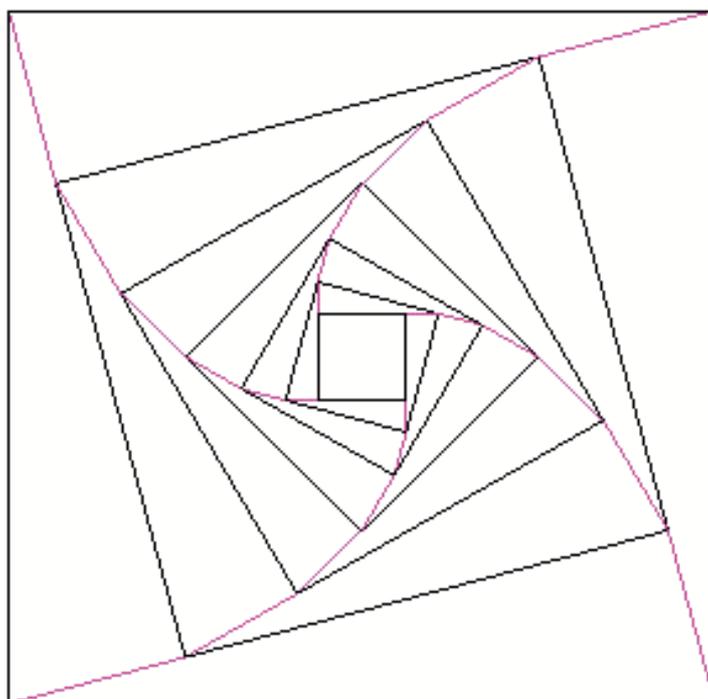


# **SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 70  
JUNIO DE 2005**

**Número especial dedicado al profesor Miguel de Guzmán**

## ÍNDICE

	<u>Págs.</u>
Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2005 .....	5
XLI Olimpiada Matemática Española, por <i>María Gaspar</i> .....	7
XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas, por <i>María Gaspar</i> .....	11
IX Concurso de Primavera de Matemáticas, por <i>Joaquín Hernández</i> .....	13
Cursos de Posgrado en Educación Matemática .....	15
Dedicatoria al Profesor Miguel de Guzmán de este número del Boletín ..	17
Introduction to Conics with Cabri 3D, por <i>Heinz Shumann</i> .....	18
Como homenaje a Miguel de Guzmán: Algunas reflexiones sobre edu- cación matemática, por <i>Baldomero Rubio Segovia</i> .....	34
Un método recursivo para construir cadenas de Steiner de circunferencias, por <i>E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano, F. Botana Ferreiro y J. Fernández Biarge</i> .....	47
Un problema usual de máximos y mínimos, por <i>Justo Cabezas Corchero y María de la Vega Vara Ganuza</i> .....	65
El problema del tablero mutilado: una resolución a través de perspicacia ( <i>insight</i> ), por <i>Antonio Hernando Esteban, Luis de Ledesma Otamendi y Luis M. Laita</i> .....	72
Una estrategia didáctica para incorporar un programa de cálculo simbó- lico en el aula de Matemáticas, por <i>Pedro Ortega Pulido</i> .....	80
Instrucciones para el envío de originales .....	93
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín .....	95
Boletín de inscripción .....	96

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en  
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews**

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).  
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)

C/ Rector Royo Villanova, s/n

28040 - Madrid

Teléf. y fax: 91 394 62 48

e-mail: [puigadam@mat.ucm.es](mailto:puigadam@mat.ucm.es)

Página web: [www.ucm.es/info/secdealg/puigadam](http://www.ucm.es/info/secdealg/puigadam)

## **JUNTA DIRECTIVA**

**Presidente:**

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

**Vicepresidentes:**

EUGENIO ROANES MACÍAS

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

**Vocales:**

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

ENRIQUE RUBIALES CAMINO

(Relaciones Institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

(Actividades y concursos)

**Secretario:**

JOSÉ MARÍA SORDO JUANENA

**Vicesecretaria:**

MARÍA GASPAS ALONSO-VEGA

**Tesorero:**

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

**Mantenedoras página web:**

BEATRIZ BARRERO DÍAZ

CAROLINA BRAVO SANZ

# Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2005 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, sita en la Ciudad Universitaria, a las 12 horas del día 2 de abril de 2005, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil cinco.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

## ORDEN DEL DÍA

### **1. Lectura y aprobación, si procede, del Acta de la sesión anterior.**

Se procede a la lectura del acta de la sesión anterior, que queda aprobada por unanimidad.

### **2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.**

a) Se han publicado los números 67 al 69 del Boletín de la Sociedad. Cabe señalar que de acuerdo con lo aprobado en la Asamblea anterior, se han publicado hasta dos números en homenaje a la Prof. María Paz Bujanda, con ocasión de su jubilación, al haberse recibido muchas colaboraciones.

b) El día 5 de junio se celebró la XXII edición del Concurso de Resolución de Problemas, en colaboración con el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados.

c) Como de costumbre se colaboró con la Real Sociedad Matemática Española en la organización de la fase local de la Olimpiada Matemática Española. Como novedad se introdujo la invitación expresa a determinados alumnos, lo que redundó en una participación muy superior a la de los últimos años. Los aspirantes de Madrid obtuvieron ocho medallas en la Fase Nacional, tres de oro, dos de plata y tres de bronce,

de modo que tres representantes madrileños acudirán a Cancún. Hay que señalar finalmente que la Olimpiada Internacional de 2008 se celebrará en España.

d) En el mismo orden de cosas, y con el éxito habitual, se celebró el Concurso Intercentros.

### **3. Informe del Tesorero.**

A la vista de la documentación aportada por D. Alberto Aizpún, Tesorero de la Sociedad, con los ingresos y gastos del ejercicio, y el saldo obrante en la cuenta, se acuerda mantener la cuota social en 33 euros.

### **4. Elección de nuevos cargos directivos.**

Aunque no correspondía el cese de ninguno de los miembros de la Junta Directiva, se da cuenta de la renuncia de D. Martín Garbayo a su puesto de Bibliotecario de la Sociedad. La Junta acuerda dejar el puesto vacante hasta ulterior decisión.

### **5. Asuntos de trámite.**

No hubo.

### **6. Ruegos y preguntas.**

No hubo

Y sin más asuntos que tratar, se levantó la sesión a las 12 horas y 30 minutos de la fecha indicada.

*VºBº, El Presidente*

*El Secretario*

# XLI Olimpiada Matemática Española

En Santiago, en el Monte del Gozo, se ha celebrado entre los días 20 y 23 de marzo pasados la fase nacional de la XLI Olimpiada Matemática Española. Los alumnos ganadores de las fases de Distrito o autonómicas eran al igual que el año pasado, 120. Han aumentado de forma significativa los participantes de 1º de Bachillerato, que aparecen también entre los premiados. Hubo un solo participante, castellano manchego, de 4º de Secundaria.

Las sesiones de problemas se celebraron el lunes 21 y el martes 22 de marzo, con las siguientes propuestas:

## Problema 1

Sean  $a$  y  $b$  enteros. Demostrar que la ecuación

$$(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$$

admite a lo sumo una solución entera.

*Media oros: 5*

*Media todos: 3*

## Problema 2

¿Es posible colorear los puntos del plano cartesiano  $Oxy$  de coordenadas enteras con tres colores, de tal modo que cada color aparezca infinitas veces en infinitas rectas paralelas al eje  $Ox$  y tres puntos cualesquiera, cada uno de distinto color, no estén alineados? Justificar la contestación.

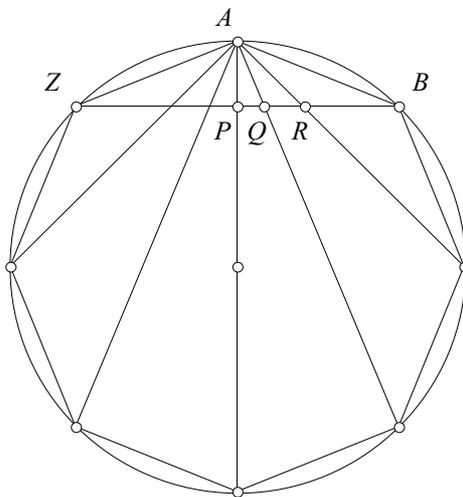
*Media oros: 2.17*

*Media todos: 0.64*

## Problema 3

Diremos que un triángulo es multiplicativo si el producto de las longitudes de dos de sus lados es igual a la longitud del tercer lado.

Sea  $ABC\dots XYZ$  un polígono regular de  $n$  lados con todos sus lados de longitud 1. Las  $n - 3$  diagonales que salen del vértice  $A$  dividen al triángulo  $ZAB$  en  $n - 2$  triángulos más pequeños. Probar que cada uno de esos triángulos es multiplicativo.



*Media oros: 7*

*Media todos : 1.25*

#### Problema 4

Probar que para todo entero positivo  $n$ , la expresión decimal de

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}$$

es periódica mixta.

*Media oros: 3.67*

*Media todos : 0.80*

#### Problema 5

Sean  $r, s, u, v$  números reales cualesquiera. Probar que:

$$\min\{r - s^2, s - u^2, u - v^2, v - r^2\} \leq \frac{1}{4}.$$

*Media oros: 5.83*

*Media todos : 0.99*

## Problema 6

En un triángulo de lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  el lado  $a$  es la media aritmética de  $b$  y  $c$ . Probar:

- $0^\circ \leq A \leq 60^\circ$ .
- La altura relativa al lado  $a$  es tres veces el inradio  $r$ .
- La distancia del circuncentro al lado  $a$  es  $R - r$  ( $R$  es el radio de la circunferencia circunscrita)

*Media oros: 3.17*

*Media todos : 0.69*

En el Salón Noble de Fonseca, donde tuvo lugar la entrega de premios en un solemne acto presidido por los Rectores de las tres Universidades públicas gallegas, recibieron sus medallas los 36 premiados de este año. Los seis ganadores de Medalla de Oro fueron:

*Miguel Teixidó Román (Cataluña)*

*Elisa Lorenzo García (Madrid)*

*Javier de la Nuez González (Madrid)*

*Anas el Barkani (seleccionado por Granada)*

*Hugo Fernández Hervás (Madrid)*

*Marc Viñals Pérez (Cataluña)*

Anas El Barkani es de nacionalidad marroquí, y alumno del Instituto Lope de Vega de Nador (Marruecos). Al no poder formar parte del equipo español de la Olimpiada Internacional, ocupa su lugar el séptimo clasificado, primera medalla de plata, que es el barcelonés Pau Labarta Bajo.

La representación madrileña ha tenido una actuación excelente. Entre los oros, Elisa, de segundo de Bachillerato y alumna del IES Fortuny, lo fue ya el año pasado, lo mismo que Miguel Teixidó. Esta ha sido su tercera participación en una fase nacional de la Olimpiada, ya que ganó por primera vez cuando estudiaba 4º de ESO. Pero también ha sido premiada, año tras año y desde que era bien pequeña, en el Concurso de Primavera, en la Olimpiada de mayo, en el Concurso Intercentros y en el Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad.

Javier de la Nuez, estudiante de 1º de Bachillerato en el Liceo Italiano de Madrid, obtuvo también Medalla de Plata en Ciudad Real el año pasado, y al igual que Hugo Fernández Hervás, de 1º de Bachillerato en el IES San Juan Bautista de Madrid, ha sido premiado en diferentes ocasiones en nuestros concursos. A los tres los hemos visto crecer.

Entre los estudiantes madrileños restantes presentes en Santiago, han obtenido Medalla de Plata: *Ignacio Somoza Sotillos*, de 2º de Bachillerato en el Colegio Valdeluz y *Ricardo Martín Brualla*, del Colegio Alemán (ganador de la Olimpiada de Física de este año, y que tuvo Mención de Honor en la IFO del año pasado), y se han llevado Medalla de Bronce: *José Carpio Pinedo*, de 2º de Bachillerato en el IES San Juan Bautista, *Ding Ru Cai*, de 1º de Bachillerato en el IES Ramiro de Maeztu, *Ignacio Somoza* y *Alba Lozano de las Heras*, de 2º de Bachillerato en el Colegio Valdeluz. El noveno participante, en lugar 37, fue *David Fernández Sánchez*, alumno de 2º de Bachillerato en el IES Jorge Guillén de Alcorcón.

A todos, y a nuestros ex olímpicos, que estuvieron trabajando intensamente con ellos en la Facultad de Matemáticas de la Complutense los días previos a la Olimpiada, nuestra felicitación.

El año que viene, la Olimpiada será en Sevilla, y la Comisión de Olimpiadas de la RSME ha aceptado la propuesta del Ayuntamiento de Torrelodones para ser sede del evento en el año 2007.

**María Gaspar**

# XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas

He aquí los problemas propuestos en la última Olimpiada Iberoamericana, celebrada en septiembre de 2004 en Castellón. Por primera vez acudieron todos los países invitados, que son los veintidós países miembros de la OEI.

El equipo español, con *Juan Manuel Conde* como Jefe de Delegación y *David Sevilla* como Profesor tutor, estuvo formado por: *Mayte Peña Alcaraz*, de Sevilla (Medalla de Plata); *M<sup>a</sup> Isabel Cordero Marcos*, de Salamanca (Medalla de Bronce); *Elisa Lorenzo García*, de Madrid (Mención de Honor), y *Francisco Javier Hernández Heras*, de Valladolid.

## Primera Sesión de Problemas

*21 septiembre de 2004*

### Problema 1

Se deben colorear casillas de un tablero de  $1001 \times 1001$ , de acuerdo a las reglas siguientes:

- i) si dos casillas tienen un lado común, entonces al menos una de ellas se debe colorear
- ii) de cada seis casillas consecutivas de una fila o de una columna, siempre se deben colorear al menos dos de ellas que sean adyacentes.

Determinar el número mínimo de casillas que se deben colorear.

### Problema 2

Se considera en el plano una circunferencia de centro  $O$  y radio  $r$  y un punto  $A$  exterior a ella. Sea  $M$  un punto de la circunferencia y  $N$  el punto diametralmente opuesto a  $M$ . Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por  $A$ ,  $M$  y  $N$ , al variar  $M$ .

### Problema 3

Sean  $n$  y  $k$  enteros positivos tales que, o bien  $n$  es impar, o bien  $n$  y  $k$  son pares. Probar que existen enteros  $a$  y  $b$  tales que:

$$\text{mcd}(a, n) = \text{mcd}(b, n) = 1 \quad \text{y} \quad k = a + b.$$

## Segunda Sesión de Problemas

22 septiembre de 2004

### Problema 4

Determinar todas las parejas  $(a,b)$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros positivos de dos dígitos cada uno, tales que  $100a + b$  y  $201a + b$  son cuadrados perfectos de cuatro dígitos.

### Problema 5

Dado un triángulo escaleno  $ABC$ , se llaman  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  a los puntos de intersección de las bisectrices interiores de los ángulos  $A$ ,  $B$  y  $C$  con los lados opuestos, respectivamente.

Sean:  $A''$  la intersección de  $BC$  con la mediatriz de  $AA'$ ,  
 $B''$  la intersección de  $AC$  con la mediatriz de  $BB'$  y  
 $C''$  la intersección de  $AB$  con la mediatriz de  $CC'$ .

Probar que  $A''$ ,  $B''$  y  $C''$  son colineales.

### Problema 6

Para un conjunto,  $H$ , de puntos en el plano, se dice que un punto  $P$  del plano es un *punto de corte* de  $H$  si existen cuatro puntos distintos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , en  $H$ , tales que las rectas  $AB$  y  $CD$  son distintas y se cortan en  $P$ .

Dado un conjunto finito  $A_0$  de puntos en el plano, se construye una sucesión de conjuntos  $A_1, A_2, A_3, \dots$  de la siguiente manera: para cualquier  $j \geq 0$ ,  $A_{j+1}$  es la unión de  $A_j$  con el conjunto de todos los puntos de corte de  $A_j$ .

Demostrar que si la unión de todos los conjuntos de la sucesión es un conjunto finito, entonces para cualquier  $j \geq 1$  se tiene que  $A_j = A_1$ .

**María Gaspar**

# IX Concurso de Primavera

Como viene ocurriendo ininterrumpidamente desde 1997, se ha celebrado en la Comunidad de Madrid el IX Concurso de Primavera de Matemáticas organizado por la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. Al igual que otros años, el concurso ha constado de dos fases, celebrada la primera en cada uno de los centros participantes el 2 de marzo, y la segunda en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense el 23 de abril de 2005.

El Concurso de Primavera, sobre todo en su segunda fase, por lo que refleja en el día de su celebración el entusiasmo de los estudiantes, la ilusión –y el nerviosismo– de ellos y de sus padres es una actividad consolidada ya en la Comunidad de Madrid y esperada con impaciencia por gran cantidad de habitantes de nuestra Comunidad.

Los índices de participación, más de 20.000 estudiantes en la primera fase correspondientes a 300 centros aproximadamente, y unos 2.000 estudiantes seleccionados por sus centros para la segunda fase son análogos –pero creciendo– a los de los últimos años. Nos gustaría –aunque nos desbordara– que en lugar de 300 centros participaran el doble –en la Comunidad de Madrid hay, y todos reciben información del concurso, más de 1.500 centros entre todos los niveles–. Pero ese número de casi 300 parece una muralla casi infranqueable, aunque estamos absolutamente convencidos de que muchísimos estudiantes de los otros 1.200 centros serían felices participando en este concurso.

Análogamente a como hemos hecho en otras convocatorias, se otorgaron premios a los 150 estudiantes con más alta puntuación, de los que los 12 ganadores-ganadores, que recibieron premio especial, fueron los siguientes:

## **1º Nivel: Primaria**

1º <i>Daniel Henry Mantilla</i>	Liceo Francés
2º <i>Diego Peña Castillo</i>	Colegio Amor Misericordioso
3º <i>José Luis Contreras Santos</i>	Colegio Santa María del Yermo

## **2º Nivel: 1º-2º E.S.O.**

1º <i>Moisés Herradón Cueto</i>	Colegio Brains
2º <i>David Cerdán Hernández</i>	Colegio Ntra Sra de las Maravillas
3º <i>Rubén Jiménez de Benito</i>	IES José Hierro (Getafe)

**3º Nivel: 3º-4º E.S.O.**

1º *Francisco Plata Moraleda*

2º *Diego Izquierdo Arseguet*

3º *Arsenio Ruiz Vega*

IES Jaime Ferrán Clúa (S Fernando de Hernares)

Liceo Francés

Colegio San José del Parque

**4º Nivel: Bachillerato**

1º *Elisa Lorenzo García*

2º *Hugo Fernández Hervás*

3º *Carlos Pardo Martín*

IES Fortuny

IES San Juan Bautista

Colegio Retamar

**Joaquín Hernández**  
**Comité Organizador Concurso de Primavera**

# Acciones Formativas de Posgrado en “Educación Matemática”

**Facultad de Matemáticas  
Universidad Complutense de Madrid**

Año Académico 2005-06

**(Cursos de 30 horas, independientes entre sí, impartidos por  
Profesores de la Universidad Complutense de Madrid)**

1. El problema de la medida de magnitudes. Evolución histórica. *Profs. Fernando Bombal y Francisco L. Hernández*
2. Recursos informáticos para la enseñanza del Cálculo y Geometría Elementales. *Profs. Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías.*
3. Introducción al software libre. *Prof. Luis Llana*
4. El tratamiento del azar: Probabilidad y Modelos de Distribuciones. *Prof. Elisa Benítez*
5. Los orígenes de la Informática en la Historia de las Matemáticas. *Profs. Clara María Segura y Rafael del Vado*
6. Usos matemáticos de internet para Secundaria y Bachillerato. *Prof. Inés Gómez-Chacón*
7. Sistema GPS: Fundamentos Matemáticos y Aplicaciones Prácticas. *Prof. Gracia Rodríguez*
8. Las Matemáticas en Secundaria: un enfoque distinto del habitual. *Prof. Joaquín Hernández*
9. Taller de Astronomía. *Prof. Ana Inés Gómez*

10. Introducción a la Filosofía de la Ciencia y a la Teoría de la Relatividad.  
*Profs. José Mendoza y Eduardo Aguirre*
11. Algunas cuestiones de geometría: Estudio y representación de curvas planas.  
La geometría de la regla y el compás. *Profs. Domingo García y Juan Tarrés*
12. Problemas de máximos y mínimos: una aproximación a la Investigación Operativa. *Profs. M. Teresa Ortuño y Victoria López*

**Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro**  
**Directora de los Cursos**

## Dedicatoria de este número del Boletín

Como ya anunciamos en los dos números anteriores de nuestro Boletín, la Junta Directiva propuso dedicar el presente número 70, correspondiente a junio de 2005, en homenaje al Profesor Miguel de Guzmán, fallecido el pasado año.

Como es bien sabido, era catedrático de Análisis Matemático en la Universidad Complutense de Madrid, y miembro de la Real Academia de Ciencias desde 1983.

Desde el punto de vista de nuestra Sociedad, la característica fundamental de su trayectoria profesional fue su preocupación por la educación matemática en todos sus niveles, incluso terciario, como solía decir, al referirse al nivel universitario.

Con el propósito de fomentar atracción de los estudiantes más jóvenes hacia el quehacer matemático, desarrolló un Proyecto de estímulo del talento matemático en el marco de la Real Academia de Ciencias.

Se interesó también por la educación matemática extendida al público en general, escribiendo en esa línea varios libros, alguno de los cuales fue traducido a varios idiomas.

De 1991 a 1998 ocupó la Presidencia del máximo órgano internacional para la educación matemática, el ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). Recordemos que en los años 50, otro español, D. Pedro Puig Adam, también ocupó la Presidencia de la Comisión Internacional para el mejoramiento de la enseñanza de la Matemática, promovida por la UNESCO.

En la última Asamblea de nuestra Sociedad se acordó por unanimidad aceptar la propuesta de la Junta de dedicar el presente número al Profesor Miguel de Guzmán, como agradecimiento al trabajo que llevó a cabo en pro de la educación matemática.

Las colaboraciones recibidas exceden la capacidad de un solo número del Boletín. Por ello, en este y en el próximo número, se encontrarán los trabajos que hemos recibido, como muestra del afecto de la comunidad de profesores de Matemáticas hacia la figura del Profesor Miguel de Guzmán.

*La Junta Directiva*

# Introduction to Conics with Cabri 3D

**Heinz Schumann**

Faculty III, Mathematics/Informatics,  
University of Education Weingarten  
D-88250 Weingarten, Germany  
schumann@ph-weingarten.de

## **Abstract**

*An introduction to conics using the dynamic geometry system Cabri 3D is given, which is a prototypic dynamic tool for 3-dimensional synthetic geometry. Cabri 3D supports in general the direct manipulating geometric work (generating, constructing, visualizing, modifying of spatial configurations) in the virtual space thanks to its software ergonomic facilities and its geometric options. This introduction is adapted to middle/upper secondary mathematical education and treats traditional content in a new way and reinforces as well traditional methods.*

This paper is dedicated to Miguel de Guzmán, who significantly enriched the didactics of mathematics all over the world

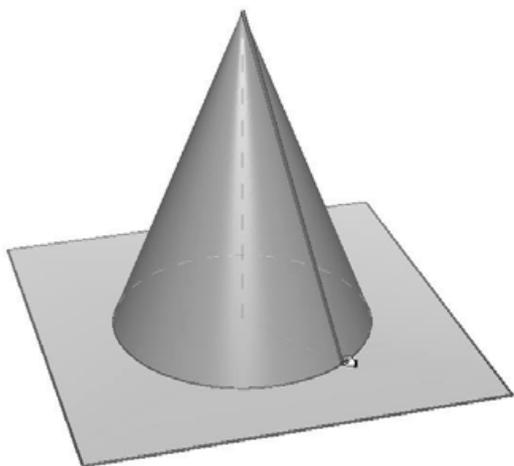
## **1. Introduction**

The history of conics in the mathematics classroom is a history of ups and downs (see, e.g. Schupp 1988). The most recent instance is another threat of neglect as the focus of mathematics teaching is being shifted from mathematical substance to other issues (e.g. mathematics literacy – PISA) – despite the fact that conics are an excellent example of the interdependence between geometry and algebra. Other arguments in favour of conics are their practical relevance (satellite orbits, shot-putting, lithotripter, ...), internal mathematical relevance, richness of problems, variety of methods etc.

