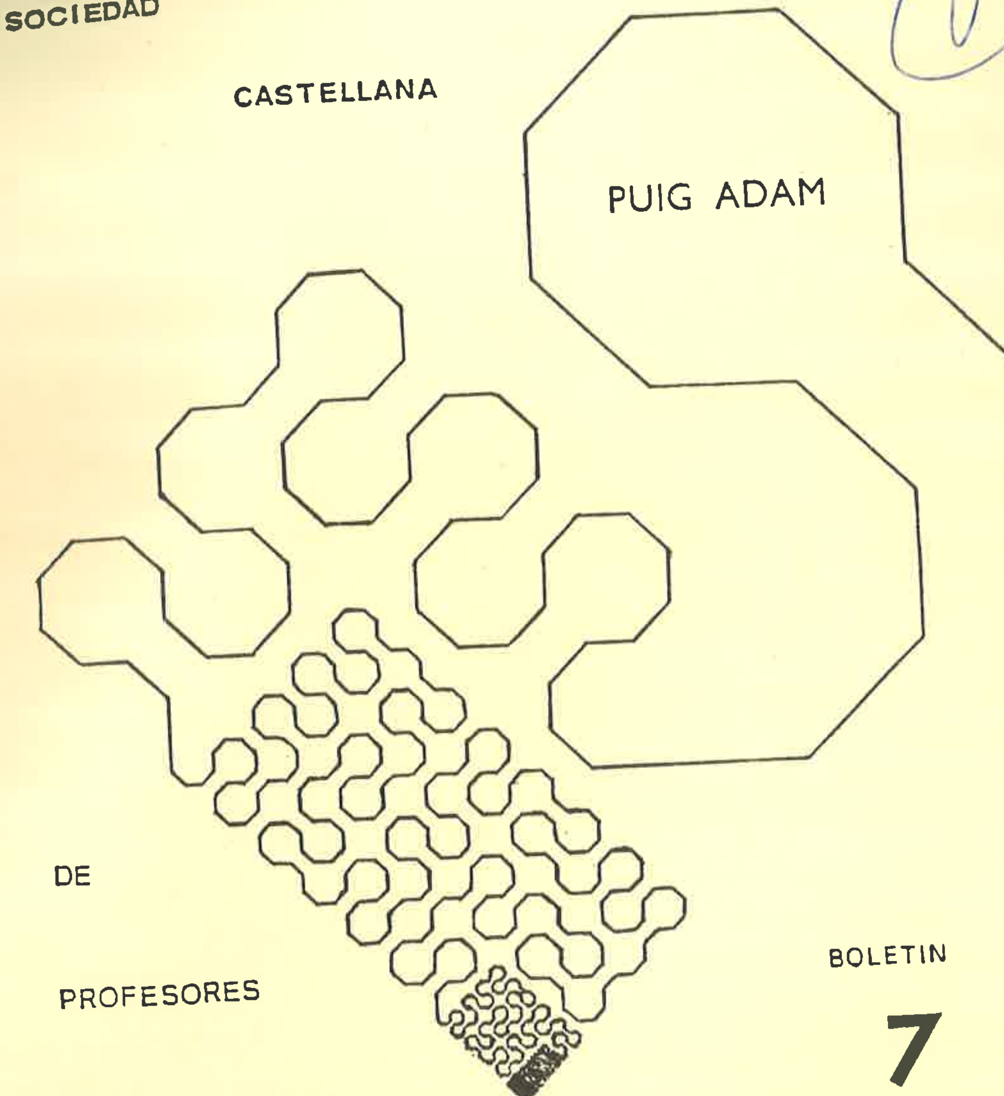
ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS DEL III CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS

V

SOCIEDAD

CASTELLANA

PUIG ADAM



DE

PROFESORES

DE MATEMATICAS

BOLETIN

7

B O L E T I N de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas "PUIG ADAM"

nº7 (1985-86)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

  Ronda de Atocha 2 (INBAD)
  MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al

  Apartado nª 9479
  28080 MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

  FERNANDEZ BIARGE, Julio
  PASCUAL IBARRA, José Ramón
  LORENZO MIRANDA, Francisco
  OCHOA MELIDA, Juan

- La portada, de J.F.B. está inspirada en la generación (modificada) de una curva de SCHOENFLIES, de área no nula (curva de PEANO)

INDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Julio Fernández Biarge

Vicepresidentes:
José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardo (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretario: María Luisa Pacios

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

VIDA DE LA SOCIEDAD

TERCER CONCURSO DE RESOLUCION DE PROBLEMAS PARA ALUMNOS DE B.U.P.

Nuestra Sociedad, continuando su labor para fomentar la afición por las Matemáticas entre los alumnos de Bachillerato, ha celebrado su III Concurso de Resolución de Problemas.

Como anunciamos en nuestros boletines anteriores, a este Concurso podían acudir los alumnos de primero y segundo curso de Bachillerato de nuestro ámbito territorial, presentados por sus Centros, hasta un máximo de dos por cada curso.

Las pruebas han tenido lugar en el Instituto "Beatriz Galindo" de Madrid, a cuya dirección debemos agradecer una vez más la amable cesión de sus locales, en la mañana del día 22 de Junio. Consistieron en la resolución de cuatro problemas (distintos para cada curso), cuyos enunciados publicamos en este mismo boletín.

El mismo día, por la tarde, se celebró la entrega de diplomas y premios a los ganadores, en el salón de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y de la Naturaleza, que no sólo puso a nuestra disposición sus locales, sino que quiso realzar el acto con la presencia de su Secretario General, Excmo. Sr. D. José María Torroja, que presidió la sesión. En ella pronunció unas palabras de aliento a todos los participantes el también académico D. Miguel de Guzmán, y se hizo entrega de los diplomas a los ganadores, que fueron los siguientes:

PRIMER CURSO DE B.U.P.

1. D. Eusebio Fernández Domínguez, del I.B. de Torrelodones (Madrid).
2. Dña. Carmen Casares Antón, del I.B. "Gran Capitán" (Madrid).

3. D. José Luis Rivera Pardo, del I.B. "Cervantes" (Madrid).
4. Dña. Purificación Ortiz Benítez, del I.B. de Las Rozas (Madrid).
5. D. Miguel Angel Abánades Astudillo, del I.B. "Buero Vallejo" (Guadalajara).

SEGUNDO CURSO DE B.U.P.

1. D. Francisco Jesús Montero de la Peña, del I.B. "Príncipe Felipe" (Madrid) (*).
2. D. Ignacio Casillas González, del I.B. "Arquitecto Pedro Gumiel" de Alcalá de Henares (Madrid).
3. D. Pedro Antonio Gozálvez Piera, del I.B. "San Isidro" (Madrid).
4. D. Pablo Ariza Molina, del I.B. "Miguel Servet" (Madrid) (*).
5. D. José Ignacio Giménez García, del I.B. "Arquitecto Pedro Gumiel" de Alcalá de Henares (Madrid).

Los señalados con (*) fueron premiados también en nuestro II Concurso, como alumnos de primero.

A todos ellos, nuestra cordial enhorabuena.

Además de los diplomas, a los citados alumnos ganadores les fueron entregados unos lotes de libros escogidos. Debemos agradecer al Instituto de la Juventud del Ministerio de Cultura el haber contribuido sustancialmente a costear esos premios, y también a nuestros socios R. Aguado-Muñoz, E. Rubiales y M. de Guzmán por la donación de ejemplares de los libros de que son autores, con destino a esos lotes.

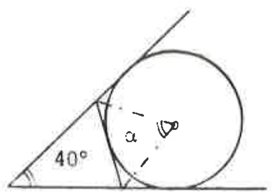
También debemos agradecer a la Inspección de Bachillerato del Distrito de Madrid su colaboración en la difusión de la convocatoria, y sobre todo a los Centros que han participado enviando a sus mejores alumnos y a éstos, que se han ofrecido a competir limpiamente, sacrificando un hermoso sábado que coincidió con la entrada del verano.

ENUNCIADOS DE LOS PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTRO III CONCURSO

PRIMER CURSO DE B.U.P.

PROBLEMA 1ª

Calcular razonadamente el ángulo α de la figura:



PROBLEMA 2ª

El autobús nª 1, en el que un estudiante puede llegar de su casa al Instituto, sin transbordos, tarda 2 horas y 1 minuto; en cualquiera de los autobuses nª 2, nª 3,..., nª k, se puede llegar también al Instituto; sin embargo, el estudiante sólo puede tomar el autobús p transbordando a él desde otro autobús nª p-1. Las rutas de estos autobuses son tales que el estudiante invertirá en el recorrido un tiempo (sin contar el perdido en los transbordos) inversamente proporcional al número de autobuses utilizados, y además empleará 4 minutos en cada transbordo.

¿Es cierto que puede ir de su casa al Instituto en menos de 40 minutos y 6 segundos?

PROBLEMA 3ª

¿En cuántos ceros termina el número 251!? Razonarlo.

PROBLEMA 4ª

Simplificar la expresión

$$\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}} + \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}$$

en la que $1 < x < 2$.

SEGUNDO CURSO DE B.U.P.

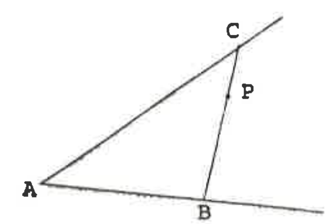
PROBLEMA 1ª

Demostrar que si b y c son las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo y a la de su hipotenusa, siendo $a-b \neq 1$ y $a+b \neq 1$, se cumple que

$$\log_{a+b} c + \log_{a-b} c = 2(\log_{a+b} c)(\log_{a-b} c)$$

PROBLEMA 2ª

Dados un ángulo agudo de vértice A y un punto P interior a él, probar que de todos los triángulos ABC, tales que B y C están uno sobre cada lado del ángulo y P en el segmento BC, el de área mínima es aquel en el que P es el punto medio de CB. ¿Cómo se trazaría el lado CB correspondiente a ese triángulo de área mínima?



PROBLEMA 3ª

Designado con $E[x]$ la "parte entera" de x, o sea el mayor entero menor o igual que x, demostrar que para todo entero $m \geq 3$ se verifica:

$$E\left[\frac{m(m+1)}{2(2m-1)}\right] = E\left[\frac{m+1}{4}\right]$$

PROBLEMA 4ª

A partir de un ángulo A_1 del primer cuadrante, expresado en grados, se forma la sucesión $A_1, A_2, A_3, \ldots$ poniendo:

$$A_2 = A_1 + 60, \quad A_3 = 180 - A_2, \quad A_4 = A_3 + 60,$$

$$A_5 = 180 - A_4, \quad A_6 = A_5 + 60, \quad A_7 = 180 - A_6, \text{ etc.}$$

A partir de esa sucesión, se forma otra $S_1, S_2, S_3, \ldots$ poniendo, para to n natural, $S_n = \text{sen } A_n$.

¿Para qué valores del ángulo inicial A_1 es convergente esta última sucesión? ¿Cuál es el límite,en ese caso?

NOTICIAS

Olimpiada Matemática Internacional

Los días 4 y 5 del pasado Julio, tal como estaba previsto, tuvieron lugar en Joutsa, proximidades de Helsinki, las pruebas de la 26 Olimpiada Matemática Internacional. Participaron 214 alumnos, pertenecientes a 38 países. A juzgar por las calificaciones, el nivel fué sensiblemente inferior al de años anteriores. Los ganadores individuales fueron: Gera Kos de Hungría y Daniel Tataru de Rumanía, ambos con la máxima puntuación posible: 42 puntos. Por naciones, la ganadora fué Rumanía, con 201 puntos.

Superados, a última hora, los problemas económicos, acudió a la O.M.I. 85, un equipo español, compuesto por los profesores, Ceferino Ruiz (Granada) y María Gaspar (Madrid) y los alumnos:

- Ricardo Pérez (Barcelona)
- Pablo Novaes (Madrid)
- Ignacio Garijo (Logroño)
- Juan Aguaron (Zaragoza)

Las puntuaciones obtenidas por los alumnos fueron, por orden de citación de: 13, 5, 4 y 3 puntos. España se clasificó en el puesto 33. La mayoría de los equipos constaban de seis alumnos.

Olimpiada Matemática Española

- Las pruebas de la fase de distrito de la Olimpiada Matemática Española van a celebrarse los próximos dias 29 y 30 de Noviembre. Los ganadores de todos los distritos competirán en la fase final, que se celebrará en los primeros meses de 1986, aunque no ha sido fijada todavía la fecha exacta. En el próximo número de este Boletín daremos la crónica de las pruebas mencionadas.

Olimpiada Matemática Ibero-Americana

- En la primera quincena de Diciembre tendrá lugar, en Bogotá, la Primera Olimpiada Matemática Ibero-Americana. Si se superan los habituales problemas, podrá participar en ella un equipo español.

S.E.F.I.

- Se ha celebrado en Madrid del 18 al 20 de septiembre de 1985 la Conferencia anual del S.E.F.I. (European Society for Engineering Education). Una amplia referencia de dicho congreso se publicó en el suplemento de eduación del diario El País del día 24 de septiembre de 1985.

- Se ha celebrado en Barcelona, del 25 al 28 de Septiembre de 1985, el Primer Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas, organizado por la revista Enseñanza de las Ciencias y los ICE's de las Universidades de Valencia y Autónoma de Barcelona.

- La Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton" ha publicado su programa de actividades para el curso que comienza. Además de diversos cursillos, anuncia la celebración de sus VII Jornadas Regionales, entre el 1 y el 4 de Mayo del año próximo, en Lanzarote. Puede solicitarse información escribiendo al Apartado de Correos 329 de La Laguna (Tenerife).

- El Club Matemático "Puig Adam" de Ciudad Real fué creado en el año 1967, por el Seminario de Matemáticas del Instituto "Juan de Avila" de esa capital. En nuestro próximo Boletín publicaremos una crónica de las actividades de ese Club, que puede considerarse como un valioso precursor de nuestra Sociedad.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080-Madrid.

* * * * *
* * * *

EVALUACION

Por Julio Fernández Biarge
Catedrático de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales

Todas las actividades sociales y particularmente las docentes-discentes, requiere ser evaluadas si se aspira a mejorarlas, extenderlas o simplemente a comprenderlas mejor. Aquí, no obstante, nos referiremos exclusivamente a los procesos de evaluación a que se somete a los alumnos a lo largo de sus estudios para comprobar los resultados de su labor personal. Ciertamente sería interesante tratar también de otros procesos de evaluación relativos a la labor de los profesores, al rendimiento del sistema educativo, etc., pero ahora queremos limitarnos a la evaluación de los resultados alcanzados por los alumnos en su discencia.

LA FINALIDAD DE LAS EVALUACIONES

En la sociedad actual, la Enseñanza está íntimamente ligada a la expedición de títulos profesionales y a la atribución de puestos dentro de una sociedad competitiva; de ahí que necesite numerosas evaluaciones, que llegan a absorber una parte sustancial del trabajo de profesores y alumnos, justamente la más penosa, a pesar de lo cual, son aceptadas por unos y otros como indispensables. Tan habitual se ha hecho que la evaluación se integre en la labor educativa, que con frecuencia se aplica rutinariamente, con olvido de los objetivos que debiera perseguir. Por ello convendría reflexionar sobre los fines que se trata de alcanzar con esas evaluaciones, sobre los medios que pueden emplearse y sobre los efectos que cabe esperar de su realización.

Para juzgar acerca de la calidad de un determinado sistema de evaluación hay que comenzar por tener clara la finalidad perseguida, pero no debe detenerse allí el análisis; aún en el caso de que un sistema conduzca al cumplimiento de los objetivos parciales que se hayan presentado como deseables, no puede juzgarse sin más como conveniente; hay que examinar sus costos -cuántos trabajos y sufrimientos exige- y los efectos de toda índole que produce.

Las finalidades con que se somete a evaluaciones a los alumnos son varias:

- Hay una finalidad diagnóstica; se trata de conocer si el alumno está en condiciones de acometer una nueva etapa de sus estudios o de ejercer una actividad determinada.
- Puede haber una finalidad selectiva; se persigue la elección, según criterios establecidos, de los alumnos más idóneos, para ocupar unos puestos cuyo número esté más o menos rígidamente limitado.
- También puede haber una finalidad tutelar; se quiere ayudar al alumno a conocer su propio nivel de preparación o la eficacia de su esfuerzo, para que éste conozca sus posibilidades y pueda mejorar sus métodos de trabajo.
- De hecho hay una finalidad coactiva; dadas las consecuencias que los resultados de la evaluación han de tener para el alumno, se trata de forzarlo a realizar un intenso trabajo orientado hacia unos objetivos prefijados.
- Relacionada con la anterior, puede haber una finalidad orientadora; la evaluación señala al alumno cuales son las materias o habilidades a las que debe orientar preferentemente su trabajo.

- Eventualmente puede haber una finalidad lúdica; se invita al alumno a esforzarse en unas pruebas, persiguiendo simplemente la satisfacción de superarles.

LOS OBJETOS DE LAS EVALUACIONES

Orientados a algunas de las finalidades anteriores, los sistemas de evaluación pueden diferir sustancialmente en su objeto; en un alumno puede evaluarse su nivel de conocimientos en un área determinada, su habilidad en cierta actividad, su laboriosidad, su capacidad de razonamiento, su creatividad, etc.

La mayor parte de los fines citados antes sólo pueden conseguirse con pruebas bien equilibradas en lo que se refiere a sus objetos. La omisión de alguno de los aspectos deseables de la educación en los objetos de la evaluación, hace que ésta no cumpla debidamente con alguna de las finalidades perseguidas: el diagnóstico será incompleto, la selección equivocada, la información dada al alumno sesgada, la coacción mal orientada, la orientación falsa y quizás se pierdan posibilidades de goce.

EXPRESION DEL RESULTADO DE UNA EVALUACION

La calificación (númerica o no) es el resultado de una evaluación. Esta calificación decide, en muchos casos, si el alumno puede comenzar o proseguir unos estudios o recibir un título profesional; este efecto es de tal importancia para el alumno y para la sociedad, que parece natural exigir al sistema de evaluación ciertas garantías, que no se limitan a evitar la existencia de fraude.

La obtención de la calificación a través de una evaluación presenta las características del acto de medir una magnitud física (no necesariamente escalar) y debe responder a similares exigencias de objetividad, sensibilidad, reproducibilidad y posibilidad de calibración con un patrón; sólo si un sistema de evaluación reúne estas cualidades en cierto grado, puede decirse que evalúa realmente algo; de lo contrario ni siquiera merece el nombre de sistema de evaluación, siendo más bien un juego de azar para la atribución de calificaciones. Pero aún en el caso de presentar en alto grado esas características, que garantizan que se trata de una verdadera evaluación, queda todavía el problema de saber si lo que se evalúa es exactamente lo que se deseaba valorar, o sea el problema de la interpretación de la calificación obtenida, fundamental para no hacer un uso indebido de las calificaciones que proporciona el sistema.

