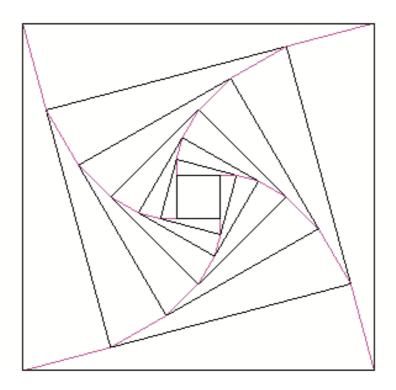
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 62 OCTUBRE DE 2002

ÍNDICE

	Págs.
XX Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas	5
Problemas propuestos en el XX Concurso	7
Recensiones en "Zentralblatt (ZDM)" y en "Mathematical Reviews"	10
Presentación del Prof. Quesada	12
Algunas observaciones sobre la enseñanza de polinomios en Secundaria	
usando calculadoras gráficas,	
por Antonio R Quesada	13
Los problemas de un daltónico,	
por Sergio Falcón y Luis González	28
Un método paramétrico para demostrar automáticamente y determinar	
lugares a partir de las construcciones geométricas,	
por E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano, Luis M. Laita	
y M. Villar Mena	34
El Álgebra [geométrica] de Euclides a Ommar Khayyam,	
por Francisco González Redondo	72
Un problema de Geometría resuelto con MATHEMATICA,	
por Nicolás Rosillo	88
Reseña de libros	92
Instrucciones para el envío de originales	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción	96

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 B° de La Fortuna (Madrid).

Teléf.: (91) 611 59 94 - Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra) C/ Rector Royo Villanova, s/n 28040 - Madrid Teléf. y fax: 91 394 62 48

e-mail: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO (Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ (Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretaria:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

MARTÍN GARBAYO MORENO

Adjunta a la presidencia (mantenimiento página web):

MARÍA JOSÉ MORENO SÁNCHEZ DE LA SERRANA

XX Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Cada año, desde 1983, nuestra Sociedad y el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, han celebrado el Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas que ya se ha hecho tradicional y en 2002 ha tenido lugar por vigésima vez.

En estos veinte años, hemos tenido la satisfacción de ver cómo el ámbito de este Concurso se ha ido extendiendo a otras comunidades, a veces alejadas de la de Madrid y, sobre todo, cómo muchos de los alumnos premiados han obtenido posteriormente notables éxitos en las Olimpiadas Matemáticas, tanto nacionales como internacionales.

El Concurso de este año, convocado en nuestro Boletín nº 60 (en el que aparecen las Bases), se celebró en la mañana del sábado 22 de Junio de 2002. Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en los de la E. U. de Biblioteconomía y Documentación, situada en el Edificio "Pablo Montesinos" de la calle de la Santísima Trinidad, 35, amablemente cedidos por su Dirección para ese acto.

La concurrencia, en un sábado de vacaciones, con un calor agobiante y coincidiendo con la retransmisión del último partido de la selección española en los Mundiales de Fútbol, fue algo escasa, de 59 alumnos que, según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles: Los del I cursaban 3º de ESO, los del II, 4º de ESO, y los del III,1º de Bachillerato (o 2º o 3º de FP2).

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 7 puntos. A continuación de esta crónica damos sus enunciados.

Recordaremos que los dos primeros clasificados de cada nivel están invitados a participar en la Olimpiada Rioplatense, que se celebrará en el próximo Diciembre en Argentina. Podrán asistir a ella, siempre que se consigan becas o ayudas para pagar los billetes del vuelo a Buenos Aires.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de enhorabuena a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a todos los que han contribuido al

éxito del Concuso. Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

NIVEL I

- 1. Da. Elisa LORENZO GARCÍA, del I.E.S. Fortuny de Madrid
- 2. D. José CARPIO PINEDO, del I.E.S. San Juan Bautista de Madrid
- 3. D. Ricardo MARTÍN BRUALLA, del Colegio Alemán de Madrid y D. Diego GONZÁLEZ ALONSO, del I.E.S. La Bureba de Briviesca (Burgos)
- 5. D. Amadeo JIMÉNEZ ALBA, del Colegio Santa María del Pilar de Madrid

NIVEL II

- 1. D. Mohamed BLANCA RUIZ, del I.E.S.Ausias March de Manises (Valencia)
- 2. D. Carlos IBÁÑEZ BAUTISTA, del Colegio Alemán de Madrid
- 3. D. Daniel FAJARDO LÓPEZ, del I.E.S. Zorrilla de Valladolid
- **4. D. Vicente GARCÍA SORIANO**, del I.E.S. Oleana de Requena (Valencia)
- 5. D. Luis SARABIA UTRILLA, del Colegio de San Viator de Madrid

NIVEL III

- 1. D. Javier GÓMEZ SERRANO, del Colegio Alemán de Madrid
- 2. D. Víctor GONZÁLEZ ALONSO, del I.E.S. La Bureba. Briviesca (Burgos) y D. Luis HERNÁNDEZ CORBATO, del I.E.S. Fortuny de Madrid.
- **4. D. Javier ALONSO MORA**, del I.E.S nº 1 de Requena (Valencia)
- 5. D. Pablo MARTÍN RAMOS, del I.E.S. Zorrilla de Valladolid.

Nos complace señalar que el alumno **Javier GÓMEZ SERRANO**, que ha recibido el primer premio del Nivel III, también recibió el primer premio de nivel II el año pasado y el segundo de nivel I en 2000. Además, participó en la XXXVIII Olimpiada Matemática Española, en Enero de este año y se clasificó con el puesto 2º B, obteniendo **medalla de plata** en la fase final. El alumno **Luis HERNÁN-DEZ CORBATO**, 3º del Nivel III, obtuvo el primer premio en el Nivel I en nuestro concurso de 2000, se clasificó en el puesto 1ºB en la XXXVIII OME, obteniendo **medalla de oro** en su fase final, siendo alumno de primero de bachillerato y en la Olimpiada Matemática Internacional celebrada en Washington fue el único español que obtuvo medalla. También **Mohamed BLANCA RUIZ** quedó en tercer lugar del nivel I y **Luis SARABIA UTRILLA**, en primer lugar del nivel I el año pasado.

Nuestra enhorabuena a todos los premiados, al resto de los participantes y a los padres y profesores que los han preparado y animado a participar.

Problemas propuestos en el XX Concurso

PRIMER NIVEL

PROBLEMA 1°:

Dos velas de igual longitud y distinto grosor tardan 4 horas una y 3 horas la otra, en consumirse totalmente. Si las encendemos al mismo tiempo y el consumo de cada vela es uniforme, ¿al cabo de cuánto tiempo la longitud de una vela será el doble que el de la otra?

PROBLEMA 2°:

Las longitudes de los lados de un triángulo son proporcionales a los números 3, 4 y 5. Si la longitud de una de las tres alturas del triángulo es 60, ¿cuál es el mayor valor posible para el área de dicho triángulo?

PROBLEMA 3°:

Ordenados los 225 primeros números enteros positivos como se indica en el diagrama, escogemos 15 de manera que haya sólo uno de cada fila y uno de cada columna. ¿Cuáles son todas las posibles sumas de todas las elecciones posibles?

1	2	3	 	15
16	17	18	 	30
31	32	33	 	45
211	212	213	 	225

PROBLEMA 4°:

En la tienda de la esquina venden chocolatinas de nueces y con leche. Una chocolatina de nueces es 6 céntimos más cara que una con leche. Celia tiene 8 euros y 22 céntimos, con los que compra dos chocolatinas para cada uno de sus nueve amigos, sin que le sobre ni falte dinero, y le regala chocolatinas distintas al mayor número posible de ellos. ¿Qué precio, en céntimos, tiene una chocolatina con leche, sabiendo que no hay fracciones de céntimo?

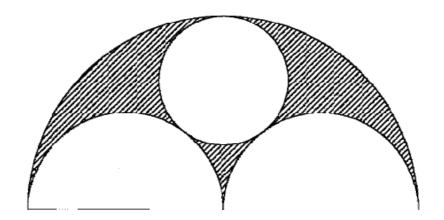
SEGUNDO NIVEL

PROBLEMA 1°:

Encuentra todos los términos de la progresión aritmética 1, 7, 13, 19, ..., que sean cuadrados perfectos.

PROBLEMA 2°:

En un semicírculo colocamos dos semicírculos iguales y un círculo pequeño como se indica en la figura, es decir, el círculo pequeño es tangente al semicírculo grande y a los dos semicírculos, que a su vez son tangentes entre sí y tangentes al semicírculo grande. Si el área sombreada es 45π , calcula el radio del círculo pequeño.



PROBLEMA 3°:

En una bolsa hay 100 bolas numeradas 1, 2, 3, ... 100. Elegimos al azar una, anotamos su número, la volvemos a meter y elegimos otra anotando también su número. Si el primer número anotado es a y el segundo es b, formaremos el número $T = 3^a + 7^b$.

¿Cuál es la probabilidad de que T acabe en 8?

PROBLEMA 4°:

En un triángulo ABC, se sabe que AB = AC y que $ang(BAC) = 30^{\circ}$. Se elige un punto P en la mediana AD y u punto Q en el lado AB (Q distinto de B), de modo que PC = PQ. Determinar el ángulo PQC.

TERCER NIVEL

PROBLEMA 1°

En un triángulo isósceles ABC con ángulo desigual A, sabemos que

$$\cos A = 1/3$$
.

Si P y Q son los puntos que dividen el lado BC en tres partes iguales, calcula el coseno del ángulo PAQ.

PROBLEMA 2°:

Sea x un número positivo. Representaremos por [x] la parte entera de x, y por $\langle x \rangle$ la parte decimal de x.

Así, por ejemplo, [2,87] = 2 y < 1,31 > = 0,31.

Encuentra el único número positivo x para el que los números $\langle x \rangle$, [x] y x están en progresión geométrica.

PROBLEMA 3°:

Sea AVB un triángulo isósceles, siendo V el vértice distinto de los otros dos. Sobre el lado VA, en el sentido de V a A, se toman, en ese orden, puntos P, Q y M. Ocurre que las longitudes señaladas son

$$VP = PC = CO = OD = DM = MA = AB$$
.

Calcular la medida de los ángulos del triángulo.

PROBLEMA 4°:

Se da un número real positivo, a. Estudiar si se puede asegurar que alguno de los números a, 1-2a, a(1-2a) es menor que 0,11 ¿Y que 0,12? ¿Y que 0,13?

Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) y Mathematical Reviews incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 34 (2) DE 2002

- #1514 (sección K30). Drawing Network Graphs and Digraphs with DERIVE 5, por *Peter Schofield*, Bol. Soc. Puig Adam 58 (Jun 2001), págs. 24-40.
- #1344 (sección G10). Geometría: Espacio, Forma, Posición, por *J. M. Aroca Hernández-Ros*. Bol. Soc. Puig Adam 58 (Jun 2001), págs. 48-70.
- #1587 (sección M60). Sobre la Ley de Hardy-Weinberg, por *Alberto Pérez de Vargas Luque*. Bol. Soc. Puig Adam 58 (Jun 2001), págs. 71-77.
- #0836 (sección A20). D. Pedro Abellanas y la falsa moneda, por *Tomás Recio y Luis Miguel Pardo*. Bol. Soc. Puig Adam 58 (Jun 2001), págs. 78-93.
- #1100 (sección D30). Integración de las Nuevas Tecnologías en la clase de Matemáticas. Algunas notas sobre modas, uso y mal uso, por *Eugenio Roanes Lozano*. Bol. Soc. Puig Adam 59 (Octubre 2001), págs. 17-31.
- #1433 (sección H60). Una deducción de la regla de Cramer de interés didáctico, por *Santiago Calviño Castelo*. Bol. Soc. Puig Adam 59 (Oct 2001), págs. 32-34.
- #1488 (sección I75). Reflexiones sobre la motivación en la clase de Matemáticas, por *Enrique Rubiales Camino*. Bol. Soc. Puig Adam 59 (Oct 2001), págs. 35-47.
- #1403 (sección G75). Reflexiones sobre geometría métrica en el espacio. Un enfoque distinto para tres problemas clásicos, por *Juan Carlos Cortés López*. Bol. Soc. Puig Adam 59 (Oct 2001), págs. 48-61.

- #1391 (sección G50). Área, proporcionalidad y semejanza de triángulos, por *José Alberto García Suárez*. Bol. Soc. Puig Adam 59 (Oct 2001), págs. 62-67.
- #1489 (sección I75). Sobre el wronskiano e independencia lineal. Un ejemplo de abstracción en álgebra lineal, por *Julio Benítez López*. Bol. Soc. Puig Adam 59 (Oct 2001), págs. 68-73.
- #1399 (sección G74). Realización con calculadora simbólica de los cálculos asociados a una demostración de geometría analítica tradicional, por *Nicolás Rosillo Fernández*. Bol. Soc. Puig Adam 59 (Oct 2001), págs. 74-82.
- #0850 (sección A30). Génesis y primera formulación del Teorema de ∏, por *Francisco González Redondo*. Bol. Soc. Puig Adam 59 (Oct 2001), págs. 83–93.

MENCIONES EN MATHEMATICAL REVIEWS. AÑO 2002

Indice de autores cuyos artículos han sido citados hasta ahora

Recio, Tomás; Pardo, Luis Miguel (Bol. 58)

Aroca Hernández-Ros, J.M. (Bol. 58)

González Redondo, Francisco A. (Bol. 59)

Benítez López, Julio (Bol. 59)

Calviño Castelo, Santiago (Bol. 59)

González Redondo, Francisco A. (Bol. 60)

Cortés López, Juan C.; Calbo Sanjuán, Gema; López Pelayo, Fernando (Bol. 60)

Tarrés Freixenet, Juan (Bol. 60)

Cabezas Corchero, J.; Moreno Soto, F. (Bol. 60)

Falcón Santana, Sergio (Bol. 60)

Tarrés Freixenet, Juan (Bol. 61)

González Redondo, Francisco A. (Bol. 61)

Martín Ruiz, Sebastián; Pérez, Minh (Bol. 61)

Etayo Miqueo, Jose Javier (Bol. 61)

Presentación del Prof. Quesada

Hace ya unos años que conocí a Antonio R. Quesada en una magnífica conferencia que impartió en la Universidad de Alcalá. Tras ese primer encuentro hemos coincidido en diversos eventos científicos y todas sus comunicaciones o charlas han sido siempre tremendamente amenas, interesantes y sugerentes.

De origen español, trabajó como Profesor de Instituto en España, y, tras su matrimonio con su encantadora esposa "Antoñita", de origen puertorriqueño, se traslada a Estados Unidos.

En la actualidad es catedrático de Algebra (Depto. de Matemática Teórica y Aplicada) en la Universidad de Akron (Ohio). No obstante, hace años que su campo de investigación principal es la aplicación de las Nuevas Tecnologías en Educación Matemática.

El pasado mes de marzo impartió una conferencia titulada: "La Tecnología en la Reforma de la Enseñanza de las Matemáticas en EEUU: Nuevos Enfoques y Nuevos Resultados", en la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid, en un acto organizado por la Sección Departamental de Algebra y la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas

Los miembros de la Soc. Puig Adam que asistieron a la conferencia manifestaron su interés en publicar algunas de las ideas y ejemplos que en aquella ocasión se presentaron. Este artículo responde a esa invitación.

Eugenio Roanes Lozano

Algunas observaciones sobre la enseñanza de polinomios en Secundaria usando calculadoras gráficas

Antonio R. Quesada

Department of Theoretical & Applied Mathematics The University of Akron, Akron, Ohio 44325-4402 Aquesada@uakron.edu

Abstract

The integration of technology in the teaching of mathematics provides a variety of representations and data types that facilitates both the use of nontraditional methods of problem solving, and the access at the lower levels, of models traditionally reserved for college. In this paper, examples are given to illustrate some of the changes in content and methods that these new approaches make possible in the teaching of real polynomials on one variable over the real numbers.

Introducción

El desarrollo tecnológico de los últimos años ha puesto a la disposición de educadores a todos los niveles y en todas las disciplinas, herramientas que están promoviendo una revolución sin precedentes en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Actualmente, sería difícil encontrar un área del conocimiento humano que no esté beneficiándose del auge del Internet y del extraordinario desarrollo de programas especializados que responden en parte a los avances en velocidad y memoria de los ordenadores personales. En las universidades de EEUU, el impacto del software especializado en matemáticas tal como Maple, Matemática, Matlab, Derive, etc, ha aumentado considerablemente en los últimos años, sobre todo en la formación de profesionales de las ciencias e ingenierías que usan las matemáticas en su quehacer diario. En el ámbito escolar, si bien muchos colegios están equipados

con un laboratorio de ordenadores, la realidad es que la demanda en el uso de los mismos por parte de las distintas disciplinas académicas ha aumentado paralelamente al desarrollo del software especializado, por lo que el equipo existente es claramente insuficiente. Además, aún cuando la formación de nuevos profesores va incorporando poco a poco las recomendaciones de las asociaciones matemáticas profesionales (NCTM, 1989, 2000; MAA, 1990; AMATYC, 1995), todavía falta mucho para que los profesores se eduquen de la forma en que se espera que ellos eduquen.

Las herramientas tecnológicas que, en los últimos diez años, parecen estar teniendo mayor impacto en la enseñanza de las matemáticas en el ámbito escolar y en cursos básicos de universidad, son las calculadoras modernas. Desde su aparición en 1986, las capacidades gráficas y numéricas unidas a los distintos tipos de estructuras de datos, tales como listas, matrices, tablas etc., y a las funciones y operadores especializados que la primera generación de calculadoras gráficas provee, permitieron plantear cambios fundamentales en el currículo y la didáctica de las matemáticas. La segunda generación de calculadoras gráficas que aparece en 1996, añade a las capacidades existentes un programa completo de cálculo simbólico además de geometría dinámica. No es de extrañar que en EEUU, tanto los nuevos estándares curriculares para la enseñanza de las matemáticas preuniversitarias (NCTM, 1989, 2000) como los estándares para los cursos introductorios universitarios (AMATYC, 1995), tomen en consideración los resultados de la investigación en educación matemática y las necesidades de la industria y el comercio, al endosar el uso de las nuevas tecnologías y proponer cambios substanciales en la enseñanza de las matemáticas.

Pero ¿qué implicaciones tiene la integración de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas? Sin duda este proceso tiene repercusiones en el contenido curricular, en la didáctica, y en los procesos de evaluación. Cuando la tecnología está disponible, pierden validez algunas de las premisas que sirvieron de base para designar los distintos conceptos que componen el currículo tradicional de matemáticas, así como el orden y el alcance con que estos se estudian. Por otro lado, tanto el número de enfoques como los algoritmos disponibles en secundaria aumentan (Quesada, 99), facilitando que el estudiante pueda resolver problemas de formas muy distintas. El estudio exhaustivo de muchos procesos algorítmicos, cuya ejecución rápida y precisa era indispensable hace 20 años a la hora de resolver problemas, está pasando paulatinamente a ocupar un papel secundario en el currículo, ya que las máquinas pueden llevarlos a cabo con mayor rapidez y precisión que los humanos. Si bien la investigación en educación matemática debe

dilucidar qué procesos mantener para que el estudiante pueda ejecutar con papel y lápiz y cuál debe ser el nivel de dificultad con que los mismos se practiquen, la decisión debe basarse en la medida en que la práctica de estos procesos facilite la comprensión de los conceptos envueltos o ayude a entender las limitaciones y posibles errores de su implementación por medios tecnológicos. La posibilidad de poder, por ejemplo, introducir el concepto de función usando las representaciones numéricas y gráficas además de la algebraica, o de llevar a cabo cálculos complicados con sólo pulsar una tecla, o de poder usar la calculadora dando los pasos algebraicos tradicionales o saltar sobre los mismos usando el operador apropiado (Kutzler, 1999), tiene profundas implicaciones didácticas. Huelga decir, que tanto los instrumentos de evaluación como los tipos de preguntas que se usan en los mismos debe tomar en consideración la tecnología disponible.

En los últimos años, un creciente número de estudios de investigación (Dunham & Dick, 94; Quesada, 94) han empezado a establecer contribuciones positivas y a definir una nueva problemática (Lagrange, 1999) que pueden derivarse del uso, apropiado o no, de las calculadoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una buena recopilación de artículos de investigación, capítulos de libros, y tesis doctorales sobre el impacto de las calculadoras gráficas en: http://education.ti.com/us/t3/resources/partb.html, y sobre el uso de CAS en: http://education.ti.com/us/t3/resources/partc.html.