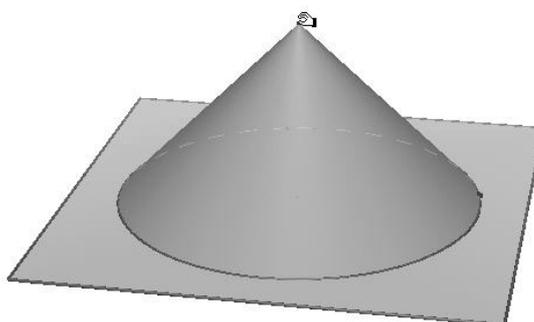
New media, in particular dynamic geometry systems, offer new ways of treating conics, which aids the teaching and learning that topic. While the well-researched didactic monography on conics by Schupp (1988) still focused on the programming of the graphic visualisation, Schumann (1991) was the first to point out the interesting applications of dynamic geometry for the treatment of conics. So far, most contributions on conics have been limited to a two-dimensional treatment, which is a paradox in view of the nature of the subject and indeed of its very name. This neglect may be due to the deficiencies of conventional methods, which provide no appropriate learning environment for three-dimensional treatment of conics. Cabri 3D is the first efficient dynamic spatial geometry system that fits this purpose. The following is to provide an adequate introduction to spatial conics using Cabri 3D.

## 2. Introducing conics in space

For an adequate dynamic introduction of conics as two-dimensional sections of a (double) cone, we need a 3-dimensional dynamic geometry system which offers the user good perceptibility and/or visualisation of three-dimensional objects, including the options of construction, direct manipulation and variation. Cabri Géomètre 3D (Laborde, J. M.; Bainville, E., Cabri Géomètre 3D, 2004) is the first three-dimensional dynamic geometry system which even in version 1.0 meets many of the requirements on a tool for three-dimensional synthetic geometry for dynamic treatment, similar to the options offered by 2D dynamic geometry systems.



*Figure 1 : A cone*



*Figure 2: Varying a cone*

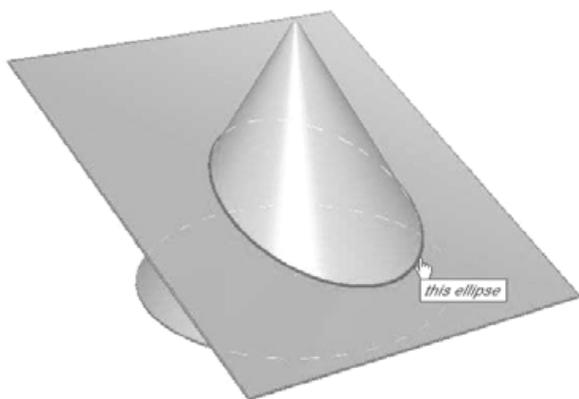
Cabri 3D provides better insight into two-dimensional conic sections and the foundation of the phenotypical shapes of the curve of intersection than traditional media or different new media.

The following illustrations provide only a limited idea of the dynamic options of Cabri 3D and the resulting visual perceptions and experiences.

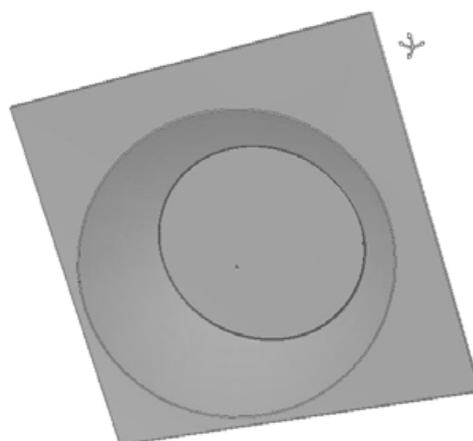
First let us, in Cabri 3D, construct a cone from a circle in a plane and a point in the line normal to the plane constructed in the centre of the circle. (Figure 1, model of a circular cone; all the figures in this article are originally in informative colours). Its shape can be varied by moving this point (the apex of the cone – Figure 2, modified cone shape).

We can now look at the cone from all sides using the so-called virtual sphere device implemented in Cabri 3D.

Now, we are going to construct a plane in the cone and let the system generate the curve of intersection, which in our case Cabri 3D identifies as an ellipse (Figure 3), irrelevant of the shape of the cone. We can also look at the curve of intersection from below (Figure 4).

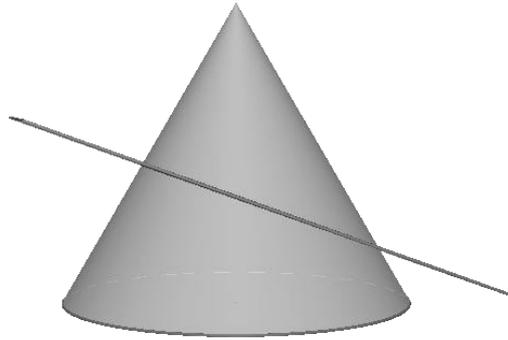


*Figure 3: A plane section generating an ellipse*



*Figure 4: Elliptic section from below*

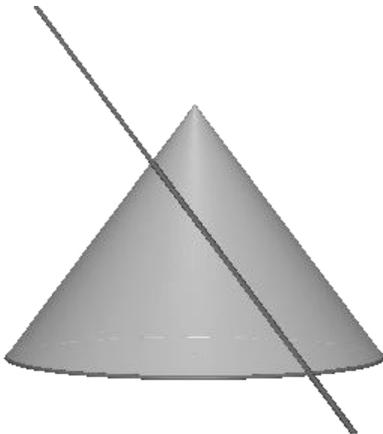
We are now going to rotate the image so that the plane is viewed as a straight line. We find that the base plane has a smaller angle with the intersecting plane than with the lateral surface (Figure 5).



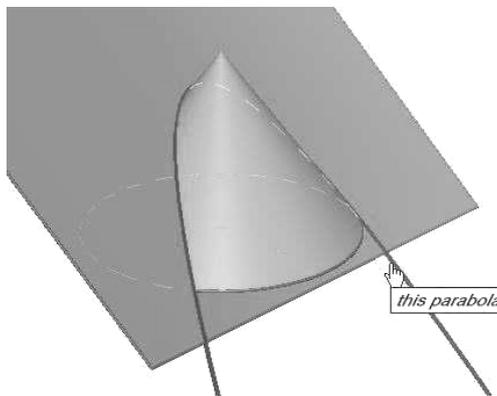
*Figure 5: Position of plane trace for an elliptic section*

For a parabolic section, we construct a plane exactly parallel to a generating line of the cone; Figure 6 shows the trace of this plane.

Cabri 3D identifies the curve of intersection generated with this plane as a parabola (Figure 7).



*Figure 6: Position of plane trace for a parabolic section*



*Figure 7: A parabola by plane section*

By varying the position of the intersecting plane so that its angle with the base plane is larger than the angle of the lateral surface, we get a hyperbola. The second branch of the hyperbola is located on a cone generated by reflecting in the apex of the original cone (Figure 8: trace of the intersecting plane in the double cone; Figure 9: hyperbola as curve of intersection in the double cone). Again, we can look at the image from all sides (Figure 10, e.g. from below). If the intersecting plane passes through the apex, we get a double straight line, (Figure 11) etc.

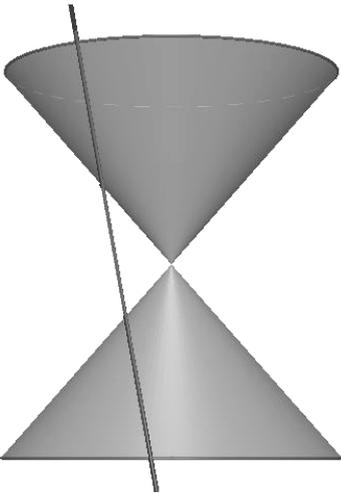


Figure 8: Position of plane trace for a hyperbolic section

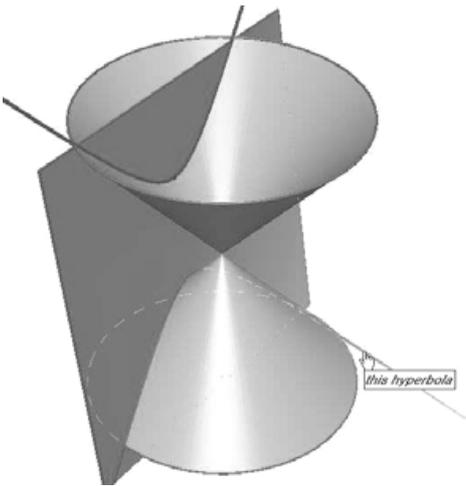


Figure 9: A hyperbola by plane section

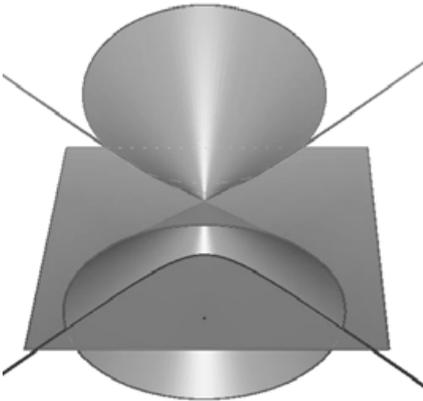


Figure 10: A hyperbola by plane section from below

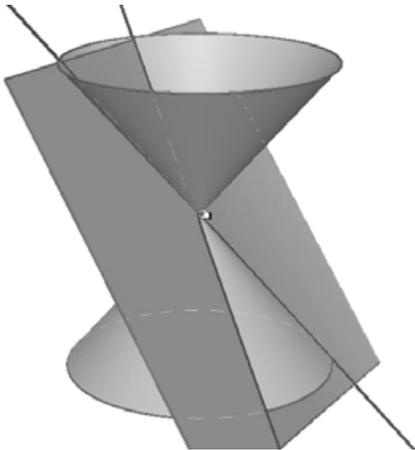
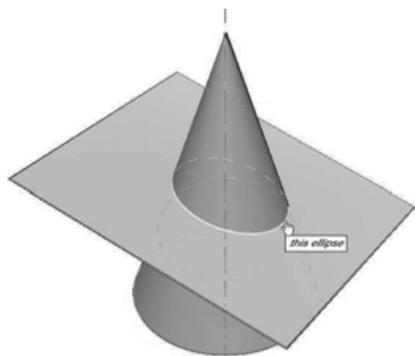
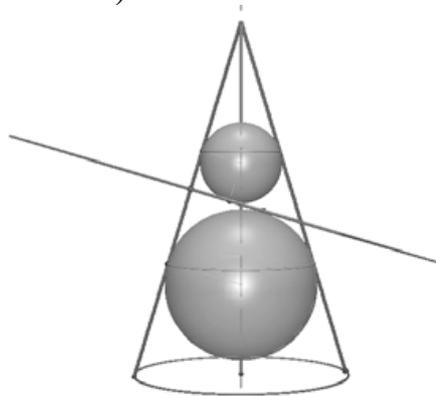


Figure 11: Borderline case

We are now going to show why, e.g. the curve of intersection of Figure 12 meets the point curve characteristics of an ellipse, i.e. that the sum of the distance from two fixed points is constant for all points of the curve. For this, we are going to use the elegant method first described by Dandelin 1794 – 1847 (see, e.g. Manual of School Mathematics, Vol. 4, p. 116/117).

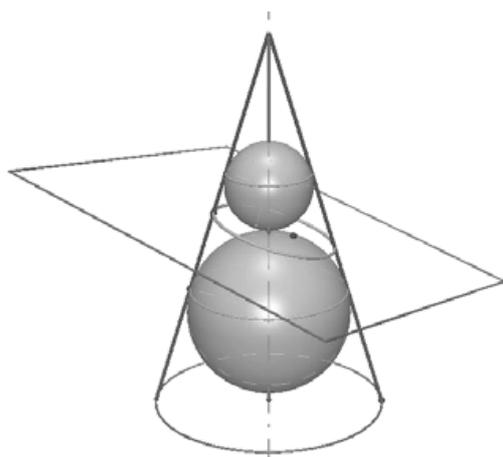


*Figure 12: Elliptic section?*

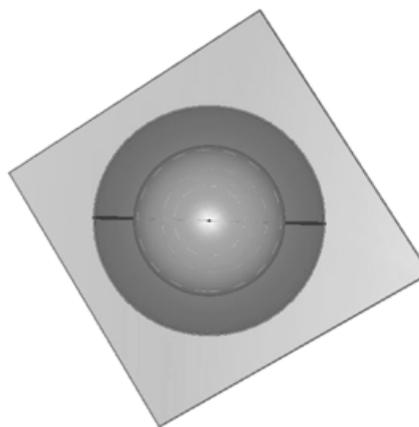


*Figure 13: A cone with intersecting plane trace tangent to inscribed spheres*

First, we are going to construct the so-called Dandelin spheres, i.e. the spheres inscribed in the cone which are tangent to the intersecting plane. For better visualisation, we will show only the outlines of the cone (Figure 13, construction of the cones with Dandelin spheres, tangent points, trace of intersecting plane and the inscribed circles; construction lines are omitted for better visualisation; Figure 14 from a different view; Figure 15 Dandelin spheres from below).



*Figure 14: Figure 13 from beyond*



*Figure 15: Figure 13 from below*

The centres of a sphere are constructed in a plane containing the cone axis in analogy to the construction of a circle centre from two intersecting tangents and a diameter. The radii of the spheres are obtained by raising perpendiculars from the centres of the spheres to a generating line of the cone. The points where the perpendiculars pass through the intersecting plane are the tangent points (later, the foci of the ellipse). On the curve of intersection, we put a moving point P.

For our proof, we shall name some further objects, and we are going to show only the outlines of the spheres for better visualisation. (Figure 16, enlarged detail in Figure 17):  $F_1, F_2$  are the tangent points;  $k_1, k_2$  the tangent circles;  $B_1, B_2$  the points of intersection of the generating line going through P with the tangent circles  $k_1, k_2$ ;  $A_1, A_2$  are the end points of a generating line of the truncated cone formed by  $k_1, k_2$ .

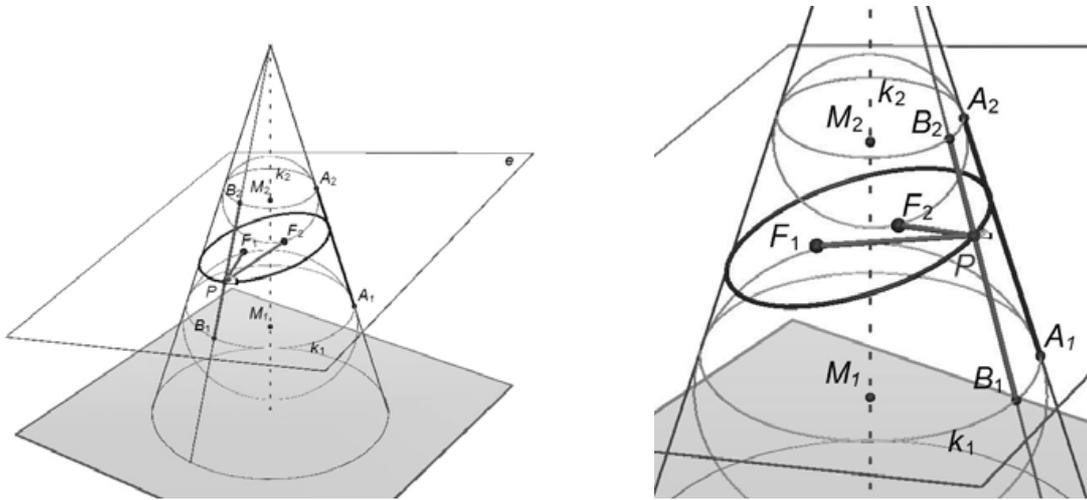


Figure 16: Proofing figure with denotions      Figure 17: Proofing figure zoomed

If we move P,  $B_1B_2$  along the lateral surface of this truncated cone;  $B_1B_2$  becomes congruent with  $A_1A_2$ .

$B_1, F_1$  resp.  $B_2, F_2$  are tangent points with the first or second Dandelin sphere; together with P they form tangential sections located on the tangent cone with P as the apex (e.g. Figure 18 for the first sphere; construction of the cone with the three-point circle through  $B_1, F_1$  and  $F_1'$ ;  $F_1'$  is obtained by reflecting  $F_1$  on the plane through P and the cone axis).

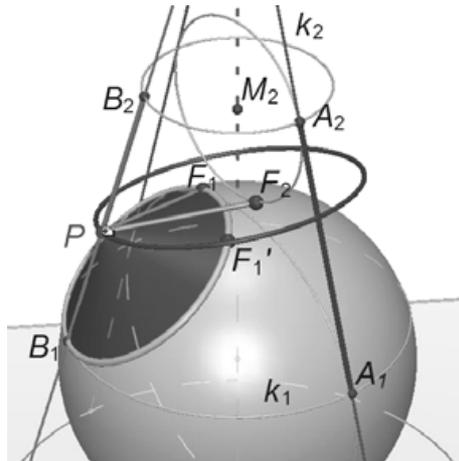


Figure 18: The tangent cone

$PB_1$  and  $PF_1$  are thus of equal length, as are  $PB_2$  and  $PF_2$ . This means that

$$PF_1 + PF_2 = PB_1 + PB_2 = A_1A_2 = \text{const.}$$

and the curve of intersection is an ellipse. We find that the generating line of the truncated cone formed by the tangent circles  $k_1, k_2$  are identical in length with the main axis of the ellipse to be drawn.

The proofs of the parabola and hyperbola sections are obtained by a similar procedure.

### 3. Another view: Conics as circle images in central projection

Naturally, Cabri 3D is suited also for 3D construction and visualisation of conics as circle images in central projection in the common manner of representation, i.e. with a central point  $Z$  (eye point resp. point of sight), the object plane of the projection plane (which intersects with the object plane in the axis  $a$ ), and the vanishing plane (with the vanishing line  $v$ ). Figure 19 shows how the cone constructed from a circle in the object plane with the apex  $Z$  intersects with the projection plane in an ellipse. For a circle tangent to the vanishing plane, the curve of intersection will be a parabola. The image can be viewed from all sides (Figure 20, from “below”, with a transparent object plane). Figures 21 and 22 show the image obtained for a hyperbola section.

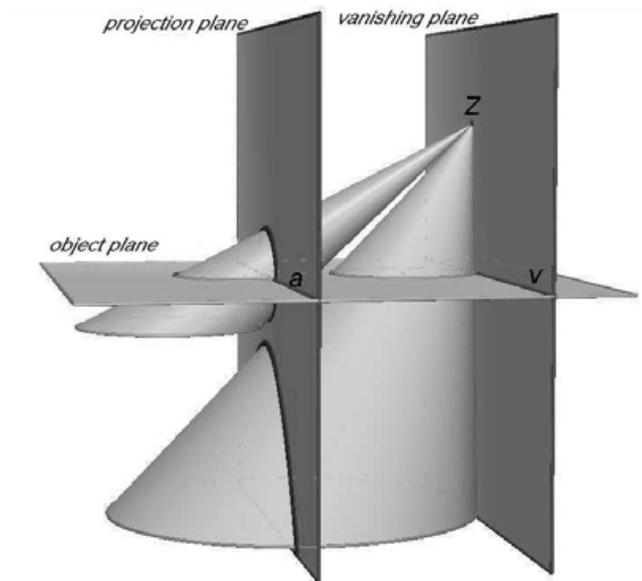


Figure 19: Ellipse and parabola as central-projective images of a circle

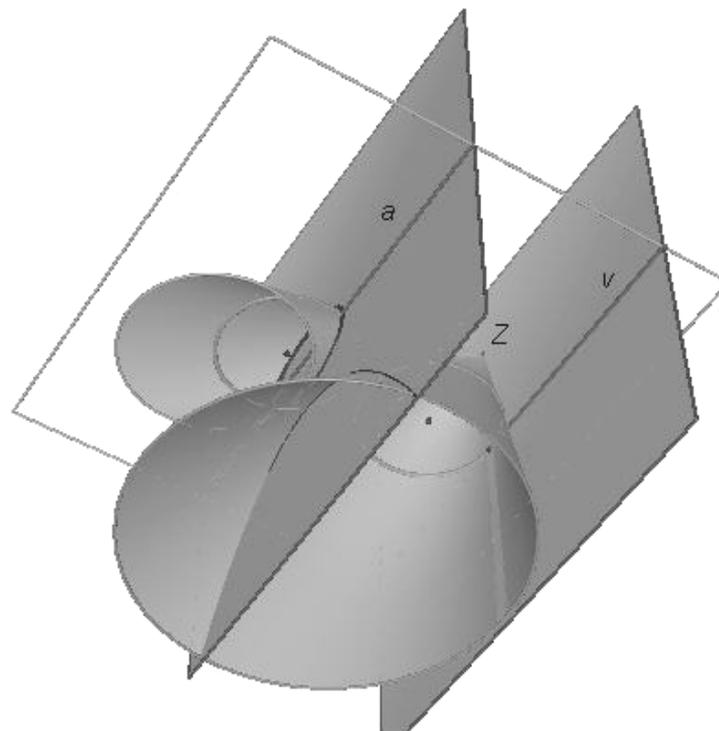
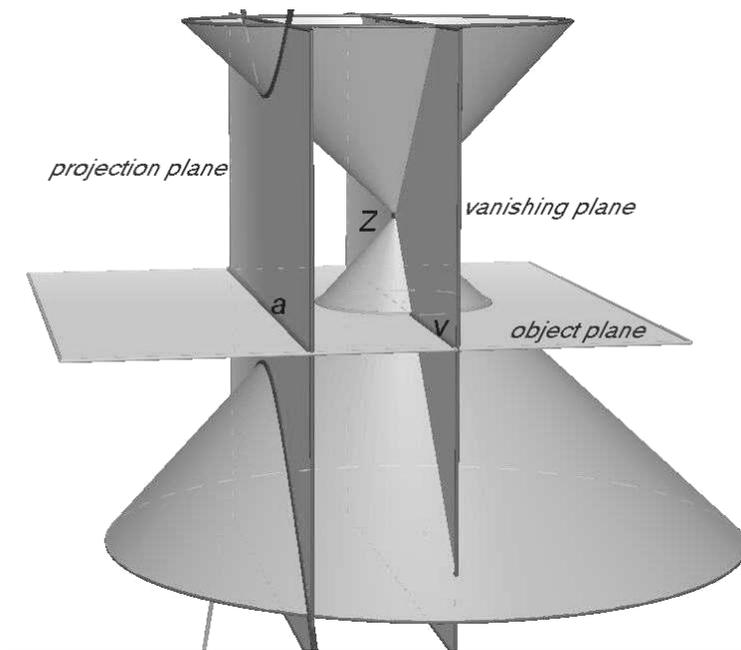
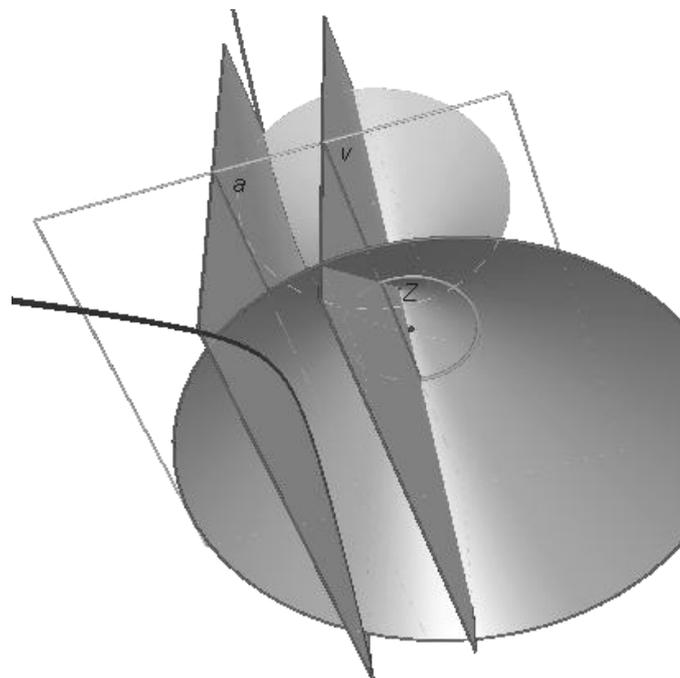


Figure 20: Figures 19 from below

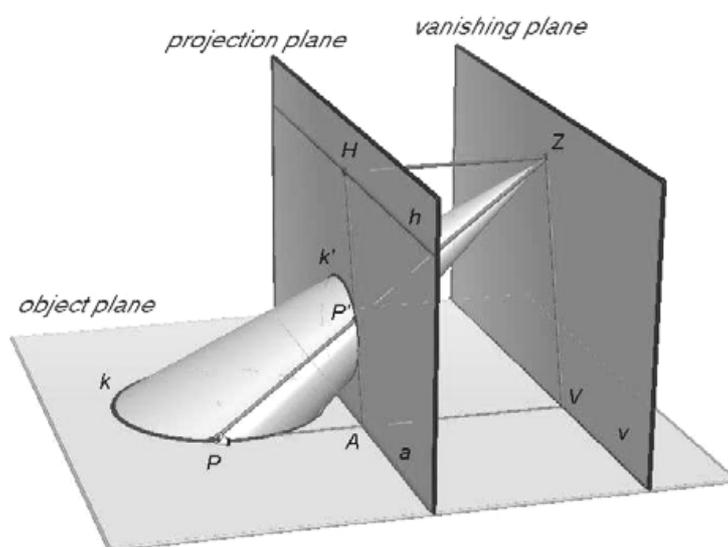


*Figure 21: Hyperbola as central-projective image of a circle*



*Figure 22: Figure 21 from below*

Figure 23 is the configuration obtained for point-by-point construction of a circle image in central projection, for the example of an ellipse ( $k$ : original,  $k'$ : image; the bottom point of the perpendicular from  $Z$  onto projection plane is the main point  $H$ , and the plane parallel to the object plane going through  $Z$  intersects with projection plane in the horizon  $h$ ). To construct the image  $k'$  of the circle  $k$ , we drop the perpendicular from the point  $P$  on the circle onto the axis  $a$ , with  $A$  as the bottom point of the perpendicular, ... ;  $ZHAV$  is a rectangle after construction.



