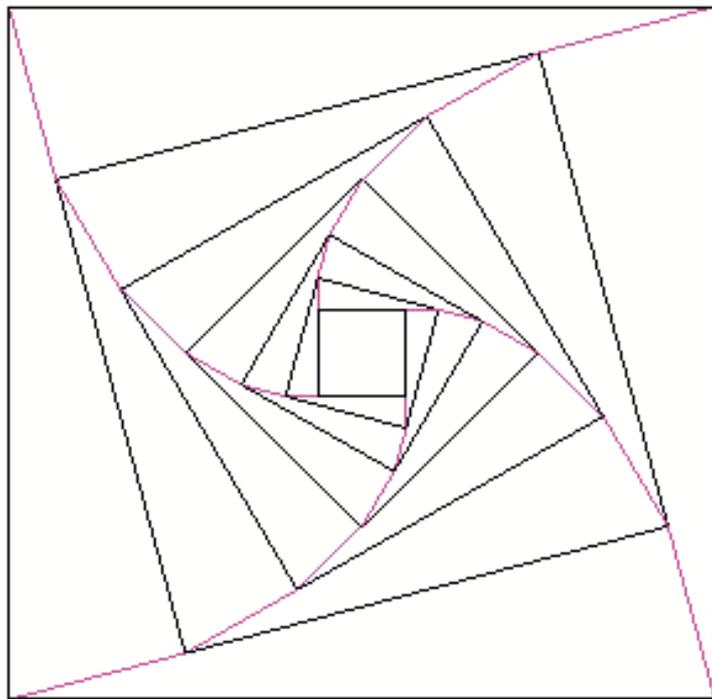


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 66
FEBRERO DE 2004**

ÍNDICE

	<u>Págs.</u>
Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2004	5
XXII Concurso de Resolución de Problemas	6
Don Antonio Rubiños Casanova, por <i>José Javier Etayo</i>	7
III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, por <i>Juan Jesús Donaire Moreno</i> y <i>Joaquín Hernández Gómez</i>	9
XL Olimpiada Matemática Española (1ª Fase - Madrid), por <i>Julio Fernández Biarge</i>	14
Problemas Propuestos en la Primera Fase de la XL Olimpiada Matemática Española en los distritos de Madrid	16
Recensiones en “Zentralblatt (ZDM)” y en “Mathematical Reviews” Presentación del Prof. Heinz Shumann, por <i>Eugenio Roanes Lozano</i>	18
A dynamic approach to “simple” algebraic curves, por <i>Heinz Shumann</i>	21
Breve historia de la geometría del triángulo, por <i>Ricardo Moreno Castillo</i>	22
Cúbica y cuártica: métodos de Tartaglia y de Ferrari. Teoremas de Sturm y Hua, por <i>Luis González</i> y <i>José María López</i>	39
Sobre el método Monte-Carlo geométrico en el Cálculo Integral, por <i>J.C. Cortés</i> y <i>G. Calbo Sanjuán</i>	51
La formulación matemática de la Mecánica del siglo XVII: Galileo, Newton, Leibniz, por <i>Francisco González Redondo</i>	63
Reseña de libros	74
Instrucciones para el envío de originales	91
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	93
Boletín de inscripción	95
	96

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews**

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS

JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ

VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE

(Redacción de publicaciones)

ENRIQUE RUBIALES CAMINO

(Relaciones Institucionales)

EUGENIO ROANES LOZANO

(Gestión de publicaciones)

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

(Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretaria:

MARÍA GASPAS ALONSO-VEGA

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

MARTÍN GARBAYO MORENO

Adjunta a la presidencia (mantenimiento página web):

MARÍA JOSÉ MORENO SÁNCHEZ DE LA SERRANA

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2004

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2004 para el sábado *día 17 de abril del 2004*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos, si procede.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

XXII Concurso de Resolución de Problemas

convocado por
la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas
y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Letras

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

- a) *Primer nivel:* alumnos de 3º de E.S.O.
- b) *Segundo nivel:* alumnos de 4º de E.S.O.
- c) *Tercer nivel:* alumnos de 1º Bachillerato

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *5 de junio del 2004* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 5 de Mayo del 2004, dirigiéndose por carta o por fax al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid
Fax: 91 394 4662

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2003-2004.

DON ANTONIO RUBIÑOS CASANOVA

José Javier Etayo

Siempre me pareció un hombre sencillo, discreto, de pocas palabras y de una corrección muy contenida. De tarde en tarde coincidíamos en alguna reunión cultural en la que jamás alzó la voz salvo que tuviera que opinar sobre asuntos para los que su condición de editor le daba mayor autoridad. Tengo la impresión de que así se nos fue también, calladamente, como sin querer llamar la atención; es al menos lo que hemos ido sabiendo de su fallecimiento.

Con esa misma modestia miraría seguramente su evocación en estas páginas que entendería abiertas exclusivamente a nuestros compañeros y colegas matemáticos, nunca a un editor y librero como él. A mí, sin embargo, no me parece injustificado que se me hayan pedido estas líneas, pues Rubiños representa esa colaboración opaca pero imprescindible de suministrarnos nuestros útiles de trabajo, los libros. Poco podríamos haber hecho sin el respaldo de esa intendencia que, en su caso, luce un marchamos de añeja solera: *Rubiños, 1860*.

Y, en efecto, en el tiempo en que él estuvo al frente de la casa y nos informaba de las novedades (y también de generosas ofertas con que liquidar parte de sus existencias) mediante unos catálogos en los que no faltaba algún apunte pintoresco, seguramente de su propia mano, podíamos ver cómo la literatura científica copaba un espacio muy considerable de sus depósitos; y, dentro de ella, de un modo especial, los textos de matemáticas. Todavía más: había dedicado una atención muy particular a importar y a traducir y editar libros de matemáticos rusos, y muy bien podría ser su librería el único sitio donde encontrarlos; como que alguien dio en llamarle cariñosamente “Rusiños”, jugando con su apellido.

Precisamente *tengo ante mí una producción realmente importante de su editorial: la Enciclopedia de las Matemáticas*, elaborada por la Academia de Ciencias de Rusia, que coordinó Vinogradov y consta de doce volúmenes. La traducción y adaptación al español la hizo uno de los anteriores presidentes de nuestra Sociedad, García Sestafe, y a esa circunstancia debo el haber conocido a Rubiños. Hará de esto poco más de seis años, cuando ambos, Sestafe y él, me invitaron a acompañarles en la presentación de la obra, que se iba a celebrar en la Embajada de

Rusia en Madrid. Me voy a permitir un recuerdo personal: al contar que había recibido la Enciclopedia e inmediatamente me había puesto a hojearla, añadí un tanto bruscamente: “¡Nunca lo hubiera hecho!” Puede suponerse el respingo que se le escapó a Rubiños, que estaba a mi lado, al pensar que iba a hacerle una crítica negativa y casi feroz. En seguida se tranquilizó: lo que vine a decir es que aquella primera mirada me había incitado a abstraerme en la lectura de tal modo que, si me dejo llevar por ella, aún estaría leyendo y no habría tenido tiempo de preparar las pocas palabras *que me tocaba entonces pronunciar*.

Todavía tuve ocasión de hacerle justicia un par de meses después, cuando un periódico me pidió una reseña de la Enciclopedia. Dije que la aventura de afrontar la publicación de una obra de esta envergadura entrañaba una valentía muy difícil de medir. “Cierto que Rubiños nos tiene ya acostumbrados a la provisión continuada de una buena biblioteca científica pero esta vez, si no temiera pecar de impertinente, podría decirle con el acento más castizo que se ha pasao. Ojalá que al arriesgarse en semejante operación reciba el premio que su dedicación merece.” Bueno, pues sí: algún tiempo más tarde le pregunté por el resultado y me dijo que se estaba vendiendo bien, más a instituciones que a particulares, naturalmente.

Y tampoco quiero olvidar la recepción de un par de cartas de agradecimiento, por el artículo y por la actuación en la Embajada, pues no le bastaba con hacerlo de palabra. Brevemente, y con una cortesía muy suya, interpreta mis intervenciones como un acto de bondad y me ofrece su amistad que luego refrendaría. Así era Rubiños: seguro que si estuviera aquí y leyera esto me escribiría otra carta parecida, sin ocurrírsele pensar que es a él a quien hay que agradecerle lo que hizo y lo que ha sido. Descanse en paz nuestro buen amigo.

III Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid

Organizado por nuestra sociedad en colaboración con la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, el Concurso Intercentros se va consolidando a lo largo de sus tres años de existencia. Ya son muchos centros públicos, privados y concertados de la Comunidad de Madrid los que destinan el penúltimo sábado de Noviembre para que sus estudiantes disfruten haciendo Matemáticas, desarrollen la labor de equipo, se pongan a prueba individualmente y vivan con intensidad la prueba por relevos en donde tienen que trabajar con el dato que les mandará, o no, uno de sus compañeros. La sensación que se tiene al final de la mañana, después de 4 horas de trabajo es que para el año que viene tenemos que preparar mejor el reparto de problemas en la prueba por equipos, que en la prueba individual hay que asegurar los problemas fáciles y que vamos a decirle a nuestro profe de Mates que trabajemos en clase pruebas como la de relevos que son curiosas, interesantes y que nos enganchan más que ninguna. Esa fue, al menos, la percepción que nos llegó a los organizadores, a los que las palabras de agradecimiento por parte de los profesores responsables de los centros nos supuso la mejor inyección de ánimo para echar más horas y que en el futuro este concurso siga creciendo.

Es muy corto el espacio del que disponemos para escribir aquí los enunciados de los problemas de las diversas pruebas en que consistió el concurso así como las bases del mismo –todo esto lo podéis ver en la página WEB de la Sociedad– pero, a título de ejemplo, aquí tenéis algunos.

En la prueba por equipos, en donde se les daba a cada equipo –6 estudiantes, dos de cada uno de los niveles, 1^{er} ciclo ESO, 2^o ciclo y Bachillerato– 10 problemas para que los resolvieran en un tiempo límite de 45 minutos, se les preguntaban cosas como:

Tres lados consecutivos de un cuadrilátero inscrito a una circunferencia miden 3, 4 y 7 cm. Calcula la longitud del cuarto lado.

Calcula el radio de la menor de dos circunferencia tangentes exteriores y tangentes a su vez a dos rectas perpendiculares si el radio de la mayor es 1.

A los pequeños, en la prueba individual se le pedían junto a otros 4 problemas que:

Si los enteros positivos 30, 72 y N tienen la propiedad de que el producto de cualesquiera dos de ellos es múltiplo del tercero, calcular el menor valor posible para N .

A los de 3º y 4º de ESO, les preguntábamos, y se liaron casi todos, que obtuvieran razonadamente y sin calculadora el número $\sqrt{2003 \cdot 2001 \cdot 1999 \cdot 1997 + 16}$, y a los de Bachillerato les decíamos, por ejemplo:

En una ciudad hay una epidemia de gripe, estando cada una de las personas de esa ciudad sana o enferma. Si una persona está hoy sana, la probabilidad de que mañana siga sana es del 95% y si está enferma, la probabilidad de que mañana siga enferma es del 55%. Si hoy está enferma el 20% de la población, ¿qué porcentaje de la población se espera que mañana esté enferma?

Copiamos a continuación toda la prueba por relevos, por no ocupar mucho espacio, ser la más novedosa y para que os hagáis una idea muy precisa de la misma.

Cada uno de los equipos se dividía en dos grupos de 3 estudiantes, uno de cada nivel, y a cada uno de los 84 grupos –hubo 42 equipos participantes– les proponíamos lo siguiente:

1º ciclo de ESO

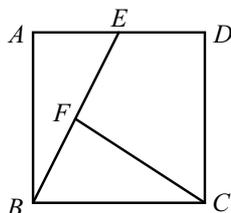
1A. *Si el número de 5 cifras 5DDDD es divisible por 6, calcula el valor de D . Pasa la respuesta a tu compañero de Bachillerato.*

1B. *Sea “ T ” la respuesta del problema 2B. Calcula cuántos múltiplos de 10, positivos y menos que $6T$ son suma de cuatro enteros consecutivos. Pasa la respuesta a tu compañero de Bachillerato.*

1C. *Sea “ T ” la respuesta del problema 2C. La diagonal de un cuadrado mide T cm. Calcula el área de un octógono regular de perímetro igual al de ese cuadrado.*

2º ciclo de ESO

2A. Sea T la respuesta del problema 3A. En la figura adjunta, $ABCD$ es un cuadrado de $T/17$ cm de lado. E es el punto de medio de AD y CF es perpendicular a BE . ¿Cuál es el área del cuadrilátero $CDEF$?

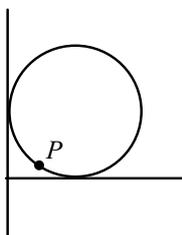


2B. Una función f definida para los enteros positivos verifica que $f(m) + f(n) = f(mn)$ cualesquiera que sean los números enteros positivos m y n . Si $f(2) = 8$ y $f(3) = 10$, calcula $f(12)$. Pasa la respuesta a tu compañero de 1º ciclo.

2C. Sea “ T ” la respuesta del problema 3C. En un triángulo rectángulo ABC , las bisectrices de los ángulos agudos B y C se cortan en P . La distancia entre P y la hipotenusa es $T + 1$. Calcula la distancia entre P y el vértice del ángulo recto A .

Bachillerato

3A. Sea “ T ” la respuesta del problema 1A. La circunferencia del dibujo es tangente a los ejes de coordenadas. El punto P de la circunferencia dista T unidades de un eje y $(9/2)T$ unidades del otro. Calcula el radio de la circunferencia. Pasa la respuesta a tu compañero de 2º ciclo.



3B. Sea “ T ” la respuesta del problema 1B. ¿Cuál es el valor más pequeño de la expresión “ $a^2 + Ta$ ” donde “ a ” puede ser cualquier número real?

3C. Considera la función $f(x) = (x + a)^3 + b^2$. Calcula el número de parejas (a, b) que cumplen $f(0) = 1$ y $f(1) = 2$. Pasa la respuesta a tu compañero de 2º ciclo.

Como hemos comentado anteriormente, hubo 42 centros participantes. Se habían inscrito 46, pero cuatro de ellos no pudieron asistir a la Facultad de Matemáticas. Todo esto supuso que ese sábado hubiera en la Facultad 252 estudiantes peleando con los problemas en las diversas aulas que habíamos habilitado y casi tantos padres, profesores y acompañantes haciendo lo mismo en los pasillos. Después del día de la segunda fase del Concurso de Primavera nunca estuvo la Facultad tan animada.

Y como en todo concurso, hubo sus ganadores. Por centros, el ganador fue el IES San Juan Bautista, quedando en 2º y 3º lugar el Colegio Alemán y el Colegio San José del Parque, respectivamente. Los ganadores individuales, dos por nivel, fueron:

Nivel 1 (1º - 2º ESO)

1. Jorge Ramiro Tena Orcajo (IES San Juan Bautista)
2. Santiago Moreno Jaureguizar (Colegio Ntra. Sra. de las Maravillas)

Nivel 2 (3º - 4º ESO)

1. Eduardo Casanova Cuesta (Colegio Joyfe)
2. Daniel Luque Arriero (IES San Juan Bautista)

Nivel 3 (Bachillerato)

1. Elisa Lorenzo García (IES Fortuny)
2. Ignacio Somoza Sotillos (Colegio Valdeluz)

El próximo 28 de Abril, coincidiendo con la entrega de premios del VIII Concurso de Primavera, allí estarán estos estudiantes y estos centros a recoger sus premios. Diplomas y muy poco más, pero, con seguridad, suficiente para reconocer el esfuerzo y el mérito.

Y el curso que viene –recordad, penúltimo sábado de noviembre– seremos más. La trayectoria del concurso en sus tres años de existencia, –17 centros el primer año, 28 el 2º y 42 este último– así lo pronostica. Y si los participantes comunican su experiencia a sus amigos de otros centros, muy probablemente lleguemos a números insospechados para este tipo de concursos.

Juan Jesús Donaire Moreno
Joaquín Hernández Gómez

XL Olimpiada Matemática Española

Primera Fase - Madrid

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la "*XL Olimpiada Matemática Española*" correspondientes al curso 2003-2004 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 16 y 17 de Enero de 2004.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio* y se desarrolla en dos fases: la Primera tiene lugar en distintos distritos; este año, tres de ellos corresponden a la Comunidad de Madrid, que cuenta con cinco Universidades estatales, además de las privadas.

Los tres ganadores de cada distrito reciben un Diploma acreditativo de la Real Sociedad Matemática Española y son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio para la concesión de un premio en metálico que este año es de 380, 285 y 220 € para los ganadores de cada Distrito.

Los alumnos premiados son invitados a participar en la Segunda Fase, que este año tendrá lugar en **Ciudad Real**, del 25 al 28 de Marzo. En ella se entregarán 6 Medallas de Oro, 12 de Plata y 18 de Bronce. Las medallas de oro llevarán anejas premios en metálico de 750 €.

Con los mejores clasificados en esa segunda fase, se formará el equipo que representará a España en la *45^o Olimpiada Matemática Internacional*, que este año se celebrará en **Grecia** y en la *XIX Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas*, que tendrá lugar en **España**, en el mes de Septiembre.

Las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de tres horas y media de duración cada una, en las que se propusieron seis problemas, cuyos enunciados damos en este número de nuestro Boletín. Las pruebas de los tres distritos que corresponden este año a todas las Universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurren 57 alumnos, de los que 6 no acudieron el segundo día.

Cada problema se calificó con un máximo de *7 puntos*, como en la mayor parte de las competiciones internacionales y como ya se hizo el curso anterior. De este modo, había una posibilidad teórica de obtener *42 puntos*.

Damos a continuación los nombres de los *nueve* alumnos premiados en los distritos de Madrid **A, B y C**, ordenados por puntuaciones decrecientes:

1º A. - D^a. Elisa LORENZO GARCÍA , de 1º de Bach. del I. E. S. Fortuny de Madrid	31 puntos
1º B. - D. Javier de la NUEZ GONZÁLEZ , de 4º de E.S.O. del Liceo Italiano de Madrid	25 puntos
1º C. - D. Ricardo MARTÍN BRUALLA , de 1º de Bach. del Colegio Alemán de Madrid	25 puntos
2º A. - D. Carlos PARDO MARTÍN , de 1º de Bach. del Colegio “Retamar” de Madrid	25 puntos
2º B. - D^a. Beatriz GARCÍA GARCÍA , de 1º de Bach. del I. E. S. Mirasierra de Madrid	24 puntos
2º C. - D. Daniel BARRERA MAYORAL , de 2º de Bach. del Colº de la Inmaculada de Getafe (Madrid)	24 puntos
3º A. - D^a. Ana GONZÁLEZ GONZÁLEZ , de 2º de Bach. de Madrid	17 puntos
3º B. - D. Ding RU , de 4º de E.S.O. del I. E. S. Ramiro de Maeztu de Madrid	16 puntos
3º C. - D. José Manuel ALONSO INCLÁN , del Colº de La Salle del Sagrado Corazón, de Madrid	16 puntos

Debemos resaltar que entre los premiados hay dos que están cursando 4º de E. S. O.

Como otros años, la mayor parte de los premiados son bien conocidos por su brillante participación en los concursos de resolución de problemas de nuestra Sociedad o en otras competiciones anteriores, incluso internacionales.

Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

En este mismo número del Boletín, damos los enunciados de esos problemas y, junto con cada uno, las puntuaciones medias alcanzadas en él, por todos los participantes y por los nueve premiados, así como el número de soluciones calificadas con 6 o con 7, que consideramos aceptables.

J.F.B.

Problemas propuestos en la Primera Fase de la XL Olimpiada Matemática Española en los Distritos de Madrid

(Los mismos problemas que en la mayoría de los distritos españoles)

Problema 1

Encontrar todas las funciones $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tales que $f(f(n)) = n+2$ para todo número natural n .

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,3

Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 2,6

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 57): 0

Problema 2

Un triángulo tiene sus vértices en cada uno de los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio: ninguno está en el origen, ni dos de ellos coinciden en el mismo eje. Demostrar que el triángulo es acutángulo.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,4

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 5,4

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 57): 7

Problema 3

Hallar el número mínimo de apuestas de quiniela que debemos rellenar para asegurar que obtenemos, al menos, 5 aciertos en una de ellas. (Una apuesta de quiniela consiste en un pronóstico de resultado para 14 partidos, habiendo en cada partido 3 posibles resultados).

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 0,8

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 2,2

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 57): 6

Problema 4

Demostrar que si $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$, entonces

$$\left| \frac{x - y}{1 - xy} \right| \leq \frac{|x| + |y|}{1 + |xy|}$$

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,3

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 4,4

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 57): 8

Problema 5

Consideramos los polinomios $P(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$, $Q(x) = 3x^2 + 2Ax + B$, donde x es la variable y A, B, C son parámetros. Supongamos que, si a, b, c son las tres raíces de P , entonces las de Q son $(a+b)/2$, $(b+c)/2$. Determinar todos los posibles polinomios P, Q .