En el currículo tradicional, muchas de las propiedades de las funciones polinómicas, no se consideran sino hasta llegar a cálculo. Así por ejemplo los textos tradicionales de secundaria, normalmente sólo incluyen la factorización sobre el cuerpo, Q, de los racionales y suelen ignorar el estudio de propiedades tales como el comportamiento global, el cálculo de los extremos relativos con la aplicación inmediata a la optimización, y la comparación entre el crecimiento de distintas funciones polinómicas, sin olvidarnos del uso de polinomios como modelos de ajuste. El uso de una calculadora gráfica facilita la inclusión de todos estos conceptos. Por tanto no es de extrañar que en EEUU, los nuevos currículos de matemáticas para secundaria que surgen en la década pasada (Core-Plus Mathematics Project, 1996, 1998; The University of Chicago School Mathematics Project, 1992; The North Carolina School of Science and Mathematics, 1992) así como nuevos libros de texto en el ámbito de preuniversitario (Brown, 1992; Demana & Waits, 1997) y universitario (Hughes-Hallet, Gleason et al., 1992; The North Carolina School of Science and Mathematics, 1996; Smith & Moore, 1996; Finney et al., 2000), incluyen estos y muchos otros conceptos que la tecnología hace accesible.

En este artículo, se presentan dos ejemplos sobre como la integración de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas empieza a impac-

tar el estudio de polinomios en secundaria. El primer ejemplo persigue dar una idea de las posibles repercusiones que la tecnología puede tener en el contenido del currículo. En particular, este ejemplo ilustra como la variedad de representaciones y tipos de datos que se encuentran en las calculadoras gráficas, facilitan el desarrollo de métodos no tradicionales que permiten extender la factorización de polinomios en un curso de precálculo. El segundo ejemplo trata de ilustrar como la tecnología facilita el uso del método Socrático de enseñar basándose en preguntas.

Los ejemplos y figuras que se incluyen a continuación se han obtenido usando una calculadora Texas Instruments TI-83. Se espera que el número de figuras provisto, a veces excesivo, facilite la repetición de los ejemplos al lector poco familiarizado con el uso de las calculadoras. Conviene aclarar también que en este artículo, cualquier referencia que se haga al enfoque tradicional, se refiere a la enseñanza sin tecnología.

1 Sobre la factorización de polinomios

El ejemplo que sigue ilustra como extender la factorización de polinomios con coeficientes racionales sobre el cuerpo de los números reales. De hecho, usando las capacidades numéricas y gráficas de las calculadoras, se verá que no sólo se pueden obtener las raíces irracionales con un error mínimo, sino que en el caso particular de que el polinomio tenga raíces irracionales y sólo dos raíces imaginarias, es factible determinar el factor cuadrático e incluso una representación gráfica de las raíces imaginarias en el plano real.

<u>Ejemplo 1</u>. Factorizar el polinomio $p(x) = x^5 - 3x^4 - 23x^3 + 20x^2 + 75x - 90$ sobre los cuerpos Q, R, y C.

Solución: En el enfoque tradicional, se comienza por obtener el conjunto de los posibles ceros racionales

$$S_1 = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 9, \pm 10, \pm 15, \pm 18, \pm 30, \pm 45, \pm 90\}$$
.

Seguidamente se usa el teorema del resto para determinar los ceros racionales, es decir, se evalúa p(x) para cada elemento de S_1 vía división sintética. Cada vez que se encuentra un cero, $r \in S_1$, se factoriza el polinomio p(x) = (x-r)q(x) y el proceso continua usando el último cociente obtenido, q(x), hasta agotar los elementos de S_1 , o hasta conseguir, en algunos casos, un polinomio cociente de segundo grado al que se aplica la formula cuadrática. Algunos autores incluyen

otras ayudas basadas en el análisis de los signos de los coeficientes del polinomio. Así, por ejemplo, si todos los coeficientes son positivos, se descartan todos los elementos positivos de S_1 . Si los coeficientes no son todos del mismo signo, se puede usar la regla de Descartes, que utiliza los cambios de signos de los coeficientes del polinomio para estimar el número de posibles raíces positivas y negativas, y reducir en cierta medida los cálculos necesarios. El proceso en general es tedioso, susceptible de errores aritméticos, y claramente, la factorización completa depende de si el polinomio de grado n dado tiene al menos n-2 raíces racionales. Desgraciadamente, por razones pedagógicas, este suele ser el caso en la mayor parte de los ejemplos que se encuentran en los libros de texto tradicionales, lo que crea en muchos estudiantes la impresión errónea de que la mayoría de los polinomios con coeficientes racionales factorizan sobre Q.

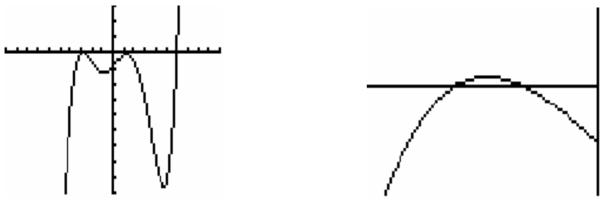


Figura 2.a Figura 2.c

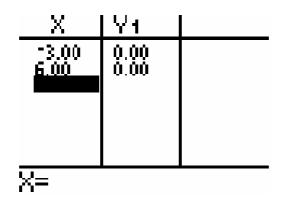
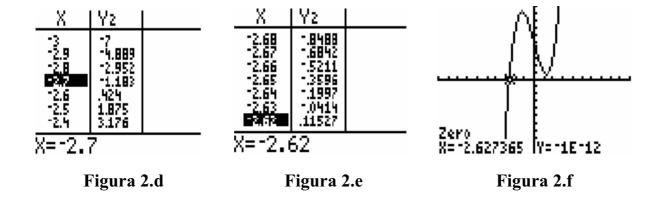


Figura 2.b

El disponer de una calculadora gráfica permite que, por simple observación de la gráfica del polinomio, se pueda inmediatamente descartar muchos de los elementos de S_1 , obteniéndose un conjunto inicial de posibles ceros racionales mucho más reducido. En este ejemplo, la gráfica que contiene todos los puntos relevantes, que algunos autores denominan la gráfica "completa" de p(x), se ha obtenido con la ventana $[-7,7]\times[-860,100]$ que muestra la figura 2.a. Se ve en la misma que el conjunto de candidatos se ha reducido a $S_2 = \{-3,6\}$. La tabla de la figura 2.b confirma que -3 y 6 son raíces racionales.

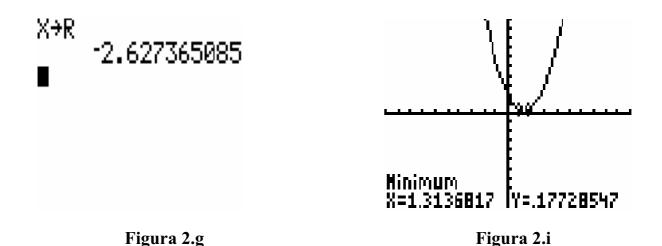
En el currículo tradicional de precálculo los estudiantes terminarían el problema escribiendo la factorización del polinomio sobre el cuerpo Q de los números racionales: $p(x) = (x+3)(x-6)(x^3-5x+5)$. Pero ¿son estas las únicas raíces reales del polinomio? Claramente, el teorema fundamental del álgebra nos dice que debe haber necesariamente una raíz irracional, ya que no está en S_1 . La raíz buscada está muy cerca de -3, por lo que no se aprecia a simple vista en la gráfica de p(x), sin embargo al acercarse usando Zoombox se obtiene la gráfica del polinomio en la ventana $[-3.5, -2.2] \times [-67, 48]$ (figura 2.c), que confirma nuestra hipótesis. Alternativamente, se podría haber obtenido la gráfica del factor cúbico. El disponer de tecnología permite extender el problema a distintos niveles. Inicialmente, para el polinomio $q(x) = x^3 - 5x + 5$, se puede determinar la raíz irracional ya sea numéricamente, aplicando repetidamente el teorema del valor intermedio vía la tabla (figuras 2.d y 2.e), o gráficamente (figura 2.f). Ahora bien, ¿es posible calcular el factor cuadrático y las raíces imaginarias de p(x)?



A continuación se presentan dos métodos distintos para contestar esta pregunta.

Se comienza, como indica la figura 2.g, almacenando el cero irracional obtenido en *R*. Algunos estudiantes copian el resultado que leen en la pantalla - 2.627365085, en lugar de usar el resultado contenido en *x* inmediatamente después de obtenerse el cero, con lo que pierden parte de la precisión que la maquina provee.

Seguidamente se obtiene el factor cuadrático dividiendo el último cociente obtenido $x^3 - 5x + 5$ por (x - R) (ver figura 2.h). La ausencia de puntos de corte con el eje de abcisas en la gráfica de y_3 (figura 2.i) confirma que los últimos dos ceros de p(x) son imaginarios. El primer método para calcular una expresión algebraica de este factor cuadrático consiste en obtener el vértice (H, K) de la gráfica del mismo y almacenar las coordenadas (figuras 2.i y 2.j).



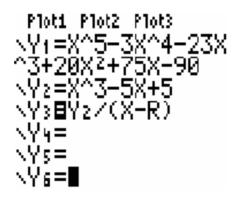
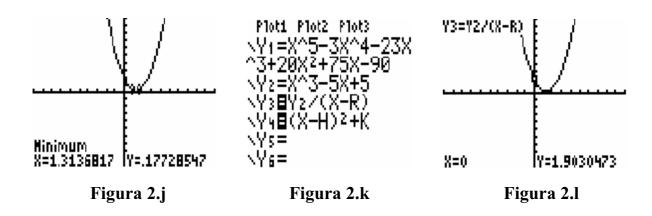


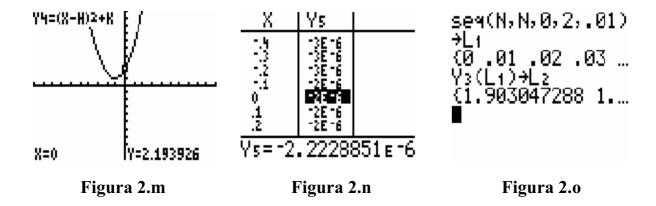
Figura 2.h

Como el coeficiente principal de p(x) es 1, el factor cuadrático también es mónico, y podemos expresarlo como $(x-h)^2 + k$. Las figuras 2.1 y 2.m comparan gráficamente de la expresión obtenida por este método con el anterior.

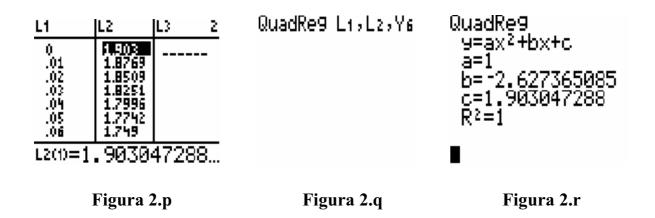
Nótese, que aún cuando no hay diferencia perceptible entre las gráficas, cuando el cursor se mueve verticalmente, de una a la otra, se aprecia que para cualquier valor arbitrario, x = 0, se obtienen los valores y_3 (0) = 1.9030473 y y_4 (0) = 1.9030451, que difieren en 2.2×10^{-6} . La figura 2.n muestra un error similar en la comparación numérica obtenida definiendo la función y_5 como la diferencia entre y_4 y y_3 , y usando la tabla.



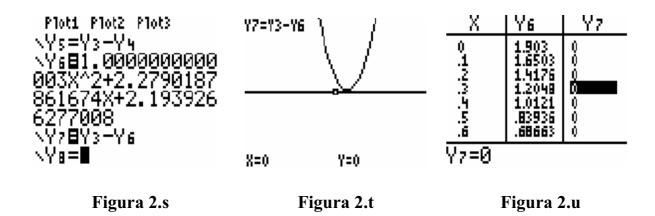
El segundo método permite obtener directamente la representación algebraica del factor cuadrático buscado. La idea es generar un conjunto de puntos de la función usando su expresión racional y aplicar un ajuste de datos al mismo. Se comienza pues generando una lista de valores de vía $L_1 = seq(N, N, -2, -1, 0.01)$.



Seguidamente, se evalúa la función y_3 para los valores generados, obteniéndose la lista de ordenadas correspondientes $L_2 = y_3(L_1)$ (ver figuras 2.0 y 2.p). Ambas listas definen el conjunto de puntos con coordenadas $L_1 \times L_2$ que ajustamos por medio de una regresión cuadrática (figura 2.q) cuya ecuación se ha almacenado en y_6 (figura 2.s).



Como puede verse en la figura 2.r, el coeficiente de autodeterminación obtenido $R^2=1$, indica un ajuste perfecto. Tanto la gráfica de la función diferencia $y_7=y_3-y_6$ como la tabla (figuras 2.t y 2.u) sugieren que $y_7=0$, confirmando la excelente precisión de la expresión algebraica obtenida para el factor cuadrático.



Es conveniente observar que algunos problemas tradicionales tales como el obtener la ecuación de la recta que pasa por dos puntos, o la ecuación de la parábola dados tres puntos de la misma, pueden resolverse fácilmente usando la regresión apropiada. Por tanto, si los alumnos han estudiado el ajuste de datos, y se desea que resuelvan analíticamente uno de los problemas mencionados, es conveniente especificar que no se use este método.

Por último se desea contestar la siguiente pregunta: ¿Es posible visualizar las raíces imaginarias del factor cuadrático obtenido en el plano real? La solución que sigue apareció en 1997 en el *College Mathematics Journal* atribuida al estudiante de secundaria Shaun Pieper de St. Paul's School en Concord, N.H., EEUU. Shaun observó que si las raíces de $y = a(x-h)^2 + k$ no son reales el reflejo de su gráfica sobre la recta y = k corresponde a la ecuación $y = -a(x-h)^2 + k$ cuyas intersecciones con el eje de las x son los puntos de coordenadas $P(h + \sqrt{k/h}, 0)$ y $Q(h - \sqrt{k/h}, 0)$ (figura 2.v).

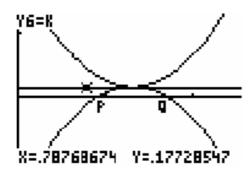
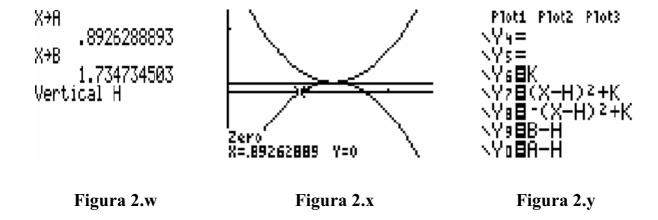


Figura 2.v

Aplicando un giro de 90° al segmento \overline{PQ} sobre el punto (h,0), se obtiene el segmento vertical \overline{ST} cuyos extremos son $(h,\pm\sqrt{k/a})$, es decir, las coordenadas son la parte real e imaginaria de las soluciones de la ecuación. La figura 2.y contiene las cuatro funciones necesarias en este proceso. Primero se calculan las raíces de y_8 (figuras 2.w y 2.x) que se almacenan en A y B (figuras 2.w y 2.x). Finalmente, \underline{la} intersección de la recta x = H con las rectas y_9 y y_0 produce el segmento \overline{ST} (figura 2.z) buscado.



Debe subrayarse que el número de descubrimientos matemáticos llevados a cabo por estudiantes de secundaria, parece estar creciendo en los últimos años gracias al uso de la tecnología y del software especializado como el de geometría dinámica (Quesada, 2001)

2 Sobre el uso del método Socrático que la tecnología propicia

Además de los cambios de contenido, la tecnología, al minimizar el tiempo necesario para hacer gráficas o para llevar a cabo cálculos engorrosos, facilita el uso de problemas en los que los estudiantes, guiados por una serie de preguntas, descubren propiedades o resultados matemáticos de interés. A continuación se dan varios ejemplos que, si bien no han sido probados con estudiantes de secundaria, sugieren como guiar al estudiante para descubrir algunas propiedades básicas de las funciones polinómicas.

En el primer ejemplo se intenta descubrir como cambia la gráfica de una función cuando se multiplica por -1.

Ejemplo 2. ¿Qué relación existe entre las gráficas del polinomio y = f(x) y la de y = -f(x)?

Observa por ejemplo las gráficas de $y = x^2 - 3x$ e $y = -(x^2 - 3x)$. ¿Altera el signo negativo los ceros de la primera función? ¿Y la forma de la gráfica? Describe como difieren las gráficas de las dos funciones.

Considera otros ejemplos de funciones polinómicas, y comprueba si la observación anterior se mantiene. ¿Puedes explicar qué ocurre?

Generaliza la propiedad que has observado. ¿Crees que esta propiedad se mantiene para otras funciones? Explica tu respuesta.

En el próximo ejemplo se pretende que el estudiante descubra la relación entre la posible forma de la gráfica y el número de extremos relativos de un polinomio y su grado.

Ejemplo 3

- A) Observa la forma y el número de extremos relativos de las gráficas de las funciones polinómicas $p(x) = x^3$ y $q(x) = x^3 3x 5$, ¿qué diferencia encuentras? Considera ahora varios ejemplos de funciones cúbicas y trata de ver si la forma y el número de extremos relativos que tiene la gráfica de cada una de ellas se parece ya sea a la de p(x) o a la de q(x). Generaliza: ¿Cuántos extremos relativos puede tener un polinomio de tercer grado? ¿Qué puedes concluir con respecto a las posibles formas de la gráfica de un polinomio de tercer grado?
- B) Considera ahora 8 ó 9 ejemplos distintos de polinomios de quinto grado y observa su forma y el número de extremos relativos que sus gráficas tienen. ¿Encuentras algún patrón que te permita clasificar estas gráficas?Generaliza: ¿Cuántos extremos relativos puede tener un polinomio de quinto grado? ¿Cuántas formas básicas tienen sus gráficas?
- C) ¿Observas un patrón en tus respuestas anteriores?

 De ser así, trata de predecir como puede ser la forma y el posible número de extremos relativos de un polinomio de séptimo grado. Haz la gráfica de varios ejemplos de distintos polinomios de grado 7, y comprueba si sus gráficas se ajustan a tu predicción. De no ser así repite el proceso seguido en B) y C) con polinomios de grado 7. Rellena la tabla que sigue con las conclusiones que has obtenido.

Grado	Número de Posibles extremos relativos:	Bosqueja las posibles formas de la gráfica de un polinomio del grado dado:
3		
5		
7		

- D) Generaliza: Para polinomios de grado impar *n* ¿qué relación general sugiere la tabla entre el grado del polinomio y el número de posibles extremos relativos? ¿Cuáles son las posibles formas de su gráfica? Comprueba que tus conclusiones son válidas adivinando las respuestas para un polinomio de grado 9.
- E) Repite las preguntas anteriores para polinomios de grado par. Esto es, considera las posibles gráficas de polinomios de grado n = 2, 4, 6... y, usando una tabla similar a la anterior, contesta las siguientes preguntas ¿Cuál es la forma general de la gráfica de un polinomio de grado par n? ¿Cuántos extremos relativos puede tener? Generaliza tu respuestas: ¿Cuántos extremos relativos puede tener un polinomio de grado n?

Conclusiones

La factorización completa de un polinomio de coeficientes racionales sobre R, el uso de métodos numéricos y gráficos para obtener raíces irracionales y extremos relativos de una función polinómica, el uso de la regresión no lineal para obtener una expresión algebraica que ajuste un conjunto de puntos obtenidos usando listas, y la visualización de soluciones imaginarias, que se han usado en este artículo, constituyen una pequeña muestra de muchos de los conceptos y técnicas nuevas que la tecnología facilita en el ámbito de secundaria. Los ejemplos de problemas que guían al estudiante a partir de preguntas, aún cuando no se usan con la frecuencia que se deberían usar, han existido siempre. Sin embargo, las capacidades adicionales que la tecnología provee, extienden considerablemente el alcance de los teoremas que los estudiantes pueden "descubrir." En una época en que el conocimiento científico crece exponencialmente, no es fácil pensar en un enfoque pedagógico mejor que el de capacitar al estudiante para hacer las preguntas apropiadas y contestarlas por sí mismo.

Referencias

- [1] American Mathematical Association of Two-Year Colleges (1995). *Standards For Introductory College Mathematics Before Calculus*. Memphis, TN: AMATYC.
- [2] Brown, R., (1992). Advanced Mathematics. Boston, MA: Houghton Mifflin.
- [3] Core-Plus Mathematics Project (1996). Dedham, MA: Janson Publications, Inc.

