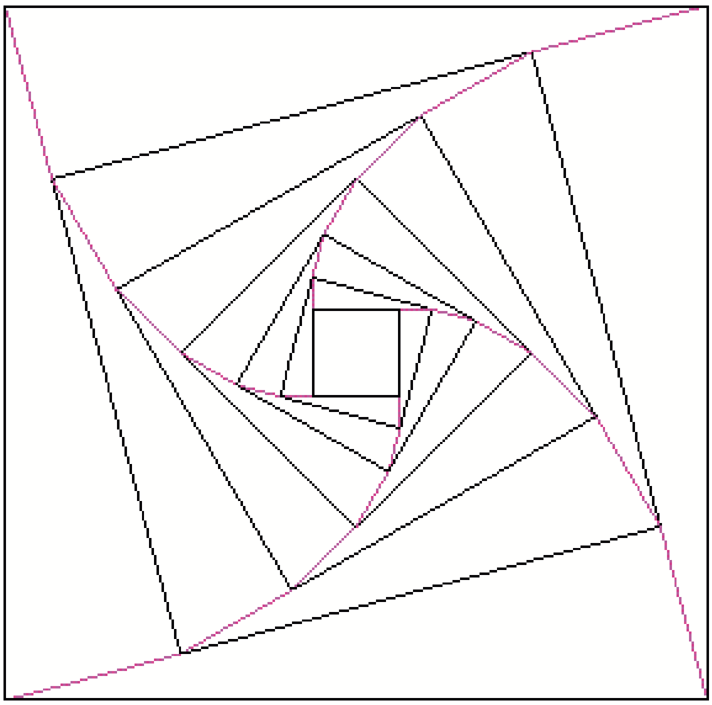
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 69
FEBRERO DE 2005

Número especial dedicado a la profesora María Paz Bujanda

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
JOSÉ MARÍA SORDO JUANEDA

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
MARTÍN GARBAYO MORENO

Adjunta a la presidencia (mantenimiento página web):
MARÍA JOSÉ MORENO SÁNCHEZ DE LA SERRANA

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2005

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2005 para el sábado *día 2 de abril del 2005*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

XXIII Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Letras

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *11 de junio del 2005* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 11 de Mayo del 2005, dirigiéndose por carta o por fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid
Fax: 91 394 4662

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2004-2005.

IV Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

El pasado 20 de noviembre, se celebró en la Facultad de Matemáticas de la UCM el IV Concurso Intercentros organizado por nuestra Sociedad en colaboración con dicha Facultad.

Cincuenta y un centros, 25 concertados o privados y 26 IES, se dieron cita en la reunión más numerosa de estudiantes en un concurso que se celebra en nuestra Comunidad, si exceptuamos el Concurso de Primavera. Como otros años, la primera media hora consistió en dar la bienvenida y saludar a los más de 300 participantes que, junto a sus profesores acompañantes, llenaron el Salón de Actos de dicha Facultad.

Como probablemente algunos lectores aún no tengan una idea clara de qué va el concurso, muy rápidamente comentamos que se trata de un concurso por equipos, 6 estudiantes de cada centro, en el que además de problemas para que sean resueltos entre todos los componentes de un equipo, hay una prueba individual, desglosada en tres niveles y una prueba por relevos en la que cada integrante de cada equipo tiene que resolver 3 problemas y en dos de ellos algún dato es la respuesta del problema de algún compañero.

Toda la información – bases del concurso, enunciados de los problemas y resultados – la podéis ver en nuestra página web. Mostramos aquí los ganadores del mismo:

En la clasificación global, por centros, el ganador fue el IES Fortuny, quedando en segundo y tercer lugar respectivamente el Colegio Valdeluz y el Colegio San José del Parque.

En resultados individuales, las cosas quedaron así:

En el primer nivel (1º y 2º de ESO) hubo un triple empate para el primer puesto entre los estudiantes Moisés Herradón Cueto, de 1º de ESO del Colegio Brains, Rubén Jiménez Benito, de 2º de ESO del IES José Hierro de Getafe y Pedro Segovia Carnicero, de 2º de ESO del Colegio San José del Parque.

En el segundo nivel (3º y 4º de ESO), el ganador fue José María Pérez Ramos, de 4º de ESO del Colegio Valdeluz, quedando en 2º lugar Carlos Sobrino Armas del IES San Juan Bautista.

Finalmente, en el 3º nivel, Bachillerato, obtuvo el 1º puesto Ignacio Somoza Sotillos, de 2º de Bachillerato del Colegio Valdeluz, siendo Hugo Fernández Hervás, de 1º de Bachillertato del IES San Juan Bautista quien quedó en 2ª posición.

Nuestra más entusiasta enhorabuena a estos centros y a estos chicos, que recogerán sus premios en la entrega de premios del próximo Concurso de Primavera, allá por el mes de Abril y que, como contaba una preciosa reseña del concurso aparecida en ABC el martes 23 de noviembre, "*el premio será sólo un diploma y así será hasta que la Sociedad Puig Adam, organizadora del evento, encuentre algún patrocinador*".

Juan Jesús Donaire Moreno
Joaquín Hernández Gómez

XLI Olimpiada Matemática Española

Fase Local - Madrid

Durante el fin de semana del pasado 22 de enero, se celebraron en la Facultad de Matemáticas de la UCM las pruebas correspondientes a la fase local de la XLI OME. Contrariamente al descenso alarmante de participación que se había observado en los últimos años, la participación en esta XLI Olimpiada tuvo un aumento espectacular, siendo 134 estudiantes los que pelearon la tarde del viernes y la mañana del sábado con los problemas que se les plantearon.

La causa de este significativo aumento de participación -recordemos: 37 estudiantes en el curso pasado y 134 en éste- creemos que ha sido debida fundamentalmente a la nueva estructura de la prueba: durante la tarde del viernes, y durante 3 horas, los estudiantes intentaron resolver 30 cuestiones de opción múltiple y durante la mañana del sábado, 5 problemas de estructura análoga a los que han venido apareciendo en los últimos años en la OME. Por la experiencia que tenemos con otros concursos, hemos constatado que las pruebas de opción múltiple tienen un especial atractivo para los estudiantes. Esto nos llevó -copiando la estructura de la prueba en otros países, como por ejemplo EEUU o Bélgica- a diseñarla de esta forma.

Por falta de tiempo, en esta edición las dos pruebas han sido en días consecutivos y todos los participantes del primer día lo hicieron en el segundo. No será así en años sucesivos, en los que habrá unas semanas entre una y otra, sirviendo las pruebas de opción múltiple para seleccionar a los estudiantes participantes el segundo día, estudiantes que, por el hecho de haber sido seleccionados en alguna prueba, van a competir -estamos seguros- con entusiasmo en dicho día.

Los ganadores en Madrid de esta edición de la Olimpiada han sido:

Primer premio

Javier de la Nuez González, (1º de Bachillerato), del Liceo Italiano de Madrid
Elisa Lorenzo García (2º de Bachillerato), del IES Fortuny de Madrid
Ricardo Martín Brualla (2º de Bachillerato), del Colegio Alemán de Madrid

Segundo premio

Hugo Fernández Hervás (1º de Bachillerato), del IES San Juan Bautista de Madrid
Ru Ding (1º de Bachillerato), del IES Ramiro de Maeztu de Madrid

José Carpio Pinedo (2º de Bachillerato), del IES San Juan Bautista de Madrid

<u>Tercer premio</u>

David Fernández Sánchez (2º de Bachillerato), del IES Jorge Guillén de Alcorcón

Ignacio Somoza Sotillos (2º de Bachillerato), del Colegio Valdeluz de Madrid

Alba Lozano de las Heras (2º de Bachillerato), del ColegioValdeluz de Madrid.

Los tres primeros clasificados también lo fueron en la pasada edición de la Olimpiada en Madrid. Además, Elisa obtuvo Medalla de Oro y Javier de Plata en la fase Nacional.

Repite también Ru Ding como segundo premio. Pero los nuevos seleccionados por Madrid tampoco son desconocidos: han tenido ya premios en nuestro concurso Puig Adam de resolución de problemas, en el de Primavera y en las últimas ediciones del concurso Intercentros. Vaya para todos los participantes nuestra felicitación.

Los nueve premiados madrileños participarán, junto a sus compañeros de toda España, en la fase nacional de la XLI Olimpiada, que se celebrará en Santiago de Compostela entre los días 20 y 23 de marzo próximos.

Joaquín Hernández

Problemas Propuestos en la Primera Fase de la XLI Olimpíada Matemática Española en los distritos de Madrid

Problemas propuestos en la segunda sesión (mañana del sábado)

Problema 1

Probar que en cualquier conjunto de 18 enteros consecutivos de 3 cifras, habrá al menos uno que es múltiplo de la suma de sus dígitos.

Problema 2

En el interior de un cuadrado $ABCD$ se construye el triángulo equilátero ABE. Sea P el punto intersección de las rectas AC y BE. Sea F el punto simétrico del P respecto de la recta DC. Se pide demostrar que:

a) el triángulo CEF es equilátero.
b) el triángulo DEF es rectángulo e isósceles.
c) el triángulo BDF es isósceles.
d) el triángulo PDF es equilátero

Problema 3

En cierto idioma, el alfabeto tiene únicamente dos letras: A y B. Una palabra es "periódica" si es del tipo *PP ...P*, siendo *P* una palabra. Por ejemplo, la palabra ABAABAABA es del tipo *PPP* , con *P* = ABA.
Se forma una sucesión de palabras de la siguiente manera:

- la primera palabra es A y la segunda palabra es B.
- para cada k >2, la palabra k se forma escribiendo la palabra k – 1 a la derecha de la palabra k – 2.

Así, las primeras palabras de la sucesión serán A, B, AB, BAB, ABBAB, ….
¿Hay en esa sucesión alguna palabra "periódica"?

Problema 4

Sean x_1, x_2 las raíces del polinomio $P(x)=3x^2+3mx+m^2-1$, siendo m un número real. Probar que $P\left(x_1{}^3\right)=P\left(x_2{}^3\right)$.

Problema 5

Encontrar todas las funciones $f:\Re\to\Re$ tales que

$$x^2\cdot f(x)+f(1-x)=2x-x^4.$$

Cuestiones propuestas en la primera sesión (tarde del viernes)

Incluimos como muestra tres de ellas:

1. ¿Para cuántos valores enteros de *n*, entre 1 y 100, se puede descomponer $x^2 + x - n$ en productos de dos factores de primer grado con coeficientes enteros?

   A) 0; B) 2; C) 9; D) 18; E) 20

2. Sea x un número real elegido al azar y comprendido entre 100 y 200. Si $\left[\sqrt{x}\right]= 12$, ¿cuál es la probabilidad de que $\left[\sqrt{100x}\right]=120$? (Recuerda: $[a]$,parte entera de *a,* es el mayor entero menor o igual que *a*).

   A) $\frac{2}{25}$; B) $\frac{241}{2500}$; C) $\frac{1}{10}$; D) $\frac{96}{125}$; E) 1

3. Las medidas en grados de los ángulos interiores de un hexágono convexo son enteros positivos que están en progresión aritmética. ¿Cuál es la mayor medida posible, en grados, del mayor ángulo?

   A) 165º; B) 167º; C) 170º; D) 175º; E) 179º

Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) y Mathematical Reviews incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM, VOL. 36 (4) DE 2004

#3556 (Sección H70). A dynamic aproach to "simple" algebraic curves, por *Heinz Shumann.* Bol. Soc. Puig Adam 66 (feb 2004), págs. 22-38.

#3460 (Sección G40). Breve historia de la geometría del triángulo, *por* Ricardo Moreno Castillo. Bol. Soc. Puig Adam 66 (feb 2004), págs. 39-50.

#3533 (Sección H30). Cúbica y cuártica: métodos de Tartaglia y de Ferrari. Teoremas de Sturm y Hua, por *Luis González y José María López.* Bol. Soc. Puig Adam 66 (feb 2004), págs. 51-62.

#3647 (Sección K90). Sobre el método Monte-Carlo geométrico en el Cálculo Integral, por *J.C. Cortés* y *G. Calbo Sanjuán*. Bol. Soc. Puig Adam 66 (feb 2004), págs. 63-73.

#3663 (Sección M50). La formulación matemática de la Mecánica del siglo XVII: Galileo, Newton, Leibniz, por *Francisco González Redondo.* Bol. Soc. Puig Adam 66 (feb 2004), págs. 74-90.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM, VOL. 36 (5) DE 2004

#3776 (Sección A30). Miguel de Guzmán: innovador, crítico, maestro, por *Ignacio Sols.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 7-10.

#3850 (Sección B60). XL Olimpíada Matemática Española, por *María Gaspar.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 11-14.

#3851 (Sección B60). XVIII Olimpíada Iberoamericana de Matemáticas, por *María Gaspar.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 15-17.

#4186 (Sección H70). A dynamic aproach to "simple" algebraic curves (II parte), por *Heinz Shumann.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 24-35.

#4220 (Sección I70). Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el método de las transformadas diferenciales, por *J.C. Cortés* y *G. Calbo Sanjuán.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 36-43.

#4093 (Sección F60). Un generador de números pitagóricos, por *José Manuel Jiménez Camacho.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 44-48.

#4260 (Sección K60). Estrategias en juegos de apuestas: ¿Diversificación o concentración? Una estrategia óptima para el caso de la Lotería Primitiva, por *Luis Franco Martín y Juan Manuel Valderas Jaramillo.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 49-56.

#4287 (Sección M50). La expresión algebraica de la Ley fundamental de la Dinámica newtoniana en la Mecánica de Euler, por *Francisco González Redondo.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 57-68.

#4094 (Sección F60). Los números de Barinaga, por *Manuel Benito Muñoz y y José Javier Escribano Benito.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 69-75.

#4250 (Sección K44). Una Experiencia de Enseñanza en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales de Bachillerato, por *Juan José Prieto Martínez.* Bol. Soc. Puig Adam 67 (jun 2004), págs. 76-89.

Dedicatoria de este número del Boletín

El curso 2003-2004 se ha jubilado la profesora Mª Paz Bujanda Jáuregui, durante muchos años Profesora Titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense. Su preocupación han sido siempre los temas de la enseñanza de las matemáticas. En la última Asamblea de nuestra Sociedad se acordó dedicar un número del Boletín en homenaje a la profesora Bujanda, como agradecimiento al trabajo que durante tanto tiempo realizó.

Este momento, que era de júbilo, se ha visto empañado en el verano de 2004 por el fallecimiento del esposo de la profesora Bujanda. Hemos entendido, no obstante, que este hecho luctuoso no debía ocultar el aprecio que sus compañeros sienten por ella, antes al contrario, y que seguía teniendo todo el sentido el acuerdo que adoptó la Asamblea de la Sociedad.

Por ello, en el anterior y en este número se encontrarán los trabajos que hemos recibido, como muestra de cariño a Mari Paz y de la cercanía de sus compañeros en los momentos duros.

Número especial dedicado al Prof. Miguel de Guzmán

Como ya anunciamos en el número anterior, La Junta Directiva ha propuesto dedicar el próximo número 70 del Boletín, correspondiente a junio de 2005, en homenaje al Profesor Miguel de Guzmán, recientemente fallecido.

Se invita a presentar artículos a cuantos compañeros, alumnos y amigos del Profesor Miguel de Guzmán lo deseen.

Por tratarse de número especial en homenaje al Profesor Guzmán, se espera que, en principio, dichos artículos sean relativos a Educación Matemática en sus diversas facetas, aunque no se descarta incluir breves artículos de divulgación en otros campos, rogando que no sean excesivamente especializados.

Las normas de presentación serán las habituales del Boletín, que aparecen al final de este número. Los artículos serán revisados, como es norma en este Boletín. La fecha límite de envío de trabajos es el 5 de abril de 2005.

La Junta Directiva

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 69 (Febrero 2005)

La importancia de llamarse coseno hiperbólico

Fernando Etayo Gordejuela
Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación
Facultad de Ciencias. Universidad de Cantabria
Avda. de los Castros s/n 39005 Santander
etayof@unican.es

Abstract

In this note we analyze the importance of names in mathematical definitions: the name must suggest the idea behind the object to be defined, somehow allowing the understanding of the concept. As an example, we deal with the definition of hyperbolic functions.

A Mari Paz, con todo afecto

Introducción

Querría aprovechar esta ocasión de homenaje a Mari Paz Bujanda para poder referirme a un tema que desde hace tiempo me preocupa. Me refiero al de la denominación de los objetos matemáticos: las definiciones.

La Matemática es la ciencia de las definiciones. El quehacer de los matemáticos está muchas veces en *acertar* con la definición correcta que nos permita entender un concepto, precisar una idea y trabajar con ella. Muchas veces las definiciones vienen dadas por una palabra que *sugiere exactamente lo que queremos definir*. Veamos un ejemplo. Bien claro es que la *curvatura* de una curva debe medir cómo se curva ésta, es decir, cómo se aparta de ser una recta, y la *torsión* debe medir cómo se retuerce, es decir, cómo se aleja de ser una curva plana. Eso es lo que queremos medir: el matemático debe proporcionarnos la definición precisa de ambos conceptos, y el modo de calcular la curvatura y la torsión con las fórmulas correspondientes, pero la esencia de la definición no es la fórmula, sino la idea que queremos expresar.

Así pues, definir es un arte, que comprende tres aspectos: (1) la idea del concepto, (2) la expresión matemática del mismo, que consiste en decir exactamente lo que se quiere decir y (3) la denominación del concepto, con un nombre adecuado que sugiera la idea a la que nos referimos. A esta última parte es a la que quiero dedicar mi atención en este breve apunte. En efecto, cuando explicamos una definición a un alumno habitualmente realizamos el proceso contrario, empezando diciéndole el nombre del objeto. Y los nombres están muy bien puestos: sirviéndonos bien de ellos podemos sacar mucho partido a la definición.

Quiero que este escrito sirva como una llamada de atención, pues me preocupa mucho la ligereza con que algunos colegas pasan por las definiciones, con afirmaciones tan banales como: *las definiciones no tienen nada que entender, son los teoremas los que hay que entender* . ¡Pues claro que las definiciones tienen mucho que entender!

1. Algunos ejemplos

Voy a mostrar tres ejemplos reales que he vivido con alumnos y compañeros, y que muestran cómo a pesar de tener los conceptos nombres muy bien escogidos, no se cae en la cuenta de lo que significan porque no ha habido una introducción adecuada de los mismos. Los escenificaré en forma dialogada, entre un profesor y un alumno. Los tres ejemplos van ligados en su exposición, así que los podemos imaginar como tres escenas de un minúsculo entremés.

Ejemplo 1

PROFESOR: Lee las siguientes expresiones: x, x^2, x^3, x^4, x^5.

ALUMNO: equis, equis al cuadrado, equis al cubo, equis a la cuarta, equis a la quinta.

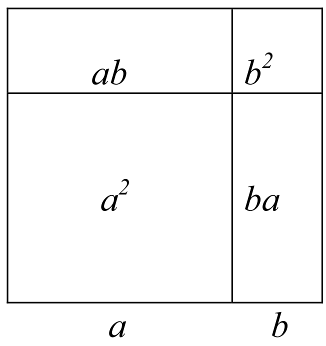
P: ¿Por qué los llamas así y no los llamas: equis, equis a la segunda, equis a la tercera, equis a la cuarta, equis a la quinta?

A: ¿?

P: La razón es bien clara: si x es la longitud de un segmento, x^2 es el área del cuadrado de arista dicho segmento y x^3 es el volumen del cubo de arista el segmento dado. Así que es claro que x^2 es equis al cuadrado y x^3 es equis al cubo. Tan claro es, que los matemáticos tardaron mucho tiempo en pensar en expresiones algebraicas que involucraran potencias mayores que tres, pues éstas no tenían interpretación geométrica para ellos [1]. Has estado mucho tiempo refiriéndote a un concepto de origen geométrico sin haberte dado cuenta de ello, como aquel gentilhombre de Molière que un día se apercibió de que llevaba toda la vida hablando en prosa.

<u>Ejemplo 2</u>

PROFESOR: Me voy a salir un poco del tema, refiriéndome a un teorema en vez de a una definición, pero está muy relacionado con el ejemplo anterior. Demuestra la identidad $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
ALUMNO: $(a+b)^2 =(a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.
P: Muy bien. ¿Puedes justificar las igualdades segunda y tercera?
A: La segunda es cierta por la propiedad distributiva y la tercera por la conmutatividad del producto.
P: Muy bien. ¿No habíamos quedado en que el cuadrado de un número expresaba el área del cuadrado de arista el número dado? Pues bien, $(a+b)^2$ es el área del cuadrado de lado $a+b$ que lo podemos descomponer como un cuadrado de lado a, otro de lado b y dos rectángulos de lados a y b. Por tanto el área del cuadrado grande es $a^2 + b^2 + 2ab$. Con un dibujo es evidente:



Y esto ya lo sabía Euclides muchos siglos antes de que se hablara de propiedades distributivas y conmutativas [2].
A: Pero yo no veo qué relación tiene este resultado con el tema de las definiciones.
P: Pues sí la tiene: una definición bien entendida nos sirve para argumentar. Sabiendo que el cuadrado de un número expresa el área del cuadrado de arista ese número, hemos podido dar una *demostración sin palabras* del resultado. Y esta demostración no la olvidarás nunca.

