los autores agradables momentos con Miguel y Maite y donde impartió una de las conferencias plenarias: "The role of visualization in the teaching and learning of mathematical analysis" [14].

En esta brillante conferencia, Miguel aborda las dificultades que hay que vencer para una correcta utilización de la visualización como estrategia docente habitual. Miguel señala algunas de estas dificultades: *la visualización conduce a errores* (y desgrana algunos ejemplos históricos sobre diversas falacias geométricas cometidas por una incorrecta interpretación de las figuras geométricas), *la visualización es difícil* (donde, por ejemplo, señala la desconfianza con que muchos estudiantes afrontan el recurso a la visualización y demandan una "traducción" formal de las ideas expuestas a través del uso de figuras, diagramas, etc.) pero también propone diferentes tareas que harán que la utilización de esta poderosa herramienta nos ayude en nuestras exposiciones docentes: el profesor debe prevenir posibles desviaciones en la interpretación de las figuras y diagramas utilizados, debe utilizar la visualización de manera habitual en sus exposiciones y transcribir, de vez en cuando, la visualización utilizada a expresiones matemáticas formales que permitan reconocer a nuestros alumnos que estamos trabajando con "matemáticas reales" y que lo que podemos explicar a través de la visualización puede también ser escrito en lenguaje formal.

3. La visualización como herramienta didáctica

En este apartado es preciso hacer referencia al trabajo de Miguel como innovador docente en campos en los que es raro encontrar personas que se dedican con igual rigor y calidad a la elaboración de materiales docentes para enseñanzas medias y para la enseñanza universitaria.

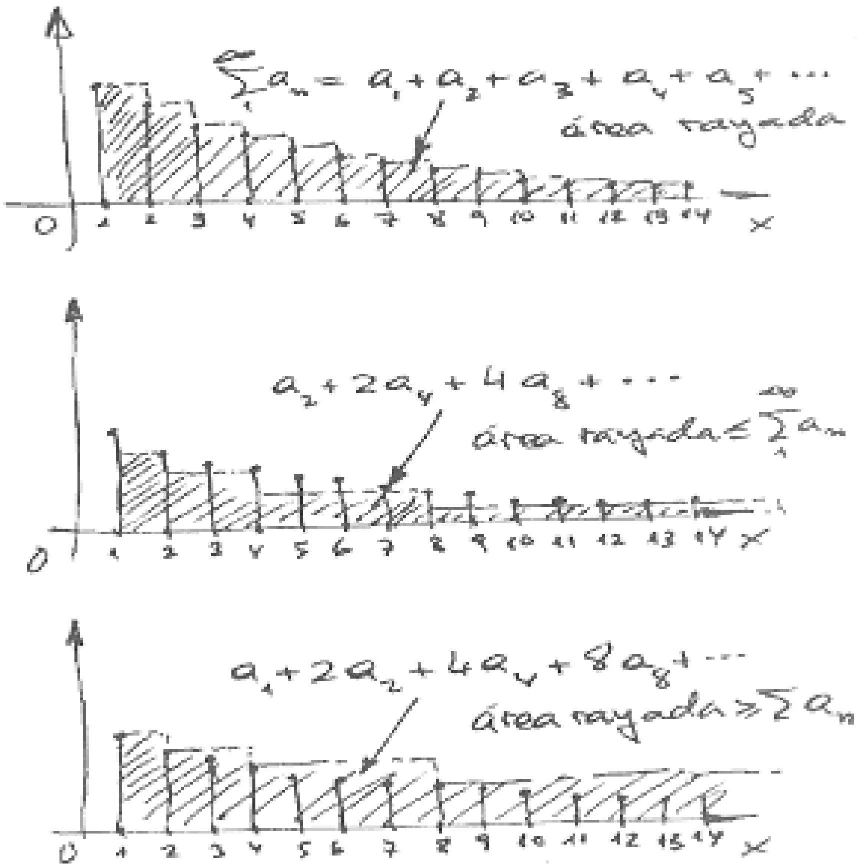


Figura 1

Miguel publicó varios textos universitarios [8] en los que se pueden buscar ejemplos de visualización. Dentro de los múltiples ejemplos incorporados por Miguel en sus diferentes publicaciones acerca del uso didáctico de la visualización en los niveles universitarios, presentamos un ejemplo, obtenido del libro ya citado "El rincón de la pizarra" [11], acerca de la demostración de un resultado sobre series numéricas: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, con a_n decreciente hacia 0 converge o diverge precisamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_n$ converge o diverge.

La figura 1 muestra los dibujos originales de Miguel para la construcción de la cadena de desigualdades que, por aplicación del teorema de comparación de series, permite establecer el resultado anunciado.

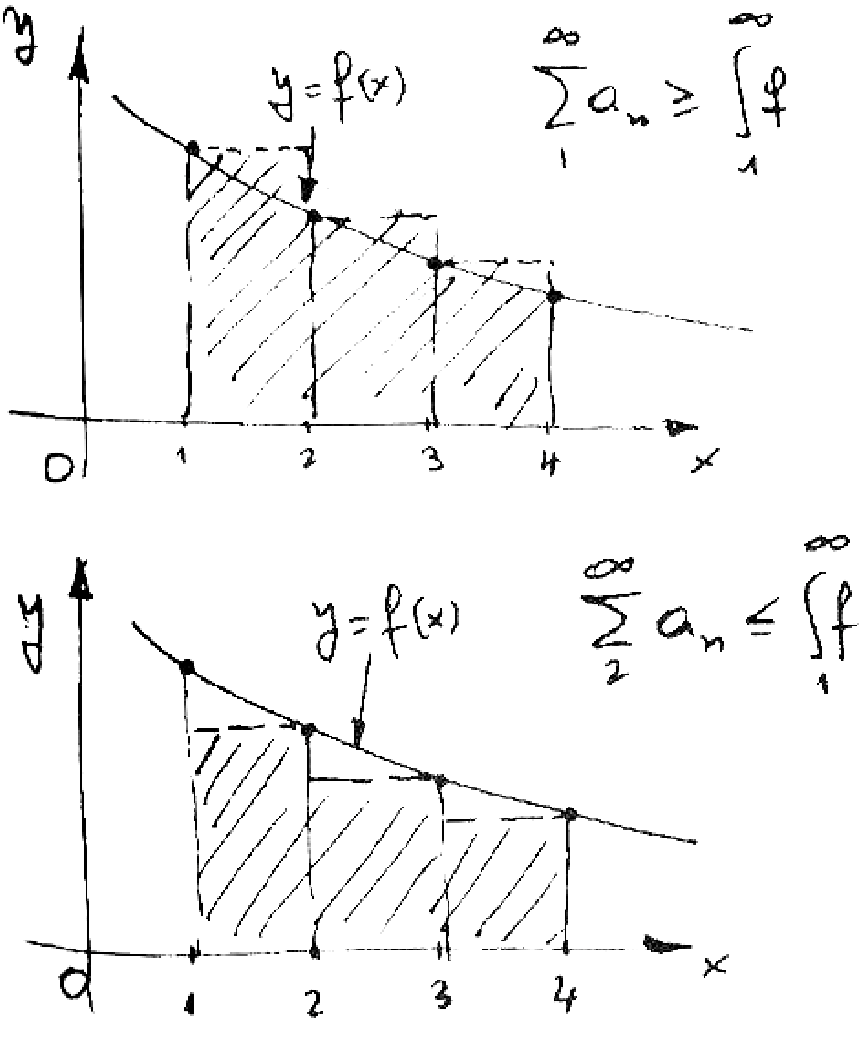


Figura 2

El inconfundible estilo de Miguel aparece también cuando se aborda la comparación con una integral impropia. En este caso, el conocido resultado liga la convergencia o divergencia de una serie de términos no crecientes convergentes a cero con la convergencia o divergencia de la integral $\int_1^\infty f(x)dx$ donde $f(n) = a_n$ y $f(x)$ es no creciente. Los dibujos de Miguel (figura 2) permiten visualizar el resultado.

Los libros de enseñanza secundaria de la editorial Anaya escritos por Miguel en colaboración con J. Colera y otros [3, 4, 5, 6, 7, 12] significaron un cambio en la enseñanza de las matemáticas en dicho nivel. Miguel entendía que en cada etapa de la formación matemática de una persona se debían impartir las matemáticas más acordes con dicha edad. Además los libros están llenos de sugerentes propuestas para abordar la resolución de problemas. Una vez más Miguel resalta la importancia de disponer de buenos dibujos de la situación.

4. Un ejemplo de descubrimiento a través de la visualización.

Un ejemplo que permite vislumbrar todo el rico mundo de Miguel está referido al descubrimiento de las propiedades de la deltoide de Steiner. En una entrevista con Fernando Corbalán [16] aparece una mención a este problema. A la pregunta: *¿Usted es de los que creen que "hay que dormir los problemas" o "consultarlos con la almohada"?*, responde Miguel: *"Pienso cuando tengo tiempo y estoy interesado en un problema, sobre todo por la mañana, cuando me despierto, mucho más que por la noche. Pero a los problemas hay que dedicarles mucho tiempo, no se resuelven sobre la marcha (como suelen pensar ahora los jóvenes). Cuando me despierto me pongo a pensar en un problema y lo paso estupendamente. Con uno de los problemas de la deltoide pasé meses hasta que di con la idea adecuada."*

En los párrafos que siguen, hemos realizado un extracto de la situación que describe Miguel respecto de este problema, procurando hacer énfasis en los aspectos más novedosos, fundamentalmente el uso del ordenador para redescubrir resultados o para buscar demostraciones o caminos más elegantes de obtener resultados ya conocidos.

Partamos del siguiente resultado que Miguel visualiza utilizando DERIVE: Sea ABC un triángulo arbitrario y K su circunferencia circunscrita. Para un punto arbitrario P de K se trazan las tres proyecciones ortogonales de P sobre los lados, U sobre a, V sobre b y W sobre c. Entonces UVW están alineados (ver figura 3) y la recta que los contiene recibe el nombre de recta de Wallace-Simpson, que en adelante denotaremos como recta de W-S.

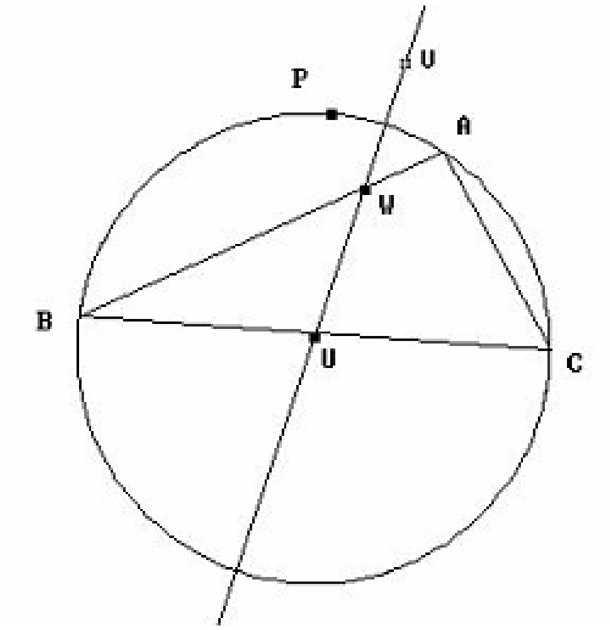


Figura 3

Miguel se plantea el problema de hallar la envolvente de las rectas de Wallace-Simpson y "descubre" el teorema de Steiner: "*Cuando se me ocurrió preguntarme sobre la envolvente de las rectas de Wallace de un triángulo, nada sabía sobre el hecho de que Steiner se había hecho la misma pregunta más de siglo y medio antes que yo ni que la había contestado con éxito. Pero en mi exploración yo tenía instrumentos, DERIVE entre otros, que Steiner no tenía y por eso llegar a unos cuantos de los resultados a los que él llegó fue para mí seguramente mucho más fácil. Por otra parte, con la posibilidad de experimentación que DERIVE ponía a mi disposición, pude dar con una demostración del teorema de Steiner mucho más sencilla que la que él propuso y que las que posteriormente se han propuesto y que yo conozco.*"

Y continúa haciendo una reflexión sobre el uso de los sistemas de cálculo simbólico: "*Este ensayo pone bien de manifiesto el papel importante que un programa como DERIVE puede desempeñar en la exploración experimental, proceso de conjetura y demostración en el quehacer matemático. Muy probablemente la matemática del futuro se apoyará, mucho más fuertemente, en modos de proceder similares con mucha más potencia y eficacia.*"

Resumimos algunas experiencias y comentarios de Miguel para lanzar conjeturas y lograr una demostración sencilla del teorema, reduciéndolo al caso de que el triángulo sea equilátero.

"Con DERIVE en la mano, era tentador pensar en la envolvente de todas las rectas de W-S de un triángulo. Hice algunos experimentos con muy diferentes triángulos, normales unos y menos normales otros, trazando 30 rectas de W-S para cada uno de ellos".

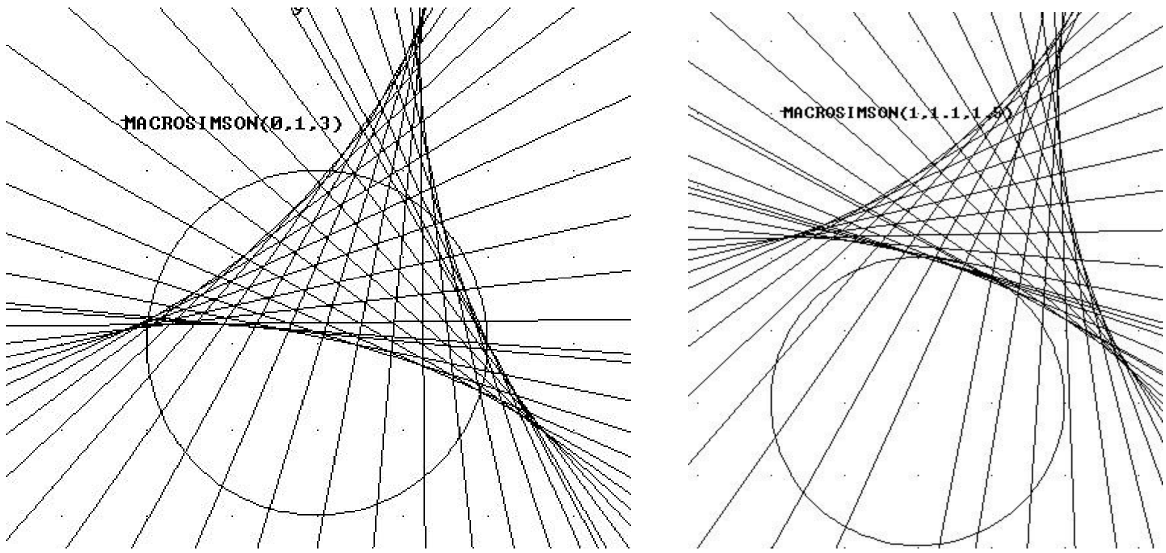


Figura 4

En la figura 4 se puede ver el resultado de dos de estos experimentos, para un triángulo "normal" y para otro un tanto "anormal".

"*Después de hacer unos cuantos de estos experimentos me parecía totalmente obvio que:*

(1) *La forma de la curva envolvente era siempre la misma, independientemente del triángulo. Tal forma se parecía mucho a la de una hipocicloide tricúspide, que me era una curva familiar por diversos motivos.*

(2) *El tamaño de la curva parecía ser siempre el mismo.*

(3) *La posición de la curva y su inclinación dependían del triángulo de una forma un tanto extraña, pero incluso para triángulos muy irregulares nunca se separaba demasiado del círculo circunscrito."*

Gracias a DERIVE, las "conjeturas" hechas por Miguel se pueden demostrar de forma fácil. El camino seguido fue reducir el problema a otro más fácil. Para ello ideó una transformación adecuada, trabajando en primer lugar con triángulos que tenían el mismo círculo circunscrito (ver figura 5).

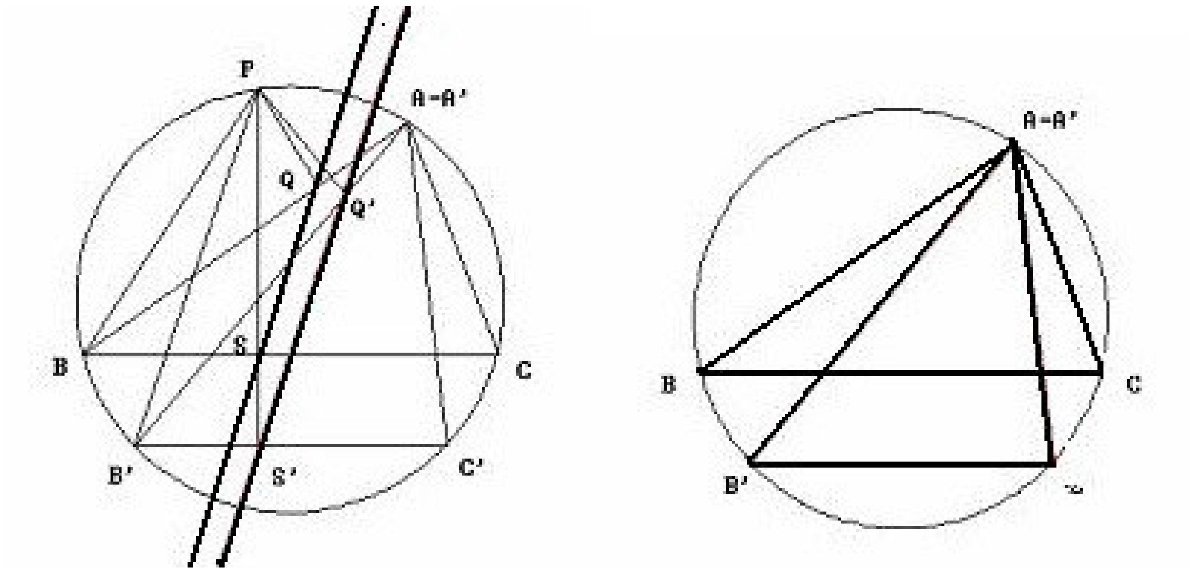


Figura 5

“Hasta que se me ocurrió pensar en una transformación muy sencilla $ABC \to A'B'C'$ *que parecía arrojar una fuerte luz sobre todo el misterio. Se me ocurrió dejar fijo el vértice A=A' y trasladar paralelamente el lado BC a B'C', manteniendo siempre la misma circunferencia circunscrita. ¡Esta transformación resultó ser la clave para entenderlo todo directamente! ¡La recta de W-S de P con respecto a A'B'C' parecía ser paralela a la recta de W-S de P respecto de ABC!*

Y efectivamente es muy fácil demostrar que así es y que la recta de W-S de P respecto de A'B'C' se obtiene trasladando la recta de W-S de P respecto de ABC por la misma traslación paralela que lleva perpendicularmente a BC la recta BC a la recta B'C'.”

Estas relaciones le permitieron a Miguel confirmar la conjetura. La envolvente de las rectas de W-S para A'B'C' se obtiene mediante esta traslación paralela a partir de la envolvente de las rectas de W-S para ABC.

En la figura 6 pueden verse las envolventes correspondientes a dos triángulos del tipo ABC y A'B'C'.”

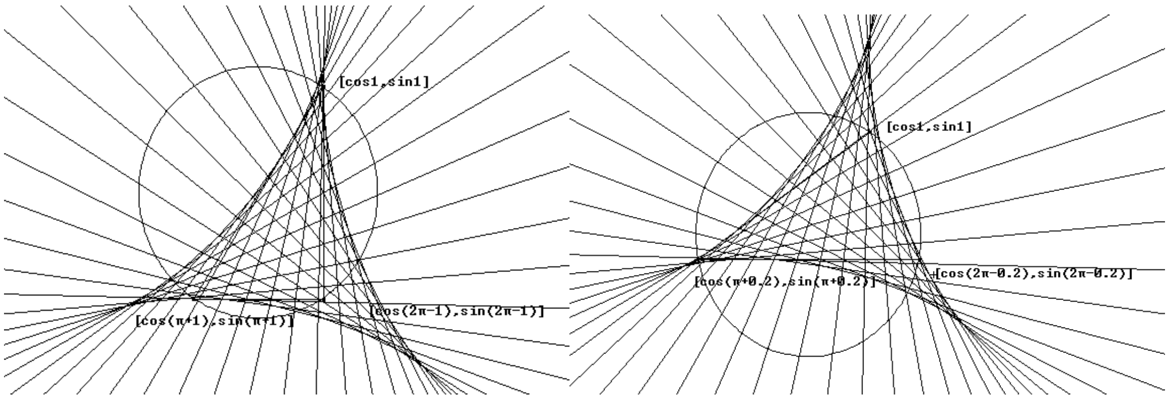


Figura 6

Finalmente Miguel, con una nueva transformación, convierte en equilátero el triángulo A'B'C' (ver figura 7) tal como él mismo explica:

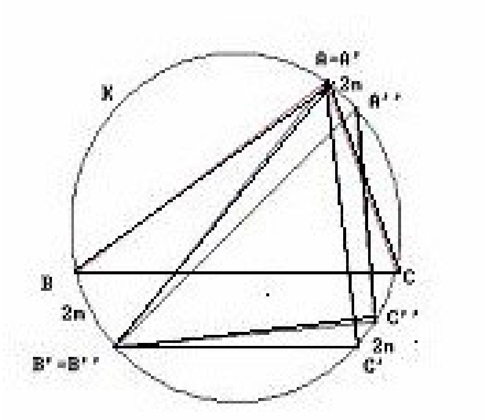


Figura 7

"Ahora dejamos fijo B' y tratamos de calcular m y n en la figura de modo que los ángulos A''=B''=C''=60º (para ello basta tomar m = (180-B-2C)/3, n = (B - C)/3). En ese caso el valor del ángulo que forman B'' C'' y BC es exactamente (C-B)/3… La demostración del hecho de que la deltoide coincide con la hipocicloide tricúspide queda reducida al caso del triángulo equilátero y esto no es una tarea difícil."