- [4] Core-Plus Mathematics Project (1998). *Contemporary Mathematics in Context a Unifying Approach: Course I and Course II*. Chicago, Illinois: Everyday Learning Publications.
- [5] DEMANA F.,, WAITS, B., CLEMENS, S., & FOLEY, G. (1997). Precalculus, Functions and Graphs, 3rd edition. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.
- [6] DUNHAM, P. H., & DICK, T. P. (1994). Research on graphing calculators. Mathematics Teacher, 87, 440-445. Reston, Virginia: NCTM.
- [7] FINNEY, R., DEMANA, F., WAITS, B., & KENNEDY, D. (2000). Cálculo de Una Variable, 2ª edición. Pearson Educación, México.
- [8] HUGHES-HALLET D., Gleason A., et al. (1992). *Calculus*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc.
- [9] KUTZLER, B., (1999). *The algebraic calculator as a pedagogical tool for teaching mathematics*. http://www.kutzler.com/bk/a-pt/ped-tool.html
- [10] Lagrange Jean-baptiste, (1999). Techniques and concepts in pre-calculus using CAS: a two-year classroom experiment with the TI-92. *The Intern. Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, Vol. 6, No. 2, pp. 143-165, Plymouth, England, 1999
- [11] National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.
- [12] QUESADA, A. R., & MAXWELL, M. E. (1994). The effect of using graphing calculators to enhance college students' performance in precalculus. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 205-215.
- [13] QUESADA A. R., (1999). "Should Iteration and Recursion be Part of the Secondary Student's Mathematics Toolbox?" *The Intern. Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, Vol. 6, No. 2, pp. 103-116, Plymouth, England.
- [14] QUESADA, A. R (2001). New Geometrical Findings by Secondary Students." *Proc. of the Thirteenth Ann. Int. Conf. on Tech. in Colleg. Math.*, pp. 312-316, Addison-Wesley, Reading, Ma.
- [15] Resultados de estudios de investigación sobre el uso de calculadoras gráficas con y sin cálculo simbólico: http://education.ti.com/us/t3/resources/partb.html
- [16] Resultados de estudios de investigación sobre el uso de cálculo simbólico por medio de crdenadores: http://education.ti.com/us/t3/resources/partc.html

- [17] SMITH D. & MOORE L., (1996). *Calculus, Modeling and Application*. Lexington, MA: D. C. Heath and Company.
- [18] The North Carolina School of Science and Mathematics. (1996). *Contemporary Calculus Through Applications*. Dedham, MA: Janson Publications, Inc.
- [19] The North Carolina School of Science and Mathematics (1992). *Contemporary Pre-* calculus Through Applications. Deham, Massachussetts: Janson Publications, Inc.
- [20] The University of Chicago School Mathematics Project. (1992). *Precalculus and Discrete Mathematics*. Glenview, Illinois: Scott, Foresman.

Los problemas de un daltónico

Sergio Falcón y Luis González

Departamento de Matemáticas, Universidad de Las Palmas G.C. sfalcon@dma.ulpgc.es

Resumen

Starting from the application of Set Theory, we try to help a daltonic boy facing a problem: if a mechanism has two red lights and one green light, and this last one is on if and only if one red is on, can the daltonic boy decide whether the mechanism works correctly or not? And what happens if the mechanism has another yellow light between them?

1 Introducción

1.1 El Daltonismo en relación con la Teoría de Conjuntos

Al defecto parcial o total de visión de los colores se le conoce con el nombre de daltonismo en nombre del químico inglés John Dalton (1766-1844), investigador que padeció y estudió esta enfermedad.

La acromatopsia o daltonismo es una deficiencia de la visión de color que puede variar desde una dificultad leve, que no distingue entre diversos tonos del mismo color, a la inhabilidad de distinguir cualquier color, aunque el más extendido consiste en la confusión de los colores rojo y verde o rosa y azul.

El porcentaje de personas daltónicas es de, aproximadamente, un 8% en los hombres y menos de un 1% en las mujeres. Sus causas y patología son desconocidas y es un defecto incurable.

Para algunos profesionales, el daltonismo puede dar origen a accidentes por la falta de percepción de ciertas señales luminosas como pueden ser las de los semáforos.

Generalmente las mujeres transmiten la enfermedad pero no la padecen. Como consecuencia, si un hombre es daltónico, sus hijos no lo serán, pero sí podrán serlo sus nietos varones nacidos de sus hijas. Actualmente, el método más usado para detectar el daltonismo es el test de Ishihara [3].

Por otra parte, es sabido que la parte del Álgebra conocida como Teoría de Conjuntos y en particular el Álgebra de Boole, es usada con éxito creciente en muchas ramas de la Tecnología moderna como por ejemplo, en el Diseño de Circuitos Eléctricos, en la toma de decisiones en la Robótica, etc.

Una de estas aplicaciones es la que presentamos en este trabajo, y que consiste en aplicar los conocimientos adquiridos en el estudio de las Operaciones con Conjuntos a la elección correcta de una decisión por parte de una persona que no distingue los colores (daltónico) cuando se enfrenta con un tipo especial de semáforos.

1.2 Algunos conceptos básicos de Teoría de Conjuntos

A continuación recordamos algunos conceptos y resultados básicos de la teoría de conjuntos que son de conocimiento general y que necesitaremos en nuestro desarrollo.

Sea E un conjunto cualquiera y A, B, C subconjuntos de E, o lo que es lo mismo, sean $A, B, C \in P(E)$. Son conocidos los conceptos de unión, $A \cup B$, e intersección, AB, de conjuntos por lo que no los repetiremos aquí [1, 2]. Y recordemos que sus propiedades más importantes son las que se indican a continuación, teniendo en cuenta que \overline{X} indica el conjunto complementario del conjunto X con respecto a E:

- 1. Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$; AB = BA
- 2. Asociativa: $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; A(BC) = (AB)C
- 3. Elemento neutro: $A \cup \emptyset = A$; AE = A
- 4. Distributiva: $A(B \cup C) = AB \cup AC$; $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$
- 5. Complementación: $A \cup \overline{A} = E$; $A\overline{A} = \emptyset$
- 6. Leyes de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{AB}$; $\overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}$

1.3 Diferencia simétrica de subconjuntos

Entre las distintas definiciones de diferencia simétrica de dos conjuntos, escogemos la que indicamos a continuación porque hace uso de los conceptos del párrafo anterior.

Definición 1 Se define la diferencia simétrica de los conjuntos A y B como el conjunto $A\Delta B = A\overline{B} \cup \overline{A}B$

Ejemplo 1 Sea $E = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ un conjunto dado y sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ dos subconjuntos de E. Hallar su diferencia simétrica.

Hallamos en primer lugar los conjuntos complementarios \bar{A} y \bar{B} para poder encontrar posteriormente la diferencia simétrica $A\Delta B$:

$$\overline{A} = \{5, 6, 7, 8, 9\} \; ; \; \overline{B} = \{2, 4, 6, 8\} \; ; \; A\overline{B} = \{2, 4\}$$

$$\overline{A}B = \{5, 7, 9\} \; ; \; A\Delta B = \{2, 4\} \cup \{5, 7, 9\} = \{2, 4, 5, 7, 9\}$$

Es muy fácil comprobar que la diferencia simétrica de dos conjuntos verifica la propiedad conmutativa y que el conjunto vacío \emptyset es su elemento neutro.

A continuación demostramos otras dos interesantes propiedades.

Proposición 1 El complementario de la diferencia simétrica de dos conjuntos es la unión de su intersección y la intersección de sus complementarios:

$$\overline{A\Delta B} = AB \cup (\overline{A} \ \overline{B})$$

Demostración. Teniendo en cuenta las leyes de De Morgan, resulta que

$$\overline{A\Delta B} = \overline{A\overline{B} \cup \overline{A}B} = \overline{A\overline{B}} \cdot \overline{\overline{A}B} = (\overline{A} \cup B)(A \cup \overline{B}) = AB \cup (\overline{A} \ \overline{B})$$

Proposición 2 La diferencia simétrica verifica la propiedad asociativa:

$$(A\Delta B)\Delta C = A\Delta (B\Delta C)$$

Demostración. A partir de la definición de diferencia simétrica de dos conjuntos se obtiene:

$$(A\Delta B)\Delta C = (A\Delta B)C \cup \overline{A\Delta B}C =$$

$$= (A\overline{B} \cup \overline{A}B)\overline{C} \cup (AB \cup \overline{AB})C =$$

$$= A\overline{BC} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup ABC \cup \overline{AB}C =$$

$$= A\overline{BC} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{AB}C \cup ABC$$

Y por la misma razón es

$$A\Delta(B\Delta C) = A\overline{B}\Delta\overline{C} \cup \overline{A}(B\Delta C) = A(BC \cup \overline{BC}) \cup \overline{A}(B\overline{C} \cup \overline{BC}) =$$

$$= ABC \cup A\overline{BC} \cup \overline{ABC} \cup \overline{ABC} \cup \overline{ABC} =$$

$$= A\overline{BC} \cup \overline{AC} \cup \overline{ABC} \cup ABC$$

y, evidentemente, ambas expresiones son iguales.

Ejemplo 2 (ejercicio propuesto): Haciendo uso solamente de las operaciones de unión e intersección de conjuntos, hallar la expresión final de la diferencia simétrica de n conjuntos, es decir, hallar $A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$, para $n \in N$

A continuación nos proponemos aplicar el concepto de diferencia simétrica a la resolución de la dificultad planteada en el primer párrafo de hacer que el daltónico pueda enfrentarse con éxito a una señal de colores aún cuando no sepa distinguirlos entre sí.

2 El problema del daltónico

El objetivo principal de este trabajo es el que se presenta a continuación y que puede ser resuelto mediante la aplicación correcta del concepto de diferencia simétrica de conjuntos.

Problema 1 Un mecanismo consta de tres luces, dos de ellas rojas y la tercera verde, y funciona de tal forma que la luz verde se enciende única y exclusivamente si una luz roja está encendida.

Un chico daltónico se encuentra con el aparato y no sólo no puede distinguir los colores sino que, además, no sabe en qué orden se encuentran colocadas las luces indicadas.

¿Cómo puede saber este chico daltónico cuándo el aparato está funcionando correctamente y cuándo no?

Solución. En principio, el chico daltónico no puede saber cuándo el mecanismo funciona correctamente o está fallando, puesto que no sólo no puede distinguir los colores de las luces sino que tampoco sabe el orden en el que

están colocadas. Pero nosotros vamos a ayudarle a resolver su problema visual haciendo uso del Álgebra (booleana, naturalmente).

Representemos por R_1 y R_2 las luces rojas, por V la luz verde y, finalmente, representemos por F el fallo del mecanismo.

Sabemos que el aparato funciona bien si $R_1 \Delta R_2 \Leftrightarrow V$. Entonces, teniendo en cuenta que $\overline{p \leftrightarrow q} \Leftrightarrow (p \land \overline{q}) \lor (\overline{p} \land q)$, resulta

$$F = \overline{R_1 \Delta R_2} \Leftrightarrow \overline{V} = (R_1 \Delta R_2) \overline{V} \cup \overline{R_1 \Delta R_2} V = R_1 \Delta R_2 \Delta V$$

puesto que acabamos de demostrar que Δ verifica la propiedad asociativa. Por lo tanto, pueden darse entonces las dos situaciones siguientes:

- 1. El mecanismo falla
 - (a) si una sóla luz, no importa su color, está encendida
 - (b) si las tres luces están encendidas al mismo tiempo.
- 2. O si lo prefiere de otra forma, el mecanismo funciona correctamente
 - (a) si exactamente dos luces, no importa su color, están encendidas
 - (b) si las tres luces están apagadas.

De hecho, el chico daltónico distingue fallo ($F = R_1 \Delta R_2 \Delta V$) o no fallo ($\overline{F} = \overline{R_1 \Delta R_2 \Delta V}$) puesto que él ve las luces aunque no distinga sus colores.

3 El daltónico en problemas

A continuación proponemos un problema un poco más complejo que el anterior y que se ha de resolver de forma semejante.

Problema 2 Al día siguiente de haber resuelto su disyuntiva, el chico daltónico se encuentra con que el mecanismo ha sido alterado y dispone de una nueva luz supletoria. De hecho, ha sido colocada una luz amarilla adicional cuyo color (y por lo tanto su posición), él no sabe distinguir.

La razón que ha tenido el técnico para colocar esta nueva luz es la de avisar cuándo el mecanismo inicial, (R_1, R_2, V) , falla. La luz amarilla (A) se ha instalado de tal forma que se enciende cuando el mecanismo falla y permanece apagada cuando el mecanismo funciona correctamente.

Finalmente, y con objeto de alterar su capacidad de raciocinio, se ha instalado una bomba de relojería, de forma que si la luz amarilla está colocada

en posición incorrecta, es decir, si está encendida cuando debería estar apagada y viceversa, a los treinta segundos la bomba explosiona (no asustarse: sólo hace mucho ruido, por lo que no le mata aunque le da un susto tremendo).

En estas condiciones, ¿puede el chico daltónico anticiparse a la explosión y poner a salvo sus oídos?

Solución. Sea A la luz amarilla y representemos por B el hecho de que la bomba explosione. Por el problema anterior, es $F = R_1 \Delta R_2 \Delta V$ y por hipótesis es $B = F\overline{A} \cup \overline{F}A$. Entonces, aplicando el resultado que se obtiene para n=4 en el problema anterior propuesto 2, y teniendo en cuenta la propiedad asociativa de la diferencia simétrica, resulta que

$$B = F\overline{A} \cup \overline{F}A = F\Delta A = (R_1\Delta R_2\Delta V)\Delta A = (R_1\Delta R_2)\Delta (V\Delta A)$$

En consecuencia,

$$B = (R_1 \Delta R_2) \Delta (V \Delta A) = ((R_1 \Delta R_2) \overline{V} \Delta \overline{A} \cup \overline{R_1 \Delta R_2} (V \Delta A) =$$

$$= (R_1 \overline{R_2} \cup \overline{R_1} R_2) (V A \cup \overline{V} \overline{A}) \cup (R_1 R_2 \cup \overline{R_1} \overline{R_2}) (V \overline{A} \cup \overline{V} \overline{A}) =$$

$$= R_1 \overline{R_2} \overline{V} \overline{A} \cup \overline{R_1} R_2 \overline{V} \overline{A} \cup \overline{R_1} \overline{R_2} \overline{V} \overline{A} \cup \overline{R_1} \overline{R_2} \overline{V} \overline{A} \cup$$

$$\cup R_1 R_2 \overline{V} \overline{A} \cup R_1 R_2 \overline{V} \overline{A} \cup R_1 \overline{R_2} \overline{V} \overline{A} \cup \overline{R_1} \overline{R_2} \overline{V} \overline{A}$$

Y esto significa que la bomba explosiona si sólo una luz (no importa su color) está encendida o cuando exactamente lo están tres luces, independientemente de su color.

Por lo tanto, el chico daltónico puede salvarse aún cuando sea incapaz de distinguir los colores de las luces que se encienden o se apagan.

Por lo tanto, el chico deber reaccionar igual, no importa que se encuentre en el primer caso (dos luces rojas y una verde) que en el segundo (dos luces rojas, una verde y una amarilla).

Referencias

- [1] D. Kaye: Sistemas booleanos, Ed. Alhambra S.A., 1970
- [2] S. Lipschutz: Teoría de conjuntos y temas afines, Ed. McGraw Hill, 1970
- [3] http://www.ramonoptica.com/ct33.htm

Un método paramétrico para demostrar automáticamente y determinar lugares a partir de las construcciones geométricas *

E. Roanes Macías, E. Roanes Lozano

Fac. Educación, Univ. Complutense de Madrid {roanes, eroanes}@mat.ucm.es

Luis M. Laita, M. Villar Mena

Fac. Informática, Univ. Politécnica de Madrid laita@fi.upm.es, mativm@yahoo.es

Abstract

Both Computer Algebra Systems (CASs) and Dynamic Geometry Systems (DGSs) have reached a high level of development, but they have evolved separately: CASs have incorporated neither mouse drawing nor dynamic capabilities, meanwhile DGSs do not provide algebraic facilities. Our aim is to convert the geometric configuration drawn using the mouse with the DGS into CAS-acceptable sintaxis, because CASs can compute equations exactly and can also perform symbolic manipulations (e.g. of equations of geometric objects). After analyzing theoretically the situation, a constructive approach that considers parameters as the coordinates of free points and carries them along all subsequent calculations, has been developed. A corresponding Euclidean Geometry package, denoted paramGeo, has been developed and implemented for two existing CASs, together with an external translator (that converts the geometric algorithm created with the DGS, into any of those two CASs' syntax). To perform automatic theorem proving and to determine automatically geometric loci, starting from geometric configurations, are direct applications. Finally, a comparison with classic methods based in Synthetic Geometry is included.

^{*}Parcialmente subvencionado por los proyectos TIC2000-1368-C03-03 y TIC2000-1368-C03-01. Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Introducción

La necesidad de cooperación entre Sistemas de Cómp'uto Algebraico (SCAs) y Sistemas de Geometría Dinámica (SGDs) fue ya sugerida hace unos años en un libro del Prof. T. Recio [6]. Recientemente han comenzado a aparecer paquetes informáticos que generan demostraciones automáticas a partir de construcciones geométricas. El equipo del matemático chino Gao ha elaborado el paquete Geometry Expert [19], que a partir de modelos visuales de geometría dinámica plantea las ecuaciones que resuelve aplicando métodos desarrollados en los últimos veinte años (de Bases de Groebner, de Wu y otros). Otro muy interesante ha sido elaborado por los españoles J.L. Valcarce y F. Botana de la Univ. de Vigo [18].

Nuestro punto de vista está basado en una estrategia completamente diferente. Somos conscientes de la existencia de magníficos SCAs y SGDs, desarrollados y utilizados por la comunidad matemática durante bastantes años, cuyas capacidades conviene aprovechar. Por ello hemos tenido la idea de tender un puente entre SGDs y SCAs ya existentes, desarrollando un modelo geométrico que utiliza coordenadas paramétricas, que hemos denominado paramGeo, que puede ser implementado en los SCA usuales.

Hemos desarrollado su implementación, a la que nos referiremos como paquete param Geo, sobre dos SCA diferentes, Derive y Maple (elegidos por su difusión en los ámbitos educativos de Bachillerato y Universidad). Una primera versión de nuestro paquete para Maple 7 fue presentada al ACA'2001 [15].

Una segunda versión para Maple 7 ha sido presentada al ACA'2002 y una primera versión para Derive 5 ha sido presentada este año en Viena al Congreso Visit-Me.

Una tercera versión más avanzada, válida tanto para Derive 5 como para el recientemente aparecido Maple 8, es la que presentamos aquí.

Como SGD hemos elegido The Geometer's Sketchpad 3, porque sus *scripts* son muy apropiados para ser traducidos a código interpretable por *paramGeo*, y para The Geometer's Sketchpad 4, que acaba de aparecer. A tal propósito, hemos desarrollado un traductor externo, que convierte el código del algoritmo geométrico que genera el SGD en código propio del paquete *paramGeo*.

1 Modelo "paramGeo" de geometría paramétrica

"ParamGeo" es un modelo de geometría paramétrica desarrollado por los autores, que permite asignar coordenadas dependientes de parámetros a los puntos iniciales de la configuración geométrica, tratando con estos parámetros a lo largo de todos los cálculos subsiguientes. A continuación se describen brevemente los principales comandos de su implementación, basados en las operaciones elementales ejecutables directamente en los SGDs:

- \bullet point (A_x,A_y) devuelve la lista $[A_x,A_y]$ de coordenadas del punto (A_x,A_y)
- \bullet line(A, B) devuelve la ecuación de la recta que pasa por los puntos A y B
- segment (A, B) devuelve la lista [ecuación de la recta $AB, [A_x, A_y], [B_x, B_y]$]
- \bullet $\mathbf{circumCP}(O,A)~$ devuelve la ecuación de la circunferencia de centro O que pasa por A
- ulletcircum
CR(O,s) devuelve la ecuación de la circumferencia de centro
 Oy radio el segmento s
- ullet midpoint(s) devuelve la lista de coordenadas del punto medio del segmento s
- ullet parallel(r,A) devuelve la ecuación de la recta que pasando por el punto A es paralela a la recta o segmento r
- ullet perpendicular(r,A) devuelve la ecuación de la recta que pasando por el punto A es perpendicular a la recta o segmento r
- ullet angle ${f Bis}(P,V,Q)$ devuelve la ecuación de la recta bisectriz del ángulo convexo de vértice V y cuyos lados pasan por los puntos P y Q, respectivamente
- intersection (ϕ, ψ) devuelve los puntos de intersección de las rectas/circunferencias ϕ y ψ
- point OnObject (P_x, P_y, ϕ) se usa para definir (P_x, P_y) como "punto aleatorio" sobre la recta/circunferencia ϕ , de ecuación $\phi(x, y) = 0$, devolviendo $[P_x, P_y]$ y agregando el polinomio $\phi(P_x, P_y)$ a la lista LREL de polinomios de hipótesis (la cual es, inicialmente, la lista vacía)
- is $In(P,\phi)$ devuelve true/false, dependiendo de que el punto P esté, o no esté, en la recta/circunferencia ϕ , lo que se comprueba mediante simple sustitución de las coordenadas de P en la ecuación de ϕ

Otros comandos relativos a los cálculos posteriores (no vinculados a la configuración geométrica) serán descritos mas adelante, al desarrollar ejemplos ilustrativos que justifiquen su definición y uso.