<u>Ejemplo 3 (1ª parte)</u>

Vamos con el que da título a estas notas.

PROFESOR: Háblame de las funciones hiperbólicas [3].
ALUMNO: El seno y el coseno hiperbólico se definen por las relaciones:

$$senh(t) = (1/2)\ (e^t - e^{-t})\ \ ;\ cosh(t) = (1/2)\ (e^t + e^{-t})$$

P: Muy bien, ya veo que *sabes muy bien lo que son*. ¿Puedes citarme alguna propiedad importante que tengan?
A: Sí. Por ejemplo, se verifica: $cosh^2(t) - senh^2(t) = 1$.
P: ¿Puedes probarlo?
A: Claro que sí:

$$cosh^2(t) - senh^2(t) = (1/4)\ (e^t + e^{-t})^2 - (1/4)\ (e^t - e^{-t})^2 =$$
$$= (1/4)(e^{2t} + e^{-2t} + 2) - (1/4)(e^{2t} + e^{-2t} - 2) = 1$$

Más aún, ya he aprendido lo que realmente significa elevar al cuadrado y puedo atreverme a decir que las funciones hiperbólicas se llaman así porque en sus propiedades se parecen a las funciones trigonométricas: para unas se tiene la relación $cosh^2(t)–senh^2(t)=1$ mientras que para las otras es $cos^2(t)+sen^2(t)=1$.

P: Pues vas bien, pero aún te falta algo. Fíjate qué casualidad tan grande: las funciones hiperbólicas tienen una propiedad muy parecida a las trigonométricas. Pero, ¿es realmente una casualidad?

A: No es casualidad, porque yo lo he probado. Así que el nombre lo tienen muy bien puesto las funciones hiperbólicas.

P: Te planteo la historia de otro modo. Llamemos $x=cosh(t)$, $y=senh(t)$. Entonces lo que has probado es: $x^2–y^2 = 1$. ¿Es un lugar conocido el de puntos que satisfacen esta ecuación?

A: Sí, es una hipérbola.

P: Ahora piensa en la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. ¿Qué representa?

A: La circunferencia de centro el origen y radio uno.

P: ¿Sabes parametrizarla con un solo parámetro?

A: Sí, con la aplicación que a cada t le hace corresponder $(cos(t), sen(t))$.

P: Pues muy bien, ahora piensa en la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ y trata de parametrizarla como $(f(t),g(t))$. ¿Qué funciones f y g has de escoger?

A: ¡*Ya lo veo*! Son $f(t) =cosh(t), g(t)=senh(t)$.

P: Claro; *por eso estas funciones se llaman hiperbólicas*. Porque son justo las funciones que tenemos que tomar para parametrizar la hipérbola. Ahora piensa en tu primera respuesta, cuando me has dado las definiciones de seno y coseno hiperbólicos. ¿Realmente *entendías* la definición?

Ejemplo 3 (2ª parte)

PROFESOR: ¿Conoces más propiedades de las funciones hiperbólicas?
ALUMNO: Sí. Conozco sus derivadas, que son muy fáciles de calcular y de recordar:

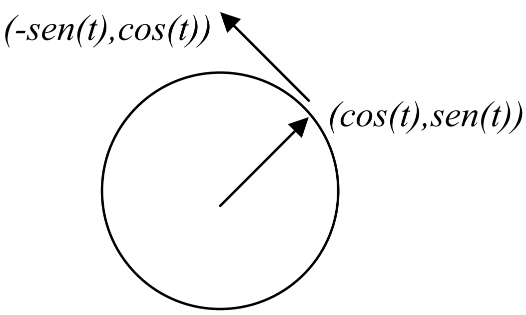
$$senh'(t) = cosh(t) \;\; ; \;\; cosh'(t) = senh(t).$$

Como en el caso de las propiedades anteriores se parece a las que tienen las funciones trigonométricas, pero ya no sé decir si es casualidad o no.
P: Bien haces en suponer que no es casualidad. Para las funciones trigonométricas se verifican las relaciones:

$$sen'(t) = cos(t) \;\; ; \;\; cos'(t) = -sen(t),$$

que geométricamente podemos expresar así: si consideramos la circunferencia dada por *(cos(t),sen(t)),* el vector derivada es perpendicular al radio:

$$(cos(t),sen(t))\cdot(-sen(t),cos(t)) = 0$$



Esta última relación también la podíamos obtener analíticamente, considerando que $(f(t),g(t)) = (cos(t),sen(t))$ parametriza la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, así que $cos^2(t) + sen^2(t) = 1$, con lo que derivando respecto de t obtenemos

$$0 = 2\,f(t)\,f'(t) + 2g(t)\,g'(t) = 2\,(f(t),g(t))\cdot(f'(t),g'(t)).$$

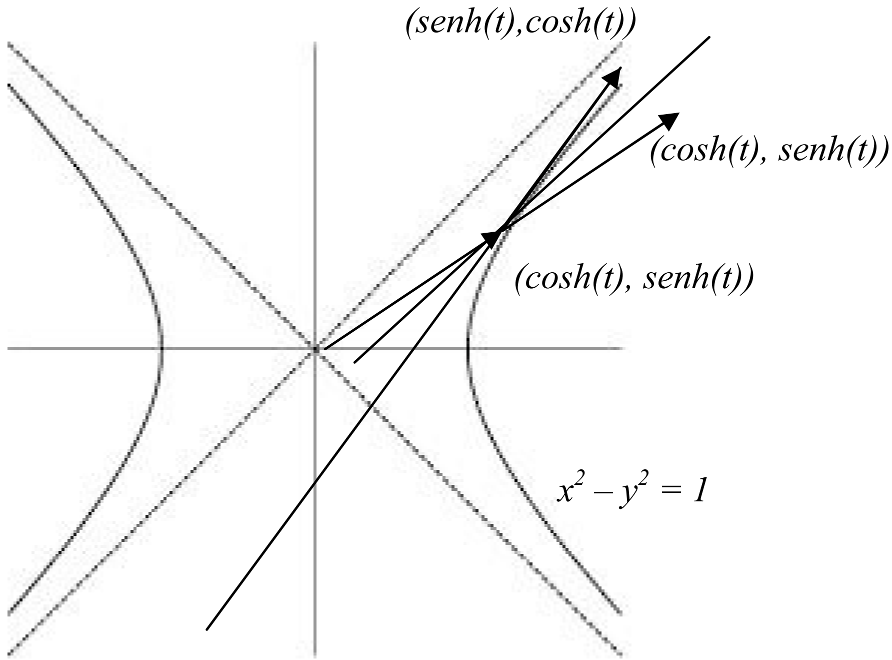
En el caso de las funciones hiperbólicas tenemos que $(f(t),g(t)) = (cosh(t), senh(t))$ parametriza la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, con lo que

$$0 = 2\,f(t)\,f'(t) - 2g(t)\,g'(t) = 2\,(f(t),g(t))*(f'(t),g'(t)).$$

A: ¿Pero qué significa *?

P: Es otro producto definido en el plano real: el dado por $(a,b)*(c,d) = ac - bd$. Observa que dos vectores son “perpendiculares” con este producto si son simétricos respecto de la diagonal $y = x$. Por ejemplo, siempre (a,b) y (b,a) son perpendiculares entre sí.

Así que tenemos que *(cosh(t), senh(t))* y su derivada *(senh(t), cosh(t))* son perpendiculares respecto de *, es decir, son simétricos respecto de la diagonal:

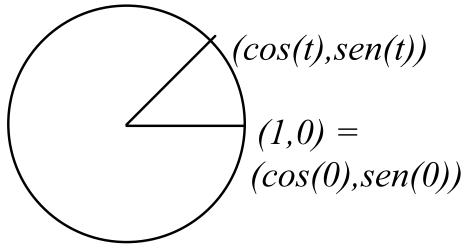


A: ¿Y ese producto * se utiliza para algo o es un mero artificio para hacer que se parecezcan las funciones trigonométricas e hiperbólicas?
P: Claro que se utiliza. Es un producto de índice 1. La teoría de la Relatividad viene regida por productos de índice 1 (llamados *métricas de Lorentz*) [4]. Fíjate que ahora vemos más analogías: la circunferencia es el conjunto de vectores de norma 1 con el producto escalar ordinario; la hipérbola es el conjunto de vectores de norma 1 con el producto *. Y en ambos casos, el vector tangente es perpendicular al de posición, con la definición correspondiente de perpendicularidad.

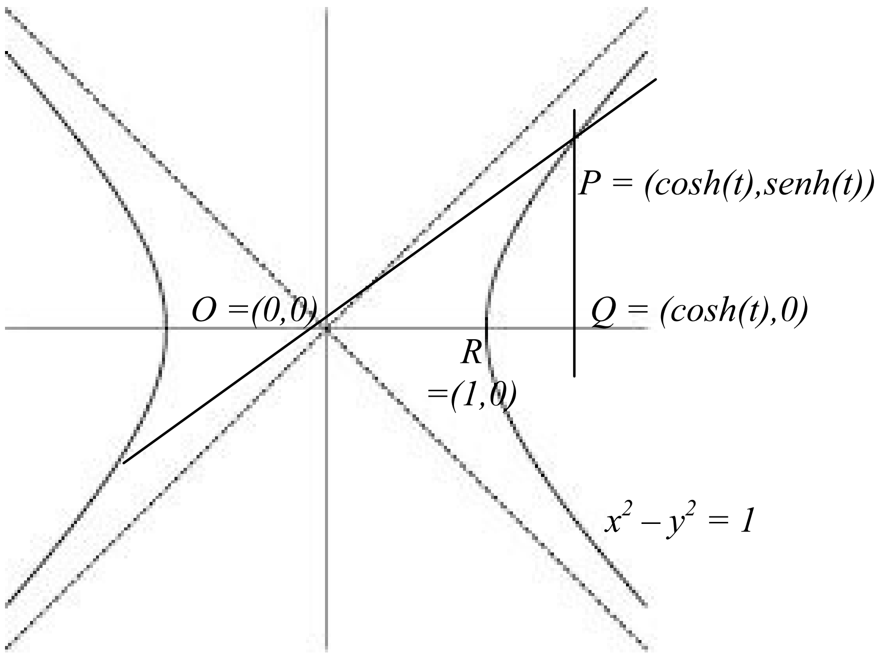
Ejemplo 3 (3ª parte)

PROFESOR: Vamos a ver otro tipo de propiedades. Para un ángulo t, ¿cuánto mide la región del círculo unidad comprendida entre 0 y t?

ALUMNO: Como la circunferencia es de radio uno, el área del sector circular es *(t/2)*. En particular, todo el círculo mide $(2\pi/2) = \pi = \pi r^2$.



P: Bueno, pues hagamos lo mismo con la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$. Calcula cuánto mide la región limitada por los segmentos *OP, OR* y el arco de hipérbola *RP*.



A: El área del triángulo *OPQ* es *(1/2) cosh(t) senh(t).* El área por debajo de la gráfica entre *R* y *Q* está por la integral

$$\int_{x=1,cosh(t)} (x^2 - 1)^{1/2}\, dx.$$

Ahora hacemos el cambio de variable $x = cosh(u)$, $dx = senh(u)\, du$, con lo que la condición $x=1$ pasa a $u=0$ mientras que $x=cosh(t)$ pasa a $u=t$, y nos queda:

$$\int_{x=1,cosh(t)} (x^2 - 1)^{1/2}\, dx = \int_{u=0,t} (cosh^2(u) - 1)^{1/2}\, senh(u)\, du =$$
$$= \int_{u=0,t} senh^2(u)\, du = (1/2)\, [senh(u)\, cosh(u) - u]_{u=0,t} =$$
$$= (1/2)\, [senh(t)\, cosh(t) - t].$$

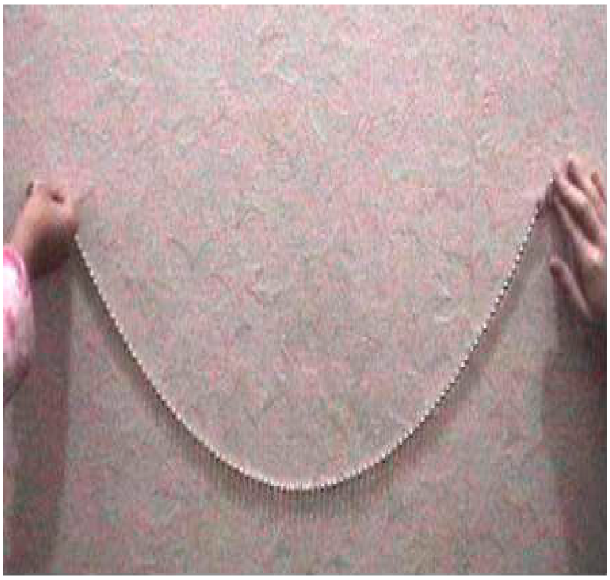
Por lo tanto el área pedida es:

$$(1/2)\, cosh(t)\, senh(t) - (1/2)\, [senh(t)\, cosh(t) - t] = t/2.$$

P: Así que el área en el caso de la circunferencia mide *(t/2)* y en el de la hipérbola mide *(t/2)*. ¡Exactamente lo mismo! Nuevamente tienen mucho parecido las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

Ejemplo 3 (4º parte)

ALUMNO: ¿Puedo hacer alguna pregunta? Además de todas las motivaciones matemáticas, ¿aparece el coseno hiperbólico ligado a algún fenómeno físico?
PROFESOR: Claro que sí. Cada vez que viajas puedes verlo: el coseno hiperbólico es (salvo factor) la curva descrita por los hilos de un tendido eléctrico. Esta curva, con toda razón, se llama *catenaria*: la que define una cadena colgada de dos postes. Jacobo Bernoulli planteó el problema de encontrar la ecuación de la catenaria. Leibniz, Huygens y Juan Bernoulli dieron su ecuación en 1691, probando que es el coseno hiperbólico [5].



Ejemplo 3 (5ª parte)

ALUMNO: Una última pregunta. ¿Qué significa *hipérbola*? ¿Tiene algo que ver con la palabra *hipérbole*?
PROFESOR: En efecto, una hipérbole es una exageración (en griego ὑπερβολή), mientras que la palabra elipsis, que es la omisión de una parte de una oración sin

que haga perder el sentido de la misma, proviene del griego ἔλλειψις, falta. Así que a las elipses les falta algo y a las hipérbolas les sobra. ¿El qué? Excentricidad. Las tres cónicas no degeneradas se pueden definir como el conjunto de puntos del plano cuyo cociente de distancias a un punto dado (*foco*) y a una recta dada (*directriz*) es una constante (*excentricidad*). Si esa constante es menor que uno, se tiene una elipse, si es igual a uno una parábola y si es mayor que uno una hipérbola. En los tres casos, la directriz es la recta polar del foco respecto de la cónica.

2. Conclusión

Las matemáticas aparecen muchas veces como una ciencia *hermética*, porque tienen su propio lenguaje. Éste debe ser preciso, con lo que ha de estar apoyado en unas definiciones totalmente rigurosas, en el sentido, ya apuntado, de que digan lo que quieren expresar exactamente. Sin embargo*, tener unas definiciones precisas no basta*: hay que *entender* lo que estas definiciones expresan. Y resulta muy difícil explicar qué significa entender: es el famoso "ya lo veo" que todos los que estudiamos matemáticas decimos cuando se nos ilumina la cabeza y *vemos* lo que significa la definición.

Del ejemplo de las funciones hipérbólicas podemos extraer unas cuantas consecuencias:

1. La *esencia* del coseno hiperbólico no está en que se exprese como $cosh(t) = (1/2)\ (e^t + e^{-t})$, sino en que junto con el seno hiperbólico parametriza la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$.
2. Las propiedades de estas funciones provienen de las relaciones profundas existentes entre la circunferencia y la hipérbola.
3. El nombre de estas funciones está muy bien escogido atendiendo a su naturaleza [6]. Pero si restringimos la exposición que hagamos de las funciones hiperbólicas a su expresión exponencial y las propiedades que fácilmente podamos deducir de ella, habremos visto sólo la punta del iceberg, y habremos dejado oculta la mayor parte de él. Y, en poco tiempo, los alumnos olvidarán el concepto.
4. Comentar, como hemos hecho en este relato, algunas propiedades más de las funciones hiperbólicas no alarga demasiado la explicación, aclara los conceptos, hace comprensibles las ideas y permite la relación con otros objetos ya conocidos.

5. Las Matemáticas no son ajenas a la época en que se desarrollan ni al resto del conocimiento [7]. Aislarlas en una torre de marfil dificulta su comprensión y su interés.

Motivar la introducción de los conceptos matemáticos y detenernos en su explicación es labor que debemos hacer todos los profesores. Para hacerlo bien, podemos "tirar de los hilos" del nombre y de la historia de las definiciones y valernos de los planteamientos físicos que a lo largo de la Historia han servido de motivadores constantes de la Matemática.

3. Estrambote

Me daría por muy satisfecho si este pequeño relato hubiera servido para hacer pensar la riqueza que realmente encierran las definiciones matemáticas. Y me gustaría que también sirviera de homenaje al maestro de Mari Paz, a D. Pedro Abellanas, que nos inflamó de gusto por la cultura matemática, cuando en las clases de Geometría III nos explicaba el por qué de los nombres de la *curvatura*, la *torsión*, las *envolventes*, las *indicatrices*, y la que tenía el nombre más bello y sugerente: la circunferencia *osculatriz.*

Notas y Referencias

[1] Puede hallarse una exposición detallada sobre el tema en:
José J. Etayo: *El álgebra del cinquecento*, en Historia de la Matemática hasta el siglo XVII, R. A. Ciencias Exactas, Fís. y Nat., Madrid, 1986, 147-169.
De hecho, hasta las ecuaciones de segundo grado se estudiaban agrupándolas en seis tipos diferentes, por la necesidad de considerar sólo coeficientes positivos. Y las primeras soluciones de las ecuaciones cúbicas no llegarían hasta Cardano (1545). En esta época, todos los razonamientos estaban basados esencialmente en la geometría.

[2] Véase la Proposición 4 del Libro II de los *Elementos* de Euclides: *si una recta* [=segmento] *se corta al azar, el cuadrado de la recta entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos.* (Hemos usado la edición de Ed. Gredos, Madrid, 1991).

[3] Las funciones hiperbólicas fueron introducidas por el jesuita italiano Vincenzo Riccati , entre los años 1757 y 1767. Obtuvo las fórmulas de adición, sus

derivadas y su relación con la función exponencial (hoy día éste es el punto de partida para su definición). Puede verse más información por ejemplo en la hoja web: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/index.html

[4] No vamos a entrar en este tema. Una exposicón matemática del mismo, con inclusión del papel que juegan las funciones hiperbólicas en Relatividad, puede seguirse en:

Barret O'Neill: *Semi-Riemannian geometry. With applications to relativity.* Academic Press, Inc., New York, 1983.

[5] Véase, por ejemplo otra vez la hoja web indicada en la nota [3].

[6] Sin embargo, es muy larga la lista de libros que al referirse a las funciones hiperbólicas no mencionan la hipérbola y, recíprocamente, la de libros que al hablar de la hipérbola no mencionan las funciones hiperbólicas. ¿Será porque las funciones son de Análisis y la hipérbola de Geometría? Si ésta fuera la explicación sería el fracaso absoluto de la hiperespecialización. Por el contrario, sí existen excelentes libros que motivan muy bien. Por citar sólo uno de ellos nombremos:

Ernst Hairer y Gerhard Wanner: *Analysis by Its History.* Springer, N. Yok, Berlín, Heildelberg, 1996.

[7] Podríamos citar aquí infinidad de ejemplos. Por hablar sólo de uno, la Geometría Proyectiva nació, al acabar la Edad Media, con el arte de la perspectiva, tratando de explicar qué relación matemática liga a los objetos que vemos en el espacio tridimensional con los que plasmamos en un cuadro bidimensional.