*Figure 23: Ellipse as central-projective image of a circle with corresponding denotions*

The point of intersection of the projection ray  $ZP$  with the straight line  $AH$  is the image point  $P'$  which generates the circle image as  $P$  moves along the circle. The projection ray  $ZP$  is a generating line describing the oblique circular cone formed by  $Z$  and  $k$ . After masking the image plane and cone, the scenario of Figure 24 is obtained.

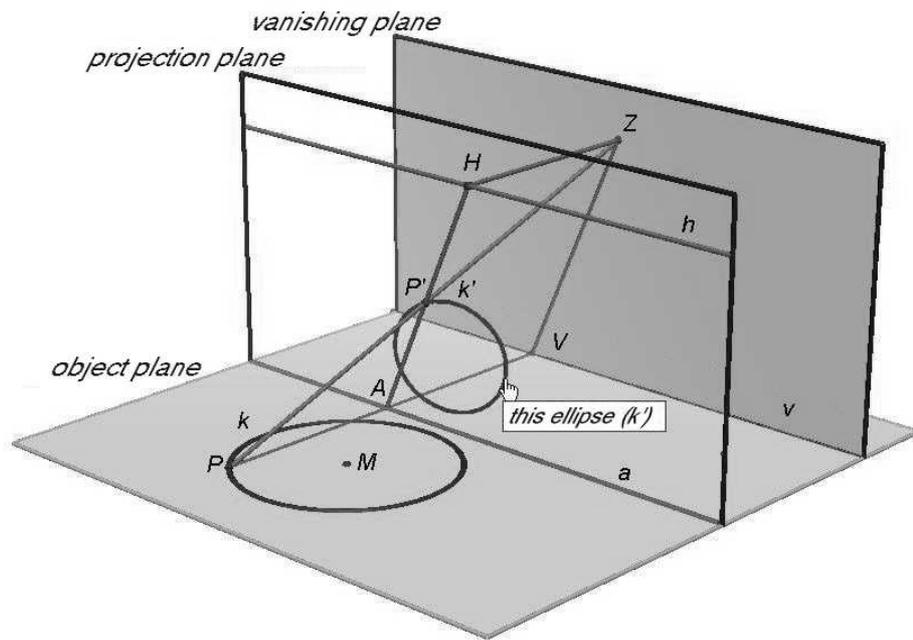


Figure 24: Figure 23 with transparent projection plane

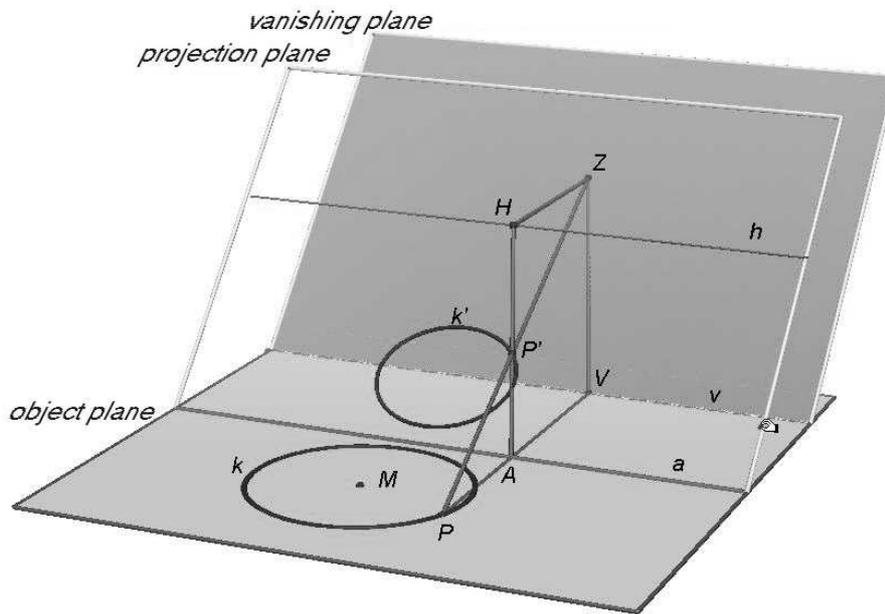
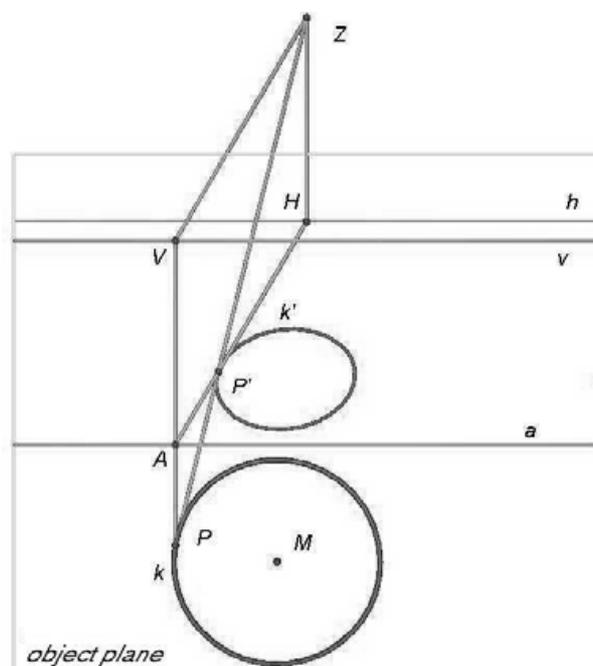


Figure 25: Figure 24 showing the tilting to the object plane

By tilting both the projection plane and vanishing plane into the object plane (Figure 25), we obtain a 2-dimensional construction of circle images in central projection as a special case of an axial projective transformation (Figure 26).



*Figure 26: Final state of tilting: axial projective transformation in plane*

We are now going to use Cabri II Plus to apply this plane image, with distinctions made for different cases, to circles for generating conics. Circle does not intersect or contact the vanishing line (Ellipse: Figure 27), contacts it (Parabola: Figure 28) or intersecting it (Hyperbola: Figure 29).

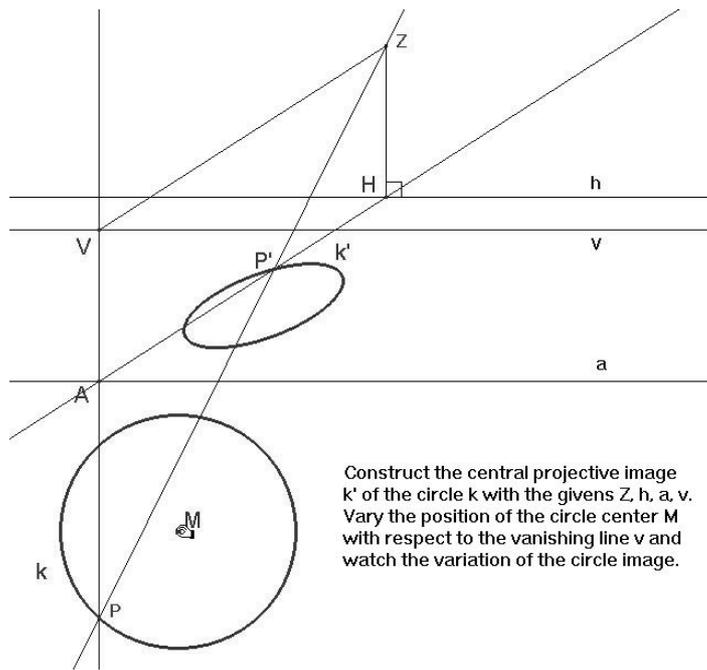


Figure 27: Construction of an ellipse as an axial projective image

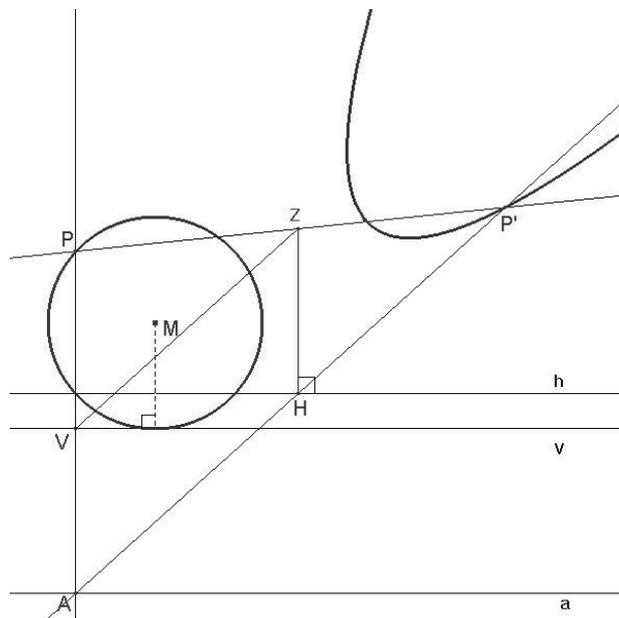


Figure 28: Construction of a parabola as an axial projective image

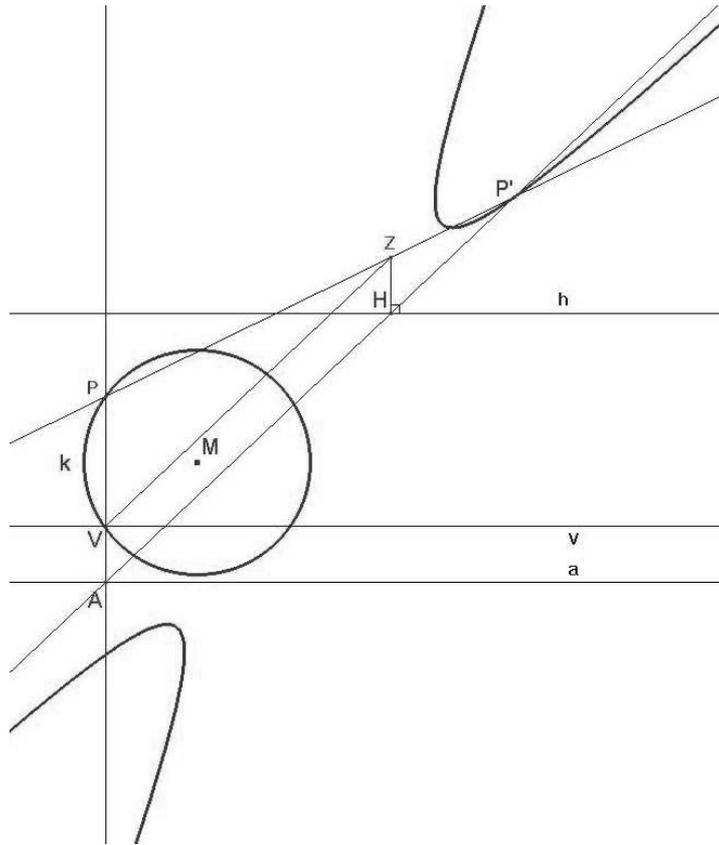


Figure 29: Construction of a hyperbola as an axial projective image

#### 4. Conclusion

In similar way we are able to deal with all the phenomenous approaches to spatial conics in virtual space using Cabri 3D, which are a preknowledge to a further-reaching treatment.

E. g. we can also think of conics as “intersections” of a cone of light with a plane. The curves formed with planes by the light cone going out from a point source Z (Figure 30) can be interpreted as images in central projection of a circle k. The circle plane is vertical to the cone axis on which the circle centre is located. With the aid of a rotating plane, Cabri 3D enables us to observe the change of shape of the curve from an ellipse into a hyperbola.

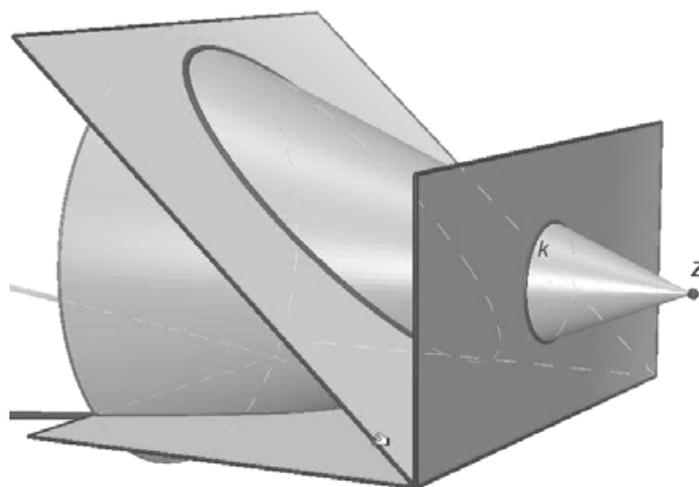


Figure 30: Cone of light intersected by planes

## References

- [1] Laborde, J. M. (2004) *20 Years of Cabri! Perspective of Geometry Based Computing Means of Tomorrow*. (presentation), Third Cabri Geometry International Conference, Rome 9<sup>th</sup>-12<sup>th</sup> September 2004, Università “La Sapienza“
- [2] Laborde, J. M.; Bainville, E. (2004) *Cabri Géomètre 3D* (Version 1.0). Grenoble: Cabrilog ([www.cabri.com](http://www.cabri.com))
- [3] Schumann, H. (1991) *Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer* (School geometric construction with a computer). Stuttgart: Metzler und Teubner (available in the archiv of [www.math-schumann.de](http://www.math-schumann.de))
- [4] Schumann, H.; Green, D. (1994) *Discovering Geometry with a Computer*. Bromley/Kent: Chartwell-Bratt
- [5] Schupp, H. (1988) *Kegelschnitte* (Conics). Mannheim: BI-Wissenschaftsverlag
- [6] Wolff, G. (Ed.) (1966) *Handbuch der Schulmathematik*, Band 4 (Manual of School Mathematics, Vol. 4). Hannover: Schroedel

# Como homenaje a Miguel de Guzmán: Algunas reflexiones sobre educación matemática

**Baldomero Rubio Segovia**

Departamento de Análisis Matemático  
Universidad Complutense de Madrid  
brubio@mat.ucm.es

## **Resumen**

As an homage to Miguel de Guzmán in the next first anniversary of his death I present some reflections about mathematical education and problems in connection with the situation at this time in our country. Several significant and stimulating aspects of the mathematical work are showed in order to attract young people.

## **Introducción: Miguel de Guzmán**

En el presente mes de Abril se va a cumplir ya un año desde que Miguel dejó de estar con nosotros físicamente. De alguna manera sigue con quienes hemos sido testigos de su enorme labor, o incluso partícipes en alguna de sus actividades. Y también continúa estando cerca de aquellas personas que han conocido sus obras y disfrutado y aprendido con sus libros y artículos. Agradezco profundamente la invitación para participar en este número de homenaje a su figura que está preparando la Sociedad Puig Adam de Matemáticas, y no sólo por tener ocasión de dar testimonio una vez más de mi afecto por la persona de Miguel y mi admiración por la calidad de su obra, sino también porque en esta ocasión lo pueda conectar con el nombre de Pedro Puig Adam, a quien conocí poco tiempo antes de su muerte, cuando yo estudiaba la licenciatura y él era catedrático de matemáticas en el Instituto de Bachillerato San Isidro

de Madrid. Recuerdo como si fuera de ayer una larga entrevista con él en su casa, y tuve la gran experiencia de verlo en varias ocasiones trabajando con los niños en su Instituto. Con toda seguridad, Puig Adam y Miguel han sido las personas que más han influido en la educación matemática de nuestro país.

Como modesta colaboración en este homenaje es mi intención mostrar algunas preocupaciones por la situación actual que observo en la educación matemática de nuestro entorno, y señalar aspectos de trabajo matemático que quizás pueden ser estimulantes para que nuestros jóvenes lleguen a sentir interés por esta ciencia y apreciar su valor formativo.

## 1 Algunas preguntas para empezar

¿Qué papel juega la matemática ante el intento de comprender nuestro mundo y explicar los fenómenos que en él observamos?

¿Qué significa la adquisición de una sólida formación matemática para el desarrollo de la actividad profesional de una persona?

¿Por qué en los últimos años se está produciendo un descenso alarmante del número de estudiantes que acceden a facultades de matemáticas?

¿Cómo podríamos reaccionar eficazmente ante el dato de los resultados negativos en relación con la formación matemática de nuestros escolares?

Desde luego que no trato de ofrecer respuestas completas a estas preguntas. Sólo pretendo que las convirtamos en preocupaciones personales y que cada uno desde su propia responsabilidad procure encontrar las suyas y aportar algo para la mejora del nivel de formación en matemáticas de nuestros jóvenes.

Lo que viene a continuación podría describirse como la exposición de varias escenas del quehacer matemático (utilizo un verbo que a Miguel le gustaba) que pueden ser significativas para entender lo que realmente es esta ciencia y estimular a nuestros jóvenes al estudio de la misma. En Agosto del año pasado tuve la ocasión de contar alguna de ellas a un grupo de cincuenta estudiantes que el curso actual están iniciando sus estudios universitarios. Seleccionados por su brillante expediente académico, realizaban un curso de quince días en el Palacio de La Magdalena de Santander, invitados por la Universidad Internacional Menéndez Pelayo. Asistieron todos ellos a mi

conferencia con indudable interés, pero lo más significativo para mí fue lo que vino a continuación: después de casi una hora de mi exposición, una hora y quince minutos duraron las preguntas y fue necesario que el coordinador del curso forzara el final porque se hacía ya tarde para la hora de la comida. Era patente que muchos de estos jóvenes estaban descubriendo interés por las matemáticas, que no se les había suscitado antes, pero ¡ninguno de ellos iba a ir a una facultad de matemáticas!

## 2 Escenas del quehacer matemático

### 2.1 La operación de contar

Hay acuerdo unánime en que la necesidad de contar los elementos de una colección de objetos puede considerarse como el primer eslabón del desarrollo de la matemática. Así nace el conjunto  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  de los números naturales. Ante él surgen enseguida los siguientes pensamientos:

- a) El número 1 tiene un significado especial entre todos ellos.
- b) La cadena que forman no tiene fin: cada número determina de manera única su “siguiente”, que es distinto de 1, y para dos números arbitrarios distintos sucede que el siguiente de uno y el del otro son también distintos entre sí.
- c) Si  $A$  es un conjunto de números y sucede que 1 pertenece a  $A$  y el siguiente de cada elemento de  $A$  pertenece también a  $A$ , entonces tiene que ser  $A = \mathbb{N}$ .

Estas tres observaciones constituyen las reglas para hacer las construcciones en el conjunto  $\mathbb{N}$ , y se llaman los axiomas de Peano. De una necesidad de la vida ordinaria ha surgido un modelo matemático abstracto en el que se puede trabajar con las herramientas propias de esta ciencia. De hecho, la teoría de los números naturales, denominada usualmente Teoría de los Números, es considerada por muchos como la reina de las matemáticas.

Cuando contamos los elementos de un conjunto lo que hacemos es ponerles etiquetas: 1, 2, 3, ... hasta llegar al último. La pregunta ahora es natural: ¿cuántos elementos tiene  $\mathbb{N}$ ? Pero  $\mathbb{N}$  no tiene último elemento. Decimos que  $\mathbb{N}$

es un conjunto infinito, y la palabra “infinito” no tiene para los matemáticos el significado algo misterioso que se atribuye usualmente a ella. En realidad, los matemáticos sólo trabajan con objetos que se han definido sin ambigüedad: las cosas significan exactamente lo mismo para cualquier tiempo, lugar o persona.

Lo que significa en las matemáticas que el conjunto  $\mathbb{N}$  es infinito es lo siguiente: existe algún conjunto  $\mathbb{P}$  de números naturales en el que no están todos ellos, y existe una aplicación biyectiva de  $\mathbb{N}$  a  $\mathbb{P}$ . (Se puede expresar informalmente así: una parte estricta tiene tantos elementos como el total). En efecto,  $\mathbb{P}$  puede ser el conjunto  $\{2, 4, 6, \dots\}$  de los pares, y  $n \rightarrow 2n$  la aplicación biyectiva requerida.

Ser finito  $A$  significa que no es infinito, es decir, para cada parte  $P$  de  $A$  que sea distinta de  $A$  no existe una aplicación biyectiva de  $A$  a  $P$ . (¿Cómo se demuestra que  $\{a, b, c, d\}$  es finito?. ¿Conoces algún conjunto infinito cuyos elementos sean objetos materiales?).

Puesto que hay infinitos números naturales, ¿qué criterio se puede seguir para designar a uno cualquiera de ellos? Es claro que no se puede pensar en infinitos signos distintos. Estamos acostumbrados desde la escuela a que las diez cifras del 0 al 9 son suficientes. ¿Se podría resolver el problema sólo con las cifras 0 y 1? Ello tendría especial importancia porque los ordenadores están constituidos por una cantidad enorme (pero finita) de celdillas y cada una de ellas puede registrar un 0 o un 1. De esta forma, un ordenador puede conocer cualquier número natural si es que éste se puede expresar siempre mediante una cantidad finita de *ceros* y *unos*. He aquí algunos números naturales si el criterio es constituir con dos unidades de cada orden una unidad del orden inmediato superior (de manera análoga a que diez unidades forman una decena, diez decenas una centena, etc.):

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101.

La regla para pasar de un número al siguiente es muy sencilla: si termina en 0, basta sustituir éste por 1. Si termina en 1, hay que buscar el último 0 (o añadirlo a la izquierda si no lo hay), y éste se sustituye por 1 y los siguientes *unos* se sustituyen por *ceros*. Por ejemplo, el siguiente de 1111 es 10000, y el siguiente de 11010011 es 11010100. Este tipo de cosas un ordenador las entiende muy bien y las hace muy deprisa. De pequeños tuvimos que aprender

las tablas de sumar y de multiplicar del 1 al 9; con la representación “binaria” sólo hay que saber que  $1 + 1 = 10$  y que  $1 \cdot 1 = 1$ .