Para examinar hasta que punto los sistemas de evaluación satisfacen a las exigencias citadas, nos fijaremos, por ejemplo, en las habituales pruebas teórico-prácticas realizadas por escrito; en ellas podemos distinguir tres fases:

I) Se preparan las cuestiones y (más o menos explícitamente) las normas de calificación; quizás un sorteo decide qué temas de los preparados van a ser propuestos.

II) El alumno realiza la prueba en el tiempo disponible.

III) Los calificadores examinan su escrito y le asignan una calificación de acuerdo con las normas establecidas.

Con técnicas adecuadas es posible conseguir cierto grado de objetividad, sensibilidad y reproducibilidad en la fase III), de modo que un mismo ejercicio escrito recibe la misma calificación numérica, dentro de unos márgenes aceptables, con independencia del calificador; pero está claro que estas cualidades son mucho más difíciles de alcanzar en las fases I) y II); el mismo alumno, ante un mismo tema, puede tener más éxito un día que otro, y la elección de temas por el tribunal o el resultado del sorteo puede cambiar sustancialmente la calificación que recibirá cada alumno; un examen de este tipo puede presentar las deseables cualidades de equidad, imparcialidad y publicidad (que también tendría un sorteo ante notario), pero difícilmente puede cumplir con las finalidades que se supone tiene la evaluación.

Los inconvenientes señalados suelen paliarse obteniendo la calificación como promedio de resultados de varias pruebas independientes, lo que mejora grandemente la sensibilidad y la reproducibilidad del sistema, al compensarse estadísticamente los efectos de los factores aleatorios que afectan a las pruebas individuales. En los exámenes comúnmente llamados "tests", con numerosas preguntas cuya puntuación individual es prácticamente binaria (bien o mal) y por tanto con sensibilidad y reproducibilidad muy bajas, se consiguen resultados finales significativos, precisos y reproducibles, gracias al elevado número de pruebas independientes que intervienen en el cálculo de la calificación global.

Esta práctica es correcta cuando se aplica a pruebas con el mismo objeto de evaluación, pero si se aplica a evaluaciones de distintos objetos, como es habitual, el aumento de sensibilidad y reproducibilidad se obtiene a costa de pérdida del significado de la calificación, ya que en su cálculo aparecen adiciones de medidas de magnitudes heterogéneas. Incluso el uso indiscutido de las medias aritméticas apenas tiene fundamento teórico, aparte de la facilidad de su cálculo; acaso tendría justificación si se pudiese aceptar que los efectos del azar sobre las calificaciones individuales de las distintas pruebas se distribuían normalmente, lo que está muy lejos de la realidad; para calificar un conjunto de <u>n</u> pruebas heterogéneas con puntuaciones

a_i (de 0 a 10), en lugar de la media aritmética $1/n\ \Sigma a_i$, hay argumentos para preferir algoritmos tales como $\sqrt{1/n\ \Sigma a_i^2}$ ó $10 - \sqrt{1/n\ \Sigma (10-a_i)^2}$. En realidad, si las pruebas son heterogéneas en cuanto a sus objetos, lo mejor sería dar la calificación como un vector $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de un espacio A_n; si las componentes de ese vector eran fiables, la aptitud para determinada actividad se podría estimar como el valor de cierta aplicación (lineal o no) de A_n en R, para ese vector; la forma lineal $\frac{1}{n}\ \Sigma a_i$, como medida de una aptitud "a secas" (sin especificar para qué), utilizada con fines muy diversos, es una elección arbitraria de esa aplicación, que no tiene más fundamento que la simplificad de su obtención y uso.

En realidad, la sensibilidad y reproducibilidad de un sistema de evaluación puede obtenerse experimentalmente, sometiendo a exámenes presuntamente análogos a un grupo de alumnos, repetidas veces, con los debidos medios para motivarlos a que se esfuercen en obtener los mejores resultados posibles cada vez. Esto permitiría averiguar los intervalos de confianza que cabe atribuir a las calificaciones obtenidas, estudiar si es posible expresar éstas en forma vectorial, sin que se pierda la reproducibilidad, y comparar los resultados de dos sistemas diferentes. Tal experiencia es fácil de llevar a cabo con voluntarios retribuidos y es lamentable que no se haga sistemáticamente cada vez que se establece una nueva prueba de reválida, acceso o madurez, antes de someter a ella a una gran parte de la población, haciendo depender de una décima de sus calificaciones, su acceso a una carrera determinada, la obtención de una beca o el retraso de un año en los estudios. Es seguro que un tratamiento experimental serio proporcionaría, con un costo muy reducido, datos interesantes para mejorar la reglamentación de la prueba y la utilización cocorrecta de sus resultados.

No obstante, el conseguir que el sistema de evaluación mida realmente algo, no es todo; se necesita asímismo una "calibración": ¿Qué puntuación es la mínima que debe de exigirse para el acceso a determinados estudios o a una profesión determinada? ¿Cómo pueden compararse las calificaciones obtenidas por dos sistemas de evaluación diferentes? ¿Qué magia posee el número 5 para que sea el punto de separación de afortunados y desafortunados? Y resuelto este problema subsiste aún otro más difícil: ¿Es seguro que nuestro sistema de evaluación mide realmente lo que deseábamos medir? ¿Todo lo que deseábamos medir? ¿Quedan objetos importantes que debieron ser evaluados y no lo han sido? Ya hemos hablado antes de cómo una prueba mal equilibrada en cuanto a los objetos de sus valoraciones no puede cumplir satisfactoriamente las finalidades propuestas, a menos que se haga un uso muy restrictivo de las calificaciones que produce, adecuado a sus limitaciones.

EFECTOS DE LAS EVALUACIONES

Al adoptar un sistema de evaluación con una finalidad inmediata determinada, deberían ser previstos los efectos globales que se derivarán de su práctica; todos ellos, ya que algunos, que al principio se consideren como secundarios, pueden ser importantísimos, a la larga, para el sistema educativo. Trataremos de analizar a continuación los distintos tipos de efectos que produce la implantación de un sistema de evaluación:

a) Produce una calificación para cada alumno. Esta suele ser socialmente muy importante; con ella se decide si un alumno puede pasar a otro curso, acceder a unos determinados estudios, obtener un título o disfrutar de una beca. Con frecuencia esa calificación se expresa con un solo número, entre 0 y 10, cuyas décimas o centésimas pueden ser decisivas en asuntos tan importantes como los citados. Parece imprescindible, por tanto, que el sistema de evaluación esté concebido de manera que pueda proporcionar en forma fiable las calificaciones justas, con la precisión exigida, y que ello haya sido comprobado experimentalmente. Esta exigencia es adicional, por supuesto, a la de que las calificaciones sean imparciales, verificables y exentas de fraudes. Habría que ver si la calificación numérica es adecuada o se requiere una calificación vectorial, de varias componentes, que se combinarán de diferentes maneras según la finalidad con que se vaya a utilizar. Los efectos de unas calificaciones obtenidas con altos componentes aleatorios, o que ingoren aspectos importantes de la formación de los alumnos, con lo que resultan sesgadas, o simplemente interpretadas erróneamente, como indicadores de una aptitud distinta de la que realmente muestran, producen injusticias sociales y fomentan la falta de confianza en el sistema educativo completo.

b) Coacciona al alumno para que se esfuerce en su preparación. Los efectos sociales de la calificación son tan importantes para el alumno, que la superación de la prueba a que va a ser sometido pasa a ser el objetivo principal de su trabajo; la curiosidad, la satisfacción de conocer, el deseo de prepararse para una actividad profesional, se ven sustituidos por la necesidad de alcanzar una calificación suficiente en la próxima evaluación; esta coacción consigue generalmente que el alumno se esfuerce en una medida difícilmente alcanzable por otros medios, y éste es un aspecto positivo de las evaluaciones, que debe ser utilizado inteligentemente, pero teniendo en cuenta otros efectos que señalaremos a continuación.

c) Induce a una preparación específica para la superación de las pruebas. El esfuerzo de esa preparación sustituye al que debería dedicarse a la formación humana o profesional que constituye el objetivo de la Enseñanza. No sólo el alumno se siente forzado a orientar su trabajo a aumentar sus posibilidades de éxito en la evaluación, sino que los intereses de los profesores, centros de enseñanza y padres de los alumnos, convergen en el mismo sentido; una vez establecido un sistema de evaluación, las actividades docente y discente no siguen las directrices marcadas

das por los que planificaron la enseñanza, ni tienden hacia los objetivos señalados por ellos, sino que se acomodan a las tácticas que permiten alcanzar con el mínimo esfuerzo el objetivo limitado de la superación de las pruebas. Así, un sistema de evaluación que posea excelentes cualidades como dispositivo de medida, puede tener consecuencias nefastas sobre la Enseñanza, si induce a un tipo de actividad muy diferente del que se desea que realicen los alumnos para conseguir el tipo de educación que se persigue con ella. En cambio, un sistema de evaluación mediocre como instrumento de medida, puede ser beneficioso si impulsa a los alumnos a desarrollar actividades favorables para su educación.

En cualquier caso, esta reacción de profesores y alumnos para adaptarse a las exigencias de los sistemas de evaluación, ponde de manifiesto el profundo error de asimilar éstos a los instrumentos de medida de magnitudes físicas; el agua de un recipiente no tiene interés en que las medidas de su temperatura arrojen resultados altos o bajos, pero un alumno tratará de forzar el resultado, si conoce de antemano las características de la evaluación a que va a ser sometido. Solo una evaluación realizada por sorpresa, con reglas desconocidas por el alumno, puede presentar similitudes con el proceso de medición de la física. En una evaluación por sorpresa, una prueba sobre riqueza de vocabulario puede ser un indicador fiel del provecho que el alumno ha sacado de sus lecturas y de la cantidad de éstas, pero una evaluación sistemática de tal riqueza de vocabulario puede inducir al alumno no a leer más, sino a aprender de memoria listas de palabras; no sólo la actividad inducida no es la deseada, sino que la prueba pierde su valor diagnóstico.

d) Da al alumno una perspectiva sobre la utilidad relativa de los distintos temas. El alumno tiende a aceptar que lo más interesante es aquello cuyo conocimiento contribuye más a superar las pruebas. Lo malo es que esa perspectiva es en muchas ocasiones totalmente errónea, ya que los temas y los problemas se escogen atendiendo a que sean fáciles de calificar y se puedan responder en tiempo limitado y sin medios auxiliares. Los ejercicios habitualmente escogidos para las evaluaciones en Matemáticas suelen mostrar a los alumnos perspectivas muy deformadas acerca del interés o utilidad de los instrumentos matemáticos proporcionados por las teorías estudiadas.

e) Somete al alumno a un trabajo intenso durante la realización de la prueba. La prueba constituye así una actividad que puede tener alto valor formativo si está hábilmente diseñada y sobre todo si hay oportunidad de comentarla y discutirla posteriormente. Las explicaciones sobre un problema sobre el que un alumno ha trabajado intensamente son mucho más provechosas que las que se refieren a otro que apenas ha merecido antes su atención.

f) Perturba otras actividades del alumno. Las evaluaciones en una asignatura suelen perturbar el trabajo debido a otras si falta una buena coordinación; en evaluaciones importantes pueden verse perturbadas excesivamente las prácticas deportivas, sociales, etc.

g) Absorbe una parte importante de la capacidad de trabajo del profesorado, en una tarea que resulta, en general, penosa, y va en detrimento de su dedicación a la docencia directa, a la tutoría o a la investigación.

h) Puede crear tensiones emocionales en los alumnos, desfavorables para su formación humana y para el buen rendimiento de la Enseñanza. No deben ahorrarse esfuerzos para quitar a las pruebas dramatismo, azar o crueldad innecesarios.

i) Puede inducir a intentar el fraude. Cuando el prestigio de un sistema de evaluación es bajo, es frecuente que se intenten hacer valer las influencias, la copia ilícita o la comunicación entre compañeros, e incluso que esas prácticas lleguen a considerarse como normales, lo que redunda en ahondar más aún el desprestigio de estas pruebas.

j) Permite una evaluación indirecta del sistema educativo, aunque normalmente se desaprovecha el material que permitiría llevarla a cabo.

k) Provoca situaciones de descontento en los que se sienten defraudados por los resultados de la evaluación, que estiman injustos. Si se hace frecuente esa situación y no se encauzan debidamente sus reclamaciones, se socava gravemente el prestigio de la prueba, y con él el de la Enseñanza.

No debe implantarse un sistema de evaluación sin hacer antes un estudio minucioso de los efectos de todo tipo que puede producir, tratando de potenciar los favorables y evitando en lo posible los no deseados. Si es preciso, debe hacerse una experimentación en regla. En todo caso, deben establecerse controles para comprobar que los efectos producidos no se apartan desfavorablemente de los previstos.

El análisis precedente muestra la gran complejidad del tema y los perniciosos efectos que cabe esperar de un sistema de evaluación defectuoso. Nuestras reflexiones deberían servir para evitar improvisaciones en la reglamentación de las evaluaciones que sin duda se incluirán en la planificación de la Enseñanza que surja de la reforma en curso. Un sistema de pruebas mal concebido puede echar por tierra todos los buenos propósitos y cuidadosos trabajos de los inspiradores de la reforma.

Algunos lectores esperarían que completásemos este análisis con la sugerencia de técnicas de evaluación que eviten los indeseables efectos de cuyo peligro hemos advertido. Siento defraudarles; invitamos a todos a trabajar en encontrarlas y mejorarlas. Particularmente, pienso exponer en otro artículo lo que me ha enseñado la experiencia de muchos años, en el campo, mucho más restringido del tratado aquí, de las evaluaciones en el área de las Matemáticas.

EL INFINITO: BREVE RECORRIDO HISTORICO

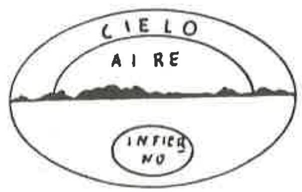
Por José Fco. Carballido Quesada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Madrid

Se da la circunstancia de que en ninguno de los programas de las asignaturas de Matemáticas que yo conozco, aparece un tema dedicado al infinito, pero en cambio, sí manejamos habitualmente dicho concepto con nuestros alumnos. Considero pues, conveniente introducir este tema siquiera someramente y para ello un buen camino puede ser dar una breve sinopsis histórica de la evolución de dicho concepto, lo cual, puede propiciar un posterior diálogo con los alumnos que resulte esclarecedor.

Como hacer un estudio pormenorizado del infinito sin duda nos ocuparía tomos, daremos un modelo que va dirigido a mostrar la evolución desde un infinito que podríamos llamar "geométrico" a uno "numérico" y que cada profesor puede aumentar o disminuir a tenor del nivel y los conocimientos del grupo de alumnos a los cuales vaya dirigido.

En el Antiguo Testamento, el Universo no se concebía infinito, así en Job XXVI - 10, leemos: *"La vasta llanura de la Tierra.... lo mismo que el cielo que la cubre, es de forma circular y está rodeada por el agua hasta donde alcanza el cielo"*. Y en Isaías XL - 22, refiriéndose a Dios: *"Está sentado en lo alto sobre el círculo de la Tierra y los moradores son, respecto a él, como langostas"*.

Juan Schiaparelli lo resume en el siguiente esquema:



Los griegos primitivos consideraban a la tierra con forma de plato así: Tales de Mileto (VII-VI A. de C.) atribuía a la Tierra la forma de un gran plato oblongo, con los bordes levantados. Encima de ella estaba la bóveda de los cielos y el conjunto flotaba como un vacío sobre las aguas. Asimismo se asimilaba lo finito con el ser, lo plano y lo perfecto, siendo lo infinito como el no ser, lo vacío y lo imperfecto.

Solamente Pitágoras (580-500 A. de C.) y Platón (428-347 A. de C.) consideraron la Tierra con forma esférica, si bien su única razón era la de considerar a la esfera como la forma más perfecta. Ante esta perspectiva no puede sorprendernos que Euclides (450-374) construyera su geometría sobre una superficie plana e indefinida aventurándose a proponer su axioma de las paralelas en el que aparece el infinito (geométrico) como punto de corte de dos líneas paralelas.

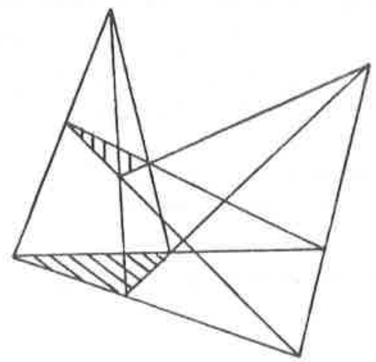
Es posteriormente Aristóteles (384-322) cuando al observar que la sombra de la Tierra en los eclipses de luna es "redonda" proporcionó un argumento convincente sobre la esfericidad de la Tierra.

Sin duda se puede considerar a Aristóteles como un "finitista", distingue entre el infinito potencial (está siendo pero no es) y el actual (es algo enteramente dado) y sólo considera el potencial, así por ejemplo cuando considera que dado un número natural n por grande que sea, siempre se le puede agregar una unidad, n+1, al así formado se le puede agregar otra unidad (n+1) +1 y así "ad infinitum", o cuando argumenta que la colección de puntos de una línea y su divisibilidad es potencialmente infinita.

Esta idea de "infinito matemático" que se estaba formando motivó en seguida un estudio más profundo y así podemos destacar como el resultado más importante el llamado "metodo exhaustivo", al parecer propuesto ya por Anfitón, y según el cual podríamos calcular un área dada, la de un círculo por ejemplo, inscribiendo en él un polígono de área conocida y posteriormente inscribiendo otros polígonos en las zonas sobrantes. Anfitón, consideraba que existiría un número finito de pasos hasta llegar al resultado. Dicho método fue generalizado por Eudoxo de Conido (408-255), que lo aplicó a sólidos y reconoció que habría un número infinito de pasos para llegar al resultado.

La geometría euclidiana tuvo una gran influencia a lo largo del tiempo y así encontramos como los maestros pintores del Renacimiento la aprovechan cuando intentan plasmar en su lienzo bidimensional una escena tridimensional teniendo en cuenta por tanto la perspectiva y para ello hacen converger, en el cuadro, las líneas paralelas a pun punto imaginario del infinito.

Estos problemas de la visión con que se encontraron los pintores motivaron que los matemáticos se ocuparan de ellos, dando así origen a la Geometría Proyectiva, siendo uno de sus teoremas más característicos el de Desargues (1593-1661): el cual afirma que la prolongación de los lados homólogos de dos triángulos limitados por líneas concurrentes se cortan en una misma recta.