¿Por qué Juanito no sabe sumar? (1973)
¿Por qué Juanito no sabe sumar aún? (2004)

J. M. Aroca Hernández – Ros

Catedrático de Geometría y Topología, Universidad de Valladolid

aroca@agt.uva.es

Abstract

The publication in 1973 of Kline's book: Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math, had not only a significant paper in the change of mathematical Curricula in primary and secondary School, also the book was partially responsible of a change in the way to understand the role of Mathematics as training instrument, and was used as a weapon against mathematicians by the experts in Education. Now, more than thirty years later, it is a good time to see that the situation is worse, to think about the part of Mathematics and Mathematicians in Education, retrieve Mathematics as the Science of proof and accept that the responsibility of the failure of the System does not belong to Mathematics.

Si no se resalta a los más inteligentes,
se evita que el pueblo luche.
Si no se estiman las cosas más preciosas,
se evita que el pueblo robe.
Si no se enseña lo interesante,
se evita que el corazón del pueblo se confunda.

Así hace el sabio:
les vacía el corazón y llena su estomago,
les debilita la ambición y fortalece sus cuerpos;
hace que el pueblo se quede sin conocimientos ni deseos,
y se ocupa de que los más inteligentes no osen actuar.
Practica el no obrar
y así mantiene todo en orden.

(Lao Tse. Tao te Ching. Siglo VI a.c. Trad. Inglesa P. E. Merel)

Para María Paz que seguramente no estará de acuerdo.

En contra de lo que podría suponerse, el fragmento del libro del Tao que precede estas líneas no tiene por objeto insinuar que todos los ministros de educación que en el mundo han sido sean taoistas. Nada mas lejos de mi ánimo, estoy convencido de que ninguno de ellos ha leído nunca el libro del Tao, y que el hecho de que su política parezca acorde con las enseñanzas de Lao Tse es mera coincidencia. Sin embargo, la mayoría de los que me lean convendrá conmigo en que la tentación de elegir estos versículos para iniciar una pequeña nota provocadora sobre las reformas de la enseñanza es realmente difícil de resistir.

Creo que la práctica totalidad de los implicados en el sistema educativo, estamos de acuerdo en dos cosas:

- El sistema educativo funciona mal.
- Nunca una reforma de los planes de estudios ha resuelto los problemas existentes mejorando sustancialmente el sistema.

Pese a ello nuestros políticos continúan haciendo reformas, con una fe digna de mejor causa. Ese espíritu reformador no se limita a los últimos años. Jean Dieudonné afirmaba que en los últimos cincuenta años se han probado mas resultados matemáticos de importancia que en toda la época anterior a ellos. No se si su afirmación será cierta, y en cualquier caso habría que discutir el significado de la palabra importancia, pero lo que es indudable es que en los últimos cincuenta años se han reformado los planes de enseñanza más veces y mas radicalmente que en toda la historia anterior del bachillerato.

Las razones de estas reformas se sitúan siempre por una parte en la necesidad de adecuar el sistema educativo a los cambios de la sociedad, y por otra en paliar el fracaso escolar. La enorme aceleración, entendida en su sentido físico de variación de la velocidad, de los cambios sociales en el último siglo, justificaría así el número de reformas del sistema educativo. De una forma mas o menos velada la responsabilidad del fracaso escolar se achaca a los profesores o a la dificultad de las materias con mayor índice de fracaso, esto justifica los cambios en los modos de selección y en las funciones de los profesores (la disminución del presupuesto de educación es un simple efecto secundario) y la trivialización de las matemáticas.

El proceso de cambio social y consiguiente adaptación del sistema educativo al cambio, inicialmente discreto, puede alcanzar límites preocupantes que lo transformen en cambio continuo. Uno de los promotores directos de una de las últimas reformas, José Segovia, antiguo director general de enseñanzas medias y de promoción educativa, defiende la necesidad de adaptarse a esa tendencia social al cambio, identificando en cierta forma cambio con progreso en una línea sansimoniana peligrosamente ingenua, que le lleva a preconizar esta continuidad. En uno de sus libros (v. [SE] p. 212) escribe:

<<*Los sistemas educativos fuertemente burocratizados y centralizados son más refractarios a los cambios que otros sistemas más basados en la autonomía de los centros, por eso debe aprovecharse el margen que otorga la LOGSE a la organización y autonomía de cada equipo pedagógico. Los profesores se ven frenados a veces por la intromisión de trabas e inercias que hacen inviables los cambios. Es un tópico ya el pensar que se cambian aparentemente las cosas para que en el fondo nada cambie.*>>

Puede que sea consecuencia de mi edad o de mis ideas reaccionarias, pero me preocupa mucho lo que podría salir de los consejos de dirección de los centros (y he sido miembro de varios de ellos como representante de los padres) dejados a su arbitrio en un tema tan serio. Si la actual confusión con solo los gobiernos autonómicos es enorme, tratar de imaginar un sistema educativo de barrio supera mis posibilidades.

Claro que la mayoría de las ideas de Segovia no son nuevas, se remontan al socialismo utópico del XIX, o a las propuestas de autogestión libertarias de principios del siglo XX revividas por la *progresía* universitaria del final del franquismo. Por ejemplo C. Díaz y F. García (v. [DG], p 49) decían lo mismo de un modo un poco más radical:

<<*Hay que reconocer carta de legitimidad a un estado coordinador, no a un estado subordinador. Si es cierto que la enseñanza como las demás actividades de la compleja vida, debe estar financiada en su integridad, desde el jardín de infancia hasta la Universidad, por el estado, no es menos cierto que esta financiación no da derecho a ningún tipo de estado a convertirse en el Gran Hacedor que prevé, inordina y dicta el continente y el contenido educacionales*>>

En cambio estos mismos autores añadían otras propuestas que parecen olvidadas hoy en día, y que es conveniente recordar que se hicieron por escrito. Algunas eran de carácter folclórico, por ejemplo la rotación, en virtud de ella el director y el catedrático tendrían que emplear parte de su tiempo en la limpieza de escusados, mientras que los bedeles y las señoras de la limpieza (sic.) deberían pasar por las aulas y las cátedras (no descarto que esta rotación llegue a aplicarse en alguna de nuestras universidades). Y hay otras, que lamentablemente no son hoy políticamente correctas, aunque puede que sean la solución a los males del sistema. Así recurriendo como soporte filosófico nada menos que a Marx [M]:

<<La prohibición general del trabajo infantil es incompatible con la existencia de la gran industria, y por tanto, un piadoso deseo, pero nada mas. El poner en práctica esta prohibición, suponiendo que fuera factible, sería reaccionario, ya que, reglamentada severamente la jornada de trabajo según las distintas edades y aplicando las demás medidas preventivas para la protección de los niños, la combinación del trabajo productivo con la enseñanza desde una edad temprana es uno de los más potentes medios de transformación de la sociedad actual>>

Díaz y García proponen un sistema educativo, cuyos objetivos coinciden también con las ocho genéricas y bienintencionadas demandas que propone Segovia, pero con unos métodos ligeramente diferentes; el niño a los ocho años debe empezar a trabajar de modo que alterne sus estudios con actividades productivas. A partir de los trece se integraría, en igualdad de condiciones con los adultos, en fábricas - escuelas. Allí estudiaría aquellas materias mas relacionadas con su actividad, sin perder nunca de vista el carácter interdisciplinar. A las ciencias humanísticas se les dedicaría una gran atención pero sin recurrir a especialistas en arte, filosofía o literatura. Probablemente desaparecerían así los problemas de adaptación de los estudiantes escolarizados obligatoriamente y que deben soportar unas clases que no les interesan en absoluto, se resolverían los problemas de disciplina en clase, y además, no tendría sentido la polémica sobre la aplicabilidad e interés social de las materias que se explican en las aulas.

A mi modo de ver el problema está en pensar que hay que adaptar el sistema educativo al cambio por medio de una modificación permanente, en lugar de pensar en un sistema estable que forme individuos flexibles y capaces de adaptarse a las condiciones cambiantes. La mejor manera de formar tales individuos es dotarlos de una base sólida y fomentar sus capacidades de entender y razonar. Puede parecer paradójico pero un sistema educativo que produce especialistas no es el mejor para una sociedad especializada y en continuo cambio, los especialistas de hoy son los desfasados de mañana.

Esa base debe ser común y estable, y no se limita a saber esto o aquello, no hay que confundir educación con acumulación de conocimientos, sino que debe contener una verdadera formación, y en esta formación, nosotros los matemáticos no podemos olvidarlo nunca, juegan un papel fundamental las matemáticas.

Por lo que se refiere al otro motor de las reformas, el fracaso escolar, las razones que dan del mismo los distintos estamentos de la comunidad educativa son completamente diferentes y sobre ellas hay mucha literatura. Sin embargo cabe preguntarse si ese fracaso existe realmente, Segovia en el libro ya citado, compara los datos de 1969 y 1994 y concluye que el rendimiento del sistema educativo (si bien reconoce que: *al menos cuantitativamente*) se ha elevado en grado muy notorio. Considera además que en caso de cumplirse sus previsiones (era 1994 y naturalmente se cumplieron) de que el ochenta por ciento de los estudiantes iban a superar la E.S.O., se habría dado *un importante paso en la rentabilidad social del sistema educativo, sin detrimento de la calidad* técnica (no parecen opinar lo mismo estudios objetivos en la línea de [LMP]).

En mi opinión existen pruebas empíricas de la existencia de una ley natural de conservación del fracaso escolar: *el fracaso escolar ni se crea ni se destruye, solo se cambia de lugar.* Así el fracaso ha llegado a la Universidad y en ella, gracias a la inestimable labor de algunos consejos sociales y juntas de gobierno que condicionan los complementos salariales al número de aprobados, desaparecerá para siempre. Así el problema del fracaso escolar dejara de ser un problema del sistema educativo, para convertirse en un problema general de la sociedad.

Como profesor universitario con cuarenta años de docencia en primer curso de diversas licenciaturas y eficaz contribuyente al fracaso universitario, puedo afirmar que ha habido un descenso objetivo en el nivel de formación de los estudiantes que llegan a la universidad, descenso que afecta a su capacidad de interpretar textos, a su dominio de la lengua hablada y escrita, a su manejo de la aritmética elemental y sobre todo a su habilidad para razonar. Eso a mi modo de ver es el autentico fracaso escolar. La escuela (en sentido amplio desde el jardín de infancia a la universidad) debe competir con una oferta de ocio cada vez mas atractiva, y para luchar contra esta competencia no cuenta ni con el apoyo de las familias, mas preocupadas por su descanso de fin semana y por sus vacaciones que por la formación de sus miembros mas jóvenes, ni el del gobierno al que interesan más jóvenes sensibles al eslogan que jóvenes críticos y con capacidad de razonar.

El problema se complica más por la situación del profesorado. Un buen profesor hace mas que cualquier plan de estudios, y ya que estas líneas van dedicadas a una buena profesora, querría citar dos ejemplos de la trascendencia de la labor de dos grandes profesores: Don Emiliano Bermejo en Arenas de San Pedro, pueblo pequeño de la provincia de Avila y Don Luis Arizón en Sanlucar de Barrameda, pueblo algo mayor de la provincia de Cádiz. Ambos fueron profesores de matemáticas en centros privados de enseñanza, en una época en que en esos dos pueblos no había centros públicos. Mientras duró su magisterio salieron de sus aulas numerosos alumnos que alcanzaron titulaciones superiores, y un numero inusual de ellos llegaron a la Cátedra universitaria. Cuando se retiraron, y este dato es perfectamente comprobable, el número de titulados superiores proveniente de esos pueblos cayó de modo espectacular. Vivimos una época en que los profesores están descorazonados, hay muchos buenos profesores que esperan ansiosos, e incluso precipitan, el momento de su jubilación y los procesos de selección de nuevos profesores, ahora en manos de los gobiernos autonómicos, no son ni homogéneos ni capaces de garantizar la selección de los más apropiados.

Pero no hay que ser pesimistas, la sociedad sigue estando convencida de que en el sistema educativo está el remedio de todos sus males, es raro el día que no aparece en la prensa alguna afirmación en el sentido de que la solución de un problema social de primera magnitud, el sexismo, el racismo, el tráfico, etc. pasa por la creación de una nueva asignatura (naturalmente con los puestos de profesor correspondientes a ser ocupados por los afines a las personas que hacen la propuesta).

Pero no es mi objetivo hablar solamente del sistema educativo en general, también querría decir algo de la enseñanza de las matemáticas, y esta es precisamente la razón del título de esta nota. En 1973, Morris Kline publicó un libro titulado *Why Johnny Can't Add: The Failure of the New Math* (magníficamente traducido al español por Santiago Garma [KL]), este libro no es el único ni el mejor de los ensayos que se han escrito sobre lo que se llamó en su momento *matemática moderna* (hay una buena selección de textos sobre la materia en [JH]), pero tuvo un peso considerable en las decisiones sobre modificaciones de los contenidos de matemáticas en la enseñanza elemental, media e incluso universitaria, en casi todos los países.

No quiero ocultar que estoy bastante de acuerdo con los críticos a la llamada matemática moderna, sobre todo cuando su enseñanza se llevada a extremo. Hace unos años (en 1995) visitando las islas flotantes del lago Titicaca, encontré en una de ellas una pequeña escuela en la cual un mural titulado Matemática moderna, con el subtítulo de Teoría de conjuntos, explicaba la estructura del retículo de subconjuntos de un conjunto. Los niños de la isla podían definir perfectamente: unión, intersección, complementario, e incluso el conjunto vacío, pero eran incapaces de sumar dos números de tres dígitos. Unos días después tuve ocasión de dar una conferencia en Lima a profesores de secundaria, en ella cité escandalizado el hecho y propuse un cierto retorno a la enseñanza tradicional. Naturalmente fui acusado por una parte de los asistentes de pretender mantener al Perú fuera de los caminos de la ciencia moderna, manteniendo una actitud común con la de todos los europeos interesados en frenar el progreso de la América latina para evitar la competencia comercial.

Sin embargo discrepo totalmente en el análisis que hacen tanto Kline como algunos otros autores de las razones, tanto de la implantación como del fracaso de la nueva matemática, y desde luego discrepo de lo que se ha hecho desde entonces en nuestro país, con los cambios curriculares y pedagógicos. Juanito no ha aprendido a sumar y ya no sabe tampoco ni leer ni escribir.

Comencemos por las razones de las reformas. El convencimiento de la necesidad de reformar no es fruto de los tiempos que vivimos, por ejemplo ya en 1847 Hoëné Wronski dedicaba su libro *Messianisme* [W] (tratado de matemáticas pese al título) a justificar la necesidad de:

<< ..... la reforma de las matemáticas, como prototipo de la reforma general de las ciencias y la filosofía, que se ha hecho urgente por los graves errores políticos, religiosos y filosóficos, que causan el peligroso desorden actual del mundo civilizado. >>

Frente a estas graves amenazas, las razones esgrimidas para reformas posteriores parecen bastante triviales. Y algunas lo son efectivamente, por ejemplo la afirmación de muchos autores (Kline entre ellos), de que la introducción de la matemática moderna en la enseñanza elemental se debe, entre otras causas, al temor de los países occidentales a quedarse atrasados científicamente respecto a una Rusia, que acababa de lanzar el primer satélite artificial. Si esto fuera cierto los planificadores occidentales se habrían fijado, para imitarlo, en el sistema ruso, y este no podía estar mas lejos de la matemática moderna.

Otra razón que creo mas acertada, es la crisis de fundamentos de la Matemática, crisis que se inició a finales del XIX, y que de la mano de los matemáticos profesionales alcanza la enseñanza elemental a mediados de los años cincuenta del pasado siglo. Aquí se sigue un camino bastante natural de formación de una ola, la crisis llega a la enseñanza universitaria, se insiste allí en la necesidad del rigor y en la importancia de las estructuras, y siguiendo las modas del momento se hace desaparecer la geometría en beneficio de las estructuras algebraicas y se sobrevalúa el análisis funcional, el estructuralismo domina completamente el campo de las matemáticas. Los nuevos profesores salidos de esas aulas desprecian mayoritariamente la matemática tradicional, y, como los nuevos conversos son los propagadores más eficientes de la doctrina, acaban llevando amplificada la nueva ola a la enseñanza elemental. El efecto multiplicador se desplaza además desde los países mas adelantados a los restantes y la ola alcanza las dimensiones de un maremoto en los países científicamente mas atrasados.

Pero aquí interviene otro factor más, en los años cincuenta hay una batalla sorda entre los científicos dedicados a la enseñanza y los pedagogos y sicólogos, y aunque la introducción de la matemática moderna se intenta presentar como un golpe de timón de los matemáticos profesionales, que termina en un fracaso, es realmente un golpe de timón de los expertos en pedagogía, que además y desde ese momento han pasado a controlar por completo la situación. Ahora estamos recogiendo, treinta años después, los frutos de su trabajo.

Es muy conocida la polémica que se produjo entre Sylvester y Huxley (célebre biólogo padre del no menos celebre escritor Aldous Huxley) cuando el segundo afirmó, en un ensayo titulado*: Una charla después de la cena,* que las matemáticas eran totalmente ajenas a los procesos inductivos y a la intuición, la respuesta razonada de Sylvester justificando, desde su punto de vista de investigador, que las matemáticas están muy lejos de ser meramente deductivas, estaba precedida de la poco caritativa afirmación de que Huxley había cometido un error muy natural, teniendo en cuenta que hablaba después de una cena y dada su conocida afición a la bebida, argumento este, como puede apreciarse, de naturaleza puramente filosófica. Los pedagogos aficionados a la matemática y sobre todo los que tienen mas influencia política parecen haber sido plenamente convencidos por los argumentos de Sylvester, las matemáticas, en la enseñanza actual son únicamente de carácter inductivo. La celebre ocurrencia de Diedonne: *¡Abajo Euclides!*, ha sido substituida por la nunca enunciada pero si aplicada *¡Abajo la demostración!*

El argumento básico en defensa de esta postura es que se puede razonar con cualquier materia, que una demostración no es mas que una cadena de silogismos y que las cadenas de silogismos que solo sirven, por ejemplo, para probar una propiedad de un triángulo, no despiertan interés en el alumno. En consecuencia es mejor suprimir las demostraciones ya que en otras materias se pueden usar igualmente silogismos. Una bonita simplificación que es más o menos equivalente a decir: el ajedrez y el juego de la oca son lo mismo, al fin y al cabo solo se trata de mover fichas en un tablero.

Resulta revelador leer los libros de enseñanza elemental y media de las diversas asignaturas. Como las matemáticas han dejado libre un nicho ecológico, las otras materias pugnan por ocuparlo, así la lengua se ha convertido en un sistema formal próximo a las denostadas matemáticas modernas, la geografía comienza ya con definiciones de montaña, valle, río e incluso de calle y plaza, parece que una materia no es seria si no se dota a si misma de un contexto formal. Esto no es nuevo, muchas generaciones de estudiantes de arquitectura encontraron una fuente de diversión en un libro de materiales que comenzaba con la definición de ladrillo (si mal no recuerdo: *Ente cerámico prismático de barro cocido susceptible de ser manejado con una sola mano*) supongo que ahora consideraran esa definición como fundamental e incluso aprenderán otras muchas igualmente necesarias, pero esa tendencia a identificar importancia con estructura formal se limitaba a algunas materias de escuelas especiales y hoy ha llegado a la escuela.

El defecto es siempre el mismo y se presenta también en la enseñanza de las matemáticas, no se utilizan ni los conocimientos ni la experiencia previa del alumno y se considera necesario crear un sistema formal que parte desde cero, así se sobrecarga al estudiante con definiciones incomprensibles y ridículas. Sería mas útil y provechoso para el aprender poesías o parlamentos teatrales.

Mientras tanto las matemáticas están renunciando a ser un sistema formal, se han convertido en un popurrí de formulas, datos históricos no todo lo correctos que podría desearse, y aplicaciones generalmente descabelladas y destinadas aparentemente a convencer al alumnado de que los matemáticos debemos estar mal de la cabeza. Todo ello avalado por estudios psicológicos que nos explican que los estudiantes no son capaces de comprender una demostración hasta los quince años.

No soy un experto en pedagogía y menos en psicología, pero me da la impresión de que se admiten como artículos de fe resultados de estudios que no están planteados con las garantías necesarias para que sus conclusiones sean aceptables. Recordemos que no hace mucho tiempo se publicaron trabajos que probaban que los blancos son más inteligentes que los negros o que los ricos son más inteligentes que los pobres. En un área igual de difusa que las ciencias de la educación, la sociología de la ciencia, se produjo hace unos años un fenómeno curioso. Alan Sokal (ver [SB]) publicó, en una de las revistas mas importantes del área, un trabajo que era una obra maestra de la parodia. El trabajo fue aceptado sin problema y tuvo que ser su autor el que denunciara su propia impostura. No sé si tendría cabida un fenómeno similar en ciencias de la educación, pero si se lee lo escrito sobre los padres de la sociología de la ciencia por Sokal y Bricmont, resulta fácil extrapolarlo a muchos pedagogos y psicólogos.