Cuando los matemáticos han creado un modelo, en él se introducen (definen) nuevos objetos y se desarrolla una teoría constituida por resultados verdaderos (teoremas) y problemas. Por ejemplo, en nuestro modelo de los números naturales se definen los números primos: 2, 3, 5, 7, 11, ... Problema: ¿hay infinitos números primos? Si podemos asegurar que la respuesta es sí, ya tenemos un teorema: “el conjunto de los números primos es infinito”. Admitiendo como cierto que cualquier número es primo o bien tiene un divisor primo, el razonamiento es éste: si sólo hay una cantidad finita de números primos, el siguiente al producto de todos ellos no es primo (por ser mayor que todos los primos) ni tiene un divisor primo (porque la división euclídea de él por cada primo da 1 como resto), lo cual contradice a nuestro punto de partida. Éste es un ejemplo típico de un modo de razonar matemático: se admite como cierta una proposición cuando la negación de la misma genera una contradicción.

La Teoría de los Números está llena de problemas fascinantes. Hace pocos años se resolvió el célebre problema de Fermat: para  $n$  mayor que 2 no existen números naturales  $a, b, c$  que verifiquen  $a^n = b^n + c^n$ . (Si  $n$  es 2, la cosa es distinta:  $5^2 = 3^2 + 4^2$ ). Están aún por resolver el problema de Goldbach: ¿es todo número par la suma de dos números primos?, y el de los primos gemelos: ¿existen infinitos impares consecutivos

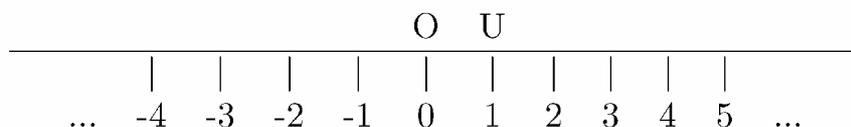
$$(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43) \dots$$

que sean ambos primos?

## 2.2 ¿Qué es una recta?

El problema ahora consiste en crear un modelo matemático cuyos objetos puedan asimilarse a lo que entendemos como los puntos de una recta. Para empezar podemos imaginar situados sobre ella todos los números naturales 1, 2, 3... de la forma usual: en una recta horizontal se elige un punto  $O$  como origen y un punto unidad  $U$  hacia la derecha; bajo  $U$  se sitúa el 1, y seguidamente 2, 3, 4, 5, ... ; bajo  $O$  se sitúa el 0, y hacia la izquierda los simétricos  $-1, -2, -3, \dots$ , que son los enteros negativos. El 0, que en la

escena anterior era solamente un signo, ahora adquiere la categoría de número entero.



Sobre nuestra recta podemos colocar las fracciones, es decir, los números racionales, según un procedimiento bien conocido, y la recta “casi” se llena.

Pero antes de continuar es conveniente saber de qué forma los ordenadores conocen los números racionales. Sumando a los enteros las fracciones comprendidas entre 0 y 1 tenemos todos los números racionales posibles, por lo que ahora nos vamos a referir sólo a éstas, por ejemplo, a  $\frac{2}{3}$ . La conocida desde la escuela como la “división larga”, nos presenta a esta fracción como 0,666... con infinitas cifras decimales. Pero habíamos acordado que el ordenador sólo entiende de una cantidad finita de *ceros* y *unos*. En el sistema “binario” 2 y 3 son respectivamente 10 y 11. ¿Sabríamos hacer la división larga de 10 por 11? Resulta 0,101010101... , con infinitas cifras binarias, donde 10 se repite sistemáticamente. El ordenador puede conocer el número que se obtiene, por ejemplo, con las diez primeras cifras solamente, y tal número es bastante próximo a  $\frac{2}{3}$ . El ordenador conoce una cantidad finita de aproximaciones buenas a números racionales, pero ello le es suficiente para precisar el saldo de nuestra cuenta corriente hasta las centésimas de euro.

Colocados todos los números racionales sobre la recta, ¿quedan libres algunos puntos de ésta? Experimentemos: sobre el segmento de extremos 0 y 1 construimos un cuadrado. De acuerdo con el teorema de Pitágoras, su diagonal tiene una longitud cuyo cuadrado es 2. Situemos esta diagonal sobre la recta con un extremo en el 0 y hacia la derecha. El otro extremo es un punto  $P$  que debe corresponder a un número cuyo cuadrado sea 2. Pero no es difícil demostrar que el cuadrado de una fracción nunca es 2. Así es que sobre  $P$  no cae un número racional. Es decir, al menos hay un punto en la recta que no tiene asignado un número racional. ¿Qué objeto de carácter numérico se puede crear para asignarlo a  $P$ ?

La respuesta puede extraerse de una construcción geométrica asociada a la idea de buscar el lado de un cuadrado de área 2. O dicho de otra manera: a partir de dos cuadrados de área 1 se pretende trocear de forma conveniente el

primero para ampliar el segundo. Empezamos partiendo el primero en cuatro cuadrados de lado  $\frac{1}{2}$ , es decir 0,1 en notación binaria, pero necesitaríamos cinco para hacer una ampliación. Entonces lo que hacemos es partir los cuatro cuadrados de lado 0,1 para obtener dieciséis de lado 0,01. Con nueve de ellos ya podemos hacer una primera ampliación y se obtiene un cuadrado de lado 1,01 y sobran siete. ¿Sabrías cómo hacer una segunda ampliación con los sobrantes? Este proceso se puede continuar de forma indefinida. ¿Por qué no hay una etapa en la que no quede algún cuadrado sobrante?

El objeto 1,01101... construido con el método anterior es la “raíz cuadrada de 2” expresada en el sistema binario. No es un número racional, es decir, no se puede expresar como una fracción: se denomina número irracional.

### 2.3 Del interés compuesto al número $e$

Ponemos un capital de 1 euro a un interés de  $\alpha$  por 1 anual, es decir, 1 se convierte en  $1 + \alpha$  en el plazo de un año. Pero si el interés se acumulara al capital al pasar sólo un semestre, entonces 1 aumentaría a  $1 + \frac{\alpha}{2}$  y esta cantidad sería la que produce beneficios en el siguiente semestre; en consecuencia, 1 se convierte en  $(1 + \frac{\alpha}{2})^2$  al finalizar el año, ya que se exige que la relación del capital final al inicial en intervalos iguales de tiempo debe ser constante. Con el mismo tipo de razonamiento, la evolución del capital 1 a lo largo de un año si es que los intereses se acumulan cada fracción  $n$ -ésima de año sería ésta:

$$1 \rightarrow 1 + \frac{\alpha}{n} \rightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^2 \rightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^3 \rightarrow \dots \rightarrow \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n.$$

Pensemos que es  $\alpha = 1$ . En la hipótesis anterior 1 pasa a ser

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

en un año. ¿Podría elegirse  $n$  para que  $x_n$  pudiera llegar a ser 3 o más? ¿Qué es lo máximo que puede ser  $x_n$ ? Tal máximo correspondería a una situación en la que el interés se acumula de forma instantánea al capital, y así puede interpretarse el crecimiento biológico. Del análisis de la formulación matemática de este proceso pueden obtenerse interpretaciones de la vida animal o vegetal.

La conocida fórmula de Newton nos puede servir para obtener cotas muy ajustadas para los números  $x_n$  :

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} <$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} = s_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Y también

$$x_n < s_n < 2 + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-2}}\right] < 2,75.$$

Al crecer  $n$  el número  $s_n$  se va estabilizando a un número muy importante del Análisis, designado  $e$ , que no es racional. También  $x_n$ , aunque menor que  $s_n$ , se estabiliza a  $e$ , cuya expresión decimal es 2,7182...

## 2.4 Un modelo de crecimiento biológico

Leonardo de Pisa, conocido como Fibonacci, vivió entre 1170 y 1250 y ha sido considerado como el más grande matemático europeo de la edad media. En su *Liber Abaci* propuso este problema: una pareja de conejos está confinada en un recinto cerrado. La pareja y todas las sucesivas se reproducen de manera que al cumplir su segundo mes de vida generan una nueva pareja cada mes. ¿Cuántas parejas hay al cumplirse el mes  $n$ , suponiendo que no hay muertes?

Designamos mediante  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$  el número de parejas existentes en el momento inicial, al finalizar el mes 1, al finalizar el mes 2, ... al finalizar el mes  $n$ . Obviamente  $x_0 = x_1 = 1$ , pues al final del mes 1 la pareja inicial aún no ha generado otra pareja. Pero  $x_2 = 2$ , pues ya se han cumplido los primeros dos meses de vida de la pareja inicial y nace una nueva pareja. A partir de aquí se observa una sencilla relación entre los números  $x_n, x_{n+1}$  y  $x_{n+2}$  : el número  $x_{n+2}$  de parejas existentes al final del mes  $n+2$  se obtiene al sumar las  $x_{n+1}$  que ya había al final del mes  $n+1$  y las  $x_n$  que han generado al cumplir al menos dos meses de vida las  $x_n$  que ya había al final del mes  $n$ . Es decir,  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ . Se obtiene así para  $x_0, x_1, x_2, \dots$  lo siguiente

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

La pregunta natural ahora es ¿hay una fórmula para expresar  $x_n$  en función de  $n$ ? De manera sorprendente la respuesta se va a encontrar buscando progresiones geométricas

$$1, x, x^2, x^3, \dots$$

tales que se satisfaga  $x^n + x^{n+1} = x^{n+2}$  para  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Así sucede si y sólo si  $x$  es solución de la ecuación de segundo grado  $1 + x = x^2$ , es decir, cuando  $x$  es uno de los números

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Son los únicos que verifican  $\alpha + \beta = 1$  y  $\alpha\beta = -1$ . Ahora basta observar que si ponemos

$$x_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

se cumple la relación  $x^n + x^{n+1} = x^{n+2}$  cualesquiera que sean  $\lambda$  y  $\mu$ . Éstos se determinan para que resulte  $x_0 = x_1 = 1$ , y se obtiene

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} [\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}].$$

La relación entre las poblaciones iniciales en meses consecutivos, es decir, el cociente  $c_n$  entre  $x_{n-1}$  y  $x_n$  se estabiliza hacia el “número áureo”. Resulta

$$c_n = \frac{x_{n-1}}{x_n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}} = \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n}{\alpha - \beta \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n},$$

y por ser menor que 1 el valor absoluto del cociente de  $\beta$  por  $\alpha$ , las potencias de éste se estabilizan a 0 cuando  $n$  crece, por lo cual  $c_n$  se estabiliza hacia

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = -\beta = 0,618\dots,$$

que es el número áureo. Expresa desde la antigüedad la proporción más armoniosa para los lados de un rectángulo.

Problema: estudiar la variante del modelo de Fibonacci en la que en el instante inicial hay dos parejas recién nacidas y cuatro más que en ese momento cumplen un número exacto de meses igual o superior a 1. ¿A qué número se estabiliza el cociente de  $x_{n-1}$  por  $x_n$ ?

## 2.5 El círculo, números complejos y $\pi$

El cuadrado de un número real distinto de 0 es un número positivo. La ecuación  $x^2 = -1$  no tiene por tanto solución alguna en el marco de los números reales, que son los que se representan sobre la recta. Pero la realidad nos ofrece un objeto muy importante al que se puede dar también un significado numérico: el plano.

En el plano vamos a centrar nuestra atención en el círculo  $U$  de radio 1 cuyo centro es el punto  $(0,0)$ , origen de coordenadas. Cada punto del círculo tiene coordenadas  $(x,y)$  que deben verificar la relación  $x^2 + y^2 = 1$ . En particular, hay cuatro puntos notables en este círculo que son  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(-1,0)$  y  $(0,-1)$ . Cada punto  $u$  de  $U$  determina la semirrecta de origen  $(0,0)$  que pasa por  $u$ . Todas estas semirrectas llenan el plano y sólo  $(0,0)$  es común a dos de ellas que sean distintas. Si fijamos como semirrecta origen la que pasa por  $(1,0)$ , la que pasa por  $u$  forma con ella un ángulo, y al variar  $u$  en el círculo unidad se obtienen todos los ángulos posibles; es decir, en  $U$  se pueden materializar todos los ángulos.

El círculo  $U$  es el borde del disco unidad  $D$ , y  $\pi$  se define como el número real que expresa el área de  $D$ . Ahora podemos asignar a cada  $u \in U$  el número real  $t$  tal que  $\frac{t}{2}$  es el área barrida por el radio que corresponde a  $(1,0)$  al girar respecto del origen en el sentido positivo (contrario al del avance de las agujas de un reloj) hasta la posición de  $u$ . Es claro que  $0 \leq t < 2\pi$ .

El número  $t$  se llama *argumento* o *amplitud* de  $u$ , y expresa la longitud del arco de  $U$  con extremos  $(1,0)$  y  $u$ , recorrido también en sentido positivo. En particular, a los cuatro puntos de  $U$  antes citados corresponden los argumentos  $0$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  y  $\frac{3\pi}{2}$ . La longitud total de  $U$  es, por tanto,  $2\pi$ . Si  $(x,y)$  son las coordenadas de  $u$ , los números  $x, y$  se llaman  $\cos t$  y  $\sin t$  respectivamente, siendo  $t$  el argumento de  $u$ . Se verifica pues la relación fundamental

$$\cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Cualquier punto  $(x,y)$  del plano lo expresamos ahora con la notación  $x+iy$ . En particular,  $(0,1)$  se expresa  $i$  conviniendo que  $i^2 = -1$ . Si convenimos además que  $i^2 = -1$ , los objetos

$$c = a + ib, \quad z = x + iy$$

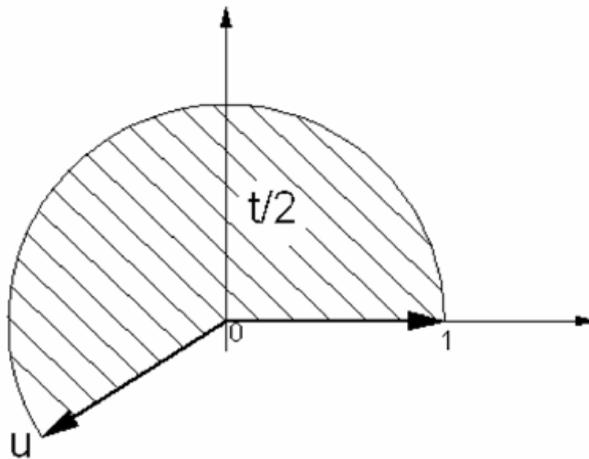


Figura 1: El argumento de  $u$

se suman y multiplican de la siguiente forma, siguiendo las conocidas reglas del cálculo:

$$c + z = (a + x) + i(b + y), \quad cz = (ax - by) + i(ay + bx).$$

Esta es la aritmética de los números complejos.

Los cuatro puntos notables de  $U$  antes citados son los números complejos que se pueden expresar ahora como  $1, i, -1, -i$ . El número  $u$  de  $U$  con argumento  $t$  es  $\cos t + i \operatorname{sen} t$ , y Euler lo designó de la forma  $e^{it}$ , es decir, aparece la llamada identidad de Euler

$$e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t.$$

Una razón para esta notación es que se observa que el producto de dos números complejos de  $U$  se corresponde con la forma de multiplicar dos potencias de la misma base. Pero, ¿por qué aparece aquí nuestro ya conocido número  $e$ ? La explicación queda ahora un poco lejos.

Puesto que  $\pi$  es el argumento de  $-1$ , la identidad de Euler conduce en este caso a

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \operatorname{sen} \pi = -1,$$

es decir,

$$1 + e^{i\pi} = 0.$$

He aquí cómo los cinco números más importantes del Análisis Matemático están ligados por una relación bien sencilla.

### 3 Conclusiones

Volvamos de nuevo a las consideraciones iniciales. ¿Estamos de acuerdo en que se detecta un nivel escaso en la formación matemática de nuestros escolares? ¿Y en que la afición a esta ciencia está decayendo incluso entre los jóvenes brillantes que entran en la universidad? Esto es ciertamente preocupante. Se pueden encontrar razones sociológicas, o de diseño del sistema educativo, o de configuración del mundo actual que implica una información excesiva que distrae constantemente a los jóvenes, precisamente cuando deberían pensar más en realizar actividades para su formación. En mi aula en la universidad encuentro muchas personas dispuestas a recibir información, pero no tanto a desarrollar una tarea creativa buscando respuesta a una pregunta o a un problema. Entrar en este tipo de análisis para decir algo que no sea trivial es una cosa que hay que abordar con urgencia.

Yo sólo me voy a limitar ahora a seguir haciendo preguntas: las personas de mi edad nos entrenábamos de niños con “divisiones largas” de cierta envergadura, o incluso raíces cuadradas, lo cual requería un esfuerzo prolongado de concentración y exigía un rigor para obtener resultados exactos; ¿qué sustituye a tal actividad entre las que realizan los jóvenes actuales que tenga un valor formativo equivalente? Los contenidos en matemáticas de los programas actuales de educación secundaria y bachillerato siguen adoleciendo de defectos importantes, en mi opinión. Por ejemplo, ¿para qué el énfasis en ofrecer tantas recetas para el cálculo integral o diferencial, lo cual no es motivador para el alumno y supongo que tampoco agradable para el profesor? ¿qué ha sucedido antes para que los estudiantes de matemáticas en su primer curso universitario se sorprendan al observar que tienen que tomar decisiones, juzgar la veracidad de algo, o desarrollar una actividad creativa por sí mismos? ¿es que no han tenido experiencias anteriores de tal tipo y sólo se han ocupado de seguir programas automáticos (recetas) predeterminados? Quizas

es esto lo que sucede. Y bien, no debería ser tan difícil encontrar situaciones estimulantes y de problemas para la actividad matemática de nuestros escolares.

## Bibliografía

**J. Baylis** (1991): *What is Mathematical Analysis?*. Macmillan Education LTD, London.

**K.J. Devlin** (1998): *Life by the numbers*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

**M. de Guzmán y B. Rubio** (1990-93): *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático, tres volúmenes*. Ediciones Pirámide, Madrid.

**B. Rubio** (de próxima aparición): *Números y convergencia (Primeros pasos en el Análisis Matemático)*.

# Un método recursivo para construir cadenas de Steiner de circunferencias \*

**E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano**

Fac. Educación, Univ. Complutense de Madrid

{roanes,eroanes}@mat.ucm.es

**F. Botana Ferreiro**

EUET Forestal de Pontevedra, Univ. de Vigo

fbotana@uvigo.es

**J. Fernández Biarge**

ETSI Navales, Univ. Politécnica de Madrid

jfbiarge@telefonica.net

## Abstract

Let us suppose two circles are given, one inside the other. Then chains of circles tangent to both these circles and each one externally tangent to its two neighbors can be inserted. This configuration is called Steiner's chain of circles because it was developed by this great nineteenth-century geometer. He used the inversion method for reducing the pair of given circles to a pair of concentric circles. In this paper, we propose a recursive method to construct Steiner's chains, that does not require the reduction to concentric circles and so it simplifies the construction. A result to compute closed chains is also included. The method has been used to construct Steiner's chains on a Dynamic Geometry System, that does not include inversions. It has been implemented on a Computer Algebra System using a recursive procedure.

*Al Profesor Miguel de Guzmán, que nos dio muchas ideas acerca de invenciones en Geometría Sintética, con las que tanto disfrutaba.*

---

\*Parcialmente subvencionado por los proyectos PR3/04-12410 de la Universidad Complutense de Madrid y MTM2004-03175 del Ministerio de Educación y Ciencia.

## Introducción

Los bellos problemas geométricos clásicos continúan siendo atractivos para muchos matemáticos, que a veces encuentran nuevas soluciones para los viejos problemas. Interesantes muestras de ello pueden encontrarse en libro [4] de Miguel de Guzmán. El presente artículo persigue esa línea de trabajo.

El gran geómetra del siglo XIX Jakob Steiner planteó y resolvió el problema de la construcción de una cadena de circunferencias tangentes a dos dadas,  $a, b$ , una interior a la otra, siendo cada una de las circunferencias eslabones,  $c_1, c_2, c_3, \dots$ , tangente exteriormente a sus dos contiguas (Figura 1).

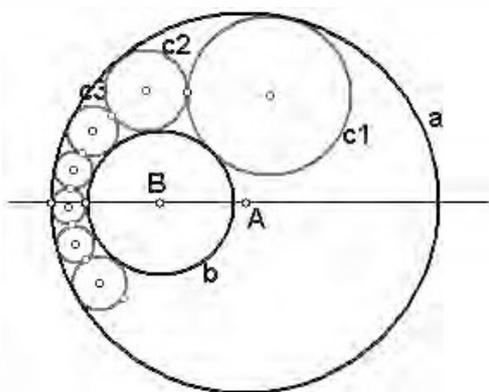


Figura 1: Cadena de Steiner para las circunferencias  $a, b$

Para resolverlo aplicó el método de inversión, ideado por él mismo. Una inversión de polo uno de los puntos límites del haz de circunferencias que determinan las dos dadas, transforma estas en dos circunferencias concéntricas y a las circunferencias eslabones de la cadena en circunferencias todas iguales (del mismo radio). La demostración puede encontrarse en cualquier tratado clásico de Geometría Sintética, como [1, 2, 5, 6], por ejemplo.

Proponemos aquí otro método de construcción de cadenas de Steiner, que no requiere reducir las dos circunferencias dadas a dos concéntricas, ni aplicar inversiones. Se trata de un método inspirado en el que ya propusimos en [7], adaptado ahora a las posibilidades que ofrecen los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD) y los Sistemas de Computación Algebraica (SCA) actuales. Finalmente, para obtener cadenas cerradas se va a desarrollar el método propuesto en [3].

# 1 Construcción recursiva de cadenas de Steiner

**Definición 1.1.** Sean  $a, b$  dos circunferencias, tales que  $b$  sea interior a  $a$ . Una cadena de Steiner de circunferencias para  $a, b$  es una sucesión finita de circunferencias,  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , que verifican las condiciones (Figura 1):

- 1)  $c_i$  es tangente exteriormente a la circunferencia  $b$  ;  $i = 1, 2, \dots, n$
- 2)  $c_i$  es tangente interiormente a la circunferencia  $a$  ;  $i = 1, 2, \dots, n$
- 3)  $c_i$  es tangente exteriormente a  $c_{i-1}$  ;  $i = 2, \dots, n$
- 4)  $c_i$  es distinta de  $c_{i-2}$  ;  $i = 3, \dots, n$

Denotaremos por  $A, B$  los respectivos centros de las circunferencias dadas,  $a, b$ . En caso de ser  $a, b$  concéntricas, la construcción de la cadena es trivial. Por tanto, en adelante supondremos  $A \neq B$ .

## 1.1 Primera circunferencia de la cadena

Una circunferencia,  $c$ , tangente exteriormente a la circunferencia  $b$  y tangente interiormente a la circunferencia  $a$  queda determinada por su punto común,  $P$ , con  $a$  (o por su punto común,  $Q$ , con  $b$ ). La construcción de  $c$  es trivial en el caso particular en que  $P$  (o  $Q$ ) esté en la recta  $AB$ . Por tanto, en adelante supondremos  $P \notin AB$ .

**Definición 1.2.** Dado un punto  $P \in a$ , sea  $P'$  el punto de  $b$  tal que la semirrecta  $B_{P'}$  sea paralela y de sentido contrario que la semirrecta  $A_P$ . Al punto de intersección de las rectas  $PP'$  y  $AB$ , lo denominaremos punto central de la cadena que determinan  $a$  y  $b$  y lo denotaremos por  $H$ .

El punto central  $H$ , que es centro de una homotecia de razón negativa en que  $a, b$  son homólogas, no depende del punto  $P \in a$ , a partir del cual se determina. En nuestra construcción de cadenas de Steiner dicho punto  $H$  será fundamental.