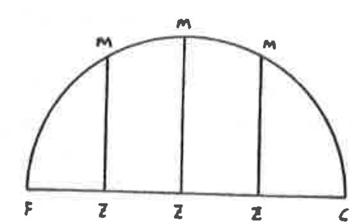


La pregunta surge cuando decimos: ¿Qué ocurre en el caso en que los lados sean paralelos? Desargues contestó invocando la convención matemática de que las líneas paralelas de cualquier serie tienen un punto en común, el cual está en el infinito y es por tanto distinto de los usuales que están colocados de forma finita en las líneas de la geometría euclídea. Además en geometría proyectiva se hace el convenio de que todos los puntos de intersección de los diferentes conjuntos de rectas de un plano dado, se encuentran sobre una recta denominada la recta del infinito.

Casi simultáneamente nació otra forma de geometría más idealizada, en cuanto a la observación real, en la que si existía el paralelismo y existían leyes numéricas y algebraicas para calcularlo; naturalmente me estoy refiriendo a la geometría de Descartes (1596-1650) o analítica en la que a cada punto le corresponde un único par de números reales (coordenadas) quedando así desplazado el infinito. Sin embargo, hace amplio uso del infinito cuando intenta probar la existencia de Dios, aunque

cuando se refiere a la extensión del mundo dice que es "indefinida", si bien, queda la duda de si se refiere a que es indefinida por que no sabemos asignar sus límites o por que es infinita.

Pascal contemporáneo de Desargues y Descartes (1623-1662) comenzó trabajando en la línea de desargues y de la geometría proyectiva, pero posteriormente concentró su atención en el gran "monstruo" que nacía: El Cálculo Infinitesimal, y así comienza a abandonar la idea del infinito como un ente geométrico para irlo asimilando a un concepto numérico. Leemos en sus Obras: *"Así cuando yo considero el diámetro de un semicírculo dividido en un número infinito de partes iguales en los puntos Z, por lo cual serán conocidas las ordenadas ZM, no tengo ninguna dificultad en usar la expresión suma de ordenadas que parece no ser geométrica a éstos que no entienden la doctrina de los indivisibles y que se imaginan que es pecar contra la Geometría cuando se expresa un plano por un número infinito de líneas, ya que por ello no se entiende otra cosa sino la suma de un número infinito de rectángulos hechos con cada una de las pequeñas porciones iguales de diámetro, con lo que la suma es ciertamente un plano que no difiere del espacio del semicírculo más que en una cantidad menor que ninguna dada".*



En Leibniz (1646-1716) la idea de infinito tiene un indudable arraigo y así afirma: *"Yo no digo como se me imputa, que Dios no pueda dar límites a la extensión de la materia; más parece que no lo quiere y que ha considerado mejor el no dárselos"* (Carta de Leibniz a Clarke) y en su teoría matemática también aparece por doquier dividiendo en una infinidad de partes cosas que ya "parecen" indivisibles.

Para Gauss (1777-1858) en cambio el infinito es sólo un modo de hablar.

Con la geometría riemaniana la idea del "infinito geométrico" como punto de corte de dos líneas rectas quedó en entredicho ya que sobre una superficie esférica, dos líneas (circunferencias máximas) son de longitud finita ($2\pi r$) y se cortan en puntos finitos. Alguien que utilizó eficazmente este tipo de geometría fue Einstein al elaborar su teoría de la relatividad. Podemos afirmar que Einstein fue un perseguidor del infinito, así en la imagen que se tenía del Cosmos sobre todo en la época renacentista se consideraba un espacio infinito y consecuentemente un número infinito de estrellas, pero si existiese tal número infinito de estrellas la masa de todas sería infinita y entonces la fuerza de atracción comunicaría a cada estrella una velocidad infinita, lo cual, obviamente no es cirto. ¿Qué puede deducirse? Que hay un número finito de estrellas en un espacio infinito. Pero tampoco esta solución es satisfactoria, puesto que según la teoría de la relatividad una estrella que estuviera alejada infinitamente de todas las demás se encontraría en la misma situación que si estuviera sola en el Universo y carecería por tanto de masa, lo que es contradictorio con las ecuaciones del campo, mediante las cuales un cuerpo, aún en el infinito, posee masa. La solución la dió Einstein negando la infinitud del Universo.

Cantor (1845-1918) abrió las puertas a la moderna teoría del infinito. Definió la cardinalidad entre dos conjuntos

como la posibilidad de construir una aplicación uno-uno entre ellos, demostrando así que hay tantos números pares como naturales y poniendo en entredicho el principio filosófico de que el todo es distinto de la parte. Además descubrió que esta cantidad era estrictamente menor que la que reflejaba los números del intervalo (0,1) con lo que se abrió la posibilidad de considerar diversos órdenes de infinitud.

No faltaron algunas reacciones airadas como la de Hermite que con una visión platonista reprochaba a Cantor que creara los objetos en lugar de descubrirlos y consideraba una impiedad querer penetrar llanamente en un dominio que sólo Dios puede abarcar.

A pesar de todo esto tomó cada vez más fuerza la idea del infinito numérico, lo que fué respaldado sin duda por la definición de límite y así leemos en Bertrand Russell (1872-1970): *"La integral definidad no es una suma de elementos de un continuo, aunque existen tales elementos; por ejemplo, la longitud de una curva tal como se obtiene por integración, no es una suma de puntos sino estricta y solamente el límite de las longitudes de polígonos inscritos. El único sentido que se puede dar a la suma de los puntos de la curva es la clase lógica a la que todos pertenecen, es decir, la curva misma, no su longitud. Todas las longitudes son magnitudes de divisibilidad de trechos y todos los trechos consisten en un número infinito de puntos; y dos trechos cualesquiera limitados tienen una razón finita entre sí"*.

Pienso que un buen final puede ser la frase que Hilbert pronunció en 1921: *"¡El infinito. Ningún otro problema ha conmovido tan profundamente al espíritu del hombre!"*.

BIBLIOGRAFIA

- Balmes.- "Filosofía Fundamental". Madrid.
- Ferrater Mora, José.- "Diccionario de Filosofía". Alianza Diccionario. Madrid.
- Fraile, Guillermo.- "Historia de la Filosofía". B.A.C. Madrid.
- Hahn, Hans.- "El Infinito". Colección Sigma, Grijalbo. Madrid.
- Hawking, Stephen.- "Los Límites del Universo". Diario El País del 30.VI.85.
- Niclitschek, Alexander.- "El Prodigioso Jardín de las Matemáticas".
- Ortega y Gasset, José.- "El Tema de Nuestro Tiempo". Colección Austral, Espasa Calpe. Buenos Aires.
- Papp, Desiderio.- "Einstein: Historia de un Espíritu". Colección Austral, Espasa Calpe. Madrid.
- Pascal, Blaise.- "Oeuvres". Ed. Brunschvicg. París.
- Poincaré, Henri.- "Ultimos Pensamientos". Colección Austral, Espasa Calpe.
- Russell, Bertrand.- "Los Fundamentos de la Matemática". Espasa Calpe.
- Schiaparelli, Juan.- "La Astronomía en el Antiguo Testamento". Ed. Losada. Buenos Aires.
- Varios autores.- "Matemáticas en el Mundo Moderno". Teide.
- "Diccionario Enciclopédico Ilustrado". Espasa Calpe.

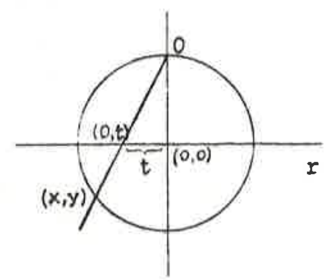
PUNTOS RACIONALES EN CURVAS ALGEBRAICAS

Por Isabel Alvaro
(E.U.I.T.I. de la Universidad Politécnica de Madrid)

De lo que se trata aquí es de dar una visión relajada de esta bella rama de las Matemáticas, a la vez clásica y actual, que trata de las soluciones racionales de curvas algebraicas, es decir, de los puntos del plano (x,y) con $x,y \in \mathbb{Q}$ que verifican una ecuación algebraica dada $F(X,Y) = \Sigma a_{ij} X^i Y^j = 0$, $a_{ij} \in \mathbb{Q}$.

Cuando la curva es una recta $y = mx + n$, $m,n \in \mathbb{Q}$ no existe problema alguno; para cada $x \in \mathbb{Q}$ se obtiene el correspondiente $y \in \mathbb{Q}$ para formar el punto racional (x,y).

Para una cónica, dado un punto racional O de la cónica, todos los demás puntos racionales se pueden obtener a partir de él: se toma una recta fija r que no pase por O, entonces para cada punto racional de r, la recta que une este punto con O determina un punto racional en la cónica. Por ejemplo, en $X^2+Y^2 = 1$, es la proyección estereográfica:



$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$$(0,t) \sim t \longrightarrow \left(\frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1}\right) = (x,y)$$

Queda claro que si t es racional, x,y también lo son.

UNA VISION DE LA FOTOGRAFIA CON OPTICA MATEMATICA

Por Joaquín Gómez Rey
I.B. Mixto de Aranjuez (Madrid)

La palabra fotografía significa escribir con luz. Una buena instantánea es aquella que se ha obtenido impresionando la película con la cantidad de luz precisa.

Hoy día, con las modernas cámaras automáticas nos es dado casi todo, y se obtienen buenos resultados en general; sin embargo en condiciones particulares, que suelen ser las más atractivas, los resultados son cuestionables.

Se hace preciso el uso del control manual de la cámara, y para ello hay que utilizar algunos conceptos matemáticos; el conocimiento de las relaciones e identidades entre las variables, contribuye a mejorar la técnica fotográfica.

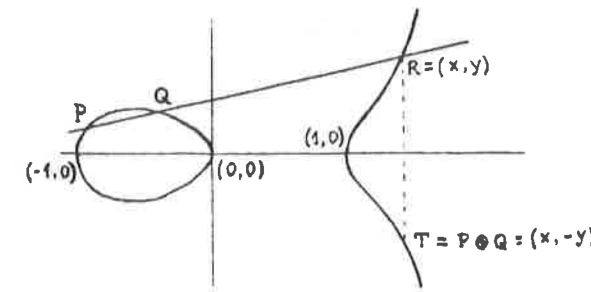
Las cuatro variables básicas que maneja el fotógrafo son: diafragma del objetivo, velocidad de obturación, sensibilidad de la película y cantidad de luz.

Las tres primeras variables diafragma, velocidad y sensibilidad son internas, controlables por el fotógrafo. Si bien las dos primeras son más flexibles, mientras que la última permanecerá constante, si no cambiamos de película.

Sus escalas de medidas son términos de una progresión finita, y la distancia entre dos términos se mide en puntos (stops).

La variable que resta, la más importante, es la canti-

La suma $\oplus$ de puntos se define como sigue: consideremos la cúbica no singular $Y^2 = X^3 - X$, y sean P y Q dos puntos de ella. La recta que pasa por P y Q corta a la curva en $R = (x,y)$, entonces se define $P \oplus Q = T$ donde $T = (x,-y)$ como se indica en la figura.



Por ejemplo, $(-1,0) \oplus (0,0) = (1,0)$.

Vamos a ver quién es el elemento neutro: tomemos $P = (x,y)$ un punto de la curva y consideremos $Q = (x,-y)$, la recta que une estos dos puntos, que es una recta vertical, tiene que cortar a la curva en otro punto, pero este punto no está en el plano; a este punto, que introducimos directamente, lo llamamos del infinito y lo denotaremos por $\overline{O}$. La definición de suma muestra que $\overline{O}$ es el elemento neutro y que (x,y) y $(x,-y)$ son opuestos el uno del otro.

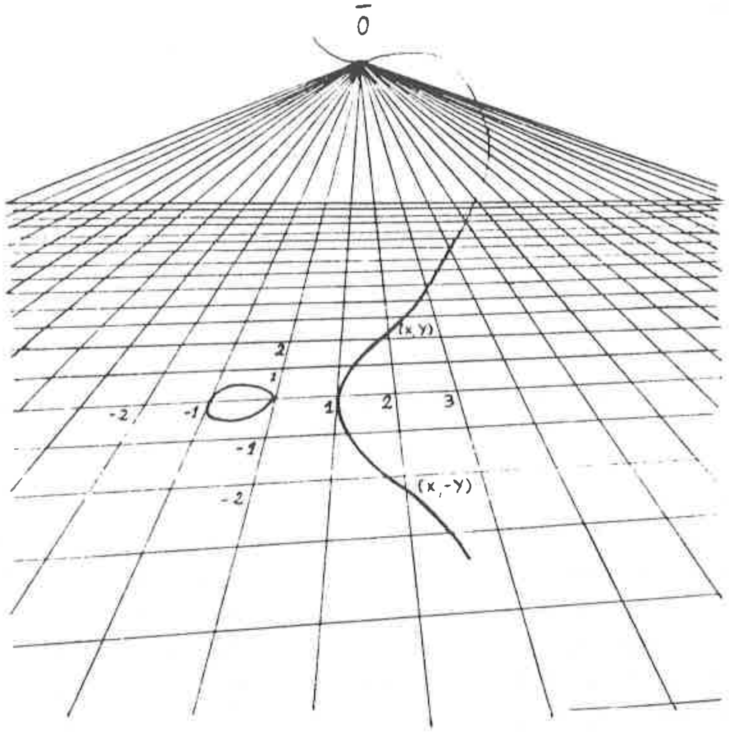
El dibujo que se presenta en la página siguiente puede ayudar a intuir el comentario anterior. [4].

Se pueden conocer las coordenadas del punto suma en función de las de los sumandos. Si,

$P_1 = (x_1,y_1)$, $\quad P_2 = (x_2,y_2)$, $\quad P_3 = (x_3,y_3)$, $\quad P_3 = P_1 \oplus P_2$

entonces,

$$x_3 = -x_1 - x_2 + \left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)^2 \; ; \qquad y_3 = -\left(\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right)(x_3-x_1) - y_1$$



Si $x_1 = x_2$ ésto no tiene sentido. En este caso, si $P = (x,y)$ se calcula $2P$ con la fórmula

$$x_3 = -2x + \left(\frac{3x^2 + a}{2y}\right)^2$$

Entonces el conjunto de los puntos racionales de la cúbica con esta operación $\oplus$ es un grupo abeliano y el enunciado formal del teorema de Mordell es:

Teorema de Mordell: "El grupo de los puntos racionales de una cúbica no singular es un grupo abeliano finitamente generado".

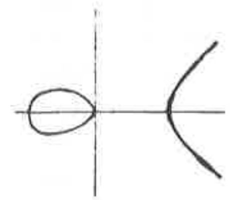
EJEMPLOS

1.- $Y^2 = X^3 - X$ (la curva dibujada)

Utilizando un teorema de Naguell-Lutz, los puntos racionales de orden finito, es decir, los P tales que $P \oplus P \oplus \ldots \oplus P = \overline{0}$ en $Y^2 = X^3 + aX + b$, son los (x,y), donde:

1) x,y son enteros, y

2) $y = 0$ (puntos de orden 2) o y^2/D, donde $D = -4a^3 - 27b^2$ es el discriminante de $f(X) = X^3 + aX + b$.



En este caso para $y = 0$ los $x \in Z$ tales que $0 = x(x-1)(x+1)$ son $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$, luego tiene tres puntos racionales de orden 2: (0.0), $(1,0)$, $(-1,0)$.

Por otra parte $D = 4$ luego si hay más puntos (x,y) de orden finito debe tenerse y^2/D, es decir, $y = \pm 1, \pm 2, \pm 4$, tal que existe algún $x \in Z$ solución de la ecuación $y^2 = x^3 - x$. Veamos: para $y = \pm 1$, la ecuación $x^3 - x - 1 = 0$ no tiene soluciones enteras. Para $y = \pm 2$, la ecuación $x^3 - x - 4 = 0$ no tiene soluciones enteras. Como para $y = \pm 4$ pasa lo mismo, los puntos de orden finito son: $\overline{0}$, (0.0), $(1,0)$, $(-1,0)$, todos de orden 2, luego es el grupo de Klein. Puede probarse que no hay más [5].

2.- Cúbica de Fermat. $X^3 + Y^3 = 1$

Existe una correspondencia entre los puntos racionales de esta curva y los de $Y^2 = X^3 - 432$.

$$(X^3 + Y^3 - 1) \longrightarrow (Y^2 - X^3 + 432)$$

$$(x,y) \longrightarrow \left(12\,\frac{x}{1-y},\ 36\,\frac{1+y}{1-y}\right)$$

$$\overline{0} \longrightarrow (12,36)$$

$$(0,1) \longrightarrow \overline{0}$$

Luego, estudiar los puntos racionales de la una equivale a estudiar los de la otra.

Para $y = 0$, la ecuación $x^3 = 432$ no tiene soluciones enteras, luego no hay puntos de orden 2.

Por otra parte, $D = -27^3 . 2^8$ luego los puntos racionales de orden finito, son los (x,y) donde $y = 2^i\, 3^j$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$; $j = 0, 1, 2, 3, 4$. Comprobaré algún valor:

Para $y = 2$, no hay $x \in Z$ tal que $x^3 - 432 = 4$, es decir tal que $x^3 = 436$. Para $y = 36$, $x = 12$ verifica que $12^3 - 432 = (\pm 36)^2$, luego $(12,36)$ y $(12,-36)$ son puntos de la curva. Para los demás no hay soluciones enteras de $y^2 = x^3 - 432$, luego los puntos racionales de orden finito son: $(12,36)$, $(12,-36)$ y $\bar{O}$, que forman el grupo con tres elementos $Z/(3)$. De hecho éstos son todos, pues el teorema de Fermat es cierto para $n = 3$ [2].