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1.1

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 3,7

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 57): 5

Problema 6

Hallar todas las posibles formas de escribir 2003 como suma de dos cuadrados de números enteros positivos.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,8

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 4,2

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 57): 4

Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) y Mathematical Reviews incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 35 (3) DE 2003

- #2317 (sección F60). Phidias numbers, por Adam Marlewski, Govert Werther, Bol. Soc. Puig Adam 63 (Feb 2003), págs. 18-31.
- #2426 (sección G74). Estudio de las secciones planas de las cuádricas mediante sus invariantes métricos, *por* Julio Fernández Biarge, Bol. Soc. Puig Adam 63 (Feb 2003), págs. 32-44.
- #2499 (sección I30). Cálculo de límites radicales a través de sistemas en diferencias acoplados, *por* Juan C. Cortés López, Gema Calbo Sanjuán, Bol. Soc. Puig Adam 63 (Feb 2003), págs. 45-50.
- #1895 (sección A30). Del *Artem Analyticem* de Vieta a la *Mathesis Universalis* de Descartes. Nuevas perspectivas en torno a un período singular en la Historia del Álgebra, *por* Francisco González Redondo, Bol. Soc. Puig Adam 63 (Feb 2003), págs. 51-67.
- #2214 (sección D50). Ordenador, intuición y solución de dos problemas, *por* Enrique Rubiales Camino, Bol. Soc. Puig Adam 63 (Feb 2003), págs. 68-81.
- #2196 (sección D44). Una Apuesta por la Búsqueda de Elementos Motivadores en el Aprendizaje de las Matemáticas en Bachillerato, *por* Juan José Prieto Martínez, Bol. Soc. Puig Adam 63 (Feb 2003), págs. 82-89.
- #2421 (sección G70). Sobre una transformación geométrica, *por* Ricardo Moreno Castillo, Bol. Soc. Puig Adam 63 (Feb 2003), págs. 90-93.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 35 (5) DE 2003

- #4173 (sección N30). Algebra in the time of computers, por *Kurt Kreith*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 64 (2003) 24-34.
- #4028 (sección H20). Las sumas de potencias de Bernoulli: un problema histórico, por *Juan A. Aledo y Juan C. Cortés*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 64 (2003) 35-44.
- #4039 (sección H30). Reflexiones sobre la selección y resolución de problemas, por *Enrique Rubiales Camino*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 64 (2003) 45-66.
- #3687 (sección A30). El origen histórico de la Física matemática. La matematización de las relaciones cinemáticas desde Arquímedes hasta Galileo, por *Francisco A. González Redondo*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 64 (2003) 67-78.
- #4011 (sección G70). Sobre las medianas de un triángulo, por *María Belén Rodríguez Rodríguez*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 64 (2003) 79-83.
- #3990 (sección G40). Otra demostración del teorema de Tales, por *Pedro Pescador Díaz*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 64 (2003) 84-86.
- #4064 (sección I30). Borges, la arena y el infinito, por *Jorge Alejandro Ramírez Cruz*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 64 (2003) 87-93.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 35 (6) DE 2003

- #5626 (sección U70). The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics, por *Bernhard Kutzler*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 15-37.
- #5001 (sección G40). El Goniocentro, por *Julio Fernández Biarge*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 38-45.
- #5179 (sección I20). Desigualdades para funciones f que satisfacen la ecuación funcional $f(x-y) = g(f(x), f(y))$, por *Juan C. Cortés López, Gema Calbo Sanjuán*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 46-51.

- #5146 (sección H30). Una reflexión en torno a la ecuación de segundo grado, por *J. M. Aroca*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 52-54.
- #5002 (sección G40). Una demostración breve del Teorema de Tales, por *Pedro Pescador Díaz*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 55-57.
- #5125 (sección H20). Obtención del Triángulo de Pascal a partir del cubo n- dimensional, por *Sergio Falcón Santana*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 58-62.
- #4280 (sección A30). Un análisis de los “Elementos de aritmética, álgebra y geometría” de Juan Justo García Rodríguez, por *J. Cabezas Corchero y F. Moreno Soto*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 63-70.
- #5452 (sección M50). El teorema de π entre Vaschy y Buckingham: el método de las variables de dimensión cero, por *Francisco González Redondo*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 71-81.
- #5036 (sección G43). Uso de CABRI GEOMETRE II en Tecnologías de la Información, por *Enrique Rubiales Camino*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 82-85.
- #5003 (sección G40). Acerca de un problema de la “Optica” de Euclides, por *Juan Tarrés Freixenet*, Boletín de la Sociedad Puig Adam 60 (2002) 86-92.

Presentación del Prof. Schumann

El profesor Heinz Schumann, Catedrático del Dpto. de Matemáticas e Informática de la Universidad de Educación de Weingarten (Alemania), es un bien conocido experto en temas de Enseñanza de la Matemática con Nuevas Tecnologías. Para quien esté interesado en conocer detalles sobre sus trabajos, su página web es:

<http://www.ph-weingarten.de/homepage/lehrende/schumann/>

El pasado 27 de mayo de 2003 impartió, en la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid, una conferencia titulada “Computer Aided Solution of 3D Problems in Analytic Geometry from a Didactic Perspective”. Esta conferencia fue organizada por la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas y la Sección Departamental de Álgebra de la U.C.M.

El profesor Schumann ha tenido la deferencia de escribir un extenso artículo, que aparecerá dividido entre este número y el próximo de nuestro Boletín, al objeto de acercar sus ideas a aquellos que no pudieron asistir a su conferencia.

Eugenio Roanes Lozano

A dynamic approach to “simple” algebraic curves (I)

Heinz Schumann

Faculty III, Mathematics and Informatic
University of Education Weingarten
D-88250 Weingarten, Germany
schumann@ph-weingarten.de

Both didactic theory and practice of computer-assisted mathematics teaching always reflect the latest state of software development, which is considered the non plus ultra.

Abstract

Despite its low relevance for teaching in schools, the desideratum “Algebraic Curves” has always been an issue within mathematical didactics. This article aims to continue this tradition with respect to a project oriented mathematics instruction by applying current dynamic geometry software (Cabri II Plus).

1. Introduction

In these days of reduced mathematical awareness –when mathematical education within context of international student assessments like PISA is focused on so-called “standards of mathematical education” and “core curricula”–, it may be questionable to propagate a mathematical topic which has seldom found its way into the curricula of school mathematics, although its treatment already has a long lasting methodical and didactic tradition.

The subject of “Algebraic Curves” should be re-evaluated for the purposes of general teaching projects, course work projects, working groups and extracurricular mathematics e.g. for gifted students in consideration of newly developed and adequate dynamic geometry computer tools. The arguments for the treatment of algebraic curves using computers in school geometry brought forward by Schumann 1991, Weth 1993, Schumann & Green 1994, Schupp & Dabrock 1995 and others still apply, and we shall repeat them here in brief.

The following points favour the treatment of algebraic curves:

- Algebraic curves bridge the gap between (synthetic) geometry and algebra
- they offer a variety of problems, solution strategies and relationships of mathematical interest
- they are of a generalising nature
- they support modelling activities
- they enhance functional and operative thinking
- they play an important role in the history of mathematics
- they are aesthetically pleasing.

Computer Algebra Systems (CAS) and Dynamic Geometry Systems (DGS) are excellent exploration and reconstruction media for approaching the subject of algebraic curves. We shall therefore treat algebraic curves in context, using computer tools that are available in the classroom. These tools should be menu-controlled as they are used only temporarily and by novices, therefore command-controlled tools will not be discussed here. Of course, sufficient mathematical knowledge is required for successful computer-assisted treatment of algebraic curves.

Generally speaking, algebraic curves are represented as follows:

An algebraic curve is the zero-set of a polynomial in x and y

$$\{(x,y) \mid \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l a_{ij} x^i y^j = 0\}_{P \times P},$$

in which $a_{ij} \in P$; $\max(i+j)$ with $a_{ij} \neq 0$ is the degree of the algebraic curve. This algebraic equation is an object of algebra while the corresponding graph is an object of synthetic geometry.

The following diagram (Schumann 2001) will serve to illustrate the options of representation and interaction using the computer tools currently available:

↓: “Classical” algebraic curves are constructed with compass and ruler; the constructions generally have no more than two parameters defining shape and position. Dynamic Geometry systems (DGS) can illustrate the point-by-point

generation using the trace mode, which supports the point-set interpretation of curves (see, e.g. Schumann 1991). Dynamic variation of parameter values (e.g. for investigating various cases and for generating families of curves) requires that one must be able to generate them as referenceable graphic objects not only as states of the screen. The corresponding graph is generated by dynamic interpolation of supporting points (with rounded coordinates depending on the system arithmetics).

These curves may be constructed by different methods, e.g. as foot curves, slide point curves, cissoids, conchoids, rolling curves, image curves at specific transformations etc. Constructions of curves as envelopes will not be considered here.

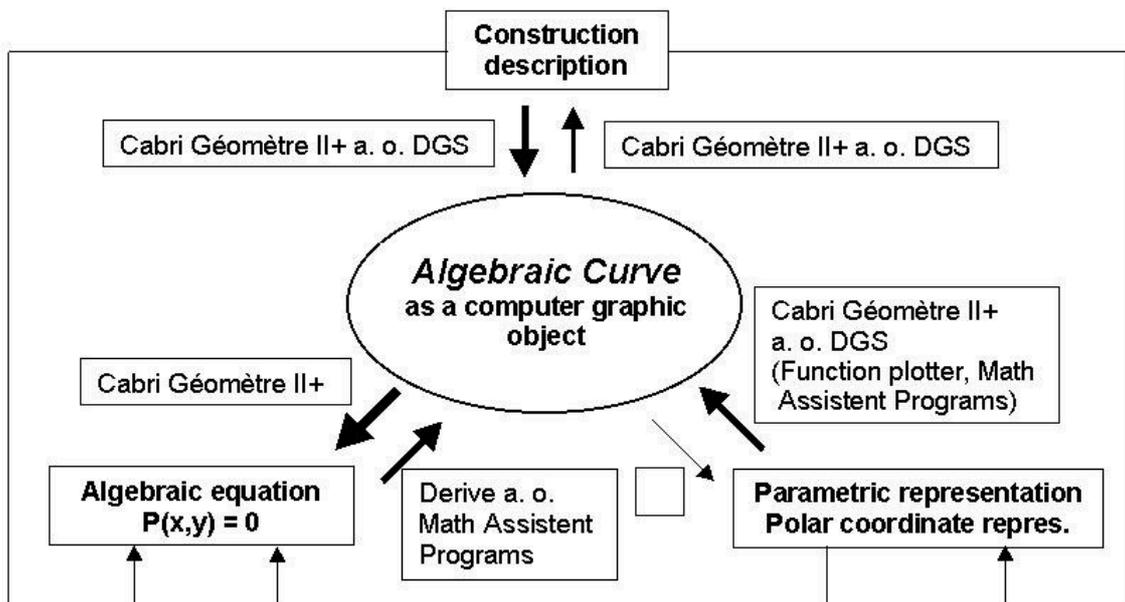


Diagram 1: Algebraic curve as a computer graphic object

↑ : The option “Repeat Construction” will give us the construction method for any of the constructed curves.

↙ : Cabri Géomètre II+ (www.cabri.com) is the only DGS among those available on the market, that bridges the gap to algebra by determining the representation of an algebraic curve as the zero-set of a polynomial in x and y with correspondence to a selected coordinate system. For this, Cabri Géomètre II+



uses a numeric algorithm which provides satisfactory results for algebraic curves

$P(x;y)=\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^l a_{ij}x^i y^j=0$ up to the 6th degree. (Roughly, the algorithm can be

described as follows: Random selection of about 100 supporting points of the generated curve; calculation of the $(n+1)(n+2)/2$ coefficients of $P(x;y)=0$ of degree n using a suitable system of equations derived from the point coordinates starting with $n = 1$ until the rest of the selected points approximately issues zeros of $P(x;y)=0$.)

↗ : Visual testing of the correctness of the resulting algebraic curve is possible using a mathematics software capable of plotting implicit functions. Among the menu-controlled software tools, DERIVE (derive-europe.com) offers this option.

↖ : It is possible to achieve a static graphic generation of an (algebraic) curve from a parametric or polar coordinate representation using suitable software systems or modules for plotting functions. Dynamic generation of graphic curve objects by DGS from these representations using direct manipulation for variation of running parameter values is much more impressive, because the user is able to observe the curve creation by trace mode individually applying slider techniques.

↘ : There is no (published) computer tool, as yet on the market, which generates the parametric or polar coordinate representation for an algebraic curve given as an adequate constructed computer graphic object. The prototypic “paramGeo” Package (Roanes-Lozano et al. 2003) for MAPLE (maplesoft.com) or DERIVE is able to generate these representations.

This ends the summary of the general technical facilities of computer tools in as far as they are of relevance to this article.

The derivation of the algebraic equation $P(x;y)=0$ from the synthetic-geometric construction of a curve is interesting and fruitful from the mathematical point of view because this derivation provides – independent of the experimental and inductive methods of knowledge finding – mathematical insight and argumentation for the algebraic equation produced by Cabri II+. In the case of algebraic curves of 2nd degree, so-called conic sections, an analytic-geometrical derivation of the algebraic equation could be achieved due to adequate constructions. That is not possible in general in the case of algebraic curves of higher degree; the derivation needs a parametric representation or a polar coordinate representation and elimi-

nation or substitution of the parameters from these representations may induce difficult calculation problems.

2. A method for the treatment of “simple” algebraic curves

The following method combines geometry and algebra as well as inductive and deductive methods of knowledge acquisition or knowledge verification and requires only elementary mathematical knowledge.

We shall term an algebraic curve (AC) as “simple” in this context if integral construction parameters are inducing integral coefficients of the corresponding algebraic equation with regard to a suitable Cartesian coordinate system. Almost all the classical algebraic curves can be treated as simple curves.

- 1) **Construction** of the AC with a DGS (here: Cabri II+) according to instructions and phenomenological description.
- 2) **Variation** of the construction parameter values in order to observe and describe the changes in position and shape of the AC. If helpful, generation of an animated graph.
- 3) **Embedding** the constructed AC in a suitable Cartesian coordinate system.
- 4) **Automatic determination of the algebraic equation** $P(x;y)=0$ of the AC with respect to the chosen coordinate system and testing the equation.
- 5) **Linkage** of the construction parameter objects to grid points of integer coordinates and with grid snap for restriction to integral construction parameters.
- 6) **Experimental-inductive identification of the coefficients in** $P(x;y)=0$ and control of these coefficients as a function of the construction parameters. (Eventually inductive graphic verification of $P(x;y)=0$ for non-integral parameters using a computer algebra system, e.g. DERIVE.)
- 7) **Mathematical verification of** $P(x;y)=0$: Direct analytic-geometrical derivation of $P(x;y)=0$ from the construction description of the curve or, if that is not possible: Derivation of the parametric or polar coordinate representation from the construction description; dynamic generation of the AC according to these representations for control; elimination or substitution of the running variables or parameters, also using a CAS (e.g. DERIVE).

3 Application of the method

In the following, this method will be applied to classical algebraic curves of the 3rd, 4th and 6th degree. Conic sections, which can be treated the same, will be left out here. –Not all the instructions of the method will be explained in the following examples; the details of the computer software functions are not described.

Example 1 (Cisoid): The cisoid lends its name to a whole class of algebraic curves, which are constructed with the same construction principle. It is used for example in the geometric solution of the Delian problem (duplication of the cube).

1) How to construct the curve:

- Construct a circle of diameter OA (construction parameter).
- Construct a tangent in A perpendicular to the diameter OA.
- Put one on the circle movable point K.
- Construct a ray with the initial point O through K which intersects the tangent in G.
- Lay off line segment KG from O on to this ray.

Which locus describes P, if K moves in a circle?

2) The resulting locus is the cisoid (Fig. 1.1), which is symmetric to OA and has a pointed end in O and the tangent as asymptote.

3/4) Cabri II+ generates an algebraic equation of the third degree when we embed the curve in a Cartesian coordinate system (Fig. 1.2 with O as origin and with diameter OA on the positive x-axis). Because of its symmetry to the x-axis there are only y-terms with even exponents in the summands. We confirm experimentally the correctness of the equation with point testing (Fig. 1.3).

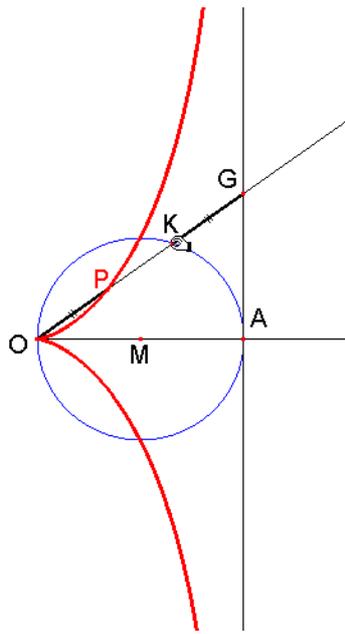


Fig. 1.1: A cissoid's construction

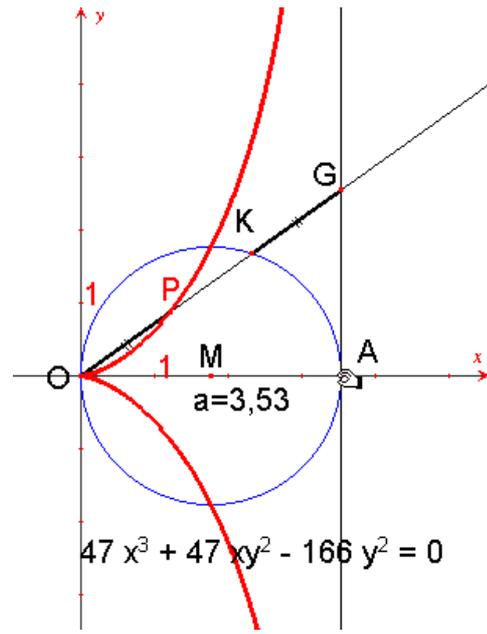


Fig. 1.2: A suitable cissoid's embedding

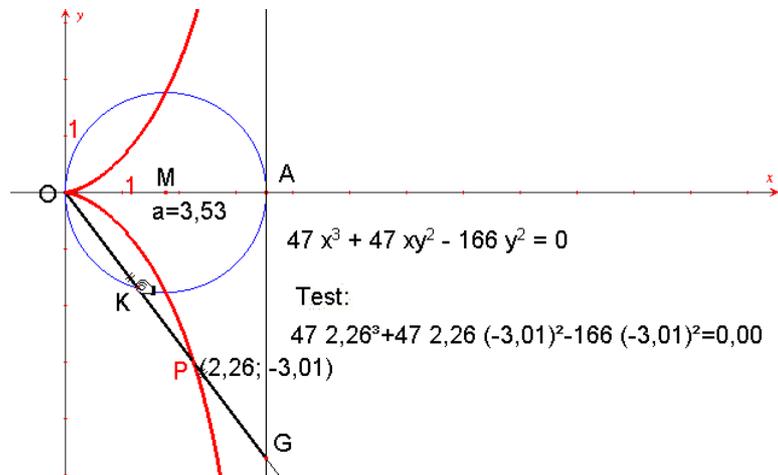


Fig. 1.3: Testing cissoid's equation

5/6) The dependences between parameter a and the coefficients of the equation could only be recognised when A is linked to the integral grid and the integral

values of parameter a are varied (Figs. 1.4-1.5). Only the coefficient of the y^2 -term depends on a ; it equals a and the resulting equation of the curve is:

$$x^3 + xy^2 - ay^2 = 0 \quad (1.0),$$

which can be confirmed by further variation of integral values of Parameter a .

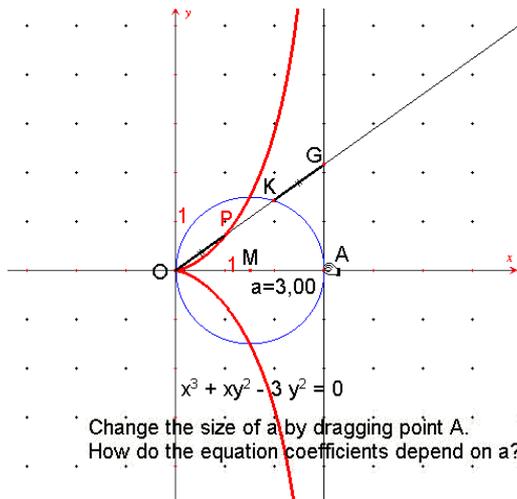


Fig. 1.4: Investigating coefficient's dependency

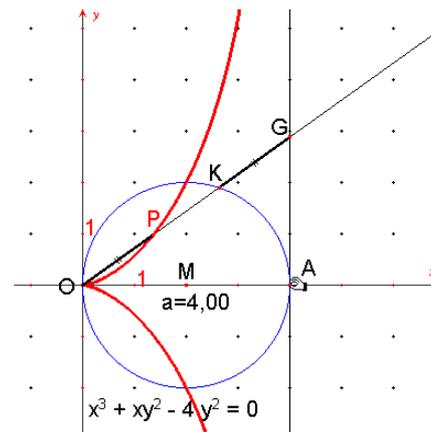


Fig. 1.5: Investigating coefficient's dependency

We extrapolate the result for non-integral parameter values, e.g. by plotting curves of equation (1.0) with DERIVE (see the example in Fig. 1.6 for an approximate value of $a = \sqrt{10}$).

7) Fig. 1.7 shows the analytic-geometrical derivation of the algebraic equation.

Ray OG has the slope $\frac{y}{x}$ and, correspondingly, G has the coordinates $(a; a \frac{y}{x})$.

After construction, P has the coordinates $x = a - x_k$ and $y = a \frac{y}{x} - y_k$, i.e. for K : $x_k = a - x$

and $y_k = a \frac{y}{x} - y$. Substitution in equation of the circle $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$ results in

$(a-x)^2 + \frac{y^2}{x^2} (a-x)^2 - a(a-x) = 0$. Division by $a-x \neq 0$ ($x=a$ is not a point of the cissoid) and multiplication by $x^2 \neq 0$ result in

$$x^3 + xy^2 - ay^2 = 0.$$

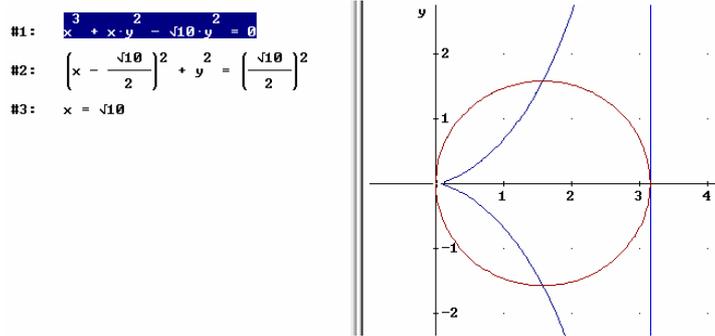


Fig. 1.6: Equation testing with DERIVE

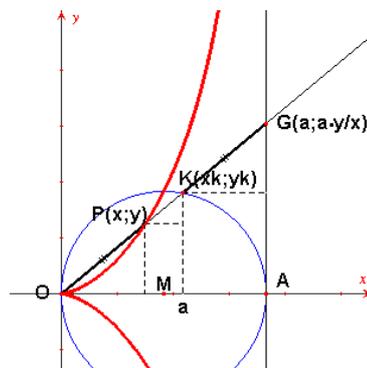


Fig. 1.7: Deriving the algebraic equation

Generalisation: We shall now generalise the cissoid into the so-called hypo-cissoid, by constructing the perpendicular AG on the positive x-axis in an arbitrary grid point (Fig. 1.8). It is easily recognised that the corresponding two-parameter curve obeys the equation $x^3 + xy^2 + (d-a)x^2 - ay^2 = 0$, in which $(a-d)$ is the x-coordinate of the point of intersection of the curve with the x-axis. In case of $(d-a) > 0$, in Cabri the hypo-cissoid must be composed of two partial curves, which

are created by K_1 resp. K_2 positioned on the circle arcs separated by the perpendicular line through A (Fig. 1.9). The animated graph in Fig. 1.10 shows the different shapes of the hypo-cissoid for $0 \leq a \leq d_0$ and for $d_0 \leq a$ (in the case of $a=d_0$ the cissoid is clearly visible separating the curves with $(d_0-a) > 0$ resp. $(d_0-a) < 0$).