Para abreviar notación, a una semirrecta de origen el punto  $V$  y que pasa por el punto  $W$  la denotaremos por  $V_W$ . Con esta notación la determinación de  $H$  se puede abreviar así (Figura 2):

$$P \in a ; P' \in b ; B_{P'} \downarrow A_P ; H = PP' \cap AB \quad (1)$$

donde la flecha hacia abajo entre dos semirrectas indica que son paralelas y de sentido contrario.

**Proposición 1.3.** *Siendo la circunferencia  $b$  interior a la  $a$ , el punto central,  $H$ , es interior a la circunferencia  $b$ .*

*Demostración.* Denotemos por  $r_a, r_b$  las medidas de sus radios de las respectivas circunferencias dadas,  $a, b$ . De la semejanza de los triángulos HPA y HP'B se sigue que  $\overline{HB} = \frac{\overline{HA}}{r_a} r_b$ , pero, por ser  $A$  y  $B$  puntos interiores de  $a$ , también lo es  $H$ , luego  $\overline{HA} < r_a$ , lo que implica  $\overline{HB} < r_b$  y en consecuencia  $H$  es punto interior de  $b$  (Figura 2).  $\square$

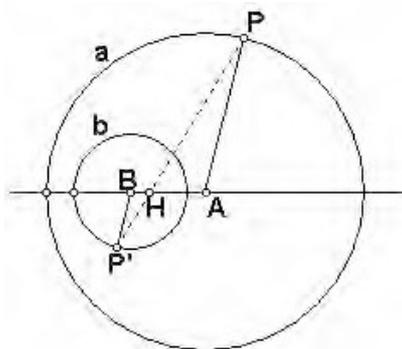


Figura 2: Determinación del punto central de la cadena

Las circunferencias dadas,  $a, b$  son homólogas en una homotecia de centro el punto  $H$ . También son homólogas en una inversión de polo el punto  $H$ . En adelante, denotaremos por  $i$  a la inversión de polo  $H$  y potencia positiva en que  $a, b$  son homólogas <sup>1</sup>.

**Teorema 1.4.** *Fijado un punto,  $P \in a$ , existe una única circunferencia,  $c$ , tangente interiormente a la  $a$  en  $P$  y tangente exteriormente a la  $b$ . Su punto de contacto,  $Q$ , con  $b$ , está alineado con  $H$  y  $P$ . El centro,  $C$ , de la circunferencia  $c$  es el punto de intersección de las rectas  $AP, BQ$  (Figura 3).*

*Demostración.* Siendo  $H$  un punto interior y  $P$  un punto exterior a la circunferencia  $b$ , el axioma de continuidad permite asegurar que la semirrecta  $HP$  corta a  $b$  en un punto, que denotaremos por  $Q$ . Por tanto, la inversión  $i$ , anteriormente mencionada, tal que  $i(a) = b$ , tiene por potencia de inversión

<sup>1</sup>En la demostración de los resultados que siguen se hace uso de esta inversión, para abreviar, pero en el algoritmo geométrico de la construcción de la cadena (objetivo esencial del presente artículo), no se hace uso de esta inversión, como se apreciará más adelante.

el producto  $\overline{HP} \cdot \overline{HQ}$  (Figura 3). En consecuencia, toda circunferencia del haz de puntos base  $P, Q$  es doble en  $i$ . En particular, la circunferencia,  $c$ , tangente interiormente a la  $a$  en  $P$  y que pasa por  $Q$  verifica  $i(c) = c$ . Por ser  $i$  una transformación isogonal, las circunferencias  $b$  y  $c$  serán tangentes exteriormente en su punto común  $Q$ , ya que sus respectivas inversas,  $i(c) = c$  e  $i(b) = a$ , eran tangentes interiormente en su punto común  $P = i(Q)$ .

La unicidad de la circunferencia  $c$  sigue de pertenecer al haz de circunferencias tangentes a la  $a$  en el punto  $P$ , de las cuales sólo una será tangente a la circunferencia  $b$ .

Por otra parte, al ser  $Q = i(P)$  y ser  $i$  una inversión de polo  $H$ , los puntos  $H, P, Q$  son colineales.

Finalmente, por ser  $a, c$  dos circunferencias, de centros respectivos  $A, C$ , tangentes interiormente en  $P$ , los puntos  $P, A, C$  son colineales. Análogamente por ser  $b, c$  dos circunferencias, de centros respectivos  $B, C$ , tangentes interiormente en  $Q$ , los puntos  $Q, B, C$  son colineales.  $\square$

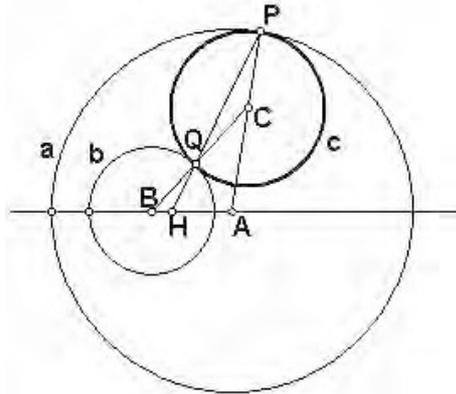


Figura 3: Determinación de los puntos  $Q$  y  $C$

Fijado  $P$ , el teorema anterior permite determinar los puntos  $Q, C$ , por las condiciones

$$Q = H_P \cap b ; C = BQ \cap PA \quad (2)$$

donde  $H_P$  es la semirrecta de origen  $H$  y que pasa por  $P$ . De modo análogo, se prueba que fijado  $Q$ , los puntos  $P, C$  quedan determinados por las condiciones

$$P = H_Q \cap a ; C = BQ \cap PA \quad (2')$$

## 1.2 Construcción recursiva de las circunferencias siguientes

Sea  $c$  una circunferencia tangente interiormente a la circunferencia  $a$  y tangente exteriormente a la circunferencia  $b$ . De la proposición 1.3 se sigue que el punto central  $H$  es punto exterior de  $c$ . En consecuencia, las rectas tangentes a  $c$  trazadas desde el punto  $H$  son rectas reales.

**Definición 1.5.** Sea  $T$  el punto de contacto de la circunferencia  $c$  con una de sus tangentes trazadas desde el punto  $H$ . A la circunferencia de centro  $H$  y que pasa por  $T$ , la denominaremos circunferencia central de la cadena que determinan las circunferencias  $a, b$  y la denotaremos por  $d$  (Figura 4).

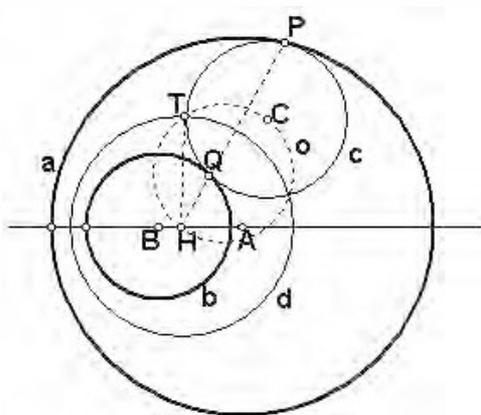


Figura 4: Determinación de la circunferencia central

En nuestra construcción de cadenas de Steiner dicha circunferencia central de la cadena será fundamental. Por ser ortogonal a la  $c$ , la determinación de  $d$  se abrevia en los dos pasos siguientes:

- i)  $o :=$  circunferencia de diámetro  $\overline{HC}$
- ii)  $d :=$  circunferencia de centro  $H$  que pasa por  $T \in c \cap o$  (3)

La siguiente proposición asegura la consistencia de la definición precedente.

**Proposición 1.6.** La circunferencia central  $d$  no depende de la circunferencia  $c$  (tangente a las circunferencias  $a, b$ ) utilizada para determinarla.

*Demostración.* De acuerdo con el teorema 1.4, los puntos  $P, Q$ , de contacto con  $c$  de las respectivas circunferencias  $a, b$ , y el punto central  $H$  son colineales. En consecuencia, la potencia de la inversión  $i$  de polo  $H$  es  $\overline{HP} \cdot \overline{HQ}$ , que

es también la potencia geométrica del punto  $H$  respecto de la circunferencia  $c$ . Por otra parte, al ser  $c, d$  circunferencias ortogonales, dicha potencia geométrica es también  $\overline{HT}^2$ . Por tanto, denotando por  $k$  a la potencia de la inversión  $i$ , se tiene  $\overline{HT}^2 = \overline{HP} \cdot \overline{HQ} = k$ . Luego el radio,  $\overline{HT} = \sqrt{k}$ , de la circunferencia  $d$  es independiente de cual sea la circunferencia  $c$  utilizada para determinarlo.  $\square$

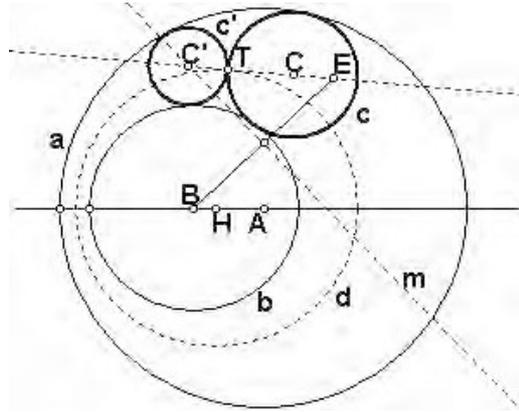


Figura 5: Determinación de la circunferencia siguiente

**Corolario 1.7.** Sean  $c, c'$  dos circunferencias, ambas tangentes interiormente a la circunferencia  $a$  y tangentes exteriormente a la circunferencia  $b$ , y tangentes exteriormente entre sí (es decir, dos circunferencias eslabones consecutivos de una cadena). Entonces el punto de contacto,  $T$ , de  $c, c'$  está en la circunferencia central,  $d$ , de la cadena (Figura 5).

*Demostración.* Sea  $\gamma$  la región angular de vértice  $H$  cuyos lados son las dos semirrectas de origen  $H$  tangentes a la circunferencia  $c$  y que contiene a  $c$ . Análogamente, sea  $\gamma'$  la región angular de vértice  $H$  cuyos lados son las dos semirrectas de origen  $H$  tangentes a la circunferencia  $c'$  y que contiene a  $c'$ . Ambas regiones angulares,  $\gamma, \gamma'$ , son convexas por ser  $H$  interior a la circunferencia  $b$  y ser  $c, c'$  tangentes exteriormente a la  $b$ . Para que  $c, c'$  sean dos circunferencias tangentes exteriormente entre sí, es preciso que las regiones angulares convexas  $\gamma, \gamma'$  sean adyacentes, es decir, que su intersección sea una semirrecta lado común. Por ser dicha semirrecta tangente a dichas circunferencias,  $c, c'$ , su punto de contacto con ellas estará en la circunferencia central,  $d$ , de la cadena.  $\square$

**Proposición 1.8.** *Sea  $c$  una circunferencia tangente exteriormente a la circunferencia  $b$  y ortogonal a la circunferencia  $d$ . Entonces  $c$  es tangente interiormente a la circunferencia  $a$ .*

*Demostración.* Por ser  $c$  ortogonal a la circunferencia  $d$ , será doble en la inversión  $i$  de polo  $H$  y potencia positiva en que  $i(a) = b$ . Siendo  $Q$  el punto de contacto de  $b, d$ , y  $P$  su imagen en  $i$ , se tiene:  $P = i(Q) \in i(c \cap b) = i(c) \cap i(b) = c \cap a$ . En consecuencia, al ser  $i$  una transformación isogonal,  $a, c$  son tangentes en  $P = i(Q)$ , por ser  $a, b$  tangentes en  $Q$ .  $\square$

**Teorema 1.9.** *Sea  $c$  una circunferencia tangente interiormente a la circunferencia  $a$  y tangente exteriormente a la circunferencia  $b$ . Sea  $T$  uno de los puntos de intersección de las circunferencias  $c, d$  (Figura 5). Sea  $E$  el punto de la semirrecta  $T_C$  (de origen  $T$  y que pasa por  $C$ ), tal que  $\overline{TE}$  sea igual al radio,  $r_b$ , de  $b$ . Sea  $m$  la mediatriz del segmento  $\overline{EB}$ . Entonces las rectas  $m, CT$  son secantes y la circunferencia  $c'$  de centro  $C' = m \cap CT$  y que pasa por  $T$  es tangente exteriormente a las circunferencias  $c, b$  y tangente interiormente a la circunferencia  $a$ .*

*Demostración.* De acuerdo con lo indicado anteriormente, las circunferencias  $c, d$  son ortogonales. Siendo  $T$  uno de sus puntos de intersección, las rectas  $CT$  y  $HT$  son perpendiculares. En consecuencia, el punto  $E$  del enunciado del teorema verifica  $\text{dist}(E, HT) = \overline{ET} = r_b$ , pero  $\text{dist}(B, HT) \leq \overline{BH} < r_b$ , donde la última desigualdad sigue de la proposición 1.3. Por tanto,  $\text{dist}(E, HT) \neq \text{dist}(B, HT)$  luego las rectas  $BE$  y  $HT$  son secantes y, en consecuencia, sus respectivas perpendiculares  $CT$  y la mediatriz,  $m$ , de  $\overline{BE}$ , también son secantes. Su punto de intersección,  $C'$ , está en la recta  $CT$ , que es exterior a  $b$  (por ser tangente a  $d$ ), luego  $C'$  es exterior a  $b$ . Por tanto,  $\overline{C'B} > r_b$  y en consecuencia  $\overline{C'E} = \overline{C'B} > r_b$ , luego  $\overline{C'E} > \overline{TE} = r_b$ . De esta desigualdad se sigue que  $T$  está entre  $C'$  y  $C$ . En consecuencia, para la circunferencia,  $c'$ , de centro  $C'$  y que pasa por  $T$ , se verifica  $\text{dist}(C', C) = \overline{C'T} + \overline{TC} = r_{c'} + r_c$  (donde  $r_{c'}$  es el radio de  $c'$ ), luego  $c'$  es tangente exteriormente a  $c$ . Por otra parte,  $\text{dist}(C', B) = \text{dist}(C', E) = \overline{C'T} + \overline{TE} = r_{c'} + r_b$ , luego  $c'$  es tangente exteriormente a  $b$ . Finalmente, la recta  $HT$  es tangente común a las circunferencias  $c$  y  $c'$  en su punto común  $T$ , luego  $c'$  es ortogonal a  $d$ . Todo ello, de acuerdo con la proposición 1.8, implica que  $c'$  sea tangente interiormente a la circunferencia  $a$ .  $\square$

Una vez construidas las circunferencias  $c, d$  y elegido el sentido,  $s$ , de la cadena (horario o antihorario), el teorema anterior permite determinar la circunferencia  $c'$ , siguiente en la cadena a la circunferencia  $c$ , mediante los cinco pasos siguientes (Figura 5):

- i')  $T \in c \cap d$ , tal que el ángulo convexo  $CHT$  sea de sentido  $s$
- ii')  $E$  es el punto de la semirrecta  $T_C$ , tal que  $\overline{TE} = r_b$
- iii')  $m$  es la mediatriz del segmento  $\overline{EB}$
- iv')  $C'$  es el punto de intersección de las rectas  $m, CT$
- v')  $c'$  es la circunferencia de centro  $C'$  y que pasa por  $T$

(4)

## 2 Algoritmo geométrico para generar cadenas

Dadas dos circunferencias,  $a, b$ , tales que la  $a$  sea interior a la  $b$ , un punto  $P \in a$  y un sentido,  $s$ , de rotación, es posible construir una cadena de Steiner para  $a, b$ , cuya primera circunferencia sea tangente a la circunferencia  $a$  en  $P$  y cuyas restantes circunferencias eslabones sigan el sentido  $s$ , aplicando los resultados de la sección 1:

- i'') el punto central  $H$  queda determinado por las fórmulas (1)
- ii'') el punto de contacto  $Q$  y el centro  $C$  de la primera circunferencia de la cadena quedan determinados por las fórmulas (2)
- iii'') la circunferencia central  $d$  queda determinada por los dos pasos (3)
- iv'') cada circunferencia  $c'$  de la cadena, siguiente a otra circunferencia,  $c$ , queda determinada recursivamente por los cinco pasos (4)

Todo ello permite establecer el siguiente algoritmo geométrico para la construcción de una cadena de Steiner de  $n$  eslabones en sentido de rotación  $s$ , para las circunferencias  $a, b$ , cuya primera circunferencia pase por un punto dado  $P \in a$ .

### Inputs

- $A$  (centro de la circunferencia  $a$ )
- $B$  (centro de la circunferencia  $b$ , distinto de  $A$ )
- $P$  (punto de la circunferencia  $a$ , tal que  $P, B, A$  no colineales)
- $G$  (punto de la circunferencia  $b$ )
- $s$  (sentido de rotación de la cadena)
- $n$  (número de circunferencias de la cadena)

## Output

Cadena de Steiner para  $a, b$  de  $n$  circunferencias en sentido  $s$ , cuya primera circunferencia pasa por el punto  $P \in a$ .

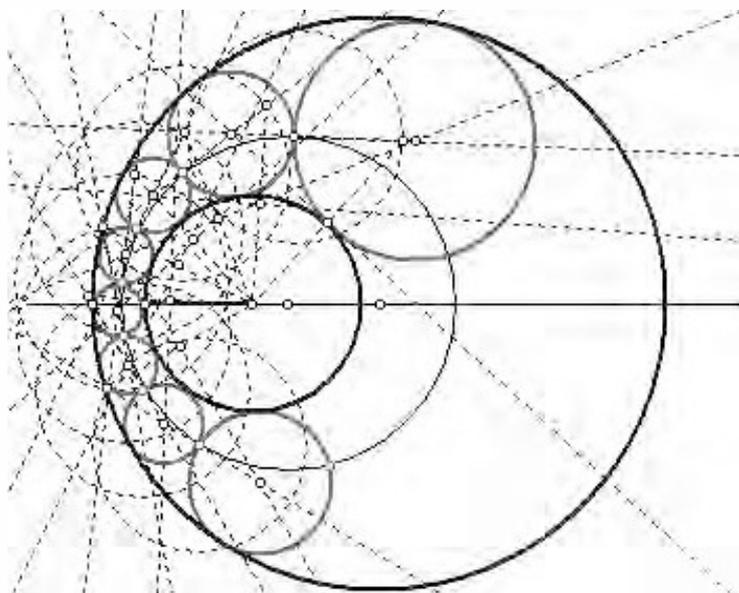
## Steps

1.  $AB$ ::=recta que pasa por los puntos  $A, B$
2.  $PA$ ::=recta que pasa por los puntos  $P, A$
3.  $r_1$ ::=recta paralela a  $PA$  por el punto  $B$
4.  $b$ ::=circunferencia de centro  $B$  y que pasa por  $G$
5.  $P'$ ::=punto de intersección  $r_1$  y  $b$ , tal que los puntos  $P, P'$  están en distinto semiplano de borde la recta  $AB$
6.  $PP'$ ::=recta que pasa por los puntos  $P, P'$
7.  $H$ ::=punto de intersección de  $PP'$  y  $AB$
8.  $H_P$ ::=semirrecta de origen  $H$  que pasa por  $P$
9.  $Q$ ::=punto de intersección  $H_P$  y  $b$
10.  $BQ$ ::=recta que pasa por los puntos  $B, Q$
11.  $C$ ::=punto de intersección de  $BQ$  y  $PA$
12.  $c$ ::=circunferencia de centro  $C$  y que pasa por  $P$
13.  $\overline{HC}$ ::=segmento de extremos los puntos  $H, C$
14.  $N$ ::=punto medio del segmento  $HC$
15.  $o$ ::=circunferencia de centro  $N$  y que pasa por  $H$
16.  $T$ ::=punto de  $o \cap c$ , tal que el ángulo orientado  $CHT$  sea del sentido  $s$
17.  $d$ ::=circunferencia de centro  $H$  y que pasa por  $T$
18.  $\overline{BG}$ ::=segmento de extremos los puntos  $B, G$
19. Iterar  $n - 1$  veces los siguientes pasos 19.1 al 19.11:
  - 19.1  $e$ ::=circunferencia de centro  $T$  y radio  $BG$
  - 19.2  $T_C$ ::=semirrecta de origen  $T$  que pasa por  $C$
  - 19.3  $E$ ::=punto de intersección de  $T_C$  y  $e$
  - 19.4  $\overline{EB}$ ::=segmento de extremos los puntos  $E, B$
  - 19.5  $M$ ::=punto medio del segmento  $EB$
  - 19.6  $m$ ::=perpendicular por  $M$  al segmento  $EB$
  - 19.7  $E_T$ ::=semirrecta de origen  $E$  que pasa por  $T$
  - 19.8  $C'$ ::=punto de intersección  $E_T$  y  $m$
  - 19.9  $c'$ ::=circunferencia de centro  $C'$  y que pasa por  $T$
  - 19.10  $T'$ ::=el otro punto de intersección de  $c'$  y  $d$ , distinto del  $T$
  - 19.11  $T, C$  pierden su nombre y  $T', C'$  son renombrados como  $T, C$ .

### 3 Representación gráfica de cadenas con un SGD

El algoritmo geométrico de la sección 2 puede ser aplicado a representar gráficamente sobre un SGD (Sistema de Geometría Dinámica) la configuración de cadenas de Steiner desarrollada en la sección 1.

Para ello puede utilizarse cualquiera de los SGD usuales: The Geometer's Sketchpad, Cabri-geomètrè, Cinderella,... La parte iterativa del algoritmo (paso 19) se presta a ser ejecutada mediante un procedimiento recursivo (un "script", si se utiliza la versión 3 de The Geometer's Sketchpad, o una "macro" si se utiliza Cabri-geomètrè).



*Figura 6: Generación de una cadena de Steiner con un SGD*

En la figura 6 aparece la representación gráfica del proceso de generación de una cadena de Steiner obtenida utilizando The Geometer's Sketchpad. Una vez construida una circunferencia de la cadena, se seleccionan los cinco objetos  $T, \overline{BG}, C, B, d$ , para construir, a partir de ellos, la siguiente circunferencia de la cadena, al aplicarle dicho procedimiento recursivo.

## 4 Cálculos efectivos para obtener cadenas cerradas

**Definición 4.1.** *La cadena de Steiner  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , considerada en la definición 1.1, se dice que es una cadena cerrada si se verifican las dos condiciones adicionales siguientes (además de las cuatro allí mencionadas):*

5)  $c_n$  es tangente exteriormente a la circunferencia  $c_1$

6)  $c_n$  es distinta de  $c_2$

El hecho de que una cadena de Steiner de  $n$  circunferencias resulte ser abierta o cerrada, depende de la longitud de los radios  $r_a, r_b$ , de las circunferencias  $a, b$ , y de la distancia,  $\delta_{AB}$ , entre sus respectivos centros. Por otra parte, la cadena puede cerrar después de  $N$  ciclos (vueltas). En principio, si estos parámetros son elegidos aleatoriamente, la probabilidad de que la cadena sea cerrada es nula. El siguiente resultado expresa la relación que ha de existir entre esos parámetros, para que la cadena sea cerrada.

**Teorema 4.2.** *La cadena de Steiner que se está considerando es cerrada, si y sólo si entre los parámetros  $r_a, r_b, \delta_{AB}, n, N$  se verifica la relación siguiente*

$$(r_a - \mu r_b)(\mu r_a - r_b) = \mu \delta_{AB}, \text{ donde } \mu = \frac{1 - \operatorname{sen}(\frac{N\pi}{n})}{1 + \operatorname{sen}(\frac{N\pi}{n})} \quad (5)$$

*Demostración.* Sigue de lo expuesto en [3]. □

Al ser (5) un polinomio de grado 2 en  $r_a$  y en  $r_b$ , fijados valores concretos para  $\delta_{AB}, n, N$  y para uno de los dos radios  $r_a, r_b$ , existen dos posibles valores para el otro radio, para los cuales la cadena es cerrada. Dichos valores obviamente corresponden a los radios de una circunferencia exterior y de otra interior a aquella cuyo radio se había fijado.