3.- $\underline{Y^2 = X^3 - 7X + 10}$. (Ex. IV.4.18, pág. 340 de [3])

Utilizando el teorema de Naguell-Lutz se ve que no tiene puntos de orden finito. Sin embargo, los puntos con coordenadas enteras $(1,2)$ y $(2,2)$ están en la curva (no todos los puntos con coordenadas enteras son de orden finito; lo que si se sabe es que hay un número finito de puntos con coordenadas enteras de acuerdo con un teorema de Siegel). A partir de estos dos y usando un ordenador como se sugiere en [3] he encontrado los siguientes 26 puntos con coordenadas enteras:

$(1,2)$, $(1,-2)$, $(2,2)$, $(2,-2)$, $(-3,2)$, $(-3,-2)$, $(3,4)$, $(3,-4)$

$(13,46)$, $(13,-46)$, $(5,10)$, $(5,-10)$, $(31,172)$, $(31,-172)$,

$(-1,-4)$, $(-1,4)$, $(9,-26)$, $(9,26)$, $(-2,-4)$, $(-2,4)$,

$(41,262)$, $(41,-262)$, $(302,-5248)$, $(302,5248)$,

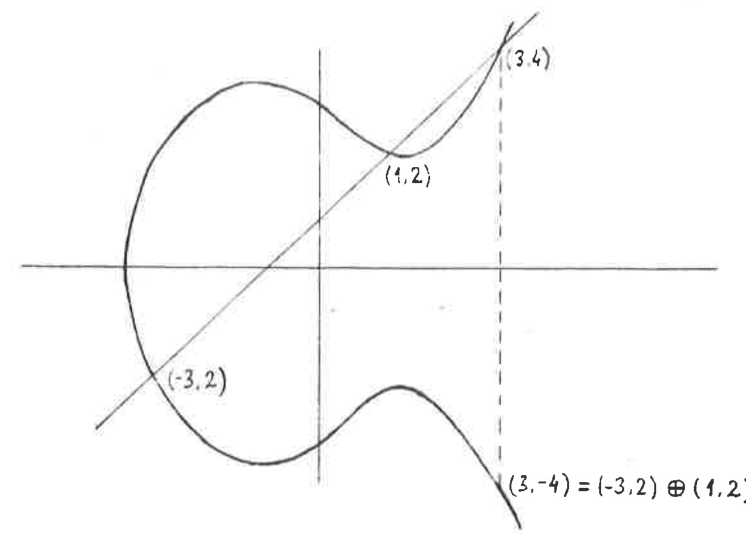
$(67,548)$, $(67,-548)$

Todas las demás combinaciones que he intentado dan puntos con coordenadas racionales, es decir, el ordenador da números decimales, por ejemplo,

$$(-3,2) \oplus (2,-2) = \left(\frac{41}{25}, \frac{214}{125}\right)$$

Obsérvese que esta curva tiene infinitos puntos racionales porque, por ejemplo, al no ser $(1,2)$ de orden finito, los puntos $(1,2) \oplus \ldots \oplus (1,2)$ son siempre distintos.

En [3] se pregunta, y yo no sé la respuesta, si todos los puntos racionales pueden obtenerse a partir de $(1,2)$ y $(2,2)$



Para curvas no singulares de grado mayor que 3, Faltings ha demostrado recientemente, que sólo hay un número finito de puntos racionales, resultando conjeturado por Mordell. En particular, las ecuaciones de Fermat $X^n + Y^n = 1$, sólo tiene un número finito de soluciones.

REFERENCIAS

[1] I. Alvaro.- "Puntos Racionales sobre Cúbicas Planas". (Tesina en la Universidad de Valladolid).

[2] Hardy and Wright.- "An Introduction to the Theory of Numbers". Oxford University Press.

[3] Hartshone.- "Algebraic Geometry". Springer.

[4] S. Lang.- "Serge Lang Fait des Maths en Public". Berlín.

[5] Tate.- "Rational Points on Elliptic Curves". (Curso dado en Haverford, Abril-Mayo 1961).

TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIN (VIA GEOMETRIA SINTETICA)

Por E. Roanes Lozano

Pappus de Alejandría, el último gran geómetra griego, escribió hacia el año 320 una obra de gran importancia titulada *Colección*. En el libro VII de la Colección de Pappus aparecen por vez primera los dos teoremas siguientes que, en opinión del prestigioso historiador de la Matemática Carl C. Boyer, pueden ser considerados como los teoremas de cálculo más generales de la antigüedad:

> *"El área de la superficie generada por la revolución de una curva, alrededor de una recta que no corta a la curva, es igual al producto de la longitud de la curva por la distancia recorrida por el centro de gravedad de la curva durante la revolución".*

> *"Si la región del plano rodeada por una curva cerrada gira alrededor de una recta del plano que no atraviesa a la curva, el volumen del cuerpo de revolución generado es igual al producto del área de dicha región por la distancia recorrida durante la revolución por el centro de gravedad de la región".*

Estos teoremas fueron redescubiertos por un francés del siglo XVII, Paul Guldin, por lo que usualmente son conocidos como *teoremas de Guldin*.

Su demostración habitual se basa en técnicas de integración múltiple, pero su aplicación es tan sencilla que permite utilizarlos en Geometría Elemental para obtener, mediante elegantes ejercicios de creatividad, resultados que, probados de otro modo, requerirían demostraciones mucho más laboriosas.

Ello me ha inducido a intentar obtener demostraciones elementales de estos dos teoremas, utilizando únicamente técnicas de Geometría Sintética. Naturalmente habremos de suponer que la curva generatriz admite centro de simetría, para poder prescindir de la integración (en la determinación del centro de gravedad).

0. CONSIDERACIONES PREVIAS

Trabajaremos en el espacio euclídeo de tres dimensiones en que se supone definida la distancia (y en consecuencia la longitud de segmentos) en la forma habitual.

Designaremos por Rev(F,e) a la figura de revolución generada por rotación de la figura plana F, alrededor del eje e, que definimos del modo usual: *el punto Y pertenece a Rev(F,e), syss. (si, y sólo si) existe un punto X, perteneciente a F (figura 0.1), tal que Y pertenezca al plano perpendicular al eje e por X y sea dist(Y,e) = dist(X,e).*

Expresaremos brevemente la condición de que la figura generatriz F admita el punto O por centro de simetría, diciendo que F es *O-simétrica*. Esto es, diremos que F es O-simétrica syss. se verifica: $s_0(F) = F$, siendo s_0 la simetría de centro O.

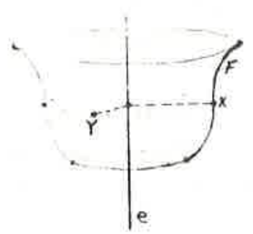


Figura 0.1

Representaremos por ar.R el área de la superficie R y por vol.K al volumen del cuerpo K.

1. PRIMER TEOREMA DE GULDIN PARA POLIGONALES SIMPLES

Comenzaremos probando el primer teorema de Guldin para el caso en que la figura generatriz sea una poligonal simple.

En lugar de enunciar a los alumnos las condiciones que determinan que una poligonal sea simple, es preferible mostrarles caminos poligonales simples, como los de las figuras 1.1 y 1.2, junto a otros no simples (que pasen sobre sí mismo), como los de las figuras 1.3, 1.4 y 1.5, para que ellos elaboren la definición de poligonal simple (abierta o cerrada).

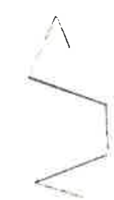


Figura 1.1

Figura 1.2

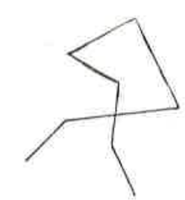


Figura 1.3

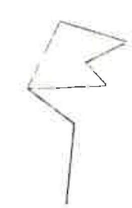


Figura 1.4

Figura 1.5

A la longitud de la poligonal simple P (suma de las longitudes de sus lados) la designaremos: long(P).

1.1. Teorema

Sea P una poligonal simple O-simétrica contenida en un semiplano de borde la recta e. Entonces se verifica:

$$\boxed{\mathrm{ar}\cdot\mathrm{Rev}(P,e) = \mathrm{long}(P)\cdot 2\pi\cdot\mathrm{dist}(O,e)}$$

Demostración.-

Por ser O-simétrica la poligonal P, sus lados pueden designarse en la forma $L_1,\ldots, L_n, L'_1,\ldots, L'_n$, donde

$$L'_i = s_0(L_i)\ ;\qquad i = 1,\ldots, n$$

Ello puede conseguirse tanto si la poligonal es cerrada (figura 1.6), como si es abierta, ya que si O fuera punto interior de un lado de P, bastaría descomponer dicho lado en dos lados consecutivos de extremo común O, como L_1 y L'_1 en la figura 1.7. (No es difícil razonar que el punto O pertenece a la poligonal simple O-simétrica P syss. P es abierta, pero el tratamiento de esta cuestión nos separaría del problema en estudio, por lo que se sugiere como un buen ejercicio).

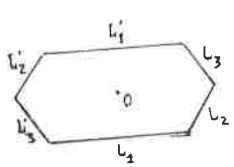


Figura 1.6

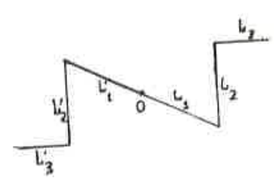


Figura 1.7

Consideremos pues, uno de estos pares de lados simétricos, L_i y L'_i. Si uno de los dos lados del par es el segmento $\overline{AB}$ y designa-

mos $s_0(A) = A'$ y $s_0(B) = B'$, entonces $\overline{A'B'}$ será el otro lado del par considerado, siendo obviamente

$$\mathrm{long}(\overline{A'B'}) = \mathrm{long}(\overline{AB}) \tag{1.1}$$

Si, de acuerdo con la figura 1.8, designamos:

$d = \mathrm{dist}(O,e)$

$d_A = \mathrm{dist}(A,e)$; $\quad d_B = \mathrm{dist}(B,e)$

$d_{A'} = \mathrm{dist}(A',e)$; $\quad d_{B'} = \mathrm{dist}(B',E)$

entonces, por la propiedad de la paralela media de un trapecio, resulta:

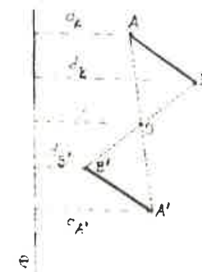


Figura 1.8

$$d_A + d_{A'} = 2d = d_B + d_{B'} \tag{1.2}$$

y por otra parte, es claro que siempre podemos suponer,

$$d_A \leq d_B \tag{1.3}$$

Empecemos por calcular la suma de las áreas de las superficies de revolución $\mathrm{Rev}(\overline{AB},e)$ y $\mathrm{Rev}(\overline{A'B'},e)$, considerando separadamente los tres casos posibles siguientes:

i) $\overline{AB} \parallel e$; $\qquad$ ii) $\overline{AB} \perp e$; $\qquad$ iii) $e \nparallel \overline{AB} \not\perp e$

i) Si $\overline{AB}$ es paralelo al eje (caso de la figura 1.9) entonces ambas superficies de revolución son cilíndricas, luego,

$$\mathrm{ar}\cdot\mathrm{Rev}(\overline{AB},e) + \mathrm{ar}\cdot\mathrm{Rev}(\overline{A'B'},e) =$$

$$= 2\pi\cdot d_A\cdot\mathrm{long}(\overline{AB}) + 2\pi\cdot d_{A'}\cdot\mathrm{long}(\overline{A'B'}) =$$

$$= 2\pi\cdot d\cdot\left[\mathrm{long}(\overline{AB}) + \mathrm{long}(\overline{A'B'})\right]$$

donde la última igualdad sigue de (1.1) y de (1.2).

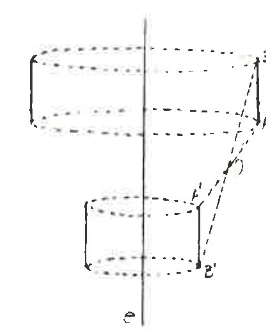


Figura 1.9

ii) Si $\overline{AB}$ es perpendicular al eje (caso de la figura 1.10), entonces ambas superficies de revolución son coronas circulares, luego

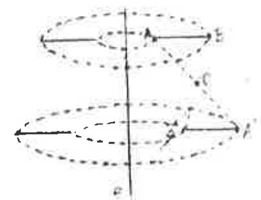


Figura 1.10

$$\text{ar}\cdot\text{Rev}(\overline{AB},e) + \text{ar}\cdot\text{Rev}(\overline{A'B'},e) =$$

$$= (\pi\, d_B^2 - \pi\, d_A^2) + (-\, d_{A'}^2 - \pi\, d_{B'}^2) =$$

$$= \pi\Big[(d_B+d_A)\,(d_B-d_A) + (d_{A'}+d_{B'})\,(d_{A'}-d_{B'})\Big] =$$

$$= \pi\Big[(d_B+d_A)\ \text{long}(AB) + (d_{A'}+d_{B'})\ \text{long}(A'B')\Big] =$$

$$= 2\,\pi\, d\Big[\text{long}(\overline{AB}) + \text{long}(\overline{A'B'})\Big]$$

donde la penúltima igualdad sigue de (1.3) y (1.1) y la última de (1.2).

iii) Si $\overline{AB}$ no es paralelo ni perpendicular al eje (caso de la figura 1.11), entonces ambas superficies de revolución son troconcónicas, luego

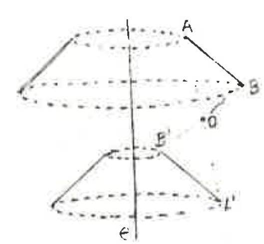


Figura 1.11

$$\text{ar}\cdot\text{Rev}(\overline{AB},e) + \text{ar}\cdot\text{Rev}(\overline{A'B'},e) =$$

$$= 2\,\pi\,\text{long}(\overline{AB})\ \frac{d_A + d_B}{2}\ +$$

$$+\ 2\,\pi\,\text{long}(\overline{A'B'})\ \frac{d_{A'} + d_{B'}}{2} =$$

$$= 2\pi d\Big[\text{long}(\overline{AB}) + \text{long}(\overline{A'B'})\Big]$$

donde la última igualdad sigue de (1.2).

En los tres casos considerados se ha llegado pues al mismo resultado:

$$\text{ar}\cdot\text{Rev}(L_i,e) + \text{ar}\cdot\text{Rev}(L_i',e) = 2\pi d\Big[\text{long}(L_i) + \text{long}(L_i')\Big]$$

Por tanto, puesto que Rev(P,e) puede descomponerse en las 2n superficies de revolución

$$\text{Rev}(L_i,e),\quad \text{Rev}(L_i',e);\quad i = 1,\dots,n$$

resulta:

$$\text{ar}\cdot\text{Rev}(P,e) = \sum_{i=1}^{n}\Big[\text{ar}\cdot\text{Rev}(L_i,e + \text{ar}\cdot\text{Rev}(L_i',e)\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 2\,\pi\, d\Big[\text{long}(L_i) + \text{long}(L_i')\Big] = 2\,\pi\, d\Big[\sum_{i=1}^{n}\text{long}(L_i) + \sum_{i=1}^{n}\text{long}(L_i')\Big] =$$

$$= 2\,\pi\, d\cdot\text{long}(P)$$

2. PRIMER TEOREMA DE GULDIN PARA CURVAS SIMPLES

Se trata ahora de extender a curvas el resultado que acaba de ser demostrado para poligonales, para lo cual es preciso comenzar definiendo apropiadamente los conceptos de curva y su rectificación. La elaboración de ambos conceptos va a desarrollarse, como se indicará a continuación, a partir de los conceptos de poligonal orientada y de aplicación contractiva.

La orientación de una poligonal simple, esto es, la determinación de un orden total en el conjunto de todos sus puntos, es una cuestión elemental que puede dejarse al cuidado de los alumnos, pero haciendo notar que, si la poligonal orientada es abierta, entonces posee primer y último punto (A_0 y A_6 en la figura 2.1), y si es cerrada, posee primer punto (A_0 en la figura 2.2), pero no último.

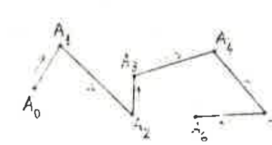


Figura 2.1

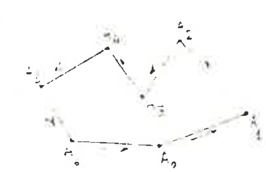


Figura 2.2

2.1. Definición

Siendo X e Y dos puntos de una poligonal simple orientada Q (X anterior a Y), llamaremos *distancia* de X a Y *sobre* Q, a la longitud de la subpoligonal orientada (abierta) de Q, de primer punto X y último Y (figura 2.3), que designaremos $dist_Q(X,Y)$.

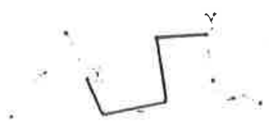


Figura 2.3

2.2. Definición

Si $f:Q \to C$ es una aplicación de una poligonal simple orientada Q sobre una figura C, tal que para cualesquiera puntos $X,Y \in Q$ (X anterior a Y) se verifique

$$dist(f(X),\ f(Y)) \leq dist_Q(X,Y)$$

(donde la distancia a la izquierda del signo $\leq$ es la euclídea), entonces diremos que f es Q-*contractiva*.

2.3. Definición

Si Q es una poligonal simple orientada y $f:Q \to C$ es una aplicación biyectiva y Q-contractiva, entonces diremos que la figura C con la orientación inducida por f es una *curva simple*. Si la poligonal simple Q es abierta (respectivamente cerrada), entonces diremos que la curva simple C es abierta (respectivamente cerrada), como se visualiza en la figura 2.4 (respectivamente figura 2.5).

Figura 2.4

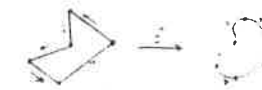


Figura 2.5

Consecuencias.- Las poligonales simples orientadas, abiertas o cerradas, son curvas simples (basta considerar la aplicación idéntica, que obviamente es contractiva). Los arcos orientados de circunferencia también son curvas simples (basta considerar la aplicación f sugerida en la figura 2.6 y tener en cuenta que, para arcos menores que un cuadrante, el arco es menor que su tangente).

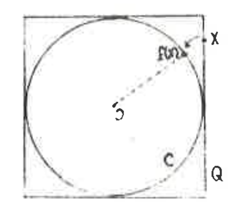


Figura 2.6

Nota.- Es fácil observar que nuestra definición de curva simple es caso particular de la definición clásica de curva de Jordan, teniendo, por tanto, todas las propiedades de éstas, pero el tratamiento de estas cuestiones no es elemental ni breve, por lo que podemos conformarnos con justificar a los alumnos la imposibilidad de que una curva simple pase sobre sí misma (figura 2.7), o acabe sobre ella misma (figura 2.8).

Figura 2.7

Figura 2.8

2.4. Definición

La poligonal simple orientada P se dice *inscrita* en la curva simple C (figura 2.9), si se verifican:

a) Cada vértice de P pertenece a C.

b) Los órdenes inducidos sobre el conjunto de vértices de P, por las orientaciones de P y C, coinciden.

Figura 2.9

Nota.- La condición b) de la definición anterior no es supérflua, como se comprende con solo observar la figura 2.10.

Figura 2.10

2.5. Definición

Llamaremos *longitud de la curva* simple O-simétrica C, y la representaremos por long(C), al supremo de las longitudes de las poligonales simples O-simétricas orientadas inscritas en C. Es decir,

$$\text{long}(C) = \sup \{\text{long}(P) : P \in \mathcal{P}(C,O)\} \quad (*)$$

donde $\mathcal{P}(C,O)$ es el conjunto de las poligonales simples O-simétricas orientadas inscritas en C.

Nota.- Observemos que el conjunto $\mathcal{P}(C,O)$ es no vacío, ya que, por ejemplo, el segmento orientado cuyo origen y extre-

mo son dos puntos O-simétricos de C (en el orden apropiado) pertenece a $\mathcal{P}(C,O)$. Además, de acuerdo con la definición 2.3, para cada $P \in \mathcal{P}(C,O)$, habrá de ser $\text{long}(P) \leq \text{long}(O)$. Estas observaciones permiten asegurar la existencia de supremo en el conjunto (*) y, en consecuencia, la consistencia de la definición anterior.