Remitimos al lector a la lectura y disfrute de todos y cada uno de los ensayos recogidos en la obra antes mencionada, "La experiencia de descubrir en Geometría" [13], de la que se han extractado los párrafos anteriores.

5. Un ejemplo de experiencia didáctica

Cuando, en una escuela de ingeniería, se introducen las ecuaciones diferenciales, se suele dar el teorema de Picard de existencia y unicidad de solución del problema de Cauchy. En la demostración formal de este teorema se construye una sucesión de funciones convergente a la única solución del problema de valor inicial planteado $y' = f(t, y)$ con $y(t_0) = y_0$. La sucesión de funciones $\{y_n(t)\}_{n\in N}$ viene dada por $y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(x, y_{n-1}(x))dx$.

Con frecuencia, no se hace en clase la demostración de este teorema, ya que requiere conocimientos más profundos que los habitualmente impartidos en un primer curso de Cálculo o de Análisis Matemático en una escuela de ingeniería. La visualización de las gráficas de los primeros términos de esta sucesión es una herramienta útil para ayudar a los estudiantes a entender el sentido de la convergencia funcional y para conjeturar ciertas propiedades de la función solución.

Pero la obtención de cada uno de estos términos implica el cálculo de la integral correspondiente, que puede ser farragoso e incluso imposible. Para esta tarea, los sistemas de cálculo simbólico son una ayuda eficaz ya que permiten, con un programa muy sencillo (que pueden hacer los estudiantes) y en muy poco tiempo, obtener y representar unos cuantos términos de la sucesión, visualizar el método y obtener conclusiones a partir de las gráficas.

Sin embargo es frecuente que para alguna de las integrales sea difícil, o incluso imposible, calcular la primitiva correspondiente, con lo que se para el proceso de obtención de términos de la sucesión.

En el año 1995, los entonces miembros del grupo español de usuarios de DERIVE tuvimos una reunión en Santander y en ella Miguel de Guzmán, que estaba por entonces escribiendo “El rincón de la pizarra” [11], nos dio una interesante charla sobre discretización del cálculo en la que nos propuso la utilización del sistema DERIVE para lo que podemos denominar “Método de Picard discreto” consistente en la obtención de una sucesión de funciones discretas cuyos valores, en una tabla de puntos, se pueden determinar usando un método de integración numérica para aproximar las integrales correspondientes a las iteraciones de Picard. De este modo es posible visualizar una sucesión de funciones tabuladas que aproximan a la solución del problema de Cauchy. Estas ideas las recogió Miguel en la parte final del libro citado.

Los dos primeros autores de este trabajo decidimos poner en marcha esta propuesta con nuestros estudiantes de la E.U. de Informática de la UPM, en una asignatura denominada Métodos de Cálculo Científico, que incluía un tema relativo a ecuaciones diferenciales ordinarias. Decidimos usar el sistema MAPLE, en lugar de DERIVE, porque el lenguaje de programación del primero resulta más natural para nuestros estudiantes, a quienes pedíamos que programaran las iteraciones clásicas de Picard y el método de Picard discreto.

Los siguientes procedimientos MAPLE contienen las instrucciones básicas para llevar a cabo estos métodos:

```
> Picard:=proc(f,t0,y0,n,t1)
  local it, j,YN;
  YN:=y0;
  print(y0);
  for j to n do
    assume(c>t0);
    YN:=simplify(y0+int(f(t,YN),t=t0..c));
    YN:=sort(subs(c=t,YN));
    print(YN);
    it[j]:=YN;
  od;
  plot({y0,seq(it[j],j=1..n)},
t=t0..t1,title=`Iteraciones de Picard`):
 end:

> PicarDis:=proc(f,t0,y0,n,t1,h)
  local P,i,j,k,m,t,tAux,it;
   P:=floor((t1-t0)/h);
   t:=array(1..P+1,1..2);
   tAux:=array(1..P+1,1..2);
   t[1,1]:=t0; t[1,2]:=y0;
   tAux[1,1]:=t0; tAux[1,2]:=y0;
   for k from 2 to P+1 do
      tAux[k,1]:=tAux[k-1,1]+h;
      t[k,1]:=t[k-1,1]+h; tAux[k,2]:=y0;
   od;
   it[0]:=convert(tAux,listlist);
   for j to n do
   for k from 2 to P+1 do
```

```
    t[k,2]:=evalf(y0+h/2*(f(tAux[1,1],tAux[1,2])+
    f(tAux[k,1],tAux[k,2])+
    2*sum(f(tAux[i,1],tAux[i,2]),i=2..k-1)));
  od;
  it[j]:=convert(t,listlist);
  tAux:=t;
  od; print(plot({seq(it[i],i=0..n)},t=t0..t1));
  eval(t);
end:
```

En el primero de ellos, los parámetros de entrada son la función f y los valores iniciales que definen el problema de Cauchy junto con un valor t1 que indica que se quiere ver las gráficas de las iteraciones en el intervalo [t0,t1]. En el cuerpo del procedimiento, simplemente se pide que se calculen las integrales sucesivas y se haga una gráfica con las curvas obtenidas.

En el segundo se trabaja con funciones tabuladas. Además de los parámetros del anterior se incluye uno nuevo, h, que indica la distancia entre las abscisas de la tabla y se usa un método de integración numérica (en este caso el método de los trapecios) para obtener la tabla de valores de una iteración a partir de la tabla correspondiente de la iteración anterior.

Podemos ver algunas ejecuciones. Por ejemplo para obtener las iteraciones de Picard correspondientes al problema de Cauchy $y'=1+y^2, y(0)=0$, hacemos:

```
> f:=(t,y)->1+y^2:
> Picard(f,0,0,4,1):
```

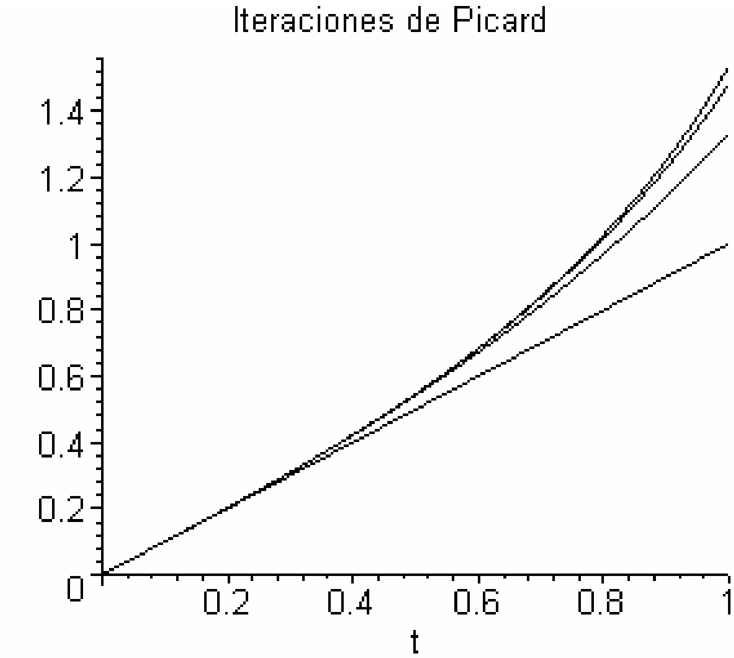
$$0$$

$$t$$

$$\frac{1}{3}t^3+t$$

$$\frac{1}{63}t^7+\frac{2}{15}t^5+\frac{1}{3}t^3+t$$

$$\frac{1}{59535}t^{15}+\frac{4}{12285}t^{13}+\frac{134}{51975}t^{11}+\frac{38}{2835}t^9+\frac{17}{315}t^7+\frac{2}{15}t^5+\frac{1}{3}t^3+t$$



Se ve cómo las sucesivas iteraciones, cada vez más próximas entre sí, permiten intuir la curva solución.

Si intentamos hacer lo mismo para el problema $y' = \dfrac{t}{1+y}, y(0) = 0$, vemos que el procedimiento sólo consigue obtener explícitamente hasta tres iteraciones, porque después no es posible calcular la integral:

```
> f:=(t,y)->t/(1+y):
> Picard(f,0,0,4,1):
```

$$0$$

$$\frac{t^2}{2}$$

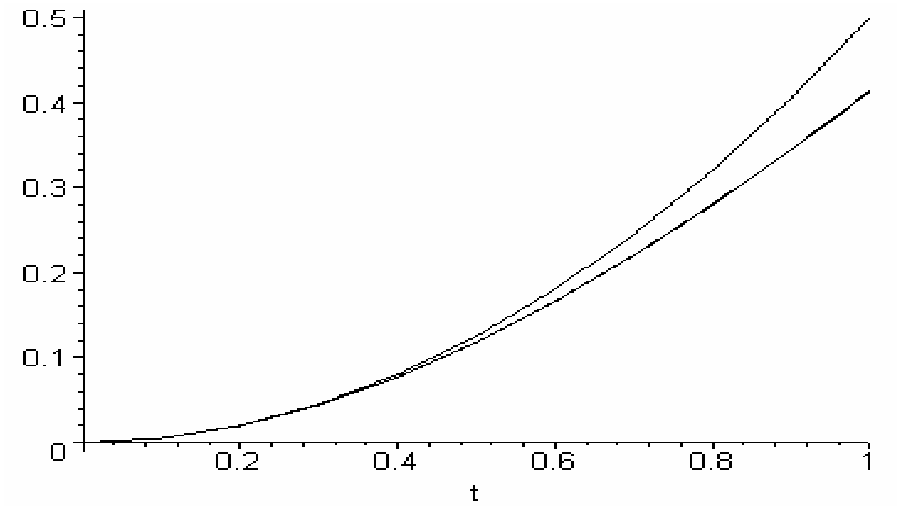
$$\ln(t^2+2) - \ln(2)$$

$$e^{(-1)}\,(-\mathrm{Ei}(1, -\ln(t^2+2) - 1 + \ln(2)) + \mathrm{Ei}(1, -1))$$

$$\int_0^t \frac{t}{-e^{(-1)}\,\mathrm{Ei}(1, -\ln(t^2+2) - 1 + \ln(2)) + 1 + \mathrm{Ei}(1, -1)\, e^{(-1)}}\, dt$$

En este caso podemos realizar las iteraciones usando el método discreto. Por ejemplo, se pueden conseguir 10 iteraciones con la siguiente instrucción:

```
> PicarDis(f,0,0,10,1,0.1);
```



$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0.1 & 0.004975246918 \\ 0.2 & 0.01975675396 \\ 0.3 & 0.04393176926 \\ 0.4 & 0.07687281975 \\ 0.5 & 0.1178102700 \\ 0.6 & 0.1659064770 \\ 0.7 & 0.2203185642 \\ 0.8 & 0.2802436523 \\ 0.9 & 0.3449462901 \\ 1.0 & 0.4137712749 \end{bmatrix}$$

El procedimiento devuelve una gráfica con 10 iteraciones en la que observamos que casi no se pueden distinguir unas de otras (salvo las primeras) debido a la rapidez de convergencia del proceso (el dibujo es prácticamente igual si se piden menos iteraciones). También devuelve una tabla de valores en el intervalo pedido en puntos equiespaciados a la distancia que se le ha especificado en el último parámetro. Se trata de una tabla con valores aproximados de la función solución del problema.

Los procedimientos, por supuesto se pueden completar bastante. En el primero se puede poner una instrucción RETURN para que el programa termine, devolviendo el aviso correspondiente cuando no pueda calcular una de las integrales. En el segundo se puede usar otro método de integración numérica (por ejemplo el método de Simpson compuesto, que da mejores aproximaciones).

Pero lo que queremos resaltar aquí es las posibilidades de visualización, que permiten en condiciones muy generales hacerse una idea de cómo son las iteraciones de Picard y visualizar propiedades de la curva solución.

Llevamos a cabo la experiencia durante varios cursos hasta que la asignatura dejó de impartirse. Podemos comentar algunas conclusiones:

La mayoría de los estudiantes programaban correctamente y sin dificultad la obtención de las iteraciones clásicas de Picard. Les costaba más trabajo programar el método discreto por lo que en una segunda fase decidimos dárselo nosotros programado. No sólo lo usaban para visualizar sino también para experimentar y obtener conclusiones. También lo usaban como método numérico de aproximación a la solución de un problema de Cauchy y, trabajando con ecuaciones diferenciales cuya solución exacta se podía obtener con MAPLE, comparaban los resultados de este método con los de otros métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Un resultado curioso es que, en muchos casos, cada iteración discreta ofrece mejor aproximación a la solución que la correspondiente continua. Hay que tener en cuenta que sólo la primera iteración discreta es una aproximación de la correspondiente continua, ya que a partir de ella se trabaja con su tabla de valores para obtener por el método numérico la iteración siguiente. En definitiva se integra la poligonal correspondiente.

Las posibilidades del ordenador también permitieron incrementar la experimentación en el caso del método de Picard clásico y fruto de la observación de los resultados experimentales fue el descubrimiento de algunas propiedades que vimos que se podían demostrar. Por ejemplo: Si y[k](t) es la k-ésima iteración de Picard, su polinomio de Taylor de orden k en torno a t0 coincide con el correspondiente de la función y(t), la solución del problema de Cauchy.

En cualquier caso, la conclusión más interesante es que ante un problema de Cauchy cuya solución no es fácil de obtener y cuyas iteraciones de Picard tampoco son factibles, el método discreto permite visualizar la curva solución junto con una sucesión de funciones que convergen a ella.

Referencias

[1] M. de Guzmán: *Mirar y ver*. Alhambra, 1976.

[2] M. de Guzmán: *Real Variable Methods in Fourier Analysis*. Math. Studies, 104, North Holland, 1981.

[3] M. de Guzmán, J. Colera, A. Salvador: *Matemáticas. Bachillerato 1*. Anaya, 1987.

[4] M. de Guzmán, J. Colera, A. Salvador: *Matemáticas. Bachillerato 2*. Anaya, 1987.

[5] M. de Guzmán, J. Colera, A. Salvador: *Matemáticas. Bachillerato 3*. Anaya, 1988.

[6] M. de Guzmán, J. Colera: *Matemáticas I. C. O. U. Opciones A y B*. Anaya, 1989.

[7] M. de Guzmán, J, Colera: *Matemáticas II. C. O. U. Opciones C y D*. Anaya, 1989.

[8] M. de Guzmán, B. Rubio: *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático*, vol. 1, 2 y 3. Pirámide, 1993.

[9] M. de Guzmán: *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de procesos matemáticos*. Pirámide, 1993.

[10] M. de Guzmán: *Aventuras matemáticas. Una ventana hacia el caos y otros episodios*. Pirámide, 1995.

[11] M. de Guzmán: *El Rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático. Elementos básicos del Análisi*s. Pirámide, 1996.

[12] M. de Guzmán, J. Colera, I. Gaztelu, J. E. García: *Matemáticas I. ESO*. Anaya, 1996.

[13] M. de Guzmán: *La experiencia de descubrir en Geometría*. Nivola, 2002.

[14] M. de Guzmán: *The role of visualization in the teaching and learning of Mathematical Analysis*. Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the undergraduate level). University of Crete, Greece, 2002.

[15] M. de Guzmán: *Tensegridad. De la escultura a la célula*. Revista de Humanidades Ars Medica, 2002, n. 2, p.166-176.

[16] F. Martín, I. Fuentes (Eds.): *Textos de Miguel de Guzmán*. Rev. SUMA, 2005. Monografía 02.

[17] M. A. Martín, M. Morán, M. Reyes: *Miguel de Guzmán: del análisis armónico a la teoría geométrica de la medida y los fractales*. La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 2004. Número Especial. Suplemento al Vol. 7.3, p. 67-80.

Raíz cuadrada de una matriz

Enrique Rubiales Camino
Catedrático de Bachillerato
Miembro de la Junta Directiva de la Soc. "Puig Adam"
enriquerubiales@telefonica.net

Abstract

This article explains the square root of matriz. First from its definition, then using matrices that may be reduced to the diagonal form. Our tool has been the symbolic calculus program Derive.

Siempre admiré a Miguel. Desde que fuimos compañeros en la Facultad, hace ya unos cuantos años, o en tiempos más cercanos, cuando asistía a sus conferencias, cursos de formación del profesorado, etc. Y pienso ahora, tras su muerte, que posiblemente esa admiración es la que me impidió acercarme más a él y establecer una posible amistad.

Introducción

El motivo que nos ha llevado a escribir este artículo fue que explicando la asignatura de Cálculo Numérico en la Facultad apareció el método de Cholesky, que sirve para factorizar una matriz simétrica y definida positiva y también nos puede llevar a calcular la raíz cuadrada de una matriz, y esto nos hizo recordar que hace ya unos cuantos años tanto en la asignatura de Geometría 2º, nos explicaron el tema de los factores invariantes y divisores elementales, para a continuación hablarnos de la raíz cuadrada de una matriz (que, dicho sea de paso, no se entendió muy bien), como en la de Análisis 2º (ecuaciones diferenciales), lo hicieron para explicar la reducción a forma diagonal de matrices y para ello nos explicaron el tema de los valores y vectores propios, y en el caso de que no pudiese ser escrita en forma diagonal explicar la Forma Canónica de Jordan.

Podría existir también otro motivo para escribir este artículo, y es el que surgió ante la lectura del siguiente párrafo, que no recordamos en que libro lo leímos, y que dice lo siguiente: *Las matrices son a la Matemática superior como los números son a la Matemática elemental.* Como veremos más adelante, esto sirvió para calcular la raíz cuadrada de una matriz mediante la definición, y que se hace basándose en la que se define entre números.

Por tanto, si pretendemos estudiar el tema de la raíz cuadrada de una matriz, podríamos hacerlo de una forma general, pero este no es el propósito de este artículo, por lo que nos limitamos a enunciar un teorema, para saber que toda matriz se puede reducir a forma triangular, y dicho teorema afirma lo siguiente:

Teorema de Schur: *Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces existe una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = T$, donde T es una matriz triangular superior con los valores propios de A en la diagonal.*

Entonces ya sabemos que toda matriz se podría reducir a forma triangular, pero al ser demasiado general, el siguiente paso sería reducirla a la forma de Jordan, pero su estudio lo vamos a posponer a un futuro artículo. Por tanto nos vamos a conformar con reducir la matriz a la forma diagonal y para ello no vamos a escribir nada en este artículo sobre en que consiste la factorización de Cholesky, pues eso se saldría del tema de este artículo, y si que nos vamos a centrar en el tema de la raíz cuadrada, que surgió al tratar de resolver el ejercicio nº 41 de la página 141 que está en el libro [4], y cuyo enunciado es el siguiente:

Una matriz que es simétrica y definida positiva (SDP) tiene una raíz cuadrada que es SDP. De este modo, $X^2 = A$. Encontrar X, si $A = \begin{pmatrix} 13 & 10 \\ 10 & 17 \end{pmatrix}$.

Al querer utilizar la definición de la raíz cuadrada de una matriz con este ejercicio, y quererlo resolver sin ayuda de los nuevos métodos de cálculo , tenemos serias dificultades para hacerlo, pero ocurre igual si pretendemos resolverlo mediante el proceso de diagonalización de una matriz. Entonces lo que hemos hecho para que esos cálculos no requieran esos métodos es preparar las matrices de orden 2 y orden 3 para que sean más fáciles de hacer.

Por tanto el ejercicio del que hemos hablado anteriormente, y otros ejemplos que se van a poner, se resolverán mediante los medios que tenemos ahora a nuestro alcance, que son los programas de cálculo simbólico Derive, Maple, Matemática, etc.

