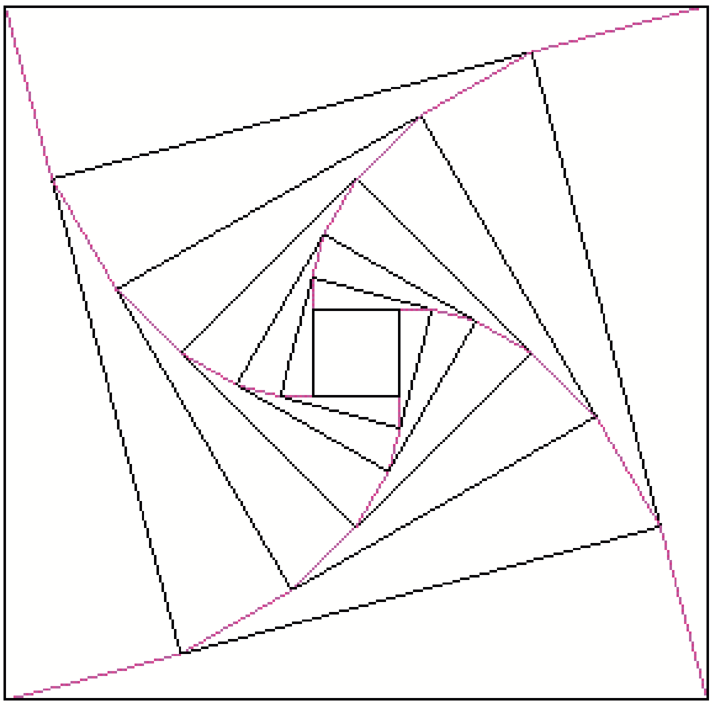
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 64
JUNIO DE 2003

ÍNDICE

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:
FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretaria:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
MARTÍN GARBAYO MORENO

Adjunta a la presidencia (mantenimiento página web):
MARÍA JOSÉ MORENO SÁNCHEZ DE LA SERRANA

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2003 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 26 de abril de 2003, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil tres.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

El Presidente informa sobre las actividades realizadas y por realizar.

a) Se informa que el sábado 22 de junio de 2002 se celebró, con el éxito ya tradicional, el XX Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Doctores y Licenciados. Como en años anteriores, los ejercicios tuvieron lugar en la Facultad de Matemáticas y la entrega de premios en la E.U. de Biblioteconomía, recogiéndose en el *Boletín* la información sobre los concursantes y los resultados obtenidos.

b) Se anuncia que el XXI Concurso de Resolución de problemas tendrá lugar, con la misma estructura de las ediciones precedentes, el sábado 7 de junio de 2003.

c) Se informa que, como en años anteriores, nuestra Sociedad colaboró con la Real Sociedad Matemática Española en la organización de la Fase del Distrito de

Madrid de la Olimpiada Matemática, debiéndose reconocer las mejoras en la presente edición en lo que a logística se refiere.

d) Como novedad con respecto a otros años, destaca la participación de la Sociedad, a propuesta de nuestro Vocal de Concursos, D. Joaquín Hernández, en la convocatoria, desarrollo y entrega de diplomas del Concurso de Matemáticas Intercentros.

e) También se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 61 (junio), 62 (octubre) y 63 (febrero) del *Boletín*, destacándose que la aceptación por la comunidad matemática es tal que existen artículos pendientes de publicación que llenarían ya los dos próximos números.

f) Complementariamente, se constata que *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* y *Mathematical Reviews* han continuado recensionando positivamente diferentes artículos publicados en el *Boletín*.

g) Se informa de la celebración, con el éxito de ediciones anteriores, del IV Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1945: Cabrera, Cajal, Torres Quevedo", celebrado en Yaiza (Lanzarote) durante los días 3, 4 y 5 de julio de 2002, organizado por el Centro Científico-cultural Blas Cabrera y auspiciado, entre otras instituciones, por nuestra Sociedad.

h) Por otro lado, apunta el Sr. Presidente que ya se han publicado las *Actas* del II Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1945: Cabrera, Cajal, Torres Quevedo", que también auspició nuestra Sociedad, en las que se recogen los trabajos conmemorativos del Centenario del nacimiento de D. Pedro Puig Adam presentados en las diferentes sesiones.

i) Para terminar, se informa de la puesta en marcha de la nueva página web de la Sociedad, tal como se anunciaba en *Boletines* anteriores, adjunta a la página de la Sección Departamental de Álgebra de la U.C.M., haciendo constar el agradecimiento a la persona que ha llevado a cabo la tarea, Dña. Mª José Moreno Sánchez de la Serrana.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Respondiendo a algunas cuestiones planteadas por D. Eugenio Roanes Macías y D. Javier Etayo las cuentas quedan aprobadas por unanimidad, concluyéndose que no resulta necesario modificar la cuota anual.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

Comienza el Sr. Presidente recordando los cambios experimentados durante los últimos años, tras los cuales resulta preceptivo renovar tres de los cargos elegidos en la Asamblea General de 1999. Estudiadas las propuestas, se aprueba por unanimidad la renovación en sus cargos de D. Juan Bosco Romero Márquez (Vicepresidente), D. Julio Fernández Biarge (Vocal de Redacción de publicaciones) y D. Eugenio Roanes Lozano (Vocal de Gestión de publicaciones).

Finalmente, el Sr. Presidente recuerda que seguirá planteando en próximas Asambleas la necesidad de que se renueve la Presidencia que ocupa.

5. Asuntos de Trámite.

D. Víctor Manuel Sánchez plantea la conveniencia tanto de reservar una cantidad de dinero para los premios del Concurso -por si no puede contarse con todos los patrocinadores previstos-, como de organizar un nuevo Concurso matemático por Internet desde la Sociedad.

Dña. María Gaspar sugiere que vayamos reservando un número suficiente de aulas para el Concurso de Problemas de junio, aspecto que confirma el Prof. Etayo ya había sido tenido en cuenta.

D. Eugenio Roanes Macías propone que la Sociedad participe en la organización, junto con la Sección Departamental de Álgebra, de dos conferencias sobre Educación Matemática a impartir por sendos catedráticos extranjeros visitantes, respectivamente, durante la última semana de mayo y tercera de junio, a lo que dan unánimemente el visto bueno los asistentes.

Informando D. Víctor Manuel Sánchez de que ya tiene preparada la reseña del Concurso de Primavera para el *Boletín*, D. Julio Fernández Biarge recuerda que también debiera incluirse en el mismo la reseña de la Olimpiada de Tenerife, tarea que se ofrece a realizar Dña. María Gaspar.

6. Ruegos y Preguntas.

D. Eugenio Roanes Macías pregunta acerca de la posibilidad de que nuestra Sociedad firme un convenio con la Real Sociedad Matemática Española que contemple la situación de las personas que son socios de ambas instituciones, respondiendo el Sr. Presidente que ya se está estudiando un borrador de dicho convenio.

D. Víctor Manuel Sánchez pregunta si se dispone de la relación de correos electrónicos de los Institutos de Bachillerato de las diferentes Comunidades Autónomas, contestándole el Sr. Presidente que sólamente se dispone de etiquetas con las direcciones de correo ordinario de los institutos de la CAM.

Llegados a este punto, el Presidente levanta la sesión a las doce horas y treinta y cinco minutos de la fecha arriba indicada.

V.º B.º El Presidente *El Secretario*

VII Concurso de Primavera de Matemáticas

A lo largo del presente curso escolar, un gran número de alumnos se ha venido preparando para participar en la séptima edición de este concurso, convocado por la Facultad de Matemáticas de la UCM, y con la colaboración de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, Ediciones SM y el Grupo Anaya. En la primera fase, la realizada el pasado 26 de febrero en cada uno de los 298 Centros inscritos, participaron unos 18.000 alumnos. En la segunda, la celebrada el sábado 5 de abril en la mencionada Facultad, lo hicieron 1900 estudiantes. Este número hubiese sido bastante mayor de no existir la limitación que tienen los colegios de no enviar a más de 4 ó 5 alumnos por nivel. Esta limitación viene impuesta por el número de aulas disponibles.

Con este concurso se pretende motivar y estimular a una gran mayoría de estudiantes, haciéndoles ver que es posible disfrutar pensando, haciendo y aprendiendo matemáticas. Cada estudiante puede concursar en uno de los niveles:

Primer Nivel: Alumnos de 5° y 6° de Primaria.
Segundo Nivel: Alumnos de 1° y 2° de ESO.
Tercer Nivel: Alumnos de 3° y 4° de ESO.
Cuarto Nivel: Alumnos de Bachillerato LOGSE o equivalentes.

En cada uno de estos niveles se propone una prueba, de 25 cuestiones de elección múltiple, a desarrollar individualmente durante una hora y media. Y así, por ejemplo, nuestros jóvenes concursantes tuvieron que cavilar lo suyo para elegir uno de los números 11, 10, 9, 8 ó 7 como respuesta al siguiente enunciado: *Escribiendo un 1 al principio y otro 1 al final de un número, éste aumenta en 14789. ¿Cuál es la suma de las cifras del número original?*.

En otra de las cuestiones se les ofrecían los números 5, 6, 7, 11 y 12, como posibles respuestas, y se les preguntaba: *Un año es Año Santo Compostelano si el 25 de julio cae en domingo. ¿Cuántos años podrán pasar, como mínimo, entre dos Años Santos Compostelanos consecutivos?*

El 9 de abril, a las 19 horas, tuvo lugar el acto de entrega de premios, en el que se entregó el diploma correspondiente y un pequeño obsequio a cada uno de los 150 ganadores de esta segunda fase. También se entregaron, en este mismo acto, los diplomas a los representantes españoles en la Olimpiada de Mayo del pasado curso. Según nos dicen, pocas veces se había visto el Salón de Actos "Rey Pastor" de la Facultad de Matemáticas tan abarrotado y animado como en esta ocasión. Los ganadores del concurso, que salvo que haya empates, como ha sucedido ahora, son los tres alumnos mejores de cada nivel, han sido en esta edición:

Nivel I (416 participantes)

Daniel Sánchez Seijo. 6º de Primaria. Colegio Gredos San Diego
Carlos Alberto Ruiz Domínguez. 5º de Primaria. Colegio San Viator
Simón Carlos Kocher. 6º de primaria. Colegio Alemán
Sergio Vilches Expósito. 6º de Pimaria. CP Julio Cortázar de Getafe

Nivel II (675 participantes)

Álvaro Arbiza Calpena. 2º de ESO. Colegio Nuestra Señora de las Maravillas
Manuel López Sheriff. 2º de ESO. Colegio Brains

Salvador Viso Garrote. 2º de ESO. Colegio Nuestra Señora de las Maravillas
Diego Izquierdo Arseguet. 1º de ESO. Liceo Francés

Nivel III (534 participantes)

José Antonio Pérez Martín. 4º de ESO. Colegio Institución La Salle
Iván López Martínez. 3º de ESO. Liceo Cónsul
Elisa Lorenzo García. 4º de ESO. IES Fortuny

Nivel IV (275 participantes)

Daniel de la Barrera Mayoral. 1º de BTO. Colegio La Inmaculada de Getafe
Alejandro Cruz Robledillo. 2º de BTO. Colegio Santa María del Pilar
Ramiro José López Colino. 2º de BTO. Colegio Valdeluz
Worrawit Pattaranit. 2º de BTO. IES Ramiro de Maeztu

Por otra parte, los 25 estudiantes con mejor puntuación que no hayan cumplido 13 años el 31 de diciembre de 2002, y los 25 estudiantes con mejor puntuación que no hayan cumplido 15 años el 31 de diciembre de 2002 están invitados a participar, junto con otros estudiantes de toda España, en la *IX Olimpiada de Mayo*, competición iberoamericana organizada por la Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas, que se celebrará el sábado 10 de mayo de 2003 simultáneamente en los países de habla hispana y portuguesa.

Pero no se acaban aquí las oportunidades de participar en este tipo de actividades. Nuestros muchachos pueden también participar en el *Concurso "Puig Adam" de Resolución de Prolemas de Matemáticas*, de cuya XXI edición, celebrada el 7 de junio, damos cuenta en nuestro Boletín. También se puede obtener información de la misma en la página web de nuestra Sociedad (mencionada en este número) o en la página web del Colegio de Doctores y Licenciados de Madrid: www.cdlmadrid.es

Y, si siguen con ganas de pelea, pueden continuar con las Olimpiadas: Rioplatense, Española, Internacional, Iberoamericana, etc.

Las pruebas del Concurso de Primavera de Matemáticas se pueden encontrar en la página: www.profes.net , que también ofrece la posibilidad de seguir concursando "on - line". (Más información: www.mat.ucm.es/concurso/).

Víctor Manuel Sánchez González
Joaquín Hernández Gómez
Miembros del Comité Organizador del Concurso

XXXIX Olimpiada Matemática Española

En la carnavalera primera semana de marzo se reunieron en La Laguna los 114 estudiantes que, como ganadores de las fases locales, debían participar en la fase nacional de la XXXIX OME. Los dos benjamines, de 4º de secundaria, dos madrileños: Ricardo Martín Brualla y Elisa García García, premiados ya también en la última edición de nuestro Concurso de Resolución de problemas.

Estos fueron los problemas propuestos:

Primera sesión (lunes, 3 de marzo)

Problema 1

Probar que para cualquier primo p distinto de 2 y 5 existe un múltiplo de p que tiene todas sus cifras “9”. Por ejemplo si $p = 13$, $999999 = 13 \cdot 76923$

Media oros: 4,83
Media todos: 0.91

Problema 2

¿Existe algún conjunto finito de números reales M, que contenga al menos dos elementos distintos y que cumpla la propiedad de que para dos números a, b cualesquiera de M, el número $2a - b^2$ sea también un elemento de M?

Media oros: 4,17
Media todos: 0,46

Problema 3

Las alturas del triángulo ABC se cortan en el punto H. Se sabe que $AB = CH$. Determinar el valor del ángulo $\angle BCA$.

Media oros: 3,88
Media todos: 1,72

Segunda sesión (martes, 4 de marzo)

Problema 4

Sea x un número real tal que $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Demostrar que tanto x como x^2 son irracionales.

Media oros: 2
Media todos: 0.77

Problema 5

¿Cuáles son las posibles áreas de un hexágono con todos los ángulos iguales y cuyos lados miden 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en algún orden?

Media oros: 5,83
Media todos: 1,19

Problema 6

Ensartamos $2n$ bolas blancas y $2n$ bolas formando una cadena abierta. Demuestra que, se haga en el orden que se haga, siempre es posible cortar un segmento de cadena con exactamente n bolas blancas y n bolas negras.

Media oros: 5
Media todos: 1,14

Entrega de premios

En la entrega de premios, celebrada el miércoles 5 de marzo en Las Palmas, recibieron sus Medallas de Oro los seis estudiantes ganadores de esta edición de la Olimpiada:

Daniel Rodrigo López, de Montcada i Reixac
Luis Hernández Corbato, de Madrid
Mohamed Blanca Ruiz, de Manises
Víctor Alonso García, de Briviesca
Javier Gómez Serrano, de Madrid
Maite Peña Alcaraz, de Sevilla.

Ellos constituyen el equipo español que viajará a Tokio el próximo 10 de julio para participar en la Olimpiada Internacional de Matemáticas.

Entre los nueve estudiantes de Madrid, además de Luis y Javier, con Medalla de Oro, Daniel de la Barrera Mayoral obtuvo Medalla de Plata y Alejandro Cruz Robledillo Medalla de Bronce.

Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) y Mathematical Reviews incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN MATHEMATICAL REVIEWS

2003c: 51015. Una generalización para cuadriláteros del Teorema de Napoleón, por *Juan Tarrés Freixenet*, Bol. Soc. Puig Adam 61 (Jun 2002), págs. 28-38.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 35 (1) DE 2003

#0008 (sección A30). Un modelo historiográfico para las Ciencias. La evolución de la Matemática hasta su establecimiento como disciplina científica, por *Francisco González Redondo*, Bol. Soc. Puig Adam 61 (Jun 2002), págs. 84-93.

#0386 (sección E60). Aplicaciones didácticas de matrices y grafos en el estudio de relaciones, por *Juan A. Aledo* y *José C. Valverde Redondo*, Bol. Soc. Puig Adam 61 (Jun 2002), págs. 59-72.

#0425 (sección F60). Propiedades y Problemas relacionados con las Funciones de de Smarandache, por *Minh Perez y Sebastián Martín Ruiz*, Bol. Soc. Puig Adam 61 (Jun 2002), págs. 39-47.

#0494 (sección G40). Una generalización para cuadriláteros del Teorema de Napoleón, por *Juan Tarrés Freixenet*, Bol. Soc. Puig Adam 61 (Jun 2002), págs. 28-38.

#0536 (sección G70). Sobre el logotipo de nuestra Sociedad, por *Julio Fernández Biarge*, Bol. Soc. Puig Adam 61 (Jun 2002), págs. 22-27.

#0562 (sección H30). Las relaciones de Cardano en la Enseñanza de las Matemáticas en Secundaria, por *María Belén Rodríguez Rodríguez*, Bol. Soc. Puig Adam 61 (Jun 2002), págs. 50-58.

Titulo Propio de la UCM de “Experto en Educacion Matematica”

(Se impartirá por última vez en el curso 2003/04)

Objetivos: Actualización científica y didáctica en los distintos campos de las Matemáticas.

Créditos requeridos: 25

Materias:

1. El ordenador en la Educación Matemática. 4 créditos. Profesores: Eugenio Roanes Lozano (UCM) y Eugenio Roanes Macías (UCM)
2. Programación de Taller de Matemáticas. 2 créditos. Profesor: Juan José Prieto Martínez (UCM)
3. Las Matemáticas en Secundaria: un enfoque distinto del habitual. 3 créditos. Profesor: Joaquín Hernández Gómez (UCM)
4. Motivando las Matemáticas en Secundaria. 3 créditos. Profesor: Miguel de Guzmán Ozámiz (UCM)
5. Taller de Astronomía. 3 créditos. Profesora: Ana Inés Gómez de Castro (UCM)
6. Matemáticas con Matlab 1,5 créditos. Profesor: Roberto Rodríguez del Río (UCM)
7. Elementos de Cartografía Matemática. 1,5 créditos. Profesor: Jesús Otero Juez (UCM)
8. Fundamentos de Geometría: Áreas y Volúmenes (II). 2 créditos. Profesor: Mariano Martínez (UCM)
9. Breve recorrido por la Filosofía de la Ciencia. 1,5 créditos. Profesor: José Mendoza Casas (UCM).

10. Teoría de Números y Ecuaciones Diofánticas. 3 créditos. Profesor: Juan Ramón Delgado Pérez(UCM)
11. Estudio y Representación de Curvas Planas. 1,5 créditos. Profesor: Domingo García Casado (UCM)
12. Sistemas Dinámicos y Caos. 3 créditos. Profesores: José Manuel Vegas Montaner (UCM) y Carlos Fernández Pérez (UCM)
13. Estadística y Nuevas Tecnologías. 1,5 créditos. Profesor: Javier García Crespo (UCM)
14. Introducción a la Teoría de la Relatividad. 1,5 créditos. Profesor: Eduardo Aguirre Dabán (UCM)

Información más detallada durante el verano en: www.mat.ucm.es o en la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Directora del Título: Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro. Prof. Titular del Departamento de Álgebra de la UCM.