2.6. Definición

Sea C una curva simple O-simétrica, abierta o cerrada, contenida en un semiplano de borde de la recta e. Llamaremos *área de la superficie de revolución* Rev(C,e) al supremo de las áreas de las superficies de revolución Rev(P,e), cuando P recorre $\mathcal{P}(C,O)$, es decir (figura 2.11):

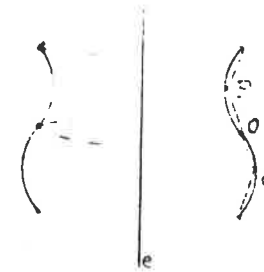


Figura 2.11

$$\text{ar}\cdot\text{Rev}(C,e) = \sup \{\text{ar}\cdot\text{Rev}(P,e) : P \in \mathcal{P}(C,O)\}$$

Nota.- Si C está contenida en el semiplano S de borde e y $\overline{AB}$ es un lado de la poligonal P, perteneciente a $\mathcal{P}(C,O)$, entonces $A,B \in S$, luego $\overline{AB} \subseteq S$, por ser S figura convexa. Reiterando el razonamiento para cada lado de P, resultará: $P \subset S$.

2.7. Teorema

Sea C una curva simple O-simétrica contenida en un semiplano de borde la recta e. Entonces se verifica:

$$\boxed{\text{ar}\cdot\text{Rev}(C,e) = \text{long}(C) \cdot 2\pi \cdot \text{dist}(O,e)}$$

Demostración.-

$$ar\cdot Rev(C,e) \underset{2,6}{=\!=} \sup\{ar\cdot Rev(P,e):\ P\in P(C,O)\} \underset{1,1}{=\!=}$$

$$=\!= \sup\{2\pi d\ long(P):\ P\in P(C,O)\} =$$

$$= 2\pi d\ \sup\{long(P):\ P\in P(C,O)\} \underset{2,5}{=\!=} 2\pi d\ long(C)$$

2.8. Corolario

Si C y C' son dos curvas simples O-simétricas de longitudes iguales, contenidas en un semiplano de borde de la recta e, entonces,

$$ar\cdot Rev(C,e) = ar\cdot rev(C',e)$$

3. SEGUNDO TEOREMA DE GULDIN PARA POLIGONOS SIMPLES

Vamos ahora a estudiar el segundo teorema de Guldin en el caso en que la figura generatriz sea un polígono simple (esto es, un polígono fuertemente conexo de orden de conexión uno, o, en otras palabras, un polígono cuyo borde sea una única poligonal simple cerrada). Para abreviar a los alumnos el concepto de polígono simple, basta indicar que se trata de polígonos como el de la figura 3.1, y no como los de las figuras 3.2, 3.3 ó 3.4.

Figura 3.1

Figura 3.2

Figura 3.3

Figura 3.4

3.1. Teorema

Sea P un polígono simple O-simétrico contenido en un semiplano de borde la recta e. Entonces se verifica:

$$\boxed{vol\cdot Rev(P,e) = 2\pi\, dist(O,e)\cdot ar\cdot P}$$

Demostración.-

Por ser P un polígono O-simétrico, admitirá una triangulación (descomposición en triángulos): $T_1,\dots,T_n,\ T'_1,\dots,T'_n$, para la cual se verifiquen:

a) $T'_i = s_O(T_i):\quad i=1,\dots,n$

b) O no es un punto interior de ninguno de los triángulos $T_i;\ i=1,\dots,n$

Para tal triangulación, se tendrá:

$$ar\cdot P = \sum_{i=1}^{n} (ar\cdot T_i + ar\cdot T'_i) \qquad (3.1)$$

Esta descomposición de P induce una descomposición del cuerpo de revolución Rev(P,e) en los 2n cuerpos de revolución:

$$Rev(T_i,e),\quad Rev(T'_i,e);\quad i=1,\dots,n$$

que permite escribir

$$vol\cdot Rev(P,e) = \sum_{i=1}^{n}\left[vol\cdot Rev(T_i,e) + vol\cdot Rev(T'_i,e)\right] \qquad (3.2)$$

Designemos abreviadamente

$$v_i = vol\cdot Rev(T_i,e),\quad v'_i = vol\cdot Rev(T'_i,e);\quad i=1,\dots,n$$

y comencemos calculando $v_i+v'_i$, para cada i $\{1,\dots,n\}$, considerando sucesivos casos de creciente generalidad, según sea T_i.

Caso 1ª.- T_i *es un triángulo rectángulo con un cateto paralelo al eje e.* Entonces, de acuerdo con la notación indicada en la figura 3.1, el tronco de cono de altura h y radios básicos a+b y a, puede descomponerse en el cilindro de radio a y altura h y el cuerpo de revolución $\mathrm{Rev}(T_i,e)$, resultando:

$$v_i = \frac{\pi h}{3}\left[(a+b)^2 + a^2 + (a+b)\,a\right] - \pi h a^2 = \pi\, hb\left(a+\frac{b}{3}\right)$$

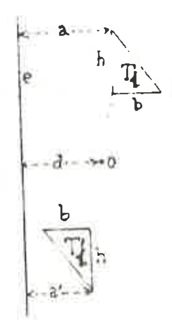


Figura 3.1

y análogamente, el cilindro de radio a' y altura h puede descomponerse en el tronco de cono de altura h y radios básicos a' y a'-b, y el cuerpo de revolución $\mathrm{Rev}(T_i',e)$, resultando,

$$v_i' = \pi h a'^2 - \frac{\pi h}{3}\left[a'^2 + (a'-b)^2 + a'(a'-b)\right] =$$

$$= \pi\, h b\left(a'-\frac{b}{3}\right)$$

luego,

$$v_i + v_i' = \pi\, h b (a + a')$$

pero como, por simetría respecto de O, es a+a' = 2d, queda,

$$v_i + v_i' = 2\pi\, d h b = 2\pi d(\mathrm{ar}\cdot T_i + \mathrm{ar}\cdot T_i') \qquad (3.3)$$

donde la última igualdad sigue de ser $\mathrm{ar}\cdot T_i = bh/2 = \mathrm{ar}\cdot T_i'$.

Caso 2ª.- *T es un triángulo, uno de cuyos lados es paralelo al eje e.* Si, como en la figura 3.2, la altura perpendicular a dicho lado descompone a T en dos triángulos, T_1 y T_2 (del tipo considerado en el Caso 1ª), se tiene

$$\mathrm{ar}\cdot T = \mathrm{ar}\cdot T_1 + \mathrm{ar}\cdot T_2$$

y para sus respectivos simétricos

$$\mathrm{ar}\cdot T' = \mathrm{ar}\cdot T_1' + \mathrm{ar}\cdot T_2'$$

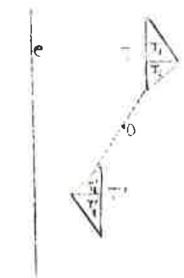


Figura 3.2

luego, haciendo uso de (3.3), resulta

$$\mathrm{vol}\cdot\mathrm{Rev}(T,e) + \mathrm{vol}\cdot\mathrm{Rev}(T',e) =$$

$$= (v_1+v_2) + (v_1'+v_2') = (v_1+v_1') + (v_2+v_2') =$$

$$= 2\pi d(\mathrm{ar}\cdot T_1 + \mathrm{ar}\cdot T_1') + 2\pi d(\mathrm{ar}\cdot T_2 + \mathrm{ar}\cdot T_2') =$$

$$= 2\pi d(\mathrm{ar}\cdot T + \mathrm{ar}\cdot T')$$

Si, por el contrario, el pie de la altura de T, perpendicular al lado paralelo al eje, no pertenece a dicho lado, entonces, como sugiere la figura 3.3, pueden considerarse dos triángulos auxiliares, T_1 y T_2 (del tipo considerado en el caso 1ª), tales que T_1 puede descomponerse en T y T_2, luego

$$\mathrm{ar}\cdot T = \mathrm{ar}\cdot T_1 - \mathrm{ar}\cdot T_2$$

y para sus respectivos simétricos

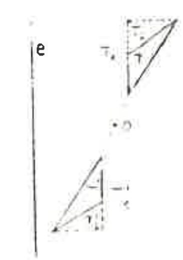


Figura 3.3

$$\mathrm{ar}\cdot T' = \mathrm{ar}\cdot T_1' = \mathrm{ar}\cdot T_2'$$

luego, haciendo uso de (3.3), resulta

$$\mathrm{vol}\cdot\mathrm{Rev}(T,e) + \mathrm{vol}\cdot\mathrm{Rev}(T',e) =$$

$$= (v_1-v_2) + (v_1'-v_2') = (v_1+v_1') - (v_2+v_2') =$$

$$= 2\pi d(\mathrm{ar}\cdot T_1 + \mathrm{ar}\cdot T_1') - 2\pi d(\mathrm{ar}\cdot T_2 + \mathrm{ar}\cdot T_2') =$$

$$= 2\pi d(\mathrm{ar}\cdot T + \mathrm{ar}\cdot T')$$

Caso 3ª.- *T es un triángulo arbitrario.* Entonces, trazando por los vértices de T rectas paralelas al eje e, se obtienen tres rectas paralelas, una de las cuales, r, estará entre las otras dos. Esta recta r descompone a T en dos triángulos del tip considerado en el Caso 2ª) (figura 3.4), pudiendo ahora razonar con ellos como en la primera parte de dicho Caso 2ª).

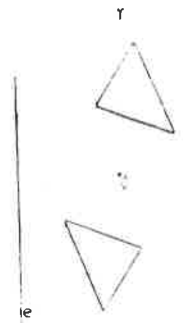


Figura 3.4

Se ha llegado pues, en los tres casos, al mismo resultado:

$$v_i + v_i' = 2\pi d(ar\cdot T_i + ar\cdot T_i')$$

para cada triángulo, T_i, de la descomposición de P, lo que, llevado a (3.2), implica:

$$vol\cdot Rev(P,e) = \sum_{i=1}^{n} (v_i+v_i') = \sum_{i=1}^{n} 2\pi d(ar\cdot T_i + ar\cdot T_i') =$$

$$= 2\pi d \sum_{i=1}^{n} (ar\cdot T_i + ar\cdot T_i') = 2\pi d\cdot ar.P$$

donde la última igualdad sigue de (3.1).

4. SEGUNDO TEOREMA DE GULDIN PARA REGIONES SIMPLES

Finalmente, el resultado que se acaba de probar para polígonos simples, trataremos de extenderlo a regiones simples, esto es, a figuras planas acotadas cuyo borde sea una única curva simple cerrada (figura 4.1). En consecuencia, los polígonos simples y los círculos serán considerados como regiones simples.

Figura 4.1

4.1.- Definición

Llamaremos *área* de la región simple O-simétrica F, al supremo de las áreas de los polígonos simples O-simétricos contenidos en F, es decir,

$$ar\cdot F = \sup\{ar\cdot P : P \in P_0 \wedge P \subseteq F\}$$

donde P_0 es el conjunto de los polígonos simples O-simétricos.

Nota.- La demostración de que el conjunto de polígonos simples O-simétricos contenidos en F es no vacío y acotado superiormente es sencilla y puede dejarse al cuidado de los alumnos. Se asegura así la consistencia de la definición anterior.

4.2.- Definición

Sea F una región simple O-simétrica, contenida en un semiplano de borde la recta e. Llamaremos *volumen* del cuerpo de revolución Rev(F,e), al supremo de los volúmenes de los cuerpos de revolución Rev(P,e), cuando P recorre el conjunto de polígonos simples O-simétricos contenidos en F, es decir (figura 4.2):

$$vol\cdot Rev(F,e) = \sup\{vol\cdot Rev(P,e) :$$

$$: P \in P_0 \wedge P \subseteq F\}$$

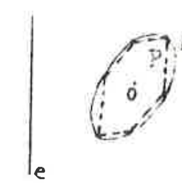


Figura 4.2

4.3.- Teorema

Sea F una región simple O-simétrica, contenida en un semiplano de borde la recta e. Entonces se verifica:

$$\boxed{vol\cdot Rev(F,e) = 2\pi\, dist(O,e)\cdot ar\cdot F}$$

Demostración.-

$$\mathrm{vol}\cdot\mathrm{Rev}(F,e) \underset{4,2}{=} \sup\{\mathrm{vol}\cdot\mathrm{Rev}(P,e):\ P \in P_0 \wedge P \subseteq F\} =$$

$$\underset{3,1}{=} \sup\{2\pi\,\mathrm{dist}(O,e)\cdot\mathrm{ar}\cdot P:\ P \in P_0 \wedge P \subset F\} =$$

$$= 2\pi\cdot\mathrm{dist}(O,e)\ \sup\{\mathrm{ar}\cdot P:\ P \in P_0 \wedge P \subset F\} =$$

$$\underset{4,1}{=} 2\pi\cdot\mathrm{dist}(O,e)\cdot\mathrm{ar}\cdot F$$

4.4. Corolario

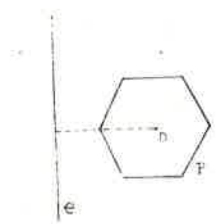
Si F y F' son dos regiones simples O-simétricas del mismo área, contenidas en un semiplano de borde la recta e, entonces

$$\mathrm{vol}\cdot\mathrm{Rev}(F,e) = \mathrm{vol}\cdot\mathrm{Rev}(F',e)$$

5. APLICACIONES

A título de ejemplo, se describen algunas aplicaciones de los teoremas anteriores.

a) Si P es la poligonal borde de un polígono regular de centro O, contenido en un semiplano de borde la recta e (figura 5.1), entonces



$$\mathrm{ar}\cdot\mathrm{Rev}(P,e) = \mathrm{long}(P)\ 2\pi\,\mathrm{dist}(O,e)$$

Figura 5.1

b) Si C es la figura unión de una semicircunferencia, uno de cuyos extremos es O, con su simétrica respecto de O, con su simétrica respecto de O, y C' una circunferencia de centro O

y radio el de aquellas semicircunferencias (figura 5.2), entonces las superficies de revolución Rev(C,e) y Rev(C',e) tienen áreas iguales.

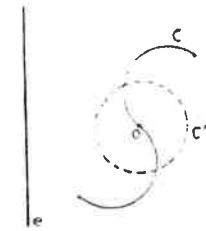


Figura 5.2

c) Si C es una circunferencia de centro O y radio r, contenida en un semiplano de obrde la recta e, tal que dist(O,e)= = d $\geq$ r(figura 5.3), entonces la superficie tórica Rev(C,e) tiene por área $4\pi^2 dr$ y el toro circular, cuyo borde es aquella superficie tórica, tendrá por volumen $2\pi^2 dr^2$.

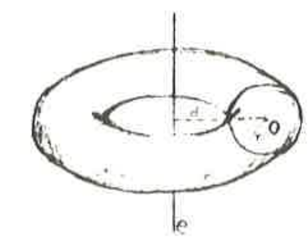


Figura 5.3

d) Si F es la región simple de borde de una elipse de centro O y semiejes a y b, contenida en un semiplano de borde la recta e, el volumen de Rev(F,e) es igual al del toro generado al girar alrededor de e un círculo de centro O y radio $\sqrt{ab}$, coplanario con F. (De acuerdo con la figura 5.4, se supone dist(O,e) $\geq \sqrt{ab}$).

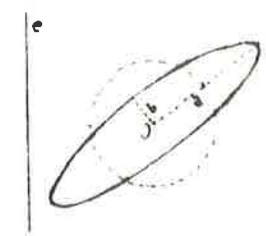


Figura 5.4

Estos resultados sugieren a su vez diversos ejercicios de aplicación utilitaria a objetos tales como neumáticos, rosquillas, etc., que el profesor puede proponer.

BIBLIOGRAFIA

- ABELLANAS.- "Elementos de Geometria". (No publicado).

- DONEDDU.- "Análisis y Geometría Diferencial".- Ed. Aguilar, 1979.

- PUIG ADAM.- "Cálculo Integral.

- RIOS.- "Análisis Matemático".- Ed. ICE, 1985.

- ROANES MACIAS.- "Introducción a la Geometría".- Ed. Anaya, 1980.

UN EJEMPLO DE ACTIVIDAD PARA AYUDAR A LOS ALUMNOS A HACER MATEMATICAS

Por Luis Villacorta Mas
Instituto de Bachillerato de Parla

Haciendo un ejercicio de imaginación, podríamos situarnos en el lugar de uno de nuestros alumnos, y observar, tal vez, que en nuestras clases se presentan las matemáticas como un producto terminado, al que nada se puede aportar y del que poco se puede decir. El alumno, en muchos casos, ni siquiera siente la necesidad de dicho producto, y observa que los pasos de su elaboración se suelen andar velozmente, dando por supuestas muchas cosas que no son evidentes para él, para llegar rápidamente a los resultados.

Pensando en dar al alumno una oportunidad de hacer matemáticas, de disfrutar con la aventura de la búsqueda de la verdad desconocida para él, es por lo que pienso que deben ocuparse algunas horas, a lo largo del curso, en actividades ricas en situaciones matemáticas.

Presento, a continuación, el desarrollo de una actividad rica en situaciones geométricas:

> Dado un triángulo cualquiera T en el plano, elegir un punto O de dicho plano tal que si T' es el triángulo simétrico de T respecto del punto O entonces $T \cap T'$ tenga la mayor área posible.

Seguramente, para que nuestros alumnos puedan empezar a manipular, tendremos que recordarles la noción de simetría respecto de un punto. Hecho esto, nuestros alumnos tienen delante de sí una gran actividad. A su alcance están aproximaciones a la solución del enigma. Algunos pueden llegar a la solución del problema pero sin poder justificar su resultado, ya que la justificación de éste es superior a su alcance. Nuestra aportación será orientar, sin robarles la inspiración, y al final, cuando sientan la necesidad de la justificación, justificarles sus conjeturas.

Después del tiempo adecuado a sus manipulaciones podemos recoger sus conclusiones. Se puede sugerir, para simplificar las manipulaciones, recortar un triángulo igual a T y colocarlo en las posibles posiciones del T'. Esta manipulaciones son ricas en observaciones: los lados del triángulo T' son paralelos a los del T; en cada posición, el punto O es el centro de simetría de $T \cap T'$.

Para orientar sus conclusiones podemos plantearles las preguntas:

a) ¿Dónde hay que elegir el punto O para obtener algo de área?

b) ¿Dónde hay que elegir el punto O para obtener un paralelogramo?

c) ¿Dónde hay que elegir el punto O para obtener un hexágono?

d) ¿Dónde hay que elegir el punto O para obtener la mayor área posible?