1 Definición de raíz cuadrada de una matriz.

Siendo A y B *matrices cuadradas del mismo orden, decimos que* B *es la raíz cuadrada de* A*, y escribimos* $B=\sqrt{A}$, si $B^2 = A$.

Tomamos la siguiente matriz de orden 2: $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Calculamos su raíz cuadrada teniendo en cuenta la definición que hemos dado más arriba. Por tanto:

$$B=\sqrt{A}=\sqrt{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x^2+yz & xy+yu\\ zx+uz & zy+u^2\end{pmatrix}.$$

El sistema que queda es el siguiente:

$$\begin{cases}x^2+yz=1\\ (x+u)y=1\\ (x+u)z=0\\ yz+u^2=1\end{cases}$$

Como $x+u$ no puede ser cero, resulta $z=0,$ y por tanto,

$$x^2=1,\ u^2=1;\ x=\pm 1,\ u=\pm 1.$$

Por otro lado, tenemos:

$$x^2-u^2=0,\ (x+u)(x-u)=0,\ \text{y como}\ x+u\neq 0,\ \text{es}\ x-u=0,$$

y de aquí que tenemos:

$$x=u,\ \text{e}\ y=\frac{1}{2}.$$

De donde $\sqrt{A} = \pm\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Es decir una matriz tiene dos raíces cuadradas, como los números, una positiva, en este caso es $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y otra negativa, como es $\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Lo que nos hace pensar que las matrices se portan como los números. Pero veremos más adelante que eso no es verdad.

Tomemos la matriz de orden 3, siguiente: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vamos a obtener la raíz cuadrada de dicha matriz mediante la definición. Por tanto:

$$B = \sqrt{A} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \text{ y como } B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & p & q \end{pmatrix}, \text{ resulta:}$$

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & p & q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & p & q \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2 + yt + zw & xy + yu + zp & xz + yv + zq \\ tx + ut + vw & ty + u^2 + vp & tz + uv + vq \\ wx + pt + qw & wy + pu + qp & wz + pv + q^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo que resulta el siguiente sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas, que vamos a resolver con ayuda del programa de cálculo simbólico Derive.

$$\begin{cases} x^2 + yt + zw = 1 \\ xy + yu + zp = 1 \\ xz + yv + zq = 1 \\ tx + ut + vw = 0 \\ ty + u^2 + vp = 1 \\ tz + uv + vq = 1 \\ wx + pt + qw = 0 \\ wy + pu + qp = 0 \\ wz + pv + q^2 = 1 \end{cases}$$

En Derive tendríamos las siguientes órdenes:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\ \mathrm{B} := \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \\ w & p & q \end{pmatrix}.\ B^2 = A.$$

$$\begin{pmatrix} x^2 + ty + wz = 1 & xy + uy + pz = 1 & xz + vy + qz = 1 \\ tx + tu + vw = 0 & ty + pv + u^2 = 1 & tz + qv + uv = 1 \\ wx + pt + qw = 0 & wy + pq + pu = 0 & wz + pv + q^2 = 1 \end{pmatrix}$$

$SOLVE([x^2 + yt + zw = 1, xy + yu + zp = 1, xz + yv + zq = 1,$
$tx + ut + vw = 0, ty + u^2 + vp = 1, tz + uv + vq = 1,$
$wx + pt + qw = 0, wy + pu + qp = 0, wz + pv + q^2 = 1], [x, y, z, p, q, t, u, v, w])$

$[x = 1 \wedge y = \dfrac{1}{2} \wedge z = \dfrac{3}{8} \wedge p = 0 \wedge q = 1 \wedge t = 0 \wedge u = 1 \wedge v = \dfrac{1}{2} \wedge w = 0,$
$x = -1 \wedge y = -\dfrac{1}{2} \wedge z = -\dfrac{3}{8} \wedge p = 0 \wedge q = -1 \wedge t = 0 \wedge u = -1 \wedge v = -\dfrac{1}{2} \wedge w = 0]$

2 Raíz cuadrada de matrices especiales (nula y unidad). Paralelismo con la raíz cuadrada de un número.

Si nosotros buscamos $\sqrt{0}$, ya sabemos que es igual a 0. Pero nuestra sorpresa es muy grande si tratamos de hallar la raíz cuadrada de la matriz nula de orden 2.

Calculemos $\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ mediante la definición que hemos dado de la raíz cuadrada de una matriz.

Si $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, resulta $B^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + tz & zy + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

De donde tenemos el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, siguiente:

$$\begin{cases} x^2 + yz = 0 \\ (x+t)y = 0 \\ (x+t)z = 0 \\ zy + t^2 = 0 \end{cases}$$

Como $x + t = 0$, $y \neq 0$ y $z = 0$, tenemos que $B = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Luego la matriz nula tiene infinitas matrices raíces cuadradas, incluyendo por supuesto a la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pero también tenemos $x + t = 0$, $y = 0$ y $z \neq 0$, por lo que tenemos infinitas matrices de la forma: $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}$. Luego ya hay una diferencia bastante notable con respecto a los números.

Algo parecido ocurriría con la matriz nula de orden 3, ya que tendríamos las siguientes matrices raíces cuadradas:

$$\begin{pmatrix} 0 & y & z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & y & z \\ y & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ z & t & 0 \end{pmatrix}.$$

Si buscamos ahora $\pm\sqrt{1}$, ya sabemos que es igual a ± 1. Pero volvemos a tener sorpresas si tratamos de hallar la raíz cuadrada de la matriz unidad de orden 2.

Calculemos $\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$. Para ello lo hacemos igual que con la matriz nula, por lo que tenemos:

Si $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, resulta $B^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & xy + yt \\ xz + tz & zy + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

De donde tenemos el sistema de 4 ecuaciones con 4 incógnitas, siguiente:

$$\begin{cases} x^2 + yz = 1 \\ (x+t)y = 0 \\ (x+t)z = 0 \\ zy + t^2 = 1 \end{cases}$$

Si $y = 0$ y $z = 0$, resulta $x = \pm 1$ y $t = \pm 1$, por lo que tenemos las cuatro raíces cuadradas siguientes:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Y como

$$x + t = 0,\ t = -x,\ yz + x^2 = 1,\ yz = 1 - x^2, y = \pm\sqrt{1 - x^2} \text{ y } z = \pm\sqrt{1 - x^2}.$$

tenemos las raíces cuadradas siguientes:

$$B_1 = \begin{pmatrix} x & \sqrt{1-x^2} \\ \sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix} \text{ y } B_2 = \begin{pmatrix} x & -\sqrt{1-x^2} \\ -\sqrt{1-x^2} & -x \end{pmatrix}, \text{con } |x| < 1.$$

Es decir obtenemos infinitas matrices raíces cuadradas. Luego volvemos a obtener una diferencia bastante notable con respecto a los números.

Veamos otra matriz de orden 2, en la que aparecen cuatro raíces cuadradas.

La matriz diagonal $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Vamos a encontrar su raíz cuadrada utilizando la definición. Por tanto, buscamos una matriz $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$, tal que $B^2 = A$.

Entonces:

$$B \cdot B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{x}^2 + yz & xy + yt \\ xz + tz & zy + t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Así tenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2 + yz = 1 \\ (x+t)y = 0 \\ (x+t)z = 0 \\ zy + t^2 = -1 \end{cases} \quad x^2 - t^2 = 2, \text{ como } x + t \neq 0, \text{ entonces } y = 0 \text{ y } z = 0 \text{ .Luego:}$$

$x^2 = 1,\ x = \pm 1$ y $\mathrm{t}^2 = -1,\ \mathrm{t} = \pm i.$ Y las cuatro raíces son:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

3 Ejemplos con matrices de orden 2 y 3

Los ejemplos que hemos visto anteriormente ha sido mediante la definición de la raíz cuadrada de una matriz, pero ahora lo vamos hacer utilizando los valores y vectores propios, de modo que el cálculo de la raíz, si la matriz se puede poner en forma diagonal, consiste simplemente en encontrar la matriz de paso multiplicarla por la matriz raíz cuadrada de la matriz diagonal y por la inversa de la matriz de paso. ¿Qué ocurre si la matriz no se puede poner en forma diagonal?. En este caso su estudio se deja para otro artículo posterior.

Vamos a verlo con el siguiente ejemplo. Sea $A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$. Calculemos la ecuación característica. $|A-\lambda I|=0,$ es decir

$$\left|\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=0,\ \begin{vmatrix}2-\lambda & 2\\ 1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^2-5\lambda+4=0.$$

Por tanto las raíces de la ecuación característica son: $\lambda_1=4$ y $\lambda_2=1$. Por tanto, la matriz diagonal es $D=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Y la raíz cuadrada de esa matriz diagonal es

$$\sqrt{D}=\sqrt{\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Vamos a calcular para esos valores propios los vectores propios correspondientes. Para $\lambda_1=4,$ el vector propio es: $p_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. Para $\lambda_2=1,$ el vector propio correspondiente es: $p_2=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$. Luego la matriz de paso es: $P=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Y su matriz inversa es: $P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Para los valores $\sqrt{\lambda_1}=\sqrt{4}=2$ y $\sqrt{\lambda_2}=\sqrt{1}=1$, $D_1=\sqrt{D}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. La matriz raíz cuadrada es:

$$B_1=\sqrt{A}=P\sqrt{D}P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 5\end{pmatrix}.$$

Y hay otras tres raíces cuadradas para la matriz A, que se obtienen cambiando signos en la diagonal de D_1, y que son:

$$B_2=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B_3=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\text{ y } B_4=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-4 & -2\\ -1 & -5\end{pmatrix}.$$

Hagámoslo con una matriz de orden 3. Sea la siguiente matriz: $A=\begin{pmatrix}2&2&2\\1&3&2\\1&-1&9\end{pmatrix}$.

Ahora calculemos la ecuación característica:

$$|A-\lambda I|=0,\ \begin{vmatrix}2-\lambda&2&2\\1&3-\lambda&2\\1&-1&9-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^3-14\lambda^2+49\lambda-36=0.$$

Los valores propios son: $\lambda_1=1,\ \lambda_2=4$ y $\lambda_3=9.$ Por tanto la matriz diagonal es:

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&0&9\end{pmatrix}.$$

Luego a esta matriz diagonal le corresponden 8 matrices raíces cuadradas. Como lo que queremos hallar son las raíces de la matriz A, lo que tenemos que hacer ahora es hallar los vectores propios que nos permitirán calcular la matriz de paso y su inversa. Para el valor propio $\lambda_1=1,$ el vector propio es: $p_1=\begin{pmatrix}6\\-2\\-1\end{pmatrix}$. Para el valor propio $\lambda_2=4,$ el vector propio es: $p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$. Para el valor propio $\lambda_3=9,$ el vector propio es: $p_3=\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix}$. Luego $P=\begin{pmatrix}6&1&2\\-2&1&2\\-1&0&5\end{pmatrix}$. Y su inversa es:

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{40} & -\frac{1}{40} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Por tanto la matriz raíz cuadrada correspondiente a la matriz diagonal

$$D_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \text{ es: } P\cdot D_1\cdot P^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{13}{10} & \frac{7}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{17}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 3 \end{pmatrix}.$$

Y hay otras siete que se obtienen cambiando signos en la diagonal de D_1.

4 ¿Qué matrices se pueden parecer a los números positivos para obtener una sola raíz?. Estudio de las matrices simétricas y definidas positivas.

Recordemos la definición de matriz definida positiva. Una matriz A es definida positiva si $x'Ax>0$ para todo vector x no nulo. Recordemos también algunos criterios que son condiciones necesarias y suficientes para una matriz simétrica real sea definida positiva.

- Todos los valores propios de A son positivos.
- Todas las submatrices A_k tienen determinantes positivos.

Entonces si tomamos la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, veamos que es definida positiva mediante la definición. Por tanto:

$$Sea\ x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},\ x'Ax=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\-1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}2x_1-x_2 & -x_1+2x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2x_1^2-x_2x_1-x_1x_2+2x_2^2=$$
$$=x_1^2+(x_1^2-2x_1x_2+x_2^2)+x_2^2=x_1^2+(x_1-x_2)^2+x_2^2>0,\ \forall x.$$

Y en este caso aunque no ha sido muy difícil el ver que es definida positiva por la definición es mucho mejor aplicar uno de los criterios vistos anteriormente.

Ahora volvamos al ejercicio que enunciamos anteriormente, para resolverlo con el programa Derive. Utilicemos en primer lugar la definición.

$$A:=\begin{pmatrix}13 & 10\\10 & 17\end{pmatrix},\ B:=\begin{pmatrix}x & y\\y & z\end{pmatrix}, B\cdot B,\ \begin{pmatrix}x^2+y^2 & xy+yz\\xy+yz & y^2+z^2\end{pmatrix}$$
$$SOLVE([x^2+y^2=13,\ xy+yz=10,\ y^2+z^2=17],\ [x, y, z])$$
$$[x=\frac{\sqrt{2}}{2}\wedge y=\frac{5\sqrt{2}}{2}\wedge z=\frac{3\sqrt{2}}{2}, x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\wedge y=-\frac{5\sqrt{2}}{2}\wedge z=-\frac{3\sqrt{2}}{2},$$
$$x=\frac{12\sqrt{13}}{13}\wedge y=\frac{5\sqrt{13}}{13}\wedge z=\frac{14\sqrt{13}}{13}, x=-\frac{12\sqrt{13}}{13}\wedge y=-\frac{5\sqrt{13}}{13}\wedge z=-\frac{14\sqrt{13}}{13}]$$

Y como es SDP, la raíz cuadrada es:

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\cdot\sqrt{13} & 5\cdot\sqrt{13}\\5\cdot\sqrt{13} & 14\cdot\sqrt{13}\end{pmatrix}$$

Ahora utilicemos el llevar la matriz a la forma diagonal, y para ello volvemos a utilizar el programa de cálculo simbólico Derive. Por tanto:

$$SOLVE(DET(A-\lambda\cdot IDENTITY\_MATRIX(2)))$$

$$\lambda=15-2\cdot\sqrt{26}\vee\lambda=2\cdot\sqrt{26}+15$$

$$P:=\begin{pmatrix}5 & -5\\ 1+\sqrt{26} & -1+\sqrt{26}\end{pmatrix},\ P^{-1},\ \begin{pmatrix}\frac{1}{10}-\frac{\sqrt{26}}{260} & \frac{\sqrt{26}}{52}\\ -\frac{\sqrt{26}}{260}-\frac{1}{10} & \frac{\sqrt{26}}{52}\end{pmatrix}$$

$$\sqrt{D}:=\begin{pmatrix}\sqrt{13}+\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{13}-\sqrt{2}\end{pmatrix},\ P\cdot\sqrt{D}\cdot P^{-1},\ \frac{1}{13}\begin{pmatrix}12\cdot\sqrt{13} & 5\cdot\sqrt{13}\\ 5\cdot\sqrt{13} & 14\cdot\sqrt{13}\end{pmatrix}$$

Y esta es la solución, como era de esperar, pues los dos valores propios son positivos.

Veamos ahora como se nos complican los cálculos si pasamos a una matriz simétrica y definida positiva de orden 3. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$. Veamos que dicha matriz es definida positiva, pues el que es simétrica se ve fácilmente. Si lo hacemos con la definición, tenemos:

$$\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=2x_1^2-x_1x_2-x_1x_2+2x_2^2-$$

$$-x_2x_3-x_2x_3+2x_3^2=x_1^2+x_2^2+x_3^2+(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2>0.$$

Luego la matriz A es definida positiva, y aunque este no sea el mejor método, vamos a verlo por los otros métodos, que podrán servirnos para más adelante.

Por el criterio 1), tenemos:

$$A_1=2>0.\ A_2=\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=3>0.\ A_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{vmatrix}=4>0.$$

Por el criterio 2), tenemos: Calculemos los valores propios de A. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \ (2-\lambda)^3 - 2(2-\lambda) = 0,$$

$$\lambda_1 = 2 > 0, \ \lambda_2 = 2+\sqrt{2} > 0, \ \lambda_3 = 2-\sqrt{2} > 0.$$

Y como los tres valores propios son mayores que cero, la matriz es definida positiva. Ahora ya podemos calcular la raíz cuadrada de la matriz A mediante la definición. Para ello vamos a utilizar el programa Derive. Por tanto:

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} x & y & z \\ y & u & v \\ z & v & w \end{pmatrix}, \ B^2 = A.$$

$$\begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 = 2 & xy+uy+vz = -1 & xz+vy+wz = 0 \\ xy+uy+vz = -1 & y^2+u^2+v^2 = 2 & yz+uv+vw = -1 \\ xz+vy+wz = 0 & yz+uv+vw = -1 & z^2+v^2+w^2 = 2 \end{pmatrix}$$

$$SOLVE([x^2+y^2+z^2 = 2, \ xy+uy+vz = -1, \ xz+vy+wz = 0,$$
$$y^2+u^2+v^2 = 2, \ yz+uv+vw = -1, \ z^2+v^2+w^2 = 2], \ [x,y,z,u,v,w])$$

La solución es:

$$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}} & \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}} & \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}+1} & -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}} \\ \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}} & \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{8}+\frac{1}{4}}+\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

Ahora lo haremos llevando la matriz anterior a la forma diagonal, y como ya tenemos los valores propios, pues escribiremos lo primero la matriz diagonal, y a continuación su raíz cuadrada, que utilizando Derive son:

$$D := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ y } \sqrt{\mathrm{D}} := \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2+\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2-\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ahora calcularemos los vectores propios en su forma ortogonal, y para ello necesitamos en Derive abrir el archivo VECTOR.MTH, pues necesitamos la orden EXACT_EIGENVECTOR(A,alfa):

$$EXACT\_EIGENVECTOR(A,2)$$

$$p_1 := [@1 \quad 0 \quad -@1], \text{ poniendo } @1 := \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ tenemos } \frac{1}{2}\left[\sqrt{2} \quad 0 \quad -\sqrt{2}\right]$$

$$EXACT\_EIGENVECTOR(A,2+\sqrt{2})$$

$$p_2 := \left[@2 \quad -\sqrt{2}@2 \quad @2\right], \text{ poniendo } @2 := \frac{1}{2}, \text{ tenemos } \frac{1}{2}\left[1 \quad -\sqrt{2} \quad 1\right]$$

$$EXACT\_EIGENVECTOR(A,2-\sqrt{2})$$

$$p_3 := \left[@3 \quad \sqrt{2}@3 \quad @3\right], \text{ poniendo } @3 := \frac{1}{2}, \text{ tenemos } \frac{1}{2}\left[1 \quad \sqrt{2} \quad 1\right]$$

Y ahora para hallar la matriz de paso, ponemos:

$$P := [p1 \quad p2 \quad p3]', \; P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; P' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Si hacemos

$$B := P \cdot \sqrt{D} \cdot P'.$$

resulta

$$B=\begin{pmatrix} \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}} & -\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}} & \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{8}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \\ -\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}} & \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1} & -\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}} \\ \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{8}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}} & -\sqrt{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{4}} & \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{8}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}} \end{pmatrix}$$

como era de esperar.

Bibliografía

[1] Bellman, R. (1965). *Introducción al Análisis Matricial*. Barcelona: Reverté.

[2] Burden, R. y Faires, J. D. (2004). *Métodos Numéricos*. Madrid: Thomson.

[3] Gantmacher, F. R. (1966). *Théorie des matrices* (Tome I). Paris. Dunod.

[4] Kincaid, D. y Cheney, W. (1994). *Análisis numérico*. Wilmington: Addison-Wesley Iberoamericana.

[5] Peña, D. (2002). *Análisis de datos multivariantes*. Madrid: McGraw- Hill.

[6] Pham, D. (1962). *Techniques du calcul matriciel*. Paris: Dunod.

El Proyecto Descartes: Matemáticas interactivas en Internet

Ángela Núñez Castaín

Profesora de Matemáticas del IES Alberto Pico de Santander
Profesora Asociada del Depto. de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria
anunezca@platea.pntic.mec.es
http://descartes.cnice.mecd.es
http://platea.pntic.mec.es/~anunezca/home.htm

Abstract

Descartes Project has been promoted and founded by The National Centre for the Education, Information and Communication (CNICE) in The Ministery of Education in Spain. Its main aim is the innovation in a collaborationist environment in the Mathematics area for the level of Compulsory Secondary Education (ESO) and Post-Secondary Education (Bachillerato). An aim able to use the TIC and the Internet advantges in order to provide both teachers and students with a new way to focus the learning of Mathematics as well as to promote new and more active and crative new working methodologies in the classroom which allow the possibility of participating, motivating and personalizing, so as to improve the learning and teaching procedures.