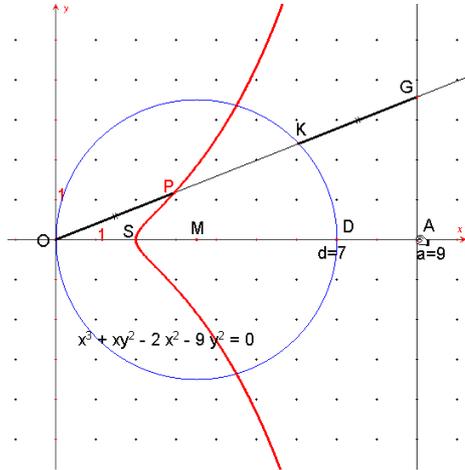


Fig. 1.8: Hypo-cissoid,
case $(d_0-a) < 0$

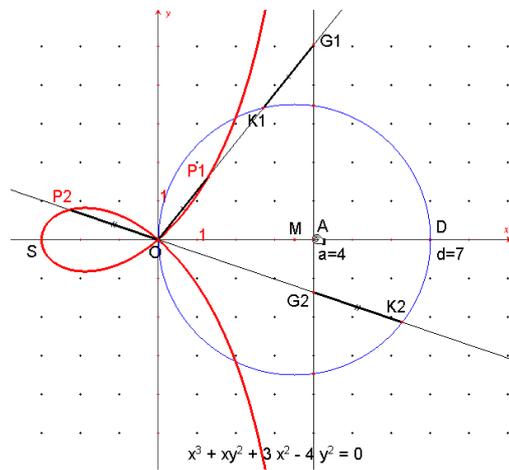


Fig. 1.9: Hypo-cissoid,
case $(d_0-a) > 0$

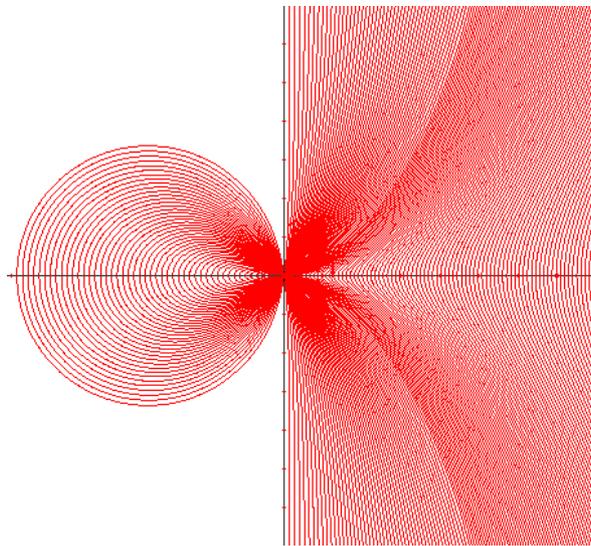


Fig. 1.10: Hypo-cissoid's animation for parameter a

Example 2 (Pascal's limaçon – or Pascal's snail): Pascal's limaçon is named after Stephan Pascal, the father of the famous Blaise Pascal. It can be constructed in several ways. We shall start with its construction as a foot curve (Fig. 2.1):

- Construct a circle with center M through R and then a point P (pole), first positioned outside the circle, i.e. with $|PM| > |MR| = r$. Put a movable point B on the circle and construct the circle tangent in B .
- Drop the perpendicular from P to the circular tangent with foot F .

What is the locus of F if B circulates?

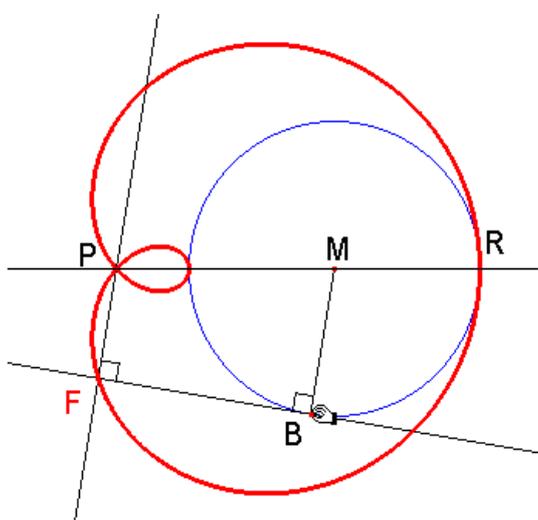


Fig. 2.1: A construction of Pascal's limaçon

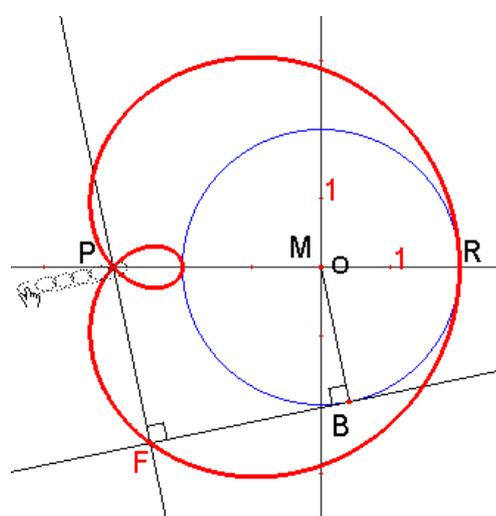


Fig. 2.2: Variation of $|PM|$ values

The resulting locus is Pascal's limaçon, and we can change its shape and position by varying the parameter values for $|PM|$ (Figs. 2.2-2.3) and for $|MR|=r$ (Fig. 2.4; there must be a gap in the animated graph for $r=0$).

In Cabri II+ we are now going to embed the construction in a coordinate system such that M coincides with the coordinate origin and P is on the x -axis (Fig. 2.5). For this curve, we let the computer calculate the equation $P(x,y)=0$ with respect to this coordinate system. The equation is of 4th degree and shows at y only even exponents in accordance with its symmetry property. In addition, we make a point test to convince ourselves of the correctness of the black box output.

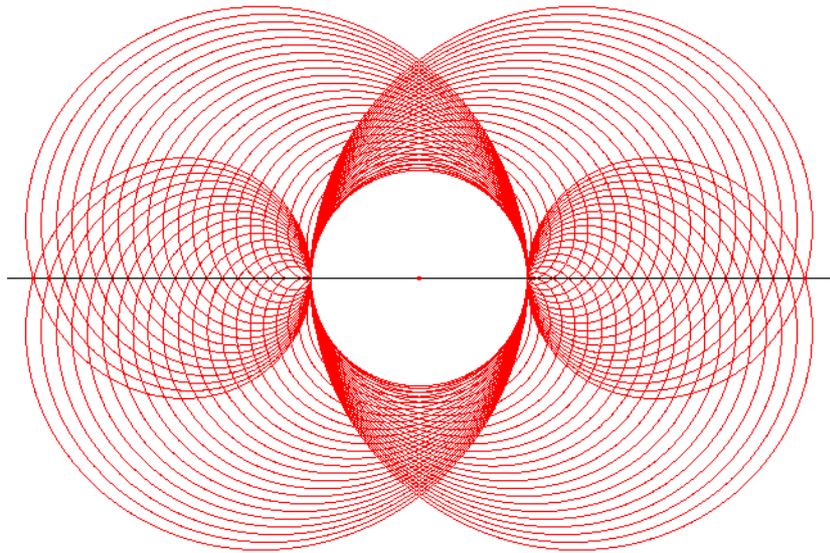


Fig. 2.3: Animation of Pascal's limaçon for $|PM|$

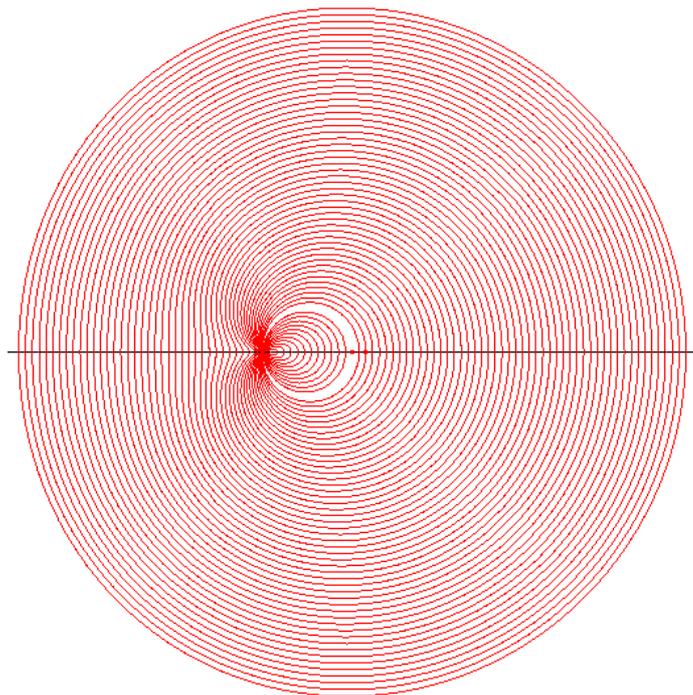


Fig. 2.4: Animation of Pascal's limaçon for r

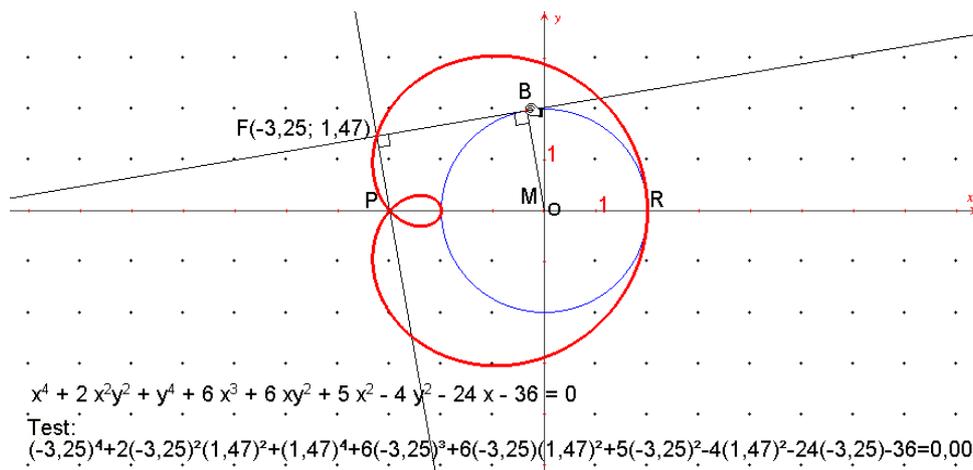
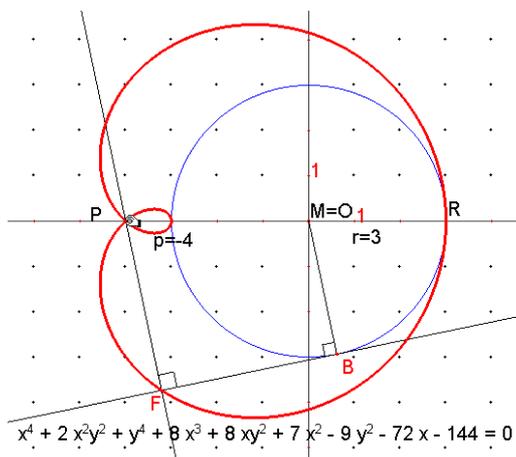
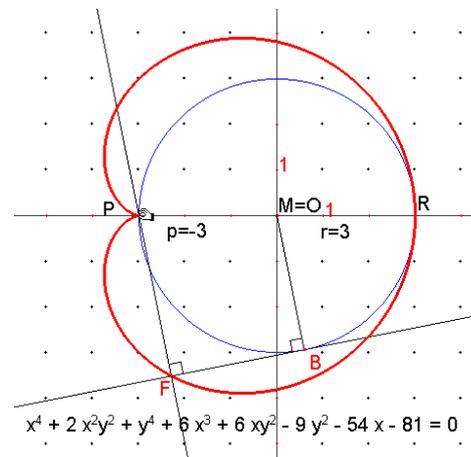


Fig. 2.5 Embedding Pascal's limaçon and equation testing



Figs. 2.6: Investigating the dependencies of the coefficients from construction parameters



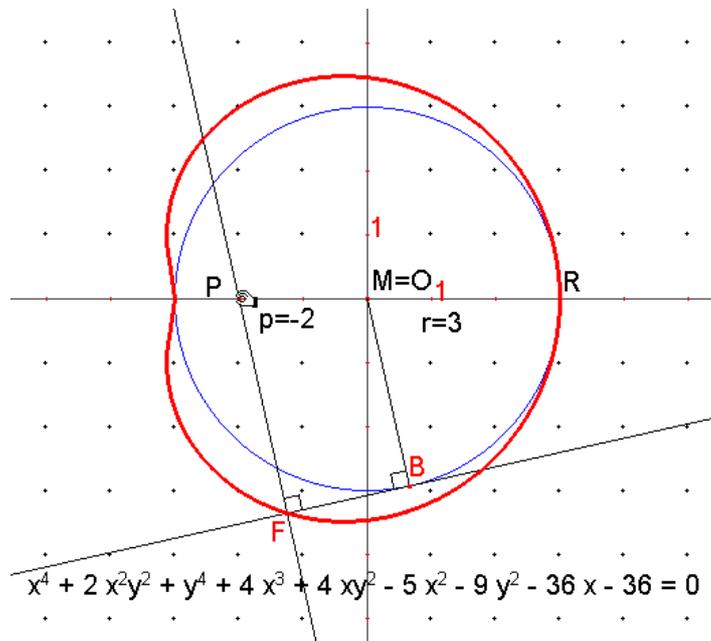
Figs. 2.7: Investigating the dependencies of the coefficients from construction parameters

We can see that the partial expression $x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = (x^2 + y^2)^2$ does not depend on the parameters p and r . Variation of the integral parameter values for p (e.g. as in Figs. 2.6-2.9; Fig. 2.7 shows the cardioid curve with its “heart-shaped” contour) and for r shows that each of the coefficients of x^3 and of xy^2 equals $2p$, that the coefficient of y^2 equals $-r^2$ and – with some intuition in arithmetics – that the coefficient of x equals $2pr^2$ and that the constant summand equals $-(pr)^2$. Tabulation may be helpful if this is not obvious at once. Of course one immediately

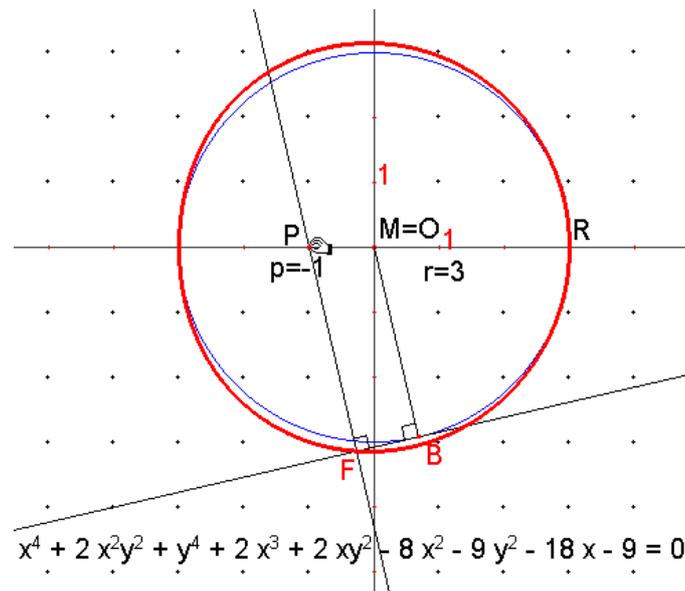
tests the suspected dependences by variation of the parameter values of p and r . For example, the coefficient of x^2 can be found with the aid of Table 1, which shows that the coefficients (e.g. for $r=3$) create an arithmetic sequence of 2nd degree. With fixed r the coefficient of x^2 is a quadratic form $c_2p^2+c_1p+c_0$.

$r=3$	p	-1	-2	-3	-4	-5	...
	... x^2	-8	-5	0	7	16	...
		+3	+5	+7	+9	...	

Table 1



Figs. 2.8: Investigating the dependencies of the coefficients from construction parameters



Figs. 2.9: Investigating the dependencies of the coefficients from construction parameters

One finds $c_2 = 1$, $c_1 = 0$, $c_0 = -9$, i.e. $p^2 - 9 = p^2 - 3^2$ and presumably $p^2 - r^2$, which is verified experimentally. Finally, the following equation is obtained by the experimental-inductive method for Pascal's limaçon with respect to the chosen coordinate system:

$$(x^2 + y^2)^2 + 2px^3 + 2pxy^2 + (p^2 - r^2)x - r^2y^2 + 2pr^2x - (pr)^2 = 0 \quad (2.0)$$

The equation can now be verified also for non-integral coefficients in the same way as in Example 1, i.e. by implementing the equation for the curve in DERIVE and plotting the corresponding curve. For a mathematical verification of equation (2.0), we derive the parametric representation in accordance with the foot construction to get the corresponding equation by elimination of the running parameter. Figure 2.10 informs us that:

$$x_B = r \cdot \cos\beta, \quad y_B = r \cdot \sin\beta \quad (2.1);$$

$$\text{tangent equation: } \frac{y - y_B}{x - x_B} = -\frac{\cos\beta}{\sin\beta} \quad (2.2);$$

$$\text{equation of the perpendicular: } \frac{y}{x - p} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \quad (2.3).$$

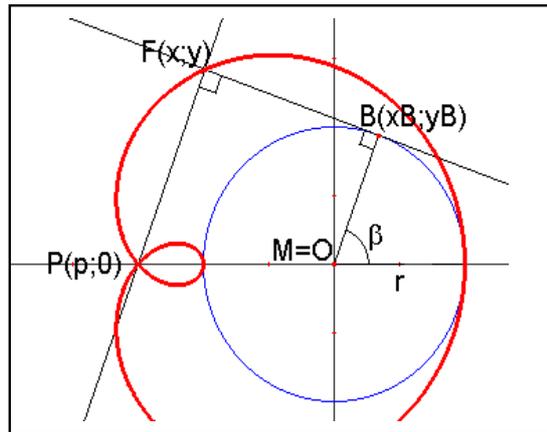


Fig. 2.10: Deriving the algebraic equation

After resolving of (2.2) or (2.3) to y and equating we obtain the x -coordinate of the foot of the perpendicular F :

$$x = p \cdot \sin^2 \beta + r \cdot \cos \beta \quad (2.4a)$$

and replacing x in (2.3) by (2.4a), the y -coordinate of F results in:

$$y = \sin \beta \cdot (r - p \cdot \cos \beta) \quad (2.4b).$$

Can we confirm that the parametric representation in (2.4) is that of the Pascal's limaçon? To verify this, we dynamically generate the corresponding curve using slider technique (Fig. 2.11). There are slides for the shape or position parameter p , r and there is a slide for the running parameter β . We are now able to observe the creation of the curve, either user-controlled or via animation, while the curve plotting functions of non dynamic mathematics software will show the curve only as a black box result.

Elimination of the running parameter β is more difficult. Using a quadratic equation for $\cos \beta$, after some algebra supported by CAS, e.g. by DERIVE, obtain an equation that is equivalent to the equation presented in (2.0). Using the elimination command of the powerful tool MATHEMATICA, we will at once arrive at the desired result provided that we first express Sine by Cosine (Fig. 2.12).

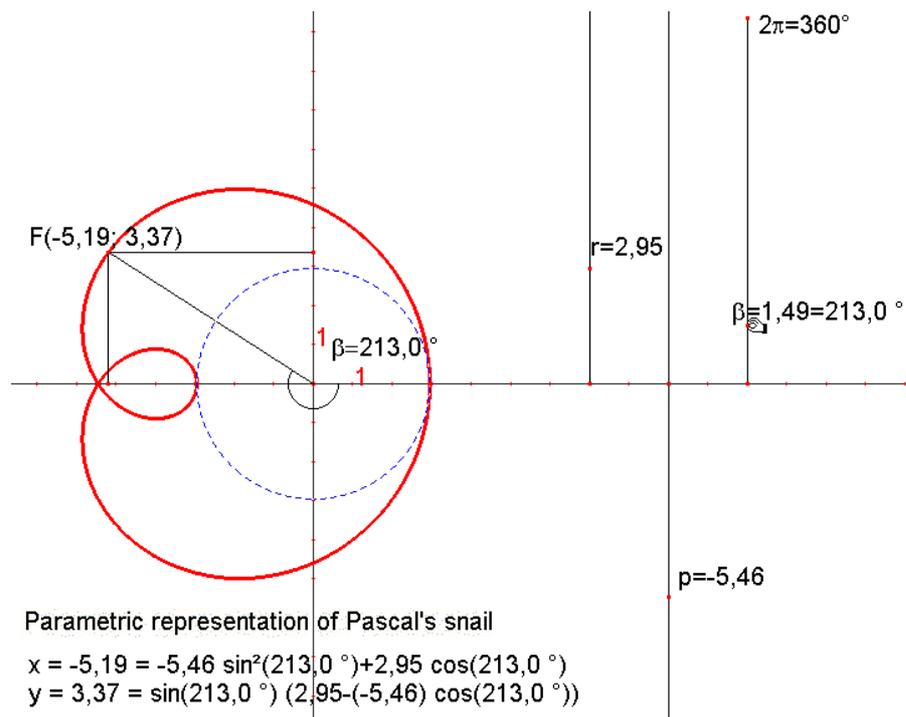


Fig. 2.11: Parametric representation of Pascal's limaçon

$$\text{Eliminate}[\{x == p + (1 - (\text{Cos}(B))^2) + r + \text{Cos}(B), y == \sqrt{1 - (\text{Cos}(B))^2} + (r - p + \text{Cos}(B))\}, B]$$

$$-2 p x^3 + x^4 + p x (2 r^2 - 2 y^2) + x^2 (p^2 - r^2 + 2 y^2) == p^2 r^2 + r^2 y^2 - y^4$$

Fig. 2.12: Automatic elimination of the running parameter with MATHEMATICA

(To be continued in bulletin number 67, June 2004).
 Part II will include the references.