Cursos Certificados de Formación Continua

(Pendientes de aprobación por la UCM)

Se propone una serie de cursos independientes con una dirección y una estructura unificadas. Algunos coinciden con las asignaturas del Título de Experto anterior con lo cual los alumnos tendrán que optar por cursarlos en una de las dos modalidades

1. Sistemas Dinámicos y Caos. 3 créditos. Profesores: José Manuel Vegas Montaner (UCM) y Carlos Fernández Pérez (UCM)
2. Teoría de Números y Ecuaciones Diofánticas. 3 créditos. Profesor: Juan Ramón Delgado Pérez (UCM)
3. El ordenador en la Educación Matemática. 4 créditos. Profesores: Eugenio Roanes Lozano (UCM) y Eugenio Roanes Macías (UCM).

4. Las Matemáticas en Secundaria, un enfoque distinto del habitual. 3 créditos. Profesor: Joaquín Hernández Gómez (UCM).

5. Comprender, pensar y trabajar en Matemáticas. 3 créditos. Profesor: Inés María Gómez Chacón (IEPS).

6. Taller de Astronomía. 3 créditos. Profesora: Ana Inés Gómez de Castro (UCM)

7. Tratamiento del azar: Probabilidad. 3 créditos. Profesor: María Jesús Ríos Insúa (UCM) o Eusebio Sánchez-Manzano (UCM).

8. Estadística. 3 créditos. Profesora: Susana Cachinero (UCM)

9. Fundamentos de Geometría: Áreas y Volúmenes. 3 créditos. Profesor: Mariano Martínez Pérez (UCM).

10. Geometría. 3 créditos. Profesores: Juan Tarrés Freixenet (UCM) y Domingo García Casado (UCM)

11. Matemáticas con Matlab y con Internet. 3 créditos. Profesores: Roberto Rodríguez del Río (UCM) y María Dolores Rodríguez Soalleiro (IES)

12. Desarrollando el pensamiento matemático. 3 créditos. Profesora: María Luz Callejo de la Vega (IEPS).

13. Motivando las Matemáticas en Secundaria. 3 créditos. Profesor: Miguel de Guzmán Ozámiz (UCM).

14. Historia de la Astronomía Antigua. 3 créditos. Profesores: Jesús Fortea Pérez (UCM) y Féliz Muñoz Martínez (IES Vallecas I).

15. Programación de Taller de Matemáticas y Transversalidad en Secundaria 3 créditos. Profesores: Elisa Benítez Jiménez (UCM) y Juan José Prieto Martínez (UCM).

16. Introducción a la Cartografía Matemática y a la Teoría de la Relatividad 3 créditos. Profesores: Jesús Otero Juez (UCM) y Eduardo Aguirre Dabán (UCM).

17. Estadística y Nuevas Tecnologías. 3 créditos. Profesores: Francisco Javier García Crespo (UCM) y José Antonio López Varona (UCM).

18. Panorámica actual de la Informática. 3 créditos. Profesor: David de Frutos Escrig (UCM)

19. La Educación Matemática hoy. 3 créditos. Profesores: Un profesor español por determinar, Alan Schoenfeld (Univ. de Stanford) y Michelle Artigue (Univ. de París).

Directora de los cursos: Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro. Profesora Titular del Departamento de Álgebra de la UCM.

Más información a lo largo del verano en www.mat.ucm.es o en la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Conferencia organizada por nuestra Sociedad

Organizada y patronizada por la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Mate-máticas y por la Sección Departamental de Algebra de la Facultad de Edu-cación de la Univ. Complutense, se celebró la conferencia mencionada a con-tinuación, el día 27 de mayo de 2003 a las 19:30 horas en la Sala de Grados de la Facultad de Educación.

Título: Computer aided treatment of 3d-problems in analytic geometry.

Conferenciante: Heinz Schumann, catedrático de Matemáticas de la Universidad de Educación de Weingarten, Alemania.

Resumen: En esta conferencia se introdujo un método para el tratamiento de problemas de geometría analítica 3D, que integra computación gráfica tridimensional y álgebra computacional. Utiliza una nueva herramienta de computación gráfica desarrollada para visualizar las correspondientes configuraciones espaciales y las soluciones gráficas de problemas análiticos espaciales. Esta herramienta es apropiada tanto para la ehibición por el profesor como para el trabajo interactivo de los estudiantes. El uso del álgebra computacional está motivado por la necesidad de justificar las soluciones obtenidas gráficamente. En primer lugar se resuelve el problema algebraico general y se ilustra gráficamente y posteriormente se especifica numéricamente la solución general (En el próximo número de nuestro Boletín está previsto publicar un artículo suyo, relacionado con el tema de la conferencia).

Nota: La fecha y hora de la conferencia no pudo precisarse hasta muy poco tiempo antes de celebrarse, dado que se aprovechó un día de paso por Madrid del Prof. Schumann. Como consecuencia, sólo puedieron ser avisados aquellos socios que nos han notificado su correo electrónico. Por ello la Junta Directiva invita de nuevo a comunicarnos la dirección de correo electrónico a todos los socios que dispongan de él.

Presentación del Prof. Kreith

Kurt Kreith es profesor emérito de la Universidad de California en Davis. Su campo de investigación se centró en el estudio de Ecuaciones Diferenciales. Pero sus trabajos más recientes son sobre el desarrollo de programas para profesores, y están enfocados en el papel de las Nuevas Tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas a nivel de Educación Secundaria. Bajo los auspicios del "American Forum for Global Education", ha desarrollado un curriculum sobre "Las Matemáticas del Cambio Global", que imparte a profesores y alumnos de primer año de su universidad.

Eugenio Roanes Lozano

Algebra in the Time of Computers

Kurt Kreith
University of California at Davis
Kkreith@ucdavis.edu

Abstract

The emergence of computer technology has implications not only for how we teach, but also for what we teach. This paper describes some ongoing efforts to reconcile school algebra with the technology that is having such profound effects on our lives and civilization.

Introduction

Over the millennia, the mathematics taught under the banner *al jabr* has undergone profound changes. To the Greeks, the solution of proportions and equations was based on geometric concepts. In the middle ages the Arabs learned to solve quadratic equations with real roots, but their conception of "number" was a positive quantity. In this context, posing a problem of the form $ax^2 + bx + c = 0$ made no sense. Today, the quadratic formula and "completing the square" are centerpieces of most school algebra curricula, even though other techniques for solving the general quadratic are at least as instructive and useful. For example, Viete solved the general quadratic by eliminating the linear term, and an analogous step is the starting point in Cardano's method for solving the general cubic.

In such a historical context, it seems appropriate to reexamine contemporary algebra instruction in the light of computer technology. Such a reexamination is likely to reveal the fact that preparation for calculus is at the heart of most algebra curricula. However, technology has implications for the study of calculus as well, and many applications that were once reserved for calculus-trained specialists have now become accessible at a pre-calculus level. This fact makes it possible for students to use technology supported forms of algebra to think more meaningfully about a wide range of mathematical ideas and world phenomena.

1. Quadratic equation

Given its central role, the litany "*negative bee plus or minus the square root ...* " may provide a good starting point for a reexamination of our algebra curricula. Using the quadratic formula, the "golden ratio" $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ emerges as the positive solution of the equation $x^2 - x - 1 = 0$. For the student, finding this expression tends to be the end of the problem, even though such a "solution" falls short of telling how big the golden ratio actually is. To find that the golden ratio is approximately 1.61803 you must still evaluate $\sqrt{5}$. But finding $\sqrt{5}$ *also* involves the solution of a quadratic equation, namely $x^2 - 5 = 0$. Rather than *solving* $x^2 - x - 1 = 0$, the celebrated quadratic formula merely reduced the problem to a simpler one!

These observations suggest that a careful look at square roots can be of help in re-thinking quadratic equations [Vanden Bosch, 2000]. For here we have a celebrated Babylonian technique that is often taught at the pre-algebra level under the name "divide and average." In order to approximate $\sqrt{2}$, one makes an initial guess, say $x_1 = 3/2$. The fact that $(3/2)(3/2) > 2$ shows that the initial guess was too large, leading to a search for another number $(\cdot)$ for which $(3/2)(\cdot) = 2$. The fact that $(3/2)(4/3) = 2$ and $(3/2) > \sqrt{2}$ shows that $4/3 < \sqrt{2} < 3/2$. It is on this basis that one might argue that a second (improved) guess is given by $x_2 = \frac{3/2+4/3}{2}$, etc.

Using functional notation, this technique has the concise representation

$$x_{i+1} = F(x_i) \quad \text{where} \quad F(x) = \boxed{}.$$

At present, students are unlikely to study this form of divide and average until, in the context of a course on calculus, they encounter Newton's method. Here this scheme is represented in terms of a succession of lines tangent to the parabola $y = x^2 - 2$.

What technology now invites us to do is to give Newton's method a rather different geometric interpretation, one that fits naturally into a second course on algebra. By graphing the functions y = F(x) and y = x, the iterative scheme $x_{i+1} = F(x_i)$ can be represented in terms of a “cobweb diagram.” Students at a pre-calculus level can (and perhaps should!) learn to associate “divide and average” with the following diagram. Interestingly, the capacity to generate such diagrams was built into TI-82 and TI-83 graphing calculator during the early 1990s.

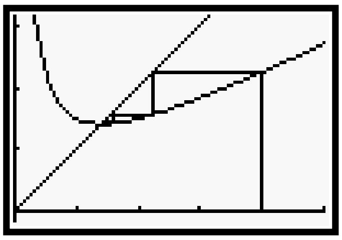


Figure 1. Cobweb diagram for √2

In Figure 1, an initial guess $x_1 = 4$ is transformed into successive guesses 9/4, 113/72,... Because of the “flatness of the iterator” F(x) at its fixed point x = √2, this sequence of numbers rapidly approaches the value being sought.

The flatness of F(x) at its fixed points can be arrived at as a consequence of Newton's method. However, establishing the flatness of $\frac{x + 2/x}{2}$ at x = √2 need not involve calculus. All that is needed is a special case of the famous Arithmetic-Geometric Mean inequality: If a ≥ 0 and b ≥ 0, then

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

with equality if and only if a = b. When applied to a = x and b = 2/x, this inequality shows that F(x) ≥ √2 for all x > 0. Furthermore, we have equality if and only if x = 2/x - i.e., if and only if x = √2.

These ideas can readily be generalized at a pre-calculus level, first to $x^2 - k = 0$ and then to the general quadratic $ax^2 + bx + c = 0$ [Kreith & Chakerian, 1999]. In such an approach to quadratic equations, finding the positive solution of $x^2 - x - 1 = 0$ becomes no more difficult than finding √5. That is, the quadratic formula can be circumvented by an iterative technique that the student has already encountered in the study of square roots.

However, the mere possibility of displacing the quadratic formula does not provide a rationale for actually doing so. Indeed, there is no suggestion here that the quadratic formula is unimportant or that it should not be taught. By the same token, however, our 500 year commitment to solution in terms of radicals should not preclude the consideration of an alternate technique. The reason for teaching *either* technique is not that the world is full of quadratic equations in need of solving. Rather, it is what the student learns in the process of solving quadratic equations that is at issue, and this is the context in which our approach to quadratic equations should be considered.

To be sure, there are valuable skills associated with completing the square, and these make a powerful case for continuing to teach the quadratic formula. However, there are also important skills associated with an iterative approach, and these must be brought into the discussion as well.

2. Cubic equations and fractals

For good reasons, the solution of cubic equations tends to play a minor role in school algebra curricula. Efforts to generalize the quadratic formula to the general cubic lead to Cardano's method and its attendant difficulties (notably in the "irreducible case" of three real solutions).

By contrast, an iterative approach to cubic equations is not substantially different from that used to solve the general quadratic. One starts by generalizing "divide and average" to the problem of approximating $\sqrt[3]{k}$ and thereby arrives at the iterative scheme

$$x_{i+1} = F(x_i) \quad \text{where} \quad F(x) = \frac{2x + k/x^2}{3}.$$

This iterative scheme is again Newton's method for approximating solutions to $x^3 - k = 0$. From here one can, at a pre-calculus level, develop a rationale for using the iterative scheme

$$x_{i+1} = F(x_i) \quad \text{where} \quad F(x) = \frac{2ax^3 + bx^2 - d}{3ax^2 + 2bx + c}$$

to solve $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ [Kreith & Chakerian, 1999].

For a specific equation such as $(x + 1)(x - 1)(x - 2) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, technology makes it easy to trace the corresponding cobweb diagrams.

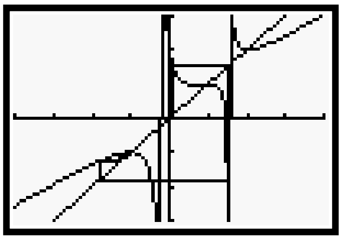


Figure 2. Cobweb diagram for a cubic

Such experiments give meaning to the following question: *Given that virtually any choice of initial value x_1 will lead to one of the roots of $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$, classify the initial values in terms of whether they lead to -1, 1, or 2.*

Unlike the corresponding situation in the solution of quadratic equation, this question for cubics confronts the student with an intractable problem. The reason for posing it is to bring the student face to face with a fractal that is directly linked to the study of algebra.

3. Mathematical modeling

Engaging as they may be, fractals are likely to be seen as a somewhat esoteric topic for school algebra curricula. Of greater relevance may be the "rules for change" are at the heart of mathematical modeling and have traditionally been thought of in terms of differential equations. This point of view has created a situation in which high school mathematical modeling tends to be built around specific topics such as exponential growth and decay, while more general techniques are deferred until the college curriculum.

In fact, however, a reliance on differential equations can lead to rather stylized forms of mathematical modeling. Given a focus on differential equations that can be solved in closed form, there is the danger that mathematical modeling can become the proverbial "tool in search of a problem". To avoid this trap at the college level, students must learn to deal with numerical solutions of differential equations. This leads naturally to difference equations of the form

$$x_{i+1} - x_i = f(x_i)$$

where the function f embodies a particular rule for change.

Consider now the high school student who has encountered iterative techniques in the solution of polynomial equations. By re-writing the above difference equation in the form

$$x_{i+1} = x_i + f(x_i),$$

implementing this rule for change becomes the same as

$$x_{i+1} = F(x_i), \text{ with } F(x) = x + f(x).$$

In other words, for students who have used iteration to solve polynomial equations, there should be nothing mysterious about difference equations or the use of technology to solve them.

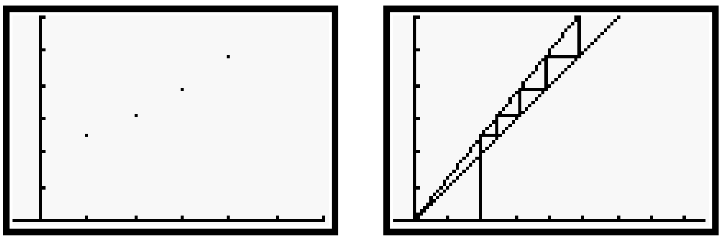


Figure 3. Time and Cobweb diagrams for exponential growth

As preparation for such endeavors, the usual algebraic treatment of exponential growth and decay deserves some elaboration. Here the rule for change is

$$x_{i+1} - x_i = rx_i$$

where r is a constant that represents the growth rate of the process (population growth, compound interest, radioactive decay, etc.) that is under study. For 2 dollars growing at 25%, the difference equation corresponds to the iterative scheme

$$x_{i+1} = 1.25x_i \quad \text{with} \quad x_1 = 2$$

and to the corresponding "time" and "cobweb" diagrams for this process (Fig. 3).

In the case of exponential decay, the picture is similar. If r = -.25 and $x_1 = 6$, then

$$x_{i+1} = x_i - .25x_i = .75x_i \text{ with } x_1 = 6.$$

This difference equation gives rise to the following diagrams (Fig. 4).

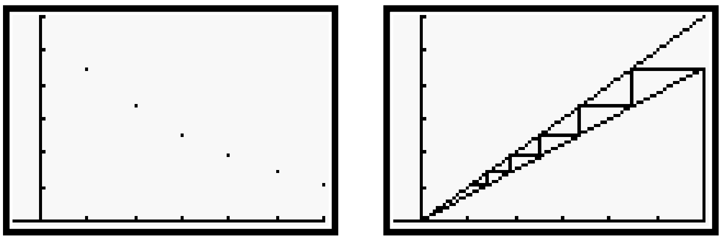


Figure 4. Time and Cobweb diagrams for exponential decay

Here, in a simple and familiar context, there is an important lesson about slope. Both cobweb diagrams involve the line y = x and an "auxiliary line" y = (1+r)x that determines the process under study. If the auxiliary line has slope m with m > 1, we have exponential growth. If the auxiliary line has slope -1 < m < 1, we have exponential decay. In this algebraic context, the student has a first encounter with the distinction between repelling and attracting fixed points. (Note: The above diagrams were generated with a feature built into graphing calculators that are common in American classrooms).

The question of whether such ideas should be included in school algebra depends largely on the goals one sets for the curriculum. If algebra is to be a headlong dash to calculus in its traditional form, then cobweb diagrams may seem like a digression. But if we also seek to prepare students for modeling in a modern context, then the opportunity to present such ideas should not be missed. Iterative techniques prepare the students for a different form of "higher mathematics," one that involves fixed points, attractors, repellers, cycles, and chaos. As a supplement to calculus in its classical form, such "discrete dynamical systems" constitute a branch of higher mathematics that is likely to be of growing importance in the computer age.

But dynamical systems aside, even traditional curricula would profit from a seamless transition from polynomial equations to difference equations to discrete forms of mathematical modeling. Given an ability to implement

$$x_{i+1} - x_i = f(i, x_i)$$

on a spreadsheet, the student is prepared to address phenomena that are central to the "real world" but often overlooked in the usual curriculum. For example, most modelers will acknowledge that uncertainty is part of many real world phenomena. A theoretical approach to such models involves the daunting topic of "stochastic differential equations" that is rarely addressed in the undergraduate college curriculum. However, the underlying idea is readily posed (and implemented) in terms of problems such as "a bank whose annual interest rate is uniformly distributed between 8 and 10 percent."

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		**Year**	0	1	2	3	4	5	6
3		**Balance**	100	108.41	117.32	127.33	139.05	151.72	164.15

Figure 5. A stochastic difference equation

Students who have used spreadsheets for the solution of polynomial equations will be prepared to model such problems in the form of Figure 5 with the crucial formula "= 1.08∗C3+.02∗RAND()∗C3" entered in cell D3 and then continued to the right.

Delays are another important and interesting part of real world phenomena (Fibonacci's rabbits provided an early recognition of this fact).

Yet, the standard and stylized form of calculus-based modeling rarely allows for delays. The study of "functional differential equations" is less than 100 years old," even though delays in models for change are both important and readily accessible in a difference equation context.

