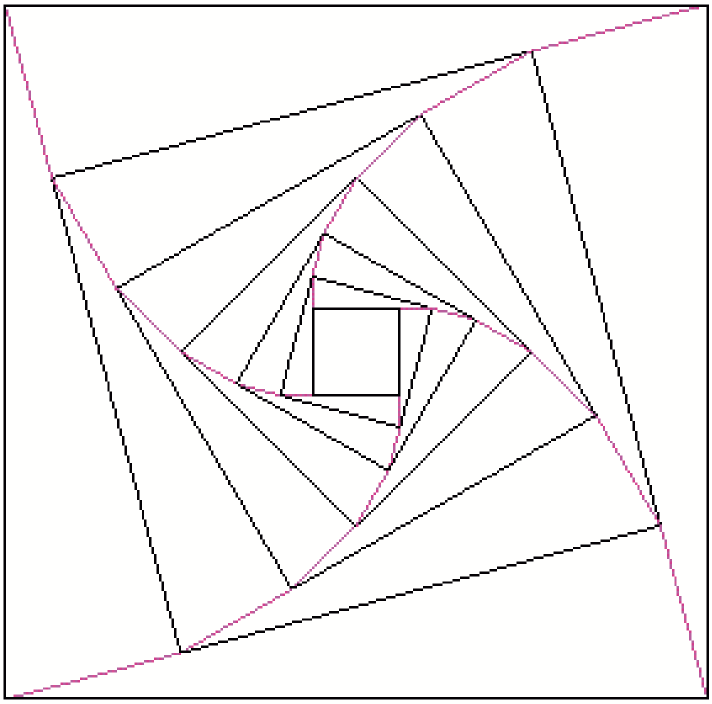
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 61
JUNIO DE 2002

ÍNDICE

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 3005 de la Facultad de Educación:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48
e-mail: puigadam@mat.ucm.es

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
ENRIQUE RUBIALES CAMINO	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ	(Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretaria:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

MARTÍN GARBAYO MORENO

Adjunta a la presidencia (mantenimiento página web):

MARÍA JOSÉ MORENO SÁNCHEZ DE LA SERRANA

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2002 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 6 de abril de 2002, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil dos. Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

El Presidente informa sobre las actividades realizadas y por realizar.

a) Se informa que el sábado 23 de junio de 2001 se celebró, con el éxito ya tradicional, el XIX Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados. Como en años anteriores, los ejercicios tuvieron lugar en la Facultad de Matemáticas y la entrega de premios en la E.U. de Biblioteconomía, recogiéndose en el Boletín la información sobre los concursantes y los resultados obtenidos.

b) Se anuncia que el XX Concurso de Resolución de problemas se celebrará, con la misma estructura, el sábado 22 de junio de 2002. Como en otras ocasiones, se cuenta con el patrocinio de 600 euros para premios de Texas Instruments, y la confianza de que la ayuda de la Consejería de Educación de la CAM para el Viaje a la Olimpiada Rioplatense se confirme con suficiente antelación.

c) Se informa que, como en años anteriores, la Sociedad colaboró con la Real Sociedad Matemática Española en la organización de la Fase del Distrito de Madrid de la Olimpiada Matemática, estando celebrándose en Logroño este mismo día 6 de abril la Fase Final. María Gaspar actúa como Presidente en funciones de la Comisión de Olimpiadas de la RSME, mientras Joaquín Fernández lleva la representación de Madrid.

d) También se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 58 (junio), 59 (octubre) y 60 (febrero) del *Boletín*, de los cuales el primero continuó dedicándose casi monográficamente (a excepción de un trabajo) a continuar el homenaje al Profesor Abellanas iniciado en el número 57. Se comprueba, con gran satisfacción, que se han cumplido los objetivos con la extraordinaria acogida de la iniciativa planteada en su día por las Profesoras Concha Romo y Mª Paz Bujanda.

e) Se constata que el *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* ha continuado recensionando positivamente los artículos publicados. Se apunta, además, que ya han aparecido dos recensiones (y se anuncian otras tres) en *Mathematical Reviews*, donde se están incluyendo en el índice publicado, ordenados alfabéticamente (por autores), todos los artículos aparecidos desde el *Boletín* nº 53, tanto los recensionados como los que no se llegarán a recensionar.

f) Se informa de la celebración, con el éxito de ediciones anteriores, del III Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1945: Cabrera, Cajal, Torres Quevedo", celebrado en Yaiza (Lanzarote) durante los días 10, 11 y 12 de julio de 2001, organizado por el Centro Científico-cultural Blas Cabrera y auspiciado, entre otras instituciones, por nuestra Sociedad.