Breve historia de la geometría del triángulo

Ricardo Moreno Castillo

I.E.S. Gregorio Marañón

Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid.

Abstract

This is a short history of the triangle geometry where some of the most recent Spanish contributions are recollected.

¡Abajo Euclides! ¡Muerte al triángulo!

(Jean Dieudonne, en el congreso de Beaumont, en 1960)

Los muertos que vos matáis gozan de buena salud

(Es usual atribuir esta frase al Tenorio de Zorrilla, pero allí no está. Nadie ha sabido decirme donde se puede encontrar)

1. Origen de la geometría moderna del triángulo

La geometría moderna del triángulo es una rama de la ciencia cultivada, desde mediados del siglo XIX, por matemáticos en su mayoría franceses. Su gestación, muy escuetamente explicada, fue la siguiente: en todo triángulo tenemos una colección de rectas y puntos particulares. Entre las primeras están las medianas, bisectrices, alturas y mediatrices, y entre los segundos el baricentro, el inscentro, el circuncentro y el ortocentro. Puesto que estas rectas y puntos permiten formular muchos teoremas, se pensó que si fuéramos capaces de encontrar más rectas y puntos notables, podríamos llegar a muchos teoremas nuevos. Dicho y hecho, y los resultados superaron las previsiones más optimistas. Haciendo uso de un vocabulario relativamente conciso, se pueden nombrar muchos puntos, y en relación con ellos, rectas y curvas con propiedades interesantes.

El antecedente más remoto de la geometría del triángulo se puede situar en la obra *Elements d'Analyse géométrique et d'Analyse algébrique*, publicado por S.

L'Huilier (1750-1840) en 1809. En ella se habla del punto tal que la suma de distancias a los lados del triángulo sea mínima. Después vinieron otros trabajos, pero los resultados anduvieron dispersos y sin sistematizar hasta que Lemoine y Brocard, entre los años 1873 y 1877, ordenaron el material y pusieron las bases de la nueva geometría. En un congreso que tuvo lugar en Zaragoza en el año 1908, el matemático español Juan Jacobo Durán Loriga (1854-1911) defendió de un modo muy elocuente esta rama de la geometría:

“Presentaba el profesor Davis, en 1888, la Geometría reciente del triángulo como un planeta nuevo y extraño al que se dirigían multitud de telescopios desde todos los países civilizados para observarlo cuidadosamente, y en efecto, nada más oportuno que valerse en aquella ocasión de un símil astronómico. Las investigaciones en esta rama de la Geometría, que nosotros propondríamos se llamara triangulología, constituyen, en verdad, una especie de Astronomía. El plano del triángulo forma, en efecto, un verdadero mundo sidéreo, en el que se descubren de día en día nuevos astros. El bari-centro, o centro de gravedad, desempeña el papel del Sol de este sistema planetario, los puntos se agrupan formando importantes constelaciones, pero por fortuna para el cultivador de esta ciencia, su observatorio astronómico es sumamente sencillo: nada de círculo ecuatorial, telescopios murales, anteojos meridianos, etc. Le basta un papel y un lápiz para instalar su pequeño observatorio, como por excepción le bastó al gran Leverrier para descubrir el planeta Neptuno” (pag. 1 de [1]).

La geometría del triángulo se extendió en fecha temprana en dos direcciones distintas. La primera, cuyo representante más importante fue Tucker, con la geometría del cuadrilátero cíclico, que para algunas cosas se comporta como si fuera un triángulo. La segunda, llevada a cabo sobre todo por Neuberg, fue la geometría del tetraedro en el espacio.

2. Coordenadas baricéntricas

En el sistema de coordenadas baricéntricas todo punto del plano se localiza en relación a un triángulo fijo. En la geometría del triángulo es útil trabajar con este sistema y considerar, las más de las veces, el triángulo que se pretende estudiar como el de referencia. Las cosas son de esta manera: las coordenadas de un punto P son los pesos u , v y w que se han de colocar en los vértices A , B y C del triángulo base para que su centro de gravedad esté en dicho punto. Obviamente, los tri-

ples (u, v, w) y (ut, vt, wt) representan el mismo punto para $t \neq 0$. Las coordenadas de los vértices son $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ respectivamente, y las del baricentro G , por definición, son $(1,1,1)$. El triple $(0,0,0)$ no corresponde a nada, y los puntos del infinito son aquellos cuyas coordenadas suman todas cero. La ecuación de una recta que pasa por los puntos $P_1 = (u_1, v_1, w_1)$ y $P_2 = (u_2, v_2, w_2)$ es la siguiente:

$$u \begin{vmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{vmatrix} + v \begin{vmatrix} w_1 & u_1 \\ w_2 & u_2 \end{vmatrix} + w \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = 0$$

Entonces las ecuaciones de los lados del triángulo de referencia son $u = 0$, $v = 0$ y $w = 0$, y la de la recta del infinito $u + v + w = 0$.

Un clásico teorema afirma que la bisectriz interior de un ángulo de un triángulo corta al lado opuesto en segmentos proporcionales a los lados que lo forman. Luego, si a , b y c son las longitudes de los lados, el pie de la bisectriz es el punto $A = (0, b, c)$, y la ecuación de la bisectriz $vc - wb = 0$. Cortándola con otra bisectriz, por ejemplo la que parte de B , de ecuación $uc - wa = 0$, obtenemos las coordenadas del inscentro: $I = (a, b, c)$.

El pie de la altura correspondiente al lado a tiene como coordenadas $(0, b \cos C, c \cos B)$. Un razonamiento idéntico al anterior nos lleva a las coordenadas del ortocentro:

$$H = (a \cos B \cos C, b \cos A \cos C, c \cos A \cos B)$$

Y por el teorema del coseno:

$$H = (a^4 - (b^2 - c^2)^2, b^4 - (a^2 - c^2)^2, c^4 - (a^2 - b^2)^2)$$

(la equivalencia de ambas expresiones no significa la igualdad de las coordenadas, sino la proporcionalidad entre ellas).

Sean x , y y z las distancias a los lados del triángulo de un punto P , cuyas coordenadas baricéntricas son (m, n, p) . Por el teorema de Tales, sucede lo siguiente (ver Figura 1):

$$\frac{y}{z} = \frac{CM \operatorname{sen} C}{BM \operatorname{sen} B} = \frac{n}{p} \frac{c}{b}$$

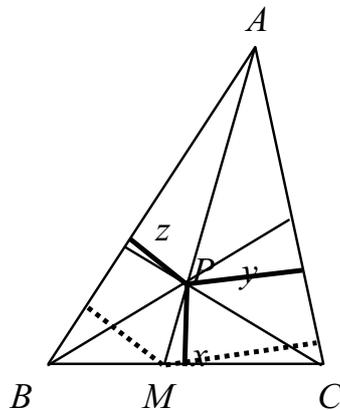


Figura 1

Repitiendo este razonamiento en los otros lados, tenemos que:

$$\frac{m}{xa} = \frac{n}{yb} = \frac{p}{zc}$$

Entonces, las coordenadas baricéntricas de cualquier punto son proporcionales a sus distancias a los lados multiplicados por las longitudes de dichos lados. En consecuencia, también lo son a las áreas de los triángulos BPC , APC y APB .

3. Puntos complementarios

La idea de punto complementario fue introducida por E. Hain en 1885. Si A^* , B^* y C^* son los puntos medios de los lados del triángulo, el triángulo $A^*B^*C^*$ es homotético de ABC según una homotecia de centro G y razón $1/2$. El correspondiente P^* de un punto P se llama su *complementario*. Como la recta AP es paralela a A^*P^* y BP lo es a B^*P^* , el punto complementario es fácil de construir (Figura 2). En efecto, si $P = (m, n, p)$, la ecuación de la recta AP es $pv - nw = 0$. Para encontrar la paralela que pasa por A^* , le sumamos un múltiplo de la recta del infinito y resulta: $\lambda u + (\lambda + p)v + (\lambda - n)w = 0$. Calculamos λ para que pase por $A^* = (0,1,1)$, y tenemos que la ecuación de A^*P^* es

$(n-p)u + (p+n)v - (p+n)w = 0$. Del mismo modo se demuestra que $(m+p)u + (m-p)v - (p+m)w = 0$ es la de B^*P^* . Cortando ambas, tenemos que $P^* = (n+p, m+p, m+n)$. Como el circuncentro es complementario del ortocentro, el último resultado nos dice que sus coordenadas son $(a^4 - a^2b^2 - a^2c^2, b^4 - a^2b^2 - b^2c^2, c^4 - a^2c^2 - b^2c^2)$. Y como un punto y su complementario están alineados con G , resulta que el baricentro, circuncentro y ortocentro están en una misma recta (*recta de Euler*).

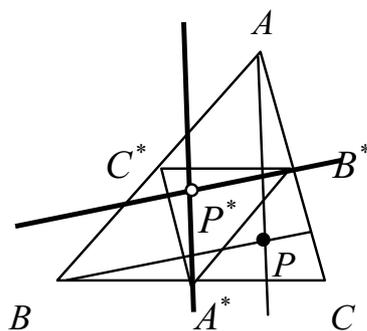


Figura 2

El punto $P^{**} = (n+p-m, m+p-n, m+n-p)$, cuyo complementario es P , se llama su *anticomplementario*. Los vértices del triángulo anticomplementario son $A^{**} = (-1,1,1)$, $B^{**} = (1,-1,1)$ y $C^{**} = (1,1,-1)$, sus lados pasan por los vértices del triángulo fundamental y son paralelos a sus lados opuestos.

4. Puntos recíprocos

Sea un punto cualquiera del plano del triángulo, M, N y P los pies de sus cevianas y M^*, N^* y P^* sus respectivos simétricos respecto del punto medio de los lados. Del recíproco del teorema de Ceva y de la igualdad evidente:

$$\frac{AP}{BP} \frac{BM}{CM} \frac{CN}{AN} = \frac{BP^*}{AP^*} \frac{CM^*}{BM^*} \frac{AN^*}{CN^*}$$

se deduce que AN^*, BN^* y CP^* también son cevianas. Luego se cortan en un punto, llamado el *recíproco* del punto dado. Quien primero escribió sobre puntos

recíprocos fue Longchamps, en el año 1866. Es inmediato ver que si las coordenadas de un punto son (m, n, q) , las de su recíproco son $(1/m, 1/n, 1/p)$.

5. Puntos inversos

Dos rectas que parten de un vértice y son simétricas respecto de la bisectriz se llaman *isogonales*. Las isogonales de tres cevianas también son cevianas

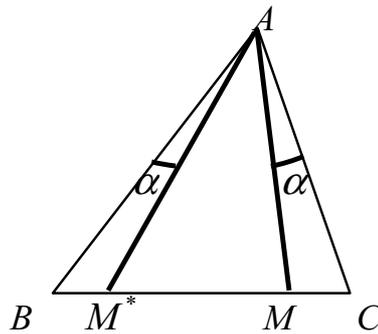


Figura 3

En efecto, aplicamos el teorema del seno a los triángulos ABM , ACM , ABM^* y ACM^* (ver Figura 3), y obtenemos las cuatro igualdades siguientes:

$$\frac{BM}{\text{Sen}(A - \alpha)} = \frac{AB}{\text{Sen}(C + \alpha)} \qquad \frac{CM}{\text{Sen}\alpha} = \frac{AC}{\text{Sen}(C + \alpha)}$$

$$\frac{CM^*}{\text{Sen}(A - \alpha)} = \frac{AC}{\text{Sen}(B + \alpha)} \qquad \frac{BM^*}{\text{Sen}\alpha} = \frac{AB}{\text{Sen}(B + \alpha)}$$

Dividimos la primera entre la segunda, la cuarta entre la tercera, y vemos que:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{\text{Sen}\alpha}{\text{Sen}(A - \alpha)} \frac{AB}{AC} \qquad \frac{BM^*}{CM^*} = \frac{\text{Sen}(A - \alpha)}{\text{Sen}\alpha} \frac{AB}{AC}$$

Multiplicamos ambas igualdades y llegamos a esta otra:

$$\frac{BM}{CM} \frac{BM^*}{CM^*} = \left(\frac{AB}{AC} \right)^2$$

Podemos conseguir otras dos igualdades análogas para las otras dos cevianas y sus isogonales. Multiplicamos las tres y tenemos lo que viene a continuación:

$$\frac{AP}{BP} \frac{BM}{CM} \frac{CN}{AN} \frac{AP^*}{BP^*} \frac{BM^*}{CM^*} \frac{CN^*}{AN^*} = \left(\frac{AC}{BC} \right)^2 \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 \left(\frac{BC}{BA} \right)^2 = 1$$

Como el producto de los tres primeros factores del primer miembro es -1 , el de los tres últimos también lo es. Luego, las isogonales de tres cevianas son tres cevianas. Si (m, n, q) son las coordenadas de un punto, la relación entre BM y CM es la misma que entre p y n . Entonces, de la penúltima igualdad resulta que:

$$\frac{BM^*}{CM^*} = \frac{CM}{BM} \left(\frac{AB}{AC} \right)^2 = \frac{n}{p} \frac{c^2}{b^2} = \frac{c^2/p}{b^2/n}$$

Entonces la relación entre BM^* y CM^* es la que hay entre c^2/p y b^2/n , y las coordenadas del punto inverso son $(a^2/m, b^2/n, c^2/p)$.

6. Punto de Lemoine

Del punto de Lemoine habló por primera vez este matemático en un congreso celebrado en Lyon el año 1873. Es el inverso del baricentro, de modo que sus coordenadas son $K = (a^2, b^2, c^2)$. También es conocido como punto *simediano*, porque en él se cortan las isogonales de las medianas, rectas llamadas *simedianas*. Tiene la propiedad de que la suma de los cuadrados de las distancias a los lados es mínima. En efecto, sea P un punto del plano del triángulo, y y z sus distancias a los lados b y c , y B^*C^* la paralela al lado BC que pasa por P . Entonces:

$$\left((AB^*)^2 + (AC^*)^2 \right) (y^2 + z^2) = (zAB^* + yAC^*)^2 + (yAB^* - zAC^*)^2$$

El primer sumando del segundo miembro es siempre igual al doble de la superficie del triángulo AB^*C^* . Entonces la expresión del primer miembro es mínima si el último sumando es cero, lo cual equivale a que suceda lo siguiente:

$$\frac{y}{z} = \frac{AC^*}{AB^*} = \frac{b}{c}$$

Esto significa que AP es una simediana. Un razonamiento idéntico demuestra que el punto buscado está en las otras simedianas, luego es el punto de Lemoine.

En el año 1900 apareció en *El Progreso Matemático* un artículo, firmado por Augusto Krahe, en el que se generalizan algunas de las cosas vistas hasta ahora. Sea m un número, y M, N y P los puntos de los lados del triángulo que cumplen:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{c^m}{b^m} \quad \frac{CN}{AN} = \frac{a^m}{c^m} \quad \frac{AP}{BP} = \frac{b^m}{a^m}$$

Por el recíproco del teorema de Ceva, las rectas AM, BN y CP concurren en un punto P_m , cuyas coordenadas baricéntricas son (a^m, b^m, c^m) . Si $m = 0$, el punto es el baricentro, si $m = 1$ es el inscentro y si $m = 2$, el punto de Lemoine. Los exponentes m y $-m$ corresponden a puntos recíprocos, y los exponentes m y $2 - m$ a puntos inversos.

7. Punto de Gergonne

Unimos con rectas cada vértice del triángulo con el punto de tangencia del círculo inscrito (Figura 4). Las rectas así trazadas son cevianas. Como las dos tangentes trazadas desde un punto a un círculo determinan segmentos iguales, tenemos que:

$$\frac{AP}{BP} \frac{BM}{CM} \frac{CN}{AN} = \left(-\frac{AP}{BM}\right) \left(-\frac{BM}{CN}\right) \left(-\frac{CN}{AP}\right) = -1$$

El punto T en el cual se encuentran se llama *punto de Gergonne*, que no se ha de confundir con el inscentro. De las igualdades que vienen a continuación:

$$BM + CN = a \quad AN + CM = b \quad AP + BM = c \quad AM + BN + CP = p$$

(donde p es el semiperímetro) tenemos estas otras: $AM = p - a$, $BN = p - b$ y $CP = p - c$. De ellas se deducen las coordenadas del punto de Gergonne:

$$T = \left(\frac{1}{p-a}, \frac{1}{p-b}, \frac{1}{p-c} \right)$$

El recíproco de T se llama *punto de Nagel*, y su complementario es el incentro.

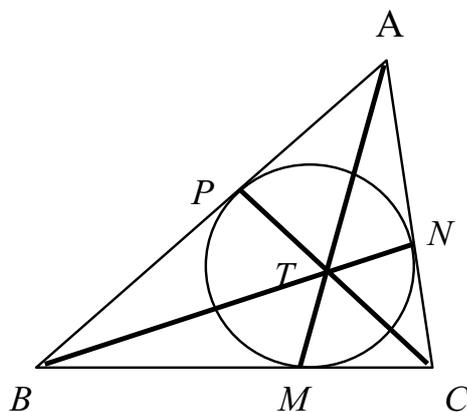


Figura 4

8. Recta armónicamente asociada a un punto

La geometría del triángulo también estudia asociaciones de rectas con puntos. Una de las más célebres es debida a E. Lemoine, quien la presentó en 1884 en un congreso celebrado en Blois. Sea R un punto del plano del triángulo ABC , y M , N y P los pies de sus cevianas. El triángulo MNP se llama *triángulo pedal* asociado a R , y es homólogo con ABC . Por esta razón, los puntos U (intersección de BC con PN), V (intersección de AC con PM) y W (intersección de AB con MN) son colineales. La recta de la que forman parte (eje de homología de los triángulos ABC y MNP) se llama *armónicamente asociada* al punto. La correspondencia también funciona en sentido contrario. Si las coordenadas de R , tomando al triángulo ABC como base, son $R = (m, n, p)$, es sencillo llegar a la ecuación de la recta asociada. Si $M = (0, n, p)$ y $N = (m, 0, p)$, la ecuación de la recta MN es $u/m + v/n - w/p = 0$. Cortándola con AB (cuya ecuación es $w = 0$) nos encontramos con $W = (-m, n, 0)$. Del mismo modo, tenemos que $V = (-m, 0, p)$ y $U = (0, -n, p)$. La ecuación de la recta que los contiene es:

$$\frac{u}{m} + \frac{v}{n} + \frac{w}{p} = 0$$

La recta armónicamente asociada al ortocentro se llama *eje órtico*, y la asociada al punto de Lemoine, *recta de Lemoine*. La recta $mu + nv + pw = 0$, armónicamente asociada al recíproco de $R = (m, n, p)$, se llama su *polar baricéntrica*, y es su recta polar respecto de la cónica del infinito $u^2 + v^2 + w^2 = 0$. La polar baricéntrica del punto de Lemoine tiene como ecuación: $a^2u + b^2v + c^2w = 0$, y se la conoce como *recta de Longchamps*.

Dos rectas son *recíprocas* o *inversas* si lo son sus puntos armónicamente asociados. La ecuación de la recta recíproca e inversa de $mu + nv + pw = 0$ son, respectivamente, las siguientes:

$$\frac{u}{m} + \frac{v}{n} + \frac{w}{p} = 0 \quad \frac{u}{ma^2} + \frac{v}{nb^2} + \frac{w}{pc^2} = 0$$

9. Cónicas asociadas a un triángulo

Tienen un gran interés las cónicas relacionadas con el triángulo. Para empezar, la ecuación de cualquier cónica circunscrita a él es de la forma:

$$mvw + nuw + puv = 0$$

lo cual quiere decir que a cada punto del plano (m, n, p) se le puede asociar una cónica circunscrita. Ésta está, a su vez, inscrita en el triángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas $(-m, n, p)$, $(m, -n, p)$ y $(m, n, -p)$, y los puntos de tangencia son A , B y C . Si resolvemos el siguiente sistema (formado por las rectas polares de los puntos del infinito):

$$\left. \begin{aligned} -nu + (p - m)v + nw &= 0 \\ (p - n)u - mv + mw &= 0 \end{aligned} \right\}$$

obtenemos las coordenadas de su centro:

$$(m(n + p - m), n(m + p - n), p(m + n - p))$$

Si el punto es el de Lemoine, la cónica asociada es el círculo circunscrito:

$$a^2vw + b^2uw + c^2uv = 0$$

y si es el baricentro, es la llamada elipse de *Steiner*:

$$vw + uw + uv = 0$$

En éste caso (y solo en éste) coincide el punto asociado a la cónica con el centro de ésta. Otra cónica circunscrita interesante es la llamada *hipérbola de Kiepert*, que pasa por el ortocentro y el baricentro, y cuya ecuación es:

$$(c^2 - b^2)vw + (a^2 - c^2)uw + (b^2 - a^2)uv = 0$$

Otras cónicas notables asociadas al triángulo son la elipse inscrita de *Steiner* (centrada, como la otra, en el baricentro) de ecuación:

$$u^2 + v^2 + w^2 - 2uv - 2vw - 2wu = 0$$

y las tres *parábolas de Artz*, tangentes cada una de ellas a dos lados del triángulo en los extremos del tercero. Sus ecuaciones son:

$$u^2 - 4vw = 0 \quad v^2 - 4uw = 0 \quad w^2 - 4vu = 0$$

Naturalmente, estas cónicas definen polaridades en el plano, muchas de las cuales tienen propiedades curiosas. Por ejemplo, la recta polar de un punto respecto de la elipse circunscrita de Steiner es la polar baricéntrica de su complementario, la polar de un punto cualquiera en relación a su propia cónica circunscrita es su recta armónicamente asociada, y la polar del baricentro respecto de la hipérbola de Kiepert es la polar baricéntrica de un punto del infinito.