En la recopilación de J. Hernández [JH] hay varios textos que creo que merece la pena leer, ya que plantean lo que debió ser la reforma de la enseñanza de la matemáticas de los setenta y lamentablemente no fue, especialmente hay dos que recomiendo vivamente, uno de 1962 firmado por Lars Ahlfors y otros cincuenta matemáticos americanos y titulado: *Sobre el plan de matemáticas de enseñanza* *secundaria*, y otro de Bernard Malgrange contenido en una tribuna libre (1971) de la asociación de profesores de matemáticas de la escuela publica. Creo que ambos textos contienen lo que pensábamos entonces y pensamos ahora una gran cantidad de matemáticos.

Lamentablemente las cosas no van en esa dirección, la sensación general es que cada vez se enseñan menos cosas y peor, en resumen que cada reforma de la enseñanza ha llevado a una situación más desgraciadas que la de partida. La conclusión de estas premisas es obvia, si lo actual es peor que lo anterior, para qué ensayar una cosa nueva. Volvamos a lo anterior, que era mejor que lo presente, y así sucesivamente hasta el trivium y el cuadrivium.

Yo no me he remontado hasta tan lejos, hace unos años cayo en mis manos un texto del Ministerio de Instrucción pública y Bella Artes publicado en 1928 y titulado*: Institutos nacionales de segunda enseñanza. La reforma de 1926* [INS], que describe el llamado *plan del 26* y sienta un punto de partida que nos hace comprender la reforma de 1991 y nos prepara para las que seguirán a la de 2003.

En la exposición de motivos, que merece ser leída completa pero es excesivamente larga para reproducirla aquí, se hace como se ha hecho siempre y siempre se hará, una critica despiadada del plan anterior y se omite completamente una declaración de objetivos que se substituye por una nebulosa declaración de intenciones en la que se dice:

<< Mas el bachillerato, que por un lado es complemento de la instrucción primaria, y por otro forma la inteligencia para estudios superiores, no es una mera preparación para los estudios de Facultad, sino que en muchos casos tiene y debe tener substantividad propia para aquellos que no han de proseguir nuevos estudios; para los que se encaminan a Escuelas especiales: civiles, militares y navales; para las profesiones no universitarias; para muchos funcionarios del Estado; para gran número de las señoritas que asisten a los Institutos; para todos, en fin, los que deseen mejorar la cultura que en la primera enseñanza obtuvieron >>

Este plan reduce la duración del bachillerato elemental de seis años a tres y reduce a uno el número anterior de treinta exámenes necesarios para obtener el título. Así el bachillerato elemental, cuyo título se confiere en los Institutos, se comienza a los diez años, tras la aprobación de un examen de ingreso consistente en:

– Escritura al dictado de un pasaje del Quijote y análisis gramatical del mismo, dándose importancia a la ortografía (¿Cuántos alumnos pasarían este ejercicio hoy en día en el acceso a la Universidad?)

– Operaciones aritméticas de las cuatro reglas con números enteros.
– Breves nociones geográficas (sobre un mapa) e históricas de España.

Siguen tres años en los que se estudia Geografía e Historia, y Francés, hay dos cursos de Matemáticas (Aritmética y Geometría), un curso de Literatura, otro de Física y Química y otro de Ciencias naturales. Estas asignaturas, consideradas de naturaleza teórica y que tienen asignadas tres horas semanales cada una, se complementan con otras prácticas que se imparten por las tardes, de modo que en el primer año se dedican tres hora semanales a la lectura en prosa y verso y otras tres a ejercicios de caligrafía y ortografía, en el segundo tres horas por semana a dictados, con análisis gramatical y ortografía, tres a mecanografía y tres a dibujo, y en el tercero tres a redacción, tres a taquigrafía y tres a interpretación de mapas y planos.

Como puede observarse es un bachillerato con énfasis especial en las nuevas tecnologías (mecanografía, taquigrafía, cartografía) y en el idioma, el francés obligatorio de estos cursos se complementa con un segundo idioma en el bachillerato universitario. Adema se exige la dedicación diaria de al menos una hora a actividades deportivas.

El bachillerato universitario, cuyo título se confiere en las Universidades consta de otros tres cursos, el primero es común y cuenta con dos asignaturas de seis horas, el Latín y la Historia, y tres de tres horas, Geografía, Matemáticas (Algebra y Trigonometría) y Agricultura. Luego hay dos opciones para los dos años restantes, ambas tienen en común una asignatura de idioma en cada curso, en la de Letras se estudian dos cursos de Latín, uno de Literatura, otro de Lógica y otro de Etica, y en la de Ciencias hay dos cursos de Matemáticas, uno de Física, uno de Química, uno de Biología y uno de Geología. Todos ellos de seis horas semanales. Además en el año común se fijan seis hora semanales dedicadas a hacer resúmenes, notas de libros, notas de conferencias o ampliaciones de puntos concretos que los profesores consideren de interés y en cada uno de los tres años un máximo de doce horas semanales de trabajos prácticos y de laboratorio y al menos una hora diaria de actividades deportivas (eso sí, con separación de sexos).

Para comprender el espíritu de este plan nada mejor que citar algo de lo que opinaban los profesores que debían aplicarlo. En 1933, J. Rey Pastor y P. Puig Adam [RP] escribían:

<<*Mientras que un maestro de escuela debe considerarse completamente fracasado si sus alumnos salen a la vida sin los pertrechos indispensables que significan saber leer, escribir, y calcular correctamente; en cambio un bachillerato*

que no haya dejado en la memoria de los alumnos indeleblemente grabada para siempre ninguna declinación latina, ninguna fórmula de trigonometría, ninguna especie botánica, podrá ser, sin embargo, un bachillerato eficaz, si ha logrado despertar en el alumno la afición a la lectura de obras literarias, el hábito de razonamiento cuidadoso, el amor a la naturaleza y el sentido de la observación, porque a fin de cuentas, ese imponderable que se llama cultura general, no es sino aquello que queda en el espíritu después de haber olvidado todo lo aprendido en el periodo escolar.>>

Tras leer no solo el plan del 26 y las líneas anteriores, sino también los textos sobre educación de Giner de los Ríos o los artículos de Zulueta y saber de la tarea de la Institución Libre de Enseñanza y la Junta de Ampliación de Estudios, resulta difícil no caer en el: *Cualquier tiempo pasado fue mejor.*

Bibliografía

[DG] Díaz, C. y García, F. *Ensayo de pedagogía utópica*. Zero. Bilbao 1975

[INS] Ministerio de Instrucción pública y Bellas Artes. *Institutos de nacionales de segunda enseñanza. La reforma de 1926*. Espasa Calpe. Madrid 1928.

[JH] Hernández, J. (Ed.) *La enseñanza de las matemáticas modernas*. Alianza Ed. Madrid 1978.

[KL] Kline, M. *El fracaso de la Matemática moderna*. Siglo XXI. Madrid 1976.

[KU] Kuntzman, J. *¿Adónde va la Matemática?* Siglo XXI. Madrid 1969.

[LMP] Lapointe A., Mead N. Y Philips G. *A world of diferences*. Report 19-CAEP-01. Educational testing Service. Princeton N.J. 1988.

[LO] Lorenzo, J. de. *La matemática: de sus fundamentos y crisis*. Tecnos. Madrid 1998.

[M] Marx, K. *Crítica del programa de Gotha*. Ricardo Aguilera. Madrid 1968

[MSL] Monés, J. Solá, P. y Lazaro L. M. *Ferrer Guardia y la pedagogía libertaria*. Icaria. Barcelona 1977

[O] Ortega, T. (Ed.) *La enseñanza de las matemáticas en la E.S.O. y en el bachillerato*. I.C.E. Univ. De Valladolid. Valladolid 1995

[RP] Rey Pastor, J. y Puig Adam P. *Metodología y didactica de la Matemática Elemental*. Propiedad de los autores. Madrid 1933.

[SB] Sokal A. y Bicmont J. *Impostures intellectuelles*. Odile Jacob. París 1997

[SE] Segovia, J. *Investigación educativa y formación del profesorado*. Escuela española. Madrid 1997.

[W] Wronski, H. Messianisme. Firmin Didot Frères. París 1847.

Construcción, basada en la Lógica y el Álgebra Computacionales, de un Sistema Experto para diagnóstico de la Depresión

Luis M. Laita[a], Vanessa Serrano[a], Carlos Rodríguez Solano[b], Eugenio Roanes Lozano[c], Laura Laita[d]

[a] Depto. de Inteligencia Artificial, Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
laita@fi.upm.es

[b] Depto. de CC. de la Computación e I.A., E.S.I. Informática, Universidad de Alcalá

[c]Sección Deptal. de Algebra, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid
eroanes@mat.ucm.es

[d]Escuela de Enfermería, Universidad Complutense de Madrid

Abstract

We intuitively present the construction of the "knowledge base" and the "inference engine" of a simple expert system for depression diagnosis. The theoretical background is the relation between "to be a consequence" in Logic and the "ideal membership problem" in Algebra, what can be solved translating formulae into polynomials and calculating Gröbner bases of the ideals generated be these polynomials.

Resumen

Presentamos de forma intuitiva la construcción de la "Base de Conocimientos" y el "Motor de Inferencias" de un Sistema Experto no demasiado complejo, para diagnóstico de la depresión. El trasfondo teórico es la relación que existe entre "ser consecuencia de" en lógica y la de "ser elemento de un ideal" en Álgebra, algo que se resuelva traduciendo fórmulas lógicas a polinomios, y calculando Bases de Gröbner de los ideales generados por estos polinomios.

Dedicado a Maria Paz Bujanda, con todo afecto.

1 Introducción

La “base de conocimientos” de nuestro sistema está compuesto de:

i) fórmulas lógicas de la forma “*SI* ... *ENTONCES* ...”, tales como:

$$x[1] \wedge x[4] \wedge x[5] \wedge x[6] \Rightarrow y[1]$$

que contienen variables proposicionales o sus negaciones (cada variable, como $x[6]$, y su negación, denotada $\neg x[6]$ se denomina “un literal”). Estas fórmulas se denominan “reglas de producción”

ii) “hechos potenciales”, que son todos los literales que aparecen en la parte izquierda de las reglas de producción, juntamente con sus contrarias ($\neg x[6]$ es la contraria de $x[6]$ y viceversa). En nuestro sistema, los hechos potenciales serán las características que presentan o no los pacientes.

El “motor de inferencia” es el mecanismo o método que el sistema tiene para “inferir” automáticamente consecuencias de la información que posee.

2 Construcción de la Base de Conocimientos

Supongamos que, después de una consulta de la bibliografía existente, Internet y, sobre todo, con “expertos” en depresión, obtenemos que ésta queda descrita por unos factores predisponentes, otros precipitantes, un estereotipo del enfermo de depresión y por unas consecuencias y síntomas de la enfermedad.

Nuestro sistema va a utilizar muy pocos factores y síntomas: un sistema real y útil debería manejar una información mucho más detallada. Esta limitación se debe a que nuestra intención es explicar intuitivamente un método que puede usarse en ésta y otras enfermedades, más que proponer un estudio exhaustivo de la depresión. Nos limitaremos además aquí a la depresión en la niñez, aunque el sistema experto construido no se limita a este caso.

Supongamos que para la niñez, considerada como el intervalo hasta los 13 años, que denotamos mediante el literal $x[1]$, los “factores predisponentes” son:

- desequilibrio de neurotransmisores, $x[4]$
- inseguridad, $x[5]$
- debilidad física, $x[6]$
- carácter tímido, $x[7]$.

Reunimos estos cuatro factores y sus negaciones en dieciséis reglas de producción usando un diagrama de Karnaugh (Tabla 1). En la cabecera de las filas aparecen las cuatro posibles agrupaciones de $x[6]$ y $x[7]$ y sus negaciones (en forma de conjunciones, como $x[6] \wedge x[7]$ en la primera fila), y en la cabecera de las columnas aparecen las cuatro posibles agrupaciones de $x[4]$ y $x[5]$ (en forma de conjunciones, como $\neg x[4] \wedge \neg x[5]$ en la cuarta columna).

Niñez, $x[1]$				
	$x[4] \wedge x[5]$	$x[4] \wedge \neg x[5]$	$\neg x[4] \wedge x[5]$	$\neg x[4] \wedge \neg x[5]$
$x[6] \wedge x[7]$	Alto, $y[1]$	Alto, $y[1]$	Bajo, $y[3]$	Muy Bajo, $y[4]$
$x[6] \wedge \neg x[7]$	Alto, $y[1]$	Medio, $y[2]$	Bajo, $y[3]$	Muy Bajo, $y[4]$
$\neg x[6] \wedge x[7]$	Alto, $y[1]$	Medio, $y[2]$	Bajo, $y[3]$	Muy Bajo, $y[4]$
$\neg x[6] \wedge \neg x[7]$	Medio, $y[2]$	Bajo, $y[3]$	Muy bajo, $y[4]$	Muy bajo, $y[4]$

Tabla 1: Factores predisponentes en la niñez

La celda correspondiente a la primera fila y la primera columna dice "Alto, $y[1]$". Esto significa que el experto nos ha informado que SÍ se dan "$x[4]$ *Y* $x[5]$ *Y* $x[6]$ *Y* $x[7]$" (para un niño, esto es, "*SÍ* $x[1]$"), entonces podemos hacer un resumen de la "intensidad" o "influencia" de los factores predisponentes a la depresión en ese niño como de "Alto", esto es, $y[1]$ (de modo similar, $y[2]$ sería medio, $y[3]$ bajo e $y[4]$ muy bajo). Esto dará lugar a la regla de producción:

$$x[1] \wedge x[4] \wedge x[5] \wedge x[6] \wedge x[7] \Rightarrow y[1]$$

De modo análogo,

$$x[1] \wedge x[4] \wedge x[5] \wedge x[6] \wedge \neg x[7] \Rightarrow y[1]$$

luego, tras una sencilla simplificación (agrupamos las dos reglas anteriores), la primera regla para la niñez queda

Si *niñez y desequilibrio de neurotransmisores e inseguridad y debilidad física,* **entonces** *factor de intensidad_1* ***alto***

esto es,

Regla 1: $x[1] \wedge x[4] \wedge x[5] \wedge x[6] \Rightarrow y[1]$

Para llegara a este tipo de resultados el experto podría haber hecho las siguientes consideraciones (se ponen como ilustración y no se volverán a hacer consideraciones similares en lo que resta del artículo):

La depresión no es frecuente en los niños. Al envejecer se reducen en nuestro cerebro las concentraciones de serotonina y noradrenalina, lo que hace que sean más frecuentes los episodios depresivos en la madurez.

La mayoría de las investigaciones hechas en relación a las emociones en la adolescencia concluyen que, en este periodo, existe un aumento de la emotividad y la falta de moderación del pensamiento, dando a hechos triviales una trascendencia desmedida. Todo esto hace que las depresiones en la adolescencia igualen a las de la edad adulta en severidad y las sobrepasen en frecuencia.

La inseguridad y la timidez configuran un carácter neurótico, siendo estos caracteres los que más tienden a la depresión, así que tendrán bastante peso como factores predisponentes, sobre todo si se presentan juntas.

Se considera la presencia de desequilibrio en los neurotransmisores como un "factor fuerte", puesto que, desde el punto de vista psicobiológico, esta enfermedad se concibe como una consecuencia de la alteración en los neurotransmisores cerebrales.

En el caso de la depresión el estado de "debilidad", atonía muscular, y, en ocasiones, pronunciada ralentización, es fruto de la inactividad. Se presenta así más como una consecuencia de la enfermedad que como un factor predisponente, por lo que se ha considerado un factor "menor", es decir, que tendrá más influencia si se presenta acompañado de otros factores, pero por sí mismo su influencia será baja.

De forma parecida se opera con los "factores precipitantes", de los que hemos considerado solamente:

- fracaso personal, *x[8]*
- separaciones o muerte de un familiar, *x[9]*
- desastre (político, social, natural,…), *x[10]*
- maltrato (familia, trabajo), *x[11]*.

Estos factores se agrupan en el siguiente diagrama (Tabla 2). Habría un diagrama para cada intensidad "y" de factor predisponente, porque, aunque haya factores precipitantes, si no se dan factores predisponentes, difícilmente se presentará la enfermedad.

Alto, $y[1]$				
	$x[8] \wedge x[9]$	$x[8] \wedge \neg x[9]$	$\neg x[8] \wedge x[9]$	$\neg x[8] \wedge \neg x[9]$
$x[10] \wedge x[11]$	Alto, $z[1]$	Alto, $z[1]$	Alto, $z[1]$	Medio, $z[2]$
$x[10] \wedge \neg x[11]$	Alto, $z[1]$	Alto, $z[1]$	Alto, $z[1]$	Medio, $z[2]$
$\neg x[10] \wedge x[11]$	Alto, $z[1]$	Alto, $z[1]$	Alto, $z[1]$	Medio, $z[2]$
$\neg x[10] \wedge \neg x[11]$	Alto, $z[1]$	Alto, $z[1]$	Alto, $z[1]$	Bajo, $z[4]$

Tabla 2: Factores precipitantes para factor predisponente alto ($y[1]$)

El diagrama da lugar a reglas de producción, de las que sólo enunciamos la primera

Si** factor de intensidad_1 alto y fracaso personal y pérdida familiar, y desastre **entonces** factor de intensidad_2 **alto

esto es,

$$\textit{Regla 31:}\ \ y[1] \wedge x[8] \wedge x[9] \wedge x[10] \ \Rightarrow\ z[1]$$

En cuanto a Síntomas y consecuencias sólo hemos considerado los siguientes:

- tristeza habitual, $x[16]$
- irritabilidad y hostilidad, $x[17]$
- temor (presente o futuro), $x[18]$
- falta de atención, $x[19]$
- anhedonia, $x[20]$
- alteración del sueño, $x[21]$
- aislamiento social, $x[22]$
- faltar al trabajo o a clase, $x[23]$.

Los cuatro primeros se reúnen dando lugar a una “influencia” parcial, que hemos llamado “guarda *b*”. Resultan así reglas de producción como:

Si** tristeza habitual y anhedonia, **entonces** valor de guarda_1 **alto.

esto es,

$$\text{Regla 87:}\ \ x[16] \wedge x[20] \ \Rightarrow\ b[1]$$

Los otros cuatro dan lugar a otra “guarda” (“guarda *c*”). Las “guardas” “*b*” y las “*c*” se reúnen en “superguardas “*s*”.

Por su parte, las variables proposicionales “*w*” van a representar diferentes influencias del estereotipo que presenta el paciente sobre el diagnóstico.

Las “*z*”, “*w*” y “*s*” se resumen en la Tabla 3, dando lugar a un diagnóstico denotado por el literal *k*. Por ejemplo:

> ***Si*** *valor de superguarda s alto y factor de intensidad de los factores precipitantes alto y factor de intensidad de los estereotipos medio,* **entonces** *diagnóstico* ***grave***

esto es,

Regla 127: $s[1] \wedge z[1] \wedge w[2] \Rightarrow k[1]$

		s[1]	*s[2]*	*s[3]*	*s[4]*
z[1]	*w[1]*	Grave, *k[1]*	Grave, *k[1]*	Grave, *k[1]*	Moderado, *k[2]*
	w[2]	Grave, *k[1]*	Grave, *k[1]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*
	w[3]	Grave, *k[1]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*
	w[4]	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*
z[2]	*w[1]*	Grave, *k[1]*	Grave, *k[1]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*
	w[2]	Grave, *k[1]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*
	w[3]	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*
	w[4]	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Leve, *k[3]*
z[3]	*w[1]*	Grave, *k[1]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*
	w[2]	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*
	w[3]	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Leve, *k[3]*
	w[4]	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Leve, *k[3]*	Leve, *k[3]*
z[4]	*w[1]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*
	w[2]	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Leve, *k[3]*
	w[3]	Moderado, *k[2]*	Moderado, *k[2]*	Leve, *k[3]*	Leve, *k[3]*
	w[4]	Moderado, *k[2]*	Leve, *k[3]*	Leve, *k[3]*	Leve, *k[3]*

Tabla 3: Diagnóstico

3 Resultado teórico

Toda la información que **automáticamente** podemos obtener de nuestra base de conocimientos se basa en la implementación en el lenguaje CoCoA[1] del siguiente resultado, que enunciamos intuitivamente.