Por supuesto, es posible omitir la construcción geométrica y operar directamente con los comandos del paquete "paramGeo", aunque este no sea el propósito inicial de su desarrollo.

Hemos desarrollado implementaciones tanto para Maple como para Derive, omitidas por brevedad, pero que pueden ser obtenidas de los autores.

2 Traducción a geometría paramétrica

El algoritmo geométrico es escrito automáticamente por SGD, mientras la correspondiente construcción geométrica es elaborada él. El algoritmo geométrico o script creado por The Geometer's Sketchpad 3 es guardado en formato .txt y el creado por The Geometer's Sketchpad 4, a partir del dibujo geométrico (sketch) es guardado en formato .html.

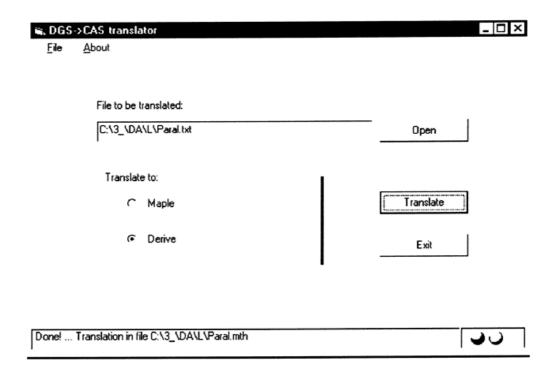


Figura 1

Este algoritmo geométrico (en formato .txt or .html) se convierte en código legible en sintaxis Maple o Derive, una vez cargado el paquete paramGeo en el SCA elegido, aplicando el Traductor automático implementado por los autores. El usuario de este traductor tiene sólo que elegir el SCA que desea usar, Maple or Derive, haciendo click con el ratón sobre el botón correspondiente (Figura 1).

A fin de dar idea de como opera nuestro traductor, la tabla de la Figura 2 contiene en la columna izquierda algunos de los pasos que pueden aparecer en el algoritmo geométrico (script en formato .txt) y sus correspondientes traducciones a código "paramGeo" en su columna derecha. El usuario obtiene instantáneamente el código paramGeo con sólo presionar con el ratón sobre el botón Translate de la carátula que aparece en la Figura 1.

Pasos del algoritmo geométrico	Código "paramGeo"
Point P	$P:=point(P_x, P_y)$
Let [r]=Line between Point A and Point B.	r:=Line(A, B)
Let [s]=Segment between Point A and	
Point B.	s:=segment(A, B)
Let [c]=Circle centered at Point [D] passing	
through Point [F].	c:=circumCP(D, F)
Let [c]=Circle centered at Point [D] with	
radius length [s].	c:=circumCR(D, s)
Let [M]=Midpoint of Segment [s].	M:=midpoint(s)
Let [p]=Parallel to Line [r] through Point [A].	p:=parallel(r,A)
Let [p]=Perpendicular to Line [r] through	
Point [A].	p:=perpendicular(r,A)
Let $[r]$ = Bisector of Angle P-V-Q.	r:=angleBis(P, V, Q)
Let [P] = Intersection of Line [r] and Line [v].	P_:=intersection(r, v)
Let $[P]$ = Random point on Line $[r]$.	$P:=pointOnObject(P_x, P_y, r)$

Figura 2

De acuerdo con lo indicado en la sección anterior, al ejecutar el último paso de esta tabla, el polinomio $\phi(P_x, P_y)$ es agregado a la lista LREL, supuesto que $\phi(x, y) = 0$ sea la ecuación de la recta r.

En caso de *sketch* en formato .html, el código obtenido es distinto, pero esto no lo percibe el usuario del traductor.

Nota: Así es como tiene lugar la traducción a paramGeo para Derive. En caso de traducir a paramGeo para Maple, la traducción es similar, pero acabando con el terminador punto y coma cada línea de código traducido.

3 Demostración automática con paramGeo

Con objeto de centrar la atención en el uso de esta técnica de demostración automática con paramGeo, comencemos enumeramos los sucesivos pasos del proceso:

- $i)\ dibujar$ la configuración geométrica sobre el SGD, para generar el algoritmo geométrico
- ii) traducir el algoritmo generado a código paramGeo para el SCA elegido
- iii) ejecutar el código traducido en una hoja de trabajo del SCA, sobre el que previamente se ha cargado el paquete paramGeo
- iv) verificar la tesis sobre dicha hoja de trabajo del SCA

Observemos que el algoritmo geométrico deducido de la construcción contiene las condiciones de hipótesis del problema. Una vez que este algoritmo ha sido traducido a código "paramGeo", la tesis del problema ha de ser introducida y verificada.

A tal efecto, conviene distinguir dos casos, según que en la construcción existan *puntos aleatorios* sobre objetos previamente generados de la configuración, o no existan.

3.1 Configuraciones sin puntos aleatorios sobre objetos

Comenzamos ocupándonos de los problemas que conflevan configuraciones geométricas sin puntos aleatorios sobre objetos previamente definidos.

En la mayor parte de tales problemas la verificación de la tesis consiste en comprobar si un punto, P, está, o no, sobre un objeto, obj. Esto se ejecuta cómodamente aplicando el comando isIn() de nuestro paquete paramGeo, en la forma isIn(P, obj), que sustituye las coordenadas de P sobre la ecuación

de *obj*, para devolver *true* o *false*, según que resulte cero o distinto de cero, respectivamente. En otros problemas, en que la formulación de la tesis sea, en principio, de otro tipo, esta suele reducirse a esa sencilla formulación, como se verá más adelante.

Con objeto de centrar la atención en el uso de esta técnica, comenzamos considerando un problema sencillo y bien conocido, relativo a la interseccción de diagonales de un paralelogramo, desarrollándolo sobre Derive.

Problema 1⁰: ¿Está el punto medio de una diagonal del paralelogramo en su otra diagonal?

Paso 1: Dibujar la configuración para generar el algoritmo geométrico

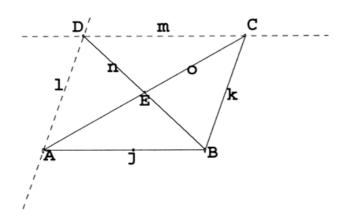


Figura 3

Al ejecutar la construcción de la Figura 3 en The Geometer's Sketchpad 3, se genera automáticamente el siguiente algoritmo geométrico (script), que comienza dando tres puntos (Given), seguidos de los 8 pasos (Steps). Supondremos que es alojado en el archivo paral.txt.

Given:

Point A

Point B

Point C

Steps:

```
    Let [j] = Segment between Point A and Point B.
    Let [k] = Segment between Point B and Point C.
    Let [l] = Parallel to Segment [k] through Point A.
    Let [m] = Parallel to Segment [j] through Point C.
    Let [D] = Intersection of Line [m] and Line [l].
    Let [n] = Segment between Point [D] and Point B.
    Let [o] = Segment between Point A and Point C.
    Let [E] = Midpoint of Segment [o].
```

Paso 2: Traducir el algoritmo geométrico a código paramGeo para Derive Tras arrancar el traductor, abriendo el archivo paral.txt, presionando con el ratón el botón Derive y después el botón Translate, se genera automáticamente el siguiente archivo paral.mth (alojándose en el directorio de paral.txt):

```
"Given:"
A:=point(A_x, A_y)
B:=point(B_x, B_y)
C:=point(C_x, C_y)
"-----"
"Steps:"
j:=segment(A, B)
k:=segment(B, C)
1:=parallel(k, A)
m:=parallel(j, C)
D:=intersection(m, 1)
n:=segment(D, B)
o:=segment(A, C)
E:=midpoint(o)
```

Paso 3: Ejecutar en Derive del archivo traducido

Tras abrir una sesión de trabajo en Derive 5, cargando como UtlityFile el paquete paramGeo y, a continuación, cargando como MathFile el archivo traducido paral.mth, se pueden obtener las coordenadas de puntos y ecuaciones de objetos que se deseen. Por ejemplo, las coordenadas de E y las ecuaciones de n, se obtendrán ejecutando respectivamente E=y n=, resultando:

$$E = \left[\frac{A_x + C_x}{2}, \frac{A_x + C_x}{2}\right]$$

$$n = \left[x(A_y - 2B_y + C_y) - y(A_x - 2B_x + C_x) + A_xB_y - A_yB_x - B_xC_y + B_yC_x = 0, [A_x - B_x + C_x, A_y - B_y + C_y], [B_x, B_y]\right]$$

Paso 4: Verificar la tesis

En la misma sesión de trabajo en Derive 5, aplicaremos el comando is In de paramGeo, a verificar la condición de tesis $(E \in n)$, en la forma:

$$isIn(E,n)=$$

$$isIn(E, n) = true$$

Al ser afirmativa la respuesta, la demostración automática ha concluido.

3.2 Demostraciones sobre paramGeo directamente

Como se ha indicado anteriormente, siempre es posible prescindir del algoritmo geométrico, y operar directamente con los comandos del paquete paramGeo. Obviamente, ello tiene el inconveniente de perder la automatización de planteamiento del problema. Este modo de preceder es conveniente, por ejemplo, en problemas que sean prolongación de otros, planteados del modo usual, de los que puedan aprovechar parte, o todo, su código. Tal es el caso del siguiente Problema 2º, inverso, en cierto modo, del Problema 1º.

Por otra parte, el proceso de desarrollo de este Problema 2º involucrará a un punto obtenido por intersección de dos objetos con dos puntos en común, entre los cuales habremos de escoger el que interese, para proseguir el proceso de construcción.

Problema 2⁰: Dado un cuadrilátero convexo, tal que cada una de sus diagonales corte a la otra en su punto medio. ¿Es necesariamente paralelogramo?.

El problema puede abordarse así (Figura 4). Sean A, B, C tres puntos no colineales; sean j, k, l los segmentos AB, BC, CA, respectivamente; sea D el punto medio de l y sea E el punto tal que D es punto medio del segmento BE (es decir, el simétrico de B respecto de D). Entonces, se trata de responder a las dos cuestiones siguientes: ¿son paralelos EC y j? ¿lo son EA y k?.

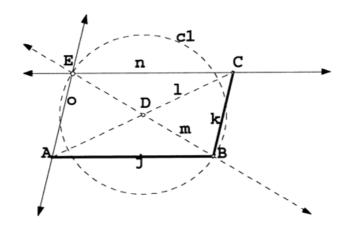


Figura 4

Para responder a ellas, podemos considerar las dos rectas siguientes: la recta n, paralela a j por C, y la recta o, paralela a k por A. Con ello, las dos preguntas anteriores se reducen a las siguientes: ¿está el punto E en la recta n? ¿está E en la recta o?. De este modo el problema de paralelismo se ha reducido a otro de incidencia punto-recta.

Para determinar el punto E, usando los comandos de paramGeo mencionados en la sección 1, pueden considerarse la circunferencia, c1, de centro D y que pasa por B, y la recta m, que pasa por B y D, siendo entonces E el otro punto de intersección de c1 y m (distinto del punto D).

De acuerdo con estas consideraciones, podemos continuar ejecutando la hoja de trabajo en Derive de la subsección 3.1 (teniendo en cuenta que A, B, C, j, k ya estaban definidos), del modo que sigue a continuación, donde *Inters* es la variable en que son alojados los puntos de intersección de c1 y m, para que sea escogido el que interese:

```
1 := segment(A, C)
D := midpoint(1)
m := line(D, B)
c1 := circumCP(D, B)
c1 = (x^2 - x(A_-x + C_-x) + y^2 - y(A_-y + C_-y) + A_-xB_-x + A_-yB_-y - B_-x^2 + B_-xC_-x - B_-y(B_-y - C_-y) = 0
```

Inters := intersection(c1, m)
$$Inters = [two_soluc, [B_x, B_y], [A_x - B_x + C_x, A_y - B_y + C_y]]$$
 E := Inters SUB 3
$$E = [A_x - B_x + C_x, A_y - B_y + C_y]$$
 n := parallel(j, C) o := parallel(k, A)
$$isIn(E, n) = true$$

$$isIn(E, o) = true$$

Al ser afirmativas ambas respuestas, la demostración automática ha concluido. El cuadrilátero considerado es necesariamente paralelogramo.

3.3 Configuraciones con puntos aleatorios sobre objetos

Vamos ahora a ocuparnos de problemas que conllevan configuraciones geométricas que incluyen puntos aleatorios sobre objetos previamente definidos.

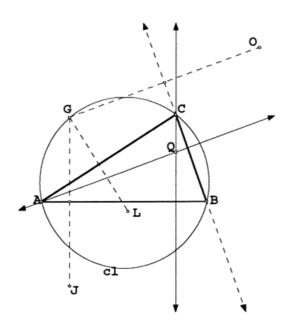


Figura 5

Como ya se indicó en la sección 1, para definir el punto P, de coordenadas (P_x, P_y) , como "punto aleatorio" sobre la recta o circunferencia k, de ecuación $\phi(x, y) = 0$, ejecutamos $P:=pointOnObject(P_x, P_y, k)$, devolviendo el sistema $[P_x, P_y]$ y agregando automáticamente el polinomio $\phi(P_x, P_y)$ a la lista LREL de relaciones de hipótesis (la cual, inicialmente, es la lista vacía).

Los pasos a seguir para ejecutar el proceso con paramGeo son los ya mencionados al comienzo de la sección 3, pero ahora teniendo en cuenta la existencia de unas condiciones de hipótesis, que son alojadas en la lista LREL.

Para describir en detalle el proceso, vamos a aplicarlo a un problema, que incluye un punto aleatorio sobre objeto (Figura 5), utilizando ahora Maple.

Problema 3⁰: En la circunferencia circunscrita al triángulo ABC se considera un punto aleatorio, G, del cual se determinan sus simétricos, respecto de las rectas-lados de ABC, para analizar las dos cuestiones siguientes:

- 1) ¿son colineales esos tres puntos simétricos del G?
- 2) ¿está el ortocentro, Q, de ABC alineado con dichos simétricos de G?

Paso 1: Dibujar la configuración para generar el algoritmo geométrico

Con el fin de realizar el trazado utilizando sólamente los instrumentos clásicos, los puntos simétricos de G respecto de las recta-lado de ABC se determinarán trazando sucesivamente (Figura 6): la perpendicular por G a la recta-lado; su punto de intersección con la recta-lado; la circunferencia de centro dicho punto de intersección y que pasa por G; entonces, el otro punto de intersección (distinto de G) de esta circunferencia con dicha perpendicular a la recta-lado será el simétrico de G respecto de la recta-lado.

Al realizar esta construcción se genera automáticamente el siguiente script, que comienza con tres punto dados, seguidos de 30 pasos del algoritmo geométrico (a lo largo del cual G es redefinido como J, M y P). Supondremos que es alojado en el archivo symmorth.txt.

```
Given:
```

Point A

Point B

Point C

Steps:

Let [j] = Segment between Point A and Point B.

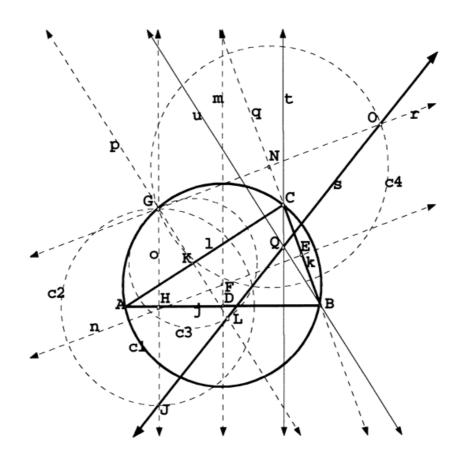


Figura 6

- 2. Let [k] = Segment between Point B and Point C.
- Let [1] = Segment between Point C and Point A.
- 4. Let [D] = Midpoint of Segment [j].
- 5. Let [m] = Perpendicular to Segment [j] through Midpoint [D].
- 6. Let [E] = Midpoint of Segment [k].
- 7. Let [n] = Perpendicular to Segment [k] through Midpoint [E].
- 8. Let [F] = Intersection of Line [n] and Line [m].
- 9. Let [c1] = Circle with center at Point [F] passing through A.
- 10. Let [G] = Random point on Circle [c1].
- 11. Let [o] = Perpendicular to Segment [j] through Point [G].

- 12. Let [H] = Intersection of Line [o] and Segment [j].
- 13. Let [c2] = Circle with center at Point [H] passing through [G].
- 14. Let [I] = Intersection of Circle [c2] and Line [o].
- 15. Let [J] = Intersection of Circle [c2] and Line [o].
- 16. Let [p] = Perpendicular to Segment [1] through Point [G].
- 17. Let [K] = Intersection of Line [p] and Segment [1].
- 18. Let [c3] = Circle with center at Point [K] passing through [I].
- 19. Let [L] = Intersection of Circle [c3] and Line [p].
- 20. Let [M] = Intersection of Circle [c3] and Line [p].
- 21. Let [q] = Line between Point C and Point B.
- 22. Let [r] = Perpendicular to Line [q] through Point [M].
- 23. Let [N] = Intersection of Line [r] and Line [q].
- 24. Let [c4] = Circle with center at Point [N] passing through [M].
- 25. Let [0] = Intersection of Circle [c4] and Line [r].
- 26. Let [P] = Intersection of Circle [c4] and Line [r].
- 27. Let [s] = Line between Point [J] and Point [O].
- 28. Let [t] = Perpendicular to Segment [j] through Point C.
- 29. Let [u] = Perpendicular to Segment [1] through Point B.
- 30. Let [Q] = Intersection of Line [t] and Line [u].

Paso 2: Traducción del script a código paramGeo para Maple

Tras arrancar el traductor, abriendo el archivo *symmorth.txt*, presionando con el ratón el botón Maple y después el botón Translate, se genera instantáneamente el archivo *symmorth.mpl*, que es alojádo en el directorio en que estaba alojado *symmorth.txt*. Por brevedad, omitimos el código.

Paso 3: Ejecución en Maple del archivo traducido

Tras abrir una sesión de trabajo en Maple, cargamos el paquete paramGeo. A continuación, en vez de cargar el archivo traducido symmorth.mpl, podemos copiar su contenido y pegarlo sobre una región de trabajo de Maple, con dos propósitos:

1) para dar valores más simples (sin perder generalidad) a las coordenadas de los tres puntos libres, con objeto de obtener expresiones más breves para las coordenadas y ecuaciones de los objetos considerados (por ejemplo, los valores (0,0), (b,0), (c,e), en lugar de $(A_x, A_y), (B_x, B_y), (C_x, C_y)$, que

inicialmente tenían en el archivo traducido symmorth.mpl)

2) para parar la ejecución tras cada intersección recta-circunferencia, con objeto de elegir cómodamente el punto de intersección que interese considerar, de entre los dos posibles (de la manera que ya se comentó en 3.2).