By way of example, the logistic equation is a standard feature of college courses on population dynamics. In its discrete form, it is also a starting point for the study of chaos, a topic that is readily accessible at the pre-calculus level. Here we need only think of a bank that pays an annual interest rate r but also imposes a "service fee" b that is applied to *the square* of your balance. This (admittedly unusual) banking practice is readily represented by

$$x_{i+1} - x_i = rx_i - bx_i^2.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	r=	0.1	b=	0.005					
2									
3		**Year**	0	1	2	3	4	5	6
4		**Balance**	10	10.5	11	11.49	11.98	12.46	12.93

Figure 6. The discrete logistic equation

By means of a spreadsheet of the form of Fig. 6, one can set up Verhulst's famous model for a growing population that is subject to "environmental controls." By continuing the table of values to the right and creating a line graph, one obtains the "logistic curve" that is believed to correspond to the way in which certain populations approach the carrying capacity of their environment.

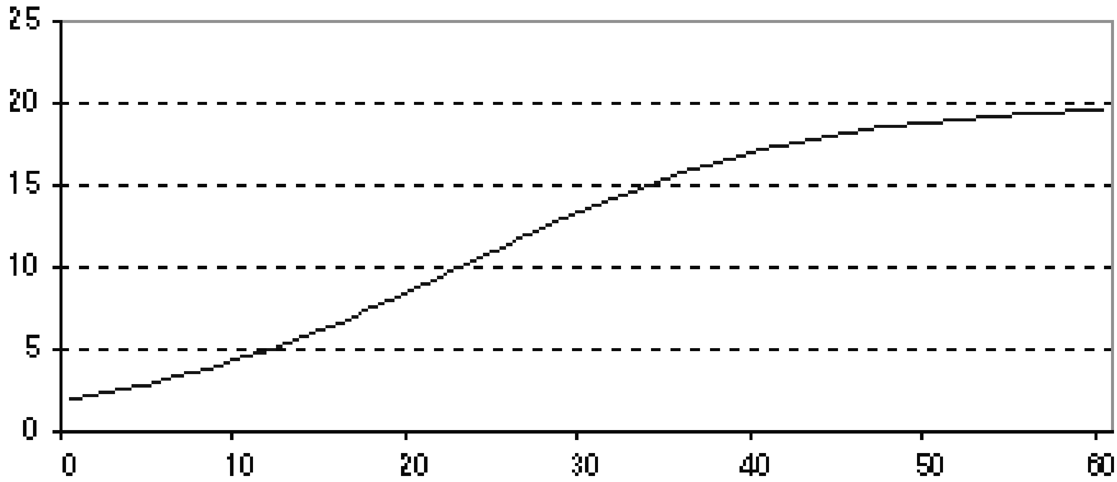


Figure 7. The logistic curve

From here the student is ready to confront some important modifications. The fact that changes in the coefficients r and b can lead to cyclic and chaotic behavior has been well chronicled and will not be repeated here [Devaney, 1989]. But what about the possibility of including a *delay* in the damping term? In a calculus-based setting, this question calls for the solution of a delay differential equation

$$\frac{dx}{dt} = rx(t) - bx(t-d)^2$$

which defies closed form solution. But in the context of difference equations, the introduction of delays merely call for using a spreadsheet to represent

$$x_{i+1} - x_i = rx_i - bx_{i-d}^2$$

[Kreith, 1997] and observing the effect that growing values of d have on the solution.

Concluding remarks

The mathematical ideas underlying this discussion are contained in a book by G.D. Chakerian and the present author [Kreith & Chakerian, 1999]. This book has been used as a text by talented students at Brooklyn Technical High School and by future secondary school teachers at Columbia Teachers College and the University of California at Davis. In this context, the mathematical arguments seem to have been well received and appropriate as an adjunct to school algebra in the computer age.

As is the case in many other parts of the world, California is in the midst of a return to standards-based mathematics instruction, and the role that technology will play in this regard is still unclear. It is the author's hope that good mathematics and interesting uses of technology will find a place in these efforts.

References

DEVANEY, R. (1989): *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*: Reading: Addison-Wesley.

KREITH, K. (1997): Look Ma, No Calculus. *Quantum*, *4*, 15-22.

KREITH, K., & CHAKERIAN, G. D. (1999): *Iterative Algebra and Dynamic Modeling*. New York: Springer Verlag.

VANDEN BOSCH, P. (2000): Getting to the Root of the Problem. *Mathematics Teacher*, *93*, 208-211.

Las sumas de potencias de Bernouilli: un problema histórico

Juan A. Aledo

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha
JuanAngel.Aledo@uclm.es

Juan C. Cortés

Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia
jccortes@mat.upv.es

Abstract

In this work we deal with a problem with historic taste: calculate the sum of powers $S_{n,p} = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$. In order to achieve this, we revise several geometric methods, as well as recurrent and explicit ones to obtain such sums.

1 Introducción

En este trabajo abordamos un problema con sabor histórico: el de la suma de las potencias de los n primeros naturales

$$S_{n,p} = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

A lo largo de la historia este problema ha sido objeto de estudio por parte de matemáticos ilustres, siendo Jacques Bernouilli (1654-1705) quien lo resolvió en su forma general en su obra póstuma *Ars Conjectandi* (Cálculo de Probabilidades), haciendo uso del teorema binomial. Antes sólo se habían estudiado casos particulares del problema, que puede ser atacado desde muy variadas perspectivas, algunas realmente bellas. Así, exploraremos diversos caminos que conducen a su solución, recreándonos en su riqueza y variedad.

Es bien conocido [1, p.627] que contando Gauss siete años de edad, su maestro Büttner ordenó a la clase, con objeto de mantenerla ocupada durante un buen rato, que sumaran los cien primeros naturales, $S_{100,1}$. A los pocos minutos el joven matemático se presentó con la respuesta correcta, 5050. El truco que ideó es el siguiente: asoció el primer sumando, 1, con el último, 100; el segundo, 2, con el penúltimo, 99, y así sucesivamente, formando 50 parejas que suman 101 cada una de ellas, de manera que la suma total es $50 \cdot 101$. El método que ingenió el joven Gauss puede extenderse para sumar $S_{n,1}$ y, más generalmente, para calcular la suma de una progresión aritmética genérica.

El objetivo del trabajo es mostrar una variada colección de métodos (geométricos, recurrentes y explícitos) para dar respuesta al problema del cálculo de $S_{n,p}$. También daremos la generalización de alguno de estos procedimientos.

2 Métodos geométricos

Estos métodos están basados en disposiciones geométricas a partir de las cuales, y mediante un razonamiento sencillo, se deduce la suma $S_{n,p}$ para un determinado p. Lógicamente adolecen de falta de rigor matemático comparado con una demostración formal, pero a cambio resultan sorprendentes y atractivas. En este apartado veremos cómo calcular vía razonamientos geométricos $S_{n,1}$, $S_{n,2}$ y $S_{n,3}$, y aportaremos una generalización del método utilizado para evaluar $S_{n,2}$ con objeto de determinar $S_{n,p+1}$ en función de $S_{n,p}$.

Empecemos partiendo de la Figura 1 desde donde podemos evaluar $S_{n,1}$ del siguiente modo

$$2S_{n,1} = (n+1)^2 - (n+1)$$

de donde se sigue inmediatamente que

$$S_{n,1} = \frac{n(n+1)}{2}$$

En efecto, del total de los $(n+1)^2$ puntos del cuadrado, en la diagonal aparecen $n+1$, quedando a cada lado $S_{n,1}$ puntos. Este procedimiento geométrico, según Martin Gardner (véase [4, p.114]), ya era conocido por los griegos, aunque existen otras demostraciones similares como la dada en [6, p.104].

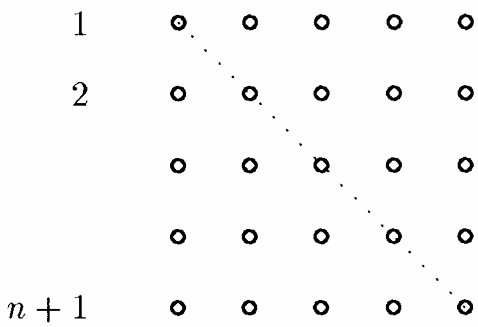


Figura 1

Veamos ahora otro procedimiento geométrico completamente diferente para sumar los n primeros cubos, basándonos en la Figura 2 (véase [3, p.11]).

Obsérvese que en las sucesivas regiones $R_1, R_2, \ldots, R_n$ aparecen 1^3, 2^3, $3^3, \ldots, n^3$ puntos, respectivamente, de los $(1+2+3+\cdots+n)^2 = S_{n,1}^2$ puntos que contiene en total el cuadrado. En efecto, si denotamos por $Card(R_n)$ al cardinal del conjunto de puntos del conjunto R_n y llamamos C_n al conjunto de todos los puntos del cuadrado de lado $S_{n,1}$ puntos, entonces

$$\begin{aligned} Card(R_n) &= Card(C_n) - Card(C_{n-1}) = S_{n,1}^2 - S_{n-1,1}^2 = \\ &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2 = n^3 \end{aligned}$$

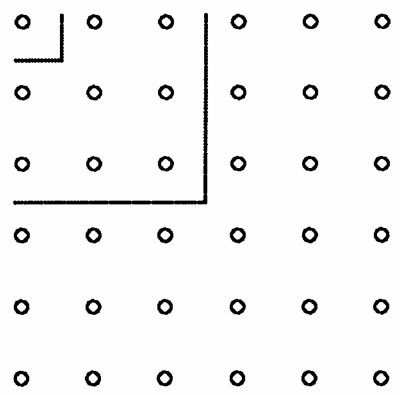


Figura 2

Así pues,

$$S_{n,3} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

A continuación utilizaremos otro razonamiento completamente distinto para, a partir de la Figura 3, calcular de nuevo $S_{n,3}$ (véase [5, p.200]).

De la figura mencionada se sigue fácilmente que el área total del cuadrado representado es

$$4(1+2+3+4)^2 = 4S_{4,1}^2$$

Pero también podemos obtenerla como suma de los cuadrados internos que forman cada orla, resultando

$$4\cdot1^2 + 8\cdot2^2 + 12\cdot3^2 + 16\cdot4^2 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3) = 4S_{4,3}$$

es decir,

$$S_{4,3} = S_{4,1}^2$$

El método se extiende fácilmente para obtener que $S_{n,3} = S_{n,1}^2$.

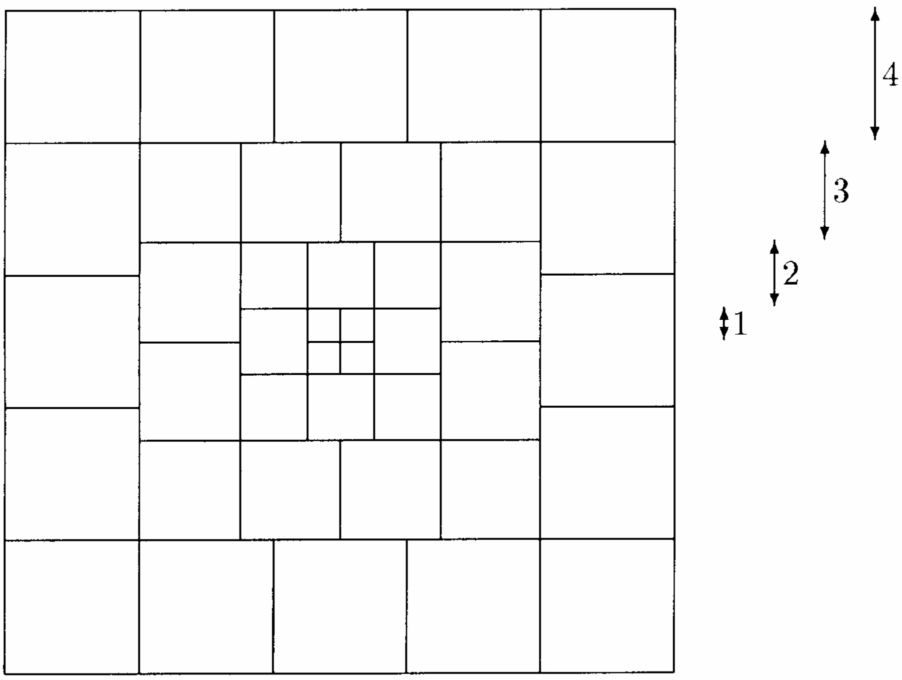


Figura 3

Veamos ahora un bello método para calcular $S_{n,2}$ a partir de la tabla cuadrada de la Figura 4, sobre la que hemos realizado una partición *adecuada* (véase [7, 235]).

Si efectuamos la suma de los elementos de cualquier fila de esta tabla obtenemos $S_{n,1}$, y por tanto la suma total de los elementos de la tabla será

$$n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2(n+1)}{2}$$

al haber n filas idénticas.

Ahora bien, si efectuamos la suma por regiones, la región k–ésima suma

$$1+2+\cdots+(k-1)+k\cdot k=\frac{k(k-1)}{2}+k^2=\frac{3}{2}k^2-\frac{1}{2}k$$

de modo que la suma total por regiones será

$$\frac{3}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)-\frac{1}{2}(1+2+\cdots+n)=\frac{3}{2}S_{n,2}-\frac{1}{2}S_{n,1}$$

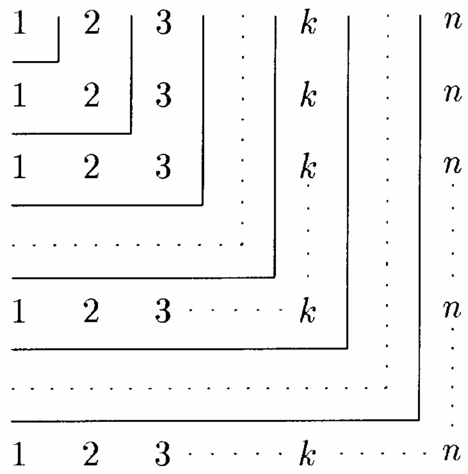


Figura 4

Por tanto, igualando las sumas por filas y por regiones se sigue que

$$\frac{3}{2}S_{n,2}-\frac{1}{2}S_{n,1}=\frac{n^2(n+1)}{2}$$

de donde

$$S_{n,2}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Nosotros ahora generalizaremos este método para calcular $S_{n,p+1}$ conocidas las sumas $S_{k,p}$ para $k=1,2,\ldots,n$, partiendo ahora de la Figura 5.

En efecto, si sumamos todas las entradas de la tabla mediante la suma de sus filas resulta $n{\cdot}S_{n,p}$, mientras que si sumamos estas entradas por regiones obtenemos

$$\sum_{k=1}^{n}\left(S_{k-1,p}+k^{p+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}S_{k-1,p}+S_{n,p+1}$$

de donde

$$S_{n,p+1}=n{\cdot}S_{n,p}-\sum_{k=1}^{n}S_{k-1,p}$$

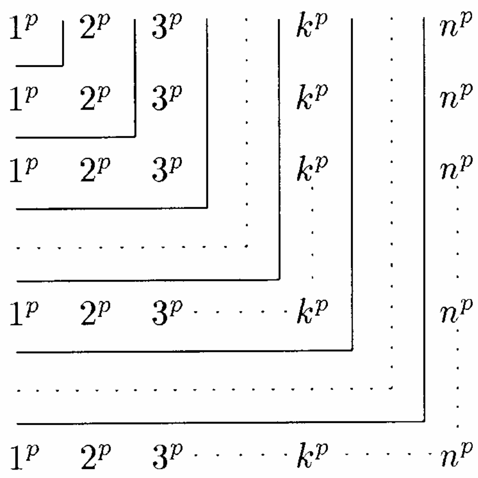


Figura 5

3 Métodos recurrentes

Este tipo de métodos suelen requerir normalmente del conocimiento de $S_{n,q}$ con $q=1,2,\ldots,p-1$ para evaluar $S_{n,p}$ y suelen basarse en una hábil manipulación de identidades algebraicas. Por ejemplo, el último método desarrollado en la sección anterior es un método recurrente, aunque hemos preferido incluirlo entre los métodos geométricos porque está basado en una disposición geométrica apropiada que facilita los cálculos parciales.

Veamos un método recurrente que partiendo de la igualdad

$$3k^2 = (k+1)^3 - k^3 - 3k - 1 \tag{1}$$

nos permite deducir la suma de los cuadrados de los n primeros naturales, $S_{n,2}$, conocida previamente $S_{n,1}$.

En efecto, sumando las n identidades

$$\begin{array}{lcccccccccc}
k=1 & 3\cdot 1^2 & = & 2^3 & - & 1^3 & - & 3\cdot 1 & - & 1 \\
k=2 & 3\cdot 2^2 & = & 3^3 & - & 2^3 & - & 3\cdot 2 & - & 1 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
k=n & 3\cdot n^2 & = & (n+1)^3 & - & n^3 & - & 3\cdot n & - & 1
\end{array}$$

resulta

$$3S_{n,2} = (n+1)^3 - 3S_{n,1} - n - 1$$

Es sencillo ver que la idea anterior puede aplicarse para evaluar $S_{n,3}$ conocidos $S_{n,1}$ y $S_{n,2}$ partiendo ahora de la identidad algebraica

$$4k^3 = (k+1)^4 - k^4 - 6k^2 - 4k - 1 \tag{2}$$

y en general, tal y como demostró Jacob Bernouilli, $S_{n,p}$ se puede calcular en términos de $S_{n,1}, S_{n,2}, \ldots, S_{n,p-1}$ partiendo de la identidad análoga a (1) y (2) que proporciona el teorema binomial sobre $(k+1)^{p+1}$ (ver [2, p.40]).

4 Métodos explícitos

Estos métodos son más potentes que los recurrentes, porque evalúan $S_{n,p}$ en términos de p, esto es, sin necesidad de conocer las sumas de potencias menores que p.

La teoría de Diferencias Finitas nos permite dar un método explícito para calcular $S_{n,p}$ fijado previamente p, apoyándonos en el siguiente resultado (ver

[7, p.417]): La suma $S_{n,p}$ es un polinomio en n de grado $p+1$. Ello puede probarse viendo que las diferencias de orden $p+1$ de $S_{n,p}$ son constantes.

Así, fijado un exponente p tendremos que

$$S_{n,p} = a_{p+1}n^{p+1} + a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0$$

y para calcular los $p+2$ coeficientes a_i formamos el siguiente sistema de ecuaciones lineales cuadrado de tamaño $(p+2)$

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} S_{1,p} & = & a_{p+1}\cdot 1^{p+1} & + & a_p \cdot 1^p & + & \cdots & + & a_0 \\ S_{2,p} & = & a_{p+1}\cdot 2^{p+1} & + & a_p \cdot 2^p & + & \cdots & + & a_0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ S_{p+2,p} & = & a_{p+1}\cdot (p+2)^{p+1} & + & a_p \cdot (p+2)^p & + & \cdots & + & a_0 \end{array}\right.$$

que es de Vandermonde con semillas $1 < 2 < \ldots < p+2$ distintas, y por tanto compatible determinado.