<u>Teorema:</u> *Una fórmula B (aquí B es el nivel de gravedad de la depresión) es consecuencia (tautológica) de la información contenida en la base de conocimientos si y sólo si el polinomio que traduce la negación de B en el anillo A =* $Z_2[x[1],...,x[23],...,k[1],...,k[3]]$*, donde las variables de A son todas las que aparecen en las reglas del sistema experto, pertenece al ideal I+J+K, donde J es el ideal generado por los polinomios que traducen las negaciones de las reglas de producción, K es el ideal generado por los polinomios que traducen las negaciones de los hechos potenciales que caracterizan a un paciente e I es el ideal generado por los cuadrados de las variables menos ellas mismas (esto es, como el polinomio* $x[1]^2–x[1]$*). Escribimos el resultado así*

$$(\text{Sistema Experto} \vdash B) \Leftrightarrow (Pol(NEG(B)) \in I+J+K).$$

Pero, según un resultado bien conocido

$$(Pol(NEG(B)) \in I+J+K) \Leftrightarrow NF(NEG(B),I+J+K)=0$$

donde *"NF"* es la forma normal del polinomio. Por tanto, podemos comprobar si una fórmula *B* es consecuencia (tautológica) de la información contenida en la base de conocimientos calculando su forma normal módulo una suma de ideales.

4 Implementación en el lenguaje CoCoA

Primero se declaran el anillo *A* sobre el cuerpo base Z_2 (los coeficientes de nuestros polinomios son *0* y *1*, que asociamos a los valores de la lógica bivalente) y el ideal *I*:

```
A::=Z/(2)[x[1..23],y[1..4],z[1..4],w[1..4],b[1..4],
          p[1..4],s[1..4],k[1..3]];
USE A;
I:=Ideal(x[1]^2-x[1],……,k[3]^2-k[3]);
```

[1] CoCoA, un sistema para realizar cálculos en Álgebra Conmutativa (**Co**mputations in **Co**nmutative **A**lgebra). Autores: A. Capani, G. Niesi, L. Robbiano. Disponible por http en: cocoa.dima.unige.it

(notemos que en las líneas de código anteriores, "`..`" es la notación de CoCoA para representar "hasta", mientras que con "......" representamos que no explicitamos todas las variables para ahorrar espacio).

El efecto de introducir *I* es el de reducir todos los exponentes mayores que *1* a *1* (de hecho trabajamos en el anillo cociente *A/I*).

Las siguientes instrucciones traducen fórmulas lógicas a polinomios, por ejemplo $M \vee N$ se traduce a $M+N+M \cdot N$.

```
NEG(M):=NF(1+M,I);
O(M,N):=NF(M+N+M*N,I);
AND1(M,N):=NF(M*N,I);
IMP(M,N):=NF(1+M+M*N,I);
```

Las reglas de producción se transcriben en notación prefija, por ejemplo las cuatro que aparecen en el texto se escriben así:

```
R1:=NF(IMP(AND1(AND1(AND1(x[1],x[4]),x[5]),x[6]),y[1])
       ,I);
R31:=NF(IMP(AND1(AND1(AND1(y[1],x[8]),x[9]),x[10]),
        z[1]),I);
R87:=NF(IMP(AND1(x[16],x[20]),b[1]),I);
R127:=NF(IMP(AND1(AND1(s[1],z[1]),w[2]),k[1]),I);
```

El ideal generado por los polinomios que traducen las negaciones "*NEG*" de las reglas lo hemos denotado por "*J*" en el resultado fundamental:

```
J:=Ideal(NEG(R1),NEG(R2),......, NEG(R189));
```

Los hechos potenciales son las "*x*" y sus negaciones (denotadas por "*xN*"), con la excepción de las tres primeras (edad), que no se niegan.

```
H1:=x[1];
H2:=x[2];
H3:=x[3];
H4:=x[4];                H4N:=NEG(x[4]);
     ......                   ......
H23:=x[23];              H23N:=NEG(x[23]);
```

Cada paciente viene caracterizado por un conjunto de hechos consistente (esto es, no podemos tomar a la vez un hecho y su negación). En nuestro caso será: una edad más un hecho de todos y cada uno de los pares de hechos restantes. Los polinomios que traducen las negaciones "*NEG*" (no confundir con el hecho negado xN) de los hechos potenciales que caracterizan a un paciente, generan el ideal denotado por "*K*" en el resultado fundamental. Otro paciente daría lugar a otro ideal; en nuestro ejemplo vamos a denotar a los ideales correspondientes a tres pacientes por *L1*, *L2* y *L3*.

```
L1:=Ideal(NEG(H2),NEG(H4N),NEG(H5N),NEG(H6N),NEG(H7N),
          NEG(H8N),NEG(H9N),NEG(H10N),NEG(H11N),
          NEG(H12N),NEG(H13N),NEG(H14N),NEG(H15N),
          NEG(H16N),NEG(H17N),NEG(H18N),NEG(H19N),
          NEG(H20N),NEG(H21N),NEG(H22N),NEG(H23N));
```

Nótese que el paciente caracterizado por el ideal *L1* tiene negados todos los factores y síntomas que sugieren la existencia de la enfermedad (por ejemplo *H9N*), y recordemos que *NEG* se escribe porque el teorema básico lo requiere. Esto nos sugiere que la gravedad en este paciente va a ser leve o inexistente, como así lo comprobará CoCoA

```
L2:=Ideal(NEG(H2),NEG(H4),NEG(H5),NEG(H6),NEG(H7),
          NEG(H8),NEG(H9),NEG(H10),NEG(H11),NEG(H12),
          NEG(H13),NEG(H14),NEG(H15),NEG(H16),
          NEG(H17),NEG(H18),NEG(H19),NEG(H20),
          NEG(H21),NEG(H22),NEG(H23));
```

El paciente caracterizado por el ideal *L2* tiene todos los factores y síntomas (por ejemplo *H9*). Esto nos sugiere que la gravedad en este paciente va a ser máxima, como así lo comprobará CoCoA

```
L3:=Ideal(NEG(H2),NEG(H4),NEG(H5),NEG(H6N),NEG(H7),
          NEG(H8),NEG(H9),NEG(H10),NEG(H11),NEG(H12N),
          NEG(H13N),NEG(H14),NEG(H15N),NEG(H16N),
          NEG(H17N),NEG(H18N),NEG(H19N),NEG(H20),
          NEG(H21),NEG(H22N),NEG(H23N));
```

El paciente caracterizado por el ideal *L3* tiene algunos factores y síntomas. Esto nos sugiere que la gravedad en este paciente va a ser probablemente moderada, como así lo comprobará CoCoA (este caso puede variar más que *L1* y *L2*, que trivialmente dan gravedad nula y máxima respectivamente).

Como se dijo más arriba,

$$(Sistema\ Experto \vdash B) \Leftrightarrow NF(NEG(B),I+J+K)=0$$

Comprobemos que ocurre con estos tres pacientes:

```
NF(NEG(k[1]),I+J+L1);
NF(NEG(k[2]),I+J+L1);
NF(NEG(k[3]),I+J+L1);
-------------------------------
k[1] + 1
-------------------------------
k[2] + 1
-------------------------------
0
-------------------------------
```

(luego para el primer paciente resulta: depresión leve o inexistente)

```
NF(NEG(k[1]),I+J+L2);
NF(NEG(k[2]),I+J+L2);
NF(NEG(k[3]),I+J+L2);
-------------------------------
0
-------------------------------
k[2] + 1
-------------------------------
k[3] + 1
-------------------------------
```

(luego para el segundo paciente resulta: depresión grave)

```
NF(NEG(k[1]),I+J+L3);
NF(NEG(k[2]),I+J+L3);
NF(NEG(k[3]),I+J+L3)
-------------------------------
```

```
k[1] + 1
-------------------------------
0
-------------------------------
k[3] + 1
-------------------------------
```

(luego para el tercer paciente resulta: depresión moderada).

Conclusiones

Los sistemas de cómputo algebraico permiten realizar cálculos efectivos con ideales polinomiales. Como existen modelos polinomiales para la lógica booleana y modal multivalente, se pueden realizar cálculos efectivos en estas lógicas con el sistema de cómputo algebraico elegido, y, por ende, en sistemas expertos basados en estas lógicas. Se ha aplicado, en el caso particular de este artículo, al diagnóstico de la depresión.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por el proyecto de investigación PR3/04-12410 (Universidad Complutense de Madrid, Spain).

Bibliografía

Un artículo clásico de aplicación de sistemas expertos a la Medicina es:

B. Buchanan, E.H. Shortliffe (editores), *Rule Based Expert Systems: the MYCIN Experiments of the Stanford Heuristic Programming Project* (Addison Wesley, New York, 1984).

Un libro excelente que trata las bases de Gröbner es:

W.W. Adams, P. Loustaunau, *An Introduction to Gröbner Bases (Graduate Studies in Mathematics*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994).

Información sobre CoCoA puede encontrarse en:

http://cocoa.dima.unige.it

A. Capani, G. Niesi, *CoCoA User's Manual v. 3.0b* (Dept. of Mathematics - University of Genova, Genova, 1996).

D. Perkinson, *CoCoA 4.2 Online Help* (fichero que acompaña a la v.4.2) (2003).

Los antecedentes del teorema en el que se basa el trabajo son:

J. Hsiang, Refutational Theorem Proving using Term-Rewriting Systems, *Art. Intell.* 25 (1985) 255-300.

D. Kapur, P. Narendran, An Equational Approach to Theorem Proving in First-Order Predicate Calculus , *Proceedings of IJCAI-85* (1985) 1446-1156.

J. Chazarain, A. Riscos, J.A. Alonso, E. Briales, Multivalued Logic and Gröbner Bases with Applications to Modal Logic, *J. Symb. Comp.* 11 (1991) 181-194.

y se puede encontrar en:

E. Roanes-Lozano, L.M. Laita, E. Roanes-Macías, A Polynomial Model for Multivalued Logics with a Touch of Algebraic Geometry and Computer Algebra, *Math. Comp. Simul.* 45/1 (1998) 83-99.

L.M. Laita, E. Roanes-Lozano, L. de Ledesma, J. A. Alonso, A Computer Algebra Approach to Verification and Deduction in Many-Valued Knowledge Systems, *Soft Comp.* 3/1 (1999) 7-19.

siendo una introducción al modelo polinomial de la lógica:

E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macías, Luis M. Laita, Cálculos efectivos en lógica proposicional booleana interpretada como un anillo de clases residuales (polinomial) sobre $\boldsymbol{Z}_2$, *Bol. Soc. "Puig Adam".* 65 (2003) 17-42.

Algunas aplicaciones del mismo aparecen en:

L.M. Laita, E. Roanes-Lozano, V. Maojo, L. de Ledesma, L. Laita, An Expert System for Managing Medical Appropriateness Criteria Based on Computer Algebra Techniques, *Comp. Math. Appl.* 42/12 (2001) 1505-1522.

E. Roanes-Lozano, E. Roanes-Macías, Luis M. Laita, A Computer Algebra Approach to the Design of Routes and the Study of their Compatibility in a Railway Interlocking, *Math. Comp. Simul.* 58 (2002) 203-214.

Sitios WEB sobre depresión:

NIMH (Nacional Institute of Mental Health)

`http://www.nimh.nih.gov/publicat/spDep3561.cfm`

Página web de la Dra. Celia Antonini, psicóloga clínica
`http://www.respuestasaladepresion.com/queesladepresion/queesladepresion.php`

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 69 (Febrero 2005)

Una desigualdad en los triángulos rectángulos

Juan-Bosco Romero Márquez
Departamento de Álgebra, Geometría y Topología
Universidad de Valladolid

Abstract

In this paper we present a refinement of the Elementary Inequality of Arslanagic-Milosevic for the right triangles.

A Mari Paz Bujanda, con todo afecto

Introducción

En esta nota presentamos un refinamiento de la desigualdad de Arslanagic-Milosevic, en la que se relaciona algunos elementos geométricos como los lados y la altura de un triángulo rectángulo, como aparece en su artículo [1], y, que es profundizado en el libro [1]. La mejora de la desigualdad antes citada consiste en sustituir en la misma la altura de la hipotenusa, h_a, por su bisectriz, v_a. La demostración del resultado que proponemos consiste en hallar los extremos de una función de variable real y con valores reales continua e infinitamente diferenciable y, que se construye al efecto a partir de la desigualdad a demostrar.

Los conocimientos básicos para demostrar nuestro resultado son los básicos de un curso de matemáticas generales, e incluso se puede hacer como un buen ejercicio de innovación e investigación educativa, en el aula, tomando la creatividad de este resultado como uno de los valores esenciales que tiene la metodología y la didáctica, en el Bachillerato.

Los orígenes de este trabajo se basan en la desigualdad de Emmerich y la generalización de Sandor [2].

Sea ABC un triángulo rectángulo de catetos c =AB, b =AC y , a =BC como hipotenusa, r , R, $v_a, h_{a,}$, son el radio del círculo inscrito y circunscrito, la bisectriz y altura trazadas sobre la hipotenusa, respectivamente. Desigualdad de Emmerich :

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{2}+1. \Leftrightarrow b+c \leq a\sqrt{2}\ ,$$

y, la igualdad se verifica si y sólo si b = c. Existen numerosas demostraciones geométricas, algebraicas y sin palabras de ambas desigualdades. En [2], p.p. 19-22, se generalizan ambas para todo tipo de triángulos.

En [2], que seguiremos en todo lo que sigue y en particular, en su sección 6, p. p. 23-24 se estudian con todo detalle y por medio de procedimientos elementales la desigualdad de Arslanagic-Milosevic, y otros tópicos relacionados con ella.

Teorema 1 (Desigualdad de Arslanagic-Milosevic)

Sea ABC un triángulo rectángulo con catetos b, c, y, con hipotenusa a. Entonces se verifica:

$$h_a \leq b+c-(\sqrt{2}-\frac{1}{2})a \qquad (1)$$

donde h_a, *es la altura asociada a la hipotenusa, y se verifica la igualdad si y sólo si b = c.*

Observación. Como en todo triángulo rectángulo tenemos que, $h_a = \dfrac{bc}{a}$, (1)

se escribe al sustituir y operar como sigue a la siguiente desigualdad equivalente

$$bc \leq (b+c)a-\sqrt{2}a^2+\frac{b^2+c^2}{2} \quad o, \quad b+c \geq a\sqrt{2}-\frac{(b-c)^2}{2a}. \qquad (2)$$

Esta desigualdad es interesante, ya que es complementaria de la desigualdad $b+c \leq a\sqrt{2}$, que se obtiene como una consecuencia inmediata de la identidad

$$a^2 = \left(\frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{b-c}{\sqrt{2}}\right)^2 \qquad (3)$$

De (3), obtenemos que, $b+c \le a\sqrt{2}$, con la igualdad solo si b = c.

Problema 1. Dado el triángulo ABC rectángulo e A, se verifica que :

$$b+c \ge a\sqrt{2} - \frac{(b-c)^2}{a(\sqrt{2+1})} \ . \qquad (4)$$

En [2], p.p. 23-24 se prueba que (4) es refinamiento de la desigualdad (2).

1. Resultados

En esta sección vamos a proponer y, diferentes caracterizaciones equivalentes de tipo métrico entre los distintos elementos geométricos de los triángulos rectángulos de una parte. Y, de otra vamos a demostrar un refinamiento mejora de la cota de la desigualdad (1).

1.1. Algunas caracterizaciones equivalentes de los triángulos rectángulos.

Sea ABC un triángulo rectángulo en el vértice, A, cuyos catetos e hipotenusa y semiperímetro, (2p=a+b+c, perímetro) los denotamos por b, c a, y, p, respectivamente. Designamos por r, R , los radios de círculo inscrito y circunscrito , respectivamente;y por h_a, v_a, m_a, la altura, bisectriz y mediana de la hipotenusa, respectivamente. Y, por último, a = m + n, donde m y n son las proyecciones ortogonales de b y , sobre la hipotenusa.

A título de ejercicio proponemos para demostrar algunas de las muchas caracterizaciones equivalentes de carácter elemental entre algunos de los elementos geométricos de los triángulos rectángulos. A saber:

Problema 2. En todo triángulo ABC, cualquiera de las proposiciones que siguen son equivalentes:

A = 90,

B + C = 90 ,

$b^2 = am$, *o,* $c^2 = an$, *(Teorema de los catetos),*

$a^2 = b^2 + c^2$, *(Teorema de Pitágoras),*

$h_a^2 = mn,$ *(Teorema de la altura),*

$ah_a = bc,$

$m_a = R = \frac{a}{2},$

2 r = b + c- a,

$v_a = \frac{\sqrt{2}}{b+c} bc,$

$a(h_a - 2r)) = 2r^2.$

p(p-a)= (p-b)(p-c). (5)

De todas las relaciones anteriores, que van desde 3) a 11), por ejemplo, se pueden investigar resultados que son ciertos en forma de desigualdad, en un sentido u en otro que permite caracterizar a los triángulos obtusángulos y acutángulos, respectivamente.

Teorema 2. *Sea ABC un triángulo rectángulo en el vértice A, con catetos b, y c, e hipotenusa a. Entonces se verifica la siguiente desigualdad:*

$$v_a \leq b + c - (\sqrt{2} - \frac{1}{2})a, \qquad (6)$$

donde, v_a, *es la bisectriz asociada a la hipotenusa, y con la igualdad alcanzada sí y sólo sí,* $b = c$.

Demostración. Vamos a demostrar la desigualdad (6). Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$, es el ángulo opuesto al cateto b, del triángulo rectángulo, tenemos que,

$$b = a \, Sen \, x, \quad y, \quad c = a \, Cos \, x \qquad (7)$$

La desigualdad (2) es obviamente equivalente algebraicamente a cada una de las siguientes desigualdades que se obtienen a partir de ella al tener en cuenta la expresión 9ª de (5), operando adecuadamente :

$$0 \leq b + c - (\sqrt{2} - \frac{1}{2})a - v_a; \quad 0 \leq b + c - (\sqrt{2} - \frac{1}{2})a - \frac{\sqrt{2}}{b+c}bc;$$

$$0 \leq (b+c)^2 - (\sqrt{2} - \frac{1}{2})a(b+c) - \sqrt{2}bc, \tag{8}$$

Sustituyendo en (8), b y c, dadas por (7), después de simplificar por a^2, y operar, (8) es equivalente a la siguiente desigualdad:

$$0 \leq (1 + Sen2x) - (\sqrt{2} - \frac{1}{2})(Senx + Cosx) - \frac{\sqrt{2}}{2}Sen2x, \qquad 0<x<\frac{\pi}{2}, \tag{9}$$

Desde (9), construimos la función f de la variable real x, con valores reales, que es continua e infinitamente diferenciable en el intervalo en que varía x, en el que vamos a estudiar sus extremos –máximos y mínimos–,que evaluaremos, utilizando para ello, la derivada primera f´, y la derivada segunda, f''. Tenemos así, después de derivar y simplificar adecuadamente, las siguientes expresiones para f, f´ y f'', respectivamente :

$$f(x) = (1 + Sen2x) - (\sqrt{2} - \frac{1}{2})(Senx + Cosx) - \frac{\sqrt{2}}{2}Sen2x;$$

$$f'(x) = (2 - \sqrt{2})Cos2x - (\sqrt{2} - \frac{1}{2})(Cosx - Senx) =$$

$$= (Cosx - Senx)\left[(2 - \sqrt{2})(Cosx + Senx) - (\sqrt{2} - \frac{1}{2})\right] \tag{10}$$

$$f''(x) = -4Sen2x - (\sqrt{2} - \frac{1}{2})(-Senx - Cosx) + 2\sqrt{2}Sen2x,$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Además, tenemos que :

$$f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2} - \sqrt{2} > 0.$$

Ahora bien, imponiendo la condición necesaria de extremo, f´(x)=0, y, después de operar, resolver y discutir las soluciones posibles se llega a la solución única,

$x=\dfrac{\pi}{4}$. La condición suficiente de extremo a través de la derivada segunda en el punto $x=\dfrac{\pi}{4}$, nos da que, $f''(\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-2>0$, alcanza f su mínimo local, que es, $\mathrm{f}(\dfrac{\pi}{4})=f_{\min}=(1+1)-(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2})\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0$. De todo lo anterior, concluimos que:

$$f_{\max}=f(0)=f(\frac{\pi}{2})\geq f(x)\geq f(\frac{\pi}{4})=f_{\min}=0. \text{ (absoluto)} \qquad (11)$$

Si ahora, a la expresión de f(x) la multiplicamos por a^2, obtenemos después de operar y simplificar, el teorema 2.

<u>Observación.</u> Como en un triángulo rectángulo, ABC de altura h_a, y bisectriz v_a, se tiene que $h_a \leq v_a$, (que es equivalente a la desigualdad $b+c\leq a\sqrt{2}$) ,el teorema 2, obtenemos como caso particular o corolario el teorema 1.