Las conclusiones a las que tienen que llegar en estas preguntas son:

a) Elegir el punto O en el interior del triángulo T.

b) y c) Mediante manipulaciones, podemos haber encontra-

do posiciones en que $T \cap T'$ es un paralelogramo y posiciones en que es un hexágono. ¿Cómo delimitar las posibles posiciones de O que nos den parelelogramos y las que nos den hexágonos?

Es bueno sugerir la necesidad de seguir una estrategia. A los alumnos se les puede sugerir varios planes a seguir, uno de ellos puede ser: variar el punto O a lo largo de un segmento de extremos un vértice del triángulo T y un punto variable X del lado opuesto (figura 1. Siguiendo este plan, los casos límites para obtener paralelogramo son: situar el punto O en el vértice A y situar el punto O en el punto medio del segmento AX.

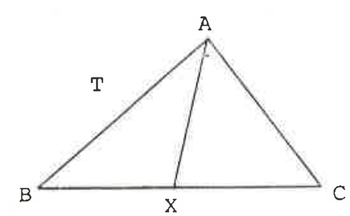


Figura 1

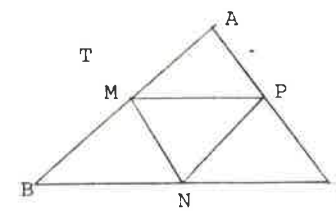


Figura 2

Variando el extremo X a lo largo del lado BC se llega a la conclusión de que punto O debe estar situado en el triángulo T por encima del segmento MP que une los puntos medios de los lados AB y BC. Haciendo lo mismo desde los otros vértices del triángulo, se llega a la conclusión de que el punto O debe estar en el triángulo T por fuera del triángulo MNP, siendo M, N y P los puntos medios de los lados del triángulo (figura 2).

Para que $T \cap T'$ sea un hexágono se tiene que elegir el punto O dentro del triángulo MNP.

d) La contestación a esta pregunta, objeto de deseo de esta actividad, es difícil a nuestros alumnos. Pueden llegar empíricamente a la conjetura de obtener mayor área cuando elegimos el punto O en el baricentro del triángulo T.

Llamemos S al área del triángulo ABC, y T_A, T_B y T_C las áreas de los triángulos que junto con el área del hexágono buscado E nos den S (figura 3)

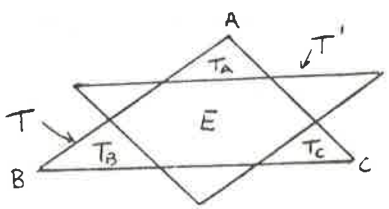


Figura 3

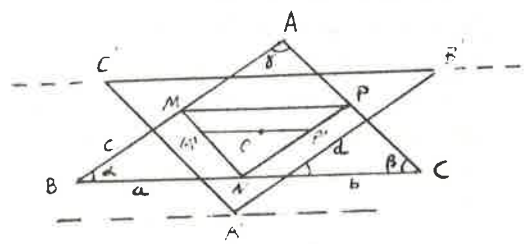


Figura 4

Se verifica:

$$E = S - (T_A+T_B+T_C) = (S-T_A) - (T_B+T_C) \qquad (1)$$

Si el punto O varía a lo largo de un segmento cualquiera M'P', interior al triángulo MNP, paralelo a MP entonces T_A no varía. Observando la figura 4 se verifica,

$$T_B = ac \text{ sen } \alpha \text{ ; } \quad T_C = bd \text{ sen } \alpha$$

luego (1) queda,

$$E = (S-T_A) - \text{sen } \alpha(ac+bd) \qquad (2)$$

Además en los triángulos T_B y T_C se verifica:

$$\frac{c}{\text{sen } \beta} = \frac{a}{\text{sen } \gamma} \text{ ; } \quad \frac{d}{\text{sen } \beta} = \frac{b}{\text{sen } \gamma}$$

y de aquí,

$$c = \frac{a \text{ sen } \beta}{\text{sen } \gamma} \text{ ; } \quad d = \frac{b \text{ sen } \beta}{\text{sen } \gamma}$$

Llevando estos resultados a (2) queda:

$$E = (S - T_A) - \frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta}{\text{sen } \beta} (a^2 + b^2) \qquad (3)$$

Recordando que, al variar el punto O a lo largo del segmento M'P', el área T_A no varía, se verifica que

$$a + b = h \text{ ; } \quad h = \text{constante}$$

y llamando a la constante

$$\frac{\text{sen } \alpha \text{ sen } \beta}{\text{sen } \gamma} = k$$

la igualdad (3) queda:

$$E = (S - T_A) - k\left[a^2 + (h-a)^2\right]$$

El máximo de esta función se obtiene cuando $a = \frac{h}{2}$ y, por tanto, $a = b$.

El punto O tiene que estar situado en el punto medio del segmento M'P'. Siguiendo el mismo razonamiento para segmentos paralelos a los lados MN y NP del triángulo MNP, llegamos a la conclusión que, para obtener el mayor área posible en $T \cap T'$, el punto O tiene que estar situado en el baricentro del triángulo T.

La búsqueda de actividades ricas en situaciones matemáticas es una labor pedagógica interesante. Se pueden encontrar algunas interesantes en:

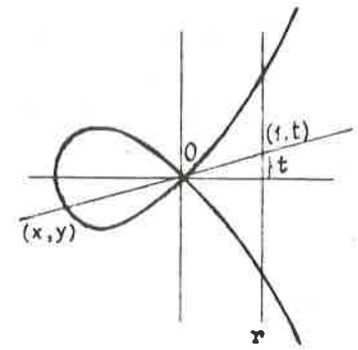
- Engel Arthur.- "Geometrical Activities for the upper elementary school". Educational Studies in Mathematics 3 (1971).

- Kalomitsines, Spyros P.- "Two Methods for Solving Problems". Educational Studies in Mathematics 14 (1983).

- Libeskind, Shlomo.- "A Problem Solving Approach to Teaching Mathematics". Educ. Stud. Math. 8 (1977).

- Polya, George.- "Como Plantear y Resolver Problemas". Ed. Trillas, Mexico.

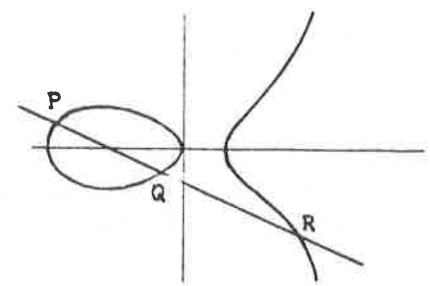
Para una cúbica singular el comportamiento es parecido, tomando como O el punto singular. Por ejemplo, en $Y^2 = X^2 + X^3$ tomamos $O = (0,0)$ y la recta $r, x = 1$:



$$\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

$$(1,t) \simeq t \longrightarrow (t^2-1,\ t(t^2-1)) = (x,y)$$

Para las cúbicas no singulares esto no funciona, pues ahora no hay punto singular y cualquier recta corta a la curva exactamente en tres puntos (Teorema de Bezout), es decir, necesitamos dos puntos para determinar un tercero



Los puntos P y Q determinan R.

Si P = Q se toma la tangente.

Entonces el principal resultado, que se demuestra, es que existen un número finito de puntos racionales $P_1, \ldots, P_r$, tales que cualquier otro punto racional P_1 se obtiene a partir de ellos en esta forma. Este resultado es conocido como Teorema de Mordell que más tarde enunciaré rigurosamente.

Lo que permite atacar, de una manera formal, este teorema es la estructura de grupo que tienen los puntos racionales de la cúbica.

dad de luz; cuando se trabajo con luz natural es una variable externa no controlable, y cuando se trabaja con luz artificial (flashes, lámparas), puede ser modificada.

Nota.- Por estar al margen del artículo, solo se considera el aspecto cuantitativo y no los aspectos cualitativo (temperatura de color) y direccional (tipos de luz), de la luz, aún siendo bastante importantes en el medio fotográfico.

1.1. DIAFRAGMAS DE UN OBJETIVO

Los diafragmas de un objetivo son aberturas de forma de polígono regular, que se utilizan para controlar la cantidad de luz que pasa por el objetivo hacia la película.

La escala de medidas de sus diámetros, son términos de una progresión geométrica de razón $1/\sqrt{2}$.

$$\ldots, 1/2\sqrt{2}, 1/4, 1/4\sqrt{2}, 1/8, 1/8\sqrt{2}, 1/16, \ldots$$

Pero como escala de medidas de los diafragmas de un objetivo se utilizan sus inversos, llamados números F, y son los puntos (stops), que hay en el anillo de diafragma de las cámaras, a saber, una progresión geométrica de razón $\sqrt{2}$:

$$\ldots, 2.8, 4, 5.6, 8, 11, 16, \ldots$$

El conjunto de valores que puede tomar el diafragma de un objetivo es un segmento continuo, por ejemplo, [2.8 F, 22 F], salvo en los objetivos catadióptricos, en los que toma un valor constante, por ejemplo 8 F.

Como el área de un polígono regular de n lados en función del radio es $S(R) = N * R^2 * \mathrm{Sen}(2*\pi/N)/2$, tenemos que $S(R/\sqrt{2}) = S(R)/2$. Por ello la escala de diafragmas se ha esta-

blecido de tal forma que, en cada término, el área de su abertura es la mitad de su anterior.

Es sabido que la cantidad de luz que llega a una película a través de un objetivo de diámetro dado, es inversamente proporcional al cuadrado de su distancia focal.

Los diafragmas de un objetivo se construyen tomando como unidad de medida de sus diámetros, la focal de dicho objetivo; es decir,

$$\text{Focal} = \text{Número F} * \text{Diámetro}$$

Con ello, se logra que la cantidad de luz que llega a una película a través de un objetivo de número F dado, sea independiente de su focal.

1.2. TIEMPOS DE EXPOSICION

El tiempo de exposición (medido en segundos), es el tiempo de apertura del diafragma.

Su escala de medidas son términos de una progresión geométrica de razón 1/2 (aproximadamente)

$$\ldots, 1/15, 1/30, 1/60, 1/125, 1/250, 1/500, \ldots$$

Pero como escala de medidas, se utilizan sus inversos llamadas velocidades de obturación (medidas en seg^{-1}). Estas son los puntos (stops), que hay en el dial de disparo de las cámaras, a saber, una progresión geométrica de razón 2 (aproximadamente)

$$\ldots, 15, 30, 60, 125, 250, 500, \ldots$$

El conjunto de valores que pueden tomar las velocidades de obturación es discreto, salvo si la cámara tiene el punto B (tiempo de exposición indeterminado).

Luego la escala de velocidades de obturación se ha establecido de tal forma que, cada término abre el diafragma la mitad de tiempo que su anterior.

1.3. SENSIBILIDAD DE UNA PELICULA

La sensibilidad de una película, depende del tamaño de los cristalitos de plata que contiene, y es una medida de su poder receptor de la luz.

Hay dos escalas de medidas: la americana ASA (O ISO), y la alemana DIN.

La escala de sensibilidades ASA de las películas son términos de una progresión geométrica de razón 2

$$\ldots, 50, \underline{100}, 200, 400, \ldots$$

La escala de sensibilidades DIN de las películas son términos de una progresión aritmética de diferencia 3

$$\ldots, 15, 18, \underline{21}, 24, 27, 30, \ldots$$

La equivalencia entre ambas viene dada por la función,

$$\text{S-DIN} = 21 + 3 * \text{LOG}_2(\text{S-ASA}/100)$$

o su inversa,

$$\text{S-ASA} = 100 * 2^{(\text{S-DIN} - 21)/3}$$

Por ejemplo, 100 ASA = 21 DIN.

La fabricación de películas se hace de tal forma que, cada término necesita la mitad de luz que su anterior.

En el dial de sensibilidad de una película en una cámara, están ambas escalas ASA y DIN ampliadas con dos pasos intermedios, ya que se comercializan películas de sensibilidades intermedias.

Si se desean saber sus valores, basta interpolar 2 medios proporcionales en la escala ASA, o bien 2 medios diferenciales en la escala DIN (que es trivial). Por ejemplo,

$$\underline{50}, 64, 80, \underline{100} \text{ ASA}$$

o,

$$\underline{18}, 19, 20, \underline{21} \text{ DIN}$$

El conjunto de valores que puede tomar la sensibilidad es discreto, por ejemplo,

50, 64, 80, 100, 125, 160, 200, 250, 320 y 400 ASA

La siguiente ley relaciona las cuatro variables básicas citadas.

1.4. LEY DE RECIPROCIDAD

La cantidad de luz que se registra en una película, es directamente proporcional al área de abertura del diafragma, al tiempo de exposición, y a la sensibilidad ASA de dicha película

$$\text{VOBT} * (\text{NUMERO F})^2 * \text{LUZ} = K * \text{ASA}$$

Nota.- Para tiempos largos (>0,1 seg), no es del todo exacta y hay que hacer correcciones adicionales.

Fijando los respectivos orígenes de las distancias de las 3 escalas en (8 F, 125 V, 100 ASA), veamos dos ejemplos:

1.- Con una película fija, son equivalentes los siguientes valores de exposición (5.6 F, 250 V) = (8 F, 125 V) = (11 F, 60 V); ya que la suma de los respectivos puntos es constante: $1-1=0+0=-1+1$.

2.- Con películas de distintas sensibilidades son equivalentes los siguientes valores de explosición (8 F, 60 V, 100 ASA) = (5.6 F, 250 V, 200 ASA) = (11 F, 125 V, 400 ASA); ya que la suma de los respectivos puntos es constante: $0+1+0 = 1 = 1+1 = -1+0+2$.

La elección de uno de los posibles valores de exposición la efectúa el fotógrafo en función de los valores de otras variables como profundidad de campo (que a su vez es función de la focal del objetivo y distancia cámara-tema), estado del tema, (estático, dinámico), grano de la película, y luz, siendo ésta la más importante.

2. UNA VISION DE LA FOTOGRAFIA CON OPTICA MATEMATICA. ANEXO

2.1. FILTROS

Los filtros, se colocan delante de los objetivos y solo permiten pasar a su través una proporción de la cantidad de luz disponible,absorbiendo el resto.

El inverso de dicha proporción se llama factor de filtro; es una medida de su densidad. Por ejemplo:

Un filtro de factor 8 X, deja pasar 1/8 de la luz y será necesario compensar la exposición aumentando $\log_2 8 = 3$ puntos.

Si el valor de exposición de una película fija es, sin filtro, (8 F, 250 V), con un filtro de factor 8 X, será: (2.8 F, 250 V) o (4 F, 125 V) o (5.6 F, 60 V), etc.

En general, el factor de un filtro es constante, por ejemplo, 4 X. En particular, el factor de un filtro polarizador es variable, por ejemplo, [3 X, 4 X].

2.2. FLASHES

La luz que proporcionan los flashes manuales es constante, pero la luz que recibe el tema es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia flash-tema; como a su vez la luz que incide en la película sabemos que es inversamente proporcional al cuadrado del número F, tendremos que, para una película determinada (sensibilidad constante)

$$(\text{DISTANCIA})^2 * (\text{NUMERO F})^2 = \text{K/LUZ}$$

luego, Número F * Distancia, es constante; tal constante se llama número guía del flash y mide su potencia, en una sensibilidad de película fija,que suele ser 100 ASA.

Luego la abertura a seleccionar es, con película de 100 ASA,

$$\text{NUMERO F} = \text{NUMERO GUIA/DISTANCIA}$$

En general,

$$\text{NUMERO F} = (\text{NUMERO GUIA} * \sqrt{\text{ASA}})/(10 * \text{DISTANCIA})$$

3. UNA VISION DE LA FOTOGRAFIA CON OPTICA MATEMATICA. CONCLUSIONES

Si deseamos mejorar la calidad de nuestras imágenes, tendremos que aprender a controlar las variables y a elegir las más adecuadas dentro de nuestras posibilidades.

Los fotógrafos que no saben logaritmos ni progresiones, efectúan sus cálculos exclusivamente con puntos.

Por último, me sentiría satisfecho si este artículo logra hacer pensar al lector aficionado antes de disparar su cámara.

UN PROGRAMA DE MATEMATICAS PREUNIVERSITARIAS: EL BACHILLERATO INTERNACIONAL

Por Mª Luisa Pacios Jiménez

Los programas vigentes del Bachillerato Internacional se pueden considerar por el momento como experimentales debido a que deben responder por un lado a las más variadas aptitudes y necesidades futuras en matemáticas de sus alumnos y por otro lado al actual estadio de rápido desarrollo de la enseñanza de las matemáticas con muy distintos puntos de vista sobre los papeles que en la asignatura deben jugar la lógica y la intuición.

Por ello los programas se consideran mejorables y susceptibles de reformas basadas en la experiencia, aunque la comprensión de las matemáticas sea evidentemente la primera prioridad, dejando a los profesores escoger la opción pedagógica predominante en sus respectivos países.

En el Bachillerato Internacional los contenidos de los programas se distribuyen a lo largo del bachillerato según el criterio de cada Centro. La evaluación para la obtención del título se realiza al final del bachillerato, consiste en dos exámenes escritos provistos por el Bachillerato Internacional y controlados por sus examinadores.

Los objetivos del programa de matemáticas ponen sobre el profesor las siguientes responsabilidades:

a) Desarrollar la comprensión de las matemáticas como asignatura por parte del alumno.

b) Desarrollar en el alumno una actitud hacia las matemáticas favorable al posterior aprendizaje y uso de las mismas.

c) Desarrollar su habilidad para aprender matemáticas por sí solo.

d) Animar a los alumnos que no tienen confianza en sus propios conocimientos ni experiencia en el tema.

En cuanto al examinador es responsable de valorar en el alumno:

i) Su conocimiento de conceptos matemáticos y terminología esencial.

ii) Su habilidad para formular demostraciones de algunos de los teoremas sobre esos conceptos.

iii) Su habilidad para representar situaciones en términos matemáticos, examinar sus implicaciones y posibilidades y llegar a conclusiones definitivas mediante la aplicación de las matemáticas como instrumento.

iv) Su habilidad para expresar sus argumentos con claridad tanto desde el punto de vista matemático como desde el punto de vista verbal.

Una vez establecidos los objetivos tanto desde el punto de vista del profesor como del examinador (o, lo que es lo mismo, desde el punto de vista de logros a conseguir por el alumno) veamos cómo se estructuran las matemáticas en el curriculum del Bachillerato Internacional.

La asignatura de matemáticas es obligatoria en el bachillerato internacional. Se imparte en dos niveles: superior y secundario, y existe además, la opción de matemáticas avanzadas, para los alumnos que vayan a especializarse en matemáticas en la Universidad. Las posibilidades de elección en matemáticas son pues las siguientes:

<u>Matemáticas de Nivel Superior</u>: Para alumnos con buena capacidad para las matemáticas y especialmente para los que van a necesitar esta asignatura en sus estudios superiores, como, por ejemplo, los que van a estudiar matemáticas, física, ingeniería o tecnología en la Universidad. También podrían necesitarlo los que vayan a estudiar química, económicas y organización industrial.