Terminaremos este apartado estudiando otro método explícito que permite calcular las sumas $S_{n,p}$ a través de la función infinitamente derivable cuya definición está basada en la suma parcial enésima de una serie geométrica de razón e^a

$$S(a) = \left\{\begin{array}{ll} \sum_{r=0}^{n} e^{ar} = \dfrac{1-e^{a(n+1)}}{1-e^a}, & a \neq 0 \\ n+1, & a = 0 \end{array}\right.$$

Obsérvese que las sucesivas derivadas de $S(a)$ en el origen son

$$\begin{array}{l} S'(0) = \sum_{r=0}^{n} r e^{ar}|_{a=0} = \sum_{r=0}^{n} r = S_{n,1} \\ S^{(2)}(0) = \sum_{r=0}^{n} r^2 e^{ar}|_{a=0} = \sum_{r=0}^{n} r^2 = S_{n,2} \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ S^{(p)}(0) = \sum_{r=0}^{n} r^p e^{ar}|_{a=0} = \sum_{r=0}^{n} r^p = S_{n,p} \end{array}$$

de modo que

$$\lim_{a\to 0}\left(\frac{1-e^{a(n+1)}}{1-e^{a}}\right)^{(p)} = S_{n,p}$$

5 Conclusiones

A lo largo del trabajo se han presentado distintos métodos para resolver un problema clásico, el del cálculo de $S_{n,p}$, los cuales pueden tratarse a diferentes niveles de enseñanza, pero en cualquier caso nunca superando un primer curso de Cálculo universitario. En este sentido docente, encontramos muy interesante este problema histórico como modelo para ilustrar la riqueza de las técnicas matemáticas a la hora de resolver un problema.

Referencias

[1] Boyer C. B., Historia de la Matemática, Ed. Alianza Universidad Textos, Madrid (1987).

[2] Dörrie H., 100 Great Problems of Elementary Mathematics, Ed. Dover, quinta edición, New York (1990).

[3] Fry a. L., Mathematics Magazine, vol. 58, nº 1, (Jan. 1985).

[4] Gardner M., Scientific American, vol. 229, nº 4, (Oct. 1973).

[5] Lushbaugh, W., Mathematical Gazette, vol. 49, nº 368, (May 1965).

[6] Richards, I., Mathematics Magazine, vol. 57, nº 2, (March 1984).

[7] Shklarsky D.O., Chentzov N. N. y Yaglom I. M., The URSS Olympiad Problem Book, primera edición, Ed. Dover, New York (1993).

Reflexiones sobre la selección y resolución de problemas

Enrique Rubiales Camino
Catedrático de Bachillerato
Miembro de la Junta Directiva de la Soc. "Puig Adam"
enriquerubiales@hotmail.com

Abstract

The following article deals with a selection of problems and how to solve them. These problems were proposed in the different voluntary classes i offered throughout my active years to prepare the students who intended to attend problem solving contests.

Este artículo es el que debía haber escrito antes del que envié a la Sociedad "Puig Adam", y que se publicó en el número 60 del Boletín. La verdad es que llevaba bastante escrito, pero no era capaz de darle la visión global que corresponde a un artículo de este tipo y es por ello que ahora ya está en condiciones de ser publicado. De todas formas voy a contar como surgió la idea de publicar este artículo y por lo que era difícil realizar una selección de los problemas que quería poner a los alumnos para los distintos Concursos de problemas a los que pensé se podrían presentar algunos de mis alumnos.

Los hechos comenzaron hace algún tiempo, pues por los distintos Institutos que estuve siempre pedía a los alumnos que quisieran se apuntaran para prepararles para los distintos concursos de resolución de problemas. También nos poníamos de acuerdo de que si alguno no podía con ello se podía ir, y que si al final consideraba que no se presentaba, pues me limitaba a respetar su decisión.

La dificultad para realizar esta tarea era grande, pues había diversos concursos. El de más nivel era el de la primera fase de la Olimpiada Matemática. A continuación en dificultad resultaba el que propone la Sociedad "Puig Adam". Y por último, el que apareció más tarde que fue el Concurso de Primavera. Reflexionando sobre ello, lo primero que tenía que hacer era como llevar a efecto la selección de problemas, y hecha ésta, como graduar la dificultad de los mismos, ya que algunos temas que podían aparecer para resolver los problemas, ya no estaban en los programas, ya fuese por haberlos suprimido de programas anteriores o porque nunca habían aparecido en los programas de Bachillerato o en los de las ESO.

También están las dificultades que se les presentan por no haber resuelto nunca problemas, pues ya se sabe que lo que se les enseña es a resolver ejercicios de las lecciones que se les están explicando. Además debía de tener en cuenta que había temas que no estaban de moda, como son los relativos a la Teoría de números o los de construcciones geométricas.

Teniendo en cuenta todo esto, he tomado la decisión para que resulte un artículo con un número de páginas adecuado, de hacer una selección de la selección de problemas que yo he recopilado a lo largo de mis años de enseñanza. Los problemas los presento con ciertos nombres que según los vaya explicando quedará claro porqué les he dado esos nombres.

1) Un problema de escaleras.
2) Otro de escaleras.
3) Una integral definida.
4) Tres problemas que son variaciones sobre un mismo tema.
5) Diversos problemas de resolución de ecuaciones. Manipulación y fórmulas de Cardano.
6) Dos por el método de inducción, y uno de ellos de una Olimpiada.
7) Un problema de desigualdades.

Por lo que se refiere al enunciado del apartado nº 1, es que se trata de un problema que en principio uno piensa que lo puede poner al nivel del concurso de Primavera o del de la Sociedad "Puig Adam", pues solo necesita del teorema de Tales y del de Pitágoras, pero al resolverlo se descubre que acabamos en una ecuación que como veremos mas adelante, requiere matemática superior. El enunciado es el siguiente:

Dos escaleras se encuentran entrecruzadas en un pasillo. Cada escalera va desde la base de una pared hasta algún punto en la parede opuesta. Las escaleras se cruzan a una altura h por encima del suelo. Dado que las longitudes de las esca-

leras son 8m. Y 10 m., y que h = 4m., se pide calcular el ancho del pasillo AC (Figura 1).

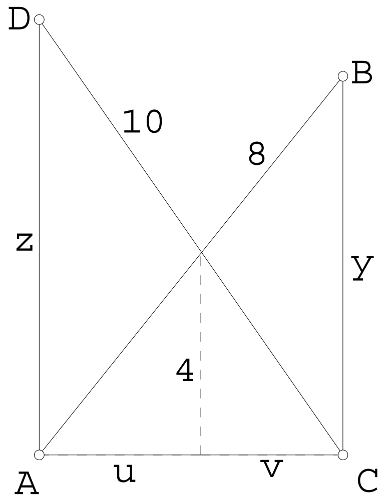


Figura 1

Por el teorema de Pitágoras:

$$\begin{cases} (u+v)^2 + z^2 = 100 \\ (u+v)^2 + y^2 = 64 \end{cases}, \ 100 - z^2 = 64 - y^2, \ z^2 - y^2 = 36.$$

Por el teorema de Tales:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{z} = \dfrac{v}{u+v} \\ \dfrac{4}{y} = \dfrac{u}{u+v} \end{cases}, \ \frac{4}{z} + \frac{4}{y} = \frac{v}{u+v} + \frac{u}{u+v} = 1, \ \frac{4}{z} + \frac{4}{y} = 1.$$

Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{cases} z^2 - y^2 = 36 \\ \dfrac{4}{z} + \dfrac{4}{y} = 1 \end{cases}$$

$$\frac{4}{y} = 1 - \frac{4}{z},\ \frac{4}{\mathrm{y}} = \frac{z-4}{z},\ y = \frac{4z}{z-4},\ y^2 = \frac{16z^2}{(z-4)^2}$$

$$z^2 - \frac{16z^2}{(z-4)^2} = 36,\ z^4 - 8z^3 - 36z^2 + 288z - 576 = 0.$$

Y la sorpresa aparece, cuando vemos que esta ecuación no tiene raíces enteras, ni racionales, por lo que un problema que parecía se podía resolver con matemática elemental, se transforma en un problema algo más complicado, pues para buscar una raíz hay que hacerlo mediante métodos aproximados y esos métodos no se enseñan en el Bachillerato y por supuesto aun menos en el segundo ciclo de la ESO.

Para los que puedan estar intrigados con la solución, les diré que hay dos soluciones reales, de las cuales una no vale, pues sale negativa y la otra es positiva y está en el intervalo (9,10), que es z = 9,25415 (precisión 6 dígitos), y por tanto el ancho del pasillo es u + v = 3,78955.

Por lo que se refiere al enunciado del apartado nº 2, es que se trata de otro problema de escaleras, que en en este caso si es más elemental, pero no tanto como uno cree, pues trataríamos de resolverlo mediante la Trigonometría, y ello nos haría pensar que fuera para el concurso de la Sociedad "Puig Adam", nivel 3, pero se podría poner para el primer nivel e incluso para el concurso de Primavera, pues solo se necesita la Geometría elemental. El enunciado es el siguiente:

En estrecho callejón de anchura z, colocamos una escalera de longitud a, con su pie en un punto O, entre las paredes. Si la apoyamos sobre una pared en M, a una altura de k, la escalera forma un ángulo de 45º con el suelo. Apoyándola sobre la otra pared, en N, a una altura de h, el ángulo que forma con el suelo es de 75º. ¿Cuánto vale la anchura z del callejón?. (Figura 2).

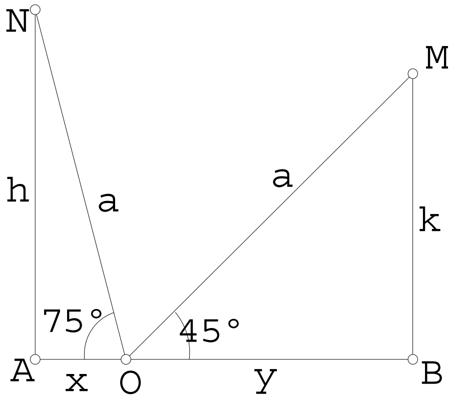


Figura 2

Por la figura tenemos:

$$z = x + y.$$

$$\begin{cases} x = a\cos 75^{\circ} \\ y = a\cos 45^{\circ} \end{cases},\ z = x + y = a(\cos 75^{\circ} + \cos 45^{\circ}).$$

Como tenemos:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. Sumando, tenemos:

$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta.$$

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 75^{\circ} \\ \alpha-\beta = 45^{\circ} \end{cases},\ \alpha = 60^{\circ} \text{ y } \beta = 15^{\circ}.$$

Resulta:

$$z = x + y = a2\cos 60^{\circ}\cos 15^{\circ} = a\cos 15^{\circ}.$$

$h = a\cos 15^{\circ}$. Por tanto $z = h$.

Ahora vamos a ver como se obtiene la solución sin hacer uso de la trigonometría, y sólo mediante la construcción de un rectángulo. Esto lo podemos hacer si en la figura 2, prolongamos el lado k, desde M y desde N, trazamos la paralela a z, de modo que esas rectas se encuentren en un punto que llamamos M’. (Figura 3).

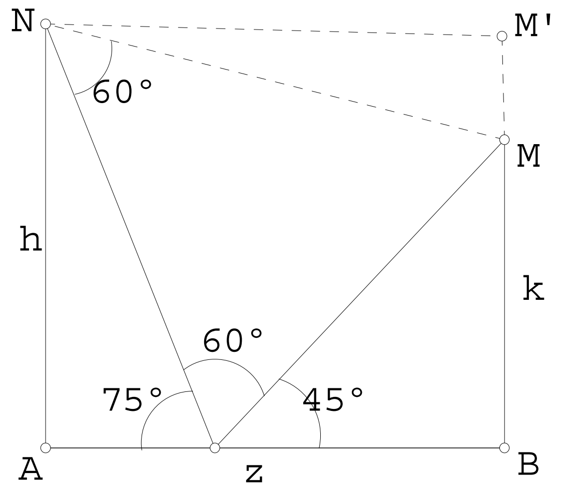


Figura 3

Construimos el rectángulo ABM’N. El triángulo $\triangle NOM$ es equilátero. El ángulo $\angle M'NM = 15^{o}$, y entonces el triángulo $\triangle$ NM'M es igual al $\triangle$ NAO, con lo que NM’ = z, y como NA = h, resulta z = h.

Pero la pregunta que nos podemos hacer en este caso, es la siguiente: ¿Es fácil ver la construcción de ese rectángulo?. La respuesta por mi parte sería decir que no, y por tanto, lo mejor sería proponérselo a los alumnos que sepan trigonometría y no intentar que sirva para un nivel más elemental, aunque ya sabemos que sólo sería para que lo hiciesen los muy buenos alumnos, que en definitiva son los que se van a presentar a esos concursos.

Por lo que se refiere al enunciado del apartado nº 3, es de los que muy posiblemente lleven a los alumnos que lo vean e intenten resolverlo, a decir que es muy difícil, pues es una integral definida que tiene funciones que son radicales y además logaritmos neperianos y hay que obtener una primitiva de dicha función, pero conviene recordarle que lo primero que tiene que hacer es pensar y luego atacarlo, ya que en obtener una primitiva de esa función sería prácticamente imposible y lo que hay que recordarles es que para resolver una integral definida, debemos apoyarnos en el concepto de área pues en este caso la función es positiva. El enunciado es el siguiente:

Calcular:

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}.$$

Veamos como calculamos el área. Para ello, hallamos los valores de la función

f(x) = $\dfrac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}}$, en x = 2, x = 3 y x = 4.

$$f(2)=\frac{\sqrt{\ln 7}}{\sqrt{\ln 7}+\sqrt{\ln 5}} \approx \frac{1,4}{2,7} \approx 0,52,\ f(3)=\frac{\sqrt{\ln 6}}{\sqrt{\ln 6}+\sqrt{\ln 6}}=\frac{1}{2},$$
$$f(4)=\frac{\sqrt{\ln 5}}{\sqrt{\ln 5}+\sqrt{\ln 7}} \approx \frac{1,3}{2,7} \approx 0,48.$$

Así tenemos:

$$|f(3)-f(2)|=|0,5-0,52|=0,02.$$
$$|f(3)-f(4)|=|0,5-0,48|=0,02.$$

Por lo que observamos que hay una simetría en la gráfica de la función en el intervalo $[2,4]$, por lo que vamos a realizar dicha gráfica (Figura 4).

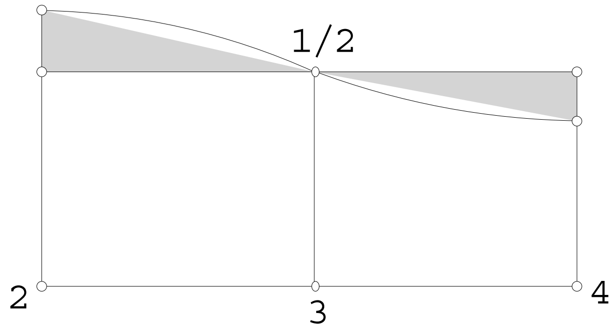


Figura 4

Llamando S_1 al área en el intervalo $[2,3]$, tenemos:

$$S_1 = \frac{1}{2} + a$$

Llamando S_2 al área en el intervalo $[3,4]$, tenemos:

$$S_2 = \frac{1}{2} - a$$

Por tanto, si llamamos S al área en el intervalo $[2,4]$, resulta:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{2} + a + \frac{1}{2} - a.$$

Luego:

$$S = 1.$$

Como podemos observar se ha resuelto el problema que parecía que era tan difícil. Había que aplicar el concepto geométrico de integral definida, que da una solución relativamente sencilla, pero lo que siempre deja un margen de duda es si el alumno es capaz de realizar este paso y yo creo que esto se consigue buscando enunciados que obliguen al alumno a pensar como atacar un problema de muy diversas formas. Por esta razón es por lo que presento otra forma de resolver este problema, que sería mediante el teorema de la media para la integral definida. Por tanto:

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}} = \mu(4-2).$$

Vamos a calcular el valor c, que hace que $\mu = f(c)$. Luego:

$$\sqrt{\ln(\text{9-c})} = \sqrt{\ln(\text{c+3})},\ \ln(\text{9-c}) = \ln(\text{c+3}),\ 9 - c = c+3,\ 2c = 6,\ c = 3.$$

Por tanto:

$$f(3) = \frac{\sqrt{\ln 6}}{\sqrt{\ln 6}+\sqrt{\ln 6}} = \frac{1}{2}.$$

Luego:

$$\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}dx}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}} = \frac{1}{2}(4-2) = 1.$$

Por lo que se refiere a los enunciados del apartado nº 4, es que parece que son distintos, pero que resulta que es lo que yo llamo variaciones sobre un mismo tema. Además, pueden tener una única solución o varias soluciones, pero que al alumno se le dice en el enunciado que encuentre la solución y eso evidentemente le lleva a contentarse con haber encontrado una, pero que si el enunciado lo dice de una forma mas clara el alumno encontraría todas las soluciones.
Los enunciados son los siguientes:

1.- ¿Cuántos números de tres cifras son divisibles por 45?.
2.- Hallar un número de tres cifras, de modo que ellas formen una progresión aritmética y que sea divisible por 45.
3.- Hallar un número de tres cifras de modo que sea capicúa y divisible por 45.

La solución del primer enunciado, la buscamos escribiendo un número cualquiera de tres cifras de la siguiente forma:

$$\overline{abc} = c + 10b + 100a,$$

que tiene que ser múltiplo de 45, y como $45 = 5 \cdot 9,$ para que sea múltiplo de 9 esos números han de acabar en 0 o en 5, luego c = 0 o c = 5. Entonces como es de tres cifras a = 1, y ahora buscamos el menor de ellos, Por tanto b = 3, con lo que el primer número de tres cifras es 135. Para obtener los demás, ponemos:

$$a_n = 135 + (n-1)45,\ a_n = 45n + 90,\ \textit{donde}\ 1 \leq n \leq 20.$$

Los números son: 135, 180, 225, 270, 315, 360, 405, 450, 495, 540, 585, 630, 675, 720, 765, 810, 855, 900, 845, 990.

En este enunciado podíamos interpretar que sólo se pide el número de ellos, que son 20, y no su cálculo, pero normalmente el alumno supone que se le pide el hallarlos todos y este enunciado no suele presentarle pegas.

Para la solución del segundo enunciado, volvemos a escribir:

$$\overline{abc} = c + 10b + 100a,$$

y como han de formar progresión aritmética, tomamos $b = c + d,\ a = c + 2d,$ donde d es la diferencia de la progresión aritmética. Por tanto, nos queda:

$$c + 10(c + d) + 100(c + 2d) = 111c + 210d.$$

Y como ha de ser múltiplo de 45, que es igual a $5 \cdot 9$, entonces para que sea divisible por 5, la última cifra ha de acabar en 5 o en 0, por lo que c = 5 o c = 0. Ahora como nos queda que sea divisible por nueve, escribimos:

Si c = 5, $\dfrac{555 + 210d}{9}$, luego si tomamos d = 1, nos da el número 135, y el alumno piensa que se da por acabada la búsqueda de la solución, puesto que piden "*Hallar un número...*". Pero para ese valor de c, nos queda otra solución más, que es tomar d = -2, que da el número 765. Pero todavía queda una tercera, que corresponde a:

Si c = 0, $\dfrac{210d}{9}$, luego si tomamos d = 3, nos da el número 630.