<u>Problema 3</u>. Sea ABC un triángulo rectángulo en A, de lados $a>b\geq c$. Y, si denotamos por h_a, v_a, m_a, son la altura, bisectriz y mediana de la hipotenusa, respectivamente, se tiene que :

$$v_a \leq b+c-(\sqrt{2}-\frac{1}{2})a \leq m_a,$$

con la igualdad alcanzada en ambos miembro sí y sólo sí b = c.

Conclusiones

Hemos visto en este trabajo que podemos establecer desigualdades métricas nuevas entre ciertos elementos geométricos de los triángulos rectángulos que mejoran o refinan otras desigualdades ya probadas en las que intervienen parte de esos elementos geométricos.

Podemos plantearnos a título de ejercicio de investigación elemental en el aula, en buscar otras demostraciones alternativas de las desigualdades antes citadas, tanto desde el punto de vista geométrico como algebraico. Esto, puede ser una experiencia de innovación e investigación en creativa e interesante, en el aula, desde el punto de vista metodológico y didáctico.

Bibliografía

[1] Arslanagic, S. and Milosevic, D, *Two inequalities for any right triangle, Octogon Mathematical magazine, vol. 9, no.1, 2001, 402-406.*

[2] Sandor, J, *Geometric Theorems, Diophantine equations, and arithmetic functions, American Research Press, Rehoboth, 2002.*

[3] Mitrinovic, D.S, Pecaric, J.E and Volonec, V, *Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1989.*

"Pokémon": Una propuesta tecnológica para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Benjamín García Gigante
Facultad de Formación de Profesorado y Educación
Universidad Autónoma de Madrid
benjamin.garcia@uam.es s

Abstract

This paper is part of a Research Project (DEA) carried out in the Department of Didactics of the Universidad Autónoma de Madrid. We analyse the use of video games in the teaching and learning of Mathematics and, particularly, "Pokémon" in its silver versión.

Dedicado a Mari Paz Bujanda. Con toda mi gratitud a una admirable profesora, y mi cariño a una amiga infatigable.

Introducción

Hace ya algunos años (más de los que yo quisiera), que siendo alumno de Mari Paz en la Facultad de Matemáticas, comencé a interesarme por el juego como vehículo para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un librito de Lucas que Mari Paz me proporcionó, y muchas horas en su despacho "tuvieron la culpa". El interés comenzó como afición y luego pasó a ser parte de mi profesión. Así tuve el inmenso placer de trabajar con Mari Paz en este terreno: los cursos a maestros, la Propuesta Curricular para la ESO…

Posteriormente, el avance de la tecnología derivó mi atención hacia otro tipo de juegos: los videojuegos. De esta forma en septiembre de este año hemos elaborado un Proyecto de Investigación con el mismo nombre que este artículo, y en el que analizamos hasta qué punto, la utilización de un videojuego puede favorecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este artículo es un breve resumen de dicho Proyecto de Investigación (DEA), que puede encontrarse en su totalidad en la dirección `http://www.uam.es/departamentos/stamaria/investigación/pokemon`.

En cualquier caso, Mari Paz, las cosas son algo menos divertidas sin ti. Y siento en el alma no poder volver a oir aquello de “el joven profesor”.

1. A modo de resumen

En el Proyecto de Investigación al que hemos hecho referencia:

Comenzamos estableciendo cómo el avance imparable de la cultura informática predominante en nuestros días se ha establecido a través de una estética de la simulación, con la que gran parte de la sociedad “puede hacer cosas con el ordenador”, y que ha propiciado otras formas “informales” de conocimiento, de postmodernismo, en el que el juego, la intuición, “el dominio de lo blando”, “el bricolaje” son nuevas formas de actuación, que permiten “aprender a aprender”. Así mismo, se analizan las relaciones tecnológicas que esta cultura de la simulación ha promovido, y el cambio sustancial que se ha producido en lo que a la transmisión de conocimientos y modos de aprendizaje se refiere.

A continuación analizamos los videojuegos como parte de esta cultura tecnológica, y ponemos de manifiesto la vocación de los videojuegos como herramienta de aprendizaje. Para ello, ponemos de relieve hasta que punto se ha “satanizado” a los videojuegos, analizamos la simulación desde un punto de vista educativo, detallamos los motivos por los que los videojuegos deben utilizarse en el ámbito educativo, y señalamos cómo gran parte de las bondades educativas de los videojuegos se pierden cuando éstos se limitan, precisamente, a videojuegos educativos.

Finalmente, examinamos un ejemplo concreto válido para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: “Pokémon” en su versión plata. Parte de este último punto, es el que abordamos en el presente artículo.

2. Elección de un videojuego

En el ámbito de la educación matemática (y sobre todo en ella), existen muchos videojuegos que pueden utilizarse para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, y aunque la mayoría de ellos no son videojuegos etiquetados como educativos, sería difícil que algún videojugador los catalogara como "excelentes juegos" desde el punto de vista lúdico (`http://www.meristation.com`), por lo que comparten gran parte de las carencias mencionadas en el capítulo anterior para el caso de los videojuegos educativos. Es el caso, por ejemplo, de los videojuegos "La Pantera Rosa en misión peligrosa" o "Carmen Sandiego": no son videojuegos educativos etiquetados como tales, pero lo son en cuanto a su objetivo final. Basta recordar que el primero de ellos es de Anaya (Interactiva), y el segundo de Broderbund (en `http://www.broderbund.com` se describen como "Shop online for educational software programs").

Existen sin embargo otros videojuegos en los que prima la componente lúdica, pero que son muy adecuados para utilizar como recurso didáctico en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Es el caso, por ejemplo, de "PC Fútbol", analizado por el Grup F9. Pero a nuestro juicio, este tipo de juegos carece de algo fundamental: es perfectamente posible jugar infinidad de veces con ellos, y no desarrollar actividad matemática alguna, ni realizar aprendizaje alguno en matemáticas.

Por eso hemos elegido un "top venta" desde el punto de vista lúdico, pero del que el videojugador no puede escapar sin haber realizado algún tipo relevante de aprendizaje o actividad matemática: "Pokémon". Y es que este videojuego ha sido (y es) uno de los más populares entre los chicos de entre 6 y 12 años de todo el mundo y proporciona un "manantial" de situaciones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria, en especial la versión "plata" del videojuego que es la que se analiza en el mencionado Proyecto.

Por otro lado, el mencionado videojuego está diseñado para ser utilizado con el soporte más popular (debido a su portabilidad) entre los chicos de entre 6 y 12 años: la Game Boy, pero a la vez, podemos llevarlo al aula como videojuego de ordenador, ya que dada su popularidad se han desarrollado emuladores para ello.

Finalmente, es pertinente su utilización en el aula ya que el conocimiento matemático no es exclusivo del ámbito escolar, y para muchos grupos culturales ni siquiera es el más decisivo, de hecho, uno de los grandes errores de la Educación Matemática en la actualidad, es ignorar en el aula todo (o casi todo) conocimiento matemático ajeno a ella en vez de tomar dicho conocimiento como un punto de partida y como un complemento al conocimiento matemático.

Así pues nos encontramos ante un videojuego "puramente lúdico", jugado (de forma extraescolar) por gran parte de los alumnos de Educación Primaria y especialmente adecuado para su introducción en el aula para favorecer la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas… ¿Es posible?

3. Descripción del videojuego

El videojuego "Pokémon" (versión plata), está catalogado como un RPG (Rol Play Game), aunque contiene una gran dosis de aventura. En él, tomamos el control de un niño de 11 años que vive en un mundo donde predominan unas criaturas con poderes sobrenaturales: los Pokémon. El objetivo del juego es conseguir capturar a estas criaturas para llegar a ser el mejor entrenador del mundo Pokémon. Se puede encontrar un funcionamiento detallado del juego en el Anexo III del Proyecto, en donde se ha incorporado la guía del juego que la revista "Nintendo Acción" dedicó a este videojuego.

En cualquier caso, y puesto que las capturas y combates de "Pokémon" son acciones primordiales en el videojuego (ambas tienen un funcionamiento similar y son movimientos que se realizan más de mil veces a lo largo del videojuego), vamos a proceder a detallarlas mínimamente:

- En primer lugar (Fig. P1) tenemos las opciones de:
  - comenzar la LUCHA con el Pokémon que llevamos en ese momento (CINDAQUIL),
  - o seleccionar otro Pokémon que llevemos con nosotros ($P_K M_N$),
  - o abandonar el combate (ESC),
  - o utilizar algún objeto que llevemos en la MOCHILA para modificar alguno de los aspectos de nuestro Pokémon (puntos de salud, rapidez…)
- Posteriormente (Fig. P2), y una vez comenzada la lucha, nos aparecerán:
  - los tipos de ataque que en ese momento tiene aprendidos nuestro Pokémon (PLACAJE, MALICIOSO, PANTALLAHUMO),
  - así como el tipo del ataque seleccionado (PLACAJE es una ataque del tipo NORMAL),
  - y el número de ataques del tipo seleccionado que disponía inicialmente (35) y los que aún le quedan (29).

- Una vez seleccionado el ataque (Fig. P3), éste aparece identificado, y se muestra el daño que dicho ataque ha producido al Pokémon rival (longitud de la línea verde superior de KAKUNA).
- Finalmente, el Pokémon rival realiza un ataque (Fig. P4) que produce un daño a nuestro Pokémon (línea verde de nuestro Pokémon).

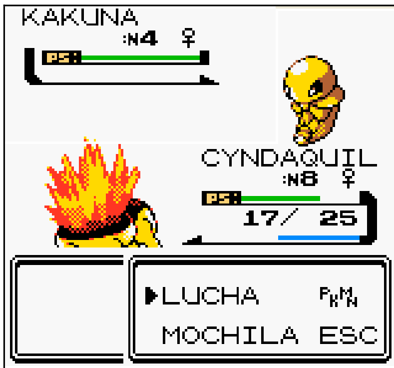


Fig. P1

Fig. P2

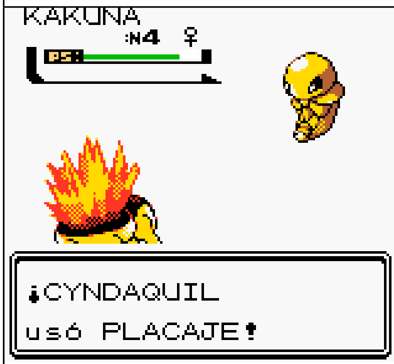


Fig. P3

Fig. P4

- El combate continúa con esta mecánica hasta que uno de los dos Pokémon resulta vencedor. En el caso de una captura el Pokémon pasará a nuestro poder. Y en el caso de un combate se continuará con otros Pokémon hasta que alguno de los contendientes pierda todas sus criaturas, lo que implicará la pérdida de dicho combate.

En cualquier caso, hemos de tener presente que las características de cada uno de nuestros Pokémon siempre estarán disponibles, para así poder utilizar en cada combate el Pokémon más adecuado (amén de analizar evoluciones, selección de pérdida de ataques para adquirir otros nuevos, posibilidades de cruces en la guardería…).

4. Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas con "Pokémon"

Con la información apuntada en el apartado anterior, ya podemos intuir algunos de los aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas presentes en el videojuego "Pokémon" en su versión plata: estrategias (en la utilización de distintos ataques), análisis de informaciones numéricas, cálculo mental-aproximado (daño en cada uno de los ataques)… Pero en el mencionado videojuego hay más, mucho más.

De hecho, podemos agrupar los aspectos relacionados con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas presentes en el citado videojuego en los siguientes puntos:

- El cálculo mental y el cálculo aproximado.
- El análisis de informaciones gráficas y numéricas.
- La interpretación de planos y la localización en un plano.
- El azar y probabilidad.
- La resolución de problemas.

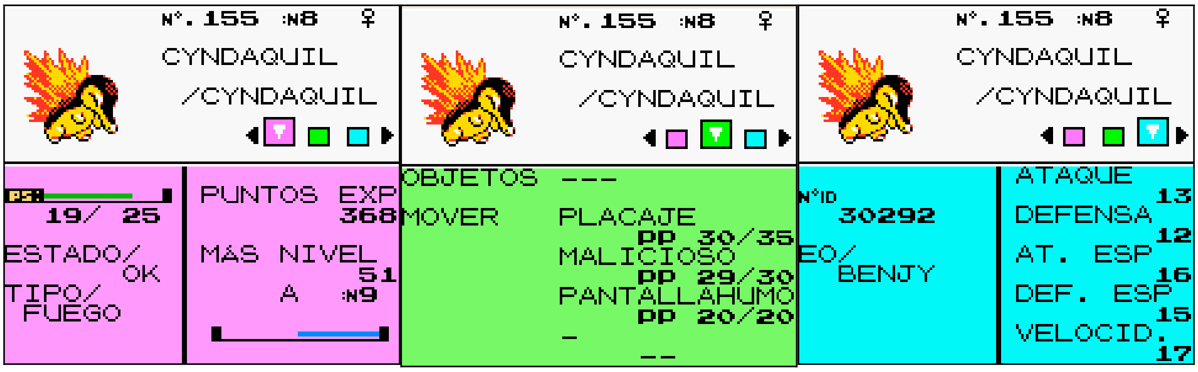
Así, finalizamos este apartado del Proyecto, señalando los objetivos específicos correspondientes al área de Matemáticas en la Educación Primaria, así como los contenidos (conceptuales, procedimentales y actitudinales) correspondientes a cada Curso que están presentes en dicho videojuego. Además, para el caso de los contenidos, se incorporaron algunas situaciones presentes en el juego que permita ejemplificar dicho contenido conceptual, procedimental o actitudinal.

5. La labor del Profesor en el aula de Matemáticas

Entendemos que, una idea fundamental para la utilización de "Pokémon" en el aula es la labor de guía que ha de desempeñar el profesor de Matemáticas, que permita:

- reflexionar sobre las acciones que ocurren “dentro” del mismo, y
- relacionar (algunas de) éstas con determinados conocimientos matemáticos.

De esta forma, en el Proyecto, se explicitan y detallas acciones formativas para poder incorporar al aula. Por ejemplo:



¿Qué números son utilizados como códigos? ¿Cuál es su significado?
¿Qué números implican un ordinal? ¿Y un cardinal?
¿Qué números se utilizan para medir? ¿Cuál es la magnitud que miden?
¿Qué números admiten operaciones? ¿Cuál es el significado de dicha operación?
¿Existen números fijos bajo cualquier circunstancia del juego?
¿Cómo pueden variar los números?
¿Cuáles son los límites de los distintos números que aparecen?
¿Qué sentido puedes dar a los “números grandes”? ¿Y a los “números pequeños”?
¿Qué números tiene sentido redondear?

En cualquier caso, tenemos presente que casi con toda seguridad, la mayoría de los profesores no habrán tenido la oportunidad de utilizar dicho videojuego, por lo establecemos unas actuaciones que les permitan realizar su labor de la forma más eficiente posible: entrega del emulador, desarrollo de foros dedicados al tema, elaboración de guías didácticas del juego…

Para finalizar

Como hipótesis de investigación del Proyecto, sostenemos que existen diferencias significativas, por lo que respecta al aprendizaje en matemáticas, entre los alumnos que utilizan en el aula el videojuego “Pokémon” (versión plata), y los que no lo utilizan. Y para validar dicha hipótesis, en el último Módulo del mencionado Proyecto, procedimos a elaborar un diseño experimental que llevaremos a cabo a partir del Curso próximo con la colaboración de la red de Colegios de Prácticas de Magisterio de la Universidad Autónoma de Madrid, y del que, esperemos, pronto podamos obtener conclusiones.

Bibliografía (resumen)

Bouvier, A. (1981): *"La mystification mathématique"*. Herman, Paris.

Calvo, A.M. (1996): *"Videojuegos: del juego al medio didáctico"*. (http://www.uib.es/depart/gte/calvo.html)

Calvo, A.M. (2000): *"Videojuegos y jóvenes"*. Cuadernos de Pedagogía, 291, 59-62.

Estallo, J.A. (1995): *"Los videojuegos: juicios y prejuicios"*. Planeta, Barcelona.

Estallo, L.A. (1997): *"Psicopatología y Videojuegos"*. Institut Psiquiátric. Barcelona. (http://www.ub.es/personal/videoju.htm# como%20Influyen %20los%20videojuegos%20en%20la%20conducta)

Estallo, L.A. (s/f): "*Tecnología y Conducta: Paginas desarrolladas y mantenidas por el Departamento de Psicología del Institut Psiquiàtric"*. (http://www.geocities.com/HotSprings/6416/)

Etxeberría, F. (1999): *"Videojuegos y Educación"*. (http://www3.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_02/n2_art_etxeberria.htm)

Gee, J.P. (2004 a): *"Learning by design: Games as learning machines"*. Interactive Educational Multimedia, 8, 5-23.

Gros, B (2003): *"Nuevos medios para nuevas formas de aprendizaje: el uso de los videojuegos en la enseñanza.* (http://reddigital.cnice. mecd.es/3/firmas/firmas_gros_ind.html)

Gros, B. y Grup F9 (1988): *"Jugando con videojuegos: educación y entretenimiento"*. Descole de Brouwer, Bilbao.

Guzmán, M. (1993): "*Tendencias innovadoras en Educación Matemática"*. (http://www.oei.es/edumat.htm)

Pérez, M.A., y Álvarez J. (1993): *"Los videojuegos como nueva realidad social y cultural"*. Infancia y Sociedad, 20, 73-91.

Provenzo, E. (1991): *"Video Kids: Making sense of Nintendo"*. Harvard Univesity Press, Cambridge.

Sanger, J., Wilson, J., Davies, B., y Whittaker, R. (1997): *"Young children, videos and computer games"*. Londres, Falmer.

Sartori, G. (1998): *“Homo videns. La sociedad teledirigida”*. Taurus, Madrid.
Scott, D. (1995): *“The Effects of Video Games on Feeling of Aggression”.* Journal of Psychology, 129 (2), 121-132.
Tejeiro, R., y Bersabé, R.M. (2002): *“Measuring problem video game playing in adolescents”.* Addiction 97 (12), 1601-1606.
Tejeiro, R., y Pelegrina M. (2003): *“Los Videojuegos. Qué son y cómo nos afectan”.* Ariel, Barcelona.
Terrón, E., Díez, E. J., y Rojo J. (s/f): *“Las organizaciones violentas y sus mecanismos de seducción: el caso de los videojuegos”.* (http:// dewey.uab.es/pmarques/evte/ejdiez.doc)

Sobre el método Monte-Carlo de la altura media en el Cálculo Integral en varias dimensiones

J.C. Cortés
Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia

G. Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

Abstract

In this article we study a method that belongs to Monte-Carlo procedures in order to evaluate definide integrals in several dimensions. We compare the results with the geometric Monte-Carlo method.

Introducción

En el trabajo [1] se estudió un método geométrico tipo Monte-Carlo para evaluar de forma aproximada la integral definida

$$I = \int_a^b f(x)dx\,. \qquad \textbf{(1)}$$

Para la estimación que se dio en [1], se utilizó la notación $\widetilde{I}(N)$ siendo N el número de simulaciones. La fórmula de estimación que daremos en este trabajo se denotará por $\bar{I}(N)$. Adelantamos ya este detalle en la notación que utilizaremos, porque entre las aplicaciones que daremos, mostraremos los ejemplos 1 y 2 dados en [1], y compararemos los resultados que se obtienen por ambos procedimientos. Además de realizar esta comparación, también es objetivo del presente artículo, aplicar el método que desarrollemos al cálculo de integrales definidas de más de una dimensión, más concretamente, a la evaluación de integrales dobles y triples, lo cual supone una ampliación respecto del material desarrollado en [1].

1. El método Monte-Carlo de la altura media: dos enfoques

Una característica importante de este método es la sencillez de su fundamento, que puede motivarse desde la teoría determinista o directamente desde la propia Estadística.

Primer enfoque

Apoyándonos en el primer teorema de la media del Cálculo Integral sabemos que si $f : [a,b] \subset IR \rightarrow IR$ es continua entonces

$$\exists c \in \left]a,b\right[: \quad I = f(c) \cdot (b-a). \quad \textbf{(2)}$$

Como es bien sabido, la interpretación geométrica de este resultado, es que el área que representa I (si $f(x) \geq 0 \ \ \forall x \in [a,b]$) equivale a la de un rectángulo de base $b-a$ y altura $f(c)$, la cual puede considerarse como la altura media de la función en el intervalo $[a,b]$ (véase figura 1).