El Proyecto Descartes ha sido promovido y financiado por el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa (CNICE) del Ministerio de Educación y Ciencia de España. Tiene como principal finalidad la innovación en un entorno de colaboración en el área de Matemáticas, para la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, que utilice las ventajas del ordenador y de Internet para ofrecer a los profesores y a los alumnos una nueva forma de enfocar el aprendizaje de las Matemáticas, que promueva nuevas metodologías de trabajo en el aula, más activas, creativas, participativas, motivadoras y personalizadas, para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Este artículo es un pequeño homenaje a Miguel de Guzmán, quien dedicó su vida por completo a las Matemáticas y su Enseñanza. Entre los múltiples trabajos que llevaba a cabo en sus últimos años, dedicó especial atención a que el uso de las Nuevas Tecnologías influyera cada vez más y de forma eficaz en la Educación Matemática. Era un hombre de su tiempo y lo demostró sobradamente. Su obra y su forma de hacer permanecerán para siempre. Gracias Miguel por todo lo que nos has dejado.

1 Necesidad de los medios informáticos para mejorar la enseñanza de las Matemáticas

Cuántas veces, a lo largo de nuestra vida profesional como profesores de Matemáticas, nos habremos preguntado por qué esta Ciencia resulta tan difícil e inaccesible para la mayoría. Por qué parece ser que es el motivo del fracaso escolar de muchos estudiantes adolescentes. Y por qué muchos de esos adolescentes cuando pasan a ser adultos tienen un mal recuerdo de cuando la estudiaron y otros no se avergüenzan de confesar su absoluto analfabetismo matemático.

Cuántas veces hemos intentado hacer nuestras clases de tal manera que sean atractivas e inteligibles para nuestros alumnos. Y lo hemos hecho probando distintos métodos, usando distintas herramientas de ayuda, procurando que su carácter abstracto se vuelva más concreto y manipulable.

Hemos leído libros y revistas de educación matemática, hemos asistido a cursos, conferencias y congresos buscando una respuesta a nuestra preocupación.

Por eso cuando nos hemos encontrado con los medios informáticos y los programas matemáticos que hacen verdaderas maravillas hemos visto una forma de dar respuesta a nuestras inquietudes.

En estos últimos años ha habido un verdadero avance en el desarrollo de software matemático y la entrada de la red Internet en la sociedad ha revolucionado el mundo de las comunicaciones.

Esta frase la hemos oído con bastante frecuencia últimamente. De hecho las instituciones y la administración parece que ya son sensibles a este cambio y van poco a poco proporcionando cada vez más medios para que los centros educativos estén al día en sus instalaciones informáticas y redes de comunicación.

2 Clasificación del software matemático según su utilidad

Creo que estos medios tecnológicos, relacionados con las Matemáticas, que han surgido se pueden clasificar en dos categorías según su utilidad:

1. Los que ayudan a calcular, resolver, representar, etc. o sea los que ayudan a que la resolución de problemas matemáticos sea más eficaz y menos tediosa que lo era en épocas anteriores. Podemos llamarlos *herramientas de apoyo al matemático*.
2. Los que ayudan a entender mejor los conceptos matemáticos, o sea los que están diseñados con fines educativos. Los llamaría *herramientas de apoyo al educador matemático.* Aunque dentro de estos distinguiría los que pretenden apoyar la labor del profesor en el aula, y los que van dirigidos a la enseñanza a distancia y no contemplan la presencia del profesor.

Ambos tipos de herramientas están revolucionando, no sólo el mundo de los matemáticos, sino también el de la educación matemática.

3 El Proyecto Descartes

Dentro de las herramientas del segundo tipo, o sea de las de apoyo al educador matemático se encuentra la herramienta que hemos denominado Descartes, en honor al famoso filósofo y matemático francés del siglo XVII.

Descartes, el matemático, fue precursor en relacionar dos tipos distintos de representación, la algebraica y la gráfica. Pues bien nuestra herramienta también permite relacionar perfectamente estos dos tipos de representación. Y precisamente los investigadores en educación matemática consideran que el establecer relaciones entre distintos tipos de representación de un mismo concepto, produce un aprendizaje significativo.

La herramienta Descartes es un applet de Java que permite incorporar ventanas interactivas en páginas web.

El Proyecto Descartes ha sido promovido y financiado por el Centro Nacional de Información y Comunicación Educativa del Ministerio de Educación y Ciencia de España. Tiene como principal finalidad la innovación en un entorno de colaboración en el área de Matemáticas, para la Enseñanza Secundaria Obligatoria y el Bachillerato, que utilice las ventajas del ordenador y de Internet para ofrecer a los profesores y a los alumnos una nueva forma de enfocar el aprendizaje de las Matemáticas, que promueva nuevas metodologías de trabajo en el aula, más activas, creativas, participativas, motivadoras y personalizadas, para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

El grupo de trabajo lo formamos en la actualidad quince profesores de distintas Comunidades Autónomas, pero que va creciendo con el tiempo, pues cualquier profesor que se preste a elaborar materiales puede incorporarse al grupo. Su coordinador es Juan Madrigal Muga, profesor del IES Atenea de Alcalá de Henares, que es el autor del *Abstract* de este artículo, el cuál figura en la presentación del proyecto en la web Descartes.

Se han realizado, y en este momento se están también realizando, numerosos cursos de formación a distancia para que los profesores puedan conocer la herramienta y adaptarla a sus necesidades.

Porque otra de las características más importante que tiene Descartes es que es configurable. Cada profesor, sin necesidad de conocer el lenguaje Java, puede elaborar sus propias escenas o bien adaptar las ya existentes a su gusto o necesidades.

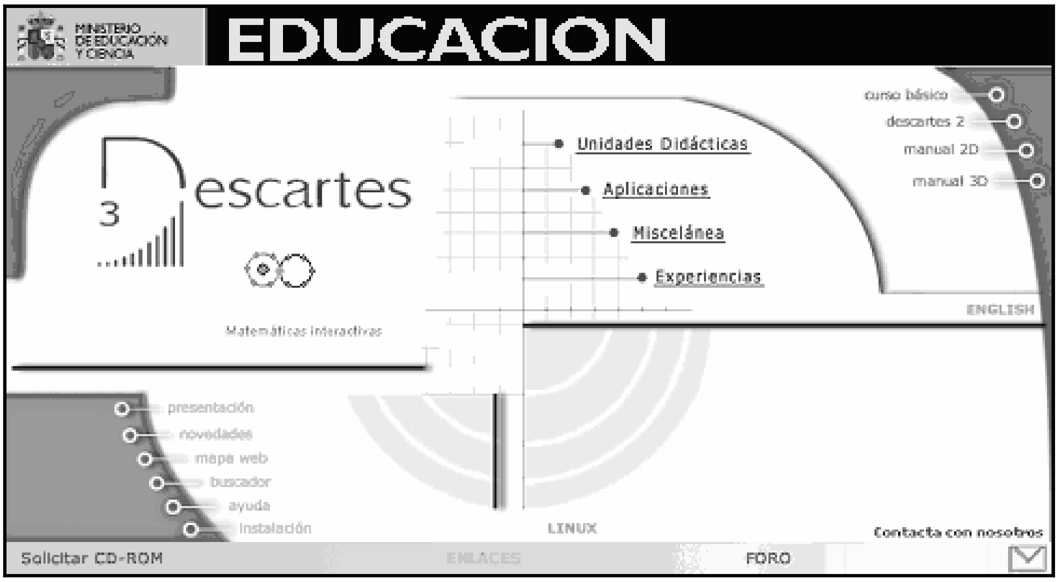


Figura 1

En nuestra web (Figura 1) se puede encontrar más de cien Unidades Didácticas elaboradas por el grupo desarrollador y otras tantas Aplicaciones elaboradas por los profesores que han seguido los cursos de formación, así como un foro público en el que cualquiera puede participar dando su opinión o planteando sugerencias, dudas o problemas.

También se puede acceder o descargar en el propio ordenador, no sólo todos esos materiales, sino también cursos de autoformación.

4 Las escenas

Los applets creados con la herramienta Descartes, a los que llamamos escenas, son muchos y muy variados. Desde la primera versión, pasando por la versión 2, que está vigente y la 3 que permite el uso de imágenes en tres dimensiones, la evolución ha sido constante, mejorándose las prestaciones y la calidad de las escenas.

Intentar plasmar en papel ventanas interactivas es casi imposible, pero al menos puede dar una idea de qué se puede ver a través de las escenas de Descartes. Son escenas que ayudan a entender conceptos que no son fáciles con los medios habituales

Veamos algunos ejemplos.

4.1 Escena nueva

En la Figura 2 podemos ver el aspecto que tiene una escena nueva en la que queremos diseñar un applet Descartes. Aunque a veces se elaboran escenas a partir de otras haciendo los cambios oportunos.

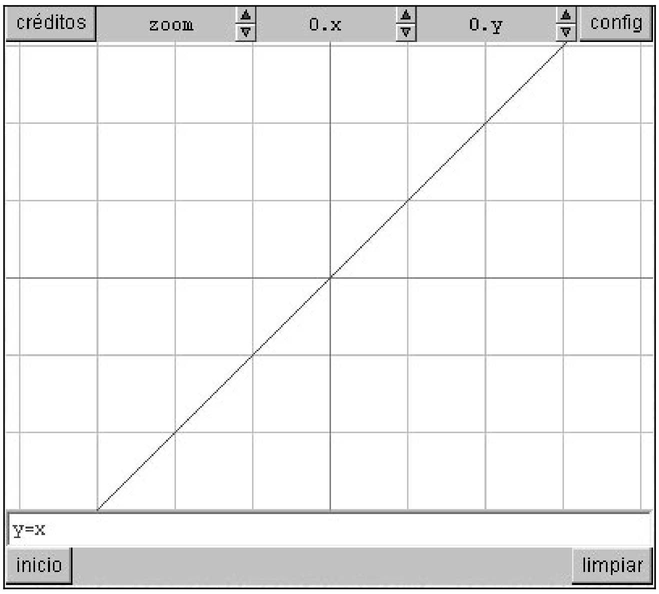


Figura 2

4.2 Fracciones equivalentes

En la Figura 3 podemos ver, en la parte izquierda, el estado inicial de la escena, donde el alumno tiene la posibilidad de elegir numerador y denominador de dos fracciones. En la parte derecha se puede apreciar el caso de las fracciones 3/2 y 9/6. Es una método sencillo para entender el significado de fracciones equivalentes de una forma interactiva.. La visualización de las zonas sombreadas que representan cada fracción es inmediata, pudiendo hacerse comparaciones de fracciones en muy poco tiempo y de forma muy intuitiva.

En la escena también aparecen las expresiones decimales y en porcentajes de las fracciones.

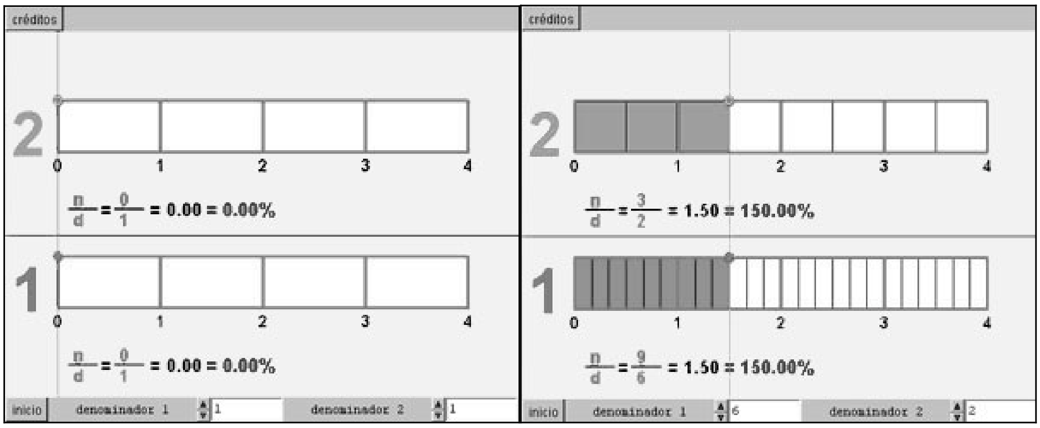


Figura 3

4.3 Rectas

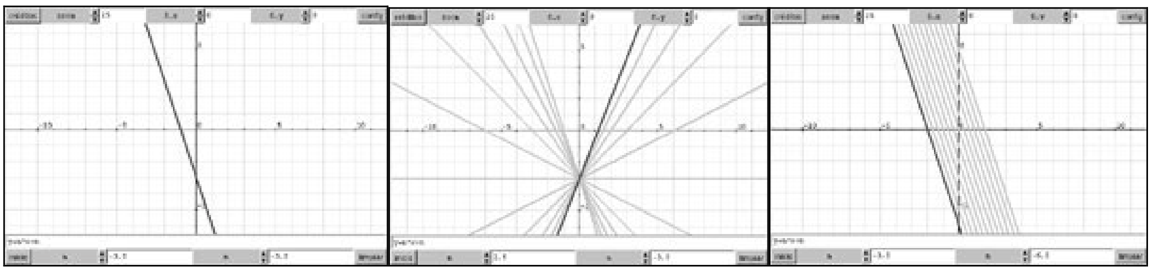


Figura 4

En la Figura 4, donde se muestran tres facetas de una misma escena, se puede apreciar que en principio se presenta la gráfica de una recta, pero el usuario puede cambiar la pendiente o la ordenada en el origen, dejando un rastro las rectas anteriores. Esto permite visualizar con gran claridad los cambios en la gráfica al cambiar dichos parámetros.

4.4 Evaluación de rectas y parábolas

Se trata de un test (Figura 5) donde van apareciendo de forma aleatoria una gráfica y una fórmula de rectas y parábolas,. El alumno debe asociar correctamente cada gráfica con su fórmula. La escena responde de la bondad de la elección de una forma inmediata, llevando una contabilidad de aciertos y errores que muestra en todo momento. Este tipo de ejercicio es de los que más atrae a los alumnos y contribuye de una manera muy eficaz a afianzar las ecuaciones y gráficas de estas funciones elementales.

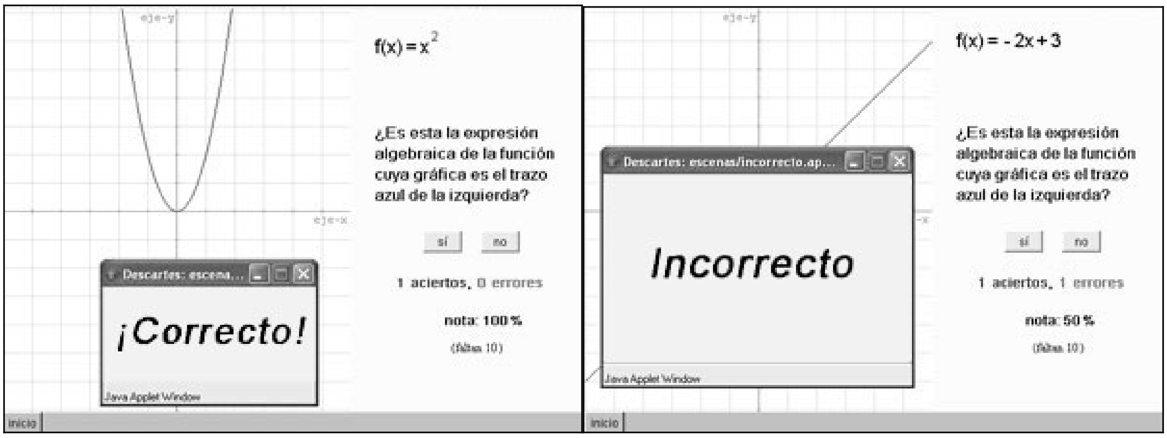


Figura 5

4.5 Dominio de funciones

En esta escena (Figura 6) se pueden cambiar los valores de los parámetros *a*, *b* y *c* para averiguar en qué casos la función cuadrática es positiva o negativa, y por tanto cuál es el dominio de la función $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$

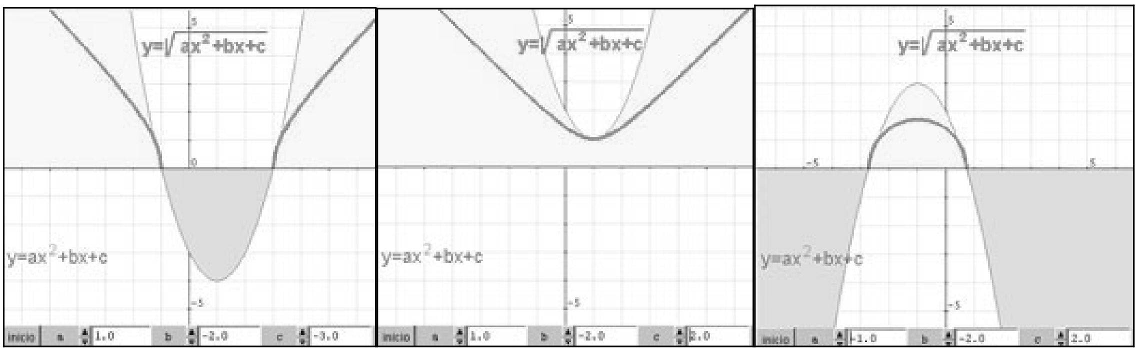


Figura 6

4.6 Función derivada

En este caso (Figura 7) se presenta la función $y = \frac{1}{x}$ y se pide al alumno que introduzca la expresión de su función derivada. Un punto que se arrastra con el ratón confirmará si lo que se ha escrito es correcto o no, según que dicho punto siga la gráfica de la función derivada o no.

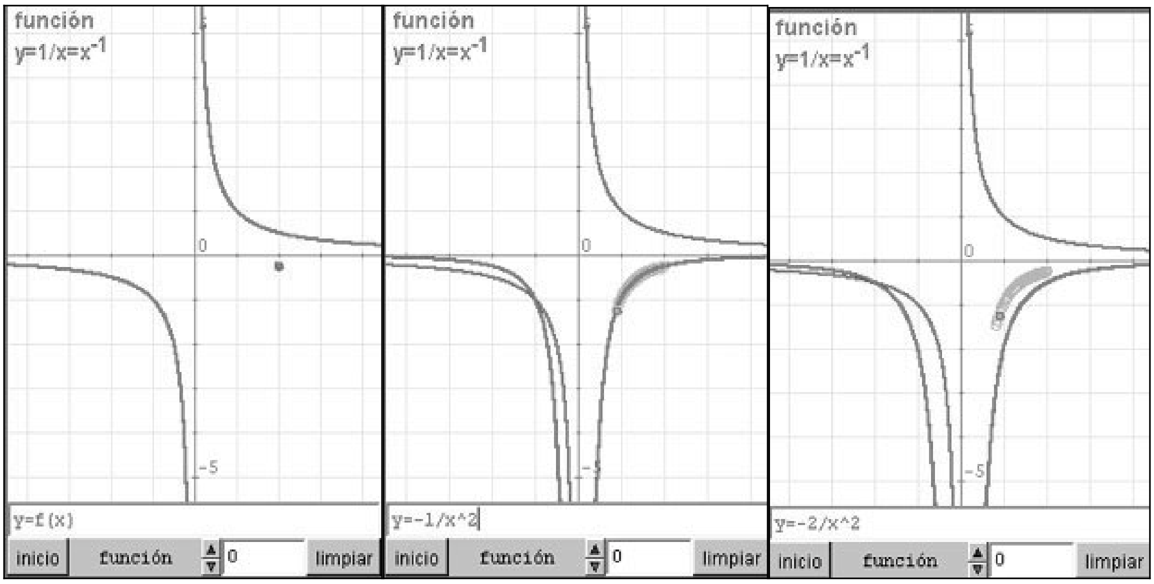


Figura 7

4.7 Azar y probabilidad

Muestro aquí dos ejemplos. El primero (Figura 8) lo constituyen dos escenas, una con dos dados que al pulsar el control *tirar* cambian de puntuación aleatoriamente, y otra que muestra una carrera de coches donde el usuario hace avanzar el coche cuyo número coincide con la suma de las puntuaciones de los dos dados.

Al finalizar la carrera puede apreciarse que los coches de los extremos han avanzado menos que los centrales, lo que demuestra que la suma de las puntuaciones de los dados no son sucesos con la misma probabilidad de ocurrir.