Por tanto la solución del problema es que hay tres números, y para que el alumno no tenga problemas con el enunciado, yo lo escribiría como el anterior, es decir:

"*¿Cuántos números de tres cifras se pueden obtener, de modo que dichas cifras formen una progresión aritmética y sean divisibles por 45?.*"

Y ahora podíamos hablar de un problema que tiene algo más de dificultad aunque para su solución no se necesitan grandes conocimientos matemáticos, pues se sigue utilizando la teoría de la divisibilidad. Me voy a limitar en cuanto a este problema a dar su enunciado, para que el lector si quiere lo resuelva y advertir oportunamente que la solución no es única. El enunciado es el siguiente:

A un número x de cuatro cifras se le agrega la suma de sus cifras. Se procede de la misma manera con el nuevo número así obtenido, y obtenemos el número 2015. ¿Cuál era el número primitivo x?.

Si queremos complicar algo más el enunciado podíamos pedir el número x, pero en vez de hacerlo dos veces, lo haríamos tres veces.

Y para acabar con este problema número 2) del apartado nº 4, diré que en la convocatoria del 2º Concurso Intercentros de Matemáticas de la Comunidad de Madrid he visto propuesto un problema que es parecido al de hallar x, y cuyo enunciado es el siguiente:

Encuentra razonadamente un número positivo n tal que la suma de n y la suma de sus cifras resulte ser 379.

Y ya estamos en el enunciado del problema 3), que en este caso, como la solución es única no creo que tenga ninguna dificultad el alumno para resolverlo. Entonces por lo que se refiere a la solución del tercer enunciado, volvemos a escribir el número de la forma que ya sabemos, pero en este caso al ser capicúa , tenemos:

$$\overline{aba} = a + 10b + 100a = 101a + 10b,$$

y en este caso no puede acabar en 0, pues no sería un número de tres cifras, por tanto será en 5, así tenemos a = 5. Entonces nos queda $505 + 10b,$ y como ahora tiene que ser múltiplo de 9, pues hemos de ver cuando esa expresión es divisible por 9, por lo que ponemos $\frac{505 + 10b}{9},$ y probando con los valores que toma b, que van desde 0 a 9, resulta que el único que sirve es b = 8, y por lo tanto el número pedido es el 585.

Para los enunciados del apartado nº 5, he tenido muy en cuenta que al ser el tema muy amplio, pues es trabajar con polinomios y resolución de ecuaciones, lo he acotado de forma que les daba algunas propiedades que no se estudiaban a nivel de Bachillerato, pero que tanto en el concurso de problemas de la Sociedad “Puig Adam”, como en el de la Olimpiada Matemática les podían aparecer en los enunciados de los problemas. En definitiva que les enseñaba el procedimiento de cómo buscar en una ecuación algebraica cuando puede tener raices enteras. Como utilizar las fórmulas de Cardano. Y también como se manipulan polinomios y ecuaciones algebraicas, para llevarlas a las que sabemos resolver. El primer enunciado es el siguiente:

Resolver la ecuación $x^4+x^3+3x^2+2x+2=0.$

Para resolver esta ecuación lo primero que debemos hacer es ver si tiene raíces enteras. Para ello les enuncio la siguiente propiedad:

Si una ecuación algebraica, de coeficientes enteros, tiene raíces enteras, entonces dichas raíces han de ser divisores del término independiente.

Aquí aprovecho para contarles lo que es un teorema directo, lo que es el teorema reciproco, lo que es el teorema contrario y lo que es el teorema contrarrecíproco. De esta forma les hago ver que si hallamos los divisores del término independiente lo que buscamos es que entre ellos pueden estar las raíces de la ecuación.

En el caso de la propuesta los divisores son ± 1 y ± 2. Ahora mediante Ruffini vemos que no son raíces por lo que no tiene raíces enteras. Además al ser el coeficiente de mayor grado 1, resulta que tampoco tiene raíces racionales, por lo que las tendrá reales, complejas o de ambos tipos.

Para resolver una ecuación de esta forma, realizamos ciertas manipulaciones, que nos llevan a dos ecuaciones de segundo grado que si sabemos resolver.

Un primer paso es $x^4+x^3+x^2+2x^2+2x+2=0$, después los pasos $x^4+x^3+x^2+2(x^2+x+1)=0$, $x^2\left(x^2+x+1\right)+2(x^2+x+1)=0$, $\left(x^2+2\right)(x^2+x+1)=0.$

Y ahora resolvemos las ecuaciones:

$$x^2+2=0.$$

$$x^2+x+1=0.$$

La primera nos da las soluciones $x=\pm\sqrt{2}i.$

La segunda nos da las soluciones $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}.$

Luego, las raíces de la ecuación de cuarto grado son:

$$-\sqrt{2}i,\ +\sqrt{2}i,\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}.$$

Ahora tenemos el siguiente enunciado:

Resolver la ecuación $2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0.$

Lo normal es que esta ecuación tan sugerente, en cuanto a que ya está manipulada, no nos la den así, pero yo se la ponía de esta forma, para que las que les ponía en su forma general supiesen que había que manipularlas para llegar a ponerlas de aquella forma o una forma parecida. Más adelante veremos un ejemplo de este tipo. Les enseñaba que esa ecuación estaba pidiendo el cambio de variable $y=x+\frac{1}{x}$, pero que algo nos estaba impidiendo el hacerlo directamente, por lo que aún había que preparar el primer paréntesis.

Para ello les ponía: $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2,\ x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2,$ y sustituyendo en la ecuación dada, nos queda $2\left(\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right)-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+9=0,\ 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-7\left(x+\frac{1}{x}\right)+5=0,$ y ya escribiendo la ecuación en la variable y, tenemos la ecuación $2y^2-7y+5=9.$ Cuyas soluciones son $y=\frac{5}{2}$ e $y=1.$ Por tanto $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2},$ que nos lleva a la ecuación $2x^2-5x+2=0,$ cuyas soluciones son 2 y $\frac{1}{2}.$ Y por otro lado $x+\frac{1}{x}=1,$ que nos lleva a la ecuación $x^2-x+1=0,$ cuyas soluciones son

$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ *y* $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$. Luego las soluciones de la ecuación de cuarto grado son $\frac{1}{2}$, 2, $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ *y* $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$.

El problema que tenemos en esta ocasión es parecido al anterior, pero la ecuación nos la dan en su forma normal, es decir, sin que venga ya preparada, por lo que el alumno tiene que ser el que esté dispuesto a prepararla. El enunciado es el siguiente:

Resolver la ecuación $3x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 4x + 12 = 0.$

Para resolverla lo primero es ver que no tiene raíces enteras, ni racionales, y lo que se hará a continuación es agrupar los términos, para llegar a su solución. Entonces la escribimos de la siguiente manera:

$$3x^2 - 2x + 4 - \frac{4}{x} + \frac{12}{x^2} = 0,$$

y ahora agrupamos de la siguiente manera:
$3x^2 + \frac{12}{x^2} - (2x + \frac{4}{x}) + 4 = 0$, $3(x^2 + \frac{4}{x^2}) - 2(x + \frac{2}{x}) + 4 = 0$, y ya estamos en condiciones de realizar el cambio $y = x + \frac{2}{x}$, sin más que tener en cuenta que $\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{4}{x^2} + 4$, $x^2 + \frac{4}{x^2} = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4$. Por tanto:
$3\left(\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 4\right) - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) + 4 = 0$, $3\left(x + \frac{2}{x}\right)^2 - 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 8 = 0$. Luego la ecuación que tenemos que resolver es: $3y^2 - 2y - 8 = 0$. Y como ya sabemos resolverla, lo dejamos aquí.

Y este último problema, antes de entrar en las fórmulas de Cardano, nos lleva a resolverlo de dos formas diferentes, una agrupando términos que yo encuentro complicada, y otra mediante el producto de dos trinomios, y que para mi es más fácil de resolver. Veamos el enunciado que dice:

Resolver la ecuación $x^4+12x^3+54x^2+108x+77=0.$

Tras observar, como siempre, que no tiene raíces enteras, ni racionales, pensamos que el enfoque que debe darse es el de agrupar términos, y esto es así, pero veamos que el hacerlo es bastante más complicado. Como se trata de buscar un cuadrado perfecto, nos quedamos con $x^4+54x^2+77,$ y observamos el término independiente. Entonces si ponemos $64=8^2,$ tenemos que poner –13 +13, y quedaría 64 + 13, de modo que en el segundo miembro tendríamos –13, daría lugar a números complejos, y no es el caso. Por tanto, ponemos $81=9^2,$ y al ser $\left(x^2-9\right)^2=x^4-18x^2+81.$

Tenemos:

$x^4+54x^2+81-4=x^4-18x^2+72x^2+81-4=\left(x^2-9\right)^2+72x^2-4,$ y ahora seguimos agrupando términos, por lo que nos damos cuenta de lo complicado que resulta resolver este problema. Así tenemos:

$$\left(x^2-9\right)^2+12x^3+72x^2+108x=4,\ \left(x^2-9\right)^2+12x(x^2+6x+9)=4,$$

$$\left(x^2-9\right)^2+12x(x+3)^2=4,\ \left((x-3)(x+3)\right)^2+12x(x+3)^2=4,$$

$$(\mathrm{x}-3)^2(x+3)^2+12x(x+3)^2=4,\ \ (\mathrm{x}+3)^2((x-3)^2+12x)=4,$$

$$\left(x+3\right)^2(x^2-6x+9+12x)=4,\ \left(x+3\right)^2\left(x+3\right)^2,$$

$$\left(x+3\right)^4=4,\ \left(x+3\right)^2=\pm 2.$$

Por tanto: $\left(x+3\right)^2=2$ y $\left(x+3\right)^2=-2$. Luego: $x+3=\pm\sqrt{2}$ y $x+3=\pm\sqrt{2}i.$

Luego las raíces de la ecuación dada, son:

$$x_1=-3+\sqrt{2},\ x_2=-3-\sqrt{2},\ x_3=-3+\sqrt{2}i,\ x_4=-3-\sqrt{2}i.$$

Sin embargo, veamos que por el método que yo digo, en este caso, es más fácil resolver la ecuación. Ponemos:

$$\left(x^2+px+q\right)\left(x^2+p'x+q'\right)=x^4+12x^3+54x^2+108x+77.$$

Operando:

$x^4+(p+p')x^3+(q+pp'+q')x^2+(p'q+pq')x+qq'=$
$x^4+12x^3+54x^2+108x+77.$ De donde:

$$\begin{cases} p+p'=12 \\ q+pp'+q'=54 \\ p'q+pq'=108 \\ qq'=77 \end{cases}$$

Y como la descomposición de 77 en dos factores sólo nos puede dar, o $q=7,\ q'=11$ o $q=1,\ q'=77,$ y esta última no vale. Por tanto, tenemos:
$\begin{cases} p\cdot p'=36 \\ p+p'=12 \end{cases}$. De donde, tenemos $p=6\ y\ p'=6,$ y nos quedan las ecuaciones de segundo grado $x^2+6x+7=0\ y\ x^2+6x+11=0,$ que no vamos a resolver, pues ya saben hacerlo, y lleva a la solución que ya conocemos, pero que vuelvo a insistir en este caso es más fácil que el alumno la vea.

Y ahora ya paso a las fórmulas de Cardano, y para ello, suponemos que las soluciones de la ecuación de tercer grado $x^3+bx^2+cx+d=0$ son $\alpha,\ \beta,\ \gamma.$
Por lo que podemos escribir:
$x^3+bx^2+cx+d=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma),$ desarrollando e igualando, resulta:

$$\begin{aligned} &\alpha+\beta+\gamma=-b \\ &\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=c \\ &\alpha\beta\gamma=-d \end{aligned}$$

De igual forma tendríamos para la ecuación de cuarto grado $x^4+bx^3+cx^2+dx+e=0.$ Suponiendo que sus raíces son $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda.$ Por lo que nos queda:

$$\begin{aligned} &\alpha+\beta+\gamma+\lambda=-b \\ &\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\lambda+\beta\gamma+\beta\lambda+\gamma\lambda=c \\ &\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\lambda+\alpha\gamma\lambda+\beta\gamma\lambda=-d \\ &\alpha\beta\gamma\lambda=e \end{aligned}$$

Por lo que ahora ya estamos en condiciones de enunciar el siguiente problema.

Resolver la ecuación $x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$, *sabiendo que la suma de dos de sus raíces es 1.*

Como siempre se ve que la ecuación no tiene raíces enteras y que tampoco tiene racionales, por lo que el enfoque para resolver esta ecuación es utilizar las fórmulas de Cardano. Por tanto, si las raíces son $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \lambda$, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta + \gamma + \lambda = 2 \\
&\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\lambda + \beta\gamma + \beta\lambda + \gamma\lambda = 2 \\
&\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\lambda + \alpha\gamma\lambda + \beta\gamma\lambda = 1 \\
&\alpha\beta\gamma\lambda = -2 \\
&\alpha + \beta = 1
\end{aligned}$$

Luego, tenemos:

$$\begin{aligned}
&\gamma + \lambda = 1,\ \alpha\beta(\gamma + \lambda) + \gamma\lambda(\alpha + \beta) = 2, \\
&\alpha\beta + \gamma\lambda + (\alpha + \beta)(\gamma + \lambda) = 2,\ \alpha\beta + \gamma\lambda = 1.
\end{aligned}$$

Y así tenemos:

$$\begin{aligned}
&\alpha + \beta = 1,\ \alpha \cdot \beta = 2,\ x^2 - x + 2 = 0. \\
&\gamma + \lambda = 1,\ \gamma \cdot \lambda = -1,\ x^2 - x - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Que nos da las soluciones $\dfrac{1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ *y* $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Ahora, para acabar con el tema de las fórmulas de Cardano, voy a poner dos problemas que ofrecen más dificultad, pues al resolverlos no se ve tan fácilmente el obtener la solución. El primer enunciado es el siguiente:

Determinar b y c en la ecuación $x^4 + bx^3 + cx^2 + 16x = 0$, *para que tenga sus raíces en progresión aritmética y calcular esas raíces.*

Como la ecuación se puede escribir $x(x^3 + bx^2 + cx + 16) = 0$, resulta que una raíz es x = 0, por lo que se reduce a una ecuación de tercer grado y las fórmulas de Cardano dan

$$\alpha+\beta+\gamma=-b$$
$$\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma=c$$
$$\alpha\beta\gamma=-16$$

Y ahora vemos todas las posibilidades que tenemos al suponer que la raíz 0 es la primera, la segunda, la tercera o la cuarta para formar la progresión aritmética. Si suponemos que la diferencia es d, resulta para el primer caso 0, d, 2d, 3d. En el segundo caso es –d, 0, d, 2d. En el tercer caso es –2d, -d, 0, d. Y en el cuarto caso es –3d, -2d, -d, 0.
El primer caso y el tercero no pueden dar solución, el segundo caso da, usando la tercera igualdad de las fórmulas de Cardano, d = 2, y el cuarto caso da $d=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}$. Por tanto las soluciones son –2, 0, 2 y 4 para el segundo caso. Y las del cuarto caso son $-\frac{6}{\sqrt[3]{3}},\ -\frac{4}{\sqrt[3]{3}},\ -\frac{2}{\sqrt[3]{3}},\ 0.$ Y teniendo en cuenta las otras dos igualdades de las fórmulas de Cardano, resulta $b=-4\ y\ c=-4,$ para el segundo caso y $b=\frac{12}{\sqrt[3]{3}}\ y\ c=\frac{44}{\sqrt[3]{9}},$ para el cuarto caso.

El otro enunciado es el siguiente, y para que sirva de estimulo para posibles lectores que quieran resolver problemas, me voy a limitar a dar el enunciado, que es el siguiente:
Determinar el valor del parámetro a para que las raíces $x_1,\ x_2,x_3$ *de la ecuación*

$$x^3-6x^2+ax+a=0,$$

verifiquen $\left(x_1-1\right)^3+\left(x_2-2\right)^3+\left(x_3-3\right)^3=0,$ *y resolver la ecuación.*

Y un último enunciado, que es un buen estímulo para resolverlo, ya que se trata de un problema donde además de tener que resolver una ecuación algebraica, también tenemos que trabajar con polinomios, y con divisibilidad numérica. El enunciado es el siguiente:
Se considera el trinomio $x^2+px+q,$ donde p y q son los dos números enteros mayores que cero y de suma mínima, para los cuales el trinomio satisface a las condiciones siguientes:

1.- Si se hace x = 3, resulta un número divisible por 6.
2.- Si se hace x = 4, resulta un número divisible por 7.
3.- Si se hace x = 5, resulta un número divisible por 10.

Se pide determinar p y q .

Además dividir el polinomio $P(x) = x^4 + 16x^3 + 79x^2 + 120x + 50$ por el trinomio obtenido y, a la vista del resultado, resolver la ecuación $P(x) = 0$.

Ahora voy a poner los enunciados del apartado nº 6, que trata el tema del método de inducción, y que son dos enunciados, uno más sencillo y otro un poco más complicado, de modo que el alumno vea como se resuelven problemas de este tipo con diferentes enfoques.
El primer enunciado es el siguiente:

Probar que $S_n = n^3 + 5n$ *es siempre múltiplo de 6, para cualquier valor de n natural.*

Para resolver este problema se utiliza el método de inducción, que previamente había explicado.

Para n = 1, es $S_1 = 1^3 + 5 \cdot 1 = 1 + 5 = 6,$ por tanto se ve que es múltiplo de 6.

Suponemos que para n = k, tenemos que $S_k = k^3 + 5k,$ es múltiplo de 6.

Entonces lo que tenemos que ver es que para n = k +1, se verifica que es múltiplo de 6, por lo que lo será para todo n.
Tenemos:

$$S_{k+1} = (k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5.$$

Agrupando términos, resulta:

$$S_{k+1} = (k^3 + 5k) + 3k(k+1) + 6.$$

El primer sumando es múltiplo de 6, por el principio de inducción. El tercero con sólo verlo, también lo es. Queda el segundo sumando, pero teniendo en cuenta que viene multiplicado por 3, y son dos números consecutivos, siempre tendremos uno par, por lo que también es múltiplo de 6. Por tanto S_{k+1}, lo es y queda resuelto el problema.

Ahora viene el enunciado del otro problema que es el que se puso en una Olimpiada, y que dice lo siguiente:

Demostrar que $2^{5+10n}+1$ *es múltiplo de 11 para cualquier número natural n.*

Si n = 1, entonces
$2^{5+10}+1=2^{15}+1=(2^5)^3+1=32^3+1=32768+1=32769$, que es múltiplo de 11.

Si n = k, tenemos que $2^{5+10k}+1=11p$, luego $2^{5+10k}=11p-1$.

Luego, si n = k +1, tenemos:

$$\begin{aligned}&2^{5+10(k+1)}+1=2^{5+10k+10}+1=2^{5+10k}\cdot 2^{10}+1=(11p-1)2^{10}+1=\\&=11\cdot 2^{10}p-2^{10}+1=11\cdot 2^{10}p-1024+1=11\cdot 2^{10}p-1023=\\&=11\cdot 2^{10}p-11\cdot 93=11(2^{10}p-93),\end{aligned}$$

que es múltiplo de 11, como queríamos demostrar.