10. Goniocentro

El inventario de curvas, rectas y puntos asociados al triángulo no ha dejado de crecer hasta hoy. El más reciente del que tengo noticia es el *goniocentro*, introducido por Julio Fernández Biarge, en el número 60 de este *Boletín*. Define el goniocentro de un polígono convexo como su centro de gravedad al poner en sus vértices masas proporcionales a los ángulos externos. Para el caso del triángulo, deduce (entre otras) la siguiente propiedad: Si uno de los ángulos es igual a π/n , el goniocentro está a una distancia d del lado opuesto igual a $(n-1)/2n$ veces la altura h relativa a dicho lado (lo cual significa que en un triángulo rectángulo está

a una distancia de la hipotenusa igual a una cuarta parte de su altura). Esto es fácil de ver en términos de coordenadas baricéntricas.

Si dividimos las tres coordenadas baricéntricas de un punto P por su suma y las multiplicamos por la superficie S del triángulo, las nuevas coordenadas baricéntricas (llamadas absolutas) son iguales (y ya no solo proporcionales) a las áreas de los triángulos BPC , APC y APB . Por la misma definición de goniocentro, sabemos que sus coordenadas baricéntricas son: $(\pi - A, \pi - B, \pi - C)$, y sus coordenadas absolutas:

$$\left(S \frac{\pi - A}{2\pi}, S \frac{\pi - B}{2\pi}, S \frac{\pi - C}{2\pi} \right)$$

Ahora bien, si $A = \pi/n$, la primera coordenada es $S(n-1)/2n$. Entonces:

$$\frac{1}{2} ah \frac{n-1}{2n} = S \frac{n-1}{2n} = \text{área de } BPC = \frac{1}{2} ad$$

y por lo tanto $d = h(n-1)/2n$.

El complementario del goniocentro es el punto $(\pi + A, \pi + B, \pi + C)$, y su anticomplementario es (A, B, C) . Razonando de un modo similar al de antes, se demuestra que si $A = \pi/n$, el complementario está a una distancia del lado a igual a $(n+1)/4n$ veces su altura, y el anticomplementario a $1/n$ veces. Sería interesante buscar más propiedades de estos puntos, de sus cónicas asociadas, así como del recíproco y del inverso del goniocentro.

Referencias

- [1] Durán Loriga, J. J. (1908), *Notas de Geometría*, Congreso de Zaragoza.
- [2] Fernández Biarge, J. (2002), “El goniocentro”, en *Boletín de la Sociedad “Puig Adam” de profesores de Matemáticas*, nº 60, págs. 38-45.
- [3] Krahe, A. (1900), “Nota acerca de un punto del plano del triángulo”, en *El Progreso Matemático*, serie 2ª, tono II, págs. 90-94.
- [4] Rouché E., Camberousse, Ch. (1953), *Traité de Géométrie*, Gauthier-Villars éditeur, París.

Cúbica y cuártica: Métodos de Tartaglia y Ferrari, Teoremas de Sturm y Hua

Luis González y José María López

Departamento de Matemáticas.

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

luisglez@dma.ulpgc.es, jlopez@dma.ulpgc.es

Abstract

A simple methodology to describe the first direct methods for solving the general equations of degree 3 and 4 is presented. The Sturm's theorem provides us the character of the cubic equation's roots, avoiding the usual discussion with complex arithmetic. The Hua's theorem provides us necessary conditions for all the cubic or quartic equation's roots being real. Such necessary conditions are confirmed by the more restrictive characterizations provided by the Sturm's theorem.

Introducción

La resolución por radicales de ecuaciones algebraicas constituye uno de los problemas clásicos de la Matemática, de gran interés conceptual e histórico. Es de sobra conocido que la ecuación general de segundo grado (ecuación cuadrática)

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0; a_i \in \mathbb{R} (0 \leq i \leq 2); a_2 \neq 0 \quad (1)$$

es resoluble por radicales con soluciones

$$x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2} \equiv \frac{2a_0}{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}} \quad (2)$$

Asimismo, desde el S. XVI se conocen métodos directos de resolución de las ecuaciones generales de tercer y cuarto grado (ecuaciones cúbica y cuártica)

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0; a_i \in \mathbb{R} (0 \leq i \leq 3); a_3 \neq 0 \quad (3)$$

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0; a_i \in \mathbb{R} (0 \leq i \leq 4); a_4 \neq 0 \quad (4)$$

En este trabajo se expone una metodología simple que describe las primeras técnicas históricamente conocidas de resolución directa de las ecuaciones cúbica (Del Ferro-Tartaglia) y cuártica (Ferrari). La metodología elegida combina su simplicidad con su carácter deductivo (evitando la memorización de fórmulas). Se ilustran además dos teoremas clásicos de la Teoría de ecuaciones algebraicas: Los Teoremas de Sturm y Hua.

En la Sección 1 exponemos los resultados de la Teoría de ecuaciones algebraicas que se requieren en el resto del trabajo, así como algunas de sus connotaciones históricas. A continuación, en las Secciones 2 y 3 describimos la metodología elegida para desarrollar las técnicas de resolución de Del Ferro-Tartaglia y Ferrari, para las ecuaciones (3) y (4), respectivamente. Ambos métodos de resolución por radicales (Del Ferro-Tartaglia y Ferrari) se ilustran con un ejemplo práctico.

El Teorema de Sturm (“uno de los teoremas más importantes del Álgebra” en palabras del Profesor Julio Rey Pastor) nos proporcionará la discusión de la ecuación general cúbica, en función de su discriminante. Se presenta así una alternativa a la tradicional discusión con aritmética compleja, vía raíces cúbicas de la unidad. El Teorema de Hua nos proporciona sendas condiciones necesarias para que todas las raíces de la ecuación general cúbica o cuártica sean reales. La aplicación del Teorema de Sturm a la cúbica o cuártica nos proporciona sendas condiciones necesarias y suficientes para que todas sus raíces sean reales simples. Estas condiciones son más exigentes, obviamente, que las correspondientes condiciones necesarias de Hua, por lo que aquellas confirman a éstas.

1. Algunos resultados de la Teoría de ecuaciones algebraicas

Antes de abordar la resolución directa de las ecuaciones cúbica y cuártica, cabe preguntarse las siguientes cuestiones:

- (i) ¿Admiten siempre solución las ecuaciones (3) y (4) y, en caso afirmativo, cuántas soluciones admiten?
 - (ii) ¿Cuántas de las raíces de las ecuaciones (3) y (4) son reales y cuántas son imaginarias?
 - (iii) ¿Por qué razón abordamos en este trabajo tan sólo las ecuaciones (3) y (4) y no las de grado mayor o igual que 5?
- (i) La respuesta a esta pregunta nos la proporciona el siguiente teorema.

Teorema Fundamental del Álgebra. *Todo polinomio de grado n con coeficientes complejos admite n raíces complejas; reales o imaginarias, distintas o confundidas.*

Sobre este teorema, cuya primera demostración aparece en la Tesis Doctoral de Gauss (1777-1855), descansa toda el Álgebra clásica y, curiosamente, no existe ninguna demostración del mismo enteramente algebraica. Todas sus demostraciones requieren recursos del Análisis de Variable Compleja. Por tanto, según este teorema, nuestras ecuaciones (3) y (4) tendrán siempre 3 y 4 soluciones respectivamente (reales o imaginarias, distintas o confundidas).

(ii) Una primera aproximación a esta cuestión nos la proporciona la siguiente

Proposición. *Las raíces imaginarias de los polinomios de coeficientes reales se aparecen por conjugadas. En otras palabras, $z = a + bi$ es raíz de $P \in \mathbb{R}(x)$ si y sólo si $\bar{z} = a - bi$ es raíz de P .*

Corolario. *Todo polinomio de coeficientes reales y grado impar tiene al menos una raíz real y siempre un número impar de ellas. Todo polinomio de coeficientes reales y grado par tiene siempre un número par de raíces reales.*

En particular, la ecuación cúbica (3) puede admitir: 1 raíz real y dos imaginarias conjugadas; o bien 3 raíces reales. En cuanto a la ecuación cuártica (4), ésta puede admitir: 2 pares de raíces imaginarias conjugadas; 2 raíces reales y dos imaginarias conjugadas; o bien 4 raíces reales:

El Corolario 1 responde sólo parcialmente a la cuestión (ii). La respuesta definitiva nos la proporciona el siguiente teorema.

Teorema de Sturm. *Sea $P(x)$ un polinomio de coeficientes reales. Consideremos la sucesión de polinomios de Sturm: $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ constituida por $f_1(x) = P(x)$, $f_2(x) = P'(x)$ y donde $f_i(x)$ ($3 \leq i \leq n$) es el opuesto del i -ésimo resto que resulta al aplicar el algoritmo del máximo común divisor de Euclides a los polinomios $P(x)$ y $P'(x)$ (se divide $P(x)$ entre $P'(x)$ y a continuación se divide cada divisor entre el opuesto del correspondiente resto). Entonces, el número de raíces, simples o múltiples, de $P(x)$ en cualquier intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ es igual a la diferencia $V(b) - V(a)$, donde $V(c)$ ($c = a, b$) denota el número de variaciones de signos en la sucesión $f_1(c), f_2(c), \dots, f_n(c)$.*

Este teorema, un resultado fundamental del Álgebra clásica, nos cuenta exactamente el número de raíces reales de un polinomio de coeficientes reales en

cualquier intervalo $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$. En particular, para $(a, b) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, el Teorema de Sturm proporciona el número total de raíces reales de los polinomios de coeficientes reales, por lo que constituye la versión real del Teorema Fundamental del Álgebra.

Una condición necesaria, fácilmente verificable, para que todas las raíces de un polinomio de coeficientes reales sean reales nos la proporciona el siguiente teorema.

Teorema de Hua. *Si todas las raíces de un ecuación polinómica de coeficientes reales y grado n*

$$a_n x^n + \dots + a_0 = 0; \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (0 \leq i \leq n); \quad a_n \neq 0$$

son reales, entonces el cuadrado de cada coeficiente no extremo es estrictamente mayor que el producto los dos coeficientes adyacentes, i.e.,

$$a_k^2 > a_{k-1} a_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1)$$

(iii) Fueron los algebristas italianos del S.XVI, los primeros que desarrollaron métodos de resolución por radicales de la cúbica y cuártica. Las llamadas matemáticas del Renacimiento italiano, se centraron en el problema de resolución directa de las ecuaciones algebraicas. Es más, durante los dos siglos siguientes, el gran reto del Álgebra fue la búsqueda de una expresión por radicales para la solución de la ecuación general de quinto grado. Estos esfuerzos estaban condenados de antemano al fracaso según probó el matemático noruego Niels Abel (1802-1829), quien zanjó definitivamente la cuestión con su célebre

Teorema de Abel. *La ecuación general de grado $n > 4$ no es resoluble por radicales.*

El Teorema de Abel, es consecuencia inmediata de la Teoría de Galois (1811-1832). En efecto, basta tener en cuenta que:

- Una ecuación algebraica es resoluble por radicales sii su grupo de Galois es soluble.
- El grupo de Galois de la ecuación general de grado n es el grupo simétrico S_n .
- El grupo simétrico S_n es soluble sii $n \leq 4$.

Así, el Teorema de Abel clausura un problema centenario de las Matemáticas: la resolución por radicales de la ecuación quintica. Los trabajos de Abel y Galois suponen el fin del periodo del Álgebra clásica (resolución de ecuaciones) y el comienzo del Álgebra moderna, al constituir el germen de la Teoría de Grupos.

La Teoría de Galois establece también la imposibilidad de algunas construcciones geométricas con regla y compás, como los conocidos problemas milenarios de la trisección del ángulo, la cuadratura del círculo o la duplicación del cubo.

2. La ecuación general de tercer grado

2.1. Método de Tartaglia para la cúbica

Existen muchos métodos directos para resolver la ecuación general cúbica (3): Del Ferro-Tartaglia, Vieta, Gregory, Lagrange, Sylvester, etc. El primero históricamente fue el método de los matemáticos italianos Scipione del Ferro (1465-1526) y Niccolo Tartaglia (1499-1557) que lo descubrieron independientemente. El método fue publicado por Geloramo Cardano (1501-1576) en el Capítulo XI de su *Ars Magna* (1545), con el ejemplo histórico

$$y^3 + 6y - 20 = 0$$

Exponemos a continuación el método de Tartaglia, de forma simple y deductiva.

Sea la ecuación general de tercer grado (3)

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0; \quad a_i \in \mathbb{R} \quad (0 \leq i \leq 3); \quad a_3 \neq 0$$

Al dividirla por el coeficiente líder a_3 , se obtiene la ecuación equivalente mónica

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \quad (5)$$

y mediante el cambio de variable (transformación de Tschirnhausen)

$$x = y - \frac{a}{3} \quad (6)$$

se elimina el término cuadrático, obteniéndose la cúbica reducida

$$y^3 + py + q = 0 \quad (7)$$

Pongamos ahora una solución real y de (7) en la forma:

$$y = u + v \quad (8)$$

con lo que al sustituir (8) en (7) resulta

$$(u+v)^3 + p(u+v) + q = 0, \quad i.e., \\ (u^3 + v^3) + (3uv + p)(u+v) + q = 0 \quad (9)$$

Haciendo $3uv + p = 0$ resulta el sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = \left(\frac{-p}{3}\right)^3 \end{cases} \quad (10)$$

que conduce a una ecuación de segundo grado: la resolvente cuadrática de la cúbica (7). Extrayendo sendas raíces cúbicas, reales o imaginarias conjugadas, u , v de u^3, v^3 , su suma es una solución real (8) de la ecuación (7). Sus otras dos raíces se obtienen con sólo resolver la ecuación de segundo grado que resulta de eliminarla. Finalmente, basta deshacer el cambio (6) para obtener las raíces de nuestra cúbica (3).

Si los valores de u y v obtenidos del sistema (10) se sustituyen en (8), se llega a la fórmula explícita de Del Ferro-Tartaglia:

$$y = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (11)$$

2.2. Discusión de las raíces de la cúbica vía Teorema de Sturm

El radicando

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$$

de (11) recibe el nombre de discriminante de la cúbica (7), pues su signo permite decidir el carácter de las raíces de la ecuación cúbica. Nótese que la discusión del carácter real o imaginario, simple o múltiple, de las raíces de la cúbica completa (3) puede reducirse al análisis de las raíces de la cúbica reducida (7), pues es obvio que la transformación lineal (6) conserva el carácter real o imaginario, simple o múltiple, de las raíces.

Es habitual realizar la discusión de las raíces de la cúbica, en función del signo del discriminante Δ , mediante un cálculo en el que intervienen las raíces cúbicas de la unidad. Alternativamente, sin necesidad de recurrir a la “aritmética compleja”, el Teorema de Sturm nos proporciona la discusión de casos usando exclusivamente “aritmética real”. En efecto, la sucesión de polinomios de Sturm de la cúbica reducida (7), (con la observación de que en el proceso de aplicación del algoritmo del máximo común divisor de Euclides, puede multiplicarse cada diviendo, divisor o resto por cualquier número positivo) viene dada por:

$f_1(x) = x^3 + px + q$; $f_2(x) = 3x^2 + p$; $f_3(x) = -2px - 3q$; $f_4(x) = -\Delta$
 con lo cual la aplicación del Teorema de Sturm en el intervalo $(a,b) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$, teniendo en cuenta que el comportamiento asintótico en el infinito de un polinomio queda determinado por el signo de su coeficiente líder, puede resumirse en las siguientes tablas:

(1) $\Delta < 0$. En este caso necesariamente es $p < 0$, con lo cual el signo de f_3 pasa de negativo (en $-\infty$) a positivo (en $+\infty$):

x	$-\infty$	$+\infty$
f_1	-	+
f_2	+	+
f_3	-	+
f_4	+	+
$V(x)$	3	0

y, por tanto: $V(+\infty) - V(-\infty) = 3 - 0 = 3$. Concluimos que la cúbica (7) ó (3) tiene tres raíces reales simples (*Casus Irreducibilis*).

(2) $\Delta > 0$. En este el signo de f_3 en $-\infty$ y $+\infty$ depende del signo de p , si $p \neq 0$, y del signo de q , si $p = 0$. Nótese que p y q no pueden ser aquí simultáneamente nulos pues en tal caso sería $\Delta = 0$.

x	$-\infty$	$+\infty$	x	$-\infty$	$+\infty$
f_1	-	+	f_1	-	+
f_2	+	+	f_2	+	+
$\underline{p \neq 0}$: f_3	+, si $p > 0$	-, si $p > 0$	$\underline{p = 0}$: f_3	-, si $q > 0$	-, si $q > 0$
	-, si $p < 0$	+, si $p < 0$		+, si $q < 0$	+, si $q < 0$
f_4	-	-	f_4	-	-
$V(x)$	2	1	$V(x)$	2	1

y, por tanto, en los cuatro casos se tiene: $V(+\infty) - V(-\infty) = 2 - 1 = 1$.

Concluimos que la cúbica (7) ó (3) tiene una raíz real y dos imaginarias conjugadas.

(3) $\Delta = 0$. En este caso, como Δ es el último resto, el propio proceso de obtención de la sucesión de Sturm, i.e., el algoritmo del máximo común divisor de Euclides (con la modificación del signo de cada resto) detecta la existencia de raíces múltiples. La cúbica (7) ó (3) tiene tres raíces reales: una simple y otra doble; o bien una triple.

2.3. Cúbica sin raíces imaginarias: Teoremas de Sturm y Hua

El Teorema de Sturm ha establecido la siguiente condición necesaria y suficiente para que las tres raíces de la cúbica (7) ó (3) sean reales simples:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \quad (12)$$

Aplicamos el Teorema de Hua a la ecuación cúbica reducida (7). Los coeficientes de la cúbica reducida (7) son

$$1, 0, p, q$$

con lo cual, el Teorema de Hua establece que una condición necesaria para que todas las raíces de la cúbica (7) ó (3) sean reales es que:

$$p < 0 \quad (13)$$

Constatamos que, como era de esperar, la condición necesaria y suficiente (12) de Sturm implica la condición necesaria (13) de Hua, i.e.,

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0 \Rightarrow p < 0$$

2.4. Ejemplo

$$3x^3 + 18x^2 + 18x + 15 = 0$$

$$x^3 + 6x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$x = y - \frac{a}{3} = y - 2 \Rightarrow y^3 - 6y + 9 = 0 \quad (p = -6, q = 9)$$

$$y = u + v \Rightarrow (u^3 + v^3) + (3uv - 6)(u + v) + 9 = 0 \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -9 \\ u^3 v^3 = 8 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(u^3)^2 + 9u^3 + 8 = 0 \quad (\text{Resolvente}) \Rightarrow u^3 = -1 \Rightarrow v^3 = -8 \Rightarrow$$

$$y_1 = u + v = (-1) + (-2) = -3$$

$$\frac{y^3 - 6y + 9}{y + 3} = y^2 - 3y + 3 = 0 \Rightarrow y_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; y_3 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$x_i = y_i - 2$$

$$x_1 = -5 ; x_2 = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; x_3 = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Obsérvese que nuestro ejemplo se corresponde con el caso (2) de la discusión efectuada en la subsección 2.2 (una raíz real y dos imaginarias conjugadas), puesto que el discriminante de la cúbica reducida es:

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = \frac{9^2}{4} - \frac{6^3}{27} = \frac{49}{4} > 0$$

3. La ecuación general de cuarto grado

3.1. Método de Ferrari para la cuártica

Existen muchos métodos directos para resolver la ecuación general cuártica (4): Ferrari, Greatheu, Gregory, Euler, etc. El primero históricamente fue el método del matemático italiano Ludovico Ferrari (1522-1565) publicado por Geloramo Cardano en el Capítulo XXXIX de su *Ars Magna*, con el ejemplo histórico

$$y^4 + 6y^2 - 60y + 36 = 0$$

Exponemos a continuación el método de Ferrari, de forma simple y deductiva.

Sea la ecuación general de cuarto grado (4)

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 ; a_i \in \mathbb{R} (0 \leq i \leq 4) ; a_4 \neq 0$$

Al dividirla por el coeficiente líder a_4 , se obtiene la ecuación equivalente mónica

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (14)$$

y mediante el cambio de variable (transformación de Tschirnhausen)

$$x = y - \frac{a}{4} \quad (15)$$

se elimina el término cúbico, obteniéndose la cuártica reducida

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0 \quad (16)$$

de donde

$$y^4 = -py^2 - qy - r$$

y completamos cuadrados sumando $2zy^2 + z^2$ a ambos miembros

$$y^4 + 2zy^2 + z^2 = (2z - p)y^2 - qy + (z^2 - r), \text{ i.e.,}$$

$$(y^2 + z)^2 = (2z - p)y^2 - qy + (z^2 - r) \quad (17)$$

Puesto que el primer miembro es cuadrado perfecto, el segundo también debe serlo, luego igualando a cero su discriminante resulta

$$\Delta = q^2 - 4(2z - p)(z^2 - r) = 0 \quad (18)$$

ésto es

$$8z^3 - 4pz^2 - 8rz + 4pr - q^2 = 0 \quad (19)$$

La ecuación (19) se denomina resolvente cúbica de la cuártica (16). Por el método de Tartaglia, obtenemos una raíz real z_1 de la cúbica (19), y al sustituirla en (17) se tiene

$$(y^2 + z_1)^2 = (2z_1 - p)y^2 - qy + (z_1^2 - r) \quad (20)$$

Por la condición de que z_1 anula al discriminante (18), el segundo miembro de (20) debe ser cuadrado perfecto, luego podemos escribir

$$(y^2 + z_1)^2 = (\alpha y + \beta)^2$$

lo que nos lleva al par de ecuaciones cuadráticas

$$y^2 - \alpha y + z_1 - \beta = 0$$

$$y^2 + \alpha y + z_1 + \beta = 0$$

cuyas raíces y_1, y_2, y_3, y_4 constituyen las soluciones de la ecuación (16). Finalmente, basta deshacer el cambio (15) para obtener las raíces de nuestra cuártica (4).