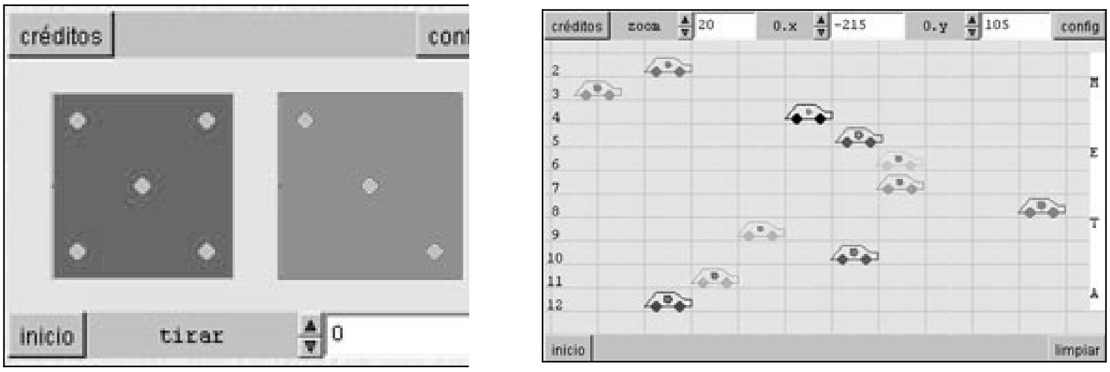


Figura 8

Y en el segundo ejemplo (Figura 9) se hace una simulación del lanzamiento de diez monedas. Cada vez que se pulsa el control *tirar* aparece aleatoriamente distintas posiciones de las monedas.

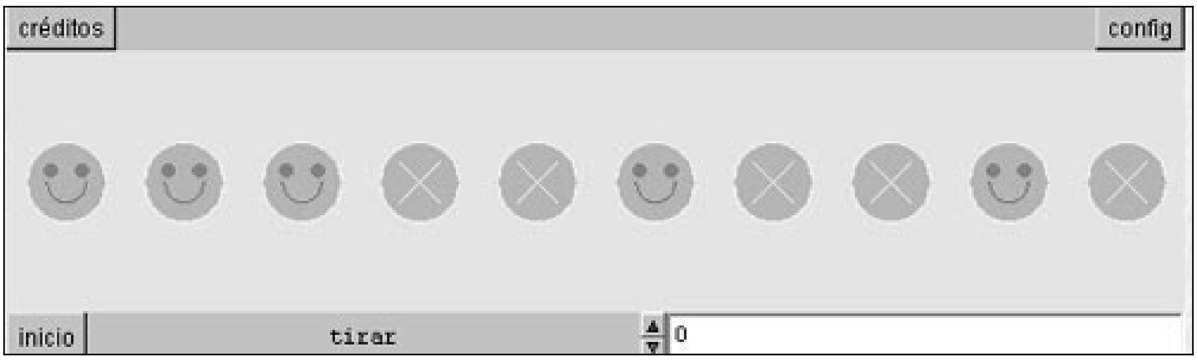


Figura 9

4.8 Proyección de un vector sobre otro

Esta escena (Figura 10) contiene una animación que muestra cómo el vector $\vec{u}$ se proyecta sobre el vector $\vec{v}$. Tiene la posibilidad de cambiar la posición inicial de los vectores sin más que arrastrar sus extremos con el ratón, y en el espacio de la izquierda se pueden ir viendo paso a paso los cálculos necesarios para hallar el vector proyección.

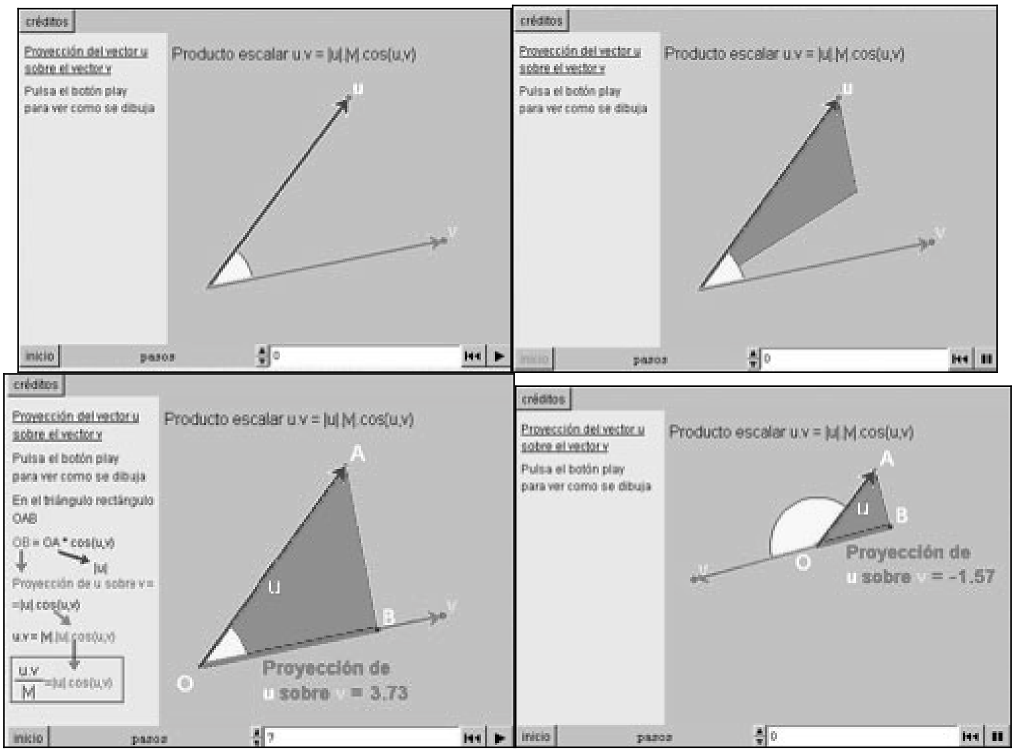


Figura 10

4.9 Coordenadas de un vector en el espacio

En esta escena (Figura 11) aparecen distintos vectores de forma aleatoria al pulsar un botón. Podemos mover con el ratón del ordenador la figura en cualquier dirección del espacio y así tener una mejor perspectiva para averiguar las coordenadas de cada uno de los vectores que van apareciendo. Finalmente si queremos averiguar si nuestra respuesta es correcta podemos ver la solución.

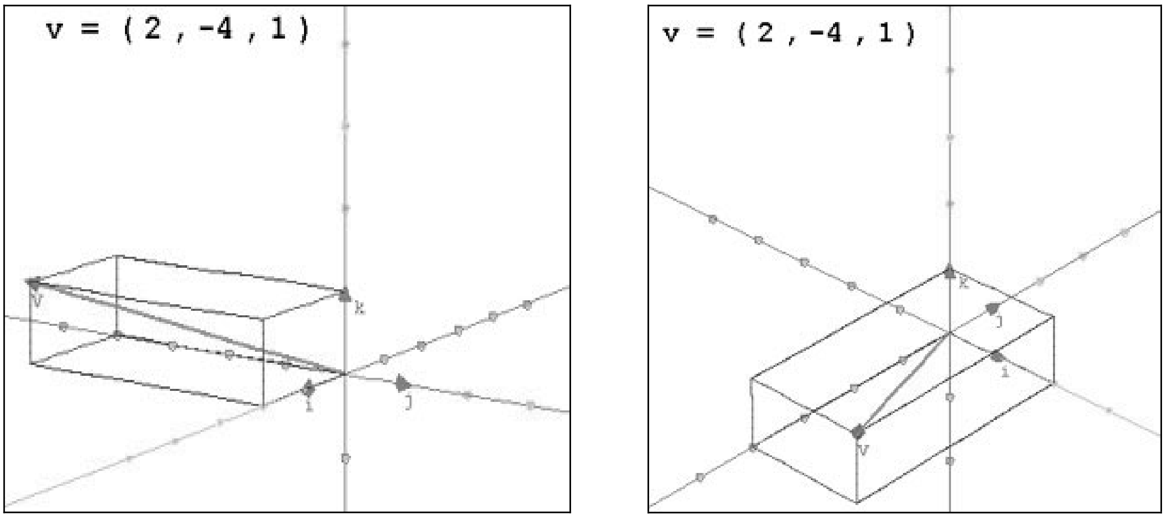


Figura 11

5 Qué aprender, cómo enseñar

Centrándonos en el tema que nos ocupa ahora, esto es “qué aprender y cómo enseñar” con este y otros tipos de medios tecnológicos, nos preguntamos:

Qué contenidos son útiles e imprescindibles, qué destrezas hay que aprender, cómo enseñar esos contenidos y esas destrezas.

En el momento actual en Secundaria en España hay dos ocupaciones o quehaceres en la enseñanza de las Matemáticas: 1) aprender algoritmos y rutinas, y 2) entender qué problemas resuelven esos algoritmos y cuándo hay que aplicarlos. Pues bien, creo no equivocarme si digo que el 90% del tiempo nos lo llevamos enseñando las rutinas.

Inmediatamente nos viene a la mente que estas maravillosas herramientas evitan que nos llevemos enseñando esas rutinas tanto tiempo. La máquina lo hace todo.

Pero para saber cuándo usar una herramienta, cómo usarla y como interpretar los resultados que nos devuelve hay que conocer a fondo los conceptos matemáticos. Las herramientas que nos facilitan la resolución de los problemas rutinarios se deben utilizar una vez que se hayan aprendido y asimilado los conceptos matemáticos.

Entonces, ¿cuál es el momento de usar las herramientas y dejar de usar el método manual? Creo que cada nivel cognitivo es diferente.

En Primaria, por ejemplo, antes de usar la calculadora para las operaciones elementales, hay que aprender el significado de las mismas. Pero para aprender el significado no es necesario que los alumnos hagan miles de larguísimas cuentas, basta que practiquen con ejemplos sencillos, y sobre todo que ejerciten el cálculo mental. Y en Geometría es fundamental la manipulación de objetos.

En Secundaria deben aprender nuevos conceptos y nuevas rutinas. De hecho es el nivel en donde los conceptos matemáticos empiezan a ser más abstractos. Cálculos numéricos de fracciones, potencias, radicales, logaritmos, etc. Resolución de ecuaciones, estudio de funciones, cálculo de derivadas e integrales, etc. Y precisamente es donde hay más diferencias en la maduración de capacidad cognitiva de los estudiantes.

6 Dos experiencias

De las experiencias que llevo realizando en estos últimos años utilizando distintas herramientas y distintas metodologías voy a exponer las dos últimas, por ser las más actuales y en las que he hecho un estudio más completo.

6.1 Números complejos

La primera la realicé el curso 2002-2003 con un grupo de 1º de Bachillerato y con el tema de Números Complejos elaborado con Descartes. Conté con un grupo de contraste que estudió el tema por el método tradicional aunque realizaron los mismos ejercicios. Fui asesorada por la profesora de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Cantabria Mª José González-López.

Se utilizaron distintas herramientas de evaluación: encuesta previa sobre el nivel académico de los alumnos y el uso que hacen habitualmente del ordenador e Internet, prueba de conocimientos previos, hojas de trabajo, diario de clase, prueba final de conocimientos y encuesta de valoración final.

En la prueba previa de conocimientos los resultados fueron los siguientes:

PRUEBA PREVIA	
Grupo Descartes	Grupo de contraste
3.3	5.7

Y en la prueba final se invirtieron los papeles:

<table>
<tr><td colspan="3">Grupo Descartes</td><td colspan="3">Grupo de contraste</td></tr>
<tr><td>Nº alumnos</td><td colspan="2">%</td><td>Nº de alumnos</td><td colspan="2">%</td></tr>
<tr><td>9 suspensos</td><td colspan="2">40%</td><td>10 suspensos</td><td colspan="2">43%</td></tr>
<tr><td>4 suficientes</td><td>18%</td><td rowspan="4">60%</td><td>4 suficientes</td><td>17%</td><td rowspan="4">57%</td></tr>
<tr><td>3 bienes</td><td>14%</td><td>2 bienes</td><td>9%</td></tr>
<tr><td>3 notables</td><td>14%</td><td>5 notables</td><td>22%</td></tr>
<tr><td>3 sobresalientes</td><td>14%</td><td>2 sobresalientes</td><td>9%</td></tr>
<tr><td>22</td><td colspan="2"></td><td>23</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

En la encuesta final, estas fueron algunas opiniones:

“Me parece un programa muy bueno, porque facilita el aprendizaje y comprensión. Y las explicaciones y las escenas hacen el trabajo más fácil y ameno”“Las páginas de Descartes están muy bien, porque aparte de las explicaciones hay un gráfico donde te lo aclara mejor las dudas que surgen”

“El proyecto es bueno, pero se necesita al profesor para que te explique algunas cosas”

¿Qué te ha parecido mejor en el aprendizaje con el ordenador?

–Me ha parecido que aprendes mejor las cosas y hay que hacer en ese aula más lecciones de matemáticas.

–Al no tener que escuchar al profesor, salvo en dudas, eres tú quien se esfuerza más.

–La "libertad" para ir aprendiendo a tu manera, es decir, más despacio y entendiéndolo.

6.2 Matrices

La segunda experiencia la realicé en octubre de 2004, con un grupo de 2º de Bachillerato, con el tema de Matrices. Esta vez utilizamos los materiales elaborados dentro del proyecto LEMAT. Este proyecto de innovación se está desarrollando en la Universidad de Cantabria, y su coordinador es José Antonio Cordón Muñoz.

Tiene como principal objetivo elaborar materiales multimedia en Internet de los contenidos de Bachillerato y de primeros cursos universitarios con el fin de que haya una coordinación mayor entre estos dos niveles, y que los alumnos puedan disponer de un material de apoyo a su aprendizaje. Se utilizan distintas herramientas interactivas que dan lugar a laboratorios elaborados con Java Script o con escenas Descartes. Para que el estudiante pueda utilizar el programa Derive con más facilidad se incluyen instrucciones de manejo de dicho software. La plataforma en la que se desarrolla permite el uso de herramientas de comunicación internas como el correo y el foro. El acceso es restringido, aunque se puede acceder como *invitado* para ver los contenidos.

El grupo de trabajo lo componemos profesores de Secundaria, de la Escuela de Ingenieros Industriales y de Telecomunicaciones, y de la Licenciatura de Matemáticas.

Así mismo contamos con el aula virtual de la Universidad de Cantabria donde se alojan los materiales, y que permite un seguimiento del trabajo de los alumnos aunque se conecten en sus casas, y una evaluación automática a través de la red.

Lo más destacado de la encuesta final de esta experiencia es que se pone de manifiesto que echan en falta la explicación del profesor. Algunos consideran positivo el esfuerzo personal que tienen que realizar en comparación con el de la clase tradicional, toda vez que además les permite trabajar a su ritmo, y consideran que lo ideal es usar estas herramientas como complemento a la clase habitual.

La evaluación del conocimiento adquirido por los alumnos de esta unidad se realizó vía web, tal como está previsto en el proyecto. Esto ha supuesto una gran novedad y los alumnos lo han acogido con expectación. La nota media ha sido de 7.3 y para el profesor tiene la ventaja de que la corrección es automática.

7 Conclusiones extraídas de estas experiencias

Tras estas y otras experiencias usando herramientas de apoyo al educador matemático en Secundaria he llegado a las siguientes conclusiones:

- Creo que este recurso debe ser uno más en el aula de Matemáticas. La variedad en los medios hace que se aproveche de cada uno de ellos las características más idóneas en cada momento, según las actividades o los contenidos que se vayan a trabajar.
- No hay ninguna herramienta que sea la panacea de la enseñanza, todas pueden ayudar o no, según se utilicen. Tampoco hay que descartar ninguna, todas tienen su utilidad y su momento.
- La implantación de los medios informáticos en los centros educativos, y en la sociedad en general, está avanzando muy rápidamente, pero aún necesitan ser mejorados para que las herramientas se puedan utilizar con toda su potencial. Por otra parte estas herramientas también están en fase de desarrollo y cada día se van mejorando las que existen y aparecen nuevas y con mayores prestaciones.
- La organización en los centros respecto al número de alumnos por grupos, o de la ocupación de las aulas de informática, influye notoriamente en la posibilidad del uso de estos medios para la enseñanza de las matemáticas, o de

cualquier materia. Lo ideal sería disponer de los ordenadores en cualquier momento, sin tan siquiera tener que programar qué días exactamente los necesitas, sino tenerlos a disposición de los alumnos o del profesor cuando se requieran.

- Las programaciones oficiales son a veces un corsé del que no se puede salir y, junto con el tiempo disponible para Matemáticas, restringen el uso de los medios informáticos que requieren más tiempo, aunque por otra parte se prestan a ofrecer otros temas que con el método tradicional son imposibles de trabajar.
- La interactividad de las escenas de Descartes permite al alumno participar más directamente en el proceso de aprendizaje.
- Las clases se les hacen más amenas. Pero no hay que abusar pues caeríamos en el cansancio por aburrimiento de hacer siempre los mismo. Por otra parte la lectura prolongada en pantalla produce cansancio.
- Usar el método de aprendizaje por descubrimiento con las escenas de Descartes hace éste más significativo.
- No conviene que todo un tema sea estudiado sólo con un unidad de Descartes; hay que combinarlo con trabajo personal del alumno en hojas de trabajo o cuaderno y con explicaciones puntuales del profesor.
- Para evitar que cuando los alumnos trabajan en parejas no participen de igual forma en el trabajo, se recomienda que use cada uno un ordenador. Así también se favorece el que cada uno trabaje a su ritmo. Las diferencias que se puedan establecer, al terminar unos antes que otros las actividades propuestas, se pueden corregir planteando, en las unidades, actividades extras para los más adelantados, que tengan una repercusión positiva en la calificación del alumno.
- El beneficio de abandonar el trabajo en parejas se puede suplir combinando las actividades en solitario con otras en grupo.
- Las puestas en común del gran grupo son siempre de gran utilidad, sobre todo cuando se hace un repaso del tema estudiado, para preparar un examen.
- Tanto la recuperación para los alumnos más retrasados como el avanzar más para los más adelantados, así como el reforzar el trabajo personal, se podría mejorar si todos los alumnos dispusieran de ordenador en casa.
- Sería conveniente que, además de hacer pruebas escritas sin ordenador, se pudieran hacer test u otro tipo de pruebas con ordenador, ya que se aprovecharía mejor el uso de la herramienta Descartes.

– Muchos alumnos echan de menos las explicaciones del profesor, eso quiere decir que conviene hacer unas unidades más dirigidas a aprovechar la herramienta, en los puntos en que demuestra mejor su potencial, o sea en las cuestiones gráficas, y complementarla con discusiones, puestas en común, realización de ejercicios, etc. ayudados por el profesor.
– El ordenador no puede transmitir emotividad. Al margen de la carga afectiva que se establece en el aula en las clases ordinarias y que con los medios informáticos no se puede suplir, hemos comprobado que conceptos importantes pueden pasar desapercibidos al faltar la carga emotiva o énfasis que solo el profesor puede dar.

No cabe duda que estamos en los comienzo de una etapa de la enseñanza en la que el ordenador e Internet juegan un papel fundamental. El cómo usar estos medios y cómo sacarles rendimiento para un mejor y más significativo aprendizaje lo estamos investigando y experimentando ahora. Con el tiempo se irán solventando problemas, salvando escollos y siendo habitual en nuestros centros su uso. Pero en nosotros, los profesores, está el que eso se consiga de forma más rápida y eficaz. Desde luego lo que no podemos es volverle la espalda a una tecnología que nos invade, nos guste o no. Pero atención, ni tampoco ir a ciegas y creyendo que una herramienta nos va a resolver todos los problemas de la enseñanza.

Creo que con este tipo de experiencias e investigaciones estamos colaborando a que este proceso del uso de las tecnologías de la información y la comunicación de forma habitual, pero sensata y útil, se vaya consolidando.

8 Evolución de las experiencias en los distintos niveles

En los años que llevamos usando, en mayor o menor medida, el ordenador como herramienta de ayuda al aprendizaje de Matemáticas, vemos que ha habido una evolución.

En los primeros momentos era una novedad y los alumnos se entusiasmaban sólo por tocar las teclas y pulsar con el ratón, pero no se centraban adecuadamente en los conceptos que había que estudiar y apenas si aprendían.

Por otra parte, en estos momentos, algunos pretendemos sustituir al profesor por un ordenador con lecciones magníficas.

Creo que el futuro está en tener el ordenador (o las tecnologías que vayan surgiendo) a mano, y usarlo en el momento preciso.

Ciñéndome al nivel de Secundaria los nuevos conceptos se pueden aprender simultaneando la enseñanza del profesor con la utilización de otras herramientas, ya sean informáticas o manipulativas que sirvan de ayuda o apoyo. Se debe practicar manualmente hasta adquirir los conceptos, y finalmente se debe usar las herramientas informáticas como ayuda a la resolución de problemas, cuando ya se han adquirido los conocimientos.

O sea que de forma radical no podemos evitar hacer cálculos o resolver ecuaciones manualmente antes de pasar a utilizar las herramientas informáticas. La diferencia que se puede establecer respecto a la situación actual es que los alumnos puedan asimilar mejor los conceptos gracias a la ayuda de las herramientas de apoyo al educador matemático y que de una manera gradual, no radical, vayan utilizando las herramientas de apoyo al matemático, a medida que superan la adquisición de los conocimientos.