Ahora lo podemos resolver también por el binomio de Newton y así el alumno puede ver que aún no sabiendo el método de inducción es posible resolver este problema.

$$\begin{aligned}&2^{5+10n}+1=2^5\cdot 2^{10n}+1=2^5\left(2^5\right)^{2n}+1=32\left(32\right)^{2n}+1=\\&=\left(33-1\right)\left(33-1\right)^{2n}+1=33\left(33-1\right)^{2n}-\left(33-1\right)^{2n}+1.\end{aligned}$$

Pero el primer sumando ya se ve que es múltiplo de 11, por lo que queda ver que pasa con los otros dos, y es aquí donde vamos a utilizar el binomio de Newton, ya que tenemos:

$$\begin{aligned}&\left(33-1\right)^{2n}=\binom{2n}{0}33^{2n}\left(-1\right)^0+\binom{2n}{1}33^{2n-1}\left(-1\right)^1+\binom{2n}{2}33^{2n-2}\left(-1\right)^2+\cdots+\\&+\binom{2n}{2n-1}33\left(-1\right)^{2n-1}+\binom{2n}{2n}33^0\left(-1\right)^{2n}.\end{aligned}$$

Y en esta última expresión se puede ver que todos los sumandos son múltiplos de 11, excepto el último, pero como éste vale 1, al cambiarle el signo, resulta –1, y por tanto se va con el 1 que había de tercer sumando en la expresión de $2^{5+10n}+1$. Luego, hemos obtenido que $2^{5+10n}+1$ es múltiplo de 11 para cualquier número natural n.

Y para finalizar presento el enunciado del apartado nº 7, que no tiene más particularidad que la de trabajar con desigualdades, pero con poca dificultad, pues sólo se necesita saber la ecuación de segundo grado y ciertas manipulaciones con potencias de binomios. El enunciado es el siguiente:

Sean x_1 y x_2 *las raíces de la ecuación* $x^2 + px - \dfrac{1}{p^2} = 0,$ *donde p es un parámetro real. Demostrar que* $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$

Para resolverlo nos planteamos lo que ya conocemos de la ecuación de segundo grado, en cuanto a la relación que existe entre los coeficientes y las soluciones, por tanto, tenemos:

$$x_1 + x_2 = -p \text{ y } x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{p^2}.$$

$$(x_1 + x_2)^2 = p^2,\ x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = p^2,\ x_1^2 + x_2^2 = p^2 + \frac{2}{p^2}.$$

$$(x_1 + x_2)^4 = p^4.$$

Ahora vamos a desarrollar esta última expresión, y así tenemos:

$$x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^4 = p^4,\ x_1^4 + x_2^4 + 4x_1x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + 6x_1^2x_2^2 = p^4,$$

$$x_1^4 + x_2^4 + 4\left(-\frac{1}{p^2}\right)\left(p^2 + \frac{2}{p^2}\right) + 6\frac{1}{p^4} = p^4,\ x_1^4 + x_2^4 - 4 - \frac{2}{p^4} = p^4,$$

$$x_1^4 + x_2^4 - 4 = p^4 + \frac{2}{p^4}.$$

Y como, tenemos:

$$\left(p^2 - \frac{\sqrt{2}}{p^2}\right)^2 = p^4 + \frac{2}{p^4} - 2\sqrt{2}, \text{ resulta:}$$

$$x_1^4 + x_2^4 - 4 - 2\sqrt{2} = p^4 + \frac{2}{p^4} - 2\sqrt{2} = \left(p^2 - \frac{\sqrt{2}}{p^2} \right)^2 \geq 0.$$

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 4 + 2\sqrt{2} = 2\left(2 + \sqrt{2}\right) \geq 2 + \sqrt{2}.$$

Luego, ya está demostrado que $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$

Como ha visto el lector, los temas de este artículo están desigualmente repartidos, ya que ha influido, entre otras causas el gusto del autor por ciertos temas, y también el no hacerlo excesivamente largo. Por esta razón se han quedado muchos problemas más en el tintero, pero confío en la posibilidad de que un futuro artículo pueda dar cabida a esos problemas, y si es necesario, pues sería en más de un artículo.

Bibliografía

[1] BOLT, B. (1988): *Actividades matemáticas*. Labor. Madrid.

[2] Sociedad “Puig Adam” de profesores de Matemáticas, Boletín nº 20. Junio de 2002.

[3] Mathematical Association of America. (1996): *Concursos de Matemáticas. Geometría.* Euler. Madrid.

[4] REY PASTOR, J. y GALLEGO DÍAZ, J. (Sin fecha): *Norte de Problemas.* Dossat. Madrid.

[5] LITVINENKO, V: y MORDHÓVICH, A. (1989): *Prácticas para resolver Problemas matemáticos. Álgebra y Trigonometría.* Mir. Moscú.

[6] BELLOT ROSADO, F. y LÓPEZ CHAMORRO, M. A. (1994): *Cien problemas de matemáticas. Combinatoria. Álgebra. Geometría.* I.C.E. Universidad de Valladolid. Valladolid.

El origen histórico de la Física matemática. La matematización de las relaciones cinemáticas desde Arquímedes hasta Galileo

Francisco A. González Redondo
Dpto. Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@edu.ucm.es

Abstract

The origin of contemporary Mathematical Physics is usually placed in the "Third Journey" of Galileo's Two New Sciences, where the first mathematical treatment of physical relations is supposed to be given. In this article, the roots of Galilean Kinematics are found in the evolution of that Physics of Quantities opposed to Aristotelian Physics of Qualities, and parallel to the development of symbolic Algebra as detailed in a previous paper.

Introducción

Cuando en 1743 escribe d'Alembert su *Traité de Dynamique* (corregido y aumentado por el autor en 1758), plantea una Mecánica perteneciente al grupo de Ciencias que se basan en principios verdaderos, necesarios y perfectamente claros en sí mismos, aunque parezca, en general, menos directa que la Geometría o el Álgebra: principios metafísicos que son independientes de los experimentos. Todo ello en una obra científica que puede considerarse de Matemática aplicada a la Dinámica y a la Estática de sólidos y de fluidos. Lagrange, en su *Mécanique analytique* de 1788, le criticaba el hecho de que pretendiera reducir la Dinámica a la Cinemática mediante principios tomados de distintos predecesores. El aserto se basaba en que d'Alembert consideraba la fuerza generadora de aceleración como una noción derivada, otorgando a la masa y a los elementos puramente cinemáticos el lugar primordial [1].

Y es que, efectivamente, la obra de Newton a finales del siglo XVII había dado entrada en el mundo de las Ciencias Exactas a una Dinámica, entendida como *Principios matemáticos de la Filosofía de la Naturaleza* (1687), que trascendía la Cinemática terrestre de Galileo y la Cinemática celeste de Kepler. En todo caso, éstos y aquél, seguían siendo entonces "matemáticos" [1].

Desde el punto de vista de la Física actual, los orígenes históricos de estas cuestiones se encuentran, precisamente, en la distinción entre el ámbito de la Filosofía de la Naturaleza y el de la Matemática, y se personalizan en dos de las máximas glorias de la humanidad científica: Aristóteles y Arquímedes. Aristóteles en su impresionante obra, sin duda, escribe de Física (todo lo incipiente que se quiera, pero Física) y no de Matemática. Y su Física es 'ciencia' de las cualidades, no de cantidades; no es matematizable, ya que como fundamentación filosófica la matematización, podríamos decir que por principio para él, está proscrita. Arquímedes es el creador de la Estática, rama bien establecida en el seno de la Mecánica y que se explica en todos los textos actuales de Física general -no en los de Ingeniería- como capítulo especial de la Dinámica caracterizado por la carencia de movimiento [2].

En este artículo, sin embargo, vamos a centrarnos en la matematización de la Cinemática y, más concretamente, en la matematización de la Cinemática terrestre hasta llegar a la obra que supone la síntesis final de los estudios sobre Mecánica de Galileo Galilei, sus *Dos nuevas ciencias* de 1638 [3].

1. Arquímedes: relaciones magnitudinales espacio-temporales en el movimiento uniforme

Sí resulta importante en esta historia, por tanto, la contribución de Arquímedes, el primero que se aproximó parcial pero propiamente a ese ámbito que hoy pertenece a la Física, la Estática, en tanto que 'ciencia exacta', es decir, con los métodos de la Geometría. La obra que suele referirse en este sentido es su *Del equilibrio de los planos o de sus centros de gravedad*. Sin embargo, los postulados o proposiciones que establece son simples principios de conservación, enunciados a modo de razones entre cantidades de la misma magnitud. Transcribo los enunciados siguientes para ilustrar este punto [4]:

> "*Postulado 1.* Pesos iguales a distancias iguales (del punto de apoyo de una balanza de brazos iguales) se equilibran, y a distancias desiguales se rompe el

equilibrio y hay inclinación hacia el lado del peso que está a mayor distancia".

"*Proposición 6*. Dos pesos conmensurables se equilibran a distancias inversamente proporcionales a ellos".

Sin embargo, aunque debe destacarse la Estática arquimediana para la Historia de la Física, el origen de la formulación matemática de las relaciones cinemáticas debemos buscarlo en *Sobre las espirales* [4]:

"*Proposición 1*. Si un punto recorre una línea con velocidad uniforme y se toman en ella dos segmentos, la razón de éstos es igual a la de los tiempos empleados por el punto en recorrerlos".

Aquí sí nos encontramos con un resultado importante, puesto que el mismísimo Galileo lo incluirá en sus *Discorsi* [3] "Teorema I. Proposición I" en la Tercera Jornada. Longitudes y tiempos son tratados como magnitudes; pero, la velocidad uniforme, aunque se mencione, sigue sin ser una magnitud, no se representa mediante un segmento, no se cuantifica, actúa solamente como garante del movimiento del punto, como referencial si se quiere.

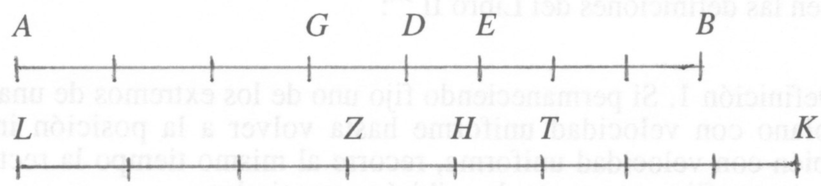


Figura 1.

Para demostrar el Teorema, considera Arquímedes un punto que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de la línea *AB*, seleccionando en ella dos segmentos consecutivos *GD* y *DE* que el punto recorre en los tiempos *ZH* y *HT*, respectivamente, y escribe: "hay que demostrar que *GD* es a *DE* como *ZH* es a *HT*". La demostración, basada en la Definición 6 del Libro V de los *Elementos* de Euclides [5], la ilustra con un dibujo (Figura 1), también utilizado por Galileo, aunque con otra notación para los puntos.

Supone que las líneas *AD* y *DB* están 'compuestas' por las *GD* y *DE*, de modo que *AD* sea mayor que *DB* y que el tiempo *ZH* esté contenido en el *LH* tantas veces como la línea *GD* lo está en *AD* y el *TH* en el *KH* como *DE* en *DB*.

Al moverse el punto con velocidad uniforme en la línea *AB*, el tiempo empelado en recorrer *GD* será igual al que emplee en recorrer cada una de las líneas iguales a *GD*; luego el punto recorrerá la línea compuesta *AD* en un tiempo igual a *LH*, porque se ha supuesto que *GD* está contenida en *AD* tantas veces como el tiempo *ZH* en el *LH*. Por la misma razón, el punto recorrerá la línea *BD* en un tiempo igual a *KH*; y como la línea *AD* es mayor que la *BD*, el tiempo *LH* será mayor que el *KH*.

Si los tiempos están compuestos por *ZH* y *HT* de modo que el primero sea mayor que el segundo, "se demostrará análogamente que entre las líneas compuestas de la misma manera que las *GD* y *DE*, una superará a la otra y será la homóloga del tiempo mayor".

Por tanto, la línea *GD* será a la *DE* como el tiempo *ZH* al *HT*.

Una vez demostrada esta proposición, enuncia una segunda, la última que hará uso de la magnitud tiempo representada mediante un segmento, y considerará el movimiento de un punto con velocidad uniforme [3]; la siguiente mención será una definición.

> "*Proposición 2*. Si dos puntos recorren dos líneas con velocidad uniforme y en cada una de ellas se toma un segmento que es recorrido por el punto correspondiente en tiempos iguales, estos segmentos son proporcionales".

La demostración es parecida, utilizando para ilustrarla tres líneas, dos para los espacios recorridos y otra para los tiempos empleados. Como las razones de las distancias recorridas en cada línea son las dos proporcionales a la misma razón de los tiempos empleados, entonces son proporcionales entre sí.

Solamente se hace mención a las magnitudes longitud, tiempo y a la velocidad como referencial, en las definiciones del Libro II [3]:

> "*Definición 1*. Si permaneciendo fijo uno de los extremos de una recta, ésta gira en un plano con velocidad uniforme hasta volver a la posición inicial y un punto, también con velocidad uniforme, recorre al mismo tiempo la recta que gira a partir del extremo fijo, este punto describirá una espiral".

Otros autores, desde el siglo V a.C., hicieron contribuciones al trazado de curvas 'mecánicas'. También Herón de Alejandría y poco después Pappus, ambos ya en era cristiana, tuvieron aportaciones mencionadas en las historias de la Física [6], pero, a mi juicio, ni unas ni otras suponen nada especialmente novedoso para este estudio. Realmente, es desde la perspectiva de lo que hoy consideraríamos la evolución del "Álgebra" a partir de Euclides desde donde deben buscarse ingredientes sustanciales, como ya vimos en otro trabajo precedente [7].

2. Bradwardine: hacia una cinemática de relaciones de cantidades homólogas de espacio, tiempo y velocidad

En algunos científicos medievales, tales como Johannes de Muris [8] en su *De Canonio*, pueden leerse afirmaciones como la siguiente:

> "Multiplica [el exceso del peso] por el número que representa la longitud de toda la viga, y a continuación divide este producto por el número que representa una longitud del doble de la del brazo corto, y lo que resulta es el número que representa el peso".

Escrito que lleva a alguno de sus lectores a hacer afirmaciones como la siguiente [9]:

> "Tenemos que llegar a los tiempos medievales para encontrar autores, tales como Johannes de Muris, que trataron productos y cocientes de magnitudes de dimensiones diferentes".

En la Historia de la Física [6] [8] se destacan usualmente las contribuciones originales de autores como Jordano Nemorario, Robert Grosseteste, William de Ockham, John Buridan, Alberto de Sajonia, etc., la mayor parte de ellas construidas en referencia a la Física de Aristóteles, a favor o en contra [10].

Desde la segunda mitad del siglo XIII los filósofos escolásticos comenzaron a discutir un nuevo problema, el del cambio de intensidad de las cualidades, el problema de *intesiones et remissione formarum* o intensificación y debilitación de las formas (variables), "concepto de Aristóteles más o menos equivalente al de cualidades" [11]. Entre estas formas se encontraban cosas como la velocidad de un cuerpo en movimiento o la variación de la temperatura de un punto a otro del cuerpo con temperatura no uniforme.

El problema consistía en expresar numéricamente los grados en que una cualidad aumenta o disminuye. Los instrumentos de análisis utilizados hicieron que las discusiones fueran poco fructíferas, aunque la situación comenzó a aclararse con la aplicación de generalizaciones de la Teoría de las proporciones de los *Elementos* a estas cuestiones físicas.

De acuerdo con la Física de Aristóteles, en el mundo sublunar cada cosa tiene su sitio natural, y todo movimiento implica una ruptura en el equilibrio o una tendencia a restablecerlo. Retóricamente, considera que la velocidad del cuerpo en movimiento aumentará con la fuerza que lo provoca y disminuirá en razón inversa a la resistencia que se le opone, 'ley' que podría escribirse hoy simbólicamente en la forma

$$V = \frac{F}{R} \quad \text{o, mejor aún,} \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{F_2 R_1}{R_2 F_1}. \tag{1}$$

Thomas Bradwardine, en su *Tractatus Proportionibus* de 1328 presenta su propio desarrollo de las teorías de Eudoxo-Euclides [12].

> "Es absurdo decir que la velocidad del cuerpo en movimiento aumentará con la fuerza que lo provoca y disminuirá en razón inversa a la resistencia que se le opone, pues si la fuerza es igual o ligeramente inferior a la resistencia, no hay movimiento; y, sin embargo, en este caso la velocidad sigue siendo superior a cero".

Y construye una alternativa basada en una generalización de la Definición 10 del Libro V de los *Elementos* [5], tratada ya por Boecio [13] en su teoría de las proporciones doble, triple o general en n, según la cual, si

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} \tag{2}$$

se puede afirmar que

$$\frac{a}{c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2 \tag{3}$$

dado que

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \;\rightarrow\; ac=b^2 \;\rightarrow\; \frac{ac}{c^2}=\frac{b^2}{c^2} \;\rightarrow\; \frac{a}{c}=\left(\frac{b}{c}\right)^2 \tag{4}$$

Bradwardine argumentó que la 'ley' de Aristóteles significaba (actualizando la notación) que si una razón dada f/r "producía" una velocidad v, la razón que haría doble esta velocidad no sería $2f/r$, sino

$$\left(\frac{f}{r}\right)^2 \tag{5}$$

y la razón que la reduciría a la mitad sería

$$\sqrt{\frac{f}{r}} \tag{6}$$

Es decir, Bradwardine corrige la 'ley' de Aristóteles enunciándola, en notación moderna, de la manera siguiente:

$$v=\log\left(\frac{f}{r}\right), \tag{7}$$

y como el logaritmo de $1/1$ es cero, la condición se cumple cuando la fuerza y la resistencia son iguales, concluyendo que para "producir" una velocidad n veces mayor la razón fuerza/resistencia no tiene que ser multiplicada por n, sino elevada a la potencia n.

Lo que ha proporcionado Bradwardine es una graduación de esta cualidad variable del movimiento que es la velocidad. Pero este resultado se enmarca en un tratamiento más completo, un "álgebra de palabras utilizado en Oxford en la Mecánica de Bradwardine, en la que se conseguía la generalización utilizando letras del alfabeto para sustituir las cantidades variables en vez de números" [13].

En todo caso, de la importante obra de Bradwardine voy a destacar solamente dos proposiciones [8] [14] por una razón especialmente relevante: Galileo las incluirá en la Tercera Jornada de sus *Discorsi* [3] como Teoremas II y III del movimiento uniforme, es decir, los que siguen al Teorema I que, como he resaltado antes, ya estaba en Arquímedes:

> "*Suposición 7*. En el caso de dos movimientos locales que tengan lugar con continuidad en el tiempo o en tiempos iguales, las velocidades y las distancias recorridas son proporcionales, es decir, una velocidad es respecto de la otra como el espacio recorrido por la primera es respecto del espacio recorrido por la segunda".

> "*Suposición 8*. En el caso de los movimientos locales que recorren el mismo espacio o espacios iguales, las velocidades son inversamente proporcionales a los tiempos, es decir, la primera velocidad es a la segunda como el tiempo de la segunda velocidad es al tiempo de la primera".