<u>Matemáticas de Nivel Secundario</u>: Su objetivo es proporcionar unos conocimientos acerca del pensamiento matemático y una razonable competencia matemática para aquellos que no van a seguir el nivel superior. Normalmente debería ser suficiente base matemática para los que en la Universidad van a estudiar ciencias (biología, geología, química), económicas, etc.

<u>Matemáticas y Computación de Nivel Secundario</u>: Para alumnos con buena habilidad en matemáticas. Pretende dar a estos alumnos los conocimientos matemáticos suficientes para poder seguir estudios universitarios en ciencias o económicas. Al final del curso los alumnos deben ser capaces de realizar programaciones en algún lenguaje de alto nivel, así como de utilizar el hardware al que tengan acceso y desarrollar procesos lógicos en la resolución de problemas y suficiente práctica de programación.

<u>Estudios Matemáticos</u>: Esta asignatura es de nivel secundario. Se destina a aquellos alumnos cuyos intereses no están, (ni es probable que estén en el futuro) en ningún campo en el que sean necesarias técnicas ni habilidades matemáticas. Se pretenden demostrar ciertas características, fundamentales de las matemáticas, por ejemplo: la traducción de un problema en forma matemática, resolución de problemas, necesidad de rigor. Aunque se requieran ciertas habilidades matemáticas para poder presentar problemas en álgebra, análisis y geometría, los exámenes no dependerán mucho de esas técnicas.

Las "Matemáticas de Nivel Secundario" y los "Estudios Matemáticos" tienen contenidos de nivel intelectual similar, aunque de diferente nivel matemático.

Matemáticas Avanzadas: Esta asignatura se ofrece únicamente a los alumnos que hayan concluido las Matemáticas de Nivel Superior y está destinada a los alumnos que desean especializarse en matemáticas en la universidad.

A continuación se presentan los programas de Matemáticas de Nivel Superior; este programa consta de una parte obligatoria (sección 1) y una serie de temas optativos no obligatorios (sección 2) para elegir al menos uno. El centro podrá además elegir algún otro tema optativo que deberá ser autorizado por el Bachillerato Internacional.

Matemáticas de Nivel Superior: Sección 1

1. Conjuntos Numéricos y Algebra

- Estructura y aplicaciones de grupos (que pueden ser conmutativos); subgrupos.
- Conjuntos numéricos: N, Z, Q, R y las operaciones de adición, multiplicación, sustracción y división.
- (Pueden discutirse las ideas de anillo y cuerpo, pero no serán objeto de examen).
- Decimales; aproximación; cifras significativas. Números expresados en la forma $ax10^p$. Errores de redondeo y sus efectos en $a\pm b$, ab y a/b.
- Demostración por inducción. Aplicaciones usuales (incluyendo relaciones de recurrencia).
- Sucesiones y series sencillas.
- Factores de expresiones polinómicas: utilización del teorema del resto.

- Método de las fracciones parciales, incluyendo factores cuadráticos irreducibles y factores lineales repetidos.
- (El grado del denominador no puede ser mayor que tres).
- La función cuadrática y la ecuación de segundo grado. Completar el cuadrado.
- El círculo $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$.
- Números complejos: sus sumas, productos, cocientes y conjugados: partes real e imaginaria, módulo y argumento: su uso para resolver ecuaciones cuadráticas y cúbicas de la forma $z^3 = a+ib$; el diagrama de Argand.
- Sistema de ecuaciones e inecuaciones lineales en dos variables.
- (La posibilidad de soluciones no únicas o no existentes podrá ser objeto de examen).
- Demostración y uso del teorema del binomio para un exponente entero positivo.
- Uso de series binomiales con exponente racional.

2. Vectores, Matrices y Geometría

- El vector como clase de equivalencia, adición y multiplicación por un escalar. Vectores de posición; ejemplos geométricos sencillos.
- El módulo de un vector, vectores unitarios, los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$. Las componentes de un vector en dos y tres dimensiones.
- Dependencia e independencia lineal. (Incluye las condiciones que debe cumplir un conjunto de vectores para formar una base).
- Producto escalar de dos vectores, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ con ejemplos geométricos.

. Ecuaciones de rectas en dos dimensiones en forma paramétrica, normal y cartesiana, ecuaciones de planos en tres dimensiones y ecuaciones paramétricas y cartesianas de una recta en tres dimensiones. Aplicaciones sencillas de estas ecuaciones incluyendo la recta como intersección de dos planos.

. Transformaciones lineales de vectores en dos dimensiones y su representación matricial. Transformaciones compuestas. Matrices como operadores y como disposiciones de elementos con reglas de operaciones.

. Algebra elemental de matrices 2×2 y 3×3.

. (Incluye adición, multiplicación y multiplicación por un escalar, matrices nulas y unitarias pre y post multiplicación). Matrices transpuestas e inversas.

. Determinantes de matrices 2×2 y 3×3.

. Matrices transpuesta e inversa. Matrices singulares y ejemplos geométricos.

. Aplicaciones de matrices y determinantes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

3. Trigonometría

. Funciones trigonométricas (seno, coseno y tangente) y sus gráficas. Las funciones cosec, sec y cot. Las funciones trigonométricas inversas (arco seno, arco coseno, y arco tangente).

. Las fórmulas sen $(\theta_1 \pm \theta_2)$ = sen $\theta_1 \cdot$cos θ_2 ± sen $\theta_2 \cdot$ cosθ_1, cos$(\theta_1 \mp \theta_2)$ = cos $\theta_1 \cdot$cos θ_2 ± sen $\theta_1 \cdot$sen θ_2 ; sen^2 θ + cos^2 θ = 1, y otras igualdades sencillas deducibles de ésta.

. Funciones periódicas, expresadas como A sen (Bx+C), A cos (Bx+C), solución de ecuaciones tales como:

sen θ = ± sen α
2 sen$^2\theta$ = 1 + cos θ y
a cos θ + b sen θ = c

escribiendo a cos θ + b sen θ = R sen$(\theta \pm \alpha)$, o bien R cos $(\theta \pm \beta)$

. Fórmulas de resolución de triángulos; aplicaciones a dos y tres dimensiones.

. Las aproximaciones sen $\theta \simeq$ tan $\theta \simeq \theta$ y cos $\theta \simeq 1 - 1/2\ \theta^2$ para θ pequeño.

4. Cálculo

. Diferenciación de sumas, productos, cocientes de funciones y funciones compuestas (regla de la cadena). Derivadas segundas.

. Diferenciación implícita y paramétrica y razón de cambio relacionada con éstas.

. Ecuaciones de tangentes y normales. Valores estacionarios incluyendo tests de máximos y mínimos, puntos de inflexión. Trazado de curvas (con las más importantes características de la curva).

. Valores máximos y mínimos de una función en un intervalo.

. Uso de la fórmula $\Delta y \simeq f'(x)\ \Delta x$.

. Las funciones exponencial y logarítmica, sus gráficos y derivadas.

. La integración como la inversa de la diferenciación.

$\int dx/x^2+a^2$ = 1/a arc tan (x/a)+c
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}$ dx = ln |f(x)| + c
$\int dx/\sqrt{a^2-x^2}$ = arc sen (x/a)+c, |x| < a

. Integración por partes y por sustitución.

. Uso de la integral para el cálculo de áreas limitadas y volúmenes de revolusión (sólo $\pi\int y^2\,dx$ y $\pi\int x^2\,dy$).

. Problemas sencillos que lleven a ecuaciones diferenciales de primer orden. Soluciones en el caso de variables separables.

5. Probabilidad

. Concepto de variable aleatoria discreta y su distribución de probabilidad.

. Asignación teórica de probabilidades a sucesos individuales.

. Sucesos independientes y mutuamente exclusivos. Las reglas de adición y multiplicación de la probabilidad.

. Arboles de probabilidad.

. Distribución binomial: su media y su varianza.

. La función de densidad de probabilidad y la función de distribución de una variable aleatoria continua.

. La media, varianza y desviación típicas de variables aleatorias discretas y continuas.

. La distribución normal: su media y varianza (sin demostraciones).

Matemáticas de Nivel Superior: Sección 1

Los candidatos deberán escoger al menos un tema de esta sección, que puede ser uno de los siguientes u otro seleccionado por su centro y aceptado por los examinadores:

1. Análisis y Cálculo Numérico

. Idea de algoritmo.

. Diagramas de flujo, incluyendo saltos condicionales.

. Límites de sucesiones (sin demostraciones de teoremas).

. Convergencia de series: los test de comparación, de razón e integral. Uso del teorema de que una serie monótona acotada es convergente.

. Resolución de ecuaciones mediante:

1) El proceso Newton-Raphson

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)/f'(x_n)$$

2) El proceso iterativo

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

. Integración numérica, la regla del trapecio, la regla de Simpson (sin análisis de errores).

. Derivadas de orden tres y superior a tres, incluyendo la fórmula de Leibniz para la derivada n-sima de un producto.

. Uso de las series de Taylor y McLaurin para desarrollar series de potencias.

2. Cálculo Avanzado y Geometría Analítica

. Soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo $y'+Py = Q$ donde P y Q son funciones de x.

. Solución de $y''+ay'+by = f(x)$; a,b constantes y f(x) de la forma:

1) px^2+qx+r

2) p sen wx+q cos wx (p,q,r,w,k,a y b son constantes que pueden ser cero)

3) pe^{kx}

. Ecuaciones diferenciales que pueden reducirse a alguna de las anteriores mediante una sustitución sencilla (que será dada).

. Trayectorias ortogonales.

. Derivadas parciales (sólo 2 variables) incluyendo el uso de la regla de la cadena. Aplicación a gradientes.

. Ecuaciones cartesianas y paramétricas de la parábola, elipse e hipérbola.

. Propiedades sencillas: focos, directrices, excentricidad y asíntotas.

. Ecuaciones de tangentes normales.

3. Dinámica del punto en dos dimensiones

. Soluciones de ecuaciones diferenciales de los tipos:
1) $\ddot{x} + a\dot{x} + b = c$
2) $\ddot{x} = f(t)$
3) $\ddot{x} = g(x)$

. Velocidad, rapidez y aceleración de una partícula que se mueve en un plano (sólo coordenadas cartesianas). Velocidad relativa.

. Fuerzas: resultante de un sistema de fuerzas concurrentes en dos dimensiones.

. Leyes de Newton del movimiento. Principio de conservación de la energía.

. Dinámica de una partícula que se mueve en un plano por acción de una fuerza que puede ser función de la distancia o del tiempo.

. Movimiento de una partícula en un medio que ofrece una resistencia proporcional a la rapidez de la partícula.

. Movimiento lineal de una partícula sujeta a una cuerda elástica ligera.

. Movimimiento de una partícula en línea recta o en un círculo en un plano horizontal o vertical.

. Impulso y momento. Impacto de partículas que se mueven en la misma línea. Ley de la restitución de Newton.

4. Probabilidad y Estadística

. Probabilidad condicional; uso de $p(A|B) = p(A \cap B)/ /p(B)$.

. Distribución normal como aproximación de la distribución binomial. Uso de la distribución de Poisson. Su media y varianza.

. La distribución de Poisson como aproximación a la distribución binomial. Muestras; distribución de las medias de muestras.

. Error típico. Estimación de la media y varianza de la población a partir de una muestra.

. Tests de significancia. Límites de confianza.

. Uso de los tests t y χ^2.

. Diagramas de dispersión. Rectas de regresión por el método de mínimos cuadrados.

. Correlación.

Comparando los programas del Bachillerato Internacional, que hemos mencionado, con los del primer curso de Escuelas Técnicas Superiores españolas, se observa un solapamiento considerable en temas de Algebra y en Cálculo Infinitesimal. Sin embargo, por las características de los exámenes que subrayan la utilización de técnicas e instrumentos matemáticos, el desarrollo del contenido evita la excesiva formalización de la mayoría de los temas comunes a los dos niveles. En este sentido, las anotaciones para el profesor que acompañan a los programas son bastante explícitas. Así por ejemplo, se indica que la idea de espacio vectorial no es tema de examen, se autoriza el uso de ciertas fórmulas sin demostración y se especifican los teoremas que deberán ser demostrados.

Así pues, aunque la metodología empleada se deja a la elección del profesor, las características de los exámenes y la amplitud de los programas, lleva necesariamente a dar más importancia a la utilización de los conocimientos matemáticos que a la presentación y construcción de estructuras formales, que en general, no son objeto de examen.

En este sentido, utilizando una metodología apropiada que tenga en cuenta no sólo la existencia de estos solapamientos en los programas sino también las características psicológicas de los alumnos, estos contenidos -igual que la mayoría de los del actual bachillerato- podrían constituir una aceptable preparación para los estudios de ingeniería, matemáticas y física.

Algunas de las reiteraciones que se observan, especialmente en los temas de cálculo no pueden evitarse porque son requisitos para los temas de Física del bachillerato. Por esto, tanto para suprimir temas del programa como para distribuirlo por cursos, sería necesario hacerlo en colaboración con los profesores de Física.

El principal defecto de estos programas es la escasez de temas de geometría, especialmente de geometría euclídea, que tradicionalmente se utilizaban para mostrar un ejemplo de construcción lógica formal. Además de su interés histórico, la geometría euclídea proporcionaba la ocasión para estudiar un sistema axiomático con el suficiente rigor y con la ventaja que supone el apoyo de las figuras para la comprensión de la estructura abstracta.

Desde el punto de vista de la transición a la Universidad y concretamente a los estudios de ingeniería y arquitectura esta ausencia de temas de geometría constituye un grave defecto. Basta mencionar que la asignatura de Dibujo, de gran importancia en los planes de estudio de ingeniería contiene en su mayor parte temas de Geometría Descriptiva incluyendo el estudio de triedros, poliedros, curvas, superficies, intersección de superficies, sistemas de representación, etc., etc.

La falta de familiaridad de nuestros alumnos con la geometría con figuras es la causa de buena parte de los fallos que se observan en las pruebas de perfil que se vienen realizando en la Universidad Politécnica de Madrid (2). Esto se debe a la ausencia de Geometría en los actuales programas del bachillerato.

Tan importante como la selección de los contenidos es la metodología a emplear, que el Bachillerato Internacional deja a la elección del profesor, de acuerdo con las tendencias predominantes en cada país. En el caso de un programa de matemáticas destinado a futuros alumnos de ingeniería, física o matemáticas, ¿cuál sería la metodología más adecuada? El dilema está entre las tendencias actuales hacia una metodología activa, centrada en los intereses del alumno, el entorno del centro, basada esencialmente en la resolución de problemas y la posición de gran número de profesores de Universidad que preferiría una reducción de los contenidos a cambio de conseguir un mayor dominio de los mismos por parte del alumno (2). Esto no es exactamente una vuelta a la metodología tradicional, sino una convicción , fundada en los resultados, de que se debe conseguir un dominio completo de las técnicas elementales, una idea clara de los métodos y una razonable familiaridad con el rigor, y esto no se ha conseguido con los programas y las metodologías "modernas". Este punto de vista es más firme aún entre los responsables de las empresas que emplean a ingenieros y técnicos. Así (1) una empresa internacional se niega a becar a estudiantes de ingeniería que hayan segudio los programas SMP de Matemáticas o Nuffield en física, ambos muy representativos de las modernas tendencias en metodología y contenidos.

De lo anterior se desprende que la coordinación entre los niveles secundario y superior no se limita únicamente a los contenidos sino que abarca la propia metodología, por lo que es cada vez más importante un mayor contacto entre los profesores de matemáticas de ambos niveles, entre sí y con sus colegas de Física.

BIBLIOGRAFIA

(1) I. Morgan.- "Microelectronics in Education: A perspective". Secondary Education Journal, June 1981.

(2) Universidad Politécnica de Madrid. Instituto de Ciencias de la Educación.- "Perfil de Conocimientos en Areas Fundamentales de Alumnos de nuestra Universidad". División de Orientación, 1980-81.

P R O B L E M A S

PROBLEMAS PROPUESTOS

Invitamos a nuestros lectores a que nos envíen soluciones a los problemas que fueron propuestos en la 26ª Olimpiada Matemática Internacional celebrada el pasado mes de Julio en Finlandia:

PROBLEMA 1ª

Un cuadrilátero convexo ABCD tiene todos sus vértices sobre una circunferencia. Otra circunferencia tiene su centro sobre el lado AB y es tangente a los otros tres lados del cuadrilátero. Probar que se verifica:

$$\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}$$

PROBLEMA 2ª

Dados los números naturales n y k, primos entre sí, tales que $0 < k < n$. Cada número del conjunto $M = \{1,2,\ldots, (n-1)\}$ está coloreado de blanco o azul.

El conjunto M cumple las condiciones siguientes:

a) Para cada $i \in M$, los números i y $(n-i)$ tienen el mismo color.

b) Para cada $i \in M$, $i \neq k$. Los números i y $|k-i|$ tienen el mismo color.

Demostrar que todos los números de M han de tener el mismo color.

PROBLEMA 3ª

Dado un polinomio cualquiera $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$ con coeficientes enteros, se denota por $w(P)$ el número de coeficientes a_j del polinomio P, que son impares.

Para $i = 0,1,2,\ldots$, sea $Q_i(x) = (1+x)^i$.

Demostrar que si $i_1, i_2, \ldots, i_n$ son enteros tales que $0 < i_1 < < i_2 < \ldots < i_n$, entonces,

$$w(Q_{i_1} + Q_{i_2} + \ldots + Q_{i_n}) \geq w(Q_{i_1})$$

PROBLEMA 4ª

Dado un conjunto M formado por 1985 números enteros positivos y distintos, tal que ningún elemento de M tiene un divisor primo mayor que 26, demostrar que M contiene al menos un subconjunto de cuatro elementos distintos, cuyo producto es la cuarta potencia de un número entero.

PROBLEMA 5ª

Una circunferencia de centro O pasa por los vértices A y C del triángulo ABC e intersecta los segmentos AB y BC nuevamente en puntos distintos K y N, respectivamente.

Las circunferencias circunscritas a los triángulos ABC y KBN se cortan exactamente en dos puntos distintos B y M.

Demostrar que el ángulo OMB es recto.

PROBLEMA 6ª

Para cada número real x_1, se construye la sucesión $x_1, x_2, \ldots$ en la cual $x_{n+1} = x_n(x_n + \frac{1}{n})$, para todo $n \geq 1$.

Demostrar que existe exactamente un valor de x_1 para el cual $0 < x_n < x_{n+1} < 1$, para todo n.

PROBLEMAS RESUELTOS

SOLUCIONES RECIBIDAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTRO BOLETIN Nº 5

PROBLEMA 2ª

Sea f(n) una función definida sobre el conjunto de los enteros positivos y que toma sus valores sobre ese conjunto. Demostrar que si $f(n+1) > f(f(n))$ para todo n, es $f(n) = n$.