Todos hemos oído alguna vez a compañeros que manifiestan que hasta que no llegaron a la Universidad no entendieron muchos conceptos matemáticos. Quizás con esta ayuda consigamos que lo entiendan antes.

Y en el nivel universitario sería similar. Pero claro en ese nivel ya tienen más conocimientos y por tanto pueden aprovechar mejor las herramientas de ayuda al matemático. Por otra parte estas herramientas están diseñadas para este nivel, por tanto son idóneas aplicarlas en ese momento y no antes.

En esta gráfica podemos ver como se debe usar las herramientas de ayuda al educador y las de ayuda al matemático, según los niveles educativos.

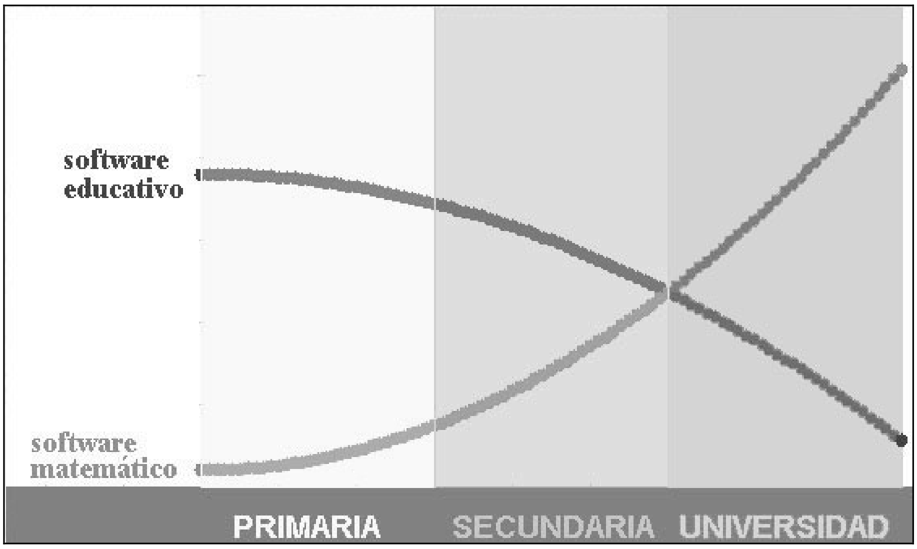


Figura 12

9 ¿Qué aprender?

Respecto al cambio en los contenidos también se van produciendo de forma paulatina. Y va en paralelo la creación y mejora de las herramientas con la disminución de aprendizaje de algunos algoritmos y rutinas.

Por ejemplo, antes en Secundaria nos llevábamos mucho tiempo practicando el algoritmo de la raíz cuadrada. Ahora hacemos cálculo mental de radicales sencillos y hacemos el resto con la calculadora.

Antes nos llevaba mucho tiempo practicar con las tablas trigonométricas y las de logaritmos. Ahora hacemos hincapié en los conceptos de razones trigonométricas y de logaritmos en ejemplos sencillos pero que pongan de manifiesto el conocer perfectamente los conceptos y usamos la calculadora cuando los cálculos son complicados y para resolver problemas. Pero eso si, siempre interpretamos los resultados de la calculadora.

Nos falta evolucionar más en el tema de representación gráfica de funciones, de cálculo de derivadas y de integrales. Pero creo que en Secundaria se debe practicar representando funciones dadas sus expresiones algebraicas, interpretar gráficas, asociar expresiones con gráficas, pero no gastar mucho tiempo en hacer representaciones muy complicadas. Las herramientas que pueden usar los alumnos para estos cálculos todavía no están al alcance de todos: calculadoras gráficas o simbólicas, Derive, Maple, etc.

10 Conclusión final

10.1 Respecto al qué aprender

Hay que ir sustituyendo las rutinas por las herramientas tecnológicas de forma progresiva. Por lo que habrá destrezas que los alumnos no tendrán que aprender y podremos emplear más tiempo a la resolución de problemas.

10.2 Y respecto a cómo enseñar

Hay que hacerlo simultaneando la enseñanza del profesor con la ayuda de las herramientas informáticas de apoyo al educador matemático y una vez asimilados los conocimientos, se pueden resolver problemas más complicados con la ayuda de las herramientas de apoyo al quehacer matemático.

El Nacimiento de la Geometría: Los Elementos de Euclides

Concepción Romo Santos
Dpto de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid.
romosan@mat.ucm.es

Abstract

"The goal of this work is to recall the notions and geometrical problems treated in Euclid's Elements as well as to comment on some early versions in Spanish"

A la memoria de Miguel de Guzmán

Miguel de Guzmán ha tenido una vida extraordinariamente fecunda, él ha dado proyección internacional a la Educación Matemática Española. Además ha sido una persona de una gran calidad humana, un hombre sencillo y asequible a todos. Descanse en paz.

Introducción

La matemática es una ciencia sin tiempo. Las contribuciones de los geómetras de la antigüedad están presentes con frecuencia, y también lo están, los resultados conquistados recientemente. Como decía Littelwood, los matemáticos griegos son, todavía hoy, "colegas de otra Universidad".

El nacimiento de la geometría son los Elementos de Euclides. La cantidad y calidad de conocimientos matemáticos a principios del siglo III a. C. exigían una ordenación para su utilización por una memoria limitada. Esta ordenación son los Elementos. El lenguaje de esta obra es geométrico, pero en ella se exponen también ideas y problemas aritméticos, algebraicos y de lo que hoy se llama análisis matemático.

El objetivo de este trabajo es estudiar las ideas y problemas geométricos expuestos en los Elementos de Euclides así como comentar algunas de las primeras versiones de dichos Elementos. Tres en castellano y una en latín.

De las versiones castellanas que elegimos, dos se encuentran en la Biblioteca del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial,. Son las versiones de Campano de Novara y Jacques Peletier. La tercera, la de Carduchi se conserva en el Seminario Mayor Diocesano de Valladolid. La versión en latín que hemos elegido es la de Cristóbal Clavio, conservada también en el Seminario Mayor Diocesano de Valladolid.

1. Ideas y problemas geométricos expuestos en los Elementos de Euclides

Los Elementos de Euclides son toda la Matemática de la época; o, con otras palabras. la Matemática griega era Geometría. Ya en la primera página del primer libro nos encontramos con estas definiciones:

Definición 1.- Un punto es lo que no puede dividirse.

Definición 2.- Una línea es una longitud sin anchura.

Definición 3.- Los extremos de una línea son puntos.

Definición 5.- Una superficie es lo que tiene solamente longitud y anchura.

Definición 6.- Los extremos de una superficie son líneas.

La definición 2, con un lenguaje libre actual, corresponde a decir que una línea es el resultado de deformar, sin romper, un trozo de recta, lo que con la terminología matemática se expresa diciendo que una línea es un subconjunto de puntos del espacio homeomorfo a un segmento de recta. La definición 6 no es propiamente una definición, sino una proposición. Para extenderla es necesario, en primer lugar, tener presente que para los griegos no tenían sentido las figuras infinitas; a lo largo de toda la obra , una recta es siempre un segmento capaz de ser prolongado, por lo que constantemente se dice: “prolongando la recta AB”. Por tanto, las superficies, para los griegos, tenían siempre un borde, cuando no eran cerradas, como la superficie esférica. Con lenguaje actual, la definición 6 se diría: la intersección de dos superficies es una línea. Las condiciones de equivalencia de las definiciones 2 y 6 constituyen uno de los teoremas fundamentales de la Matemática actual: el teorema de la función implícita.

A la vista de las definiciones del libro I de los Elementos podemos buscar las primeras raíces de la teoría de la dimensión en la antigua Grecia. De hecho, los griegos no formularon una teoría detallada de la misma; no obstante, sus estudios sobre problemas conceptuales tocaron el tema de la dimensión y de ellos surgieron ideas y teorías informales que han influido en los matemáticos de épocas posteriores, incluidos los del siglo XX.

Podemos distinguir dos teorías rudimentarias de dimensión sugeridas por estas definiciones: Una teoría directa dada por las definiciones 1,2 y 5 y una teoría indirecta que se infiere de las definiciones 3 y 6.

La primera de estas teorías proporciona una relación directa entre las figuras geométricas fundamentales y la dimensión. Las definiciones, en efecto, dan nombre y enumeran las dimensiones de las distintas figuras: Los puntos no tienen dimensión (sin partes); las líneas tienen una dimensión (longitud); las superficies dos (longitud y anchura).

La segunda teoría hace referencia al carácter inductivo de la dimensión al poder tomar cada elemento como borde de las figuras cuya dimensión es una unidad superior.

El libro V, atribuido a Eudoxo, es, seguramente, el libro más bello y acabado de los Elementos. En él se construye con gran perfección la teoría de las magnitudes, de un modo totalmente actual. Una magnitud es un conjunto a cuyos elementos se les llama cantidades y que tienen la forma, por ejemplo, de 5m, en donde aparece un número y una cantidad. Con las cantidades se definen dos operaciones: adición, $3m+5m=8m$ y multiplicación por números: $2(3m)=(2x3)m= 6m$, que poseen propiedades bien conocidas. Estos conjuntos se designan hoy día con el nombre de semiespacios vectoriales. La mayor dificultad de la construcción de magnitudes está en definir el conjunto de los números, que debe ser el de los números reales. Lo sorprendente del caso es que el concepto de número real ha sido uno de los que más ha costado establecer con precisión, debiéndose a Dedekind, a finales del siglo pasado, la primera definición correcta de estos números. Pues bien, Dedekind en el prefacio de su memoria, confiesa que la idea desarrollada en esa memoria no es suya, que se ha limitado a expresar en lenguaje actual la construcción dada en el libro V de Euclides. ¿Es sorprendente?.

El libro V de Euclides ha estado sin ser entendido durante más de veintidós siglos. Los números que definen los griegos en el libro V no son los números reales positivos, como pensó Dedekind; pero los contiene como caso particular, como vio Krull. El conjunto de números negativos tardó mucho tiempo en alcanzarse, y durante el siglo XVIII todavía hubo grandes controversias acerca de los números negativos. Lo que actualmente se llama Álgebra Lineal, se encuentra por tanto, perfectamente construida, para semiespacios vectoriales de dimensión 1, en el mencionado libro V. Pero hay más: el Álgebra multilineal, construida sobre la idea de producto tensorial, que aparece desarrollada a mediados del siglo XX, como una de las teorías más modernas de la Matemática, está perfectamente desarrollada , siempre sobre espacios vectoriales de dimensión 1, en los libros II, VII, VIII, IX, y esto no es de extrañar, porque los griegos, como acabamos de señalar, no trabajaban con números, sino con magnitudes, por lo que se veían obligados, para definir la multiplicación a usar el producto tensorial. En los mencionados libros VII, VIII, IX se obtienen también los resultados fundamentales de la Teoría de Números, estudiándose la divisibilidad y llegándose a dar una bella demostración de la infinitud de los números primos. En el libro IX se llega a sumar una progresión geométrica.

Los libros I, II, III, IV contienen la parte geométrica tradicional relativa al plano, y los libros XI, XII, XIII, la geometría del espacio; paralelismo y perpendicularidad en el espacio, ángulos poliédricos, volúmenes de prismas, pirámides, cuerpos redondos y construcción y cálculo de elementos de poliedros regulares.

Prestemos un momento de atención al libro X. Comencemos por recordar que los griegos decían que el segmento AB era conmensurable con el segmento CD cuando existía un múltiplo entero (y positivo) de AB igual a otro múltiplo de CD. En caso contrario se decía que AB era inconmensurable con CD.

Esto último se expresa también diciendo que la medida de AB con la unidad CD es un número irracional. Ya los pitagóricos conocían que la diagonal del cuadrado era inconmensurable con su lado, pero lo que Euclides se propone en este libro es ver cuantos números irracionales existen. Obsérvese que los números irracionales no se pueden representar mediante un número finito de cifras, y para los griegos, el infinito actual era impensable, por lo que estos números eran sorprendentes; pero, sin embargo, como ellos los podían construir mediante un número finito de construcciones geométricas, los podían admitir sin dificultad, pero únicamente aquellos que admitían construcciones de este tipo. De aquí el interés de analizar completamente este conjunto. Esta es la finalidad del libro X, y el resultado fundamental del mismo es demostrar que existen infinitos números irracionales, esto es, demostrar que, dadas varias cantidades irracionales, son capaces de construir otra distinta de las anteriores. Con la terminología actual lo que se consigue en este libro es construir ecuaciones cuadráticas o bicuadráticas cuyas raíces son reales y positivas. La belleza de este libro y el ingenio empleado en él son extraordinarios. Sin embargo, a lo largo de los siglos han sido muchos los que se han preguntado para qué sirve dicho libro, cuyos resultados no se aplican en ningún momento, ya que no puede considerarse justificado todo el esfuerzo de estudiar el problema de los irracionales cuadráticos reales por la aplicación al cálculo de los elementos de los poliedros regulares convexos del libro XIII. Veintidos siglos más tarde, a partir de las Disquisitiones Arithmeticae de Gauss, se ha podido comprender el significado del mismo. El problema de este libro es de la más estricta actualidad, ya que se trata de uno de los problemas que está actualmente sobre el tapete: el estudio de las propiedades algebraicas reales.

Auxiliándonos del libro XI, analicemos el concepto de dimensión en la Grecia antigua. En dicho libro encontramos las siguientes definiciones relativas a los objetos básicos de la Geometría:

Definición 1.- Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y altura.

Definición 2.- El borde de un sólido es una superficie.

De la misma manera que en el libro primero, podemos distinguir dos teorías rudimentarias de dimensión sugeridas por estas definiciones. Una teoría directa dada por la definición 1 y una teoría indirecta que se infiere de la definición 2.

La primera de estas teorías proporciona una relación directa entre las figuras geométricas fundamentales y la dimensión. Así de la definición 1 se deduce que los sólidos tienen tres dimensiones (longitud, anchura y altura).

La segunda teoría hace referencia al carácter inductivo de la dimensión al poder tomar cada elemento como borde de las figuras cuya dimensión es una unidad superior. Este es el aspecto de la dimensión que se ha tenido en cuenta en las teorías modernas de la misma: "Un conjunto o espacio de dimensión n (según la definición inductiva) es aquel para el cual n es el menor entero que cumple la condición de que cualquier punto del mismo tiene una base de entornos con fronteras de dimensión menor o igual que $n-1$, asignando al conjunto vacío la dimensión -1".

Continuemos nuestra observación de la recién nacida geometría. También en el libro XI se aborda el problema de medir el volumen de los prismas. La idea es simplemente esta: dos prismas tienen el mismo volumen cuando se pueden cortar en trozos, de modo que al recomponer de modo conveniente todos ellos resulte en ambos casos el mismo cubo. Este problema se resuelve totalmente en dicho libro. En el libro XII se trata de hacer lo mismo con la pirámide. Pero esto ya no es posible. Esto es, no se puede trocear una pirámide en un número finito de partes que al recomponer estas se obtenga un cubo. Para resolver este problema es preciso utilizar la idea más importante de la Matemática, que es el concepto de límite.

Este concepto está prácticamente contenido en el método de exhaustación, que se atribuye también a Eudoxo. Si esto fue así, el hombre genial de la antigüedad helénica sería Eudoxo, ya que resolvió los dos problemas más difíciles : creación de los números reales y concepto de límite. El concepto de límite es el fundamento del Cálculo Infinitesimal de Newton y Leibniz, por lo que el método de exhaustación puede considerarse como el germen de este importante capítulo de la Matemática. Con el método de exhaustación se calculan en el libro XII los volúmenes de las pirámides y de los cuerpos redondos. Pero hay más: lo que realmente se consigue en este capítulo es reducir el cálculo de un volumen al cálculo de áreas, o con lenguaje actual , se reduce el cálculo de una integral triple al de una integral doble, lo cual es el importante teorema de Stokes de la Matemática de nuestros días.

El libro XIII está dedicado a la construcción de los cinco poliedros regulares convexos. Y de nuevo se puede volver a formular la pregunta: ¿Para qué sirven estos poliedros?. Excluido el cubo, puede decirse que en aquel momento para nada. Sin embargo, a partir de la introducción de la idea de grupo por Galois en el siglo pasado, los poliedros regulares han proporcionado modelos de grupos con aplicaciones al Álgebra, a la teoría de funciones automorfas, a la cristalografía,etc.

Vemos, pues, que en esta fotografía de la Geometría en su infancia se observan todas las características fundamentales que aparecerán desarrolladas en su edad adulta. Lo más importante es observar que los problemas básicos de la Matemática están perfectamente planteados en los Elementos, esto es: problemas lineales y multilineales, teoría de números, problema de la aproximación local y problemas de la medida.

2. Versiones de los Elementos de Euclides de Carduchi, Clavio, Campano de Novara y Jacques Peletier

Comentaremos algunas de las primeras versiones castellanas de la obra del gran matemático y geómetra clásico Euclides.

Luis Carduchi: Elementos geométricos de Euclides, Alcalá de Henares 1637, Libro impreso, Seminario Mayor Diocesano, Valladolid.

Lius Carduchi era hijo de padres italianos y sobrino de los pintores Bartolomé y Vicente Carduchi. Fue matemático y arquitecto militar. Escribió varios libros sobre matemáticas y diseñó una serie de planos para hacer navegable el río Tajo.

Los Elementos geométricos de Euclides, comentados por Carduchi y editados en 1637 en Alcalá, es una de las primeras traducciones al castellano de la obra de Euclides, después de la de Rodrigo Zamorano de 1576. El libro está dedicado al Conde Duque de Olivares.

Cristóbal Clavio: Euclides elementorum libri XV, Roma,1574, Vicentium Accoltum, Libro impreso, Seminario Mayor Diocesano, Valladolid.

Cristóbal Clavio (Bamberg 1537, Roma 1612) fue un jesuita alemán que se dedicó con entusiasmo al estudio de las Matemáticas. Amigo de Kepler, algunos historiadores le atribuyen el uso del punto para separar la parte entera de la decimal de un número.

En la biblioteca del Seminario Mayor de Valladolid se conserva la primera edición de 1574, de los Elementos de Euclides, en 15 libros, comentada por Clavio. Después aparecieron numerosas ediciones corregidas y aumentadas. Históricamente, esta obra es digna de estudio porque los comentarios de Clavio contienen gran parte de los conocimientos geométricos del siglo XVI.

Campano De Novara: Elementos geométricos de Euclides, Venecia 1509, Biblioteca del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial.

La biografía de Campano de Novara es muy poco conocida. Se le sitúa en el siglo XIII, aunque no falta quien lo considera del XII, e incluso del XI. La aportación fundamental de Campano de Novara es la traducción de los Elementos sobre una versión de Adelard de Bath, que será la primera que se edite en Venecia en 1482. En la Biblioteca del Monasterio se encuentra una edición de dicha traducción de 1509

Jacques Peletier: “Euclides Elementa”, Biblioteca del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial.

Las obras escritas por el matemático francés Jacques Peletier pueden ser consideradas como prototipo de las del siglo XVI. Todas sus obras tienen un gran interés histórico. En El Escorial encontramos su Aritmética Departie, Lion 1554, que contiene un cuadro de coeficientes binómicos, cien años antes de que lo popularizara Pascal, y una regla de “falsa exposición”, aplicada al cálculo de raíces. “Euclides Elementa” con demostraciones de Theón y Campano de Novara. Y unas “Disquisiciones geométricas”, en las que realiza una aplicación de la proporcionalidad a la Geometría.

Bibliografía

[1] Abellanas Cebollero, Pedro: “Discurso de Apertura del curso 1979-80”, Universidad Complutense.

[2] Romo Santos, Concepción: “Libros de Matemáticas en la Iglesia de Castilla y León, “Revista Educación Matemática, Volumen 3, nº 2. México 1991.

[3] Tarrés Freixenet, Juan: “Historia de la teoría de la dimensión”. Seminario de Historia de la Matemática. Universidad Complutense. Madrid 1991.

La Experiencia y el Arte de Descubrir en Geometría

Juan Bosco Romero Márquez
Dpto. de Análisis Matemático
Univ. Complutense de Madrid

Abstract

We presents in this article some problems of Elementary Plane Geometry for development of the creativity in Mathematics in the classroom.

Resumen

En este artículo presentamos algunos problemas de Geometría Plana Elemental que permite desarrollar la creatividad en Matemáticas, en el aula.

Dedicado a la memoria del Prof. Miguel de Guzmán, que supo encontrar la colineación perfecta en su vida: Su Fe, su Amor y entrega total y desinteresada hacia los demás, a través de su Profesión científica y humanística.

Introducción

En este artículo de carácter elemental que dedico a la memoria de mi maestro y amigo, el Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz, voy a presentar varios problemas y cuestiones en forma de problemas sobre la Geometría Plana Elemental, que sin saber si son o no originales, se pueden crear con imaginación e intuición, en el aula., sobre todo en la parte del currículo que está relacionado con la Geometría Plana Elemental.