## 5 Automatización de cálculos con un SCA

Salvo en casos triviales, para decidir correctamente si una cadena de Steiner es cerrada o abierta es preciso introducir coordenadas y manipular las ecuaciones de los objetos geométricos contenidos en la configuración.

La complicación de las expresiones que aparecen se incrementa a medida que se avanza en la cadena. Por ello es aconsejable desarrollar la implementación del algoritmo de la sección 2 sobre un SCA (Sistema de Com-

putación Algebraica). Entre ellos, hemos elegido Maple, teniendo en cuenta su comodidad, difusión en Educación, portabilidad y potencia de cálculo.

En el paquete que hemos desarrollado al respecto, una cadena de  $n$  circunferencias es codificada mediante una lista de forma  $[[C_1, T_1], [C_2, T_2] \dots [C_n, T_n]]$ , donde  $C_i$  es el centro de la  $i$ -ésima circunferencia de la cadena y  $T_i$  su punto de contacto con la siguiente.

Los datos utilizados para determinar la cadena son: el centro,  $A$ , de la circunferencia dada exterior,  $a$  (que se elegirá como origen de coordenadas, por razón de brevedad de cálculo); el centro,  $B$ , de la circunferencia dada interior,  $b$  (que se elegirá con segunda coordenada nula); un punto,  $P$ , de la circunferencia  $a$  (que se elegirá con segunda coordenada no negativa); un punto,  $G$ , de la circunferencia  $b$ ; el número,  $n$  de circunferencias de la cadena y el sentido,  $s$ , de rotación al generar la cadena, valorado en 1, -1, de acuerdo con el convenio usual (1 para sentido antihorario y -1 para sentido horario).

El valor del sentido (1, -1), es alojado en una variable global,  $s$ , al objeto de ser tenido en cuenta al calcular las siguientes circunferencias de la cadena. A fin de elegir adecuadamente (entre los dos posibles) el punto,  $T$ , de intersección de las circunferencias  $c, d$ , definimos un procedimiento auxiliar, para ser aplicado a los cuatro argumentos:  $C, H$ , lista  $Lt$  (de puntos de intersección de  $c, d$ ),  $s$ . Al ejecutarlo devuelve el punto,  $T$ , de la lista  $Lt$ , tal que el sentido del ángulo convexo  $CHT$  sea el alojado en  $s$ .

El paquete consta de 21 procedimientos, de los cuales describimos sólo los directamente relacionados con el problema de las cadenas de Steiner, omitiendo toda alusión a los subprocedimientos auxiliares relativos a operaciones geométricas elementales, que pueden encontrarse descritos en [8].

El procedimiento **CircOne** calcula la primera circunferencia de la cadena. Al aplicarlo a los argumentos  $A, B, P, G$ , devuelve la circunferencia tangente a la  $a$  en el punto  $P$ , codificada en la forma  $[C_1, T_1]$ .

El procedimiento recursivo **CircAdd** añade nuevas circunferencias a la cadena de Steiner. Su primer argumento es la primera circunferencia de la cadena, o bien la lista de circunferencias de la cadena calculadas previamente y su segundo argumento es el número de nuevas circunferencias a añadir a la cadena. Devuelve la lista de circunferencias de la cadena calculadas hasta aquí, codificadas del modo mencionado anteriormente.

El procedimiento **chainRad**, al ser aplicado a una lista de circunferencias

dadas en la forma antedicha, por  $[centro, un\ punto]$ , devuelve la lista de esas circunferencias codificadas en la forma  $[centro, radio]$ .

El procedimiento **chainEqu**, al ser aplicado a una lista de circunferencias codificadas en la forma  $[centro, radio]$ , devuelve la lista de sus ecuaciones.

El procedimiento **ClosedChainRad**, al ser aplicado a  $(A, B, G, n, N)$ , devuelve el punto  $P = [0, radio]$ , por el que ha de pasar la circunferencia  $a$  (la exterior), de modo que la cadena de  $n$  circunferencias sea cerrada tras describir  $N$  ciclos (o vueltas).

El procedimiento principal del paquete es **SteinerChainCr**. Al ser aplicado a  $(A, B, P, G, n)$ , devuelve la cadena de Steiner de  $n$  circunferencias codificadas en la forma  $[centro, radio]$ , precedidas de las dos circunferencias dadas,  $a$  y  $b$ , codificadas de la misma forma.

Notemos que el centro y radio de las circunferencias de la cadena pueden venir dadas por expresiones exageradamente largas, en cuyo caso interesa valorarlas en coma flotante con el número deseado de dígitos de aproximación. Para ello, antes de ejecutar el procedimiento principal *SteinerChainCr*, damos a la variable global *exac* valor 1 para obtener resultados exactos y valor distinto de 1 para que los resultados sean devueltos en coma flotante.

El procedimiento **ClosedSteinerChain**, al ser aplicado a  $(A, B, G, n, N)$ , devuelve la cadena cerrada correspondiente a esos argumentos, de modo análogo a como lo hace el procedimiento anterior.

Finalmente, el procedimiento **dibChain**, al ser aplicado a una lista de circunferencias devueltas al ejecutar uno de los dos procedimientos anteriores, devuelve la representación gráfica de la cadena, haciendo uso del paquete *plots* de Maple.

**Ejemplo 1.** Determinación de la cadena de 5 circunferencias, tangentes interiormente a la circunferencia de centro  $A(0,0)$  que pasa por  $P(5,0)$  y tangentes exteriormente a la circunferencia de centro  $B(1,0)$  que pasa por  $G(3,0)$ , en sentido antihorario ( $s = 1$ ), usando aritmética exacta. Tras introducir los datos de la cadena, vamos a ir ejecutando uno a uno los procedimientos descritos, hasta obtener la correspondiente cadena de Steiner. Finalmente, ejecutaremos el procedimiento principal, que devolverá directamente la misma cadena obtenida paso a paso, pero ahora precedida de las dos circunferencias datos,  $a$  y  $b$ , para representar gráficamente todas ellas.

```

> A:=point(0,0):
> B:=point(1,0):
> P:=point(5,0):
> G:=point(3,0):
> s:=1:
> op1:=CircOne(A,B,P,G);
      op1 := [[4, 0], [85/23, 4*sqrt(30)/23]]
> op2:=CircAdd(op1,1);
      op2 := [[[4, 0], [85/23, 4*sqrt(30)/23]], [[37/11, 4*sqrt(30)/11], [145*sqrt(30)/59, 28*sqrt(30)/59]]]
> op3:=CircAdd(op2, 3);
      op3 := [[[4, 0], [85/23, 4*sqrt(30)/23]], [[37/11, 4*sqrt(30)/11], [145*sqrt(30)/59, 28*sqrt(30)/59]],
      [[17*sqrt(30)/13, 8*sqrt(30)/13], [-5*sqrt(30)/137, 76*sqrt(30)/137]], [[-107*sqrt(30)/59, 28*sqrt(30)/59], [-785*sqrt(30)/341, 52*sqrt(30)/341]],
      [[-116*sqrt(30)/41, -8*sqrt(30)/41], [-1475*sqrt(30)/1103, -476*sqrt(30)/1103]]]
> op4:=chainRad(op3);
      op4 := [[[4, 0], 1], [[37/11, 4*sqrt(30)/11], 12/11], [[17*sqrt(30)/13, 8*sqrt(30)/13], 18/13],
      [[-107*sqrt(30)/59, 28*sqrt(30)/59], 108/59], [[-116*sqrt(30)/41, -8*sqrt(30)/41], 81/41]]
> chainEqu(op4);
      ((x - 4)^2 + y^2 - 1 = 0, (x - 37/11)^2 + (y - 4*sqrt(30)/11)^2 - 144/121 = 0,
      (x - 17*sqrt(30)/13)^2 + (y - 8*sqrt(30)/13)^2 - 324/169 = 0,
      (x + 107*sqrt(30)/59)^2 + (y - 28*sqrt(30)/59)^2 - 11664/3481 = 0,
      (x + 116*sqrt(30)/41)^2 + (y + 8*sqrt(30)/41)^2 - 6561/1681 = 0)
> exac:=1:
> op5:=SteinerChainCr(A,B,P,G,5);
      Es una cadena abierta.
      op5 := [[[0, 0], 5], [[1, 0], 2], [[4, 0], 1], [[37/11, 4*sqrt(30)/11], 12/11], [[17*sqrt(30)/13, 8*sqrt(30)/13], 18/13],
      [[-107*sqrt(30)/59, 28*sqrt(30)/59], 108/59], [[-116*sqrt(30)/41, -8*sqrt(30)/41], 81/41]]]

```

```
> dibChain(op5);
```

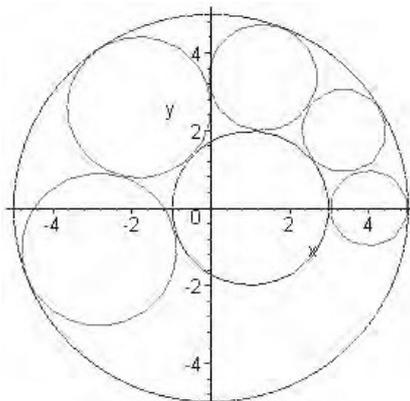


Figura 7: Cadena abierta calculada en aritmética exacta

**Ejemplo 2.** Determinación de la cadena de 10 circunferencias, cerrada en un ciclo, tangentes interiormente a una circunferencia de centro  $A(0,0)$  y tangentes exteriormente a la circunferencia de centro  $B(1,0)$  que pasa por  $G(1,2)$ , en sentido horario ( $s = -1$ ), usando aritmética en coma flotante con 6 dígitos de aproximación. Tras introducir los datos de la cadena, vamos a ejecutar el procedimiento *ClosedChainRad* para calcular el radio de  $a$ , y después *ClosedSteinerChain*, que devolverá la lista de circunferencias de la cadena, precedidas de las dos circunferencias datos,  $a$  y  $b$ , para representar gráficamente todas ellas.

```
> A:=point(0,0):
> B:=point(1,0):
> G:=point(1,2):
> exac:=1:
> P:=ClosedChainRad(A,B,G,10,1);
```

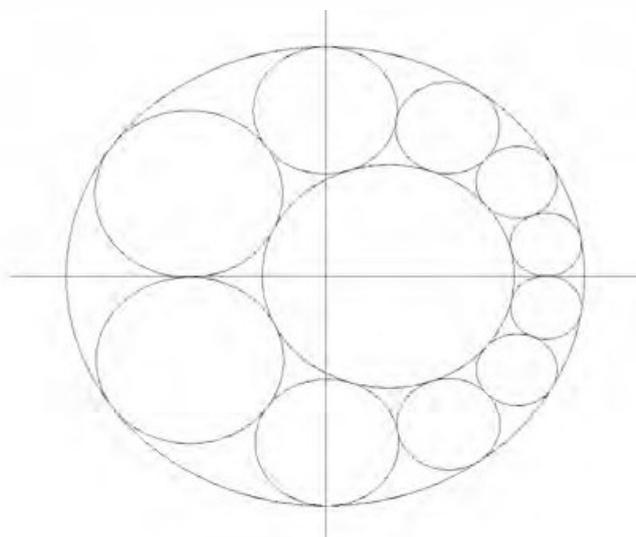
$$P := \left[ 0, \frac{1}{2} \frac{4\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + 4 + 2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)^4 + 14\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + 1}}{-\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)^2 + 1} \right]$$

```
> s:=-1:
> exac:=0:
> Digits:=6:
> ClosedSteinerChain(A,B,G,10,1);
```

*Es una cadena cerrada.*

```
SC2 := [[[0, 0], 4.11567], [[1, 0], 2], [[0., 2.97608], 1.13959],  
[[1.93723, 2.66271], .822830], [[3.03364, 1.68898], .643550],  
[[3.50221, .572845], .566953], [[3.50457, -.560652], .566545],  
[[3.04162, -1.67728], .642250], [[1.95332, -2.65417], .820179],  
[[-2.49429e - 1, -2.98008], 1.13555], [[-2.14927, -1.50642], 1.49102],  
[[-2.16556, 1.47827], 1.49371]]
```

```
> dibChain(SC2);
```



*Figura 8: Cadena cerrada calculada en coma flotante*

## Conclusiones

El método recursivo propuesto para construir cadenas de Steiner de circunferencias es más breve que el clásico método de reducción a circunferencias concéntricas por inversión. De hecho, el algoritmo contenido en la sección **2** incluye operaciones elementales de incidencia, intersección, paralelismo, punto medio y perpendicularidad. En cambio, el método clásico requiere determinar puntos inversos, lo cual, tanto por antiparalelismo como por puntos concíclicos, es más costoso, desde el punto de vista del trazado gráfico.

Por otra parte, el método recursivo descrito aquí, al no requerir inversión, puede ser utilizado para construir cadenas de Steiner sobre Sistemas de Geometría Dinámica, que no incluyen la transformación inversión, como se ha visto en la sección 3.

Además, nuestro método recursivo puede ser implementado sobre Sistemas de Computación Algebraica, definiendo un procedimiento recursivo que calcule cada circunferencia de la cadena a partir de la anterior, como se ha visto en la sección 5.

Finalmente, para obtener cadenas cerradas se han desarrollado los cálculos efectivos que permiten calcular el radio de una de las dos circunferencias dadas, en función de los demás datos.

## Referencias

- [1] M. Berger (1987): *Geometry*. Pages 315-316. Springer-Verlag.
- [2] H.S.M. Coxeter (1969): *Introduction to Geometry*. Pages 113-116. Wiley.
- [3] J. Fernández Biarge (1992): *En torno al logotipo de la XXVIII Olimpiada Matemática Española*. Bol. de la Soc. Puig Adam, n 30, págs. 23-30.
- [4] M. de Guzmán (2002): *La experiencia de descubrir en Geometría*, Nivola.
- [5] C.S. Ogilvy (1990): *Excursions in Geometry*. Pages 51-54. Dover Publications, Inc.
- [6] D. Pedoe (1988): *Geometry. A comprehensive course*. Pages 96-100. Dover Publications, Inc.
- [7] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (1993): *Evaluación de la simplicidad y exactitud de dos construcciones de cadenas de Steiner*. Bol. de la Soc. Puig Adam, n 33, págs. 37-53.
- [8] E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano (2002): *Un método paramétrico para demostrar automáticamente y determinar lugares a partir de las construcciones geométricas*. Bol. de la Soc. Puig Adam, n 62, págs. 34-71.
- [9] J.L. Valcarce, F. Botana (2001): *Rex, Discovery, Lugares*. Universidad de Vigo, ([rosalia.uvigo.es/sdge/](http://rosalia.uvigo.es/sdge/) )

# Un problema usual de máximos y mínimos

**Justo Cabezas Corchero<sup>1</sup>**

**María de la Vega Vara Ganuza**

IES Sierra de San Pedro. La Roca de la Sierra (Badajoz)  
justocabezas@terra.es ; vegavara@wanadoo.es

## **Abstract**

*En este artículo se muestran formas de resolver un problema clásico de bachillerato en distintas épocas, incidiendo en las posibilidades que ofrece la incorporación del ordenador al aula de matemáticas para analizar y visualizar los procedimientos y el resultado.*

La matemática no es solamente un conjunto de técnicas para resolver determinados problemas, es una parte esencial de la cultura (Miguel de Guzmán).

## **1 Introducción**

Desde hace algún tiempo trabajamos en dos ideas que, aplicadas al aula, pueden favorecer la consecución de objetivos didácticos en educación matemática. Ideas que, por otra parte, creemos están en el ánimo de una buena parte del profesorado de esta materia en niveles medios de educación. La una es la adscripción a un tema de cuestiones periféricas al mismo, concretas, visualizables, de contenido histórico o social, a fin de que los conceptos abstractos puedan ser retenidos con mayor facilidad por los alumnos al memorizarse en simbiosis con otros más con-

---

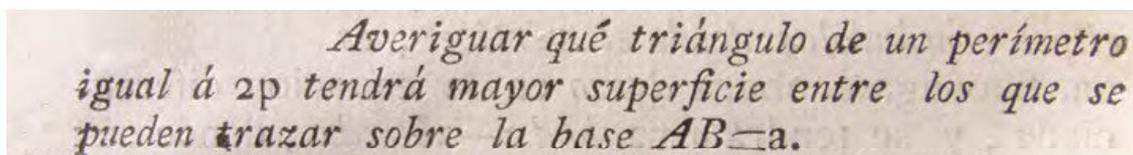
<sup>1</sup> Miguel de Guzmán fue presidente del tribunal ante el que defendí la tesis doctoral. Con esta ocasión me sugirió algunos acertados consejos profesionales que he seguido. Vaya este artículo como muestra de agradecimiento. Justo Cabezas.

cretos. La otra, las enormes posibilidades que aportan a la clase de matemáticas las nuevas tecnologías, que permiten una enseñanza activa, aumentando las posibilidades de análisis y modificando la metodología de tal modo que incluso puede cambiarse el currículum tradicional a partir de estas modificaciones.

Como ejemplo se muestra un texto para alumnos de primero de bachillerato en el que, a partir de los libros de un matemático del siglo XVIII, Juan Justo García, catedrático de matemáticas de la Universidad de Salamanca, se resuelve y analiza uno de los problemas de máximos y mínimos que aparecen en casi todos los textos desde al menos aquella fecha hasta hoy.

## 2 Enunciado

El enunciado del problema aparece en la primera edición de los *Elementos* de Juan Justo García (García, 1782):



Se puede utilizar la fórmula de Herón,

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

donde tanto  $a$  como  $p$  son constantes y  $c = 2p-a-b$ .

## 3 Solución tradicional (con el auxilio de un sistema de cálculo simbólico)

Para resolver el problema de modo tradicional hemos empleado MAXIMA. La elección de este sistema de cálculo simbólico (CAS) así como la del programa de geometría dinámica GeoGebra que se usa después, atiende fundamentalmente a dos criterios: por un lado son programas libres (pueden ser utilizados y modificados por cualquier persona y con cualquier propósito) y, en este caso, gratuitos (un programa gratuito puede tener prohibida su distribución y, por tanto, no ser libre) y por otro existen versiones para varios sistemas operativos. Estos dos aspectos adquieren gran importancia en lugares (como Extremadura) donde los responsables de la educación han optado por dotar a todas las aulas de todos los centros de secundaria con ordenadores bajo *software* GNU.

Así pues, sustituyendo  $c=2p-a-b$  en la fórmula de Herón:

**(C1) sqrt (p\* (p-a) \* (p-b) \* (p-c) ) ;**

(D1) SQRT (p (p - a) (p - b) (p - c))

**(C2) subst (2\*p-a-b, c, %) ;**

(D2) SQRT ((- p + b + a) p (p - a) (p - b))

Y derivando y resolviendo la ecuación (MAXIMA la iguala la expresión a cero por defecto) respecto de la variable  $b$  (% es la última expresión devuelta):

**(C3) diff (% , b) ;**

(D3) 
$$\frac{p (p - a) (p - b) - (- p + b + a) p (p - a)}{2 \text{ SQRT} ((- p + b + a) p (p - a) (p - b))}$$

se obtiene la solución para  $b$ :

**(C4) solve (% , b) ;**

(D4) 
$$[b = \frac{2 p - a}{2}]$$

O bien

**(C5) expand (% ) ;**

(D5) 
$$[b = p - \frac{a}{2}]$$

Y sustituyendo en la expresión de  $c$  el valor calculado para  $b$ , obtenemos:

**(C5) c=2\*p-a-b;**

(D5) 
$$c = 2 p - b - a$$

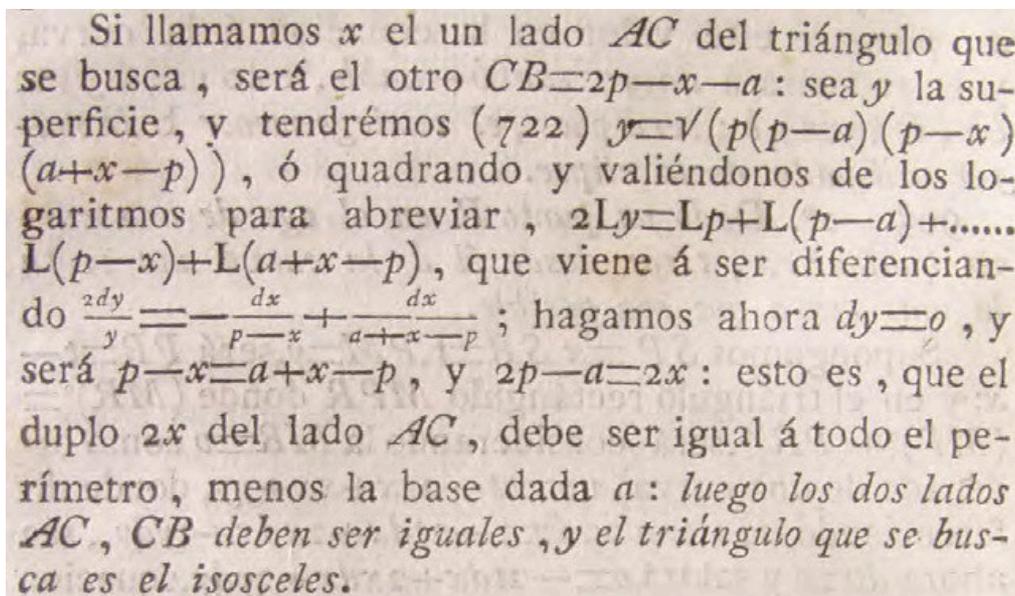
**(C6) subst (p-a/2, b, %) ;**

(D6) 
$$c = p - \frac{a}{2}$$

Luego  $b$  y  $c$  son iguales, es decir el de área máxima es el triángulo isósceles con esa base y ese perímetro.

#### 4 Solución histórica

Juan Justo García resuelve el problema de forma similar, aunque toma logaritmos en la fórmula de Herón para facilitar los cálculos:



Si llamamos  $x$  el un lado  $AC$  del triángulo que se busca, será el otro  $CB=2p-x-a$ : sea  $y$  la superficie, y tendremos (722)  $y=\sqrt{(p(p-a)(p-x)(a+x-p))}$ , ó quadrando y valiéndonos de los logaritmos para abreviar,  $2Ly=Lp+L(p-a)+\dots+L(p-x)+L(a+x-p)$ , que viene á ser diferenciando  $\frac{2dy}{y}=-\frac{dx}{p-x}+\frac{dx}{a+x-p}$ ; hagamos ahora  $dy=0$ , y será  $p-x=a+x-p$ , y  $2p-a=2x$ : esto es, que el duplo  $2x$  del lado  $AC$ , debe ser igual á todo el perímetro, menos la base dada  $a$ : luego los dos lados  $AC$ ,  $CB$  deben ser iguales, y el triángulo que se busca es el isosceles.

#### 5 Solución geométrica (con el auxilio de un programa de geometría dinámica)

Pero el problema se puede resolver también sin cálculo diferencial. Además así se visualizan el enunciado y la solución de modo más claro, siguiendo la tendencia actual (de Guzmán, 1996, 31). Hemos utilizado, como se ha anticipado, un programa de geometría dinámica que, como es sabido, son paquetes que permiten simular construcciones de regla y compás sobre la pantalla a partir de constructores elementales (puntos, rectas, circunferencias) y de otros realizados a partir de ellos (punto medio de un segmento, paralela a una recta por un punto, perpendicular a una recta por un punto, etc.) y dotarlas de movimiento, entre otras posibilidades. En concreto hemos utilizado GeoGebra (Hohenwarter, 2004).

El lado  $a$  de nuestro problema es el segmento  $DE$ . Y el resto del perímetro el  $AB$ . Hemos construido un punto móvil  $C$  en  $AB$ , de tal modo que  $AC$  y  $CB$  serían los otros dos lados.

Para construir todos los triángulos posibles hemos tomado la circunferencia centrada en  $D$  y de radio  $AC$  y análogamente para el otro lado. En la intersección  $G$  está el tercer vértice del triángulo, el que determina la altura.