Junto a estas 'suposiciones' o proposiciones en las que se establece una razón de velocidades proporcional a una razón de espacios, o inversamente proporcional a una razón de tiempos, puede citarse otra referencia de esta obra [8] [14]:

> "*Conclusión 24*. Dado un movimiento local cualquiera, se puede hallar un movimiento local uniforme y continuo más rápido o más lento que éste respecto al primero en la misma proporción que una línea recta finita está respecto a otra línea finita. Por tanto, resulta manifiesto que cualquier espacio finito puede ser recorrido en un tiempo finito cualquiera con un movimiento uniforme y continuo".

A partir de estas citas de Bradwardine, pueden destacarse varias cuestiones:

a) Considera que la velocidad es una magnitud como el espacio o el tiempo; siendo probablemente el primero que lo hace. La relación de la velocidad con las otras dos permitirá llegar a expresarla como razón entre ellas.

b) Velocidad y espacio son magnitudes relacionadas pero distintas, aunque en los textos antiguos se confundían y los procesos de medición hasta el siglo XVIII vuelvan a identificarlas en ocasiones.

c) Las velocidades se pueden comparar igual que se comparan los segmentos, es decir, las velocidades pueden representarse geométricamente como longitudes de segmentos; y, en consecuencia, serían cantidades de una magnitud, la magnitud 'velocidad'.

Esta senda de matematización de la Física, "resultado de un notable esfuerzo por reducir la intensidad de las cualidades a una escala de magnitudes medibles" [12], será seguida por un importante núcleo de científicos de Oxford en el período 1325-1350, los agrupados en torno al Merton College, entre los que destacaron William Heytesbury y Richard Swineshead [14].

3. Oresme: la representación matemática de las intensidades de las cualidades

Desde la Universidad de París, Nicolás de Oresme generaliza la teoría de las proporciones de Bradwardine, hacia 1360, en su *De proportionibus proportionum*, para incluir cualquier potencia racional, al mismo tiempo que aporta reglas para combinar proporciones que son equivalentes a nuestras leyes para operar con exponentes.

Para Oresme todo lo que varía, se sepa medir o no, se puede imaginar como una cantidad continua representada por un segmento rectilíneo. Así comienza su *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum difformitatum*, también escrito en el período 1356-1362. Cada 'intensidad' [*intensio*] o razón de cambio de una cualidad, se puede representar como una línea recta vertical desde cada punto del 'sujeto' al que afecta la intensidad. La 'extensión' [*longitudo*] se representa mediante una línea horizontal dibujada en la dirección del sujeto. En cada punto de esta horizontal se levanta una vertical cuya altura [*altitudo* o *latitudo*] es proporcional a la intensidad de la propiedad en el punto correspondiente del sujeto [8].

Y enuncia su definición general de cualidad uniformemente deformada [15]:

> "Una cualidad uniformemente deformada [*uniformiter difformis*] es aquella tal que cuando se conocen tres puntos del sujeto, la relación del intervalo entre el primero y el segundo al intervalo entre el segundo y el tercero es la misma que la relación del exceso de intensidad del primero sobre el segundo al exceso de intensidad del segundo sobre el tercero".

Para el caso del movimiento [15], Oresme 'transporta' los tiempos sobre la horizontal y las velocidades instantáneas perpendicularmente a los puntos de la horizontal, obteniendo la curva que, en el caso del movimiento uniformemente acelerado, es una recta (Figura 2), por lo que puede ‘demostrar’ geométricamente que en un tiempo dado un móvil recorre con movimiento uniformemente acelerado o aminorado exactamente la misma distancia que otro móvil con velocidad constante igual a la media de las velocidades extremas del primero.

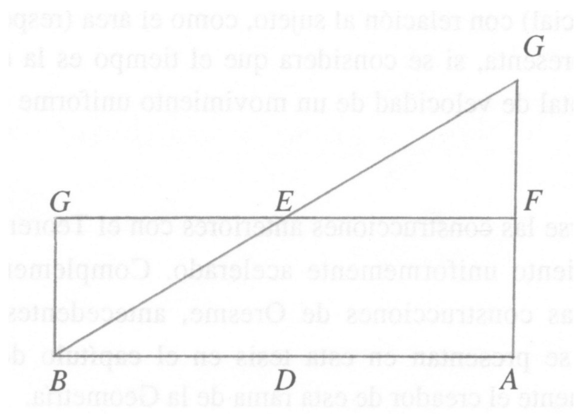


Figura 2.

No se detiene aquí, tratando, a continuación: a) las ‘cualidades superficiales’, es decir, las cualidades que “tienen dos dimensiones con respecto al sujeto” y cuya intensidad debe representarse mediante una normal a la superficie plana que define la extensión; y b) las cualidades corpóreas, aquellas que “tienen tres dimensiones con respecto al sujeto”. Sobre ellas afirma [15]:

> “Una cualidad superficial se representa por una figura sólida. Ahora bien, no existe una cuarta dimensión y resulta imposible concebirla. Sin embargo, una cualidad corpórea puede pensarse que tiene una doble corporeidad. Una en una extensión real, por el efecto de la extensión del objeto, como un lugar [*locus*] en todas dimensiones. Pero existe también otra que solamente se imagina y que surge de la intensidad de la cualidad. Esta cualidad se repite un número infinito de veces por la multitud de superficies que pueden trazarse con respecto al sujeto”.

De acuerdo con esta concepción y volviendo al caso de la velocidad, ésta es susceptible de una doble extensión, tanto con respecto al tiempo como respecto al sujeto, por lo que puede ser uniforme o deforme con respecto a cada una de estas dos extensiones.

Definida la “cualidad total” o “medida” de una cualidad que era lineal (respectivamente, superficial) con relación al sujeto, como el área (respectivamente, el volumen) del diagrama que la representa, si se considera que el tiempo es la extensión variable, la medida de la cualidad total de velocidad de un movimiento uniforme es igual a la distancia recorrida.

Pueden compararse las construcciones con el Teorema I, Proposición I de los *Discorsi* de Galileo [3] para el movimiento uniformemente acelerado. Complementariamente, también pueden contrastarse estas construcciones de Oresme, antecedentes de la Geometría Analítica [10], con las que se presentaron en nuestro artículo anterior dedicado a Descartes [16], considerado tradicionalmente el creador, junto con Pierre de Fermat, de esta rama de la Geometría [11].

4. Consideraciones finales. Hacia la Cinemática de Galileo

Constituye un tópico hoy considerar que el siglo XVII vio nacer una nueva Física, o *la* Física, o la Ciencia moderna; una Física de las cantidades opuesta a la Física aristotélica de las cualidades. En todas las aproximaciones al estudio de este tema suele citarse la conocida afirmación de Galileo acerca de que el Universo está escrito en lenguaje matemático, y al hombre le queda descifrarlo.

Y, efectivamente, Galileo escribió en 1623:

> “La filosofía está escrita en este libro inmenso que se encuentra continuamente abierto ante nuestros ojos (quiero decir el Universo), pero que no puede entenderse si no se aplica uno primero a entender su lengua, a reconocer los caracteres en que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son [...]”

Parece admitido hoy por todos que con Galileo comenzará un cambio radical en el estudio del Universo. Sin embargo, cabe preguntarse si éste entiende la Naturaleza como conjunto de fenómenos cuantitativos, y, si es así: a) qué ‘realidades’ matematizables deben buscarse en ella; y b) cuáles son las herramientas matemáticas con las que hay que enfrentarse a esa Realidad que supone cuantificable.

La cita que dejamos abierta, con la duda planteada acerca de la naturaleza de los “caracteres” de esa lengua, servirá como punto de partida de un próximo artículo, en el que veremos, intrínsecamente, las características de su Cinemática.

Bibliografía

[1] GONZÁLEZ DE POSADA, F., GONZÁLEZ REDONDO, F. A., TRUJILLO JACINTO DEL CASTILLO, D. y CRESPO TABARRA, C. (2003): *Libros Antiguos de Física en la Biblioteca Histórica*. Universidad Complutense de Madrid.

[2] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2000): *Historia del Análisis Dimensional*. Tesis Doctoral en Matemáticas. Universidad Politécnica de Madrid.

[3] GALILEI, G. (1638) *Diálogos y Demostraciones matemáticas en torno a dos nuevas ciencias*. Edición española de C. Solís y J. Sádaba, Madrid, Editora Nacional, 1976. Edición inglesa de H. Crew y A. de Savio, New York, Dover, 1954.

[4] VERA, F. (ed.) (1970): *Científicos griegos*, 2 vols. Madrid: Aguilar.

[5] HEATH, T. (1908): *The Thirteen Books of The Elements*. Oxford: Clarendon Press. Reimpresión en Dover, New York, 1956.

[6] DUGAS, R. (1988): *A History of Mechanics*. New York: Dover.

[7] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2002) “El Álgebra [geométrica] de Euclides a Ommar Khayyam”. *Boletín de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas* nº 63, pp. 72-87.

[8] CLAGGET, M. (1959) *The Science of Mechanics in the Middle Ages*. Madison: University of Wisconsin Press.

[9] MACAGNO, E. O. (1971) “Historico-critical review of Dimensional Analysis”. *Journal of the Franklin Institute* 292, pp. 391-402.

[10] BOYER, C. B. (1959) *A History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover.

[11] BOYER, C. B. (1968): *A History of Mathematics*. New York: Wiley.

[12] BEAUJOUAN, G. (1971): “La Ciencia en el Occidente medieval cristiano”. En Tatón, R. (dir.): *Historia General de las Ciencias*, vol. 1, pp. 624-696. Barcelona: Destino.

[13] CROMBIE, A. C. (1959) *Agustine to Galileo. Science in the Middle Ages and Early Modern Times*. Oxford University Press.

[14] AZCÁRATE, C. (1984) *Las Matemáticas de Galileo*. Universidad Autónoma de Barcelona.

[15] CLAGGETT, M. (1968) *Nicolas Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. Madison: University of Wisconsin.

[16] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2003) “Del *Artem Analyticem* de Vieta a la *Mathesis Universalis* de Descartes. Nuevas perspectivas en torno a un período singular en la Historia del Álgebra”. *Boletín de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas* nº 64, pp. 51-67.

Sobre las medianas de un triángulo

María Belén Rodríguez Rodríguez
I.E.S. Sefarad, Toledo

Abstract

We prove that a triple (a,b,c) of positive real numbers are the lengths of the sides of a triangle if and only if they are the lengths of the medians of some other triangle. The proof provides an elementary method to construct a triangle whose medians had preassigned lengths.

El objetivo de esta nota es demostrar el siguiente teorema.

1.1. Teorema.

Sean a, b y c tres números reales positivos. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) *Existe un triángulo, S, cuyas medianas miden a, b y c.*
2) *Existe un triángulo, T, cuyos lados miden a, b y c.*

Demostración.

Supongamos primero que existe un triángulo S, cuyos vértices denotamos A, B y C, cuyas medianas miden a, b y c. Sean M, N y P los puntos medios de los lados BC, AC y AB (Fig.1), respectivamente, de modo que $a = CP$, $b = AM$ y $c = BN$.

Sean w el vector BM, τ la traslación de vector w, $A' = \tau(A)$, $C' = \tau(C)$ y N' el punto medio del segmento de extremos A' y C'. Comprobemos que los lados del triángulo $T = AMN'$ miden a, b y c. Es obvio que $AM = b$, mientras que al ser el triángulo $A'MC'$ imagen por τ del S, su mediana MN' mide lo que BN, es decir,

$MN' = c$. Queda probar que $AN' = CP$. Para ello es suficiente demostrar que □ CAP y ACN' son triángulos congruentes. Como el lado AC es común basta comprobar que $CN' = AP$ y que los ángulos ACN' y C□AP son iguales.

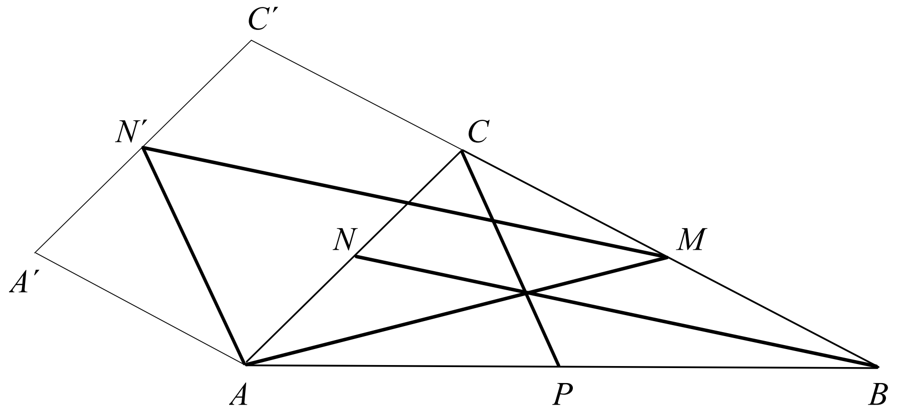


Fig. 1

Se trata pues de probar que los segmentos CN' y AP son paralelos y miden lo mismo. Ahora bien, en el triángulo $A'MC'$ los puntos C y N' son puntos medios de los lados MC' y $A'C'$, respectivamente, luego CN' es paralelo a MA' y sus longitudes cumplen que $MA' = 2CN'$.

De este modo se tiene, por un lado,

$$2AP = BA = MA' = 2CN',$$

luego $AP = CN'$, y por otro AP es paralelo a AB, que lo es a $A'M$, pues $A' = \tau(A)$ y $M = \tau(B)$, y ya hemos señalado que $A'M$ es paralelo a CN'. En conclusión, CN' y AP son paralelos.

Suponemos ahora que existe un triángulo T, de vértices A, B y C, cuyos lados miden $BC = a$, $AC = b$ y $AB = c$. Denotamos P el punto medio del lado AB, α □el ángulo CPA que forman las semirrectas PC y PA y x la longitud de la mediana que une C con P (Fig. 2). Del teorema del coseno, aplicado a los triángulos □CAP y CPB se desprende que

$$b^2 = x^2 + (c^2/4) - cx\cos\alpha \; ; \; a^2 = x^2 + (c^2/4) + cx\cos\alpha$$

Sumando ambas igualdades resulta que

$$a^2 + b^2 = 2x^2 + (c^2 / 2)$$

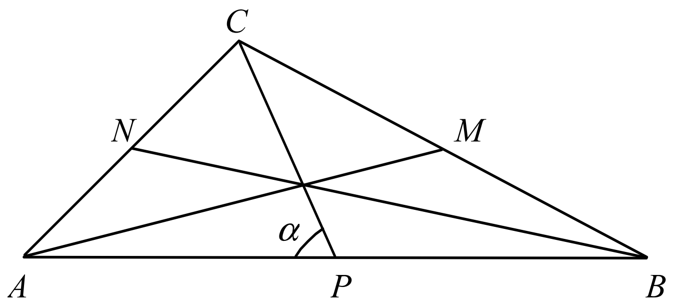


Fig. 2

Si *M* es el punto medio del lado *BC*, *N* es el punto medio del lado *AC* e *y*, *z* son las longitudes de las medianas del triángulo *T* que unen *B* con *N* y *A* con *M*, respectivamente, se obtienen, con el argumento precedente, las igualdades

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 2x^2 + (c^2 / 2) \\ b^2 + c^2 = 2z^2 + (a^2 / 2) \\ a^2 + c^2 = 2y^2 + (b^2 / 2) \end{cases} \quad (1)$$

que relacionan las longitudes de las medianas *x*, *y*, *z* de un triángulo con las de sus lados *a*, *b* y *c*.

Sumando las dos primeras ecuaciones se obtiene

$$x^2 + z^2 = b^2 + (a^2 + c^2)/4$$

y sustituyendo en ella el valor de $a^2 + c^2$ que proporciona la tercera de las ecuaciones (1), resulta que

$$x^2 + z^2 = 2(3b/4)^2 + y^2/2$$

Procediendo análogamente se obtienen las igualdades siguientes

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 2(3b/4)^2 + y^2/2 \\ x^2 + y^2 = 2(3a/4)^2 + z^2/2 \\ y^2 + z^2 = 2(3c/4)^2 + x^2/2 \end{cases} \tag{2}$$

Por la implicación ya probada, existe un triángulo *S'* cuyos lados miden *x, y, z*, y comparando los sistemas de ecuaciones (1) y (2) deducimos que las medianas de *S'* miden $3a/4$, $3b/4$ y $3c/4$. Por tanto, las medianas del triángulo *S* que resulta de transformar *S'* mediante una homotecia de razón 4/3 miden *a*, *b* y *c*.

1.2. Observaciones

i) Puesto que con regla y compás se puede dibujar un segmento cuya longitud sea 4/3 de la longitud de otro dado, la demostración anterior proporciona un procedimiento para construir un triángulo cuyas medianas tengan longitudes admisibles *a*, *b* y *c*.

Para ello se construye en primer lugar un triángulo S_1 cuyos lados midan $4a/3$, 4b/3 y 4c/3. A continuación, mediante el método empleado en la demostración anterior, se construye un triángulo S_2 cuyos lados miden lo que las medianas de S_1. Pues bien, las medianas de S_2 miden *a*, *b* y *c*.

ii) Las igualdades (2) muestran que las longitudes de las medianas de un triángulo determinan las de sus lados. Por ello, dos triángulos son congruentes si y sólo si las longitudes de sus medianas coinciden dos a dos.

Obsérvese que al restar las dos primeras igualdades en el sistema (1) se obtiene

$$3(a^2 - c^2) = 4(x^2 - z^2)$$

y por tanto $a = c$ si y sólo si $x = z$. En consecuencia se tiene el siguiente corolario.

1.3. Corolario.

Un triángulo es isósceles si y sólo si dos de sus medianas miden lo mismo.

Señalemos por último que del procedimiento empleado en la demostración de 1.1 se desprende el siguiente corolario.

1.4 Corolario.

Sean a, b y c tres números reales positivos. El sistema de ecuaciones cuadráticas

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = 2b^2 + y^2 / 2 \\ x^2 + y^2 = 2a^2 + z^2 / 2 \\ y^2 + z^2 = 2c^2 + x^2 / 2 \end{cases}$$

admite una solución (x, y, z) que son las longitudes de los lados de un triángulo si y sólo si (a, b, c) son las longitudes de lados de algún triángulo.

Nota de la redacción del Boletín

El teorema que aquí se demuestra es un clásico que aparece propuesto en los conocidos textos de Hadamard y de Rouché. No obstante, nos parece que la demostración que ofrece la autora tiene un interés didáctico indudable, que sabrán apreciar nuestros lectores.

Otra demostración del Teorema de Tales

Pedro Pescador Díaz
I.E.S. "Juana de Pimentel"
ppescado@platea.cnice.mecd.es

Abstract

In this article another demonstration of Tales' Theorem is given. It uses elemental properties of area and it also tries to avoid any matter related to irrationals and geometrics transformations.

Introducción

Esta nueva demostración del teorema de Tales es sencilla y no utiliza ninguna transformación geométrica. El enunciado clásico del teorema de Tales tiene una formulación más general y bonita en términos proporcionalidad de los segmentos que determinan rectas paralelas que cortan a rectas secantes. La que se hace en términos de triángulos es, no obstante, equivalente.