Me guía para hacerlo el espíritu del juego y de la belleza que tiene la Matemática, que fue vivida, enseñada y practicada por Miguel, en todos los años de su vida, como profesor a todos los que hemos sido sus alumnos y en todos los ámbitos educativos. Y todos estos valores matemáticos y humanos se plasmaban y realizaban en él, como las experiencias y las aventuras más interesantes y nobles del quehacer matemático como es el arte de crear y descubrir problemas y conjeturas con paciencia, con entrega, con tesón y disfrutando en este juego; sea este un resultado importante, o sea este un resultado elemental, y que él siempre tanto buscaba en sus clases, con sus publicaciones en artículos, y en todos sus libros llenos de vida creativa, intuitiva e imaginativa y, que nos quería trasmitir con todo afecto, a los que fuimos sus amigos y sus alumnos.

1. Algunos problemas de Geometría para el aula

Antes de comenzar la proposición y la solución de los problemas a resolver en este trabajo y de proponer otros que quedan abiertos para resolver sobre la Geometría Elemental Plana del Triángulo, vamos a dar unas citas de matemáticos en las que nos descubren, la intuición, para dar rienda suelta a la imaginación, que nos lleva a la creación, mediante la proposición de problemas y de conjeturas o cuestiones dentro del quehacer matemático. Para todos los problemas que nos proponemos aquí sin resolver el reto será el encontrar la solución si la hay. Para la conjetura o cuestión será el encontrar la demostración o la prueba, o la refutación de la misma con un contraejemplo.

En estas citas están reflejadas las vivencias en Matemáticas por parte de todos los matemáticos que las han escrito :

"*The heart of mathematics is its problems" (P. Halmos)*

"What of marvel that so simple a figure as the triangle is so inexhaustible in its properties. (A.L.Crelle, 1821)

"Problems worthy of attack, prove their worth by hitting back" (P.Hein)

"If you cannot solve a problem, then there is an easier problem you cannot solve: find it" (G. Polya)

"Cada problema que resolvemos se convierte en un regalo que sirve posteriormente para resolver otros problemas" (R. Descartes)

"Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero en la solución de todo problema, hay un cierto descubrimiento. El problema que se plantea puede ser modesto; pero, si pone a prueba la curiosidad que induce a poner en juego las facultades inventivas, si se resuelve por propios medios se puede experimentar el encanto del descubrimiento y el goce del triunfo" (G. Polya)

"El juego y la belleza están en el origen de una gran parte de las matemáticas. Si los matemáticos de todos los tiempos se lo han pasado tan bien jugando y contemplando su juego y su ciencia ¿ por qué no tratar de aprenderla y comunicarla a través del juego y de la belleza" (M. de Guzmán)

En todo lo que sigue suponemos conocidos toda la Geometría y Trigonometría Plana Elemental y la Trigonometría que se imparte en la enseñanza secundaria, en particular, la Geometría del Triángulo y los teoremas más importantes sobre el mismo, tales como los teoremas de los senos, de los cosenos o teorema de Pitágoras generalizado, de las tangentes, de las bisectrices, de las medianas, etc. Y, también las relaciones trigonométricas más usuales entre ángulos, y sus aplicaciones para calcular los elementos notables, tales como:

Las medianas, las bisectrices, las alturas, el perímetro, el área, y el radio r del círculo inscrito al triángulo, cuyo centro es el punto donde se cortan las bisectrices interiores, llamado incentro, y este círculo inscrito es, tangente a los lados del triángulo. Asimismo, denotamos por R, el radio del círculo circunscrito cuyo centro punto donde se cortan las mediatrices de los lados, y, este círculo pasa por los tres vértices del triángulo.

Además, conviene observar que un triángulo rectángulo se puede considerar como el caso límite de muchos de los resultados que se puedan obtener de los resultados y relaciones que, encontremos entre los elementos geométricos de los triángulos oblicuángulos (véase [13]).

Algún lector se podría preguntar cómo se le puede ocurrir a un profesor en el aula en cualquier nivel educativo, intentar emplear la vena creativa que se basa en usar la intuición y la imaginación para crear y proponer algún tipo de problema, o cualquier cuestión con el objeto y fin de lograr que la enseñaza que imparte y del aprendizaje que espera por parte de sus alumnos –su educación matemática- sea lo más fructífero para ambos. El binomio de una buena enseñanza y aprendizaje creativo pueden llegar a ser una de las claves que pueda conseguir que los alumnos no tengan miedo a adquirir una buena educación matemática.

Acaso, ¿un docente de cualquier educativo no se plantea como un reto y un acicate de toda su labor ser un modesto creador e investigador -una forma bella de innovar- cómo una parte sustancial de su labor de docente?

¿Por qué en los problemas que proponemos aquí aparece la relaciones propuestas y no otras?. Podríamos contestar que esto se inspira en el estudio y la lectura de otras experiencias e investigaciones de otros matemáticos que aparecen en los libros y en las revistas de muchos países extranjeros que ya tienen esta tradición durante muchos años Como también, en la imaginación e intuición que cada ser humano tiene al realizar su actividad humana y profesional (véase la bibliografía).

Problema 1. *Sea el triángulo T=ABC, de lados, a=BC, b=AC y c=AB. Denotemos por h=AH, la altura correspondiente al lado a, por n=BH, y m=HC, las proyecciones perpendiculares de los lados b y c, respectivamente, sobre a. Probar que bn+ cm=h(b+c) si y solo si A = 90.*
Solución: Deducimos de la relación dada, la siguiente expresión,

$$d = b\,n + c\,m - h\,(b + c) \qquad (1)$$

En la figura 1, obtenemos de los triángulos *ABH* y *AHC,* rectángulos en el vértice *H,* lo siguiente:

$$n = c\ Cos\ B,\quad m = b\ Cos\ C,\ y,\ h = b\ Sen\ C \qquad (2)$$

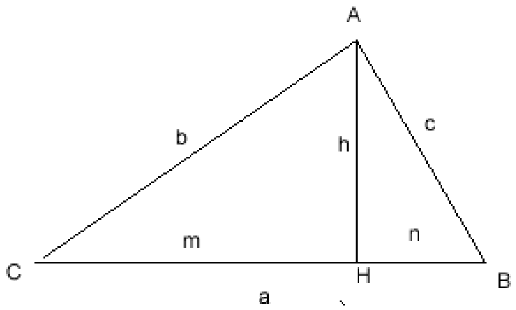


Figura 1

Aplicamos algunas fórmulas trigonométricas, tales como el Teorema de los Senos y las que transforman en productos las expresiones

$$Sen\ A + Sen\ B,\ Cos\ A + Cos\ B,\ Cos\ A + Sen\ A$$

$$Cos\frac{A}{2} - Sen\frac{A}{2} = \sqrt{2}Sen(45 - \frac{A}{2})$$

para llegar desde las relaciones (*1*), *(2)*, a las siguientes expresiones :

$$d = b\ n + c\ m - h(b + c) = b\ c\ Cos\ B + b\ c\ Cos\ C - (\ b+c)\ b\ Sen\ \ C =$$

$$= 2\ R\ b\ Sen\ C\ (\ (\ Cos\ B + Cos\ C)-(Sen\ B + Sen\ C)) =$$

$$= 2RbSenC\left[2Cos\frac{B+C}{2}Cos\frac{B-C}{2} - 2Sen\frac{B+C}{2}Cos\frac{B-C}{2}\right] =$$

$$= 4RbSenCCos\frac{B-C}{2}\left(Cos\frac{B+C}{2} - Sen\frac{B+C}{2}\right) =$$

$$= 4RbSenCCos\frac{B-C}{2}(Cos\frac{180-A}{2} - Sen\frac{180-A}{2}),$$

$$d = 4RbSenCCos\frac{B-C}{2}(Sen\frac{A}{2} - Cos\frac{A}{2}),$$

$$d = -4\sqrt{2}RbSenCCos\frac{B-C}{2}Sen(45 - \frac{A}{2}).$$

Ahora bien, observemos que la expresión de d que viene dada como producto de factores de números reales en los que, por hipótesis, son todos positivos salvo posiblemente el factor Sen(45- A/2). Estudiando su signo obtenemos:

$$d < 0 \Leftrightarrow \frac{A}{2} < 45 \Leftrightarrow A < 90 \qquad (3)$$

$$d = 0 \Leftrightarrow \frac{A}{2} = 45 \Leftrightarrow A = 90$$

$$d > 0 \Leftrightarrow \frac{A}{2} > 45 \Leftrightarrow A > 90.$$

De esta forma no sólo hemos probado el resultado enunciado en el problema 1, sino que a través el cálculo que hemos hecho nos ha permitido generalizar el resultado del problema utilizando la desigualdad correspondiente para cualquier tipo de triángulos.

He aquí un problema interesante a plantear para investigar y resolver en el aula:

<u>Problema 2</u>: a) dar demostraciones más simples, breves y elegantes de la dada en este trabajo. Por ejemplo, intentar buscar una demostración dentro de la geometría sintética; b) buscar el significado geométrico de esta relación, a la expresión d =b n + c m – h(b + c) en todo tipo de triángulos; c) dar demostraciones sin palabras de la relación propuesta, en el sentido general, aquí resuelto.

Del siguiente problema, que aparece propuesto en las páginas 88-89 de [3], daremos la solución resumida de su apartado i).

<u>Problema 3</u>: En un triángulo ABC rectángulo en A, se traza la altura AD, y los segmentos DE, DF perpendiculares a AB y AC. Siendo m =BE, n = CF, h = AD, establecer las siguientes relaciones:

$$\textit{i)}\quad \sqrt[3]{m^2} + \sqrt[3]{n^2} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$\textit{ii)}\quad 3h^2 + m^2 + n^2 = a^2 \qquad (4)$$

$$\textit{iii)}\quad amn = h^3$$

Solución de i): De acuerdo con la figura 2, sean *b´, c´* las proyecciones de los lados *b, c* sobre la hipotenusa a.

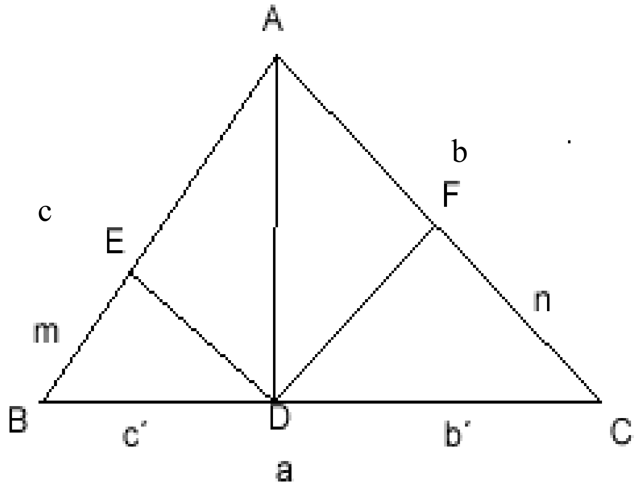


Figura 2

Como los triángulos *BDE, BCA* son semejantes tenemos $\frac{m}{c} = \frac{c'}{a}$; de otra parte, sabemos que $c^2 = ac'$ (teorema del cateto), y por lo tanto, al eliminar c' entre las dos relaciones anteriores, resulta $m = \frac{c^3}{a^2}$, de donde:

$$c^2 = \sqrt[3]{a^4 m^2}$$

y, de forma análoga, obtenemos

$$b^2 = \sqrt[3]{a^4 n^2} \qquad (5)$$

Como el triángulo *ABC* es rectángulo en *A*, se tiene $b^2 + c^2 = a^2$ (teorema de Pitágoras) y al sustituir b^2, c^2 por *(5)*, se llega a :

$$\sqrt[3]{a^4 m^2} + \sqrt[3]{a^4 n^2} = a^2 = \sqrt[3]{a^6},$$

de donde al simplificar llegamos la relación que aparece en i). De modo análogo se prueban los otros dos apartados (véase [3]).

A partir del problema 3, proponemos para resolver el problema abierto siguiente:

Problema 4: a) averiguar si las relaciones anteriores son lógicamente equivalentes entre si y, éstas, caracterizan los triángulos rectángulos; b) averiguar si se podrían obtener estas mismas caracterizaciones para los triángulos acutángulos y obtusángulos con las desigualdades que se correspondan en cada miembro de las relaciones i), ii) y iii), según cada caso, respectivamente.

Vamos ahora a resolver el siguiente problema como una muestra de creación, investigación e innovación educativa en el aula, en las dos vertientes principales y fundamentales para adquirir una buena educación matemática: la metodológica y la didáctica.

Problema 5: Sea ABC un triángulo de lados a, b y c, y, de ángulos opuestos, A, B y C, respectivamente. Denotamos por h = AD, m = BE y n = FC, siendo E y F las proyecciones ortogonales de D sobre AB y AC. Demostrar que $e = a^2 - 3h^2 - m^2 - n^2$ *es mayor , igual o menor que cero si y sólo si el ángulo A es mayor, igual o menor que 90.*

Con las notaciones del problema 2, de acuerdo con la figura 2 y considerando los triángulos rectángulos correspondientes de la figura y el teorema de los senos, se tiene:

$$a = b' + c', \quad h = c' \ tg\, B = b' tg\, C, \quad m = c' \, CosB, \quad n = b' \, Cos\, C,$$

$$c' = c \ \ Cos\, B = 2\, R\, Sen\, C\, Cos\, B, \ \ b' = 2R\, Sen\, B\, Cos\, C\,. \qquad (6)$$

Si en la expresión de e, sustituimos las relaciones anteriores, llegamos a:

$$\begin{aligned} e = a^2 - 3h^2 - m^2 - n^2 &= (b'+c')^2 - 3b'c'TgBTgC - c'^2Cos^2B - b'^2Cos^2C = \\ e &= b'^2(1 - Cos^2C) + c'^2(1 - Cos^2B) + b'c'(2 - 3TgBTgC) = \\ &= -4R^2 SenBSenCCosA[2 + SenBSenCCos(B - C).] \end{aligned} \qquad (7)$$

De la misma forma que la expresión obtenida antes para *d*, en el problema 1, era un producto de factores, a la expresión *(7)* para *e*, le sucede lo mismo, y en este caso su signo depende del factor *Cos A* . Es decir, de la clase del triángulo que estemos considerando, según la clasificación de los mismos por los ángulos.

Por consiguiente concluimos: *e*, es mayor, igual o menor que cero, si y sólo si *Cos A* es mayor, igual o menor que cero. Esto es: *e,* es mayor, igual, o menor que cero si y sólo si A es mayor, igual o menor que 90. El problema queda así completamente resuelto.

Problema 6: Dado el triángulo ABC, de lados a, b y c, y de ángulos opuestos a ellos α, β y γ, respectivamente, se verifica:

$$si \quad a < \frac{b+c}{2}, \quad entonces \quad \alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}.$$

La solución a este problema, debida a G. Polya y A. Hess, [14], aparece publicada en la revista Elemente der Mathematik, 13(1958), 88, pág. 35, en el epígrafe de la sección 3 (Inequalities for the angles and other elements of a triangle).

Conclusiones

En este trabajo hemos visto cómo se crea y se resuelve un problema, Y, como al hacer la resolución hemos observado que, de acuerdo con los cálculos realizados, podemos plantear y generalizar un problema. Otra de las cosas que hemos observado y comentamos es que, cuando la vena creativa surge en cualquier momento, y sobre todo, al leer en libros o en publicaciones antiguas o recientes , algunos de los problemas o cuestiones que en ellos están , nos pueden inspirar a su vez, para crear problemas o cuestiones, utilizando un poco de imaginación e intuición para ese empeño.

El problema 6 que hemos dejado al lector es una muestra de cómo grandes matemáticos en todas sus facetas de su quehacer matemático, como lo era, G. Polya, como uno de los muchos ejemplos, también estaba embarcado en la aventura de proponer y resolver problemas sencillos, como él dice en una de las reflexiones que hemos citado aquí.

Para enseñar a los alumnos a ser creativos en el aula, y en su vida, también debe serlo el profesor que les enseña, y les educa, en cualquier disciplina o materia que les imparta para su educación y formación. El intentar vivir la aventura de la creatividad de un problema, o de una cuestión en la clase de Matemáticas, es siempre un reto inolvidable para el profesor y los alumnos que viven y sienten esa experiencia, tanto cuando resuelven o refutan el problema o la cuestión que se han propuesto.

Bibliografía

[1] Dorrie, H; *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, Publications, NY, 1989.

[2] de Guzmán Miguel*, Experiencias de Descubrimiento en Geometría,* Nivola, Madrid, 2002.

[3] Caronnet, Th*., Exercises de Géométrie,* Gauthier, París, 1946

[4] Hadamard, J*, The Psychology of invention in the Mathematical Field,* Dover, NY, 1954.

[5] Marie, F.G, *Exercises de Géométrie*, 1920, y reeditado por Editions Jacques Gabay, Paris, 1991.

[6] René et Ivonne Sortais, *La Géométrie du triangle*, Herman,París, 1996.

[7] Polya, , *Matemáticas y Razonamiento Plausible*,Tecnos,Madrid, 1966.

[8] Polya, G, *Cómo plantear y resolver problemas*, Trillas, México, 1979

[9] Lakatos, I, *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento en Matemáticas,* AU, Alianza, Madrid, 1983.

[10] Pottage, J*, Geometrical Investigation, Illustrating The Art Discovery in The Mathetmatical Field,* Addison Wesly, 1983.

[11] Curcio, F.R., *Teaching of Learning, A Problem-Solving Focus, NTCM,* Reston, 1987.

[12] Larson, L.C*., Problem-Solving through Problems*, Springer,NY, 1983.

[13] Coxeter, H,S.M y Greitzer, S*., Revisited Geometry*, 19, MAA, Washington, 1967.

[14] Bottema, O, y otros, *Geometric Inequalities*, Wolters, Groningen,1969

[15] de Guzmán, Miguel, *Aventuras Matemáticas; Para pensar mejor*, Labor, Barcelona, 1986 y 1991; *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas,* Anaya, Madrid, 2004

[16] Polya, G**.,** *Mathematical Discovery: On Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving,* Vols. 1, y 2, Wiley, NY, 1962

[17] Poincaré, J.H., *Mathematical Creation,* Halsted, NY, 1908.

[18] Kay, D.C, *College Geometry, A Discovery Approach with The Geometer´s Sketchpad*, Addison Wesley, NY, 2000.

[19] Coxeter, H.S.M. *Introduction to Geometry,* Wiley, NY, 1969.

[20] Stanley, R.C, y otros,*Geometría con aplicaciones y soluciones de problemas,* Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1989.

[21] Eves, H**.,** *Estudios de las Geometrías, Vols.1,2,Uteha,México,1975.*

[22] Mitrinovic, D.S. y otros, *Recent Advances en Geometric Inequalities*, Kluwer, Dordrecht, 1989.

[23] Marion , W.y Brown, S.*The Art of Problem Posing,*Hillsdale, NJ, 1983

Razones para estudiar historia de la matemática

Ricardo Moreno Castillo
I.E.S. Gregorio Marañón
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid.
moreno.castillo@terra.es

Abstract

This article tries to give reasons that support the necessity of creating departments of history in the schools of mathematics, in order to improve its teaching and to create lines of research. This way, the mathematician who would like to prepare a doctoral dissertation on history could defend it without problems and would not have to go, as nowadays, to the faculty of philosophy, as a political prosecuted.

Miguel de Guzmán, desde siempre, me recordó al protagonista de Kim, la célebre novela de Rudyard Kipling. ¿Y qué tendrá que ver, se preguntarán ustedes, Miguel de Guzmán con un pilluelo que recorría medio en cueros los suburbios de las ciudades de la India? Pues tiene que ver porque este pilluelo era conocido con el apodo de "el amigo de todo el mundo". Y utilizo la palabra amigo siguiendo una definición que leí hace mucho tiempo y desde entonces hice mía para siempre: un amigo es alguien que siempre tiene tiempo para ti cuando llegas. Y no sé de nadie que, habiéndose acercado a Miguel de Guzmán buscando consejo, bibliografía o asesoramiento, se haya encontrado una respuesta del género "estoy ocupado", "ya veremos", "más adelante". No, Miguel siempre tuvo tiempo para cualquiera que se llegara hasta él. Por eso merece ser llamado "el amigo de todo el mundo", igual que Kim, el personaje creado por Kipling.

1. La historia de la matemática ¿un lujo o una necesidad?

Las reflexiones que vienen a continuación están ilustradas con ejemplos de la historia de la matemática, pero son válidas para justificar el estudio de la historia de cualquier ciencia, y también el de la historia de la ciencia en general.