3.2. Cuártica sin raíces imaginarias: Teoremas de Sturm y Hua

Al igual que se comentó en la Sección 2 respecto a la cúbica, la discusión de las raíces de la cuártica completa (4) puede reducirse al análisis de las raíces de la cuártica reducida (16), pues es obvio que la transformación lineal (15) conserva el carácter, real o imaginario, simple o múltiple, de las raíces.

La sucesión de polinomios de Sturm de la cuártica reducida (16) (con la observación de que en el proceso de aplicación del algoritmo del máximo común divisor de Euclides, puede multiplicarse cada dividendo, divisor o resto por cualquier número positivo) viene dada por:

$$f_1(x) = x^4 + px^2 + qx + r ; f_2(x) = 4x^3 + 2px + q$$

$$f_3(x) = -2px^2 - 3qx - 4r \quad ; \quad f_4(x) = (-2p^3 + 8pr - 9q^2)x - (p^2q + 12qr)$$

$$f_5(x) = 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3$$

Para que todas las raíces de la cuártica (16) ó (4) sean reales simples, debe verificarse que

$$V(+\infty) - V(-\infty) = 4, \text{ i.e., } V(+\infty) = 4 \text{ y } V(-\infty) = 0$$

lo cual nos conduce a la siguiente tabla de signos de los polinomios de Sturm:

x	$-\infty$	$+\infty$
f_1	+	+
f_2	-	+
f_3	+	+
f_4	-	+
f_5	+	+
$V(x)$	4	0

Por lo tanto, teniendo en cuenta que el comportamiento asintótico en el infinito de un polinomio queda determinado por el signo de su coeficiente líder, el Teorema de Sturm ha establecido la siguiente condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de la cuártica (16) ó (4) sean reales simples:

$$\begin{cases} p < 0, \\ 2p^3 - 8pr + 9q^2 < 0, \\ 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3 > 0 \end{cases} \quad (21)$$

Apliquemos el Teorema de Hua a la ecuación cuártica reducida (16). Los coeficientes de la cuártica reducida (16) son

$$1, 0, p, q, r$$

con lo cual el Teorema de Hua establece que una condición necesaria para que todas las raíces de la cuártica (16) ó (4) sean reales es que:

$$\begin{cases} p < 0, \\ q^2 > pr \end{cases} \quad (22)$$

Constatamos que, como era de esperar, la condición necesaria y suficiente (21) de Sturm implica la condición necesaria (22) de Hua, i.e.,

$$\begin{cases} p < 0, \\ 2p^3 - 8pr + 9q^2 < 0, \\ 16p^4r - 4p^3q^2 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 256r^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < 0, \\ q^2 > pr \end{cases}$$

3.3. Ejemplo

$$x^4 - 8x^3 - 21x^2 + 8x + 20 = 0$$

$$x = y - \frac{a}{4}y + 2 \Rightarrow y^4 - 45y^2 - 140y - 96 = 0 \quad (p = -45, q = -140, r = -96)$$

$$y^4 = 45y^2 + 140y + 96$$

$$y^4 + 2zy^2 + z^2 = (2z + 45)y^2 + 140y + (z^2 + 96)$$

$$(y^2 + z)^2 = (2z + 45)y^2 + 140y + (z^2 + 96)$$

$$\Delta = 140^2 - 4(2z + 45)(z^2 + 96) = 0 \Rightarrow 4900 - (2z + 45)(z^2 + 96) = 0 \Rightarrow$$

$$2z^3 + 45z^2 + 192z - 580 = 0 \quad (\text{Resolvente}) \Rightarrow z^1 = 2 \quad (\text{Tartaglia}) \Rightarrow$$

$$(y^2 + 2)^2 = (2 \cdot 2 + 45)y^2 + 140y + (2^2 + 96) = 49y^2 + 140y + 100$$

$$(y^2 + 2)^2 = (7y + 10)^2 \Rightarrow \begin{cases} y^2 - 7y - 8 = 0 \\ y^2 + 7y + 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 8 ; y_2 = -1 \\ y_3 = -3 ; y_4 = -4 \end{cases}$$

$$x_i = y_i + 2$$

$$x_1 = 10 \quad ; \quad x_2 = 1 \quad ; \quad x_3 = -1 \quad ; \quad x_4 = -2$$

Obsérvese que nuestra cuártica reducida verifica las condiciones (21) y (22).

Referencias

- [1] Artin, E., *Teoría de Galois*, Ed. Vicens-Vives, Barcelona (1970).
- [2] Demidovich, B.P. y Maron, I.A., *Cálculo Numérico Fundamental*, Ed. Paraninfo, S.A., Madrid (1988).
- [3] Martín Casalderrey, F., *Cardano y Tartaglia: Las Matemáticas en el Renacimiento Italiano*, Ed. Nivola, Madrid (2000).
- [4] Rey Pastor, J., *Lecciones de Álgebra*, Ed. Nuevas Gráficas, S.A., Madrid (1960).

Sobre el método Monte-Carlo geométrico en el Cálculo Integral

J.C. Cortés López

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia

G. Calbo Sanjuan

Departamento de Matemáticas
I.E.S. Els Évols. L'Alcúdia (Valencia)

Abstract

In this article we show a statistics method in order to evaluate definite integrals. This method is called Monte-Carlo procedure. It is based upon geometrical interpretation of probability and it provides an alternative way to calculate definite integrals when a primitive is unknown.

Introducción

Como es bien sabido el cálculo de primitivas es excepcional. Como consecuencia, no es posible calcular la integral

$$\int_1^4 e^{-x^2} dx \quad (1)$$

de forma exacta mediante la regla de Barrow. En estos casos, se recurre a métodos numéricos determinísticos para calcular de forma tan aproximada como se desee (pero aumentando para ello el número de iteraciones del algoritmo de aproximación) el valor de la integral. Sin embargo, cada vez con más asiduidad, están incorporándose métodos estocásticos para realizar aproximaciones de expresiones determinísticas, como es el caso del cálculo de integrales, resolución de sistemas de ecuaciones lineales, cálculo de so-

luciones de ecuaciones integro-diferenciales,... (véase (1) y (2)). De entre estos métodos estadísticos, un amplio espectro, concretamente los basados en la simulación de variables aleatorias (vs.as.) se recogen bajo una denominación común: Métodos Monte-Carlo.

En estas páginas estudiaremos un método Monte-Carlo para calcular integrales definidas basado en la interpretación geométrica de la probabilidad y lo ilustraremos a través de dos ejemplos: el primero, desarrollado mediante una tabla de simulación que puede hacerse con una calculadora de bolsillo y el segundo mediante el asistente de cálculo simbólico *DERIVE*[®].

1. El método Monte-Carlo geométrico

El objetivo de este método será el cálculo de la integral

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

donde supondremos sin pérdida de generalidad que $f(x)$ es continua y no negativa en $[a, b]$. Si fuera discontinua, basta considerar la función en los subintervalos donde es continua, y aplicar la técnica que se desarrollará a continuación en cada subintervalo.

Por la hipótesis de partida, podemos suponer que $f(x)$ está acotada en $[a, b]$. Llamaremos M a una cota superior, i.e., $0 \leq f(x) \leq M$. Observemos que por la interpretación geométrica de la integral definida, el cálculo de (2) equivale a la determinación del área de la región

$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \quad (3)$$

Consideremos ahora el conjunto rectangular

$$B = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq M\} \quad (4)$$

Podemos visualizar en la figura 1 los elementos introducidos.

Realicemos una *lluvia aleatoria* de puntos (x, y) sobre el rectángulo B , entonces utilizando la interpretación geométrica de la probabilidad podemos afirmar

$$p_A = p((x, y) \in A) = \frac{Area(A)}{Area(B)} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{M \cdot (b - a)}$$

de donde

$$I = \int_a^b f(x)dx = p_A \cdot M \cdot (b - a) \quad (5)$$

con lo que tenemos una representación estocástica del valor de la integral determinística (2). Como el valor de la probabilidad p_A es desconocido, en lo que sigue vamos a buscar un estimador razonable, lo que nos permitirá aproximar el valor de I .

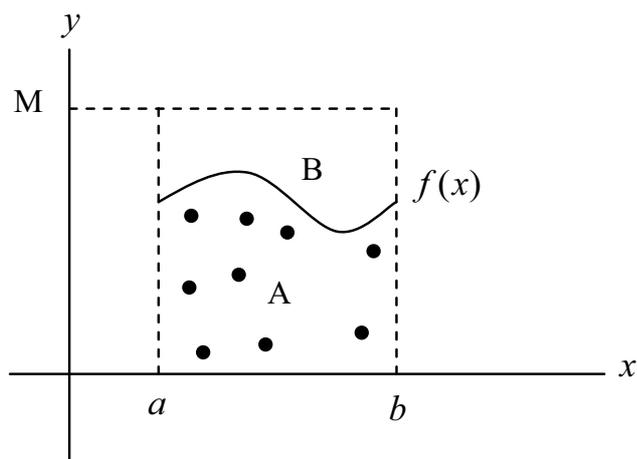


Figura 1. Un método Monte-Carlo geométrico.

El proceso de lluvia aleatoria sugiere una modelización de la simulación a través de una v.a. binomial. Formalicemos brevemente la metodología. Generada una simulación (x_i, y_i) de una lluvia de N puntos ($1 \leq i \leq N$) independientes, entonces sea

$$A_i = \begin{cases} 1 & \text{si } (x_i, y_i) \in A \\ 0 & \text{si } (x_i, y_i) \notin A \end{cases} \quad 1 \leq i \leq N \quad ; \quad p_A = p((x_i, y_i) \in A)$$

de esta forma los sucesos $\{A_i\}_{i=1}^N$ forman N pruebas de Bernoulli de parámetro p_A , por lo que la v.a. que proporciona la frecuencia absoluta del proceso (número de puntos, de entre los N , que caen en A) es binomial

$$F_A = F_A(N) = \sum_{i=1}^N A_i \propto Bi(N; p_A) \quad (6)$$

y en consecuencia, su media y varianza son bien conocidas

$$E[F_A] = N \cdot p_A \quad ; \quad Var[F_A] = N \cdot p_A \cdot (1 - p_A) \quad (7)$$

y la estimación buscada para p_A puede tomarse a través de la v.a.

$$f_A = f_A(N) = \frac{F_A}{N}$$

que nos da la frecuencia relativa de los N puntos de la lluvia que caen dentro de la región A . Observemos que por (7)

$$\left. \begin{aligned} E[f_A] &= \frac{1}{N} \cdot E[F_A] = p_A \\ Var[f_A] &= \frac{1}{N^2} \cdot Var[F_A] = \frac{p_A \cdot (1 - p_A)}{N} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

con lo cual la integral I de (5) puede evaluarse de forma aproximada por

$$\tilde{I}(N) = f_A \cdot M \cdot (b - a) \quad (9)$$

ya que, por la ley de Bernouilli, $f_A \xrightarrow{N \rightarrow \infty} p_A$, siendo esta convergencia en probabilidad.

Obsérvese que de (8) se deduce que este estimador satisface dos propiedades deseables. La primera es que es centrado

$$E[\tilde{I}] = E[f_A] \cdot M \cdot (b - a) = p_A \cdot M \cdot (b - a) = I$$

y la segunda es que su varianza tiende a cero cuando el número de simulaciones crece

$$Var[\tilde{I}] = Var[f_A] \cdot M^2 \cdot (b - a)^2 = \frac{p_A \cdot (1 - p_A) \cdot M^2 \cdot (b - a)^2}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Dos son los aspectos que quedan por abordar, el primero es la forma en que se realizan las simulaciones y el segundo una estimación del error del proceso. La primera tarea puede llevarse a cabo en la práctica generando los puntos $\{z_i = (x_i, y_i)\}_{i=1}^N$ de la lluvia utilizando números aleatorios que sigan la ley uniforme:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= a + (b - a)r_i \\ y_i &= Ms_i \end{aligned} \right\} r_i, s_i \in Un([0,1]) \quad , \quad 1 \leq i \leq N \quad (10)$$

Para controlar el error, utilizaremos la conocida desigualdad de Bienaymé-Tchebycheff sobre la v.a. f_A (para la cual conocemos por (8) su media y varianza)

$$P(|f_A - p_A| \geq \xi) \leq \frac{p_A \cdot (1 - p_A)}{N \cdot \xi^2} \quad \forall \xi > 0 \quad (11)$$

Ahora bien como la función cuadrática $f(x) = x \cdot (1 - x)$ con $x \in [0, 1]$ tiene su máximo en $x = \frac{1}{2}$, podemos acotar superiormente el valor desconocido del numerador de (11):

$p_A \cdot (1 - p_A) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, luego sustituyendo en (11) tenemos

$$P(|f_A - p_A| \geq \xi) \leq \frac{1}{4 \cdot N \cdot \xi^2} \quad \forall \xi > 0 \quad (12)$$

Llevamos esta conclusión a la cota (en probabilidad) del error absoluto de la aproximación de las integrales. Dado $\varepsilon > 0$, aplicando (5), (9) y la desigualdad

(12) para $\xi = \frac{\varepsilon}{M \cdot (b - a)} > 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} P(|\tilde{I} - I| \geq \varepsilon) &= P(|f_A - p_A| M(b - a) \geq \varepsilon) = \\ &= P\left(|f_A - p_A| \geq \frac{\varepsilon}{M(b - a)}\right) \leq \frac{M^2(b - a)^2}{4N\varepsilon^2} \end{aligned}$$

es decir,

$$P(|\tilde{I} - I| \geq \varepsilon) \leq \frac{M^2(b - a)^2}{4N\varepsilon^2} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (13)$$

Desde el punto de vista práctico si se desea que la aproximación (en probabilidad) de \tilde{I} a I sea inferior a un error admisible $\rho > 0$, entonces exigiendo

$$\frac{M^2(b - a)^2}{4N\varepsilon^2} \leq \rho \quad (14)$$

en (13), podemos saber a priori, el número de simulaciones que se requerirán para garantizar que se alcanza tal objetivo despejando de (14)

$$N \geq \left\lceil \frac{M^2(b - a)^2}{4\rho\varepsilon^2} \right\rceil + 1 \quad (15)$$

siendo $\lceil \cdot \rceil$ la función parte entera.

Destaquemos que (15) nos indica que el número de simulaciones será mayor cuanto mayor sea la longitud del intervalo de integración $(b - a)$ y mayor sea la cota superior que tomemos, por ello, desde el punto de vista computacional interesa tomar M como el supremo del integrando en el intervalo de integración. Por otra parte, cuanto más exigentes seamos con los errores ε y ρ , es decir, cuanto menores sean sus valores, mayor será el valor de N .

Veamos otra forma de calcular el número de simulaciones necesarias, utilizando la aproximación de una v.a. binomial a una v.a. normal mediante el Teorema Central del Límite. Sabemos que

$$Bi(N; p_A) \xrightarrow{\text{si } N \cdot p_A \geq 18} No\left(N \cdot p_A; \sqrt{N \cdot p_A \cdot (1 - p_A)}\right)$$

luego aplicando esta aproximación a la v.a. F_A y tipificando tenemos

$$\begin{aligned} P\left(|\tilde{I} - I| \geq \varepsilon\right) &= P\left(\left|\frac{F_A}{N} - p_A\right| M(b-a) \geq \varepsilon\right) = P\left(|F_A - Np_A| \geq \frac{N\varepsilon}{M(b-a)}\right) = \\ &= P\left(\frac{|F_A - Np_A|}{\sqrt{Np_A(1-p_A)}} \geq \frac{\sqrt{N}\varepsilon}{\sqrt{p_A(1-p_A)}M(b-a)}\right) = P\left(|Z| \geq \frac{\sqrt{N}\varepsilon}{\sqrt{p_A(1-p_A)}M(b-a)}\right) \end{aligned}$$

siendo $Z \sim No(0;1)$. Si denotamos por $\phi(x) = \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ la función error, entonces la función error, entonces para un error absoluto admisible ρ , se tiene

$$\rho \geq P\left(|\tilde{I} - I| \geq \varepsilon\right) = P\left(|Z| \geq \frac{\sqrt{N}\varepsilon}{\sqrt{p_A(1-p_A)}M(b-a)}\right) = 1 - 2\phi\left(\frac{\sqrt{N}\varepsilon}{\sqrt{p_A(1-p_A)}M(b-a)}\right)$$

de donde

$$\phi\left(\frac{\sqrt{N}\varepsilon}{\sqrt{p_A(1-p_A)}M(b-a)}\right) \geq \frac{1-\rho}{2} \quad (16)$$

ahora bien desde la tabla de $Z \sim No(0;1)$ no podemos deducir el valor de N porque p_A es desconocido. Sin embargo, utilizando la cota anterior:

$$p_A \cdot (1 - p_A) \leq \frac{1}{4}, \text{ como}$$

$$\frac{2\sqrt{N}\varepsilon}{M(b-a)} \leq \frac{\sqrt{N}\varepsilon}{\sqrt{p_A(1-p_A)}M(b-a)}$$

y como la función ϕ es creciente, basta calcular N cumpliendo

$$\phi\left(\frac{2\sqrt{N}\varepsilon}{M(b-a)}\right) \geq \frac{1-\rho}{2}$$

para asegurar (16). En este caso es suficiente con tomar

$$N \geq \left[\left(\phi^{-1}\left(\frac{1-\rho}{2}\right) \right)^2 \cdot \frac{M^2(b-a)^2}{4\varepsilon^2} \right] + 1 \quad (17)$$

Dependiendo del valor de ρ , el número de simulaciones que da (17) puede ser menor que el obtenido mediante (15). Comparando ambas expresiones esto sucederá cuando

$$\left(\phi^{-1}\left(\frac{1-\rho}{2}\right) \right)^2 \leq \frac{1}{\rho} \Leftrightarrow \phi^{-1}\left(\frac{1-\rho}{2}\right) \leq \frac{1}{\sqrt{\rho}} \quad (18)$$

y siempre y cuando se satisfaga la condición: $N \cdot p_A \geq 18$ que hemos necesitado para hacer la aproximación de una distribución binomial por una normal. Supongamos que ésto se cumple, entonces, por ejemplo para $\rho = 0.05$, (18) se satisface:

$$1.96 \cong \phi^{-1}(0.475) \leq \frac{1}{\sqrt{0.05}} \cong 4.47$$

2. Aplicación del método Monte-Carlo geométrico

A continuación, aplicaremos el método de Monte-Carlo para calcular una integral cuyo valor exacto sí es conocido, para así poder valorar la bondad del método.

Ejemplo 1. Calculemos una aproximación \tilde{I}_1 de

$$I_1 = \int_0^2 (4 - x^2) dx$$

En primer lugar, observemos que $f(x) = 4 - x^2$ es no negativa y continua en $[0,2]$ y podemos tomar $M = 4$ (véase figura 2).

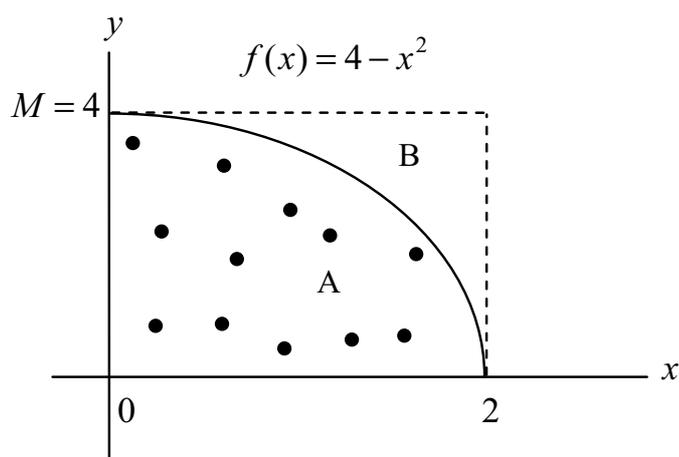


Figura 2. Aplicación del método Monte-Carlo geométrico en el ejemplo 1.

Para generar las simulaciones, a partir de (10), construimos la tabla 1 generando $r_i, s_i \in Un([0,1])$ con la función *Rnd* o *Random* de la calculadora

Simulación	r_i	$x_i = 2 \cdot r_i$	$4 - x_i^2$	s_i	$y_i = 4 \cdot s_i$	$y_i < 4 - x_i^2$
1	0.958	1.916	0.328	0.134	0.536	0
2	0.495	0.990	3.019	0.510	2.040	1
3	0.491	0.982	3.035	0.720	2.880	1
4	0.847	1.694	1.130	0.690	2.760	0
5	0.812	1.624	1.362	0.120	0.480	1
6	0.269	0.538	3.710	0.852	3.408	1
7	0.112	0.224	3.949	0.901	3.604	1
8	0.193	0.368	3.860	0.685	2.740	1
9	0.664	1.328	2.236	0.606	2.424	0
10	0.071	0.142	3.979	0.704	2.816	1
Valor de f_A para $N = 10$:						7/10

Tabla 1. Simulación del ejemplo 1.

A partir de los datos obtenidos en la tabla 1 y según (9), tenemos la siguiente aproximación de la integral $\tilde{I}_1 = \frac{7}{10} \cdot 4 \cdot (2 - 0) = 5.6$, mientras que por la regla de

Barrow el valor exacto es $\frac{16}{3} \cong 5.333$.

Más rigurosamente, si deseamos calcular el valor de la integral con un error inferior a 0.01 con una probabilidad superior a 0.90, entonces identificando los datos con la notación introducida en el apartado anterior tenemos:

$$a=0 \quad ; \quad b=2 \quad ; \quad M=4 \quad ; \quad \varepsilon=0.01 \quad ; \quad \rho=1-0.90=0.10$$

y aplicando (15) podemos determinar a priori el número de simulaciones que necesitaremos para realizar la aproximación con la precisión exigida:

$$N \geq \left[\frac{4^2 \cdot (2-0)^2}{4 \cdot 0.10 \cdot (0.01)^2} \right] + 1 = 1600001$$

Sin embargo, mediante (17) obtenemos

$$N \geq \left[\left(\phi^{-1} \left(\frac{1-0.10}{2} \right) \right)^2 \frac{4^2 (2-0)^2}{4 \cdot (0.01)^2} \right] + 1 = 435601$$

ya que, al cumplirse (18), $1.65 \cong \phi^{-1}(0.450) \leq \frac{1}{\sqrt{0.10}} \cong 3.16$, podemos mejorar el

valor de N . Ahora falta comprobar que $N \cdot p_A \geq 18$, lo cual es cierto, ya que, desde la figura 2, geoméricamente se ve que $2 \cdot \text{Area}(A) \geq \text{Area}(B)$, luego podemos asegurar que $p_A \geq 0.5$, y entonces se satisface $N \cdot p_A \geq 435601 \cdot 0.5 \geq 18$.