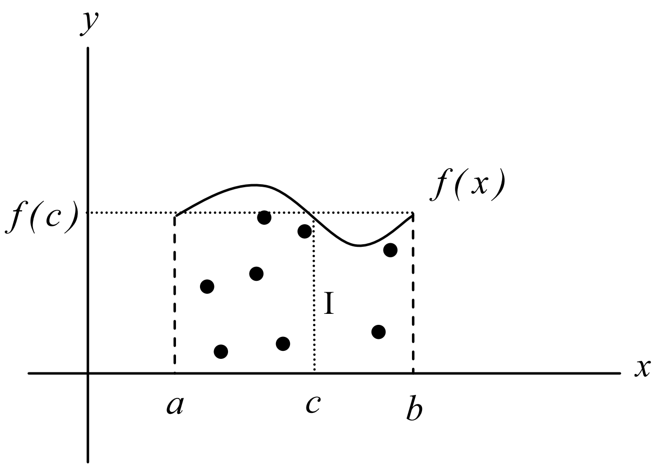


Figura 1. Interpretación geométrica del primer teorema de la media del Cálculo Integral.

Apoyándonos en esta interpretación, parece muy intuitivo tomar como estimación de la altura media

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i), \quad \textbf{(3)}$$

siendo $\{x_i\}_{i=1}^N$ N valores independientes (obtenidos a través de la simulación) de una variable aleatoria (v.a.) X uniforme en $[a,b]$ $(X \propto Un([a,b]))$. Y en consecuencia es razonable tomar como estimación estadística de I el valor

$$\bar{I}(N) = \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=1}^{N} f(x_i), \quad \{x_i\}_{i=1}^N \in X \propto Un([a,b]) \text{independ.} \qquad \textbf{(4)}$$

Después de esta aproximación intuitiva al problema a tratar, formalizaremos ahora desde el punto de vista estocástico la representación (4). Tomaremos como estimador $\bar{I}$ de I el siguiente

$$\bar{I} = (b-a)f(X) \quad \text{con} \quad X \propto Un([a,b]), \qquad \textbf{(5)}$$

porque cumple la propiedad de ser centrado

$$E[\bar{I}] = (b-a)E[f(X)] = (b-a)\int_a^b f(x)\frac{1}{b-a}dx = \int_a^b f(x)dx = I, \qquad \textbf{(6)}$$

donde hemos utilizado que la función de densidad de probabilidad de una v.a. $X \propto Un([a,b])$ es

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \le x \le b \\ 0 & \text{si} \quad x < a \text{ ó } x > b \end{cases}$$

Apoyándonos en la propiedad de centralización dada en (6), desde el punto de vista computacional es lícito tomar como estimación de I el valor empírico de $E[\bar{I}]$, es decir,

$$\bar{I}(N) = \frac{(b-a)}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \quad \text{con} \quad f_i = f(x_i) \text{ y } \{x_i\}_{i=1}^N \text{ m.a.} \in Un([a,b]) \qquad \textbf{(7)}$$

(donde m.a. denota una muestra aleatoria de tamaño N de una v.a. uniforme sobre el intervalo $[a,b]$) equivalente a la expresión dada en (4).

Obsérvese que salvo que el valor (exacto) de I sea conocido (en cuyo caso la aplicación de este método carece de sentido, más allá del interés a nivel de desarrollo teórico que pueda tener), la varianza del estimador $\bar{I}$ dado en (5) no puede conocerse, pues el valor de $Var[\bar{I}]$ depende de I. En efecto,

$$Var[\bar{I}] = (b-a)^2 Var[f(X)] = (b-a)^2\{E[f^2(X)] - E^2[f(X)]\} \qquad \textbf{(8)}$$

es decir,

$$Var\left[\bar{I}\right]=(b-a)^2\left\{\int_a^b f^2(x)\frac{1}{b-a}dx-\left(\int_a^b f(x)\frac{1}{b-a}dx\right)^2\right\}$$

y simplificando

$$Var\left[\bar{I}\right]=(b-a)\int_a^b f^2(x)dx-I^2. \qquad \mathbf{(9)}$$

Sin embargo, realizada una estimación empírica $\bar{I}(N)$ mediante N simulaciones según (7), sí es posible, a partir de (8) calcular la varianza empírica

$$Var\left[\bar{I}(N)\right]=\begin{cases}(b-a)^2\left\{\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}f_i^2-\left(\dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{i=1}^{N}f_i\right)^2\right\} & \text{si} \quad N>30\\ \dfrac{(b-a)^2}{N-1}\left\{\displaystyle\sum_{i=1}^{N}f_i^2-\dfrac{1}{N}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N}f_i\right)^2\right\} & \text{si} \quad N\leq 30\end{cases} \qquad \mathbf{(10)}$$

donde f_i está introducida en (7) y para $N\leq 30$, se ha considerado la expresión corregida (insesgada) del estimador de la varianza.

<u>*Segundo enfoque*</u>

Otra forma de introducir este método Monte-Carlo para estimar una integral definida, digamos

$$J=\int_0^1 g(x)dx$$

es utilizar que si $U \propto Un([0,1])$, entonces

$$J=E\left[g(U)\right].$$

De esta forma tomando $\{U_i\}_{i=1}^N$ vs.as. independientes e idénticamente distribuidas según una distribución $Un([0,1])$ (es decir, una m.a. $Un([0,1])$), podemos garantizar -apoyándonos en que cualquier transformación funcional de vs.as. independientes genera también una familia de vs.as. independientes, (véase [4, pág. 92])- que $\{g(U_i)\}_{i=1}^N$ también constituye una m.a. con media J, con lo que aplicando la Ley Fuerte de los Grandes Números, se tiene con probabilidad 1, que

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{g(U_i)}{N}\xrightarrow{N\to\infty}E\left[g(U)\right]=J.$$

Esta conclusión nos permite estimar la integral J, generando un gran número de simulaciones aleatorias u_i, y tomando como aproximación a J la media de los valores $g(u_i)$. Para aplicar este método a la integral I dada en (1) a partir de J, basta realizar el cambio de variable

$$y = \frac{x-a}{b-a} \quad ; \quad dy = \frac{dx}{b-a}$$

con lo que

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_0^1 \underbrace{f(y(b-a)+a)(b-a)}_{h(y)}dy = \int_0^1 h(y)dy\,,$$

que es una integral tipo J.

2 Aplicación al cálculo de integrales definidas simples

Aplicaremos el método desarrollado en el apartado anterior, calculando las integrales simples vistas en los ejemplos 1 y 2 del trabajo [1], lo que servirá para comparar ambos métodos.

Ejemplo 1

Calculemos una aproximación $\bar{I}_1$ de

$$I_1 = \int_0^2 \left(4 - x^2\right)dx\,.$$

Para ello tomaremos los mismos valores de simulación que se eligieron en la tabla 1 de [1], pero ahora aplicamos el método Monte-Carlo de la altura media (véase tabla 1, donde las simulaciones x_i se han obtenido mediante $x_i = 2r_i$ siendo r_i valores de una v.a. uniforme sobre el intervalo $[0,1]$ que se calculan con la función *Random* de una calculadora de bolsillo) para evaluar la estimación. Entonces según (7)

$$\bar{I}_1(10) = \frac{(2-0)}{10}\sum_{i=1}^{10} f_i = \frac{2}{10}\cdot 26.608 = 5.321$$

Esta estimación es mejor que la obtenida por el método Monte-Carlo geométrico estudiado en [1], que era $\tilde{I}_1(10) = 5.6$. De hecho la estimación $\bar{I}_1(10)$ es bastante buena (tiene una cifra decimal exacta, y únicamente se han requerido diez simulaciones) ya que el valor (exacto) de I_1 es $\frac{16}{3} \cong 5.333$. Sin embargo, es interesante observar que la varianza empírica de la aproximación $\bar{I}_1(10)$ es, según (10) para $N = 10 \leq 30$

$$Var[\bar{I}_1(10)] = \frac{2^2}{10-1}\left\{ \sum_{i=1}^{10} f_i^2 - \frac{1}{10}\left(\sum_{i=1}^{10} f_i\right)^2 \right\} = \frac{4}{9}\left\{ 86.654 - \frac{26.608^2}{10} \right\} = 152.660$$

lo que resulta ser un valor bastante elevado.

Simulación	r_i	$x_i = 2 \cdot r_i$	$f_i = 4 - x_i^2$	f_i^2
1	0.958	1.916	0.328	0.108
2	0.495	0.990	3.019	9.114
3	0.491	0.982	3.035	9.211
4	0.847	1.694	1.130	1.277
5	0.812	1.624	1.362	1.855
6	0.269	0.538	3.710	13.764
7	0.112	0.224	3.949	15.595
8	0.193	0.368	3.860	14.899
9	0.664	1.328	2.236	4.999
10	0.071	0.142	3.979	15.832
			$\sum_{i=1}^{10} f_i = 26.608$	$\sum_{i=1}^{10} f_i^2 = 86.654$

Tabla 1. Simulación del ejemplo 1.

En realidad que la estimación $\bar{I}_1(10) = 5.321$ haya resultado aceptable para el pequeño número de simulaciones que hemos realizado ha dependido en gran medida de los valores obtenidos (al azar) de dichas simulaciones. Así otra familia de diez números aleatorios, seguro que nos habría proporcionado otra estimación, tal vez peor (o no). Por ello resulta interesante poder decir a priori el número N de simulaciones necesarias para garantizar que el error absoluto de la estimación: $\left|\bar{I}_1(N) - I_1\right|$ sea inferior a un valor $\varepsilon > 0$ con una probabilidad prefijada $\rho > 0$, es decir,

$$¿N \quad \text{tal que} \quad P\left[\left|\bar{I}_1(N)-I_1\right|<\varepsilon\right]\geq\rho\,? \qquad \textbf{(11)}$$

Responderemos a esta cuestión para $\varepsilon = 0.01$ y $\rho = 0.90$, aunque el razonamiento puede generalizarse para valores $\varepsilon,\rho\in\,]0,1[$ arbitrarios. Para ello, aplicaremos el Teorema Central del Límite (T.C.L.) de Lindeberg-Lévy ([3, pág. 261]), tomando como m.a. $\left\{Y_i=(2-0)\cdot f_i = 2\cdot\left(4-X_i^2\right)\right\}_{i=1}^{N}$ siendo $\{X_i\}_{i=1}^{N}$ una m.a. uniforme en $[0,2]$ (que es la particularización de (5) para los datos de este ejemplo). Observemos que

$$E[Y_i]=2\cdot\left(4-E\left[X_i^2\right]\right)=2\cdot\left(4-\frac{4}{3}\right)=\frac{16}{3}=I_1 \qquad \textbf{(12)}$$

$$Var[Y_i]=4\cdot\left(Var\left[X_i^2\right]\right)=4\cdot\frac{64}{45}=\frac{256}{45} \qquad \textbf{(13)}$$

donde hemos utilizado que como $X_i \propto Un([0,2])$ se tiene

$$E\left[X_i^2\right]=\int_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2-0}\,dx=\frac{4}{3}$$

$$Var\left[X_i^2\right]=E\left[X_i^4\right]-E^2\left[X_i^2\right]=\int_0^2 x^4\cdot\frac{1}{2-0}\,dx-\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{64}{45}.$$

Entonces la media muestral $\overline{Y}_N$ de la muestra $\{Y_i\}_{i=1}^{N}$:

$$\overline{Y}_N=\frac{2\cdot\left(4-X_1^2\right)+\cdots+2\cdot\left(4-X_N^2\right)}{N}=\bar{I}_1(N)$$

(nótese que según (7), $\overline{Y}_N=\bar{I}_1(N)$, tal y como hemos puesto en la igualdad anterior) cumple por el T.C.L. que

$$\frac{\bar{I}_1(N)-I_1}{\sqrt{\dfrac{256}{45N}}}=\frac{\bar{I}_1(N)-I_1}{\dfrac{16}{3\sqrt{5N}}}\xrightarrow[N\to\infty]{}Z \quad \text{siendo} \quad Z\propto N(0;1). \qquad \textbf{(14)}$$

Por lo tanto, utilizando (14), podemos ya responder a la cuestión planteada en (11):

$$P\left[\left|\bar{I}_1(N)-I_1\right|<\underbrace{0.01}_{=\varepsilon}\right]=P\left[\frac{\left|\bar{I}_1(N)-I_1\right|}{\frac{16}{3\sqrt{5N}}}<\frac{0.01}{\frac{16}{3\sqrt{5N}}}\right]=P\left[\left|Z\right|<\frac{3\cdot 0.01\sqrt{5N}}{16}\right]\geq\underbrace{0.90}_{=\rho} \quad \textbf{(15)}$$

Consultando la tabla de la distribución normal tipificada obtenemos

$$\frac{3\cdot 0.01\sqrt{5N}}{16}\geq 1.64$$

y despejando, se tiene que basta tomar $N\geq 153009$ simulaciones para garantizar (11) con $\varepsilon=0.01$ y $\rho=0.90$. Obsérvese que el valor de $N\geq 153009$ es suficientemente grande como para aceptar la aproximación realizada en (15) basada en (14). Para terminar subrayemos que el número de iteraciones con el método de Monte-Carlo de la altura media es notablemente inferior al que se determinó en [1] para asegurar, en probabilidad, el mismo nivel de aproximación y que era de $N\geq 435601$.

Ejemplo 2

Ahora calcularemos una aproximación $\bar{I}_2$ de

$$I_2=\int_1^4 e^{-x^2}\,dx \qquad \textbf{(16)}$$

para la cual no puede hallarse su valor exacto por la regla de Barrow al no conocerse una primitiva del integrando, por lo que aquí es especialmente interesante (y útil) el método Monte-Carlo de la altura media.

Como el procedimiento es el mismo que el empleado en el ejemplo 1, en analogía al trabajo desarrollado en el ejemplo 2 de [1], daremos una estimación con $N=1000$ simulaciones empleando el asistente matemático Derive®. Las instrucciones para realizar los cálculos son:

```
#1: Y(n) := ê^(- ((1 + 3·ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1)))·n/n)^2)
#2: (3/1000)*·SUM(Y(n), n, 1, 1000)
#3: Z(m) := ((3/1000)*·SUM(Y(n), n, 1, 1000)*m)/m
#4: SUM(Z(m)/10, m, 1, 10)
```

No comentamos ahora las órdenes anteriores de Derive®, porque esto ya se hizo en [1] para un ejemplo similar. Con ello obtenemos $\bar{I}_2(1000)=0.140$, frente a $\tilde{I}_2(1000)=0.137$ hallada en [1]. Mientras que si utilizamos el comando directo de *DERIVE*® para calcular integrales definidas, el resultado que se obtiene es 0.139 (*DERIVE*® realiza este cálculo mediante el método de los trapecios de integración numérica).

3 Aplicación al cálculo de integrales definidas múltiples

Las ideas desarrolladas en el primer apartado pueden extenderse al cálculo de integrales dobles, triples,… Así, en analogía con (7), una estimación de

$$II = \iint_A f(x,y)dxdy \qquad \textbf{(17)}$$

puede tomarse como

$$\overline{II}(N) = \frac{\text{área}(A)}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \;\text{ con } f_i = f(x_i, y_i) \qquad \textbf{(18)}$$

siendo N el tamaño de una m.a. $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{N}$ en el dominio de integración A. Si el área del recinto de integración es difícil de hallar, pero siendo $A \subset IR^2$ acotado, entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $A \subset R$ siendo R un rectángulo de IR^2, digamos

$$R = \left\{(x,y) \in IR^2 \;/\; a \le x \le b, c \le y \le d\right\}$$

y realizar la siguiente estimación

$$área(A) \cong \frac{N}{M}\cdot(d-c)\cdot(b-a) \qquad \textbf{(19)}$$

siendo M el número de simulaciones consideradas en el rectángulo R: $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{M}$ con $x_i \in X \propto Un\left(\left[a,b\right]\right), y_i \in Y \propto Un\left(\left[c,d\right]\right)$ vs.as. independientes. En ese caso la estimación de (17) puede tomarse como

$$\overline{II}(N) = \frac{(d-c)\cdot(b-a)}{M}\sum_{i=1}^{N} f_i \;\text{ con } f_i = f(x_i, y_i) \;\begin{cases} x_i \in X \propto Un\left(\left[a,b\right]\right) \\ y_i \in Y \propto Un\left(\left[c,d\right]\right) \end{cases} \qquad \textbf{(20)}$$

en lugar de (18).

Es notable señalar que, como puede verse en [2], el estimador del recinto de integración dado en (19) tiene la propiedad de máxima verosimilitud.

Mediante un procedimiento análogo al anterior se puede aproximar la integral triple

$$III = \iiint_V f(x,y,z)dxdydz \qquad \textbf{(21)}$$

mediante

$$\overline{III}(N) = \frac{\text{volumen}(V)}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i \ \text{ con } f_i = f(x_i, y_i, z_i) \qquad \textbf{(22)}$$

siendo $\{(x_i, y_i, z_i)\}_{i=1}^{N}$ pertenecientes al dominio V. Cuando el volumen de V es difícil de hallar, estando $V \subset IR^3$ contenido en el paralelepípedo $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$, razonando como antes podemos estimar (21) mediante la fórmula

$$\overline{III}(N) = \frac{(f-e)(d-c)(b-a)}{M}\sum_{i=1}^{N} f_i \ , f_i = f(x_i, y_i, z_i) \ \begin{cases} x_i \in X \propto Un([a,b]) \\ y_i \in Y \propto Un([c,d]) \\ z_i \in Z \propto Un([e,f]) \end{cases} \quad \textbf{(23)}$$

en lugar de (22).

Para acabar, veamos dos ejemplos de aplicación del método de Monte-Carlo de la altura media para calcular integrales del tipo (17) y (21).

<u>*Ejemplo 3*</u>

Estimemos el valor de la integral II_3 cuyo valor exacto es $II_3 = 0.5$ siendo:

$$II_3 = \int_0^1 \int_x^1 (x+y)dydx$$

En primer lugar observemos que basta aplicar la aproximación (18), ya que, el área del recinto de integración A es sencillo de calcular al ser un triángulo rectángulo (véase figura 2): área$(A) = 0.5$.

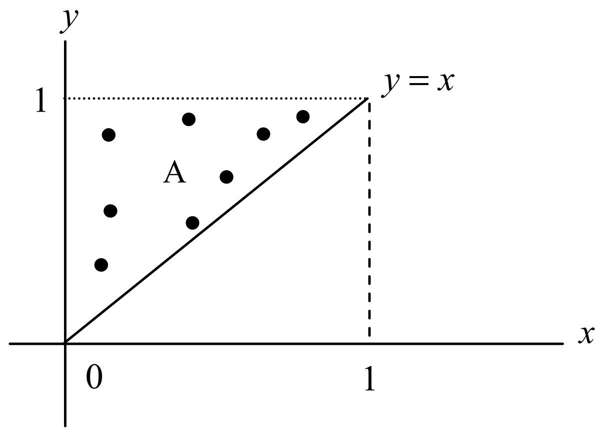


Figura 2. Recinto de integración del ejemplo 3.

En la tabla 2 especificamos los cálculos realizados para dar la estimación buscada.

Simulación	$r_i = x_i$	$s_i = y_i$	$\delta_i = \{y_i \geq x_i\}$	$f_i\big\vert_{\delta_i} = f(x_i, y_i)\big\vert_{\delta_i} = x_i + y_i$
1	0.322	0.205	0	
2	0.395	0.249	0	
3	0.161	0.820	1	0.981
4	0.189	0.055	0	
5	0.831	0.605	0	
6	0.985	0.867	0	
7	0.343	0.014	0	
8	0.406	0.951	1	1.357
9	0.204	0.522	1	0.726
10	0.613	0.314	0	
			$\sum_{i=1}^{10} \delta_i = 3$	$\sum_{i=1}^{10} f_i\big\vert_{\delta_i} = 3.064$

Tabla 2. Simulación del ejemplo 3.

Utilizando (18) y los resultados obtenidos en la tabla 2 podemos dar la siguiente estimación de la integral doble

$$\overline{II_3}(10) = \frac{0.5}{3} \sum_{i=1}^{3} f_i\big\vert_{\delta_i} = \frac{0.5}{3} \cdot 3.064 = 0.510$$

Si aumentamos el número de simulaciones, es más probable que la estimación se acerque más al valor exacto. Las instrucciones para generar aproximaciones con Derive® son:

```
#1: X(n) := ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1)))·n/n)
#2: Y(n) := ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1)))·n/n)
#3: D := SUM(IF(X(n) < Y(n), 1, 0), n, 1, 1000)
#4: (1/D)*·SUM(IF(X(n) < Y(n), X(n) + Y(n), 0), n, 1, D)
```

Ejemplo 4

Estimemos la siguiente integral III_4 cuyo valor exacto es $III_4 = \frac{19}{3} \cong 6.333$ siendo:

$$III_4 = \int_2^4 \int_x^4 \int_y^{1+x} (x + y + z)dzdydx$$

Como el recinto de integración

$$V = \left\{ (x, y, z) \in IR^3 \,/\, 2 \le x \le 4 \,,\, x \le y \le 4 \,,\, y \le z \le 1 + x \right\}$$

está contenido en el paralelepídedo $[2{,}4]\times[2{,}4]\times[2{,}5]$ de volumen 12, utilizaremos la aproximación (23) y el asistente Derive® para obtener la aproximación buscada para ello basta ejecutar el siguiente código:

```
#1: X(n) := 2+2*ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1)))·n/n)
#2: Y(n) := 2+2*ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1)))·n/n)
#3: Z(n) := 2+3*ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1)))·n/n)
#4: D := SUM(IF(X(n) < Y(n), 1, 0)*IF(Y(n) < Z(n) < 1 + X(n), 1, 0), n, 1, 1000)
#5: (12/1000)*SUM(IF(X(n) < Y(n), 1, 0)*IF(Y(n) < Z(n) < 1 + X(n), 1, 0)*(X(n)
+ Y(n) + Z(n)), n, 1, D)
```

obteniéndose resultados satisfactorios.