De acuerdo con estas observaciones la ejecución en Maple se desarrolla así:

```
read('c:/ .....
                   /paramGeo.mpl'):
A:=point(0, 0):
B:=point(b, 0):
C:=point(c, e):
#(las coordenadas de los puntos libres se han sustituido por otras más sencillas)
#----I;=-----
#Steps:
j:=segment(A, B):
k:=segment(B, C):
1:=segment(C, A):
D_:=midpoint(j):
#(por ser D palabra reservada en Maple, se ha sustituido por D_{-})
m:=perpendicular(j, D_):
E:=midpoint(k):
n:=perpendicular(k, E):
F:=intersection(n, m):
c1:=circumCP(F, A):
G:=pointOnObject(G_x, G_y, c1):
o:=perpendicular(j, G):
H:=intersection(o, j):
c2:=circumCP(H, G):
I:=intersection(c2, o):
J:=intersection(c2, o):
#(las dos líneas precedentes, obtenidas en la traducción, se sustituyen manual-
# mente por la siguiente, a fin de elegir J de acuerdo con el algoritmo previsto)
Inters:=intersection(c2, o);
                  Inters := [[G_x, -G_y], [G_x, G_y]]
```

J:=Inters[1]:

#(el resultado de la intersección se ha alojado en la variable Inters, habiendo

```
# elegido J como elemento 1^o de Inters, ya que el elemento 2^o es G)
p:=perpendicular(1, G):
K:=intersection(p, 1):
c3:=circumCP(K, G):
L:=intersection(c3, p);
M:=intersection(c3, p);
#(las dos líneas precedentes, obtenidas en la traducción, se sustituyen manual-
# mente por la siguiente, a fin de elegir L de acuerdo con el algoritmo previsto)
Inters:=intersection(c3, p);
      Inters := [[G_x, G_y], [\frac{-G_x e^2 + c^2 G_x + 2ce G_y}{e^2 + c^2}, -\frac{G_y c^2 - 2ec G_x - e^2 G_y}{e^2 + c^2}]]
L:=Inters[2]:
#(el resultado de la intersección se ha alojado en la variable Inters, habiendo
# elegido L como elemento 2^{\circ} de Inters, ya que el elemento 1^{\circ} es G)
q:=line(C, B):
r:=perpendicular(q, G):
N:=intersection(r, q):
c4:=circumCP(N, G):
0_:=intersection(c4, r):
P:=intersection(c4, r):
#(las dos líneas precedentes, obtenidas en la traducción, se sustituyen manual-
# mente por la siguiente, a fin de elegir O_ de acuerdo con el algoritmo previsto)
Inters:=intersection(c4, r);
     Inters := [[G_x, G_y], [\frac{b^2 G_x - 2beG_y + 2be^2 - 2bcG_x + 2ceG_y + c^2 G_x - G_x e^2}{e^2 + b^2 - 2cb + c^2},
            - \tfrac{(-b^2G_y - 2G_xeb + e^2G_y + 2eb^2 - G_yc^2 + 2ecG_x + 2cG_yb - 2ecb}{e^2 + b^2 - 2cb + c^2)}]]
0_:=Inters[2]:
#(el resultado de la intersección se ha alojado en la variable Inters, habiendo
# elegido O_{-} como elemento 2^{\circ} de Inters, ya que el elemento 1^{\circ} es G)
s:=line(J, O_{-}):
t:=perpendicular(j, C):
u:=perpendicular(1, B):
```

Q:=intersection(s, t):

Paso 4: Verificación de las condiciones de tesis

Si en la misma sesión de trabajo en Maple, aplicamos el comando isIn de paramGeo, para verificar la condición de tesis, $L \in s$, se obtiene false.

La razón de este aparente fracaso es que no se ha tenido en cuenta la condición de hipótesis, $G \in c1$, alojada en LREL. Vamos pues a alojar esta condición en una variable, Hyp, y en otra variable, Th, la condición de tesis, $L \in s$, que resulta de sustituir (x,y) por las coordenadas de L en la ecuación de s. Dicha sustitución se ejecuta cómodamente aplicando el comando isPlaced del paquete paramGeo.

$$\begin{split} \text{Hyp:=op(LREL);} \\ Hyp:=& (G_x - \tfrac{1}{2}b)^2 + (G_y + \tfrac{-c^2 - e^2 + cb}{2e})^2 - \tfrac{1}{4}b^2 - \tfrac{1}{4}\tfrac{(-c^2 - e^2 + cb)^2}{e^2} \\ \text{Th:=isPlaced(L,s);} \\ Th:=& -4\tfrac{e^2b(-G_xeb - e^2G_y - G_yc^2 + cG_yb + G_y^2e + G_x^2e)}{(e^2 + b^2 - 2cb + c^2)(e^2 + c^2)} \end{split}$$

Ambas expresiones, de hipótesis y de tesis, son polinomios en las variables G_{-x}, G_{-y} . Por tanto, para probar que la condición de tesis es consecuencia de la condición de hipótesis, bastará probar que el polinomio Th es divisible entre el polinomio Hyp, por ejemplo, comprobando que su resto es nulo (respecto de cualquiera de sus dos variables), con el comando rem de Maple:

0

Al resultar cero este resto, el polinomio Th es divisible por el polinomio Hyp. En consecuencia, para los puntos $G(G_{-}x, G_{-}y)$ que están en c1, se verifica la condición de tesis $L \in s$.

De modo análogo, para la segunda condión de tesis, $Q \in s$, se tiene:

Th2:=isPlaced(Q,s);

rem(Th2, Hyp, G_y);

0

Al ser cero este otro resto, se verifica la condición de tesis $Q \in s$.

3.4 Condiciones de degeneración

Siguiendo con el mismo Problema 3°, observemos que tanto Hyp como Th son polinomios en las indeterminadas G_-x, G_-y , siendo sus coeficientes expresiones racionales en las coordenadas b, c, e de los puntos libres dados, es decir, elementos del cuerpo de fracciones Q(b, c, e). Por tanto, Hyp y Th, aunque pertenecientes al anillo de polinomios $Q(b, c, e)[G_-x, G_-y]$, son expresiones fraccionarias, con denominadores pertenecientes a Z(b, c, e). Tales denominadores pueden obtenerse aplicando el comando denom de Maple:

denom(Hyp);
$$e^2$$

$$\mathrm{denom(Th)}\,; \qquad \qquad (e^2+b^2-2cb+c^2)(e^2+c^2)$$

Observemos que el primer factor de este último denominador es nulo syss los puntos B y C coinciden y el segundo factor es nulo syss los puntos A y C coinciden. Y el denominador de Hyp es nulo si los puntos C, A, B son colineales.

Por tanto, para la condición de tesis $L \in s$ del Problema 3^o , las condiciones de anulación de los denominadores de Hyp y Th son las condiciones de degeneración de la configuración geométrica. Lo mismo sucede para la segunda condición de tesis $Q \in s$

Lo que se ha observado para el Problema 3º es válido en general, es decir, las condiciones de anulación de los denominadores de las expresiones fraccionarias de hypótesis y de tesis conducen a las condiciones de degeneración de la configuración geométrica (como sucede aplicando el método de Wu [17], donde aparecen como coeficientes multiplicadores en lugar de como denominadores).

3.5 Caso de varios puntos aleatorios sobre objeto

En caso de varios puntos aleatorios sobre objeto, se alojará en la lista LREL un polinomio de hypótesis por cada uno de dichos puntos.

Denotaremos H_1, \ldots, H_r a dichos polinomios de hypótesis, que pertenecen al anillo de polinomios \mathbf{R} , cuyas indeterminadas son las coordenadas de los puntos aleatorios sobre objeto y cuyos coeficientes pertenecen al cuerpo de

fracciones sobre Q de las coordenadas de los puntos libres.

Por otra parte, si la condición de tesis a considerar es la pertenencia del punto P al objeto obj, entonces denotaremos Th a la expresión resultante de sustituir las coordenadas de P sobre la ecuación de obj, la cual es una fracción racional perteneciente al cuerpo de fracciones de \mathbf{R} . Denotaremos por Thn y Thd al numerador y denominador de Th, respectivamente.

Para probar que la condición de tesis, Th = 0 es consecuencia de las condiciones de hipótesis $H_1 = 0,, H_r = 0$, bastará probar las dos condiciones siguientes:

i) el denominador Thd es no nulo bajo las condiciones de no degeneración de la configuración geométrica considerada

$$Thd \neq 0 \tag{1}$$

ii) el numerador Thn puede expresarse como combinación lineal algebraica de la forma siguiente (donde $\psi_1, \ldots, \psi_r \in \mathbf{R}$):

$$Thn = \psi_1 H_1 + \dots + \psi_r H_r \tag{2}$$

es decir, Thn pertenece al ideal $< H_1,, H_r >$ del anillo de polinomios \mathbf{R} .

La verificación de existencia de la combinación lineal (2) puede hacerse por varios métodos:

Método de las divisiones sucesivas

Se trata de calcular los restos sucesivos

$$\rho_1 := resto(Thn, H_1, v_1), \ \rho_{i+1} := resto(\rho_i, H_i, v_i); \ i = 1,, r-1$$

donde $v_1,, v_r$ son coordenadas de puntos aleatorios sobre objeto (cualesquiera de ellas, tales que $grado(H_i, v_i) > 0$). Si el último resto así obtenido, ρ_r , es nulo, entonces Th puede expresarse en la forma (2). En efecto, expresando cada uno de los restos ρ_i como dividendo menos divisor por cociente y sustituyendo cada una de estas igualdades en la anterior, se obtiene una igualdad de la forma (2), supuesto que ρ_r es nulo.

Método de las seudodivisiones sucesivas

Es similar al de las divisiones sucesivas, pero sustituyendo divisiones por seudodivisiones, al objeto de trabajar con expresiones polinómicas (enteras, no fraccionarias) exclusivamente. La descripción detallada del concepto de seudodivisión puede verse, por ejemplo, en los libros [7, 10], o en los artículos [11, 14].

Para efectuar seudodivisiones conviene disponer de un comando que las ejecute automáticamente. En Maple hay dos comandos de seudodivisión, prem y sprem. En Derive, en principio no existe, pero los autores de este artículo han desarrollado implementaciones para versiones 3 y posteriores de Derive [9].

Método de las bases de Groebner iguales

Consiste en comprobar la siguiente igualdad de ideales del anillo R

$$< H_1,, H_r > = < H_1,, H_r, Thn >$$

pues ello implica la relación (2).

Esta igualdad de ideales se verifica comprobando que son iguales sus bases de Groebner, calculadas respecto de las coordenadas de puntos aleatorios. (La explicación detallada puede verse en [7], por ejemplo).

Este método ha sido automatizado en el procedimiento isOn del paquete paramGeo para Maple (este SCA incluye el cálculo de bases de Groebner), de modo que, para verificar si el punto P está en el objeto obj, de una configuración cuyo conjunto de puntos libres o dados sea SFP, basta ejecutar isOn(P, obj, SFP), obteniendo como output True/False, según que las mencionadas bases de Groebner sean iguales/distintas, respectivamente.

La razón de incluir el argumento SFP está en que las bases de Groebner se han de calcular tomando como variables sólo las coordenadas de puntos aleatorios, lo que se consigue considerando el conjunto de indeterminadas que aparecen en H_1, \ldots, H_r , excluyendo las coordenadas de los puntos libres.

En Derive no está implementado un comando accesible al usuario que permita calcular bases de Groebner (aunque internamente las utilice para resolver sistemas de ecuaciones no lineales), pero se espera que sean incorporadas a una nueva versión, por aparecer.

Método de la base de Groebner igual a <1>

Puede ocurrir que Thn no pertenezca al ideal $\langle H_1,, H_r \rangle$, pero alguna potencia de Th si pertenezca (es decir, que Th si pertenezca al radical de dicho ideal). Esta relación de pertenencia es cierta syss el siguiente ideal

$$< H_1,, H_r, 1 - z * Thn >$$
 (3)

(donde z es una nueva variable) es todo el anillo de polinomios \mathbf{R} (según se prueba en [2, 3], por ejemplo).

Ello se verifica comprobando que la base de Groebner del ideal (3), calculada respecto de las coordenadas de puntos aleatorios, es <1> (la explicación detallada puede verse en [7], por ejemplo).

Este método también ha sido automatizado en el procedimiento isOn-Rad del paquete paramGeo para Maple, de modo que, para verificar si el punto P está en el objeto obj, de una configuración cuyo conjunto de puntos libres o dados sea SFP, basta ejecutar isOnRad(P, obj, SFP), obteniendo como output True/False, según que la mencionada base de Groebner sea igual/distinta de <1>, respectivamente.

Veamos cómo aplicar algunos de estos métodos en un problema resuelto de otros modos en [3] y posteriormente en [1].

Problema 4^0 : Sean A,B,C tres puntos no colineales, sean c1 y c2 dos circunferencias que pasando por C tienen por centros A y B, respectivamente, sea D el otro punto de intersección de c1 y c2, sea F un punto aleatorio sobre c1, $F \neq C$ (Figura 7), sea I un punto aleatorio sobre c2, $I \neq D$, sea H el otro punto de intersección de c2 y la recta FC, sea K el otro punto de intersección de c1 y la recta ID, y sea m la paralela a la recta FK por el punto I. Entonces, está H en m? (es decir, son paralelas las rectas HI, FK?)

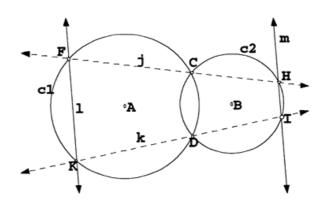


Figura 7

Por brevedad se omite el desarrollo del algoritmo geométrico y su traducción a paramGeo. Por sencillez de expresiones y sin perdida de generalidad eligimos como coordenadas de los tres puntos libres los siguientes: A = (a, 0), B = (b, 0), C = (0, c). Después de ejecutar cálculos en Maple, se obtienen los dos polinomios de hipótesis H_1 y H_2 siguientes y la expresión Th siguiente, correspondiente a la condición de tesis $H \in m$ (obtenida con el comando isPlaced, comentado en la subsección 3.3).

H1:=op(1,LREL);

$$H1 := (F_x - a)^2 + F_y^2 - a^2 - c^2$$

H2:=op(2,LREL);

$$H2 := (I_x - b)^2 + I_y^2 - b^2 - c^2$$

Th:=isPlaced(H,m):

Thn:=numer(Th):

Thd:=denom(Th);

$$Thd := (I_x^2 + c^2 - 2I_yc + I_y^2)(F_x^2 + c^2 + 2cF_y + F_y^2)$$

(Nótese que Thd es no nulo, por serlo sus dos factores, como consecuencia de haberse supuesto $F \neq C$ e $I \neq D$)

Aplicación del método de las divisiones sucesivas:

rho1:=rem(Thn,H1,F_x):

rho2:=rem(rho1,H2,I_x);

$$\rho 2 := 0$$

Aplicación del método de las bases de Groebner iguales:

True

Aplicación del método de la base de Groebner igual a <1>:

$$isOnRad(H,m,{A,B,C});$$

[1]

(Los comandos $isOn \ e \ isOnRad$ fueron comentados en 3.5)

4 Determinación de lugares con paramGeo

El problema de la determinación automática de lugares geométricos ha sido estudiado por los autores durante largo tiempo [11, 12, 13, 14, 16, 17], usando directamente bases de Groebner y método de Wu.

En todos estos artículos se usan exclusivamente herramientas algebraicas, tratando de resolver el sistema de ecuaciones algebraicas a las cuales conduce el problema geométrico.

El método de determinación automática de lugares geométricos presentado aquí es otra de las aplicaciones de nuestro sistema paramGeo. Permite automatizar todo el proceso, desde la construcción geométrica hasta la obtención de las ecuaciones del lugar, conectando geometría sintética y geometría analítica elemental, tendiendo un puente entre ellas.

Comencemos enumerando los sucesivos pasos de este proceso de determinación automática de lugares con paramGeo:

- i) generar el algoritmo geométrico (script) sobre el SGD
- ii) traducir el script generado a código paramGeo para el SCA elegido
- iii) ejecutar el código traducido en una hoja de trabajo del SCA, sobre el que previamente se ha cargado el paquete paramGeo
- iv) operar en el SCA las condiciones que definen el lugar, para obtener sus ecuaciones paramétricas y/o implícitas.

Al igual que en la anterior sección 3, conviene distinguir dos casos, según que en la construcción existan *puntos aleatorios* sobre objetos previos de la configuración, o no existan.

4.1 Lugares sin puntos aleatorios sobre objetos

Comenzamos ocupándonos de los problemas de lugares que conflevan configuraciones sin puntos aleatorios sobre objetos previamente construidos.

En tales problemas las condiciones algebraicas que definen el lugar, mencionadas en el anterior apartado iv), se reducen a un única condición. Al ser ejecutada, los valores de las coordenadas de puntos que aparecen en dicha expresión son sustituidos automáticamente en ella, obteniendo como output la ecuación implícita del lugar.

Con objeto de centrar la atención en el uso de esta técnica, comenzamos considerando un problema sencillo y bien conocido, la extensión de Jakob Steiner del teorema de Simson-Wallace.

Problema 5º: Sea ABC un triángulo, D un punto arbitrario de su plano y E, F, G las proyecciones ortogonales de D sobre las rectas-lados AB, BC, CA respectivamente (Figura 8). Supongamos que D se mueve de tal modo que el área del triángulo EFG se mantiene constante. Determinar el lugar de tal punto D.

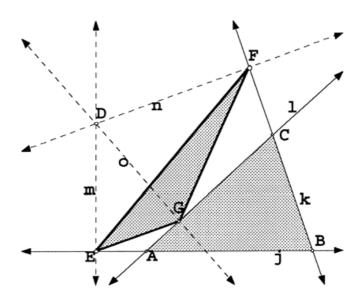


Figura 8

Consideraciones previas

Notemos que A, B, C son puntos libres (introducidos sin condiciones), mientras que D es el punto del lugar (punto cuyo lugar geométrico se trata de determinar).

Paso 1: Generar el algoritmo geométrico

La configuración de la figura anterior, elaborada con The Geometer Skechpad 3, permite generar el siguiente *script*, que supondremos alojado en el archivo simwaL.txt:

```
Given:

Point A

Point B

Point C

Point D

Steps:

1. Let [j] = Line between Point A and Point B.

2. Let [k] = Line between Point B and Point C.

3. Let [l] = Line between Point C and Point A.

4. Let [m] = Perpendicular to Line [j] through Point D.

5. Let [E] = Intersection of Line [m] and Line [j].

6. Let [n] = Perpendicular to Line [k] through Point D.

7. Let [F] = Intersection of Line [n] and Line [k].

8. Let [o] = Perpendicular to Line [l] through Point D.

9. Let [G] = Intersection of Line [o] and Line [l].
```

Paso 2: Traducir el algoritmo geométrico a código paramGeo para Maple Tras arrancar el traductor, abriendo el archivo simwaL.txt, presionando con el ratón el botón Maple y después el botón Translate, se genera automáticamente el siguiente archivo simwaL.mpl (alojándose en el directorio de simwaL.txt):

```
# Sketchpad to Maple automatic translation
# SimwaL.txt -> SimwaL.mpl
# SimwaL.gss
# Given:
A:=point(A_x, A_y);
B:=point(B_x, B_y);
C:=point(C_x, C_y);
D_:=point(D_x, D_y);
# Steps:
j:=line(A, B);
k:=line(B, C);
l:=line(C, A);
m:=perpendicular(j, D_);
E:=intersection(m, j);
n:=perpendicular(k, D_);
```

```
F:=intersection(n, k);
o:=perpendicular(1, D_)
G:=intersection(o, 1);
```

Paso 3: Ejecutar en Maple el archivo traducido

Tras abrir una sesión de trabajo en Maple, comenzamos cargando el paquete paramGeo. A continuación, para sencillez de expresiones y sin perdida de generalidad, elegimos las coordenadas de los tres puntos libres en la forma A = (0,0), B = (b,0), C = (c,e), y, a fin de reconocer fácilmente la ecuación del lugar, elegimos las coordenadas del punto del lugar en la forma $D_- = (X,Y)$. Finalmente, cargamos el archivo traducido, obteniendo como output las coordenadas de los puntos y las ecuaciones de los objetos considerados, lo que se omite por brevedad.

```
read('c:/ ..... /paramGeo.mpl'):
A_x:=0: A_y:=0:
B_x:=b: B_y:=0:
C_x:=c: C_y:=e:
D_x:=X: _y:=Y:
read('c:/ ..... /simwaL.mpl');
```

Paso 4: Ejecutar la condición que define el lugar

Denotemos S al área del triángulo EFG, que podemos calcular como $\frac{1}{2}$ del determinante de la matriz de coordenadas de sus vértices, alojando la expresión en la variable LC (después de cargar el paquete *linalg* de Maple, para poder calcular el determinante).

Nótese que el denominador de esta expresión es no nulo, supuesto no degenerado ABC (A, B, C no colineales y en consecuencia $B \neq C \neq A \neq B$).