Como vemos, en cualquier caso el precio que se debe pagar por hacer una aproximación razonablemente buena es muy caro, ya que, es necesario realizar una gran cantidad de aproximaciones.

Para acabar veamos un ejemplo donde el método estocástico que hemos estudiado alcanza todo su significado de aplicación porque el integrando no tiene primitiva.

Ejemplo 2. Calculemos una aproximación \tilde{I}_2 de la integral $I_2 = \int_1^4 e^{-x^2} dx$. En

primer lugar, observemos que $f(x) = e^{-x^2}$ es no negativa y continua en $[1,4]$ y podemos tomar $M = f(1) = e^{-1}$ por ser la función estrictamente decreciente en dicho intervalo (véase figura 3).

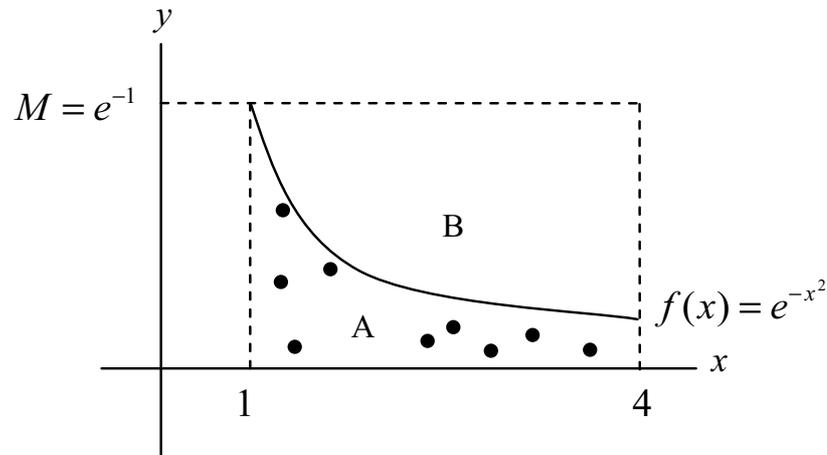


Figura 3. Aplicación del método Monte-Carlo geométrico en el ejemplo 2.

Para calcular la estimación dada por (9) utilizaremos *DERIVE*[®]. Primero leemos el fichero de funciones de utilidades diversas MISC.MTH (esto lo hacemos con: Archivo+Leer+Utilidad+MISC+Abrir) y escribimos el siguiente programa para nuestro ejemplo (por motivos didácticos en la exposición, no condensamos más el programa)

```
#1: X(n) := e^(-((1 + 3*ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1)))·n/n)^2)
#2: Y(n) := 1/e·(ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1))·n/n)
#3: 3/(1000·e)·SUM(IF(Y(n) < X(n), 1, 0), n, 1, 1000)
#4: Z(m) := (3/(1000·e)·SUM(IF(Y(n) < X(n), 1, 0), n, 1, 1000))m/m
#5: SUM(Z(m)/10, m, 1, 10)
```

con lo que obtenemos la siguiente estimación: $\tilde{I}_2(1000) = 0.137071$, mientras que si utilizamos el comando directo de *DERIVE*[®] para calcular integrales definidas, el resultado que se obtiene es 0.139402 (*DERIVE*[®] realiza este cálculo mediante el método de los trapecios de integración numérica).

Para acabar comentemos brevemente algunos aspectos del programa anterior. Cargando el fichero MISC.MTH podemos utilizar el comando RANDOM_VECTOR(n,s) que se simplifica a un vector de n componentes que son números aleatorios enteros comprendidos en $]-s,s[$. Poniendo $s = 1$ se consigue generar números aleatorios (no enteros, excepto quizás el 0) entre $]-1,1[$. Con la orden ABS(RANDOM_VECTOR(1, 1)) encogemos esta generación al intervalo

unidad: $]0,1[$, y finalmente escribiendo la sentencia siguiente: $1 + 3 \cdot \text{ABS}(\text{RANDOM_VECTOR}(1, 1))$, los números aleatorios se generan en el intervalo de integración $]1,4[$. Con todo ello en la primera línea (#1:) vamos generando las imágenes a través de la función a integrar de los valores aleatorios extraídos de $]1,4[$. En la segunda línea, se generan los valores aleatorios en $]0, e^{-1}[$. Con $\text{IF}(Y(n) < X(n), 1, 0)$ asignamos el valor 1 a las simulaciones que pertenecen a la región A de la figura 3 y el valor 0 a los que no pertenecen a dicha región, por lo que $\text{SUM}(\text{IF}(Y(n) < X(n), 1, 0), n, 1, 1000)$ nos da la frecuencia absoluta de la v.a. que en el desarrollo teórico denotábamos F_A para 1000 iteraciones ($N = 1000$). Por todo ello, la tercera línea nos da una aproximación $\tilde{I}_2(1000)$ como la (9). Las dos últimas líneas sirven para que el resultado final se obtenga como la media aritmética de 10 simulaciones generadas de esta forma.

Del mismo modo que se hizo en el ejemplo 1, puede realizarse un estudio a priori del número de iteraciones N que se requieren hacer para realizar la aproximación con un error absoluto prefijado.

Bibliografía

- [1] Ríos Insua, D., Ríos Insua, S. y Martín J. (1997), *Simulación. Modelos y Aplicaciones*, Ed. Ra-Ma. Colec. Textos Universitarios. Madrid.
- [2] Roos S.M. (1999), *Simulación*, 2ª edición. Ed. Pearson. Prentice Hall. Madrid.
- [3] Sóbol I.M. (1976), *Método de Montecarlo*. Colección Lecciones Populares de Matemáticas. Ed. Mir. Moscú.

La formulación matemática de la Mecánica en el siglo XVII: Galileo, Newton, Leibniz

Francisco A. González Redondo

Dpto. Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@edu.ucm.es

Abstract

In this paper three specially relevant contributions to the History of Mechanics are analyzed. Namely, Galileo's Discorsi (1638), Newton's Principia (1687), and Leibniz's Dynamics (1692-98). It will be shown that they can be considered as three consecutive and complementary steps, along the XVIIth century, towards the formulation of a real mathematical physics.

Introducción

Constituye un tópico hoy considerar que el siglo XVII vio nacer una nueva Física, o *la* Física, o la Ciencia moderna; una Física de las cantidades opuesta a la Física aristotélica de las cualidades. En todas las aproximaciones al estudio de este tema suele citarse la conocida afirmación de Galileo acerca de que el Universo está escrito en lenguaje matemático, y al hombre le queda descifrarlo [1] [2]. Cabe preguntarse, por tanto, acerca de las características de ese “lenguaje matemático”. Ese es el objeto de este artículo: estudiar el proceso seguido en la cuantificación de la Mecánica a lo largo del siglo XVII. El referente -y, a la vez, punto de partida- lo constituye el conjunto de consideraciones, explícitas o implícitas, en la aproximación a la Historia del Álgebra hasta las primeras décadas del siglo XVII que presentamos en dos números anteriores de este *Boletín* [3, 4].

Comenzaremos analizando los métodos matemáticos de los *Discorsi* de Galileo de 1638 [5], deteniéndonos en cuáles de esos métodos adoptó de los autores clásicos y medievales y cuáles introdujo él como contribuciones originales. A continuación se realiza un estudio análogo de los *Principia* de Newton de 1687 [6]. A modo de complemento terminaremos detallando las características de los

enunciados matemáticos que se presentan en diferentes trabajos de Leibniz, en el ámbito de la Dinámica, escritos entre 1692 y 1698 [7].

1. Galileo: *Diálogos y Demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias* (1638). La herencia de la Antigüedad

Para comenzar este parágrafo, puede reproducirse la célebre frase que escribió Galileo en 1623 [8], puesto que va a servir como clave de todo el artículo. Comienza ésta con la parte que suele transcribirse (y no textualmente).

La filosofía está escrita en este libro inmenso que se encuentra continuamente abierto ante nuestros ojos (quiero decir el Universo), pero que no puede entenderse si no se aplica uno primero a entender su lengua, a reconocer los caracteres en que está escrito. Está escrito en lengua matemática [...]

Parece admitido hoy por todos que con Galileo comenzará un cambio radical en el estudio del Universo. Sin embargo, cabe preguntarse si aceptado el postulado anterior, Galileo entiende la Naturaleza como conjunto de fenómenos cuantitativos, y, si es así: a) qué ‘realidades’ matematizables deben buscarse en ella; y b) cuáles son las herramientas matemáticas con las que hay que enfrentarse a esa Realidad que supone cuantificable. Completar la cita anterior reproducida sólo parcialmente (y pocas veces se termina) aportará matices capitales para el tema que aquí se estudia. Continúa escribiendo Galileo:

[...] y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin cuyo medio es humanamente imposible entender una palabra.

Efectivamente, como se mostrará seguidamente, el lenguaje de la Física de Galileo no va a ser el del Álgebra. Obviamente, no podía ser el del Álgebra de Descartes [9]; pero tampoco va a ser el de Vieta [10], ni siquiera el de los algebristas de su Península Itálica [11]. La Matemática de Galileo fue la de los griegos clásicos, la de Euclides, Arquímedes y Apolonio, adaptada al nuevo objeto de estudio al modo de los mertonianos y los parisinos del siglo XIV; fue lo que algunos han denominado [12] “física geométrica” o, aunque fue escrito en referencia a Nicolas de Oresme y aquí se extrapola [13], “geometría de las cualidades”. Galileo, en todo caso, pensaba que estaba aportando novedad al tratamiento de las cualidades cuando afirmaba [5] que, como era su costumbre, había “demostrado todo mediante métodos geométricos”, de modo que esta ciencia por él cultivada “merecía el nombre de una nueva ciencia”.

A lo largo de la Tercera Jornada de los *Discorsi* enuncia sus leyes del movimiento. En ellas se comprobará la matematización de las relaciones magnitudinales en la nueva Ciencia de Galileo. Para el caso del movimiento uniforme enuncia la proporcionalidad entre el espacio [*spatia*] y el tiempo [*tempore*] en la siguiente ley:

Teorema I, Proposición I. *Si un móvil dotado de movimiento uniforme recorre dos espacios a la misma velocidad [velocitate], los tiempos invertidos estarán en la misma razón que los espacios recorridos.*

Al enunciado sigue una demostración geométrica (Figura 1), basada en el Libro V de los *Elementos* de Euclides [14], en la que se representan los intervalos de tiempo (segmentos *DE* y *EF*) y las distancias recorridas en esos intervalos (segmentos *AB* y *BC*) como divisiones en dos ‘líneas’ situadas paralelamente. El tiempo requerido para recorrer *AB* lo representa por *DE*, mientras que el requerido para recorrer *BC* lo representa por *EF*.

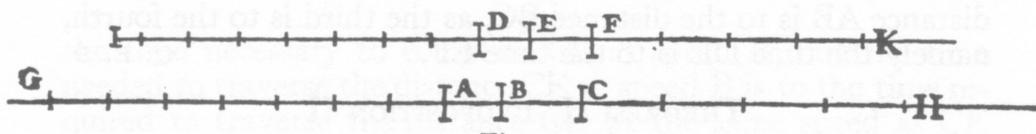


Figura 1.

Y afirma: *Mi proposición es que la distancia AB es a la distancia BC como el tiempo DE es al tiempo EF*”. Es decir, ni tan siquiera simboliza

$$AB : BC :: DE : EF, \quad (1)$$

mucho menos

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}. \quad (2)$$

Realmente, este teorema se encontraba ya en Arquímedes, en su *Sobre las espirales*, donde escribe [15]:

Proposición 1. *Si un punto recorre una línea con velocidad uniforme y se toman en ella dos líneas, la razón de éstas es igual a la de los tiempos empleados por el punto en recorrerlas.*

Las demostraciones de Arquímedes y de Galileo siguen pasos semejantes, haciendo uso ambas de las Definiciones 5 y 6 del Libro V de los *Elementos*. Es cierto que cambian las letras utilizadas para denotar los segmentos, pero la representación gráfica también es similar.

A continuación Galileo enuncia las leyes que establecen: a) la proporcionalidad entre el espacio recorrido y la velocidad; y b) la proporcionalidad inversa de la velocidad y el tiempo transcurrido. Así, para la primera escribe:

Teorema II, Proposición II. *Si un móvil recorre dos espacios en el mismo intervalo de tiempo, tales espacios estarán en la misma razón que las velocidades. Y si los espacios están en la misma razón que las velocidades, entonces los tiempos serán iguales.*

Un ejemplo de lo que desde hoy puede interpretarse como las ‘operaciones’ entre cantidades de magnitudes distintas, aunque, de hecho, realmente no sea más que una proporcionalidad compuesta, se observa en el siguiente enunciado.

Teorema IV, Proposición IV. *Si dos cuerpos se mueven con velocidad uniforme, pero a diferente velocidad, las distancias recorridas por ellos en tiempos desiguales están entre sí como la razón compuesta de las velocidades y los intervalos de tiempo.*

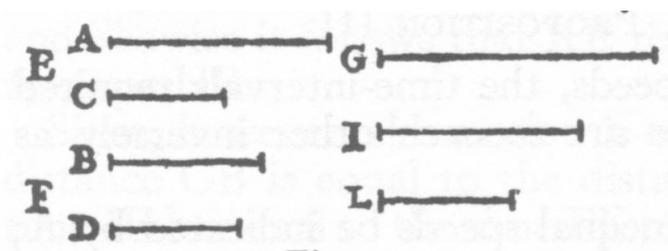


Figura 2.

En este caso considera que la proporción de G a L “se compone de las proporciones de G a I y de I a L ”, es decir, “de las proporciones de la velocidad de A con

respecto a la velocidad de B y del intervalo de tiempo C con relación al intervalo de tiempo D ".

De nuevo, la demostración es totalmente retórica, utilizando simplemente letras mayúsculas para denotar los extremos de los diferentes segmentos que representan las distintas cantidades. En suma, Galileo demuestra el dominio que tenía del cálculo de proporciones y del método riguroso del modelo clásico de Euclides [16, 17], aunque nunca se encontrará en los *Discorsi* nada ni tan siquiera parecido a

$$s_1 : s_2 :: (v_1 : v_2) (t_1 : t_2) \quad \text{ó} \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{t_1}{t_2}. \quad (3)$$

2. Galileo: nuevos métodos matemáticos para la Ciencia del movimiento

Para el movimiento ‘naturalmente’ acelerado (aquel al que durante intervalos de tiempo iguales, se le proporcionan incrementos iguales de velocidad) considera, partiendo del reposo, un “número cualquiera de fracciones de tiempo iguales” en las que “los grados de las velocidades [*velocitatis gradus*] aumentan en la misma proporción que el número de fracciones”.

Además, se trata de un movimiento tal que: 1) el móvil pasa por todos los grados de velocidad hasta llegar al reposo, es decir, se determina la continuidad de la variación de la velocidad; 2) el móvil pasa por cada grado de velocidad “sin emplear más de un instante”; es decir, en cada instante [infinitesimal] hay un movimiento infinitesimal; y 3) para el móvil “en cualquier intervalo de tiempo, por muy pequeño que sea, hay infinitos instantes, éstos serán siempre suficientes para corresponder a los infinitos grados con los que puede ir disminuyendo la velocidad”.

Puede observarse, por tanto, que Galileo maneja una idea de “velocidad instantánea”. Lo que no se encontrará es una aceleración que para el movimiento uniformemente acelerado tiene que ser constante. La ley de este movimiento la enuncia como sigue.

Teorema I, Proposición I. *El tiempo durante el cual un espacio dado es recorrido por un móvil que parte del reposo con un desplazamiento uniformemente acelerado, es igual al tiempo durante el cual aquel mismo espacio habría sido recorrido por el mismo móvil desplazándose con un movimiento uniforme cuyo grado de velocidad fuese la mitad del grado de velocidad máximo alcanzado al final de dicho movimiento uniformemente acelerado.*

Para demostrar el resultado utiliza un triángulo (Figura 3) que recuerda al que ya había usado Oresme siglos antes [13] girado 90°, en el cual la línea AB representa el tiempo durante el cual el móvil, a partir del reposo en el punto C , recorre con movimiento uniformemente acelerado el espacio CD . Representando el grado máximo y final de la velocidad mediante el segmento BE , “todas las líneas equidistantes a BE que parten de cada punto de la línea AB representarán los grados de velocidad crecientes”. La ‘suma’ [*aggregatum*] de los infinitos segmentos que componen el [área del] triángulo ABE dan la velocidad, área que será $\frac{1}{2}$ del área del rectángulo de base BA y altura BE .

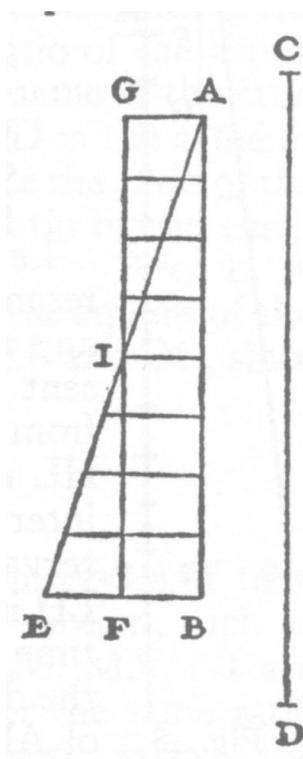


Figura 3.

Si se hace caso a los autores que más han estudiado este tema [16, 17], y exagerando el anacronismo, en Galileo se detectaría un esbozo de la integración

$$e = \int v dt = \int at dt = \frac{1}{2} at^2. \quad (4)$$

En suma, la Mecánica de Galileo se formula mediante enunciados retóricos que se demuestran geoméricamente identificando las cantidades de las magnitudes que intervienen con longitudes de segmentos, y procediendo de acuerdo a los métodos de Euclides o a los de Oresme, o, incluso, desarrollando un cálculo de proporciones propio como el de la demostración del Teorema II. Además, necesita inventar métodos matemáticos nuevos (una formulación de la divisibilidad del continuo en infinitésimos [18]) que le permitan tratar matemáticamente problemas nuevos. Había escrito en la Primera Jornada:

Admitiendo que la línea, como toda magnitud continua, sea divisible en partes siempre divisibles, no veo cómo pueda dejar de reconocer que está compuesta de infinitos indivisibles, ya que una división y una subdivisión que se pueda proseguir siempre supone que las partes sean infinitas, pues de otro modo la subdivisión tendría un límite. Que las partes sean infinitas trae como consecuencia que no son extensas ya que infinitas partes extensas forman una extensión infinita. Así, pues, llegamos a la conclusión de que las magnitudes continuas están compuestas de infinitos indivisibles.

En cualquier caso, no hay igualdades entre números, solamente razones entre cantidades de magnitudes que ya no son las estrictamente geométricas, pues tiempos y velocidades también se representan mediante segmentos. De hecho, no hay leyes en el sentido de leyes fundamentales; no hay leyes de primer nivel que se postulan y a partir de las cuales se deducen matemáticamente las demás. En concreto, no existe aún la ley fundamental de la Dinámica, ni formulada retóricamente ni, mucho menos simbólicamente.

3. Newton: *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural* (1687)

La Mecánica del siglo XVII se corona con la obra de Newton [6]. En palabras de D'Alembert fue “el primero en mostrar lo que sus predecesores apenas habían atisbado, el arte de introducir la Geometría en Física y de crear -uniendo experiencias y cálculo- una Ciencia nueva y exacta”.

Efectivamente, se trata de una Mecánica en la cual: a) las leyes carecen de cualquier tipo de simbolismo y se enuncian como relaciones de proporcionalidad; b) las proposiciones también se plantean como proporcionalidades y se demuestran geoméricamente; y c) se introduce un paso al límite “reduciendo las demostraciones de las proposiciones [...] a las primeras y últimas razones de cantidades nacientes y evanescentes, es decir, a los límites de esas sumas y razones”.

En su libro, así caracterizado, Newton expone su concepción de las tres ‘categorías fundamentales de la Naturaleza’ aristotélicas: espacio, tiempo y materia. Por ejemplo, cuando quiere distinguir los dos tipos de ‘espacio’, el que desde él filosófica o metafísicamente se denomina ‘espacio absoluto’ (y que consideramos matemáticamente constituido en el espacio puntual euclídeo tridimensional, E^3), del que hoy puede llamarse ‘distancia recorrida’, escribe:

El espacio absoluto, tomado en su naturaleza, sin relación alguna a nada externo, permanece siempre similar e inmóvil. El espacio relativo es alguna dimensión o medida móvil del anterior, que nuestros sentidos determinan por su posición con respecto a los cuerpos, y que el vulgo confunde con el espacio inmóvil.

Podía haber escrito un comentario parecido para el ‘tiempo’, distinguiendo el tiempo absoluto referencial (la recta real orientada positivamente desde $-\infty$) del tiempo relativo o ‘duración’, entendido este último como medida del anterior, pero su reflexión es la que sigue:

El tiempo absoluto, verdadero y matemático, en sí y por su propia naturaleza sin relación a nada externo fluye uniformemente, y se dice con otro nombre duración. El tiempo relativo, aparente y vulgar es alguna medida sensible y exterior (precisa y desigual) de la duración mediante el movimiento, usadas por el vulgo en lugar del verdadero tiempo.

La tercera categoría, la ‘materia’, la conceptualiza matemáticamente para la Física mediante la que desde Newton se denominará ‘masa’:

La cantidad de materia es la medida de la misma, surgida de su densidad y magnitud conjuntamente [...] Es esa cantidad la que en lo sucesivo menciono bajo el nombre de masa o cuerpo.

Esa masa que se introduce por primera vez es distinta del tradicional ‘peso’, “pues la masa es proporcional al peso”, cosa que afirma haber descubierto por “experimentos muy precisos con péndulos”. En notación actual, pero de ninguna manera en notación de Newton, que se limita a redacciones retóricas como las precedentes sobre ‘espacio’ y ‘tiempo’:

$$m = d \cdot V \left[\leftrightarrow d = \frac{m}{V} \right]. \quad (5)$$

La cuarta magnitud primaria en la Mecánica de Newton es la ‘fuerza’. Aunque para él existen varios tipos de fuerza, debe ilustrarse el salto que se da en el tratamiento de las magnitudes que se produce en los *Principia* con respecto a los *Discorsi*:

Aquí sólo pretendo dar una noción matemática de estas fuerzas, sin especular sobre sus causas y sedes físicas. Por lo cual la fuerza acelerativa será a la motriz como la velocidad [celeritas] es al movimiento”.