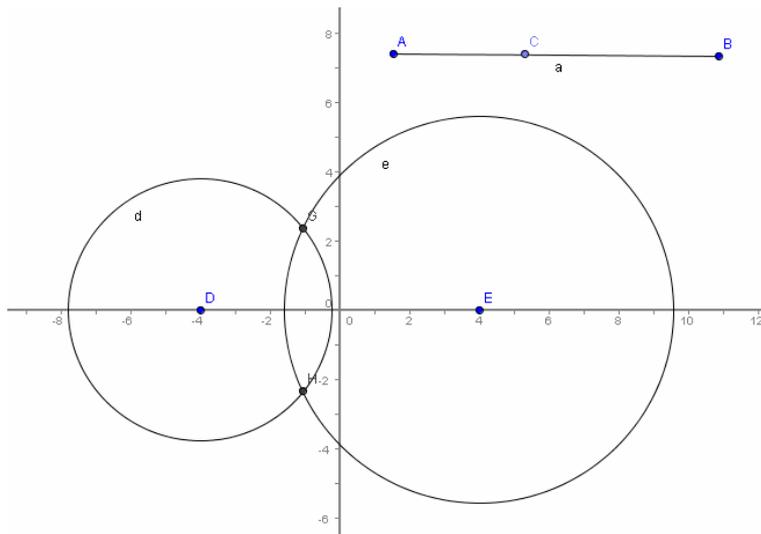


Figura 1: Construcción de los triángulos

Pues bien, al mover  $C$  y dejar traza con la intersección se obtiene la elipse que constituye el lugar geométrico.

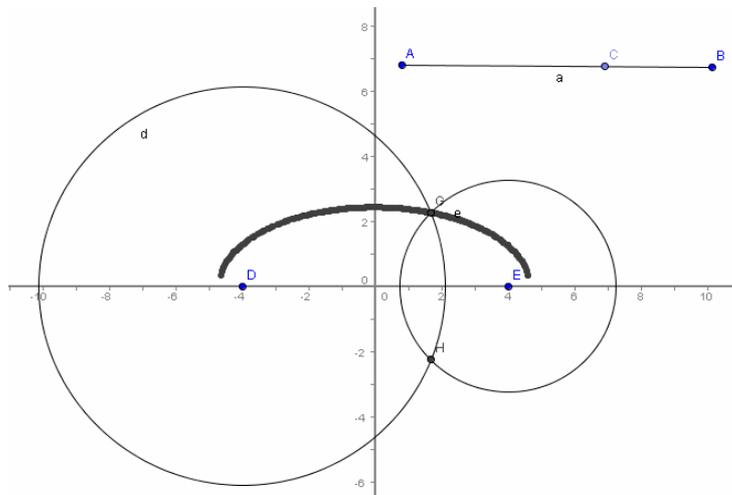


Figura 2: Construcción del lugar geométrico

Y como la base es fija ( $DE$ ), el área máxima corresponderá a la máxima altura, que corresponde a la intersección con el semieje, mediatriz de la base  $a$ , de donde los dos radios son iguales y por tanto el triángulo es isósceles.

El programa utilizado permite mostrar en un texto la secuencia de instrucciones que se han realizado para llevar a cabo la construcción. Este texto se llama en GeoGebra protocolo de construcción y en nuestro caso es:

No.	Nombre	Definición	Álgebra
1	Punto A		$A = (3.23, 9.93)$
2	Punto B		$B = (12.57, 9.87)$
3	Segmento a	Segmento[A, B]	$a = 9.33$
4	Punto C	Punto en a	$C = (9.33, 9.89)$
5	Segmento b	Segmento[A, C]	$b = 6.1$
6	Segmento c	Segmento[C, B]	$c = 3.23$
7	Punto D		$D = (-4, 0)$
8	Punto E		$E = (4, 0)$
9	Círculo d	Círculo con punto medio D y Radio b	$d: (x + 4)^2 + y^2 = 37.21$
10	Círculo e	Círculo con punto medio E y Radio c	$e: (x - 4)^2 + y^2 = 10.45$
11	Punto G	Punto de intersección d, e	$G = (1.67, 2.24)$
12	Punto H	Punto de intersección d, e	$H = (1.67, -2.24)$
13	Punto Intersección [d, e]	Punto de intersección d, e	Intersección [d, e] indefinida
14	Punto Intersección [d, e]	Punto de intersección d, e	Intersección [d, e] indefinida

*Tabla 1: Protocolo de construcción*

## 6 Conclusiones

El uso del ordenador al resolver un problema permite una mayor amplitud en el análisis de su enunciado, la utilización de diversos razonamientos para resolverlo y la discusión de las soluciones. Además facilita la visualización de los procedimientos y fomenta la creatividad.

La propuesta de incluir en la educación matemática una concepción de la misma como expresión cultural, insertando en ella su historia, sus intereses, sus problemas o la biografía de los matemáticos, se puede ver potenciada al usar las nuevas tecnologías.

## **Bibliografía**

- [1] N. Cuesta Dutari, (1974). *El maestro Juan Justo García*. Salamanca, Universidad de Salamanca.
- [2] M. de Guzmán, (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid, Pirámide.
- [3] J.J. García Rodríguez (1782). *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*. Madrid, Ibarra.
- [4] M. Hohenwarter, *GeoGebra*. URL: <http://www.geogebra.at/> (11-octubre-2004).

# El problema del tablero mutilado: una resolución a través de perspicacia (*insight*)

**Antonio Hernando Esteban**

Departamento de Sistemas Informáticos. Facultad de Informática.  
Universidad Complutense de Madrid  
ahernando@fdi.ucm.es

**Luis de Ledesma Otamendi**

Departamento de Inteligencia Artificial. Facultad de Informática.  
Universidad Politécnica de Madrid  
ledesma@fi.upm.es

**Luis M. Laita**

Departamento de Inteligencia Artificial. Facultad de Informática.  
Universidad Politécnica de Madrid  
laita@fi.upm.es

## **Abstract**

*This paper deals with the Mutilated Checkerboard problem, as an example of a number of problems with interesting mathematical features, which can be subject to representation changes, resulting in a representation pattern leading to the immediate solution of the problem, through insight.*

Dedicado a nuestro compañero Miguel de Guzmán

## **Introducción**

Miguel de Guzmán se ocupó de resaltar la utilidad de los juegos para la didáctica de las matemáticas, destacando la proximidad que cierto tipo de juegos y pasatiempos ha tenido, históricamente, con el quehacer de los más eminentes matemáticos [1, 2]. Muchos juegos y pasatiempos permiten desarrollar estrategias y habi-

lidades matemáticas en los alumnos, al tiempo que representan un camino apropiado para la mejor comprensión de conceptos y contenidos matemáticos profundos. Entre otros problemas clásicos, el del tablero mutilado ha sido objeto de atención desde el área de la didáctica de las matemáticas, ya que contiene y ejemplifica una serie de contenidos matemáticos de interés. Por otra parte, este problema ha sido también utilizado en experiencias propias del área de la inteligencia artificial. En efecto, los procesos humanos de resolución de problemas constituyen un campo privilegiado en el desarrollo de los estudios sobre el desarrollo de la inteligencia artificial. Al hilo de nuestras propias investigaciones en esta última área, en el presente artículo pretendemos presentar el proceso de resolución de este problema a través de un cambio desde una representación inicial basada en un sistema de ecuaciones, hasta otra representación en la que el color desempeña un papel crucial, que se revela como más eficaz para resolver el problema.

Una línea de investigación dentro de los estudios sobre inteligencia artificial se refiere al diseño de programas informáticos destinados a simular rasgos del comportamiento inteligente humano. De acuerdo con el enfoque pionero de H. A. Simon [3], dichos programas constituyen verdaderas teorías de los comportamientos inteligentes que simulan; por ello, del diseño de esta clase de programas se siguen interesantes consecuencias para beneficio de la investigación psicológica. En particular, los procesos humanos de resolución de problemas han sido objeto de atención preferente por parte de los investigadores en inteligencia artificial. En este contexto se enmarca la labor que, desde hace algunos años, venimos desarrollando [4, 5]. Se ha producido un programa informático que, aún pendiente de refinamientos necesarios, pero enfrentado ya a un considerable número de problemas no triviales, es capaz de emular la perspicacia: un rasgo crucial que interviene en los procesos humanos de resolución de problemas, que en inglés recibe el nombre de *insight*, y que optamos por traducir al español, aproximadamente, como *perspicacia*.

De la perspicacia daremos en seguida la definición formal debida a H. A. Simon, que seguimos en sus líneas generales. Basta por ahora con referir que se trata de la clase de experiencia, familiar a quienes resuelven un problema, que se manifiesta cuando, tras de un periodo infructuoso en pos de la solución, se alcanza la convicción repentina de que ésta puede ser hallada de manera inmediata. Este cambio de actitud sobre la solución se relaciona directamente con un cambio en la representación del problema en cuestión, desde una representación

inadecuada, que no conduce de manera inmediata a la solución, hasta otra representación idónea, poseyendo la cual conseguir la solución resulta inmediato.

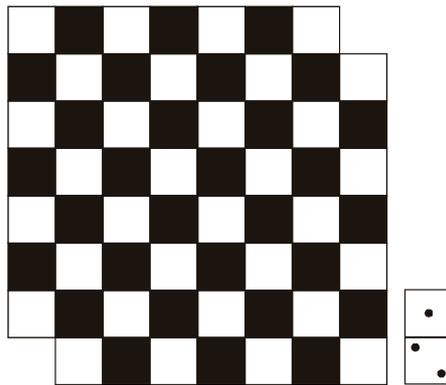
## **1 La perspicacia (*insight*)**

Este rasgo de comportamiento inteligente ha sido objeto de definición por parte de H. A. Simon [3], en el contexto de experiencias que estudian el proceso de resolución de problemas por parte de seres humanos. De acuerdo con su definición, la experiencia de la perspicacia implica al menos tres aspectos diferentes: en primer lugar, se trata de un fenómeno que viene normalmente precedido de un periodo de búsqueda infructuosa de la solución del problema; en segundo lugar, la experiencia de la perspicacia no aporta necesariamente la solución del problema, sino una fuerte y repentina convicción de que se va a obtener la solución de manera inminente; en tercer lugar, la perspicacia está estrechamente asociada a una nueva representación del problema. Simon añade un cuarto aspecto, no siempre presente en la experiencia psicológica de la perspicacia, relativo a un tiempo de incubación, durante el cual el sujeto parece abandonar la tarea de búsqueda de la solución del problema: según el enfoque de Simon, la perspicacia surge frecuentemente poco después de un lapso de incubación.

Tomando como punto de partida esta definición de la perspicacia, referida al comportamiento humano en procesos de resolución de problemas, emprendimos la implementación de un programa informático capaz de emular esta actitud. Dicho programa ya se encuentra en su fase de prototipo [4, 5]. En este artículo abordaremos dos formas de resolver el problema del tablero mutilado: la primera es una forma nueva de resolverlo, que se revela poco adecuada; la segunda se relaciona con la perspicacia tal como la define Simon.

## **2 El problema del tablero mutilado**

A continuación se describe uno de los problemas típicos en cuya resolución interviene la perspicacia, que se conoce como del tablero mutilado, y que ha sido objeto de atención tanto en el contexto de la experimentación psicológica, como desde la perspectiva de los estudios de inteligencia artificial.



**Figura 1.** Tablero mutilado

El planteamiento del problema es sencillo, y queda ilustrado en la Figura 1: disponiendo de un tablero de ajedrez en el que faltan dos cuadros, correspondientes a dos esquinas diagonalmente opuestas, se trata de cubrir toda la superficie del tablero así mutilado con piezas de dominó, teniendo en cuenta que cada pieza de dominó cubre dos cuadros adyacentes del tablero, nunca en diagonal. Ya que cada dominó cubre dos cuadros adyacentes del tablero, esto es, uno blanco y otro negro, pero en el tablero mutilado ya no hay el mismo número de cuadros de cada color, se ve que la tarea de cubrir todo el tablero mutilado con piezas de dominó es imposible, y que, por tanto, el problema no tiene solución.

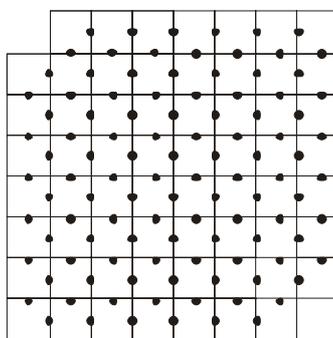
Kaplan y Simon desarrollaron protocolos de seguimiento sobre una experiencia real en la que un número de voluntarios se ocuparon de resolver el problema [6]. Sus observaciones llegaron a la conclusión de que los voluntarios, tratando de resolver el problema, seguían caminos más o menos divergentes, pero igualmente infructuosos, hasta que cobraban conciencia de la circunstancia de la paridad, esto es, hasta que se daban cuenta de que atender al color de los cuadros del tablero era la clave para colegir que el problema no tiene solución. Dicho de otra forma, resolver el problema depende de conseguir una representación que tiene en cuenta el color de los cuadros del tablero. Se trata pues de una experiencia de perspicacia clásica, en la que se parte de una representación inicial de los datos del problema, se sigue un camino infructuoso, y una vez que se logra, a través de un cambio de representación afortunado, una imagen más adecuada del problema, la solución no tarda en llegar.

Desde luego, existen otros métodos para resolver el problema. Se podría, sencillamente, intentar, de manera ordenada, sistemática y sucesiva, todas las posi-

ciones posibles de piezas de dominó sobre el tablero mutilado, siguiendo una estrategia exhaustiva, al término de la cual se llegaría a demostrar que el problema no tiene solución. Sin embargo, este algoritmo exhaustivo resulta poco eficiente, ya que requiere evaluar un número muy elevado de posibilidades, razón que nos mueven a buscar otro procedimiento más rápido y menos costoso.

### 3 Una representación del problema a través de ecuaciones

Hemos hallado una representación del problema del tablero mutilado a través de ecuaciones, que permite resolver el problema a través de procedimientos algorítmicos propios de la programación lineal 0-1.

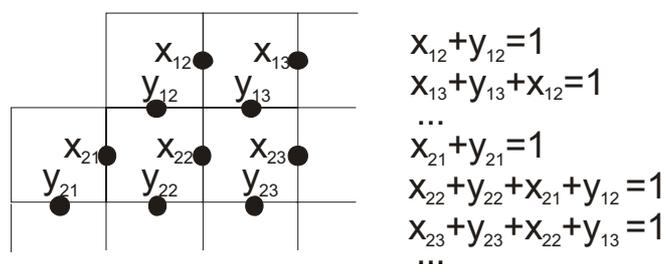


**Figura 2.** Incógnitas asociadas al problema del tablero mutilado

Como se observa en la Figura 2, se da la circunstancia de que por cada dos cuadros adyacentes del tablero hay una incógnita asociada (representada con un punto sobre la línea que divide unos cuadros adyacentes de otros), la cual puede tomar dos valores: 1 si el par de cuadros adyacentes está ocupado por un dominó, 0 si no lo está. De la misma definición del problema resulta que las piezas de dominó no pueden solaparse en el tablero, esto es, cada cuadro sólo puede estar ocupado por la mitad de un dominó, o libre. Así pues, tenemos otra circunstancia relacionada con la anterior: por cada cuadro del tablero, éste puede estar ocupado (por un medio-dominó) o libre. En el método ahora analizado, si un cuadro en concreto está libre u ocupado viene determinado por la suma de las incógnitas asociadas a las líneas que lo delimitan, y que definen las relaciones de adyacencia con otros cuadros. Así, si la suma de todas las incógnitas da por resultado 0, el cuadro está libre; si el resultado es 1, el cuadro está ocupado. Ya que, según el

planteamiento del problema, resolverlo requiere que todos los cuadros estén simultáneamente ocupados, cada uno por la mitad de un dominó, este procedimiento de resolución proporciona un método capaz de determinar ese estado final buscado, que constituiría la solución del problema.

Concretamente, este procedimiento resulta en la configuración de un sistema de ecuaciones lineales con tantas ecuaciones como cuadros tiene el tablero mutilado (ya que la solución del problema exige que cada cuadro esté ocupado por una única mitad de dominó), y tantas incógnitas en el sistema, como pares de cuadros adyacentes hay en el mismo. En la Figura 3 puede verse parte del tablero mutilado, con las ecuaciones asociadas a los cuadros que aparecen en la figura.



**Figura 3.** Ecuaciones asociadas al problema del tablero mutilado

Con todo, esta representación parece insuficiente para nuestros propósitos, porque se trata de un método que exige resolver un sistema formado por un elevado número de ecuaciones, de manera que resulta especialmente tedioso y complicado para un actor humano. Los algoritmos más apropiados para resolver este sistema de ecuaciones son los de programación lineal entera 0-1, ya que estos algoritmos presuponen que las incógnitas sólo pueden adoptar los valores 0 y 1, en tanto que los métodos ordinarios de resolución de ecuaciones lineales (Kramer, Gauss) requieren de incógnitas pertenecientes al cuerpo de los reales o complejos. Aun así, se tardaría mucho tiempo antes de concluir que el sistema es incompatible, y que, en consecuencia, el problema carece de solución.

Siguiendo el planteamiento general de nuestra investigación sobre la perspicacia, emplearse en resolver el problema del tablero mutilado mediante este método tan arduo daría lugar, en una persona, a ese periodo prolongado e infructuoso asociado a una creciente insatisfacción, previo al cambio de estrategia que dará lugar a la experiencia de la perspicacia.

#### **4 Resolución del problema mediante perspicacia**

Como resultado de lo anterior, tenemos una representación inicial del problema mediante un sistema de ecuaciones, asociada a un método de resolución demasiado trabajoso; la insatisfacción que en el sujeto encargado de resolver el problema provoca emplearse largo tiempo en este método es el paso previo para plantearse la necesidad de un cambio de representación. La búsqueda de otro método de resolución hace uso de una heurística que consiste en volver a considerar el planteamiento del problema, con objeto de tomar nuevamente en consideración rasgos del problema presentes en la definición del mismo, pero que habían dejado de considerarse de manera consciente. Observar el rasgo del color de los cuadros del tablero de ajedrez es el criterio clave que resulta en una nueva representación del problema, y que, poco tiempo después de adoptar ésta, conducirá a su resolución, tal y como quedaba de manifiesto en las experiencias psicológicas reales efectuadas por Kaplan y Simon [6]: una vez los sujetos encargados de resolver el problema comenzaban a considerar el color de los cuadros, al que antes no habían atendido por creer que se trataba de un rasgo irrelevante, no tardaban en llegar, mediante una experiencia de perspicacia, a la conclusión de que el problema no tiene solución.

#### **Conclusiones**

El problema del tablero mutilado constituye un ejemplo de problema con propiedades matemáticas interesantes que lo hacen especialmente apropiado como objeto de estudio. Partiendo de una representación del mismo por medio de un sistema de ecuaciones, hemos llegado, a través de la experiencia de la perspicacia, a definir una representación diferente, que tiene en cuenta el color de los cuadros del tablero, y que parece mucho más apropiada para llegar de manera inmediata a resolverlo. En consecuencia, se afirma la utilidad del mismo como problema cuyo estudio aporta luz sobre los procesos humanos de cambio de representación ligados a experiencias de perspicacia, que a su vez sirven de base para el diseño de programas informáticos, como los que exponemos en [4] y [5], capaces de simular esa actitud, y constituyendo así teorías válidas sobre la perspicacia.

## Bibliografía

- [1] M. de Guzmán, *Mirar y ver*, Madrid, Alhambra, 1977.
- [2] M. de Guzmán, *Cuentos y cuentas*, Barcelona, Labor, 1984.
- [3] H. A. Simon, *Explaining the ineffable: AI on the topics of intuition, insight and inspiration*, Proc. 14<sup>th</sup> International Joint Conference on Artificial Intelligence, Montreal, 1995, 939-948.
- [4] A. Hernando, L. de Ledesma, Luis M. Laita, *Toward an AI Theory of Insight*, Proc. 12<sup>th</sup> IASTED International Conference on Applied Simulation and Modelling, Marbella, 2003, 181-186.
- [5] A. Hernando, L. de Ledesma, Luis M. Laita, *A Programme embodying Insight and Representation Changes in Problem Solving*, Proc. 9th WMSCI World Multiconference on Systemics, Cybernetics and Informatics, Orlando, 2005, en prensa.
- [6] C. A. Kaplan, H. A. Simon, *In search of Insight*, Cognitive Psychology, 22, 1990, 374-419.

# Una estrategia didáctica para incorporar un programa de cálculo simbólico en el aula de Matemáticas

**Pedro Ortega Pulido**

I.E.S. Celestino Mutis. Comunidad de Madrid  
Dpto. de Análisis Económico: Economía Cuantitativa  
Facultad de Económicas  
Universidad Autónoma de Madrid  
portega@uam.es

## **Abstract.**

In this article we present a mathematical educational research of a didactical strategy which introduces the use of a computer algebra system into the learning and teaching of linear algebra.

Dedicado a Miguel de Guzmán, maestro y amigo.  
Con toda mi gratitud y cariño.

## **Introducción**

El uso de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas es un uno de los elementos innovadores que mayores controversias han suscitado en los últimos tiempos. Los trabajos que analizan este aspecto suelen ir acompañados de ciertos matices que difuminan su utilización en el aula: “usar los recursos tecnológicos que resulten adecuados para...”. Este carácter difuso no está infundado, porque tal y como afirmaba Miguel de Guzmán: *“si la introducción del ordenador en el aprendizaje de la matemática no se planifica adecuadamente, podemos incurrir en la responsabilidad colectiva de dejarnos arrastrar por un espejismo, posiblemente en buena parte fomentado por la industria alrededor del ordenador, que nos lleve a todos, incluso a los países más carentes de recursos educativos, a gastar grandes sumas de dinero en la introducción indiscriminada de un costoso instrumental con el que no se sabe bien qué hacer y que, por el uso que se da, más valdría, desde el punto de vista educativo, que nunca se hubiese introducido*

*en las escuelas y centros de enseñanza*” [6]. Los peligros de una introducción inadecuada de los ordenadores han quedado patentes en numerosos trabajos, [4], [6], [7], aunque estos peligros, se pueden minimizar o solventar utilizando metodologías adecuadas. Pero, ¿cómo deberían ser esas metodologías?, ¿de qué forma deberíamos introducir las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas?

No existe un método didáctico modélico en la enseñanza de las matemáticas y mucho menos aún, si además deseamos incorporar las nuevas tecnologías en el aula. Sin embargo sí es posible diseñar estrategias didácticas que nos proporcionen unos contextos de enseñanza-aprendizaje que faciliten nuestra práctica docente. A este respecto, es necesario realizar investigaciones en educación matemática que analicen y contrasten la aplicación de dichas estrategias en el aula. Esta necesidad motivó que en 1998 iniciara una investigación educativa sobre la incorporación de los sistemas de cálculo algebraico en la enseñanza de las matemáticas. Conté con la inestimable ayuda y dirección de Miguel de Guzmán, interesado siempre por la innovación y la educación matemática. Este trabajo culminó con la última tesis doctoral que dirigió Miguel de Guzmán [11], al que se debe en gran parte esta contribución.

En este artículo presentamos una estrategia didáctica para incorporar un programa de cálculo simbólico como DERIVE en el aula de Matemáticas. Tras una descripción general de la estrategia, mostramos un ejemplo de unidad didáctica diseñado bajo esta estrategia, después hacemos una descripción general de la investigación educativa que realizamos y finalmente se muestran las conclusiones obtenidas.

## **1 Una estrategia didáctica para incorporar un sistemas de cálculo algebraico en el aula de Matemáticas**

Actualmente existen dos tendencias generales que dominan el panorama de la enseñanza de las Matemáticas: una que defiende la enseñanza directa, basada en la exposición muy clara de los contenidos que se pretenden transmitir seguida de una ejercitación y práctica en esos contenidos para su posterior evaluación, y otra enseñanza alternativa que defiende que, antes de que el alumno se enfrente con nuevas ideas, debe proveerse de una experiencia concreta adecuada para que cualquier concepto nuevo se corresponda con algo que ya forma parte de su experiencia personal y se convierta así, en la base del conjunto de herramientas con las que pensar [2], es decir una enseñanza experimental. Consideramos que la postura más ade-

cuada para los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es aquella que potencia una experimentación del alumno sobre la base de unos conocimientos previos. Esta experimentación debe jugar un papel fundamental en la enseñanza de las matemáticas sin renunciar a los procesos de formalización y estructuración que deberían situarse en el punto final de un proceso de experimentación.