La anulación de la expresión alojada en LC proporciona la ecuación del lugar. Se trata de un haz de circunferencias concéntricas, dependientes del área, S, como parámetro. En particular, para S=0, se tiene la circunferen-

cia que pasa por A, B, C, es decir, la circunscrita del triángulo ABC, como puede comprobarse substituyendo S por 0, con el comando subs de Maple, y, a continuación, sustituyendo (X,Y) por las coordenadas de cada uno de los vértices del triángulo ABC:

En consecuencia, el lugar buscado es el haz de circunferencias concéntricas con la circunscrita al triángulo ABC, una de las cuales aparece en la Figura 9.

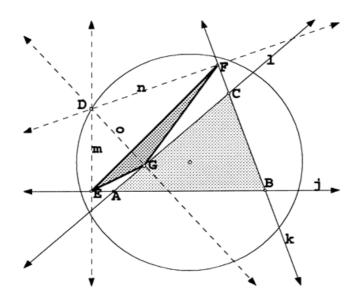


Figura 9

4.2 Lugares con puntos aleatorios sobre objetos

Ocupémosnos finalmente de los problemas de lugares que conllevan configuraciones con puntos aleatorios sobre objetos previamente definidos.

En tales problemas las condiciones algebraicas que definen el lugar, mencionadas en el anterior apartado *iv*), son las alojadas en la lista LREL (de condiciones que definen los puntos aleatorios sobre objetos) más una condición final que termina de precisar el lugar.

A partir de las ecuaciones definidas por estas condiciones, se obtienen las ecuaciones del lugar. Las ecuaciones paramétricas, resolviendo el sistema respecto de las coordenadas del lugar, y la ecuación implícita, eliminando las coordenadas los puntos que no sean puntos libres o punto del lugar.

Una vez planteado un problema de lugar y antes de comenzar a atacarlo, conviene hacer tres tipos de *consideraciones previas*, para precisar:

- 1) cómo se va a determinar el punto del lugar
- 2) qué tipos de puntos aparecen en el problema
- 3) cuáles son las condiciones del lugar, a partir de las cuales se van a calcular sus ecuaciones.

El proceso se muestra más sencillo de seguir a la luz de ejemplos concretos. El siguiente es un lugar geométrico conducente a la clásica curva conocida como conchoide de Nicomedes.

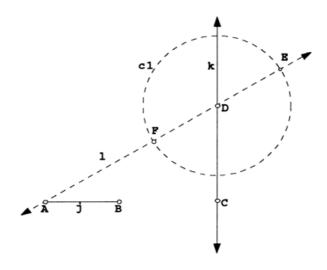


Figura 10

Problema 6º: Sea j el segmento de extremos los puntos A y B. Sea k la recta perpendicular al segmento j por un punto, C (Figura 10). Sea D un punto aleatorio de la recta k. Sea l la recta que pasa por los puntos A y D. Sea c1 la circunferencia de centro D y radio j. Sean E y F los puntos de intersección de la recta l y la circunferencia c1. Determinar el lugar de los puntos E, F, al recorrer D la recta k.

Consideraciones previas

- 1) En cuanto al modo de determinar el punto del lugar, notemos que al ser E, F puntos de intersección de circunferencia y recta, sus coordenadas pueden venir dadas por expresiones irracionales. Por otra parte, al ser E, F puntos de intersección de dos objetos geométricos previamente definidos, los nombres de sus coordenadas no pueden ser introducidos en el proceso (a fin de reconocer fácilmente las ecuaciones del lugar). Para evitar estos inconvenientes, E (o F) pueden determinarse mediante las dos relaciones siguientes:
 - E es un punto del objeto c1
 - E está en la recta l.
- 2) Hay tres tipos de puntos involucrados en la configuración que estamos considerando:
 - A, B, C son puntos libres (introducidos sin condiciones)
 - D, E son puntos sobre objetos previamente definidos
 - E es el punto del lugar (F se define lo mismo que E).
- 3) Este modo de tratar el problema conduce a las siguientes condiciones de determinación del lugar:
 - LC1) D es un punto aleatorio sobre la recta k (punto sobre objeto)
 - LC2) E es un punto aleatorio sobre c1 (punto sobre objeto)
 - LC3) E está en la recta l (condición final).

Paso 1: Generar el algoritmo geométrico

La configuración de la figura anterior, elaborada con The Geometer Sketchpad 3, permite generar el siguiente *script*, que supondremos alojado en el archivo conchoid.txt:

Given:

Point A

Point B

Point C

Steps:

- 1. Let [j] = Segment between Point A and Point B.
- 2. Let [k] = Perpendicular to Segment [j] through Point C.
- 3. Let [D] = Random point on Line [k].

- 4. Let [1] = Line between Point [D] and Point A.
- Let [c1] = Circle centered at Point [D] with radius length [j].
- 6. Let [E] = Random point on Circle [c1].

Paso 2: Traducir el algoritmo geométrico a código paramGeo para Derive Tras arrancar el traductor, abriendo el archivo conchoid.txt, presionando con el ratón el botón Derive y después el botón Translate, se genera automáticamente el siguiente archivo conchoid.mth (alojándose en el directorio de conchoid.txt):

```
Given:
A:=point(A_x, A_y)
B:=point(B_x, B_y)
C:=point(C_x, C_y)
Steps:
j:=segment(A, B)
k:=perpendicular(j, C)
D:=pointOnObject(D_x, D_y, k)
1:=line(D_, A)
c1:=circumCR(D_, j)
E:=pointOnObject(E_x, E_y, c1)
```

Paso 3: Ejecutar en Derive el archivo traducido

Tras abrir una sesión de trabajo en Derive, comenzamos cargando el paquete paramGeo como UtilityFile. A continuación, para sencillez de expresiones y sin perdida de generalidad, elegimos las coordenadas de los puntos libres, puntos sobre objetos y punto del lugar en la forma A = (0,0), B = (r,0), C = (c,0), D = (s,t), E = (X,Y). Finalmente, cargamos el archivo traducido como MathFile:

```
LOAD("c:/ ..... /paramGeo.mth")
A_x:=0
A_y:=0
B_x:=r
B_y:=0
C_x:=c
C_y:=0
```

D_x:=s D_y:=t E_x:=X E_y:=Y

Paso 4: Operar las condiciones que definen el lugar

Durante la ejecución, las condiciones relativas a puntos sobre objetos son alojadas automáticamente en la lista LREL. Vamos ahora a alojarlas, por separado, en las variables LC1 y LC2. Por último, la condición final $E \in l$, que podemos definir aplicando el comando isPlaced de paramGeo, será alojada en LC3. Resolviendo el sistema de estas tres ecuaciones respecto de las incógnitas X, Y, s, se obtienen las ecuaciones paramétricas del lugar en función de t, que alojamos en la variable LOCUS:

$$LREL = [s-c, (X-s)^2 + (Y-t)^2 - r^2]$$
 LC1:=LREL SUB 1
LC2:=LREL SUB 2
LC3:=isPlaced(E,1)
$$LC3 := -sY + tX$$
 LOCUS := SOLVE([LC1 = 0, LC2 = 0, LC3 = 0], [s, X, Y])
$$LOCUS = [s = c \land X = \frac{c(\sqrt{c^2 + t^2} + r)}{\sqrt{c^2 + t^2}} \land Y = \frac{t(\sqrt{c^2 + t^2} + r)}{\sqrt{c^2 + t^2}},$$

$$s = c \land X = \frac{c(\sqrt{c^2 + t^2} - r)}{\sqrt{c^2 + t^2}} \land Y = \frac{t(\sqrt{c^2 + t^2} - r)}{\sqrt{c^2 + t^2}},$$

Notemos que se han obtenido dos soluciones, una correspondiente al punto E y la otra al punto F (que se definían del mismo modo).

Para representar gráficamente el lugar a partir de las ecuaciones paramétricas obtenidas, basta dar valores numéricos a r y c. En la Figura 11 aparecen representadas (con Derive) las dos ramas de la curva del lugar, para r=1 y c=2.

En caso de que el lugar sea expresable en forma explícita, es posible definir un punto sobre él, usando Construct/Point On Object con The Geometer Skechpad 4, de un modo que nos sugirió el Prof. John Olive, consistente en teclear la función obtenida con paramGeo en la calculadora ofrecida con Graph/Plot New Function y dibujarla.

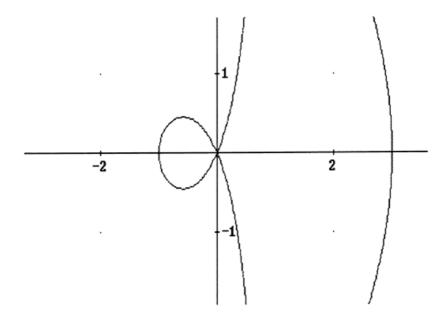


Figura 11

Para obtener la ecuación implícita del lugar, basta eliminar parámetros. Ello se consigue cómodamente trabajando en Maple, que dispone del comando de eliminación *eliminate*. Concretamente, para las mismas condiciones del lugar LC1, LC2, LC3 anteriormente consideradas, ejecutando:

se obtiene para el lugar del problema 6^o la ecuación implícita siguiente

$$(X^2 + Y^2)(X - c)^2 - r^2X^2$$

5 Comparación con las demostraciones clásicas

A fin de comparar el método automático de determinación de lugares presentado aquí con los métodos clásicos de demostración vía geometría sintética, vamos a considerar un último ejemplo al que se aplicarán ambas técnicas.

Problema 7⁰: Determinar el lugar de un vértice, G, de un rectángulo, cuyo vértice opuesto, C, es un punto fijo interior a una circunferencia en la que están situados los otros dos vértices, D y E, del rectángulo.

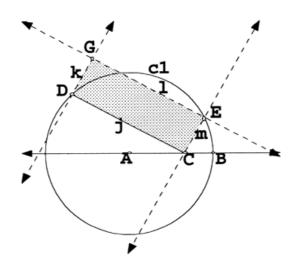


Figura 12

Por brevedad, pasamos directamente al código traducido a paramGeo sobre Maple (ello no supondrá dificultad, teniendo en cuenta que el proceso es similar al de los ejemplos anteriores, desarrollados paso a paso):

```
# Given:
A:=point(0, 0):
B:=point(r, 0):
C:=point(c, 0):
# Steps:
c1:=circumCP(A, B):
D_:=pointOnObject(d1, d2, c1):
j:=segment(C,D_):
k:=perpendicular(j,D_):
G:=pointOnObject(X, Y, k):
1:=parallel(j,G):
m:=parallel(k,C):
E:=intersection(m,1):
```

Planteado de este modo el problema, la condición final se reduce a considerar que el punto E está en la circunferencia c1. A continuación, las condiciones relativas a los dos puntos sobre objetos, alojadas en LREL, son realojadas, por separado, en las variables LC1 y LC2, y la condición final, $E \in c1$, es determinada aplicando isPlaced, siendo alojada en LC3.

LC1:=LREL[1] LC2:=LREL[2]

LC3:=isPlaced(E,c1)

Finalmente, aplicamos el comando eliminate a eliminar d1, d2 en el sistema formado por las tres condiciones del lugar, LC1, LC2, LC3. Teniendo en cuenta que se ha supuesto que C es punto interior a c1 y por tanto c < r y $D \neq C$, se obtiene como ecuación del lugar

$$X^2 - 2r^2 + Y^2 + c^2 = 0$$

es decir, la circunferencia de centro A y radio $\sqrt{2r^2-c^2}$.

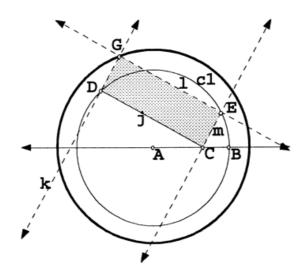


Figura 13

Este Problema 7º ya lo habíamos resuelto por otro método menos simple, basado en una aplicación reiterada del método de Wu [16].

Fue entonces cuando nuestro compañero de Junta Directiva de la Sociedad "Puig Adam", el Profesor Julio Fernández Biarge de la Univ. Politécnica de

Madrid, encontró para este problema una elegante solución vía geometría sintética, que reproducimos a continuación.

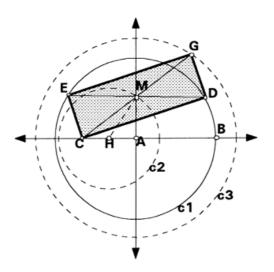


Figura 14

De acuerdo con la notación precedente, denotemos dist(C,A) = c y dist(A,D) = r. Sea M el centro del rectángulo CDGE y H el punto medio del segmento \overline{CA} . Por ser \overline{MH} una mediana del triángulo CAM, ser M punto medio de las diagonales del rectángulo CDGE y ser M el punto medio de la cuerda \overline{ED} de la circunferencia c1 (y, por tanto, recto el ángulo AMD), se tiene:

$$\overline{MH}^2 = (\overline{AM}^2 + \overline{CM}^2)/2 - \overline{CA}^2/4 = (\overline{AM}^2 + \overline{MD}^2)/2 - \overline{CA}^2/4 =$$

$$\overline{AD}^2/2 - \overline{CA}^2/4 = r^2/2 - c^2/4 \quad (constante)$$

En consecuencia, el lugar del punto M es la circunferencia c2 de centro H y radio $\frac{1}{2}\sqrt{2r^2-c^2}$. Ahora bien, las imágenes de los puntos M and H en la homotecia de centro C y razón 2 son los puntos G y A, respectively. Por tanto, el lugar del punto G es la circunferencia c3 de centro A y radio $\sqrt{2r^2-c^2}$.

Comparando el método automático de determinación del lugar utilizado al comienzo de esta sección 5, con la elegante demostración que acabamos de

exponer, la mente del matemático, admirador de la belleza del razonamiento deductivo, indudablemente se decanta en favor de esta última.

Pero no siempre se encuentra la idea feliz que conduce al hallazgo de un camino válido para encauzar una demostración por métodos clásicos de geometría sintética, en cuyo caso es muy útil el método automático propuesto aquí, que además permite determinar cómodamente las ecuaciones del lugar.

Por otra parte, comparando nuestro método paramGeo con otros métodos automáticos de demostración en Geometría Euclídea, entendemos que param-Geo tiene la ventaja de permitir seguir paso a paso el desarrollo del proceso, pudiendo opcionalmente obtener ecuaciones de cada uno de los objetos geométricos involucrados en el proceso, detectando así cualquier dificultad allí donde surge, sin desvincular al usuario del problema geométrico en estudio. Ello puede ayudarnos a encontrar una pista que nos ponga en camino de esa idea feliz que suele requerir una demostración vía geometría sintética.

Por último, mencionar que hay problemas geométricos para los cuales no es posible encontrar, o no se ha podido encontrar hasta hoy, una demostración totalmente sintética, como es, por ejemplo, la extensión descubierta por Miguel de Guzmán del anterior Problema 4º al caso de proyección en direcciones cualesquiera [4], extendida de nuevo a dimensión 3 por los dos primeros autores del presente artículo, utilizando un método automático de demostración [12].

En todo caso, la cooperación de los métodos basados en nuevas tecnologías para cálculo geométrico con los métodos clásicos de demostración está proporcionando nuevos frutos, como puede verse en el recientemente aparecido libro de Miguel de Guzmán [5].

6 Conclusiones

El paquete paramGeo permite automatizar el proceso de paso desde la construcción geométrica hasta la demostración mecánica, usando sucesivamente: el SGD The Geometer's Sketchpad, nuestro Traductor y nuestro "paquete paramGeo de geometría paramétrica" sobre el SCA Maple o Derive.

ParamGeo puede ser aplicado en tres procesos íntimamente relacionados: automatización de demostraciones; cálculo automático de coordenadas y ecuaciones; y determinación automática de lugares geométricos. Al igual que en el método de seudodivisiones de Wu, las "condiciones de degeneración" del problema geométrico son obtenidas automáticamente. Con paramGeo como denominadores, en vez de como coeficientes multiplicadores.

ParamGeo permite seguir paso a paso el desarrollo del algoritmo geométrico, lo que ayuda a descubrir cualquier dificultad allí donde surge, sin desvincular al usuario del problema geométrico en estudio.

Agradecimientos: Al Prof. Tomás Recio, de la Univ. de Cantabria, que nos motivó a interesarnos en el problema de conectar los SGDs con los SCAs. Al Prof. J. Olive, de la Univ. de Georgia (U.S.A), que nos sugirió la posibilidad de regresar al SGD, una vez obtenida la ecuación del lugar, como se indica en la sección 4. Y al Prof. Julio Fernández Biarge, de la Univ. Politécnica de Madrid, que nos proporcionó la bella demostración sintética del problema 7º, incluida en la sección 5.

Referencias

- [1] F.J. Blanco Silva, Sobre la demostración automática de un teorema geométrico. Bol. de la Soc. "Puig Adam", 53, págs. 78-81 (1999).
- [2] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, varieties and algorithms*, Springer-Verlag 1992.
- [3] S.C. Chou, Mechanical Geometry Theorem Proving, Reidel 1988.
- [4] M. de Guzman: An extension of the Wallace-Simson theorem: projecting in arbitrary directions. American Math. Monthly, Vol. 106, Núm. 6, págs. 574-580, June-July (1999).
- [5] M. de Guzman: La experiencia de descubrir en Geometría, Nivola 2002.
- [6] T. Recio, Cálculo simbólico y geométrico, Ed. Síntesis 1998.
- [7] E. Roanes-M. and E. Roanes-L, Nuevas Tecnologías en Geometría, Editorial Complutense 1994.
- [8] E. Roanes-L. and E. Roanes-M., Automatic Theorem Proving in Elementary Geometry with DERIVE 3, *The International DERIVE Journal*, 3(2), 67-82 (1996).

- [9] E. Roanes-L. and E. Roanes-M., Mechanical Theorem Proving in Geometry with DERIVE-3. En: Teaching Mathematics with Derive and the TI-92 (Edited by B. Bärzel), págs. 404-419, ZKL-Texte Nr.2, Münster (1996).
- [10] E. Roanes M., E. Roanes L.: Cálculos matemáticos por ordenador con Maple. Ed. Rubiños 1999.
- [11] E. Roanes M., E. Roanes L.: Búsqueda Automática de Lugares Geométricos. Bol. Soc. "Puig Adam", 53, págs. 67-77 (1999).
- [12] E. Roanes M., E. Roanes L., Extension a \mathbb{R}^3 con seudodivisiones de los teoremas de Simson-Steiner-Guzmán. Actas EACA'2000, 331-340 (2000).
- [13] E. Roanes M., E. Roanes L., Automatic determination of geometric loci. 3D-extension of Simson-Steiner's Theorem. En: John A. Campbell and E. Roanes-Lozano (Eds.), Proceedings of AISC'2000, Springer-Verlag, LNCS 1930, págs. 157-173 (2001).
- [14] E. Roanes M., E. Roanes L., Lugares geométricos encontrados con ayuda del Algebra y la Geometría, Bol. Soc. "Puig Adam", 57, págs. 62-79 (2001).
- [15] E. Roanes M., E. Roanes L., The paramGeo package, Proceedings of ACA'2001, (electronic version), University of New Mexico, 2001.
- [16] E. Roanes M., E. Roanes L., Computational determination of geometric loci by an iterative method. En: N. Coll, J.A. Sellares (Eds.) Actas del IX Encuentros de Geometría Computacional, Universitat de Girona, págs. 147-156 (2001).
- [17] E. Roanes M., E. Roanes L., Condiciones locales y globales para la determinación de lugares. En: Julio Rubio (Ed.), Actas del EACA'2001, págs. 246-250 (2001).
- [18] J.L. Valcarce, F. Botana, Rex, Discovery, Lugares. Universidad de Vigo, 2001 (rosalia.uvigo.es/sdge/)
- [19] http://www.mmrc.iss.ac.cn/xgao/gex.html

El Álgebra [geométrica] de Euclides a Ommar Khayyam

Francisco A. González Redondo

Dpto. Álgebra. Facultad de Educación Universidad Complutense de Madrid faglezr@edu.ucm.es

Abstract

In this paper the so-called "geometric algebra" is analyzed from Helenistic Greece to medieval Arabic mathematician Ommar Khayyam, taking as starting point Ivor Grattan-Guinness' historiographical perspective and a two-fold approach from the quantitational and the equational points of view.