1. Definición

Dos triángulos T' y T son semejantes $T' \sim T$ si y sólo si tienen los ángulos respectivamente iguales. $T' \sim T \Leftrightarrow A' = A,\ B' = B,\ C' = C.$

2. Teorema de Tales

Dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen sus lados proporcionales

$$T' \sim T \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

<u>Demostración</u>

$\Rightarrow$) Si dos triángulos T y T' son semejantes entonces, para demostrar que $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$, se procede a construir el paralelogramo con estos triángulos colocados tal como se indica en la Fig. 1.

Llamamos I al punto de intersección de la diagonal con los lados a y b'. Prescindimos en la Fig. 2 de la diagonal para que se vean mejor todos paralelogramos, en los cuales trazamos las alturas como sigue:

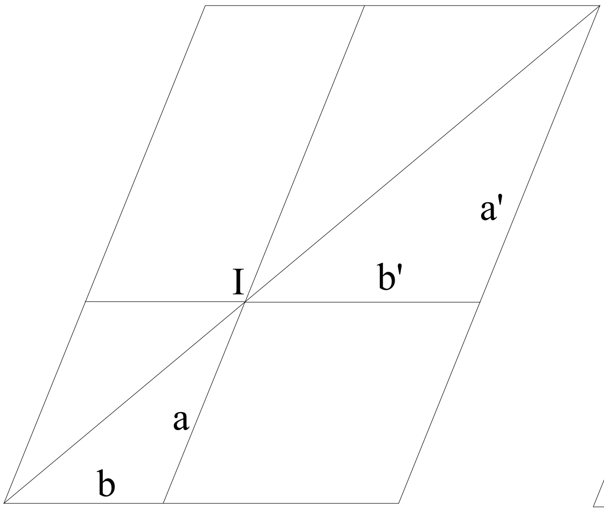


Fig. 1

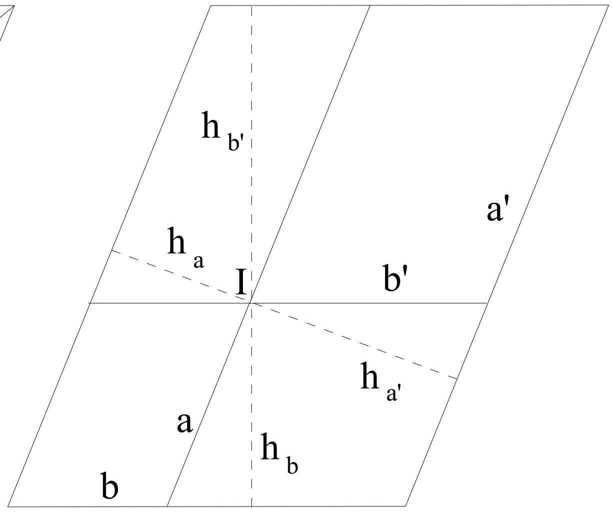


Fig. 2

h_a es la altura de los paralelogramos de la Fig. 1 (es perpendicular al lado a).
$h_{a'}$ es la altura de los paralelogramos de la Fig. 2 (es perpendicular al lado a').
h_b es la altura de los inferiores (es perpendicular a la prolongación del lado b).
$h_{b'}$ es la altura de los superiores (es perpendicular al lado b').

Expresamos el hecho de que la superficie del paralelogramo superior izquierdo sea igual a la superficie del paralelogramo inferior derecho de las siguientes dos formas posibles:

$$a' \cdot h_a = a \cdot h_{a'} \qquad (1)$$

$$b \cdot h_{b'} = b' \cdot h_b \qquad (2)$$

Por otra parte, en el paralelogramo superior derecho la superficie se puede calcular usando a' como base o bien b', por lo que resulta

$$a' \cdot h_{a'} = b' \cdot h_{b'} \qquad (3)$$

Del mismo modo en el paralelogramo inferior izquierdo la superficie se puede calcular usando b como base o bien a de modo que

$$b \cdot h_b = a \cdot h_a \qquad (4)$$

Multiplicando miembro a miembro todas ecuaciones numeradas y simplificando obtenemos

$$a'^2 \cdot b^2 = a^2 \cdot b'^2$$

Al extraer la raíz cuadrada resulta

$$a' \cdot b = a \cdot b'$$

y finalmente obtenemos

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

Del mismo modo se procede para demostrar que

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

$\Leftarrow$) El recíproco se halla en el número 47 de esteBoletín (octubre 1997).

2. Referencias bibliográficas

[1] MORENO CASTILLO, R. (1997): *" Una demostración del teorema de Tales"*. Boletín de la Sociedad "Puig Adam" Nº 45, 54 -55

[2] PESCADOR DÍAZ, P. (1997): *"Demostración del teorema de Tales, por métodos elementales"* Boletín de la Sociedad "Puig Adam" Nº 47, 22 - 29

[3] PESCADOR DÍAZ, P. (1998): *"Superficies y teorema de Tales"* Boletín de la Sociedad "Puig Adam" Nº 50, 79 - 82

[4] GARCÍA SÚAREZ, J.A. (1999): *"El teorema de Pitágoras en la semejanza de triángulos"*. Boletín de la Sociedad "Puig Adam" Nº 52, 61 - 62

[5] GARCÍA SÚAREZ, J.A. (2001): *"Área, proporcionalidad y semejanza de triángulos"* Boletín de la Sociedad "Puig Adam" Nº 59, 62 - 65

[6] PESCADOR DÍAZ, P. (2002): *"Una demostración breve del Teorema de Tales"* Boletín de la Sociedad "Puig Adam" Nº 60, 55 - 57

Boletín de la Soc. Puig Adam, núm 64 (Junio 2003)

Borges, la Arena y el Infinito

Jorge Alejandro Ramírez Cruz
IES Joan Miró
Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia de la UNED

Abstract

The Book of Sand by Jorge Luis Borges is discussed from a mathematical point of view. The properties of the infinite book are compared with those belonging to another one of our own. According to this example, it is shown how some topics concerning infinity are used in literature and can also be easily misunderstood.

1. Introducción

"Me dijo que su libro se llamaba el Libro de arena, porque ni el libro ni la arena tienen ni principio ni fin".

Fiel a su convicción, expresada sobre todo en sus últimos años, de rechazar un 02estilo barroco a la hora de escribir y, con esto, de privilegiar el contenido de lo dicho frente a la forma, Jorge Luis Borges (Buenos Aires, 1899 – Ginebra, 1986) nos propone en su relato El libro de Arena, de manera llana, con un lenguaje casi oral, como él diría, la existencia de un libro con un número de páginas infinito. En la cita inicial, la arena es una metáfora del infinito. Como en sus demás cuentos fantásticos, el carácter coloquial de la narración y su verosimilitud, hacen creíble y cercana al lector la situación, a pesar de la imposibilidad del argumento. Esto no sorprende en Borges, un maestro del relato que deleita en cada una de sus obras por su imaginación, concisión y habilidad narrativas.

Pero entre los diversos planos desde los que podríamos abordar el estudio del *Libro de Arena*, nos centraremos en este artículo en poner de manifiesto algunos aspectos matemáticos que pueden ser de interés. Las precisiones que haremos no suponen, desde luego, una intromisión en el terreno estrictamente literario de la obra, donde la creación es libre y no está sujeta, en principio, a la compatibilidad o consistencia con criterios de tipo matemático o ni siquiera, hablando con total generalidad, de orden lógico.

Sin embargo, dadas las características del autor que nos ocupa (Borges, 1999; y Barnatán 1995), sus conocidas inquietudes en el campo de la filosofía, de la estética y de las construcciones y juegos mentales en general, nos ha parecido interesante poner de manifiesto la forma en que aborda la cuestión de un libro infinito, llamémoslo así para abreviar, y comparar las propiedades que le atribuye con las características de un posible libro matemático ideal con infinitas páginas o, como lo llamaremos en lo sucesivo, un libro infinito ideal. Decimos ideal, porque permitiremos, como hipótesis de trabajo y para hacer matemáticamente posible que incluya infinitas páginas, que el espesor de sus hojas pueda ser tan pequeño como se quiera. Esto no es posible, claro está, en un libro físico o real.

2. Características principales del libro borgiano

Citaremos sólo las partes del texto necesarias para nuestros fines (Borges, 1989), es decir, las que dan cuenta de las principales propiedades del libro infinito en la óptica borgiana, o, para ser más precisos, del narrador borgiano. El orden de las citas no siempre corresponderá al del manuscrito, sino, más bien, a la cuestión que se esté tratando en cada ocasión. A poco de comenzar el texto, que no ocupa en su totalidad más que poco más de siete páginas, leemos:

> "Lo examiné. Su inusitado peso me sorprendió".

Borges pretende satisfacer aquí el sentido común. Parece razonable pensar que si el volumen contiene infinitas páginas, debe ser, en principio, muy pesado, ya que estamos sumando el peso de *todas* las hojas, que son infinitas. ¿Es esto necesariamente así? Veamos: el hecho de sumar estos pesos se traduce matemáticamente, en el caso más simple de libro infinito que podemos imaginar, en hallar el valor de la suma de la serie numérica de términos positivos formada por la suma de los pesos de todas las hojas –no tendremos en cuenta en el análisis a las tapas del libro, que sólo agregan una constante aditiva a dicha suma–, es decir, en hallar la suma de la serie, habida cuenta de que, por tener el libro un peso finito, debe ser convergente. Pero si lo es, bastaría dividir el peso de cada hoja entre dos, para que el peso total se redujera a la mitad. Por lo que, como vemos, no es necesario que el libro tenga un peso muy grande o, en palabras del narrador, *inusitado* para contener infinitas páginas. Con el libro matemático ideal que propondremos, veremos claramente esta cuestión.

Y, ya al final del libro:

> "Pensé en el fuego, pero temí que la combustión de un libro infinito fuera parejamente infinita y sofocara de humo al planeta".

Aquí el temor parece infundado, pues un peso inusitado debe producir un humo parejamente inusitado, pero *no* infinito, como veremos.

> "Me llamó la atención que la página par llevara el número (digamos) 40.514 y la impar, la siguiente, 999. La volví, el dorso estaba numerado con ocho cifras...Mírela bien. Ya no la verá nunca más".

Más adelante y con relación a esto, encontramos:

> "El número de páginas de este libro es exactamente infinito. Ninguna es la primera; ninguna, la última: No sé por qué están numeradas de ese modo arbitrario. Acaso para dar a entender que los términos de una serie infinita admiten cualquier número".

En estos párrafos podemos distinguir dos cuestiones. Por un lado, se atribuye de alguna manera al concepto de infinito el de la no ordenación, pero, como sabemos, el primero no implica en absoluto al segundo. Por ejemplo, **N, Q, R** o, dentro de cualquiera de ellos, infinitos subconjuntos, son infinitos, pero ordenados. La segunda cuestión es la de la *imposibilidad* de volver a ver una página. Esto puede traducirse en términos matemáticos diciendo que la probabilidad de encontrar una cierta hoja al abrir el libro es cero. Sin embargo, cuando se abre el libro, de hecho se lee una página, con lo que la probabilidad de encontrarla, aunque pequeña, o muy pequeña, es no nula. También esta cuestión tendrá respuesta en el libro matemático ideal que propondremos.

> "Apoyé la mano izquierda sobre la portada y abrí con el dedo pulgar casi pegado al índice. Todo fue inútil: siempre se interponían varias hojas entre la portada y la mano. Era como si brotaran del libro.
>
> –Ahora busque al final.
>
> También fracasé; apenas logré balbucear con una voz que no era la mía:
>
> –Esto no puede ser".

¿El hecho de que el libro tenga infinitas páginas, implica necesariamente que entre una de ellas y el principio o el final del libro también hay infinitas, o, más generalmente, que entre dos páginas dadas hay infinitas páginas? Veremos que lo primero no conlleva necesariamente lo segundo. A pesar de la cita expuesta, más adelante leemos:

> "Comprobé que las pequeñas ilustraciones distaban dos mil páginas una de otra".

Con lo que el número de páginas entre esas ilustraciones es finito, lo que parece descartar la posibilidad de que el narrador haga extensible al conjunto del libro la propiedad de acumulación que cita de forma expresa entre tapas, es decir, la de encontrar infinitas páginas en un intervalo cualquiera del libro.

3. Un libro infinito ideal

Supondremos, por simplicidad, un libro matemático ideal con infinitas páginas, en el que los espesores de *todas* las hojas pueden agruparse bajo una única sucesión. Consideremos las condiciones necesarias mínimas que se deben verificar en este caso.

Sea $(a_n)_{n\geq 1}$ la sucesión formada por los espesores de dichas hojas. Debe ser $a_n > 0$. Además, la serie formada por la sucesión de sumas parciales de dichos espesores debe ser convergente, y la suma de la serie debe ser el grosor del libro dejando de lado las tapas, digamos l. Es decir:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = l \qquad (1)$$

Por la convergencia de la serie, que imponemos como condición necesaria para la existencia del libro ideal, debe ser:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (2)$$

Con lo que extraemos como consecuencia que las hojas de nuestro libro *no pueden* tener todas igual grosor. En efecto, si lo tuvieran, la serie sería divergente. Veamos: sea $\delta > 0$ el espesor de cada hoja, suponiéndolas con espesor constante. Por pequeño que fuera δ, sería:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta = \delta \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \delta \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 1 = +\infty$$

con lo que nuestro libro no sería viable. Desde luego, estas condiciones no son suficientes, como veremos luego.

Supongamos ahora que P es el peso del libro descontadas las tapas y p_i el peso de la hoja i-ésima . Sea ρ el peso específico del material ideal del que está hecho el libro. Entonces, si A es el área de una página, resulta:

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = \sum_{i=1}^{\infty} \rho A a_i = \rho A \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \rho A l = \rho V$$

donde V es el volumen del libro. El resultado es trivial, pero muestra que P depende de ρ que no tiene por qué tener un valor elevado, es decir, que el material del que están hechas las hojas no debe ser obligatoriamente muy denso, con lo que el libro no debe ser *necesariamente* muy pesado.

En el libro borgiano se da a entender que la suma de los p_i debe ser muy grande, por ser éstos infinitos. Pero aún en el caso de que P fuera muy grande, lo que no es necesario pero sí concebible, lo razonable es que el peso del humo producido en su combustión sea proporcional al peso del libro, es decir a la suma de los pesos de todas las hojas –dejemos de lado las tapas, como hemos dicho– ,que sería en todo caso grande o muy grande, pero no infinito, como hemos afirmado arriba.

¿Qué ocurre con la probabilidad de encontrarnos con una cierta hoja al abrir el libro? Podemos atribuir a la hoja i-ésima una probabilidad h_i proporcional a su espesor a_i, de modo tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} h_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha a_i = \alpha \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \alpha l = 1$$

con lo que la constante de proporcionalidad es $\alpha = 1/l$ y, por tanto, $h_i = a_i / l$. De este modo, cada hoja tiene su probabilidad, que es *no nula*, con lo que al volver a abrir el libro, *puede* que nos encontremos con la misma hoja que en la ocasión anterior, exactamente con la misma probabilidad.

Para analizar la última cuestión, relativa al número de páginas entre una de ellas y las tapas o, como hemos dicho antes, entre dos cualesquiera de ellas, basta volver a la condición inicial (2). En nuestro modelo, considerando la sucesión $(a_n)_{n\geq 1}$ a partir del comienzo del libro, la acumulación de infinitas hojas se produce sólo al final y nunca entre dos páginas dadas del libro. Podemos pensar incluso en la existencia de más de un punto de acumulación, con una modificación simple del modelo inicial. Si imaginamos al libro formado por k cuadernillos, cada uno de espesor b_i, tales que

$$\sum_{i=1}^{k} b_i = l$$

donde cada cuadernillo tuviera un número infinito de páginas, tal como en el modelo de libro infinito más simple expuesto ocurre para todo el libro, entonces habría k intervalos al final de los cuales se produciría esa acumulación (en este caso, la numeración de la páginas no supone un problema; basta considerar la numeración trivial: i_n con $1 \le i \le k$ y $n \ge 1$). Esto nos muestra que para la existencia de un libro infinito, no hacen falta dos o más puntos de acumulación; basta con uno, para el caso más simple que podemos imaginar, o de varios, en número finito, en la ampliación recién expuesta.

Finalmente, digamos que la condición (2) que debe cumplir la sucesión de espesores de las hojas, no basta ciertamente para que el libro resulte admisible. Podría tenerse, por ejemplo, una "hoja" cuyo espesor fuera la mitad del total sin que esto contradijera el cumplimiento de (1) y (2), pero, sin llegar a esto, ya el hecho de que no puedan tener todas un mismo espesor nos aleja de la imagen del libro a la que estamos habituados. Aún así, podemos suavizar este condicionante en casos concretos.

Consideremos, por ejemplo, la sucesión: $a_n = l(1-r)r^n$, $0 < r < 1$, de forma tal que la serie geométrica de razón r resultante sea convergente, con límite l. Tenemos:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sum_{i=0}^{\infty} l(1-r)r^i = l(1-r)\sum_{i=0}^{\infty} r^i = \frac{l(1-r)}{1-r} = l$$

Con estas consideraciones, es $a_{n+1} = ra_n$, de forma tal que cuanto más cercano sea r a 1, con $0 < r < 1$, tanto menos abrupto será el cambio de grosor entre dos hojas sucesivas, siendo más potable la imagen del libro resultante.

3. Conclusiones

Con este simple análisis hemos querido reflexionar sobre las complejidades del uso del sentido común a la idea del infinito en literatura, en un caso concreto.

Con el modelo de libro propuesto, se muestra que algunas de las propiedades atribuidas por Borges a un libro infinito no son necesarias en general y que se puede imaginar un libro infinito matemáticamente consistente.

Bibliografía

[1] BARNATAN, M. R. (1995): *Borges, Biografía total*, Madrid: Temas de hoy. Biografías.

[2] BORGES, J. L. (1999): *Jorge Luis Borges. Un ensayo autobiográfico*, con prólogo y producción de González A. y Kodama M.,Barcelona : Galaxia Gutemberg/ Círculo de lectores/ Emecé.

[3] BORGES, J. L. (1989): *El libro de arena*, Buenos Aires: Emecé (1º ed. 1975), pp. 169-176.

[4] GRANERO, F. (1996): *Cálculo infinitesimal, una y varias variables*, Aravaca (Madrid): Mc Graw-Hill/ Interamericana de España S.A., pp. 15-26.

[5] NORIEGA, R. J. (1979): *Cálculo diferencial e integral* (cuatro módulos), Buenos Aires: Editorial Docencia S.A., Módulo 2º, pp. 75-77.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex (en este último caso deberá usarse estilo “article” y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos (normal). Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección en minúsculas negritas y numerados, sin punto después del número ni punto final, excepto el de introducción que irá sin numerar. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: “Problema número (Boletín número)”, tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de las copias en papel

Se enviarán vía postal por duplicado a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadam@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes: 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63 y 64.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

– la dirección a donde se han de enviar
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.