En primera instancia parecería que solamente está planteando una razón entre cantidades homogéneas: fuerza_a : fuerza_m. La que denomina ‘fuerza acelerativa’ es la que hoy denominaríamos ‘aceleración’ y el “movimiento” la ‘cantidad de movimiento’, “porque la cantidad de movimiento surge de la velocidad multiplicada por la cantidad de materia, y la fuerza motriz surge de la acelerativa multiplicada por la cantidad de materia”. Es decir, aunque de nuevo está expresado retóricamente, en la traducción al lenguaje simbólico (ausente aún en Newton y en la Física de finales del siglo XVII) lo que se afirma es que:

$$\frac{f_a}{f_m} = \frac{v}{mov} \quad (6)$$

por ser:

$$\left. \begin{array}{l} mov = v \cdot m \\ f_m = f_a \cdot m \end{array} \right\} \rightarrow \frac{f_a}{f_a \cdot m} = \frac{v}{v \cdot m}. \quad (7)$$

Todavía no se ha producido el tránsito de las relaciones de proporcionalidad entre cantidades de magnitudes distintas (heterogéneas) a las igualdades entre medidas, para lo que hará falta utilizar los resultados del Álgebra junto con las técnicas del Análisis que Newton, entre otros, está desarrollando; tránsito que sigue sin producirse en Daniel Bernoulli, y que tendrá lugar con Euler. Sin embargo, en los *Principia* sí se anuncia:

Las cantidades relativas no son las cantidades mismas, cuyos nombres llevan, sino medidas sensibles de ellas (precisas o imprecisas) que se usan habitualmente en su lugar. Y si el sentido de las palabras debe ser determinado por su uso, por los nombres tiempo, espacio, lugar y movimiento debe entenderse

propiamente sus medidas sensibles; y la expresión será infrecuente y puramente matemática si se significan las cantidades medidas en sí mismas.

Una vez establecidas las magnitudes de su Filosofía Natural [de su teoría], pasa Newton a enunciar sus Axiomas o Leyes del Movimiento [leyes de primer nivel], toda vez que por la última cita ‘se sabe’ qué es lo que éstas contienen, y a partir de las cuales se deducirán o podrán demostrar las Proposiciones [o leyes de segundo nivel]. Los Axiomas primero y tercero son los Principios de Inercia y de Acción y Reacción, respectivamente. El segundo, hoy Ley Fundamental de la Dinámica, que relaciona cantidades de magnitudes distintas (ley relacional) [19], lo enuncia como sigue:

***Axioma 2.** El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa, y se hace en la dirección de la línea recta en la que se imprime esa fuerza.*

Frente a lo limitado de la redacción de Newton, que parece no atreverse a hacer uso de las herramientas algebraicas que Descartes, su oponente en tanto que filósofo natural, había proporcionado cincuenta años antes [9], en forma ecuacional, es decir, como igualdad entre medidas de las magnitudes relacionadas en la ley, ésta puede escribirse hoy:

$$\vec{f} = m \cdot \vec{a} \quad (8)$$

ó, con más precisión,

$$\vec{f}(t) = m \cdot \frac{d^2 \vec{s}(t)}{dt^2}. \quad (9)$$

4. Newton: nuevos métodos matemáticos para la Ciencia del Movimiento

Establecidos los Axiomas, en el “Libro Primero. El movimiento de los cuerpos”, Newton plantea su aportación al Cálculo infinitesimal desde su Física, pero, eso sí y aquí, sin expresiones algebraicas, ni funcionales, ni diferenciales, puesto que lo que sigue haciendo es estricta Geometría, en palabras de Ravetz [12], “Geometría infinitesimal aplicada” (Figura 4).

Lema Primero. *Las cantidades, y las razones de cantidades, que en cualquier tiempo finito tienden continuamente a la igualdad, y antes de terminar ese tiempo se aproximan una a otra más que por ninguna diferencia dada, acaban haciéndose en última instancia iguales.*

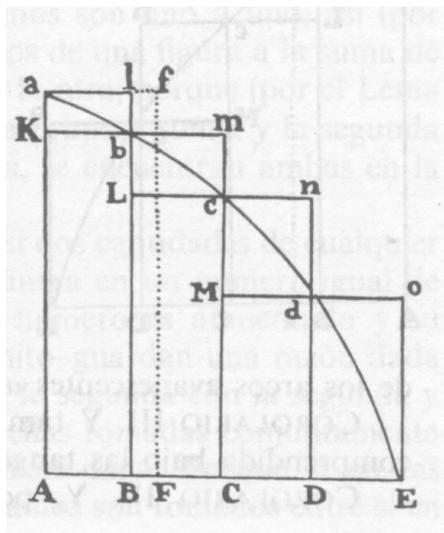


Figura 4.

En el Lema X escribe que “los espacios que un cuerpo describe siendo urgido por cualquier fuerza infinita -sea ésta determinada e inmutable o bien aumentada o disminuida de modo continuo- son al comienzo mismo del movimiento como los cuadrados de los tiempos”. A lo que sigue un Escolio que empieza con las palabras siguientes:

Si al comparar entre sí cantidades indeterminadas de diversos géneros, de cualquiera de ellas se dice que es directa o inversamente como cualquier otra, el significado es que la primera es aumentada o disminuida en la misma razón que la segunda o como su inversa.

Sin embargo, como el mismo Newton reconoce, ha necesitado desarrollar los contenidos del Libro X de los *Elementos* de Euclides [14]:

Puede objetarse también que si las razones últimas de cantidades evanescentes están dadas, también lo estarán sus magnitudes últimas, con lo cual todas

las cantidades estarán formadas por indivisibles, cosa contraria a lo que demostró Euclides a propósito de los inconmensurables en el libro décimo de sus Elementos. Pero esta objeción se apoya sobre una suposición falsa. Porque estas razones últimas con las que se desvanecen las cantidades no son verdaderamente las razones de cantidades últimas, sino límites hacia los que siempre convergen las razones de cantidades que decrecen sin límite, y a los cuales se aproximan más que por ninguna diferencia dada.

En suma:

1) La matematización del ‘comportamiento de la Naturaleza’ en Newton se hace basándose en la Geometría clásica, desarrollando métodos originales -el Cálculo infinitesimal- para problemas nuevos.

2) No se utiliza ese Álgebra que ya con la *Isagoge* de Vieta (1591) y *La Géométrie* de Descartes (1637) ha alcanzado un desarrollo extraordinario, y que en 1687 debía ser conocida por la comunidad científica en general y por Newton en particular.

3) En los *Principia* Newton parece todavía mucho más reacio que Galileo en sus *Discorsi* a plantear mediciones para las cantidades, manteniéndose en la ‘parte teórica’ en el dominio de las razones entre cantidades; eso sí, demostrando en la descripción detallada de diferentes experiencias prácticas a lo largo de su libro la suficiencia y familiaridad con el tema.

5. Leibniz: los *Escritos de Dinámica* (1692-1698). A modo de complemento histórico

Al finalizar el siglo XVII plantea Leibniz [7] sus últimas contribuciones a la Ciencia del movimiento, la Dinámica o, en palabras de d’Alembert recogidas en la voz “Dynamique” de la *Encyclopedie*, “ciencia de las potencias o causas motrices, es decir, de las fuerzas que ponen los cuerpos en movimiento”, cuyo análisis sintético, desde el punto de vista del objeto de este artículo, puede servir de cierre, sin entrar en si Leibniz escribe conociendo o no las obras de Galileo, Descartes y Newton, ni si lo hace desde o contra ellos.

En este sentido, se presentarán -contextualizadas- unas breves citas ilustrativas de los temas que se están estudiando: a) elementos magnitudinales, con especial atención a la elección de unidades de medida y a las mediciones; b) presencia de relaciones de proporcionalidad entre cantidades y/o igualdades entre medidas en las fórmulas de definición y en los enunciados legaliformes; y c) características

de los enunciados con respecto a los elementos que los integran, es decir, determinación de su naturaleza como fórmulas de definición, principios de conservación o leyes relacionales [19].

En el *Ensayo de Dinámica* (1692), después de una primera definición, retórica -no simbólica-, sobre la fuerza “igual, menor y mayor”, presenta en la segunda que “la cantidad de movimiento es el producto de la masa del cuerpo por su velocidad”, ilustrándolo mediante el uso de medidas concretas de las magnitudes que intervienen en la definición:

Escolio. La masa de los cuerpos sensibles se explica por el peso. Así, un cuerpo de 4 libras que va con un grado de velocidad, tendrá una cantidad de movimiento como cuatro. Pero si, siendo de 4 libras tuviera 3 grados de velocidad, su cantidad de movimiento sería como 12.

A continuación reflexiona, tomando medidas concretas, acerca de las fuerzas, pues considera (repitiendo enunciados de Descartes o Huygens) que hace falta la misma fuerza para elevar una libra a una altura de 4 pies, que para elevar 4 libras a la altura de un pie. Más adelante recoge la proposición, que admite que ya había sido demostrada por Galileo y Huygens, acerca de que las velocidades que adquieren los cuerpos al bajar son proporcionales a los cuadrados de las alturas, proposición que le lleva a la siguiente, según la cual un cuerpo de 4 libras de peso y con un grado de velocidad tiene la misma fuerza que un cuerpo de una libra de peso y dos grados de velocidad.

Sin embargo, es dentro de la demostración de esta proposición donde aporta una cita que ilustra el punto de vista que tratamos en este trabajo: la evolución en la formulación matemática de la Mecánica a lo largo del siglo XVII.

Se podría decir, en general, por ejemplo, que las fuerzas de los cuerpos están en razón compuesta de sus masas y del cuadrado de la velocidad, mientras que las cantidades de movimiento están en razón compuesta de las masas y velocidades. Pero se ha preferido expresarlo con ciertos números, para hablar más inteligiblemente en consideración a los que están menos acostumbrados a las frases de los geómetras.

Efectivamente, el Álgebra, introducido en Europa desde los árabes con motivaciones prácticas, además de científicas, comienza a integrarse en el lenguaje matemático de la interpretación de la Naturaleza, que hasta entonces había sido geométrico.

6. Leibniz: expresiones ecuacionales para la Ciencia del Movimiento

En esa misma obra de 1692, a continuación, estudia Leibniz la conservación o no de la cantidad de movimiento, con unas expresiones ecuacionales que no existían todavía en Newton. Considera dos cuerpos A y B que se encuentran con las velocidades C y V , de modo que salen del choque con velocidades c y v . Y apunta:

Así pues, si las cantidades de movimiento se conservan, es preciso que

$$AC + BV \text{ sea igual a } Ac + Bv. \quad (10)$$

Pero, si las fuerzas se conservan, es preciso que

$$ACC + BVV \text{ sea igual a } Acc + Bvv. \quad (11)$$

Aunque termina considerando manifiesto que estas dos ecuaciones no podrían ser ambas verdaderas “más que en alguna coyuntura particular”. Realmente, tanto Galileo como Newton estudiaron en sus libros cuerpos que, con una determinada velocidad, recorren un cierto número de millas en, por ejemplo, una hora. Pero en ninguno de los dos se encuentran manifestaciones como la siguiente, escrita por Leibniz en su *Ensayo de Dinámica sobre las leyes del movimiento* (1698):

Las velocidades están en razón compuesta de la directa de los espacios recorridos y la inversa de los tiempos empleados. O lo que es la misma cosa, para tener la estimación de la velocidad hay que tomar el espacio y dividirlo por el tiempo. Por ejemplo, si A acaba 4 pies en 3 segundos y B acaba 2 pies en un segundo, la velocidad de A será como 4 dividido por 3, es decir, como 4/3, y la velocidad de B como 2 dividido por 1, es decir, como 2, de suerte que la velocidad de A será a la de B como 4/3 es a 2, es decir, como 2 a 3.

De hecho, continúa este trabajo manejando números concretos (1, 2, 3, 4, ...) que representan distancias y tiempos, y sus cocientes, velocidades; pero con la siguiente particularidad que coincide parcialmente con el que será el proceder de Euler treinta años después:

He dividido el espacio por el tiempo para tener la velocidad, pero, cuando como aquí el tiempo es siempre el mismo y así puede ser tomado por la unidad, la división por el tiempo no cambia nada y, por consiguiente, se puede tomar para la velocidad el número de la longitud de la traslación, siendo las velocidades como los espacios.

Como resumen de sus consideraciones introduce tres ecuaciones que ilustran tres ‘conservaciones’, es decir [20], tres principios ecuacionales [de conservación]. Para ello, denota por v y x , respectivamente, la velocidad ‘conspirante’ (“porque supongo que tiende hacia el lado en que va el centro de gravedad común de los dos cuerpos”) del cuerpo a antes y después del choque; y análogamente, mediante y y z , la velocidad del cuerpo b antes y después del choque.

- a) La que denomina “ecuación lineal”, que expresa “la conservación de la causa del choque o de la velocidad respectiva”, para Leibniz:

$$v - y = z - x \quad (12)$$

donde $v - y$ representa la “velocidad respectiva” de los cuerpos antes del choque, y $z - x$ la “velocidad respectiva” a la que se alejan después del choque.

- b) La “ecuación plana”, que expresa “la conservación del progreso común o total de los dos cuerpos”:

$$av - by = ax + bz \quad (13)$$

donde llama ‘progreso’ a la cantidad de movimiento “que va hacia el lado del centro de gravedad”.

- c) La “ecuación sólida”, que expresa “la conservación de la fuerza total absoluta o de la acción motriz”:

$$avv + byy = axx + bzz \quad (14)$$

en la que destaca “que todas las variaciones de los signos, que no pueden venir más que de las diversas direcciones de las velocidades v , x , z , y , cesan, porque todas las letras que expresan estas velocidades están elevadas al cuadrado”.

7. Una consideración final

Con suponer Leibniz, ciertamente, un paso más adelante, no se presentan en sus escritos otras relaciones ecuacionales entre magnitudes distintas, por lo que podemos concluir que, al finalizar el siglo XVII, sí se ha introducido el Álgebra de Vieta y Descartes en Mecánica, aunque todavía aplicado solamente a principios de conservación (en particular el Principio de conservación de la cantidad de movimiento), pero todavía no a leyes relacionales que impongan ligaduras a las magnitudes [20].

Las primeras décadas del siglo XVIII irán alumbrando, con los trabajos de Euler [21] o Daniel Bernoulli [22], leyes relacionales expresadas como relaciones de proporcionalidad entre cantidades de magnitudes heterogéneas; los años centrales, las primeras ecuaciones entre medidas; mientras las décadas finales de la centuria verán la culminación del proceso de matematización de la Mecánica con las obras de Lagrange y Laplace [23]. Temas todos ellos que precisan nuevos estudios detallados.

Bibliografía

- [1] Crombie, A. C. (1959) *Agustine to Galileo. Science in the Middle Ages and Early Modern Times*. Oxford, Oxford University Press.
- [2] Lenoble, R. y Belaval, Y. (1971) “La revolución científica del siglo XVII”. En R. Taton (dir.) *Historia General de las Ciencias*, vol. 2, pp. 213-236. Barcelona, Destino.
- [3] González Redondo, F. A. (2002) “El Álgebra [geométrica] de Euclides a Ommar Khayyam”. *Boletín de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas* nº 63, 72-87.
- [4] González Redondo, F. A. (2003) “Del *Artem Analyticem* de Vieta a la *Mathesis Universalis* de Descartes. Nuevas perspectivas en torno a un período singular en la Historia del Álgebra”. *Boletín de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas* nº 64.
- [5] Galilei, G. (1638) *Diálogos y Demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*. Edición española de C. Solís y J. Sádaba, Madrid, Editora Nacional, 1976. Edición inglesa de H. Crew y A. de Savio, New York, Dover, 1954.
- [6] Newton, I. (1687) *Principios matemáticos de la Filosofía Natural*. Edición española de A. Escohotado, Madrid, Tecnos, 1987.
- [7] Leibniz, G. W. (1687-1698) *Escritos de Dinámica*. Edición española de J. Arana, Madrid, Tecnos, 1991.
- [8] Galilei, G. (1623) *Il Saggiatore*. En *Le Opere di Galileo Galilei*, vol. 6. Firenze, Ristampa della Edizione Nazionale.
- [9] Descartes, R. (1637) *La Géométrie*. Edición en inglés con facsímile en francés de D. E. Smith y M. L. Latham, *The Geometry of René Descartes*.

- New York, Dover, 1954. Apéndice al *Discurso del Método*, edición en castellano de A. Quintás, Madrid, Alfaguara, 1980.
- [10] Vieta, F. (1591) *In Artem Analyticem Isagoge*. Edición en inglés de J. Winfree Smith. Apéndice en Klein, J. (1968) *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. [Reimpresión en Dover, New York, 1992].
- [11] Van der Waerden, B. L. (1985) *A History of Algebra. From Al-Khwarizmi to Emmy Noether*. Berlin, Springer-Verlag.
- [12] Ravetz, J. (1961) “The Representation of Physical Quantities in Eighteenth Century Mathematical Physics”. *Isis* 52, 7-20.
- [13] Claggett, M. (1968) *Nicolas Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. Madison, University of Wisconsin.
- [14] Heath, T. (1926) *The Thirteen Books of The Elements*. Oxford, Clarendon Press.
- [15] Vera, F. (ed.) (1970) *Científicos griegos*, 2 vols. Madrid, Aguilar.
- [16] Koyré, A. (1980) *Estudios Galileanos*. Madrid, Siglo XXI.
- [17] Azcárate, C. (1984) *Las Matemáticas de Galileo*. Universidad Autónoma de Barcelona.
- [18] Boyer, C. B. (1959) *A History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York, Dover.
- [19] González de Posada, F. y González Redondo, F. A. (2002) “Fundamentals of Dimensional Theory”. *Journal of New Energy* [En prensa].
- [20] González de Posada, F. (1992) “Nuevos conceptos básicos en Teoría Dimensional: hipótesis magnitudinales, principios ecuacionales y leyes relacionales”. En F. A. González Redondo y P. Dávila Álvarez (eds.) *Anuario Científico 1991 del Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional*, pp. 11-13. Universidad Politécnica de Madrid.
- [21] González Redondo, F. A. (2002) “La contribución de Leonard Euler a la matematización de las magnitudes y de las leyes de la Mecánica, 1736-1765”. *Llull. Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*. [En prensa].
- [22] Bernoulli, D. (1738) *Hydrodynamica*, Cap. X. Apéndice en D. Papp (1945) *Historia de la Física*, pp. 290-293. Buenos Aires: Espasa-Calpe.
- [23] Blay, M. (1992) *La naissance de la mécanique analytique: la science du mouvement au tournant des XVIIe XVIIIe siècles*. París, Presses Universitaires de France.

Reseña de libros

ALFONSA GARCÍA, ANTONIO LÓPEZ, GERARDO RODRÍGUEZ, SIXTO ROMERO Y AGUSTÍN DE LA VILLA: *Cálculo II (Teoría y problemas de funciones de varias variables)*. CLAGSA, Madrid 2002. 623 páginas y un CD-ROM.

El libro *Cálculo II: Teoría y problemas de funciones de varias variables* es la continuación del anterior y bien conocido *Cálculo I: Teoría y problemas de análisis matemático en una variable*. Se abordan en este caso contenidos relativos al Cálculo Diferencial e Integral de funciones de varias variables, resultando ser esta obra una herramienta útil para cualquier estudiante de Ingeniería o Arquitectura. Se le ha dado un enfoque práctico y moderno que capacita al alumno, en un tiempo relativamente corto, para resolver los problemas de cálculo diferencial e integral de funciones de varias variables con los que se va a encontrar en las distintas aplicaciones. Cada capítulo se estructura de la siguiente forma: comienza con un resumen teórico en el que se muestran los conceptos y se explican los resultados más importantes, seguido de un test de auto-evaluación, así como de una colección de problemas resueltos (en detalle y ordenados de acuerdo con los conceptos utilizados y con su dificultad) y concluye con una colección de problemas análogos propuestos.

Además, y teniendo en cuenta la importancia que está adquiriendo el software matemático en Ingeniería, los autores han considerado importante habituar al estudiante a la utilización racional y crítica de un Sistema de Cálculo Simbólico. Por ello, el libro va acompañado de un CD-ROM que contiene dos directorios alternativos, uno de ellos dirigido a los usuarios del sistema MAPLE y otro para los usuarios del sistema MATHEMATICA. Cada uno de estos directorios incluye diferentes hojas de trabajo interactivas en las que se presentan ejemplos de problemas resueltos con ayuda del correspondiente Sistema de Cálculo Simbólico, así como programas en que se implementan diferentes algoritmos. El objetivo de estas hojas de trabajo es permitir que el estudiante saque el máximo partido al software (aprovechando sus capacidades gráficas y de cálculo en el proceso de experimentación asociado a la comprensión de conceptos, y evitando la pérdida de tiempo en cálculos tediosos; estando diferenciados claramente los procesos algorítmicos de los que no lo son).

Este libro proporciona un material de trabajo que cubre una necesidad frecuentemente puesta de manifiesto por profesores de Matemáticas y de estudiantes de

Ingeniería y Arquitectura. Subrayemos que no se trata de un libro de carácter local, en el sentido de estar específicamente orientado a los alumnos de un cierto centro de una cierta universidad, sino que se ha tratado de incorporar la experiencia y las opiniones de otros profesores de varias universidades, al objeto de conseguir un texto de amplia aplicación.

Terminaremos resaltando que este libro ha obtenido un premio al mejor libro de texto de la Universidad Politécnica.

Eugenio Roanes Lozano

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTeX (en este último caso deberá usarse estilo “article” y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos (normal). Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección en minúsculas negritas y numerados, sin punto después del número ni punto final, excepto el de introducción que irá sin numerar. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: “Problema número (Boletín número)”, tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de las copias en papel

Se enviarán vía postal por duplicado a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes: 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 64, 65 y 66.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de la “*Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*”, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

- la dirección a donde se han de enviar
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.