Introducción

En el tratamiento de los "estilos algebraicos" que presentó Ivor Grattan-Guinnes [1] en un marco congresual sobre "Paradigmas y Matemáticas", concretaba sus consideraciones teóricas e historiográficas generales ejemplificando con los *Elementos* de Euclides lo que desde los trabajos de H. G. Zeuthen y P. Tannery (después los de T. Heath, O. Neugebauer, etc.) se ha venido considerando un "álgebra geométrica" presente de forma implícita en el magno tratado del alejandrino, "el álgebra común en la versión que sería desarrollada por los árabes y después por los europeos durante el Renacimiento".

Contra la aceptación de esta visión otros autores (E. J. Dijsterhuis, A. Szabo, S. Unguro y otros) argumentaban [1], entre otras cosas, que:

- 1) El "estilo" de los Elementos no es algebraico: no hay ecuaciones ni letras.
- 2) Si Euclides hubiera "pensado algebraicamente" habría presentado diversas construcciones correspondientes a nuestras ecuaciones cuadráticas actuales que no existen en su tratado.

3) Surgen problemas dimensionales en el tratamiento algebraico de las relaciones magnitudinales.

Él mismo añadía que:

- 4) En su geometría Euclides nunca multiplica una magnitud por otra, aunque en su aritmética sí se multiplican un número por otro.
- 5) Aunque Euclides habla de igualdades entre números y magnitudes, nunca dice que una razón sea igual a otra, sino que distingue los casos en los que son la misma de aquellos en los que son diferentes.
- 6) El método utilizado por Euclides para componer razones de ninguna manera puede considerarse una multiplicación.

Sus consideraciones, certeras, no van mucho más allá, y quedan pendientes de desarrollar. Si en otras ocasiones [2] hemos realizado aportaciones críticas constructivas discrepando justificadamente del insigne historiador de la Matemática, la tarea que se inicia en las páginas que siguen es la de reconocer, completar, precisar, matizar, aclarar y ejemplificar al maestro desde la perspectiva histórica a la que él solamente alude lejanamente y deja pendiente, la Historia del Análisis Dimensional [3].

1 Sobre la homogeneidad de las relaciones magnitudinales en las antiguas civilizaciones: Mesopotamia y Egipto

Sin retrotraernos hasta la Prehistoria de la Humanidad, sí parece interesante que, a modo de prólogo, comencemos esta breve síntesis histórica indagando acerca de las primeras apariciones de los conceptos magnitudinales y ecuacionales [relaciones entre magnitudes] al menos en la Prematemática del Oriente próximo [4, 5]. Así, por ejemplo, para Boyer [6] la geometría mesopotámica habría sido, esencialmente, el número aplicado a la extensión espacial, es decir, operaciones entre medidas de cantidades geométricas. O, como también se ha sugerido [7], operaciones entre "números denominados heterogéneos".

En particular, para los "matemáticos" babilónicos, todo segmento y toda área representarían simplemente un número -una excusa para una operación algebraica-, de modo que no se plantean ningún problema sumando el área de un rectángulo a su base, o restando una longitud de un área, es decir, longitudes y áreas

pueden sumarse o multiplicarse sin restricciones. Por ejemplo [8], en el texto AO 8862 puede leerse:

Problema. Longitud, anchura. He multiplicado largo por ancho obteniendo de esta forma el área. A continuación le he sumado al área el exceso del largo sobre el ancho: [resultado] 183.

Sin embargo, en el único problema (de los denominados "aha", "lo buscado") que se conserva en un papiro egipcio¹ (el de Berlín [7]) donde se trata un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, en el que una de ellas es de segundo grado, se lee:

Problema. La suma de las áreas de dos cuadrados es 100. Tres veces el lado de uno es cuatro veces el lado del otro. Determinar los lados de los cuadrados.

En notación actual el problema consistiría en hallar x e y tales que

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$3x = 4y$$

Es decir, en la primera ecuación se opera "dentro" de la magnitud "área", y el resultado es [la medida de] otra cantidad de la misma magnitud, mientras que en la segunda se manejan longitudes. Así, en contraste con los procederes en Mesopotamia, los egipcios se someten al principio de homogeneidad, al que permanecerán fieles hasta el período helenístico, según se observa a partir de diversos papiros demóticos del siglo III a. C. [9].

2 Álgebra y Geometría: consideraciones magnitudinales en la Matemática helénica

Si aceptamos las opiniones que se sintetizan en Van der Waerden [8, 9, 10], los pitagóricos habrían desarrollado sus doctrinas en torno al concepto de número y todo su misticismo a partir de las concepciones babilónicas (que Pitágoras habría

¹ Realmente, lo que se conoce acerca del cultivo de nuestra Ciencia en el antiguo Egipto se limita, prácticamente, al contenido de unos pocos papiros; documentación a todos ojos demasiado exigua como para concluir que tenemos un panorama aceptable de lo que supuso y que, más bien, no debamos esperar ansiosos nuevos descubrimientos por parte de la Arqueología matemática.

conocido en sus viajes). Análogamente, en el "álgebra geométrica" (p.e. del Libro II de los *Elementos* de Euclides²) que se atribuye a los pitagóricos parece asumirse que constituye una continuación del Álgebra babilónica... formulada geométricamente en una síntesis rigurosa con otras tradiciones tomadas de la matemática egipcia³.

La filosofía pitagórica afirmaba que todo objeto (en consecuencia, toda figura geométrica) estaba formado por un número de "átomos", de modo que los resultados tanto aritméticos como geométricos podrían demostrarse (mejor "mostrarse") visualmente.

En su Geometría, dados dos segmentos, AB y CD, siempre existía una unidad de medida lo suficientemente pequeña para que se midieran exactamente AB y CD: si la mayor unidad de medida común a AB y CD (obtenida por *antiphairesis*) cabe exactamente M veces en M y M veces en M y M veces en M or ve

$$AB:CD=m:n.$$

Sin embargo, hacia mediados del siglo V a. C. se descubrió la existencia de pares de segmentos inconmensurables: no admitían ninguna unidad de medida que los midiese a los dos exactamente (diagonal y lado del pentágono, o diagonal y lado del cuadrado): la razón de uno a otro no era un número racional.

En suma, una ecuación (en lenguaje y notación nuestra actual, no de entonces) del tipo $x^2 = 2$, que no podía resolverse en el campo numérico (medidas de cantidades de magnitudes) sí se podía intentar resolver en el dominio de las magnitudes, manejando cantidades directamente, en vez de operar con sus medidas.

Con Eudoxo, partícipe de la filosofía platónica de la indivisibilidad de la unidad, el abandono de las operaciones con medidas de las cantidades por las operaciones entre las propias cantidades es tal que la fracción (diríamos hoy) a/b, con ay b naturales y $b \neq 0$, se define como el resultado de la comparación de dos cantidades concretas de una magnitud (única, cualquiera). Así lo recoge Euclides en el Libro V de sus *Elementos* [11]:

² Ediciones de los *Elementos* de Euclides hay varias, algunas en castellano. Aquí se utiliza la versión [10] de Sir Thomas Heath de 1926.

³ Las ideas que apunta Van der Waerden en 1961 [8] evolucionan en sus libros posteriores de 1983 [9] y 1985 [10].

Definición 3. Una razón es una cierta relación con respecto al tamaño de dos magnitudes del mismo tipo.

Es decir, en nuestro lenguaje simbólico, dados $a, b \in N$, existe a/b si y sólo si

$$a/b = (X_1)/(X_2), con(X_1), (X_2) \in "x" \iff (X_1) = a/b \cdot (X_2)$$

Como hace notar Klein [12], esta definición sirve tanto para números como para magnitudes geométricas, pero siempre por separado, pues los griegos hacían una clara distinción entre ambos ámbitos. De este modo sólo existirían fracciones [para nosotros; "razón entre naturales" para Eudoxo] en tanto en cuanto que medidas de unas cantidades en función de otras. Las fracciones tal y como las entendemos actualmente sólo empezarían a aparecer en la matemática griega con Eratóstenes y Arquímedes, nunca en Euclides.

Sin embargo, esta vía abre el camino para la estructuración algebraica del concepto de magnitud, en tanto que sometidos a la homogeneidad magnitudinal [sólo son legítimas comparaciones entre cantidades de la misma magnitud], aparece lo que desde la perspectiva del Álgebra moderna denominamos "operación interna" en un conjunto... que ya veíamos en los "problemas aha" egipcios pero no en el "álgebra" babilónica.

Por otro lado, el Axioma de Eudoxo-Arquímedes, recogido (como todos los demás, en formulación retórica) en el mencionado Libro V de los *Elementos*:

Definición 4. Dos magnitudes se dice que tienen una razón la una a la otra si se puede encontrar un múltiplo de una de ellas que sea mayor que la otra.

(donde, desde el punto de vista que se adopta en este trabajo, por "tener una razón la una a la otra" debe entenderse que "las dos cantidades son comparables"), lleva implícita la aceptación de la existencia de una operación externa sobre la magnitud determinada, es decir, sobre el conjunto de "cantidades homogéneas" o "magnitudes del mismo tipo", según la terminología de los autores y las traducciones de los clásicos [13].

Una vez introducido el concepto de razón (que no de fracción), avanzando en el Libro V se llega a:

Definición 5. Se dice que unas magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera, y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la

cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente.

En notación [y concepción] actual, a/b = c/d si y sólo si dados cualesquiera $m, n \in N$:

$$ma < nb \implies mc < nd$$

 $ma = nb \implies mc = nd$
 $ma > nb \implies mc > nd$

Interpretado desde hoy -con todas las precauciones que el tema exige-, Eudoxo separa la clase de números racionales m/n en dos subclases, dependiendo de si ma < nb ó ma > nb, lo que recuerda a la definición de número real de Dedekind ([14], método de las cortaduras), habiéndose llegado a afirmar [15] que constituye la primera teoría del número real > 0.

Estas consideraciones, junto a las restantes de este Libro V constituyen, ciertamente, los fundamentos de lo que hoy puede llamarse una "teoría de las magnitudes", aunque desde la Historia de la Matemática usual se suele denominar "Álgebra de las Proporciones". Sobre ella afirmaban Michel e Itard [16]:

"Es una teoría que ni un Galileo ni un Torricelli han conseguido comprender, a pesar de sus esfuerzos, y cuyo principal defensor en el siglo XVII, Barrow, dirá que es el coco de los matemáticos y los filósofos de su época. Tratándose de una teoría que ha tenido que esperar hasta Dedekind para ser asimilada"

3 Sobre la existencia de consideraciones ecuacionales en el Álgebra [geométrica] griega

Por lo apuntado hasta ahora, no cabe esperar encontrar en la Matemática helénica el tratamiento de las ecuaciones, es decir, de las igualdades entre medidas de cantidades. Lo que desarrollarán, en todo caso, es un álgebra entre cantidades de magnitudes geométricas: ésa sería el "álgebra geométrica" griega. Así lo describe Heath [11]: "Solamente se necesitaba el descubrimiento de segmentos inconmensurables para representar geométricamente mediante un rectángulo el producto de dos magnitudes cualesquiera, racionales o irracionales; y fue posible avanzar de una aritmética geométrica a un álgebra geométrica".

Así, las operaciones elementales en esa álgebra [geométrica] plana serían [10] tres: 1) la *suma* de dos segmentos, que es otro segmento y además, de acuerdo con la segunda de las 'nociones comunes', es único; 2) la *suma* de dos polígonos es otro y único polígono; y 3) el *producto* de dos segmentos es un rectángulo, debiendo resaltarse que este *producto* es un objeto geométrico, no el resultado de una multiplicación numérica.

En el espacio se definirían otras dos operaciones: 4) la *suma* de volúmenes; y 5) el *producto* de un segmento por un polígono plano para formar un prisma de base igual al polígono y altura la del segmento.

La operación inversa de la *suma* sería la *resta* de un segmento, o un área o un volumen pequeño de uno más grande.

Un ejemplo ilustrativo que integra las características principales de este álgebra [geométrica] puede tomarse del Libro II de los *Elementos*.

Proposición 5. Si se divide un segmento en dos segmentos desiguales, el rectángulo contenido por los segmentos desiguales del total, junto con el cuadrado sobre el segmento mitad entre los puntos de la diferencia es igual al cuadrado sobre la mitad del segmento total.

En notación actual (inexistente en Euclides), si x e y son los dos segmentos distintos (supongamos que x > y) entonces:

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$
.

Esta álgebra [geométrica], de aceptarse su existencia como tal, puede seguir estudiándose en las *Cónicas* de Apolonio, donde las operaciones características de las secciones cónicas se formulaban mediante operaciones geométricas sobre segmentos, por un lado, y superficies planas, por otro, con las mismas propiedades que la suma y la multiplicación habituales en nuestra Álgebra elemental.

Complementariamente, puede apuntarse que en otros lugares de los Elementos, como en el Libro VI, se tienden puentes entre el álgebra geométrica y el álgebra de las proporciones:

Proposición 14. En paralelogramos iguales [de igual área] y equiángulos, los lados de ángulos iguales son recíprocamente proporcionales; y los paralelogramos equiángulos en los que los lados de los ángulos iguales son recíprocamente proporcionales son iguales.

Para el caso particular de dos rectángulos lo que dice la Proposición es que si el rectángulo de lados b y c es igual al rectángulo de lados a y d, se tiene la proporcionalidad:

$$a:b=c:d$$
,

y recíprocamente [11].

La traducción directa a la Geometría -sin utilizar números (medidas de las cantidades implicadas)- de las medidas y razones de los cálculos babilónicos expresados en las ecuaciones de primer y segundo grado, se realiza en la denominada 'aplicación de áreas', tal como se expone en los Libros II y VI de los *Elementos*, en los que [17] "se anexiona a la geometría todo el segundo grado".

Las 'aplicaciones' son tres [10]:

a) La aplicación simple o *parábola*: construir sobre un segmento dado un rectángulo de área dada; es decir, si *a*, *b* y *c* son longitudes conocidas, y *x* es la longitud buscada, resolver

$$ax = bc$$
.

b) La aplicación en defecto o *parábola en elipse*: construir sobre un segmento dado un rectángulo de área dada, bc, pero de base demasiado corta, de modo que haya que completar con un cuadrado, x^2 , de lado x, para cubrir todo el segmento; en notación actual:

$$ax = x^2 + bc$$
.

c) La aplicación en exceso o *hipérbola*: construir el rectángulo bc sobre el segmento a completado con el segmento x, es decir, con el 'exceso' de x^2 :

$$ax + x^2 = bc$$
.

Para cerrar el parágrafo debe mencionarse la *Aritmética*, contribución de un matemático [helenístico] posterior, ya del s. III d. C., Diofanto de Alejandría, que tendría gran importancia en todos los desarrollos posteriores. En su tratado: a) desarrolla un Álgebra numérica -con números, 'liberados' de consideraciones magnitudinales- directamente inspirada en los métodos de resolución de ecuaciones de la tradición babilónica aún perdurable; y b) desarrolla un simbolismo novedoso para la notación algebraica que le convierte en el primer autor -y, por tanto, iniciador- de esta fase de la Historia del Álgebra conocida como 'álgebra sincopada', que culminará en Vieta.

4 El Álgebra en el mundo árabe medieval

4.1 Muhammad ben Musa Al-Khwarizmi

En el largo camino hacia la formalización del concepto de magnitud faltaba la cantidad nula (0), y, en consecuencia, la posibilidad de que para un elemento de un cierto conjunto en el que esté definida la suma exista simétrico (opuesto) con respecto a dicha operación. Esta necesidad empezó a intuirse mucho más tarde [10, 17, 18]; inicialmente sólo como símbolo de numeración. Así, podemos leer en Al-Khwarizmi (primera mitad del s. IX):

"Cuando después de restar no queda nada, escríbase un círculo pequeño para que no quede vacía la posición"

Al-Khwarizmi suele considerarse el primer matemático que escribió sobre la solución de problemas mediante *al-jabr* y *al-muqabala*, ⁴es decir, añadiendo a los dos términos de una ecuación la misma cantidad para eliminar términos negativos, y reduciendo los términos positivos restando cantidades iguales respectivamente. Estas técnicas de resolución, sin embargo, habían sido desarrolladas anteriormente y descritas, con numerosos ejemplos, en la *Aritmética* de Diofanto.

El Álgebra de Al-Khwarizmi, aunque afirma haberlo construido esencialmente sobre el Libro II de los *Elementos* y los *Datos* de Euclides, está, como reconoce en la introducción, "en contradicción con los matemáticos griegos", pues pretende que "sirva para las necesidades y fines prácticos" [10, 19] y, además, se apoya en los métodos de Diofanto.

En este tratado se enfrenta a la resolución de ecuaciones cuadráticas. Lo hace de dos maneras: a) solución numérica; y b) demostración geométrica. En la comparación entre ambas se comprueba la laxitud de sus exigencias de rigor, pues en la primera le resulta necesario prescindir de la naturaleza magnitudinal (el que sean medidas de cantidades) de las variables que aparecen en las ecuaciones, mientras en la segunda se realizan siempre dentro de la misma magnitud.

Por ejemplo, enuncia el siguiente [10]

Problema: Cuál debe ser el cuadrado $[x^2]$ que cuando se aumenta mediante diez de sus propias raíces [x] suma treinta y nueve.

⁴ En el nombre de este matemático y en la primera "técnica" pueden verse los orígenes de los actuales términos 'algoritmo' y 'álgebra'.

En notación actual (pero no olvidemos que de ninguna manera se trata de la original) equivale a resolver la ecuación

$$x^2 + 10x = 39$$
.

El proceso "retórico" que sigue en la "solución numérica" es el que transcribo a continuación literalmente [11], aclarando algunos pasos entre corchetes: Divide por dos el número de raíces, que aquí da cinco [10/2 = 5], y se multiplica por sí mismo $[(10/2)^2]$, lo que da veinticinco. Añádase a esto treinta y nueve [término independiente]; la suma da sesenta y cuatro [25+39 = 64]; tómese la raíz de esto, que es ocho y réstesele la mitad del número de raíces, que es cinco. El resto es tres. Ésta es la raíz del cuadrado que se buscaba. El cuadrado es nueve.

Al-Khwarizmi no considera que ha hallado la solución, sino simplemente que la ha 'ilustrado'. El proceso seguido, en notación algebraica actual, comienza sumando a ambos miembros de la ecuación la misma cantidad, 5².

$$x^{2} + 10x + \left[\frac{1}{2}10\right]^{2} = 39 + \left[\frac{1}{2}10\right]^{2},$$

de donde se llega a

$$x^{2} + 10x + 25 = 39 + 25 \rightarrow (x+5)^{2} = 64.$$

Por tanto

$$x + 5 = \sqrt{64} = 8 \rightarrow x = 8 - 5 = 3.$$

Después de la ilustración numérica halla geométricamente (Figura 1) la solución del problema. Construye un cuadrado de lado la raíz *x* buscada. En los cuatro lados construye rectángulos de altura 1/4 de 10. El cuadrado, junto con los cuatro rectángulos es igual a 39 [unidades de superficie].

Para completar el cuadrado 'grande' debe añadir cuatro nuevos cuadrados de lado 1/4 de 10, es decir, 25 [unidades de superficie]. Entonces el área de este cuadrado es 64 y su lado es 8. Por tanto, el lado x del cuadrado original, que es lo que se busca, vale x = 8-5 = 3.

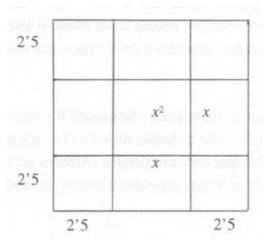


Figura 1.

Junto a esta 'demostración' geométrica tan rebuscada, Al-Khwarizmi presenta otra (Figura 2), más sencilla, en la que se construyen dos rectángulos de base 5 sobre solamente dos lados del cuadrado de lado x. Este procedimiento se encontraba ya en la Proposición 4 del Libro II de Los Elementos [11].

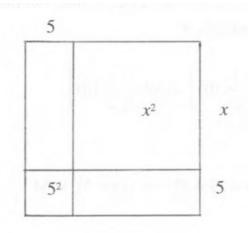


Figura 2.

En el Álgebra de Al-Khwarizmi se asignan letras a los segmentos rectilíneos en las demostraciones geométricas, pero los coeficientes de las ecuaciones son todos números concretos, representados por los numerales o escritos con palabras. Aunque en su exposición está implícita la idea de que los resultados son generales, de hecho no disponía de ninguna manera de expresar algebraicamente las proposiciones generales. Sus contribuciones las desarrollarán otros matemáticos árabes posteriores.