- ⊠ - ⊠ - ⊠ -

Solución

Designaremos con Z^+ el conjunto de los números enteros positivos. f es una aplicación $f: Z^+ \to Z^+$.

Si $\exists k_1$: $f(k_1) = 1$, en consecuencia, $k_1 = 1$; en efecto, si $k_1 \neq 1$, por la condición del enunciado, $f(f(k_1-1)) < f(k_1) = = 1$, lo cual es absurdo, pues $f(Z^+) \subset Z^+$.

Si además $\exists k_2$: $f(k_2) = 2$, será $k_2 = 2$; en efecto, como $k_2 \neq 1$ (ya que $k_2 = 1 \Rightarrow f(k_2) = 1$), será $f(f(k_2-1)) < f(k_2) = 2$, con lo que $f(f(k_2-1)) = 1$, y por lo anterior, $f(k_2-1) = 1$, y también $k_2-1 = 1$, o sea $k_2 = 2$.

Si además $\exists k_3$: $f(k_3) = 3$, será $k_3 = 3$; en efecto, como $f(f(k_3-1) < f(k_3) = 3$, será $f(f(k_3-1)) = 1$, o bien $f(f(k_3-1)) = = 2$; en el primer caso será, $f(k_3-1) = 1$, y por tanto $k_3-1 = 1$, o sea, $k_3 = 2$, lo que es imposible pues $f(2) = 2$ y no puede ser $f(2) = 3$. En el segundo caso, será $f(k_3-1) = 2$ y por tanto $k_3-1 = = 2$, o sea, $k_3 = 3$, c.d.d.

En general, si $\exists k_1, k_2, \ldots, k_n$, tales que $f(k_1) = 1$, $f(k_2) = 2, \ldots, f(k_n) = n$, en consecuencia $k_1 = 1$, $k_2 = 2, \ldots, k_n = n$. Para probarlo por inducción, supongámoslo cierto para n-1, es decir, si $\exists k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$: $f(k_1) = 1$, $f(k_2) = 2, \ldots,$

$f(k_{n-1}) = n-1$, es por hipótesis de inducción, $f(k_i) = i$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Suponemos ahora que existe k_n tal que $f(k_n) = n$, y como $k_n \neq 1$, $f(f(k_n-1)) < f(k_n) = n$, lo que implica que $f(f(k_n-1)) \leqslant n-1$; si fuese $f(f(k_n-1)) = j < n-1$, sería, por la hipótesis de inducción, $f(k_n-1) = j$, y por tanto, $k_n-1 = j$, o sea, $k_n = j+1 < n$, con lo que $f(k_n)$ sería k_n y no n como se ha supuesto; por tanto, debe ser $f(f(k_n-1)) = n-1$, pero entonces, $f(k_n-1) = n-1$, y también $k_n-1 = n-1$, o sea, $k_n = n$, c.d.d.

Por otra parte, cualquiera que sea $n \in Z^+$, distinto de 1, podemos construir los números $p_1 = f(n-1)$, $p_2 = f(p_1-1)$, $p_3 = f(p_2-1), \ldots$, $p_i = f(p_{i-1}-1)$, hasta llegar a obtener un $p_i = 1$, a partir del cual ya no se puede continuar, pues $p_i-1 \notin Z^+$; este valor $p_i = 1$ se alcanza efectivamente, pues el proceso no puede ser indefinido, ya que

$$f(n) > f(p_1) > f(p_2) > f(p_3) > \ldots > f(p_i)$$

por la condición del enunciado; entonces, como $p_i = f(p_{i-1}-1) = 1$, será $p_{i-1}-1 = 1$, y por tanto, $p_{i-1} = 2$; como $p_{i-1} = f(p_{i-2}-1) = 2$ será, $p_{i-2}-1 = 2$, y por tanto, $p_{i-2} = 3$; así sucesivamente llegaremos a $p_{i-(i-1)} = i$, o sea, $p_1 = i$, es decir, $f(n-1) = i$, y en consecuencia, $n-1 = i$, así que para todo $n \in Z^+$, distinto de 1, $f(n-1) = n-1$, es decir, la función f es la identidad, c.d.d.

Amparo Ortega García
(Valencia).

PROBLEMA 4ª

Dos circunferencias del plano se cortan. Sea A uno de sus puntos de intersección. Dos puntos se mueven partiendo simultáneamente de A, con velocidades constantes, cada uno sobre una de las circunferencias, en el mismo sentido. Los dos puntos

regresan a la vez, después de una revolución. Probar que existe un punto P fijo del plano, tal que en todo momento las distancias a P a ambos puntos permanecen iguales entre sí.

- ▪ - ▪ - ▪ -

Solución

Supuesto que los puntos se mueven con velocidad angular constante, ocupan (en determinados intervalos) las posiciones, A'_1, $A'_2, \ldots$, A'_n, sobre la primera circunferencia, de centro O', y las A''_1, $A''_2, \ldots$, A''_n, sobre la segunda circunferencia, de centro O" (figura 1).

Se trata de probar que las mediatrices de los sucesivos segmentos, $A'_1A''_1$, $A'_2A''_2, \ldots$, $A'_nA''_n$, tienen un punto, P, común, que es la solución del problema. Para ello, debe demostrarse que tales segmentos cumplen que (figura 2):

Aserción 1ª.- Están alineados con el otro punto, B, de intersección de las circunferencias.

Aserción 2ª.- Sus puntos medios, M_1, $M_2, \ldots$, M_n, pertenecen a la circunferencia, c, que pasa por B (y por A), cuyo centro, O, es punto medio O'O".

Aserción 3ª.- Sus mediatrices pasan por el punto P de la circunferencia c, tal que P es simétrico de B respecto de O (y simétrico de A respecto de la bisectriz de O'O").

Efectivamente, cualquier secante, r, que pase por B, intercepta a las circunferencias en A'_n y A''_n, respectivamente. Así se tiene:

1ª (figura 3). Trazando la cuerda, s, común a las circunferencias, se observa que las rectas, r, s, determinan los ángulos $\alpha/2$ inscritos en ambas circunferencias, a los que corresponden sendos ángulos centrales, α, iguales ($AO'A'_n = AO''A''_n$), lo que prueba la aserción 1ª.

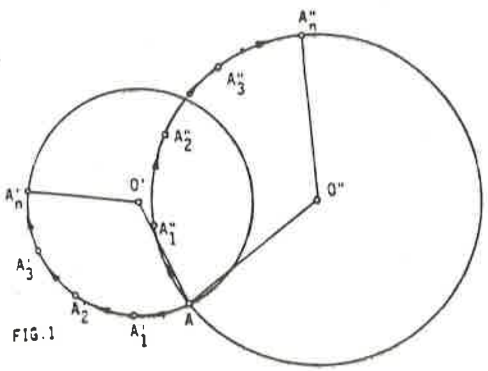


FIG.1

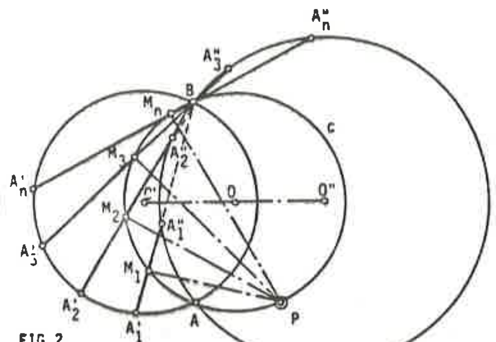


FIG.2

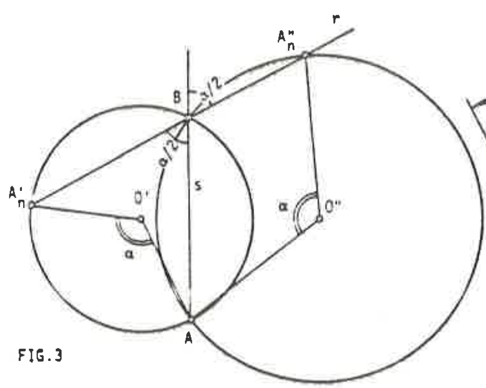


FIG.3

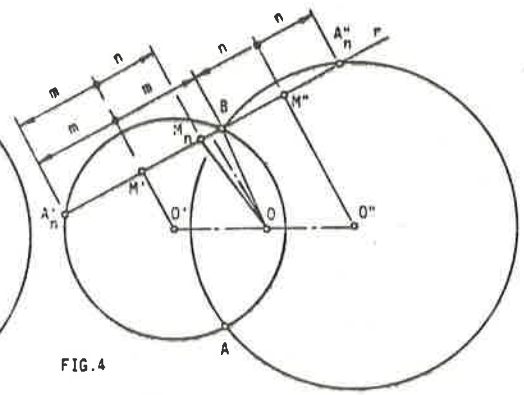


FIG.4

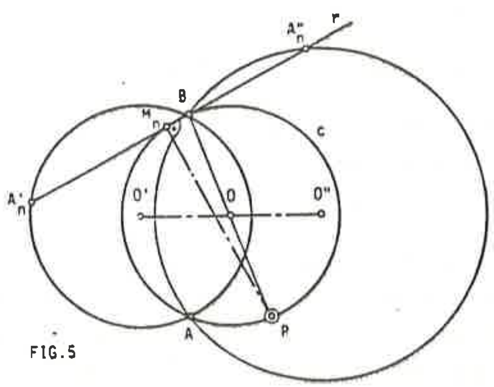


FIG.5

2ª (figura 4). La secante r, determina un segmento, $A'_nA''_n$, cuyo punto medio es M_n. Dicho segmento se descompone en las cuerdas, A'_nB, A''_nB, cuyos puntos medios, M', M", unidos con sus respectivos centros, conforman un trapecio rectángulo, O'M'M"O", cuya paralela media pasa por O. Sobre su lado M'M" se comprueba que $M'M_n$ = BM", pues, asignando los valores m = = M'B y n = BM", resulta $m + m + n + n = A'_nA''_n$, pero $1/2\ (m + m + + n + n) = A'_nM_n$, luego $M'M_n = n = BM''$, lo que demuestra que $OM_n =$ = OB, y también prueba la aserción 2ª.

3ª (figura 5). La circunferencia, c, es arco capaz de los ángulos rectos cuyos lados pasan por los extremos de su diámetro BP; por tanto, la mediatriz de cualquiera de los segmentos considerados pasa por P, lo que prueba la aserción 3ª y resuelve el problema.

Observación: Basta que las velocidades angulares sean iguales en cada instante, en lugar de constantes.

David Corbella Barrios.

Otra solución a este problema de:
Amparo Ortega García

PROBLEMA 5ª

Sea $1 \leq r \leq n$, y consideremos todos los subconjuntos de r elementos del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos también el mínimo número de cada uno de esos subconjuntos. Representemos con F(n,r) la media aritmética de esos números mínimos. Probar que:

$$F(n,r) = \frac{n+1}{r+1}$$

- ▪ - ▪ - ▪ -

Solución

El número de subconjuntos de r elementos es $\binom{n}{r}$. De ellos, tienen a 1 como mínimo elemento (o sea, poseen el 1) $\binom{n-1}{r-1}$ subconjuntos. Tienen el 2 como mínimo elemento (o sea, poseen el 2 pero no el 1), $\binom{n-2}{r-1}$ subconjuntos. Tienen el 3 como mínimo elemento (o sea, poseen el 3, pero no el 1 ni el 2), $\binom{n-2}{r-1}$ subconjuntos. Podemos proceder así hasta el mayor elemento que pue de ser mínimo, que es $n-(r-1) = n-r+1$, que aparecería en $\binom{n-(n-r+1)}{r-1} = \binom{r-1}{r-1}$ subconjuntos (uno sólo).

Teniendo en cuenta la definición de la media aritmética,

$$F(n,r) = \frac{\binom{n-1}{r-1}\cdot 1 + \binom{n-2}{r-1}\cdot 2 + \binom{n-3}{r-1}\cdot 3 + \dots + \binom{r-1}{r-1}\cdot(n-r+1)}{\binom{n}{r}} =$$

$$= \left\{\left[\binom{n-1}{r-1} + \binom{n-2}{r-1} + \dots + \binom{r-1}{r-1}\right] + \left[\binom{n-2}{r-1} + \binom{n-3}{r-1} + \dots + \binom{r-1}{r-1}\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\binom{n-3}{r-1} + \dots + \binom{r-1}{r-1}\right] + \dots + \binom{r-1}{r-1}\right\} \Big/ \binom{n}{r}$$

y aplicando la propiedad $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-2}{m-1} + \binom{n-3}{m-1} + \dots + \binom{m-1}{m-1}$, resulta

$$F(n,r) = \frac{\binom{n}{r} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-2}{r} + \dots + \binom{r}{n}}{\binom{n}{r}} = \frac{\binom{n+1}{r+1}}{\binom{n}{r}} = \frac{\dfrac{(n+1)!}{(r+1)!\ (n-r)!}}{\dfrac{n!}{r!\ (n-r)!}} =$$

$$= \frac{(n+1)!\ r!}{n!\ (r+1)!} = \frac{n+1}{r+1}$$

Vicente Mendiola
(Ciudad Real).

Otras soluciones a este problema de:

Merces Rico (I.B. "Fortuny")
Rodolfo Esteve Arolas (Valencia)

ESPERAMOS VUESTRAS SOLUCIONES A LOS NUMEROS 1ª, 3ª y 6ª PROPUESTOS EN EL BOLETIN Nº 5

SOLUCIONES RECIBIDAS DE PROBLEMAS PROPUESTOS EN NUESTRO BOLETIN Nº 6

PROBLEMA 1ª

La función $f(x,y)$ satisface, para todos los enteros no negativos x,y, a las condiciones:

1) $f(0,y) = y+1$
2) $f(x+1,0) = f(x,1)$
3) $f(x+1,y+1) = f(x,f(x+1,y))$.

Determinar $f(4,1981)$.

- ▪ - ▪ - ▪ -

Vamos a obtener expresiones para $f(x,y)$, $x = 1, 2, 3, 4$.

a) $x = 1$;

$$f(1,y) = f(0,f(1,y-1)) \quad [\text{por } 3)]$$
$$= f(1,y-1) + 1 \quad [\text{por } 1)]$$

Luego $f(1,y)$ es una progresión aritmética de diferencia 1, cuyo primer término $f(1,0) = f(0,1) = 2$ [por 2) y 1)]; por tanto:

$$f(1,y) = y+2$$

b) $x = 2$;

De forma análoga a la realizada en el apartado anterior obtenemos,

$$f(2,y) = f(1,\ f(2,y-1)) = f(2,y-1) + 2;$$
$$f(2,0) = f(1,1) = 3$$

luego $\qquad f(2,y) = 2y+3$

c) $x = 3$;

Utilizando el mismo proceso,

$$f(3,y) = f(2,\ f(3,y-1)) = 2\cdot f(3,y-1) + 3$$

$$f(3,0) = f(2,1) = 5$$

Pongamos,

$$a(y) = f(3,y)+3 = 2\cdot f(3,y-1)+3+3 = 2(f(3,y-1)+3) =$$

$$= 2\cdot a(y-1); \quad a(0) = 8$$

Luego $a(y)$ es una progresión geométrica de razón 2 y $a(0) = 8$, por tanto,

$$a(y) = 2^{y+3}$$

de donde

$$f(3,y) = 2^{y+3} - 3$$

d) $x = 4$;

$$f(4,y) = f(3,\ f(4,y-1)) = 2^{f(4,y-1)+3} - 3$$

$$f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3 = 13$$

Pongamos $a(y) = 3+f(4,y)$, entonces $a(y) = 2^{a(y-1)}$; $a(0) = 16 = 2^{2^2}$, con lo cual,

Por inducción,

$$a(y) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{a(0)}}}}}}} \text{ (y doses)} = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2^{2}}}}}}}} \text{ (y+3 doses)}$$

$$f(4,y) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2}}}}}}} \text{ (y+3 doses)} - 3$$

luego

$$f(4,1981) = 2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{2}}}}}}} \text{ (1984 doses)} - 3$$

Salvador Calvo-Fernández Pérez
(Ciudad Real).

PROBLEMA 2ª

Encontrar todos los números reales "a" para los cuales existan números reales no negativos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 que satisfagan las relaciones

$$\sum_{k=1}^{5} k\cdot x_k = a; \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3\cdot x_k = a^2; \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5\cdot x_k = a^3$$

\- ▪ - ▪ - ▪ -

Desarrollando obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = a \\ x_1 + 8x_2 + 27x_3 + 64x_4 + 125x_5 = a^2 \\ x_1 + 32x_2 + 243x_3 + 1024x_4 + 3125x_5 = a^3 \end{cases}$$

De estas relaciones obtenemos las siguientes:

1. Eliminando x_1 y x_2 entre las tres ecuaciones anteriores,

$$120x_3 + 720x_4 + 2520x_5 = a(a-1)(a-4)$$

2. Análogamente para x_2 y x_3:

$$24x_1 + 336x_4 + 1680x_5 = a(a-4)\ (a-9)$$

3. Si se eliminan x_3, x_4:

$$120x_1 + 120x_2 + 720x_5 = a(a-9)(a-16)$$

4. Si son x_4, x_5 las eliminadas:

$$360x_1 + 504x_2 + 336x_3 = a(a-16)(a-25)$$

5. Y por último, para x_5, x_1:

$$126x_2 + 384x_3 + 540x_4 = -a(a-1)(a-25)$$

Vamos a obtener conclusiones de estas cinco relaciones y de la hipótesis de que las x_k son no negativas.

a) Es claro de $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = a$, que "a" es no negativa.

b) Si $a = 0$, $x_k = 0$ $(k = 1, .., 5)$ verifica las hipótesis de problema.

c) Si a es positivo, de 5 obtenemos que $(a-1)(a-25)$ ha de ser menor o igual a cero pues las x_k son no negativas, luego,

$$1 \leq a \leq 25$$

1. implica que: $a \notin (1,4)$
2. implica que: $a \notin (4,9)$
3. implica que: $a \notin (9,16)$
4. implica que: $a \notin (16,25)$

Luego "a" sólo puede tomar los valores 1, 4, 9, 16, 25.

d) Efectivamente, estos valores verifican las hipótesis de problema, como se puede comprobar con los datos que se dan a continuación. Si llamamos x_{nk} a la x_k para $a = n^2$, se tiene:

$$a = n^2; \quad x_{nk} = \delta_{nk} \cdot n \quad (n = 0, \ldots, 5; \; k = 1, \ldots, 5);$$

$$\delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = k \\ 0 & \text{si } n \neq k \end{cases}$$

e) Por tanto, los posibles valores de "a" son:

$$0, \quad 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25$$

Salvador Calvo-Fernández Pérez
(Ciudad Real).