Bibliografía

[1] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Sobre el método Monte-Carlo geométrico en el Cálculo Integral*. Bol. Puig Adam nº 66 (2004), 63-73.

[2] Cortés López J.C. y Calbo Sanjuán G., *Estudio de muestreos de poblaciones biológicas mediante estimadores máximo verosímiles*. Ensayos nº 17 (2002), 261-268.

[3] DeGroot M.H., *Probabilidad y Estadística*, Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1988.

[4] Grimmett G.R. y Stirzaker D.R., *Probability and Random Processes*, Clarendon Press, Oxford, 2000.

Volumen de la n-esfera

Sergio Falcón [1], Ángel Plaza [1] y José P. Suárez [2]
[1] Departamento de Matemáticas
[2] Departamento de Cartografía e Ingeniería Gráfica
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
sfalcon@dma.ulpgc.es

Abstract

In this note we study the volume enclosed by the n-dimensional sphere or radius "r" contained in a space of dimension "n" from the volume of the tridimensional sphere. The explicit formula for the volume is deduced by using the Dirichlet integral in P^n *and like corollary we obtain the volume of the ellipsoid n-dimensional.*

Resumen

En este artículo hacemos un estudio sobre el volumen de una esfera de radio "r" finito, contenida en un espacio de dimensión "n" a partir del volumen de una esfera tridimensional. Este volumen se encuentra como aplicación de la integral de Dirichlet en el espacio P^n *y como corolario se obtiene el volumen del elipsoide n-dimensional.*

Introducción

La esfera es, con toda probabilidad, la figura geométrica espacial más regular en el sentido de que todos sus puntos tienen exactamente las mismas propiedades.

Ésta debe ser la razón por la que la esfera ha sido estudiada desde diferentes puntos de vista a través de los siglos por un buen número de investigadores, principalmente matemáticos.

En el presente estudio se suponen bien conocida la noción de esfera tridimensional así como muchas de sus propiedades, en particular la que indica su volumen. Constituye entonces un proceso lógico extender estas nociones a los espacios de dimensión superior a 3, aunque siempre de dimensión finita. Algunas cuestiones relacionadas con una esfera de cualquier dimensión se consiguen inmediatamente y han sido estudiadas en [2, 4]. El objetivo principal de este trabajo consiste en encontrar el volumen de una esfera de radio "r" y dimensión finita "n". Esta cuestión es usada en muchos problemas de tipo geométrico [3].

Consideraremos en primer lugar la esfera de radio unidad contenida en un espacio de dimensión "n". A continuación, y mediante la generalización de la integral de Dirichlet definida en el espacio P^3, obtendremos la fórmula que indica su volumen. Finalmente, y como consecuencia de lo anterior, encontraremos el volumen del elipsoide n-dimensional.

<u>Definición 1</u>

Se define la esfera unitaria n-dimensional o n-esfera como el conjunto de puntos $x=(x_1, x_2,...,x_n)\in P^n$ tales que $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1$.

La frontera de la esfera recibe el nombre de superficie esférica y su estudio no es objeto de este artículo.

En P se tendrá la 1-esfera que es el segmento [-1, 1]. En P^2, la 2-esfera es el círculo de centro el origen y radio 1: $\{(x, y)\in P^2 / x^2 + y^2 \leq 1\}$. En P^3, la 3-esfera es la clásica esfera por todos conocida: $\{(x, y, z)\in P^3 / x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. El principal resultado de este estudio consiste en demostrar el siguiente teorema.

<u>Teorema</u>

El volumen de la n-esfera de radio "r" es

$$V(n,r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Pero antes de alcanzar su demostración se necesitan ciertos conocimientos previos que pasamos a indicar a continuación.

1 Preliminares

Presentamos en primer lugar la noción y algunas propiedades de las funciones Gamma y Beta de Euler.

Definición 2

Para un número real "p", se define la función "Gamma de p" como la integral impropia $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{p-1}dt$.

La fórmula que representa la función Gamma de Euler también es conocida como segunda integral de Euler, y es relativamente sencillo demostrar las siguientes propiedades:

a. $\Gamma(p) = (p - 1)\,\Gamma(p - 1)$

b. $\Gamma(1) = 1$

c. Si $p\in N$, $\Gamma(p) = (p - 1)!$

d. Si p es un entero no positivo, entonces $\lim_{x\to p}\Gamma(x)=\pm\infty$

El valor aproximado de $\Gamma(p)$ para todo número real p se puede hallar por integración numérica y se puede obtener así la gráfica de la función Gamma:

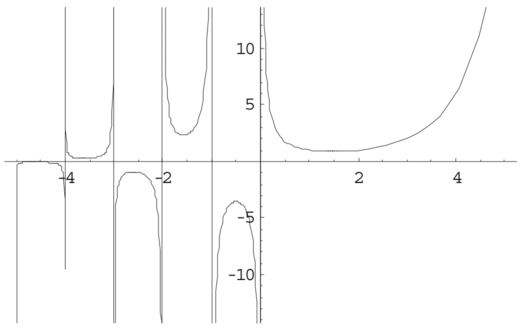


Figura 1: Gráfica de la función Gamma

Al estudiar la función Gamma, Euler descubre otra función llamada primera integral de Euler o función Gamma de Euler la cual está íntimamente relacionada con la función Gamma.

Definición 3

Dados dos números reales "p" y "q", se define la función "Beta de p q" como la integral impropia $\beta(p,q)=\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt$ (1)

Se puede demostrar que existe una relación directa entre las funciones Gamma y Beta de Euler por medio de la fórmula $\beta(p,q)=\dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ (2)

Proposición 1

El valor de Γ(1/2) es $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$

Demostración. Si en las fórmulas (2) y (1) se hace p = q = ½ se tiene $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\int_0^1 t^{-1/2}(1-t)^{-1/2}\,dt$. El cambio de variable t = sen^{2}x transforma esta integral en $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=2\int_0^{\pi/2}dx=\pi$ de donde se obtiene el resultado buscado.

Definición 4

Se llama función de Dirichlet de orden (p, q, r, s) definida en P^3 a la función $f(x,y,z)=x^p y^q z^r(1-x-y-z)^s$.

La integral de la función de esta función sobre el tetraedro formado por los planos coordenados y el plano x + y + z = 1 se llama integral de Dirichlet y se representa como D$_3$: $D_3=\iiint_T f(x,y,z)\,dxdydz$

Teorema 1

El valor de D_3 *es* $D_3=\dfrac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$

Demostración. El cambio de variables x + y + z = u, y + z = uv, z = uvw transforma el anterior tetraedro T en el cubo unitario C como se muestra en la figura 2 y cuya demostración damos seguidamente:

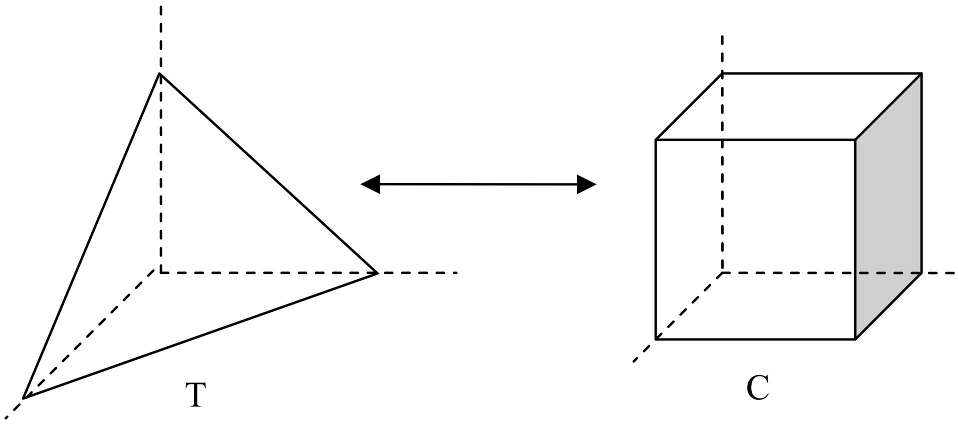


Figura 2: Tetraedro y cubo

Si (x, y, z)$\in$T entonces x, y, z son números reales no negativos tales que su suma es menor o igual que 1 y por tanto, $0 \le$ u, v, w ≤ 1. Recíprocamente, si (u, v, w)$\in$C, es decir, si $0 \le$ u, v, w ≤ 1 y además es x = u(1 – v), y = uv(1 – w), z = uvw entonces x, y, z son no negativos y su suma es menor o igual que 1. Por lo tanto el cubo C es el resultado de transformar el tetraedro T y viceversa.

El valor absoluto del determinante jacobiano de la transformación (de ahora en adelante, el jacobiano) es

$$|J| = abs\left(\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}\right) = abs\begin{vmatrix} 1-v & -u & 0 \\ v(1-w) & u(1-w) & -uv \\ vw & uw & uv \end{vmatrix} = u^2 v\,,$$

por lo que la integral de Dirichlet es

$$D_3 = \iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_T x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s dxdydz =$$
$$= \iiint_C u^p (1-v)^p u^q v^q (1-w)^q u^r v^r w^r (1-u)^s u^2 v dudvdw =$$
$$= \int_0^1 u^{p+q+r+2} (1-u)^s du \int_0^1 v^{q+r+1} (1-v)^p dv \int_0^1 w^r (1-w)^q dw =$$
$$= \beta(p+q+r+3, s+1)\beta(q+r+2, p+1)\beta(r+1, q+1) =$$
$$= \frac{\Gamma(p+q+r+3)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)} \cdot \frac{\Gamma(q+r+2)\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+q+r+3)} \cdot \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+r+2)} =$$
$$= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}$$

2 Volumen de la esfera de dimensión “n”

Consideremos el primer octante de la esfera unidad contenida en el espacio tridimensional D = {(x, y, z)$\in P^3$/ x, y, z ≥ 0, $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$} y calculemos la integral de la función de Dirichlet de orden (2p – 1, 2q – 1, 2r – 1, 0) sobre D.

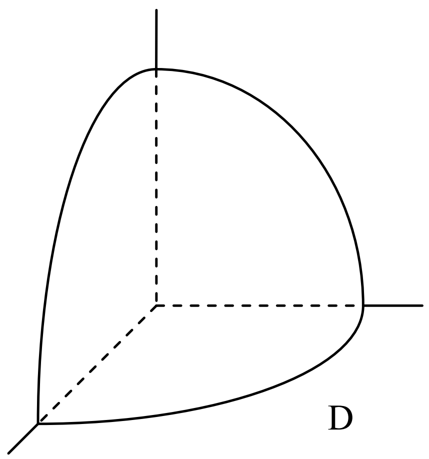


Figura 3: Primer octante de la esfera unidad en P^3

Lema

Si D representa el primer octante de la esfera unidad en P^3, entonces

$$I = \iiint_D x^{2p-1} y^{2q-1} z^{2r-1} dxdydz = \frac{1}{8} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}$$

Demostración. El cambio de variables $x^2 = u$, $y^2 = v$, $z^2 = w$ transforma el octante D de la figura 3 en el tetraedro T de la figura 2 por lo que se puede aplicar el resultado del teorema 1 sin más que tener en cuenta que, en este caso, el jacobiano es $|J| = \frac{1}{8} \frac{1}{\sqrt{uvw}}$ por lo que el valor de la integral en estudio es

$$I = \iiint_T u^{p-1} v^{q-1} w^{r-1} dudvdw = \frac{1}{8} \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(p+q+r+1)}$$

Y estamos por fin en condiciones de demostrar la fórmula que representa el volumen de la esfera unitaria n-dimensional.

Teorema 2

El volumen de la esfera unitaria n-dimensional es $V(n) = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$

Demostración. El volumen de esta esfera es, evidentemente, 2^n veces el volumen de la 2^n-ava parte de la esfera unidad contenida en el conjunto del espacio n-dimensional interior al espacio determinado por los "n" hiperplanos coordenados $x_i = 0$ para i = 1, 2,…, n

Al igual que en el lema 3.1, el cambio de variables $\{x_i^2 = u_i\}$ para i = 1, 2,…, n transforma la 2^n-ava parte de la esfera unidad contenida en el tetraedro n-dimensional S (llamado simplex) determinado por los hiperplanos coordenados y el hiperplano de ecuación $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. El jacobiano es

$$|J| = \frac{1}{2^n} \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^{n} u_i}}$$

y por tanto el volumen de la n-esfera es

$$V(n) = 2^n \int_D \prod_{i=1}^{n} dx_i = 2^n \int_S |J| \prod_{i=1}^{n} du_i = \frac{\left(\Gamma(1/2)\right)^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)}$$

Finalmente, teniendo en cuenta la proposición 1, resulta la fórmula buscada

$$V(n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Corolario 1

El volumen de la esfera n-dimensional de radio "r" es

$$V(n,r) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Demostración. Considerar el cambio de variables $\{x_i^2 = ru_i\}$ para i = 1, 2, …, n cuyo jacobiano es el mismo que en el teorema 2 pero multiplicado por "r^n".

Corolario 2

El volumen del elipsoide n-dimensional de semiejes a_i, i = 1, 2, ..., n viene dado por

$$VE(n,r) = \frac{\pi^{n/2} \prod_{i=1}^{n} a_i}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$$

Demostración. Considerar el cambio de variables $\{x_i^2 = a_i u_i\}$ para i = 1, 2, …,n cuyo jacobiano es el mismo que en el teorema 2 aunque multiplicado por $\prod_{i=1}^{n} a_i$.

Agradecimiento

Este trabajo está parcialmente subvencionado por el proyecto PI20003/035 del Gobierno de Canarias.

Bibliografía

[1] E. Artin: *The Gamma Function*. New Cork, NY: Holt, Rinehart and Winston, 1964

[2] R. Euler: *Maximizing the surface area of an n-dimensional unit sphere*. Missouri Journal of Mathematical Sciences, col. 4(1), 1992, pp.14-16

[3] B. Eisenberg and R. Sullivan: *Random triangles in n dimensions*. American Mathematical Monthly, vol. 16, 1996, pp. 308-318

[4] R. Salgia: *Volume of an n-dimensional unit sphere*. Pi Mu Epsilon Journal, vol. 7 (8), 1983, pp. 496-501

Nueva publicación sobre la enseñanza de las Matemáticas "Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática"

Su primer número se publicará en marzo de 2005.

Hace ahora algo más de un año se constituyó la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) en la que se agrupan unos 20.000 profesores. Su Junta de Gobierno decidió poner en marcha esta publicación.

Deseamos realizar una revista que canalice y dé a conocer trabajos sobre educación matemática destinados a los profesores de nuestro ámbito cultural, de todos los niveles educativos, desde Educación Infantil hasta la Universidad. Se publicarán experiencias didácticas, ideas para el aula, aplicaciones de la investigación. Además, la revista contendrá informaciones sobre acontecimientos de interés, tesis doctorales, libros, congresos.

Dado que disponemos en nuestra Comunidad de un amplio conjunto de docentes e investigadores de alta cualificación, podremos conseguir una revista de gran calidad y utilidad para todos.

La revista tendrá una edición digital a la que tendrá acceso libre cualquiera que lo desee y que se podrá encontrar en la página web de la FISEM: www.fisem.org. Además, se pretende que haya una edición de corta tirada en papel.

Los autores deben enviar sus originales a union.fisem@sinewton.org .

Editores: Antonio Martinón y Luis Balbuena.

Comité editorial: Alicia Bruno, Dolores de la Coba, Carlos Duque, Antonio Ramón Martín e Inés Plasencia.

Reseña de libro y de cd-rom

INMACULADA FERNANDEZ y Mª ENCARNACION REYES: *Geometría con el hexágono y el octógono*. PROYECTO SUR DE EDICIONES, Granada 2003. 152 páginas. ISBN 84-8254-291-5.

El propósito de este libro es ofrecer al profesorado y al alumnado un interesante estudio de la geometría elemental relacionada con el hexágono y el octógono regulares, con aplicaciones en la vida cotidiana, en el arte y en la arquitectura (una de las autoras es profesora en una Escuela Superior de Arquitectura y la otra lo ha sido).

Comienza con una interesante introducción, que relaciona estos polígonos con formas presentes en la naturaleza (cristalografía, botánica, zoología,...) y en las artes decorativas. En el capítulo I se analizan las medidas de ángulos y lados de polígonos regulares y estrellados relacionados con el hexágono y el octógono. El capítulo II se dedica a la papiroflexia relacionada con dichos polígonos y el siguiente a las proporciones, en el sentido de razones de medidas diagonales/lados,... El capítulo IV se dedica a las posibles disecciones de estos polígonos, para generar otros equivalentes (del mismo área), mediante operaciones de cortar y pegar. En el capítulo V se estudian las cuadraturas, comparando áreas de polígonos relacionados con el hexágono y el octógono. En el capítulo VI se presenta una variada colección de mosaicos y teselaciones periódicas relacionadas con el hexágono y el octógono, que en el capítulo siguiente se particularizan a los que pueden encontrarse en la decoración relacionada con la cultura religiosa. Por último, el capítulo VII se dedica a actividades relativas a los conceptos tratados en todos los capítulos precedentes, incluyendo muchas realizables con un sistema computacional de geometría dinámica (Cabri). Termina con indicaciones (sugerencias) para la resolución de las actividades, a modo de solucionario.

Sólo se echa de menos un poco más de atención a las transformaciones geométricas (reflexiones, rotaciones, traslaciones y reflexiones con deslizamiento), a las que se puede sacar mucho partido en este tipo de análisis geométricos constructivos.

El libro es muy recomendables para profesores y alumnos de todos los niveles (Primaria, Secundaria, Bachillerato y Escuelas Técnicas), siendo idóneo para contribuir a volver a acercar a nuestros alumnos de todos los niveles a la geometría métrica clásica.

Soy un entusiasta del interés de este tipo de Geometría en Educación a todos los niveles y la lectura de este libro me ha sugerido muchas ideas aprovechables para con mis alumnos. Mis felicitaciones a las autoras y a la editorial por la cuidada presentación.

Eugenio Roanes Macías

JESÚS ALEGRE MARTÍNEZ, ANTONIO GONZÁLEZ REBÉS (coord.), LOLA GUILLÉN VALBUENA, Mº PILAR MARTÍNEZ LÓPEZ Y DAMIÁN VALDEVIRA GRACIA: *Poliedros semirregulares (cd-rom)*. PROYECTO SUR DE EDICIONES , S.L., Armilla (Granada) 2003.

Debido a los ordenadores personales actuales y la magnífica resolución gráfica de sus monitores nos parece muy oportuna la presentación de este CD-ROM. Se recomienda, tanto a los profesores como a los alumnos, para facilitar el aprendizaje de este tema, dada la posibilidad de visualizar las representaciones gráficas en tres dimensiones.

Como es prácticamente imposible reseñar cada capítulo de este CD-ROM, nos limitamos a presentar su contenido, que es el siguiente:

- Introducción.
    - ¿Qué es un poliedro?
    - Clasificación.
    - Aproximación a regulares.
    - Aproximación a semirregulares.
- Poliedros semirregulares.
    - Construcción.
    - Descripción.
    - Desarrollos.
    - Ejes.
    - Planos.
- Más sobre irregulares.
    - Métrica.
    - Otra forma de construcción.
    - Rellenado del espacio II.
    - Euler.
    - La conjugación II.
    - ¿Para qué?.
    - Imprimir desarrollos.

Enrique Rubiales

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex. El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos en negrita, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección numerados (excepto el de introducción que irá sin numerar), en minúsculas negritas en 12 puntos, sin punto final. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Si se usa Latex, en estilo “article” y si se usan paquetes específicos de Latex, deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes.

Si se usa otro procesador, distinto de Word o LaTex, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Envío de las copias en papel

Enviar dos copias en papel por vía postal a la sede de nuestra Sociedad, a la dirección que figura en la página 2 de este número del Boletín. Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51,
52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65,66, 67, 68 y 69.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

– la dirección a donde se han de enviar
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.