4.2 Ommar Khayyam

Para Ommar Khayyam ([21], segunda mitad del s. XI⁵) el "arte de *al-jabr* y *al-muqabala*" es un arte matemático "cuyo objeto es el número puro y las magnitudes medibles, en tanto que son desconocidas, sumadas a cosas conocidas con cuya ayuda pueden hallarse".

En los escritos de Khayyam se distinguen claramente los problemas en los que la incógnita es un número que debe calcularse (Álgebra numérica) de los problemas en los que la incógnita es una magnitud medible que debe construirse (Álgebra geométrica), recordando que Euclides primero demuestra los teoremas referidos a proporcionalidades de magnitudes geométricas y después los mismos teoremas para los números [23].

Al tratar el postulado de las paralelas en su *Discusión sobre las dificultades en Euclides* [22, 23], se encuentra Khayyam con el problema del movimiento de un segmento que se mueve perpendicularmente a otro dado, y se pregunta "¿cómo pueden relacionarse la geometría y el movimiento?". A resolver el problema dedica la Parte I "Sobre la Verdad de las Paralelas y la Discusión de la Famosa Duda".

Continúa su estudio en la Parte II "Razones y Proporciones", en la que escribe [22]: "El autor de los *Elementos* define una razón como medida que relaciona dos magnitudes del mismo tipo. Dos magnitudes del mismo tipo cuya diferencia tiene significado. Por ejemplo, la diferencia entre una longitud y un área no tiene significado alguno, puesto que la longitud es unidimensional y el área de dos dimensiones. La línea con una dimensión, la superficie con dos dimensiones, el sólido con tres dimensiones y el tiempo, la medida del movimiento, son magnitudes y por tener significado forman parte de la Sabiduría".

Reconoce Khayyam que no es habitual mencionar el tiempo entre los objetos de los problemas de *al-jabr*, pero si se puede incluir debe mencionarse [21]. Por otro lado, considera que para toda magnitud medible existe una unidad dada y todos los demás valores de esa magnitud se definen a partir de esa unidad, pero esta razón "es desconocida en lo que a su significado se refiere. No puede definir-se mediante medición. Este tipo de razón sólo se define lógicamente. Este tipo de razón no se conoce mediante números".

Por ejemplo, cuando quiere demostrar que dadas tres magnitudes A, B y D del mismo tipo, A/D está compuesta por A/B y B/D procede como sigue: "Elegida una

⁵ Aunque tradicionalmente se ha venido considerando como una única persona al Khayyam poeta y el matemático, las investigaciones de los últimos años más autorizadas (las de R. Rashed) han permitido concluir de forma generalizada que se trata de dos personajes distintos.

unidad sea A/B la razón de la unidad a otra magnitud R. Estudiemos el valor de R no desde el punto de vista de una magnitud tal como longitud, área, volumen o tiempo, sino como un valor abstracto y en lo que se refiere a su pertenencia a los números". Y concluye afirmando que si A/B no es realmente una razón numérica, no se puede encontrar en la aritmética un número para aquella razón; y pone como ejemplos de magnitudes que no pueden dividirse en "unidades" a las raíces cuadradas de 5 y 10.

En las operaciones del Álgebra [21], en la expresión de igualdades entre potencias, en suma, en las ecuaciones, aparecerán de varios tipos: "es la dimensión simple, es decir, la raíz la que es la magnitud; cuando se toma el lado con su cuadrado, tenemos las dos dimensiones que son la superficie; y el cuadrado como magnitud es la superficie cuadrada; a continuación están las tres dimensiones que hacen el sólido, y el cubo sólido como magnitud es el sólido que está rodeado por seis caras cuadradas; y como no hay ninguna otra dimensión, no está entre las magnitudes el cuadrado del cuadrado ni nada de lo que viene a continuación".

En su Álgebra el uso del cuadrado del cuadrado, así como del resto de las incógnitas que pueden hallarse con el arte, se hace solamente en un sentido metafórico y no literal. Primero resuelve ecuaciones lineales y cuadráticas mediante los métodos geométricos de Euclides para, a continuación, resolver ecuaciones cúbicas mediante intersección de cónicas.

Para evitar las inconsistencias lógicas de sus predecesores introduce una unidad de longitud que, dependiendo del punto de vista que se quiera adoptar, puede interpretarse que sirve para 'homogeneizar' o 'deshomogeneizar' la ecuación. Afirma Khayyam: "Siempre que diga en este tratado que un número es igual a una superficie, debe entenderse por el 'número' una superficie con todos sus ángulos rectos y un lado de longitud unidad, siendo el otro lado igual al número dado".

Mediante este procedimiento, la superficie rectangular puede considerarse que queda dividida en cuadrados unidad, y "cada una de las partes del área es igual al segundo lado, es decir, el lado que suponemos igual a la unidad".

⁶ En [23] la idea la expresa en la forma siguiente: "Existen solamente cuatro cosas en la realidad de todas las que utilizan los algebristas como magnitud continua: el número (independientemente de las magnitudes y que no existe en la realidad), el objeto (denotado por una línea), el cuadrado (denotado por un cuadrilátero con ángulos rectos cuyos lados son iguales a la línea llamada objeto), y el cubo [...] el cuadrado cuadrado que se conoce entre los algebristas como el producto de un cuadrado por otro cuadrado no tiene sentido en los valores continuos [...] un objeto de más de tres dimensiones es imposible".

⁷ Sobre la adaptación de esta herramienta de Khayyam por René Descartes en su *Geometria* puede verse [24].

Este recurso lo utiliza a lo largo de su tratado para resolver numerosos problemas. Por ejemplo, al tratar seis tipos de ecuaciones cúbicas en las cuales se iguala un binomio a un monomio, considera el "primer tipo [21]: un cubo más [un número de] lados igual a [un] número". Es decir, hay que resolver:

$$x^3 + ax = b.$$

Para hallar la solución, construye un cuadrado c^2 igual al número dado b. A continuación un prisma de base c^2 y altura h igual al número dado b. Es decir, el prisma de lados c, c y h se ha hecho igual al prisma de lados e, e y be, donde e es la unidad de longitud. De esta manera, la ecuación se escribe en 'forma homogénea':

$$x^3 + c^2 x = c^2 h$$
.

En esta nueva ecuación, c y h son segmentos dados. A partir de aquí Khayyam resuelve la ecuación geométricamente mediante intersección de cónicas.

5 Consideraciones finales. Hacia Vieta

En la Edad Media comienza un proceso (que durará hasta el s. XIX) en el cual se va desarrollando: a) por un lado, un sistema de notaciones algebraicas adecuado para expresar leyes abstractas; y b) por otro, una noción de "número" suficientemente amplia como para permitir el tránsito de casos particulares diferenciados a concepciones generales.

Estadios singulares lo constituyen las aportaciones de los algebristas italianos (sobre todo, también, pero con menor relevancia, algunos alemanes y franceses), la individual de François Vieta (por ejemplo, cuando en el Capítulo II de su *In Artem Analyticem Isagoge* (1591) introduzca la doble conversión de proporciones entre las magnitudes a igualdades y viceversa al escribir que "una proporción puede decirse que es la composición de una ecuación y una ecuación la resolución de una proporción" [25]) o el paso capital de L. Euler (introduciendo finalmente las expresiones ecuacionales entre magnitudes en su *Mecánica sive motus scientia analytice exposita* de 1736 [26]). Pero a todo ello dedicaremos próximos trabajos.

Bibliografía

- [1] GRATTAN-GUINNESS, I. (1996) "Normal Mathematics and its Histor(iograph)y: the tenacity of algebraic styles". En E. Ausejo y M. Hormigón (eds.) *Paradigms and Mathematics*, pp. 203-213. Madrid, Siglo XXI.
- [2] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2002) "Martins, Grattan-Guinness y Gillespie". *Llull. Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, vol. 25, 17-27.
- [3] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2000) *Historia del Análisis Dimensional*. Tesis Doctoral en Matemáticas. Universidad Politécnica de Madrid.
- [4] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2002) "Un modelo historiográfico para las Ciencias. La evolución de la Matemática hasta su establecimiento como disciplina científica". *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, nº 61, 84-93.
- [5] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2002) "Sobre la naturaleza histórica de la Matemática y su enseñanza". *Arbor*, vol. 173, nº 681, 203-223.
- [6] BOYER, C. B. (1968) A History of Mathematics. New York, Wiley.
- [7] BUNT, L. N. H. et al. (1976) The Historical Roots of Elementary Mathematics. New Jersey, Prentice-Hall.
- [8] VAN DER WAERDEN, B. L. (1961) *Science Awakening*. New York, Oxford University Press.
- [9] VAN DER WAERDEN, B. L. (1983) Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. Berlin, Springer-Verlag.
- [10] VAN DER WAERDEN, B. L. (1985) A History of Algebra. From Al-Khwarizmi to Emmy Noether. Berlin, Springer-Verlag.
- [11] HEATH, T. (1926) *The Thirteen Books of The Elements*. Oxford, Clarendon Press. [Reimpresión en Dover, New York, 1956].
- [12] KLEIN, J. (1968) *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*. [Reimpresión en Dover, New York, 1992].
- [13] REY PASTOR, J. (1948) Curso Cíclico de Matemáticas. Madrid.
- [14] Dedekind, R. (1901) Essays on the Theory of Numbers. London, Open Court. [Reimpresión en Dover, New York, 1963].
- [15] BOURBAKI, N. (1972) Elementos de Historia de las Matemáticas. Madrid, Alianza.
- [16] MICHEL, P. H. e Itard, J. (1971) "Aritmética y Geometría". En R. Taton (dir.) *Historia General de las Ciencias*, vol. 1, pp. 248-256. Barcelona, Destino.
- [17] ARNDT, A. B. (1983) "Al-Khwarizmi". Mathematics Teacher 76, 668-670.
- [18] TOOMER, G. J. (1973) "Muhammad ben Musa al-Khowarizmi". En C. C. Gillespie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 7, 357-365. New York, Scribner's.

- [19] RASHED, R. (1989) "Where Geometry and Algebra Intersect". *Unesco Courier* (noviembre), 37-41.
- [20] YOUSCHKEVITCH, A. P. y ROSENFELD, B. A. (1973) "Al-Khayyami (or Khayyam), Umar". En C. C. Gillespie (ed.) *Dictionary of Scientific Biography*, vol. 1, 323-334. New York, Scribner's.
- [21] WINTER, H. J. J. y ARAFAT, W. (eds.) "The Algebra of Umar Khayyam". *Journal of the Royal Asiatic Society of Bengal*, 16, 27-78.
- [22] AMIR-MOEZ, A. R. (1959) "Discusion of Difficulties in Euclid". *Scripta Mathematica* 23, 275-303.
- [23] AMIR-MOEZ, A. R. (1962) "A Paper of Omar Khayyam". Scripta Matematica 26, 323-337.
- [24] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (1996) "Las concepciones dimensionales en la obra de René Descartes". En F. A. González Redondo y P. Dávila Álvarez (eds.) *Anuario Científico 1995 del Grupo de Análisis Dimensional*, pp. 109-115. Universidad Politécnica de Madrid.
- [25] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (1995) "Historia del Postulado General de Homogeneidad. En torno a F. Viete (1591)". En F. A. González Redondo y P. Dávila Álvarez (eds.) *Anuario Científico 1994 del Grupo de Análisis Dimensional*, pp. 167-174. Universidad Politécnica de Madrid.
- [26] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2002) "La contribución de Leonard Euler a la matematización de las magnitudes y de las leyes de la Mecánica, 1736-1765". *Llull. Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*. [En prensa].

Un problema de Geometría resuelto con MATHEMATICA

Nicolás Rosillo

Dpto. Matemáticas, IES Máximo Laguna. Santa Cruz de Mudela, Ciudad Real nrosillo@olmo.pntic.mec.es

Abstract

This note shows how a computer algebra system can help us in order to proof geometric questions. In the case detailed below, Mathematica does not only obtains the desired conclusion, but another non expected three ones.

1. Introducción

De forma quincenal, Ricardo Barroso, propone en su Laboratorio virtual de triángulos con Cabri, http://www.pdipas.us.es/r/rbarroso/trianguloscabri un problema geométrico del que se pide la demostración. El problema 57, decía así:

En un triángulo rectángulo, el radio de la circunferencia inscrita mide (a+b-c)/2, con a y b catetos y c hipotenusa.

2. Demostración

Sin pérdida de generalidad, puede suponerse la configuración siguiente:

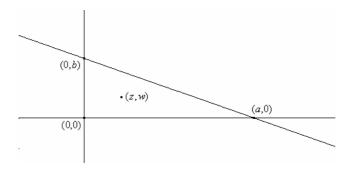


Figura 1

La circunferencia inscrita ha de ser tangente a los 3 lados del triángulo, por lo que en los puntos de intersección los radios han de ser perpendiculares a los lados, lo que indica que para la figura dada la longitud del radio es el valor absoluto de w. Así, una primera condición sobre (z,w) supuesto el incentro se obtiene escribiendo la ecuación de la circunferencia de centro (z,w) y radio w.

$$(x-z)^2 + y^2 - 2yw = 0$$

e imponiendo que un punto (x,y) de la misma esté en el lado (0,b)(0,0):

$$xh = 0$$

a la que añadimos la condición para que el radio trazado en dicho punto sea perpendicular a ese lado:

$$(y-w)b=0$$

Eliminado x e y en esas tres ecuaciones se obtiene la ecuación

$$bw^2 = bz^2$$

como muestra la figura siguiente, describiendo parte de una sesión con Mathematica.

$$ln[1] = Eliminate[{(x-z)^2 + y^2 - 2 * y * w == 0, b * x == 0, (y-w) * b == 0}, {x, y}]$$

$$ln[1] = bw^2 == bz^2$$

Figura 2

La ecuación obtenida relaciona (z,w) con las coordenadas de los vértices del triángulo.

Análogamente, haciendo lo mismo con el lado (0,b)(a,0), se obtienen las ecuaciones

$$(x-z)^{2} + y^{2} - 2yw = 0$$
$$(x-a)b + ya = 0$$
$$(x-z)a - (y-w)b = 0$$

a partir de las cuales, por eliminación, se deduce una segunda condición para determinar las dos coordenadas del incentro:

$$b^{2}w^{2} + abw(2a - 2z) = b^{2}(a^{2} - 2az + z^{2})$$

$$\ln[2] = \text{Eliminate[} \\ \{(\mathbf{x} - \mathbf{z}) ^{2} + \mathbf{y} ^{2} - 2 * \mathbf{y} * \mathbf{w} == 0, (\mathbf{x} - \mathbf{a}) * \mathbf{b} + \mathbf{y} * \mathbf{a} == 0, \\ (\mathbf{x} - \mathbf{z}) * \mathbf{a} - (\mathbf{y} - \mathbf{w}) * \mathbf{b} == 0\}, \{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}]$$

$$\operatorname{Out[2]} = b^{2}w^{2} + abw(2a - 2z) == b^{2}(a^{2} - 2az + z^{2})$$

Figura 3

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, resultan las coordenadas del incentro en función de las coordenadas de los vértices del triángulo:

$$\begin{aligned} & \text{In}[3] = \text{Solve} \big[\big\{ \mathbf{b} \, \mathbf{v}^2 = \mathbf{a} \, \mathbf{b} \, \mathbf{z}^2 \,, \\ & \mathbf{b}^2 \, \mathbf{v}^2 + \mathbf{a} \, \mathbf{b} \, \mathbf{v} \, (2 \, \mathbf{a} - 2 \, \mathbf{z}) \, = \mathbf{b}^2 \, \Big(\mathbf{a}^2 - 2 \, \mathbf{a} \, \mathbf{z} + \mathbf{z}^2 \Big) \big\} \,, \\ & \{ \mathbf{z} \, . \, \, \, \mathbf{v} \} \big] \\ & \text{Out}[3] = \, \Big\{ \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} - \mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(-\mathbf{a} + \mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(-\mathbf{a} + \mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(-\mathbf{a} + \mathbf{b} - \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \,, \, \, \mathbf{w} \, + \, \frac{1}{2} \, \Big(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \Big) \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \mathbf{z} \, \Big\} \,, \\ & \Big\{ \mathbf{z} \, + \, \mathbf{z} \, + \,$$

Figura 4

El hecho de obtener cuatro soluciones no debe sorprender, puesto que existen cuatro posibles circunferencias tangentes a los lados de un triángulo, una interior al triángulo y tres exteriores a él. Se supone en todo momento triángulos no degenerados, esto es, $b \neq 0$ y $a \neq 0$.

La segunda solución muestra la solución al problema propuesto, puesto que w vale exactamente (a+b-c)/2, y las otras tres soluciones muestran una propiedad no menos curiosa; a saber:

Los radios de las circunferencias tangentes a los lados de un triángulo rectángulo miden (a+b-c)/2, (b+c-a)/2, (a+c-b)/2 y (a+b+c)/2.

Bibliografía

- [1] RECIO, T. (1998): Cálculo simbólico y geométrico. Editorial Síntesis, Madrid.
- [2] ROANES MACÍAS E. y ROANES LOZANO E. (1994): *Nuevas tecnologías en geometria*. Editorial Complutense, Madrid.

Reseña de libros

MIGUEL DE GUZMÁN OZAMIZ: *La experiencia de descubrir en Geometría*. NI-VOLA Libros y Ediciones, S.L., Madrid 2002, 157 páginas y un disco compacto.

Trata sobre una selección de problemas de la llamada Geometría Elemental, desarrollada fundamentalmente durante el siglo XIX y comienzos del siglo XX, y que hoy resurge con la contribución de la tecnología computacional.

No se trata de un libro más sobre Geometría, sino más bien de un ensayo sobre el proceso del descubrimiento de teoremas geométricos con el concurso del ordenador, narrado por una autoridad en la materia, como atestiguan los últimos artículos publicados por el autor.

Esta publicación está en la línea de las presentaciones actuales de Matemáticas con ayuda de ordenador, tan escasas todavía en nuestro país, pero cada día más frecuentes en los países más avanzados tecnológicamente.

La información contenida en el CD constituye la parte esencial de la publicación. El libro está redactado a manera de guía, conteniendo sólo las introducciones a los temas tratados, los cuales son ampliamente desarrollados en el CD que acompaña al libro-guía.

La mayor parte de los ensayos de descubrimiento se ofrecen en archivos realizados sobre el sistema de cómputo algebraico DERIVE (versión 5), pero su lectura no requiere conocer dicho sistema. En varios de estos ensayos se referencian publicaciones de la red relacionadas con la evolución en el descubrimiento del problema en estudio. He aquí una lista de ensayos desarrollados:

- 1. Lugar geométrico descrito por el teorema de Kariya.
- 2. Otros dos lugares relacionados con el teorema de Kariya
- 3. Cuadrados con tres vértices en las rectas-lados de un triángulo.
- 4. Problemas clásicos (y actuales) sobre colineación de puntos y concurrencia de rectas.
- 5. Problemas clásicos (y actuales) sobre lugares geométricos.
- 6. Transformaciones como instrumentos para resolver problemas geométricos.
- 7. Problema de Apolonio sobre circunferencias tangentes a otras tres dadas.
- 8. Problema de la recta de Wallace, habitualmente atribuida a Simson.
- 9. La circunferencia de los 9 puntos (o de Feuerbach) y problemas relacionados.

- 10. La deltoide de J. Steiner como envolvente de las rectas de Simson-Wallace.
- 11. El teorema de los polígonos cerrados de Poncelet y problemas relacionados.
- 12. Triángulos de Morley construidos a partir de trisectrices de ángulos de un triángulo.
- 13. Una aproximación con Derive a los teoremas iniciales de la Geometría Proyectiva.
- 14. Caja de herramientas en Derive conteniendo los comandos geométricos usuales.

La exposición clara y sencilla a que nos tiene acostumbrados el Prof. M. de Guzmán, junto con su capacidad de persuasión matemática hacia los problemas planteados, hacen que la lectura de este libro sea una gozada para los amantes de la Geometría Sintética.

Su enfoque es esencialmente geométrico, no poniendo énfasis en el aspecto puramente informático, que es considerado únicamente como herramienta. En consecuencia es también recomendable para "geometrófilos analfabeto-deriveros".

Eugenio Roanes Macías

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex (en este último caso deberá usarse estilo "article" y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos (normal). Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y "abstract" de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección en minúsculas negritas y numerados, sin punto después del número ni punto final, excepto el de introducción que irá sin numerar. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de las copias en papel

Se enviarán vía postal por duplicado a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta puigadam@mat.ucm.es o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes: 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61 y 62.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

- la dirección a donde se han de enviar
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.