Tres son, a mi parecer, las razones fundamentales que hacen necesario un curso de Historia de la Matemática en nuestras facultades. La primera, que lo que enseñamos a los estudiantes son, las más de las veces, productos manufacturados. La teoría de cuerpos, tal como la explica hoy un tratado de álgebra, está tan lejos de las ideas esbozadas por Abel y Galois como lo está el bonito en conserva del bonito recién salido del mar. Los conceptos subyacentes son los mismos, como lo son las propiedades nutritivas del pescado, pero bueno es que los muchachos de tierra adentro sepan que el bonito no se cría en las latas de conserva. La existencia de un puente entre las estructuras algebraicas y las ecuaciones algebraicas es ignorada, no ya por muchos estudiantes, también por profesores competentes que se especializaron en otras cosas y no volvieron sobre el álgebra de la carrera. Los ejemplos pueden multiplicarse. Se estudian grupos abstractos sin haber tenido ocasión de manejar grupos concretos, hay quien se inicia en los anillos cociente y los cuerpos finitos antes de trabar conocimiento con las congruencias, y no es difícil encontrar estudiantes con muy poca idea de geometría plana y del espacio pero que alcanzaron una buena calificación en el examen de espacios vectoriales. Podemos bajar el nivel, pero la situación sigue siendo escasamente estimulante: pocos alumnos conocen el origen de nuestro sistema de numeración, ni por qué medimos el tiempo con unidades sexagesimales, y la mayoría desconoce la etimología de las palabras “álgebra” o “cálculo”.

Se puede argumentar que esto es casi inevitable. Un profesor puede esbozar la génesis de una teoría matemática antes de pasar a desarrollarla, pero recorrer todas las etapas hasta su estado actual puede llevar más tiempo que el que se tarda en exponerla directamente y con notación moderna. Si aceptamos este razonamiento, con todas las reservas que sean del caso, resulta meridianamente clara la necesidad de una asignatura en la que se explique la gestación de los conceptos y las teorías más habitualmente manejadas por los estudiantes.

La segunda razón es que, estudiando el pasado, además de historia, se aprende modestia. En algunas ocasiones, cuando nos explican algo por primera vez, nos parece algo muy fácil, que a cualquiera se le podían haber ocurrido, y luego la historia nos enseña que ha sido el resultado de siglos de trabajo. Otras, nos encontramos con una idea genial que nos hace sentir muy ufanos de la época en que vivimos, y después nos enteramos de que ya era conocida por los griegos. Y en cualquier caso, siempre que entendemos algo es porque alguien ha creado una notación adecuada para que fuera inteligible. El estudio de textos antiguos es muy formativo, no solo por el esfuerzo mental que supone, también porque nos enseña hasta qué punto somos dependientes de un lenguaje y una notación que no hemos inventado nosotros. La humildad intelectual es necesaria para el futuro investigador, que debe saber el trabajo que supone descubrir algo nuevo (aunque quien lea ese resultado nuevo no siempre se percate del esfuerzo que ha costado encontrarlo) y también para el futuro profesor, que debe transmitirla a sus alumnos.

La tercera consiste en que el estudio de la historia es un buen campo para vislumbrar el parentesco de unas ciencias con otras. Las distintas disciplinas se han independizado de su cepa común no hace mucho, pero la relación entre ellas se ha oscurecido en muy poco tiempo. Si no queremos perderla de vista y que los estudiantes la conozcan, no hay más solución que mirar hacia atrás. Y este problema afecta sobre todo a los estudiantes de matemáticas: los biólogos han de saber química, los químicos, física, y los físicos, matemáticas. Pero el matemático crea su propio objeto de estudio y puede trabajar en él ignorando todo lo demás, aunque sea resolver una ecuación diferencial que le haya propuesto un colega físico. Una vez resuelta, lo que haga con la solución el físico le trae sin cuidado al matemático. La especialización es indispensable, y a ella debemos el extraordinario progreso científico de los últimos cien años, pero tampoco debe ser demasiado temprana. Para una formación integral de los estudiantes, la posibilidad de escoger materias de libre configuración es buena, pero la existencia de la asignatura de Historia de la Matemática, en la que inevitablemente hay que hablar de la de la física y la astronomía, es indispensable.

Aludí antes a tres razones fundamentales. Se pueden añadir dos más, si bien secundarias. Una de ellas es que una asignatura de Historia de la Matemática se puede utilizar también para paliar la casi enciclopédica ignorancia que los alumnos tienen de geometría clásica. Ésta es una ventaja coyuntural, porque el plan de estudios del bachillerato puede cambiar (y es de desear que lo haga pronto para superar algunas deficiencias como la aludida) pero entretanto, bienvenida sea toda posibilidad de proporcionar a los estudiantes una base de la cual carecen. La segunda razón es la posibilidad que brinda la historia de acercarse a la ciencia en sus personajes en cuanto que son seres humanos, con sus prejuicios, sus limitaciones y sus debilidades. No es necesario desmitificar a ningún genio, ni hacer caer a ningún ídolo, más bien se trata de dejar ver cómo la valía científica no convive necesariamente con una personalidad humana excepcional.

2. Cómo se debe estructurar un programa de Historia de la Matemática

La Historia de la Matemática tiene dos etapas bastantes diferenciadas: antes y después del Renacimiento. El estudio de cada una de ellas se debe estructurar de manera diferente. En la primera, cada tema o capítulo ha de corresponder a una civilización. Esto es posible porque cada una de ellas es un mundo relativamente cerrado. Por mucho que Tales y Pitágoras viajaran por Egipto y Babilonia, que la matemática árabe sea en parte deudora de la hindú y que la frontera entre los mundos cristiano e islámico fuera muy permeable, hay pocas dudas sobre el lugar en el que se ha de encuadrar cada descubrimiento. Pero a partir del Renacimiento, los matemáticos sabían unos de otros gracias a la imprenta, a las comunicaciones y a una mayor estabilidad política, y todos pertenecían ya a la llamada cultura occidental. Hay entonces dos alternativas: organizar los capítulos por épocas o por temas. La segunda es más razonable. Estudiar por épocas obligaría a hablar en un mismo capítulo de geometría, cálculo y teoría de números (por ejemplo) y a dejar en suspenso muchas cosas para retomarlas en el capítulo siguiente, en el que se volvería a hablar de geometría, cálculo y teoría de números. Es cierto que los límites entre las distintas ramas de la matemática son a veces un tanto difusos, pero los criterios para encuadrar a matemáticos que han vivido a caballo entre dos siglos lo son más todavía. Mejor que aparezca un mismo nombre en diversos momentos del curso que desperdigar el álgebra para estudiar en un mismo lugar la obra de un matemático o de una cierta época histórica.

Otra razón avala esta distribución. Es la libertad de escoger unos temas y dejar otros cuando la falta de tiempo o el tipo de alumnos así lo aconseje. Se puede dar una lección de historia de la geometría proyectiva, otra de historia del cálculo, y dejar de dar la de la geometría algebraica, pero no se puede explicar la historia de la matemática en los siglos XVII y XIX saltándose la del XVIII. Si la historia de la matemática a partir del Renacimiento es una asignatura de segundo ciclo (como sucede en la Universidad Complutense), se puede aprovechar para llenar las carencias de los alumnos procedentes de haber escogido unas asignaturas y no otras. Por ejemplo, si la mayoría no están matriculados en la asignatura de estructuras algebraicas, bueno será que se les cuente la historia de las ecuaciones algebraicas entre los siglos XVII y XIX para que no se licencien ignorando lo que es el grupo de Galois de una ecuación. Si ocurre lo contrario, y la mayoría están decantados hacia la geometría y el álgebra, será más importante hablarles de la historia del análisis y de las ecuaciones diferenciales. No estaría de más que, una vez explicadas algunas cosas imprescindibles, se consulte la opinión de los estudiantes para saber qué temas les pueden despertar más interés que otros. En cualquier caso, estas posibilidades de diálogo y elección serían más pequeñas si la materia estuviera organizada cronológicamente.

3. La Historia de las Matemáticas y otras disciplinas

No se trata de señalar ahora la multitud de ocasiones en que se pueden (y deben) contar cosas de física o química en un curso de historia de las matemáticas, sea cual fuere el público al cual va dirigida. Esto se da por descontado. Se trata de hablar de textos filosóficos y novelas históricas cuya lectura sería aconsejable para los alumnos. Empezaremos por las segundas.

La novela histórica falsea en parte los hechos, eso es verdad. La idea que alguien de nuestra generación tiene de la Edad Media es la que nos legaron Walter Scott y otros escritores románticos. Con todo, la literatura histórica puede hacer vivir al lector el ambiente de una época mejor que un tratado de historia, y siempre se lee con más gusto. Es cierto que hay libros de historia divulgativos y amenos (pensemos en los de Isaac Asimov) pero es más posible que los alumnos hagan caso si se les anima a leer un relato que un libro de historia, por entretenido que éste pueda ser. Unos pocos ejemplos bastan para ilustrar lo que se acaba de decir. El antiguo Egipto está muy bien representado en la novela *Sinuhé el Egipcio,* de Mika Waltari. Sobre el mundo griego existe *Creación*, una espléndida narración de Gore Vidal, entre cuyos personajes están el filósofo atomista Demócrito de Abdera y otros sabios del mundo clásico. Sobre la ciencia islámica, merecen ser leídas *El médico de Córdoba*, de Herbert le Porrier, y *Samarcanda*, en la que el libanés Amin Malouf novela la vida del poeta y matemático Omar Jayyam. El encuentro en España de las ciencias cristiana e islámica y el mundo de los traductores está muy bien contado en *El salón dorado*, de José Luis Corral Lafuente, y en *La copista del Rey Sabio*, de la neozelandesa Yael Guiladi. También sobre este ambiente se puede leer *Los pilares de la tierra*, de Ken Follet. En cambio, el encuentro de ambas culturas en Sicilia puede verse en *El hombre de Apulia*, de Horst Stern, cuyo protagonista es el emperador Federico II de Sicilia, hombre culto y conocedor de la matemática árabe. La ciencia del siglo XIV, cuando ya empezaba a apuntar el Renacimiento, está magníficamente reflejada en *El nombre de rosa*, del italiano Umberto Eco. Las tribulaciones de un alquimista del siglo

XVI están narradas en *Opus Nigrum*, de la escritora francesa Marguerite Yourcenar. Los problemas de los científicos ilustrados se pueden encontrar en una autobiografía novelada de Buffon, escrita por Domínguez Romero, titulada *Las confidencias del conde de Buffon*. Para terminar citaré *El caso del anillo de los filósofos*, de Randall Collins, entre cuyos personajes están los matemáticos Bertrand Russell, Gotfrey Hardy y Srinivasa Ramanujan, y *Los crímenes de Oxford*, de Guillermo Martínez, en el que la intriga policíaca va entremezclada con claves matemáticas.

En cuanto a los textos filosóficos, se podría citar el *Timeo*, donde mejor se explican las ideas matemáticas de Platón. En él se inspiró Heisenberg para sus reflexiones sobre la física cuántica, según cuenta en sus *Diálogos sobre física atómica*, libro de muy grata e instructiva lectura. El *Discurso del Método* tiene interés porque el pensamiento filosófico de Descartes va de la mano con su pensamiento matemático. Se puede recomendar su lectura completa, pero si esto no fuera posible, por la obligación de los estudiantes de atender a otras materias, sí se podrían seleccionar algunos fragmentos para ser comentados en clase. Lo mismo puede hacerse con el *Tratado de la Naturaleza Humana*, de Hume, o la *Crítica de la Razón Pura* (cuya lectura completa es altamente desaconsejable para quien no sea alumno de filosofía o no tenga un especial interés por Kant). Estos son tan solo unos pocos ejemplos, pero se podrían aportar muchos más.

4. La historia de la matemática española

Es un tópico el decir que España no dio grandes matemáticos. Y es cierto que ningún español hubo comparable a Euler, Gauss o Poincaré. Pero una cosa es constatar la falta de grandes matemáticos y otra afirmar la total ausencia de actividad matemática. Y aquí se hicieron cosas que merecen ser conocidas por nuestros alumnos. Por varias razones

La primera es que, más o menos importantes, aparezcan con letras grandes o pequeñas en los textos extranjeros, forman parte de la historia de nuestro país. Pocos estudiantes conocen el nombre de José Rodríguez, quien calculó el achatamiento de la tierra con una precisión que en sus tiempo pasó por la mejor, ni el de Durán Loriga, autor de notables trabajos sobre geometría del triángulo, ni el de Pedro Núñez, gran cosmógrafo e inventor de un instrumento de precisión, ni saben que el padre Feijoo, como tantos otros ilustrados, estaba interesado por la matemática. Los nombres de Rey Pastor y Santaló les suenan a nuestros alumnos muy de pasada, pero casi todos ignoran las aportaciones que les debemos. No defiendo que se deje de hablar de algún matemático importante por hablar de matemáticos españoles, pero sí que se puede usar la matemática española como material didáctico. Y esto nos lleva a la segunda razón.

Antes aludí a lo formativo de estudiar y comentar textos antiguos. Y para ello la matemática española sí suministra material aprovechable. Tenemos el tratado de álgebra del citado Pedro Núñez, en cuyo apéndice hace unas reflexiones sobre la fórmula de Tartaglia, los textos matemáticos de Feijoo, la teoría de Galois expuesta por Echegaray en 1896 o por Barinaga en 1932, y multitud de trabajos sobre geometría clásica, unos con resultados nuevos, y otros que reflexionan sobre teoremas antiguos o aportan nuevas demostraciones de ellos.

La tercera es que proporciona temas de investigación, pues hay en ella todavía cosas por historiar. Y hay algo más. Dentro de poco la lengua madre de un alto porcentaje de nuestros alumnos será el árabe, lo cual significa que muchos profesores tendrán que aprenderlo. Esto, con ser engorroso, tiene dos ventajas. Una, recuperar el multiculturalismo perdido en el siglo XVI. La otra, que esos profesores que aprendan árabe estarán en condiciones óptimas para trabajar sobre los manuscritos científicos medievales que se acumulan en nuestras bibliotecas, muchos de ellos todavía sin estudiar. He aquí una magnífica cantera para realizar tesis doctorales a caballo entre la matemática, la filología y la historia.

Conclusiones

Es de desear, pues, que la historia deje de ser una hermana menor en las facultades de matemáticas y sea materia de investigación, como lo es en tantas universidades extranjeras, donde existen departamentos de Historia de la Matemática, y que quien quiera dedicarse a ella pueda hacerlo sin encontrar más dificultades que la propia complejidad del estudio. Y bueno es que sepa cuales son esas dificultades. Dar a conocer algún aspecto desconocido de la historia de la matemática es menos espectacular que crear un nuevo teorema, pero el número de horas de trabajo para dar con el documento que avale la afirmación del historiador puede ser tan grande como el invertido por el matemático puro para llegar a su resultado. Y si el documento es un manuscrito, el ingenio que necesita el historiador para transcribirlo y descifrarlo es comparable al que se necesita para elaborar el teorema. Es cierto que para llegar a un resultado se ha de estudiar un tema muy específico hasta alcanzar la frontera de lo desconocido, y esto es un trabajo duro. Pero en cambio el historiador necesita una erudición matemática de la cual está exento el especialista. Y debe también conocer, bien sea por encima, las teorías más importantes de la física, así como las corrientes filosóficas que acompañaron a las revoluciones matemáticas. Y esta erudición solo se alcanza después de muchos años, años de estudio y esfuerzo que no se van a reflejar en publicaciones.

Referencias

[1] Barceló, B. (1997), "El uso de la historia de las matemáticas en clase: el ejemplo de la cartografía y la navegación", en *Tarbiya*, nº 15, págs. 65-77.

[2] Barrio Gutiérrez, J. (1986), "Las Matemáticas y los filósofos" en *Boletín de la Sociedad de "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, nº 9, págs. 21-31.

[3] Boero, P. (1989), "Utilización de la Historia de las Matemáticas en clase con alumnos de 6 a 13 años", en *Suma*, nº 2, págs. 17-28.

[4] Garma Pons, S. (1979), "Metodología e Historia de las Matemáticas", en *Anuario Jurídico*, nº 11, págs. 327-342.

[5] González Urbaneja, P. M. (2004), "La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza", en *Suma*, nº 45, págs. 17-28.

[6] Lupiáñez Gómez, J. L. (2002), "Reflexiones didácticas sobre la Historia de la Matemática, en *Suma*, nº 40, págs. 59-63.

[7] Martínez Pérez, M. (1995), "La Historia de la Matemática como recurso didáctico" (1ª parte), en *Boletín de la Sociedad de "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, nº 39, págs. 67-78.

[8] Martínez Pérez, M. (1997), "La Historia de la Matemática como recurso didáctico" (2ª parte), en *Boletín de la Sociedad de "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, nº 46, págs. 30-44.

[9] Mejuto Couce, J. y Puig Mosquera, L. (2003), "Volvendo a vista atrás", en *Gamma*, nº 3, págs. 52-61.

Reseña de libros

JUAN MIGUEL SÁNCHEZ y ANTONIO SOUTO: *Problemas de cálculo numérico para ingenieros con aplicaciones de MATLAB*. Ed. McGraw-Hill, Madrid, 2005. Colección Schaum. XIV + 410 páginas.

Los autores, doctores Ingenieros Navales y Profesores del Área de Matemática Aplicada de la Escuela Superior de Ingenieros Navales de la Universidad Politécnica de Madrid, nos ofrecen este interesante libro, fruto de una larga experiencia docente e investigadora en la citada Escuela.

Lo hacen en el marco de los conocidos textos *Schaum*, que todos venimos utilizado en nuestros estudios desde hace muchos años, conservando su tradicional formato: problemas clasificados en capítulos, por materias, cada uno precedido de un resumen de las teorías pertinentes, que incluye las definiciones, teoremas clave y métodos más importantes, y que resulta suficiente, en general, para abordar los problemas que se proponen a continuación; estos están ordenados por su progresiva dificultad y acompañados de su resolución.

La larga experiencia docente de los autores les hace conscientes de lo estéril que resultaría el libro, si se limitase a dar una colección de métodos, escogidos entre los innumerables que ofrecen los tratados de cálculo numérico e ilustrar cada uno con un problema resuelto que lo utilice. Por ello, a lo largo de todo el libro, han hecho especial hincapié en los criterios para la elección del método adecuado a cada problema y, si se usan varios, en la comparación crítica de los resultados obtenidos con ellos, tanto en la precisión alcanzada como en el esfuerzo de cálculo requerido.

Hoy día sería inconcebible iniciar a los alumnos en el cálculo numérico sin el uso de las herramientas informáticas disponibles. Para la resolución de los problemas estudiados en este libro, los autores han escogido el programa MATLAB, que actualmente es de uso casi estándar en muchas ramas de la Ingeniería, resulta muy eficiente y su manejo es fácil de aprender. Con objeto de no crear dificultades a los alumnos que no lo sepan utilizar, el libro incluye, como uno de sus apéndices, un tutorial de este sistema, que en 17 páginas les suministra información suficiente para desenvolverse cómodamente en sus aplicaciones. Este tutorial incluye numerosos ejemplos y ejercicios.

Las materias tratadas en el libro son las siguientes: resolución de ecuaciones no lineales; resolución de sistemas lineales; interpolación; aproximación de funciones; integración y diferenciación numéricas; problemas de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias; y ecuaciones en derivadas parciales de primer y segundo orden: métodos de diferencias finitas; aparte del citado tutorial de Matlab.

Creemos que este libro resultará de valiosa ayuda para los alumnos que deseen conseguir la formación en cálculo numérico que hoy día resulta imprescindible para acometer cualquier trabajo de investigación o diseño en las ingenierías.

J. F. B.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo “article” y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

**35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,
52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65,66, 67, 68, 69, 70 y 71.**

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número

3025-0006-24-1400002948,

al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

**Caja de Ingenieros,
c/. Carranza, 5
Madrid-28004**

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

– la dirección a donde se han de enviar
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.

BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN EN LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

D. ....Teléf.: ....
Dirección: ....
Ciudad: ....Cod. Postal: ....E-mail: ....
Centro de trabajo: ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco: ....
Dirección de la Sucursal: ....
para que cargue en mi cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 2005-2006 y siguientes.

Fecha: .... de .... de 2005

Firma:

La cuota anual está actualmente establecida en 33 euros (de ellos, 21 euros como cuota de la Sociedad «Puig Adam» y 12 euros como cuota de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, por la que se recibe la revista SUMA).
Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACIÓN EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha: .... BANCO: ....
Sucursal o Agencia: .... en: ....
Dirección de esta: ....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta : .... / .... / .... / .... /.
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad "Puig Adam", de profesores de Matemáticas hasta nueva orden. Les saluda atentamente:

Firma:

Nombre y Apellidos: ....
Dirección: ....
Remítanse ambas partes (toda esta página) a nuestra sede:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matematicas
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.