### 1.1 Descripción de la estrategia didáctica

Dentro de las nuevas tecnologías, los sistemas de cálculo algebraico, son una de las herramientas que más se están utilizando en la enseñanza de las matemáticas. Estos programas ofrecen algunas cualidades didácticas en el marco de una enseñanza basada en la experimentación entre las que podemos destacar:

- Facilitan la *manipulación de múltiples sistemas de representación*, circunstancia que nos permite obtener una visión multilateral de los conceptos matemáticos y, de esta forma, los alumnos pueden captar los hechos y principios matemáticos como los invariantes de sus múltiples representaciones [8].
- Permiten realizar con gran comodidad y seguridad todas las rutinas del cálculo numérico y simbólico, evitando así el *esfuerzo rutinario* que, en numerosas ocasiones, es un proceso no esencial para la comprensión del hecho o principio matemático que estamos introduciendo.
- Pueden favorecer la *construcción de los contenidos matemáticos a través de la experimentación*, facilitando la adquisición de aprendizajes significativos.
- Pueden *dotar al alumno de un protagonismo* que facilite sus procesos de enseñanza aprendizaje. En este sentido merece la pena señalar las ideas de Freudenthal “*no deberíamos enseñar a los estudiantes algo que no han descubierto por sí mismos*” [3].
- Ofrecen una *interactividad y dinamismo* que puede favorecer la motivación y la participación activa de los alumnos [8].
- Proporcionan un excelente contexto para el *aprendizaje colaborativo* [1], un aprendizaje que aprovecha la relación dialéctica entre los usuarios y favorece la comunicación entre profesores y alumnos.

A partir de estas ventajas, es necesario diseñar una estrategia didáctica que nos permita crear situaciones de enseñanza-aprendizaje favorables. La estrategia di-

dáctica que proponemos se basa en el modelo de enseñanza utilizado por los profesores universitarios japoneses H. Murakami y M. Hata [9]. Para que el alumno entienda un tópico matemático (contenido esencial) es necesario invertir un primer esfuerzo en resolver ciertos procesos con lápiz y papel, aunque pueden existir cálculos y tópicos auxiliares (contenidos no esenciales) que pueden ser realizados con un sistema de cálculo algebraico. En una segunda fase, aquellos contenidos esenciales podrán ser utilizados con el programa siempre que se enmarquen en un contexto de resolución de problemas y de experimentación. Esta circunstancia nos plantea la necesidad de efectuar una clasificación previa de los contenidos matemáticos que vamos a manejar en contenidos esenciales y contenidos no esenciales. De esta forma, si nuestro objetivo es introducir un principio o contenido básico “A”, al que denominamos contenido esencial, podremos utilizar el sistema de cálculo algebraico para manipular aquellos cálculos o contenidos previos ya conocidos “B” que no son esenciales para entender el contenido “A”. Del mismo modo ciertos contenidos que fueron considerados esenciales en un momento determinado del proceso de enseñanza-aprendizaje, posteriormente podrán ser manipulados con el programa en el contexto de resolución de problemas. Así, el alumno utiliza el programa como herramienta experimental.

El elemento clave de la estrategia es la construcción de actividades o tareas de enseñanza, que faciliten el uso del sistema de cálculo algebraico en varios niveles.

## **1.2 Ejemplo de una unidad didáctica con el uso de la estrategia didáctica.**

Para facilitar la comprensión de la estrategia didáctica mostramos el desarrollo de una unidad didáctica dedicada a introducir los contenidos básicos de la diagonalización de matrices. La unidad didáctica se enmarca dentro un curso básico de álgebra lineal para un 1º curso de la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Autónoma de Madrid; en concreto dentro del tema 5 de la asignatura dedicado a la diagonalización de matrices. Los temas anteriores del curso son: 1) espacios vectoriales, 2) aplicaciones lineales, 3) determinantes y 4) sistemas de ecuaciones lineales. En esta unidad nos propusimos tres objetivos:

- 1) que los alumnos fuesen capaces de determinar cuando una matriz es diagonalizable, obteniendo en su caso la matriz diagonal semejante,

- 2) que los alumnos fuesen capaces de obtener los valores que debe tener un parámetro o conjuntos de parámetros de una matriz paramétrica para que sea diagonalizable,
- 3) que los alumnos utilizaran estos contenidos en la resolución de problemas, planteando un modelo matricial en el cual la diagonalización resulta básico para su resolución.

Ante estos objetivos y teniendo en cuenta que en el capítulo 5 ya se habían introducido los conceptos de autovalor y autovector de una aplicación y de una matriz así como sus procesos de cálculo clasificamos los contenidos en:

- *Contenidos esenciales*: semejanza de matrices, condición suficiente de diagonalización, condición necesaria y suficiente de diagonalización, diagonalización de matrices simétricas, idempotentes, nilpotentes y ortogonales.
- *Contenidos no esenciales*: cálculo de determinantes, cálculo del rango de una matriz numérica, resolución de sistemas homogéneos, resolución de ecuaciones polinómicas, cálculo de la matriz traspuesta e inversa, módulo de un vector, producto de matrices, cálculo de autovalores y autovectores de una matriz, cálculo de los órdenes de multiplicidad geométrica y aritmética.

Con esta clasificación de los contenidos, determinamos como y cuando usar el programa DERIVE: únicamente en aquellos contenidos clasificados como no esenciales. La metodología que empleamos para desarrollar esta unidad la concretamos con varios tipos de actividades:

- actividades de introducción: actividades de exploración y descubrimiento mediante la manipulación con ayuda del programa de aquellas rutinas asociadas a los contenidos previos (contenidos no esenciales)
- ejercicios de manipulación: planteadas para que el alumno adquiriera soltura en el manejo del programa sobre los procesos rutinarios que conducen a la comprensión de los contenidos esenciales,
- resolución de problemas: situaciones problemáticas con datos complejos difícilmente manipulables con lápiz y papel o bien situaciones problemáticas de la realidad que pueden modelizarse a través del álgebra lineal,
- cuestiones teóricas: cuestiones tipo test en las que el alumno debe seleccionar el razonamiento o razonamientos válidos que refutan el enunciado de la cuestión.

En primer lugar para introducir la diagonalización se propuso una aplicación lineal para la cual los alumnos deberían obtener la matriz asociada respecto de dos bases distintas sugeridas previamente, con la siguiente actividad de introducción:

Actividad de Introducción: Dada la aplicación lineal

$$f(x, y, z) = (6x - 6y + 2z, -x - y + z, 7x + 3y + z)$$

- b) Calcular la matriz asociada respecto de las bases canónicas, llamarla  $A_1$ .
- c) Calcular la matriz asociada a  $f$  respecto de la base  $B = \{(1, 1, -2), (0, 1, 3), (1, 0, 1)\}$  en los espacios inicial y final, llamar a dicha matriz  $D_1$ .
- d) ¿Qué característica tiene la matriz  $D_1$ ?
- e) ¿Qué relación pueden tener las matrices  $A_1$  y  $D_1$ ?
- f) Construir la matriz  $P$  formada por los vectores de la base  $B$  colocados en columna y analizar los productos  $A_1 \cdot P$  y  $P \cdot D_1$ . ¿Existe alguna relación?

Después de este proceso de construcción de la relación de semejanza, se introdujo el concepto de semejanza de matrices y se propusieron actividades para que los alumnos experimentasen y explorasen, con ayuda del programa de cálculo simbólico, la relación de semejanza entre ciertas matrices dadas; por ejemplo:

Ejercicio de Manipulación. Comprobar si las matrices  $A_2$  y  $A_3$  son semejantes:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -10 & 9 & -6 \\ -12 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -17/2 & 9/2 & 3 \\ -9 & 5 & 3 \\ -12 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

En esta actividad el uso del programa es fundamental, ya que es necesario definir una matriz de 9 valores variables e intentar resolver por medio de la definición de semejanza un sistema de 9 ecuaciones con 9 incógnitas. A partir de la semejanza se definió el concepto de matriz diagonalizable. Para que los alumnos investigasen la relación entre matriz diagonalizable y el cálculo de autovalores y autovectores se propusieron algunas actividades de introducción con las que los alumnos tuvieran que determinar si una matriz era semejante a otra diagonal analizando la relación entre la matriz de paso y los autovalores y autovectores de la matriz; por ejemplo:

Actividad de introducción. Dadas las matrices:

$$A_2 = \begin{pmatrix} -10 & 9 & -6 \\ -12 & 11 & -6 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- Comprobar si  $A_2$  y  $A_4$  son semejantes. ¿Es  $A_2$  diagonalizable? ¿Cuál es la matriz de paso obtenida?
- Calcular los autovalores y autovectores de  $A_2$ .
- ¿Existe alguna relación entre los autovalores y la matriz  $A_4$ ?
- ¿Existe alguna relación entre los autovectores y la matriz de paso obtenida en a)?

Con varias actividades de estas características el alumno podría inducir de forma experimental la relación existente entre los autovalores y autovectores de una matriz y las matrices diagonal y de paso, de tal forma que con una orientación adecuada los alumnos podrían realizar el proceso de diagonalización. Una de las conclusiones a las que debería llegar es que para que una matriz sea diagonalizable debe existir una base de autovectores. Finalmente planteamos las condiciones de diagonalización. Primero comenzamos con el caso más sencillo: cuando todos los autovalores son distintos. Tras experimentar con varios ejemplos, se les propuso una demostración formal de esta condición suficiente. Bastaría que recordasen la relación de independencia lineal que tienen los autovectores de autovalores asociados a autovalores distintos. Finalizamos los contenidos teóricos de la unidad con el estudio de la condición necesaria y suficiente de diagonalización. Se propusieron ejercicios sobre diagonalización de matrices numéricas y más tarde problemas de diagonalización de matrices paramétricas como:

Problema 1. Dada la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ . Se pide:

- Estudiar para qué valores de los parámetros  $a$  y  $b$ , dicha matriz es diagonalizable.
- Para los valores de los parámetros  $a=3$  y  $b=2$  calcular una matriz  $P$  no singular y una matriz  $D$  diagonal tales que  $A=P.D.P^{-1}$ .

Finalmente, utilizando nuevamente experimentación, se estudió la diagonalización de matrices simétricas, ortogonales, idempotentes y nilpotentes. Terminamos con demostraciones formales que justificaban porqué las matrices simétricas, ortogonales e idempotentes son siempre diagonalizables mientras que las nilpotentes no lo son. Se finalizó la unidad didáctica planteando algunas situaciones problemáticas en las que la diagonalización de matrices fuese un elemento clave en su resolución, y algunas cuestiones teóricas, por ejemplo:

*Problema 2.* Una agencia naviera tiene su flota de barcos distribuida entre los puertos de Barcelona, Málaga y Mallorca. De los barcos que al comienzo de cada mes están en Barcelona, al final de mes sólo vuelve la mitad, un 20% se va a Málaga y el resto atraca en el puerto de Mallorca. De la flota de barcos que está al principio de mes en Málaga se encuentra, a fin de mes, un 20% en Barcelona, un 40% en Mallorca y el resto vuelve a Málaga. Análogamente, de los barcos que hay en Mallorca, un 80% regresa al mismo puerto y el resto se dirige a Barcelona. Suponiendo que el número de barcos es constante, se pide:

- (a) Plantear en forma matricial el modelo que representa la distribución de la flota.
- (b) Sabiendo que en el instante actual hay 350, 500 y 200 barcos respectivamente en Barcelona, Málaga y Mallorca, determinar el número de barcos que habrá en cada puerto al cabo de  $k$ -meses.
- (c) ¿Cuál será la flota de barcos en cada puerto a largo plazo? ([11] pág. 339)

Cuestión teórica. Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$  y los subespacios vectoriales

$$W_1 = V(\lambda_1) = \{\bar{v} \in R^3 / A\bar{v} = \lambda_1 \bar{v}\}$$

$$W_2 = V(\lambda_2) = \{\bar{u} \in R^3 / A\bar{u} = \lambda_2 \bar{u}\}$$

$$W_3 = V(\lambda_3) = \{\bar{w} \in R^3 / A\bar{w} = \lambda_3 \bar{w}\}$$

siendo  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  los autovalores asociados a  $A$  se verifica que

$$\dim(W_1) = \dim(W_2) = \dim(W_3) = 1$$

para todo  $a \in R$ .

- a) Falso, porque  $A$  no es una matriz simétrica.

- b) *Falso, aunque sería correcto si  $a \neq 1$  y  $a \neq 2$ , ya que en este caso, los tres autovalores de  $A$  son distintos.*
- c) *Verdadero, para la matriz  $A$  y cualquier otra matriz cuadrada de orden 3.*
- d) *Falso, pues si  $a=1$  entonces  $\dim(V(\lambda_1=1))=2$ .*

(Puede consultarse todo el desarrollo de la asignatura en el apartado MATEMÁTICAS II CON DERIVE de la página: [www.uam.es/pedro.ortega](http://www.uam.es/pedro.ortega) ).

## **2 Una investigación educativa para analizar el comportamiento de la estrategia didáctica en un curso de álgebra lineal en la Universidad**

Para analizar el comportamiento de la estrategia didáctica realizamos una investigación educativa durante el curso académico 1999-2000 sobre un grupo de alumnos que cursaban la asignatura Matemáticas II en la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas de la Universidad Autónoma de Madrid. Los contenidos de la asignatura Matemáticas II eran los de un curso básico de álgebra lineal: espacios vectoriales, aplicaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes, diagonalización, formas cuadráticas y programación lineal.

La finalidad de nuestra investigación consistió en analizar la influencia que ejercen los programas de cálculo simbólico en el aprendizaje del álgebra lineal por medio de la estrategia didáctica que hemos descrito en el apartado anterior, intentando dar respuesta a una serie de cuestiones iniciales:

- g) Determinar si el sistema de cálculo algebraico permitía construir un sistema de notación intermedio entre los sistemas de notación formales del álgebra lineal y sistemas de notación más familiares e intuitivos.
- h) Analizar el grado de interactividad que suscitaba esta estrategia entre los alumnos y el profesor, entre los propios alumnos, y entre los alumnos y el programa informático.
- i) Estudiar si la estrategia didáctica favorecía el protagonismo y la creatividad del alumno frente al medio tecnológico, evitando así que el alumno fuese un mero usuario del sistema, es decir, analizar si la estrategia favorecía la iniciativa y la creatividad del alumno para investigar y resolver problemas.
- j) Estudiar si las formas de uso que se proponían para utilizar el programa de cálculo algebraico convertían el sistema en una auténtica herramienta de experimentación.

- k) Comprobar si nuestra estrategia didáctica había facilitado a los alumnos la adquisición de aprendizajes significativos.
- l) Determinar si el tipo de manipulación que desarrollamos con el programa favorecía el uso de diferentes estrategias de resolución de problemas
- m) Analizar si el manejo del programa había dificultado el aprendizaje de los conceptos de álgebra lineal.
- n) Estudiar si la estrategia didáctica había generado autonomía cognitiva en los alumnos, permitiéndoles e incitándoles a indagar de forma autónoma ciertas situaciones, anulando de esta forma las dependencias que suelen existir entre los alumnos y el profesor u otros expertos.
- o) Comprobar si la estrategia didáctica había favorecido la relación dialéctica entre los alumnos y entre alumnos y profesor.
- p) Determinar si nuestra estrategia didáctica había permitido una atención a la diversidad adecuada: actividades para diferentes niveles y ritmos de aprendizaje.
- q) Analizar el grado de motivación que suscitó la estrategia entre los alumnos.

La naturaleza de la finalidad objeto de nuestro estudio así como las cuestiones que formulamos inicialmente nos obligaron a realizar una recogida y elaboración de datos de carácter mixto: cualitativo y cuantitativo. La dimensión cualitativa de esta investigación pretendía dar respuesta a las cuestiones iniciales que eran de naturaleza interna a los sujetos y que requerían una interpretación. Los datos recogidos para este análisis cualitativo nos permitieron ir generando de forma inductiva una serie de categorías que posteriormente perfilaron las conclusiones de la investigación. Se ha tratado por tanto de un proceso de investigación cualitativo de carácter constructivo [5]. La dimensión cuantitativa nos ha servido para dar respuesta a los aspectos instructivos de los procesos de enseñanza desencadenados, permitiendo confrontar cuantitativamente los resultados de rendimiento académico obtenidos.

Para analizar el comportamiento de la estrategia didáctica dividimos el grupo inicial en dos: un “subgrupo A” sobre el que empleamos la estrategia didáctica con el sistema de cálculo algebraico y un “subgrupo B” de control sobre el que empleamos una metodología sin el uso de nuevas tecnologías. La dimensión cualitativa se basó en un estudio de casos múltiples centrado en el subgrupo A. La dimensión cuantitativa se obtuvo a partir de una comparativa entre ambos subgrupos. En esta experiencia el profesor fue el mismo para ambos subgrupos y existió

un observador cualificado externo que asistió a todas las clases impartidas en el subgrupo A. (Para consultar una descripción general del proceso de análisis de datos ver [12]. Si se desea consultar el proceso completo de la investigación ver [11]).

### 3 Resultados obtenidos en la investigación educativa

Los primeros resultados de la experiencia tienen que ver con la comparativa de las calificaciones obtenidas por ambos subgrupos en el examen final. Este examen tenía dos partes una parte formada por cuestiones teóricas tipo test de respuesta múltiple, común a ambos subgrupos, y una parte de problemas, mucho más complejos en el subgrupo A. Los resultados generales de la comparativa fueron:

Calificaciones	SUBGRUPO A		SUBGRUPO B	
	Media	Desv.	Media	Desv.
Examen final				
Cuestiones Teóricas	5,03	2,18	5,46	1,8
Problemas	5,9	2,15	6,04	2,45
% Aprobados	81,25 % (13 alumnos)		41,6% (57 alumnos)	
% suspensos	12,5 % (2 alumnos)		17,52 % (24 alumnos)	
% no presentados	6,25% (1 alumno)		48,86% (56 alumnos)	
Alumnos presentados	93,75% (15 de 16)		59,12% (81 de 137)	

Estos datos nos permitieron extraer tres datos significativos:

- (1) El porcentaje de alumnos presentados en el subgrupo A (93,75%) fue muy superior en al subgrupo B (59,12%), lo cual muestra índices significativos relacionados con la motivación y protagonismo de los alumnos.
- (2) El porcentaje de alumnos aprobados en el subgrupo A (81,25%) es también muy superior que en el subgrupo B (41,6%).
- (3) Las puntuaciones finales fueron muy similares en media.

Tras estas primeras conclusiones cuantitativas y con el análisis cualitativo que realizamos, obtuvimos que la estrategia didáctica que incorporaba el sistema de cálculo algebraico DERIVE en el aula favoreció y proporcionó SITUACIONES

DE ENSEÑANZA que condujeron a un aprendizaje caracterizado por los siguientes aspectos:

- a) Se trata de un aprendizaje por descubrimiento y activo, que a partir de los conocimientos previos del alumno, facilita la adquisición de aprendizajes significativos sobre los contenidos básicos del álgebra lineal.
- b) Un aprendizaje que proporciona al alumno la posibilidad de utilizar varias estrategias de resolución de problemas.
- c) Un aprendizaje colaborativo, basado en las colaboraciones que proporciona el trabajo en grupo suscitado por el uso del programa de cálculo simbólico.
- d) Un aprendizaje adaptado a las necesidades de cada alumno, ofreciendo la posibilidad de utilizar varios niveles de aprendizaje, es decir facilita la atención a la diversidad.

#### **4 Conclusiones**

La investigación educativa que hemos descrito nos ha mostrado las bondades de nuestra estrategia didáctica para la enseñanza del álgebra lineal: buenos resultados cuantitativos y unas situaciones de enseñanza bastante positivas, aunque se trató de una experiencia ligada a un contexto determinado: un grupo de alumnos y un profesor concreto.

Miguel de Guzmán, decía que en educación matemática era muy necesario investigar más, baste recordar una de sus reflexiones a este respecto: *“a mi parecer, es muy necesario, por lo que a la sociedad le va en ello, que se formen en nuestras universidades buenos equipos de investigación en educación matemática que ayuden a resolver los muchos problemas que se presentan en el camino para una enseñanza más eficaz”*. Por este motivo, actualmente estamos diseñando una investigación educativa que analice nuevamente nuestra estrategia didáctica en grupos diferentes y con diferentes profesores.

#### **Bibliografía**

- [1] Crook, C., *Ordenadores y aprendizaje colaborativo*. Ed. Morata, Madrid, 1999,
- [2] Davis, R.B., How computers help us understand people, *International Journal of Educational Research*, col. 14, 1990, 93-99.

- [3] Freudenthal, H., *Mathematik als pädagogische Aufgabe*, Kett Studienbücher, 1979.
- [4] García, A., *Uso de herramientas informáticas en la enseñanza de la matemática*, Conferencia impartida en el curso de verano de la UNED: *La Matemática: su naturaleza, evolución y tratamiento de su didáctica*, julio 1999.
- [5] Goetz, J.P. y LeCompte, M.D., *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*, ed. Morata, 1988.
- [6] Guzmán, M., *Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática* (Eds. Abellanas, M. y García A.) *Enseñanza experimental de la matemática en la Universidad*, Universidad Politécnica de Madrid, 1992.
- [7] Halmos, P.R., Is computer teaching harmful?, *Notices of the A.M.S.*, vol. 38, núm. 5, 1991, 420-423.
- [8] Kaput, J.J., *Technology and Mathematics Education, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, A project of the NCTM*, New York, Macmillan Publishing Company, 1992, 515-575.
- [9] Murakami, H. y Hata, M., *Mathematical Education in the Computer age*, En: Davenport: *Computer Algebra Systems*, 1997, 85-92.
- [10] Ortega, P., Sanz, P. y Vázquez, F.J., *Álgebra Lineal: cuestiones, ejercicios y su tratamiento en DERIVE*, Ed. Prentice-Hall, 1998.
- [11] Ortega, P., *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico*, Tesis Doctoral. Directores: Antonio Bautista García-Vera y Miguel de Guzmán Ozámiz. Universidad Complutense de Madrid, 2002.
- [12] Ortega, P., Una estrategia didáctica para la enseñanza del álgebra lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE, *Rev. Complutense de Educación*, vol. 13, núm. 2, 2002, 645-675.

## **INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN**

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

### **Formato**

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTeX. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo “article” y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTeX, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

### **Envío de las copias en papel**

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

### **Envío del fichero o ficheros en formato electrónico**

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

### **Selección de originales**

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

## Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,  
52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65,66, 67, 68, 69 y 70.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

- la dirección a donde se han de enviar
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.

## **BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN EN LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**

D. ....Teléf.: .....  
Dirección: .....  
Ciudad: ..... Cod. Postal: ..... E-mail: .....  
Centro de trabajo: .....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco: .....  
Dirección de la Sucursal: .....  
para que cargue en mi cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... /.  
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 2004-2005 y siguientes.

Fecha: ..... de ..... de 2005

Firma:

La cuota anual está actualmente establecida en 33 euros (de ellos, 21 euros como cuota de la Sociedad «Puig Adam» y 12 euros como cuota de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas, por la que se recibe la revista SUMA).

Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS  
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid  
cc. 3025-0006-24-1400002948

### ORDEN DE DOMICILIACIÓN EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha: ..... BANCO: .....  
Sucursal o Agencia: ..... en: .....  
Dirección de esta: .....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta : ..... / ..... / ..... / ..... /.  
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad “Puig Adam”, de profesores de Matemáticas hasta nueva orden. Les saluda atentamente:

Firma:

Nombre y Apellidos: .....  
Dirección: .....

**Remítanse ambas partes (toda esta página) a nuestra sede:**

Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas  
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)  
C/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.