g) Se anuncia que la Sociedad también participará en el IV Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1945: Cabrera, Cajal, Torres Quevedo", que tendrá lugar en Lanzarote durante los días 3, 4 y 5 de julio de 2002, junto con la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas y la Real Sociedad Matemática Española.

h) Sobre las relaciones con otras Sociedades, el Presidente detalla los puntos más importantes de la Reunión de la Junta de Gobierno de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas, extendiéndose en la explicación del complejo proceso que finalizó con la elección como Presidente de la misma, tras la correspondiente votación secreta, de Florencio Villarroya (Sociedad Aragonesa).

i) Se apunta que se ha llevado a efecto el ruego planteado en la Asamblea anterior por D. Eugenio Roanes Macías, de modo que la Sociedad dispone ya de dirección de correo electrónico, informándose también que nuestra sede continúa en el

Dpto de Álgebra de la Facultad de Educación de la U.C.M., aunque ha cambiado de despacho.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados. Matizando algunas cuestiones apuntadas por D. Eugenio Roanes Macías, D. Javier Etayo y D. Julio Fernández Biarge, las cuentas quedan aprobadas por unanimidad, concluyéndose que no resulta necesario modificar la cuota.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

Resultando preceptivo renovar cinco de los cargos elegidos en la Asamblea del 18 de abril de 1998 y cubrir la vacante surgida por la renuncia del Vocal D. José Vicente García Sestafe, se presentan a la Asamblea los resultados de numerosas gestiones de la Junta Directiva en general, y del Presidente -cuyo mandato también finaliza- en particular. Después de varias deliberaciones de los asistentes, se aprueba: 1) La renovación de D. José Javier Etayo Gordejuela como Presidente, haciéndose constar su convencimiento de que debe ser sustituido en la próxima Asamblea. 2) La renovación en sus puestos de los Vicepresidentes D. Eugenio Roanes Macías y Vicente Mendiola-Muñoz Morales y del Tesorero D. Alberto Aizpún López. 3) La elección de D. Enrique Rubiales Camino como Vocal en la vacante que deja el Prof. García Sestafe y de Dña. María Gaspar Alonso-Vega como Vicesecretaria sustituyendo a D. Miguel A. Gallardo Ortiz. 4) La autorización a la Junta Directiva para la reordenación de las adscripciones nominales de las Vicepresidencias y Vocalías de acuerdo con las funciones reales de las personas que las ocupan. 5) La permuta en sus puestos, Vocal y Bibliotecario respectivamente, de D. Joaquín Hernández Gómez y D. Martín Garbayo Moreno.

5. Asuntos de Trámite.

Próximos a celebrarse sendos homenajes al matemático Luis A. Santaló en Gerona y Las Palmas de Gran Canarias, se aprueba que nuestra Sociedad envíe las respectivas adhesiones a los organizadores. Se desestima, sin embargo, la solicitud de colaboración económica -de 3 euros por socio- para la erección de un monumento al Prof. Santaló realizada en la última Asamblea de la Federación por parte de la Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas.

6. Ruegos y Preguntas.

D. Eugenio Roanes Macías recuerda el ofrecimiento realizado por nuestra consocia Dña. María José Moreno Sánchez de la Serrana para la confección de la página web de la Sociedad -que se colgaría de la página de la Sección Departamental de Álgebra-, y que reitera en la actualidad, trabajo que comenzaría en unos meses por haber dado a luz recientemente. D. Julio Fernández Biarge, adhiriéndose al sentir de la Sociedad felicitando a la madre por el feliz acontecimiento, propone que sea nombrada Adjunta a la Presidencia, lo que se aprueba.

D. Francisco A. González Redondo solicita autorización -que obtiene- para gestionar el intercambio del *Boletín* con vistas a lograr nuevas fuentes de financiación para la Sociedad.

Llegados a este punto, el Presidente levanta la sesión a las trece horas, doce minutos de la fecha arriba indicada.

V.º B.º El Presidente *El Secretario*

Conferencia organizada por nuestra Sociedad

Organizada y patronizada por la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y por la Sección Departamental de Algebra de la Facultad de Educación de la Univ. Complutense se celebró la conferencia mencionada a continuación el día 20 de marzo de 2002 a las 19:00 horas en la Sala de Grados de la Facultad de Educación.

Título: La Tecnología en la Reforma de la Enseñanza de las Matemáticas en EEUU. Nuevos Enfoques y Nuevos Resultados.

Conferenciante: Antonio R. Quesada, Department of Theoretical & Applied Mathematics, The University of Akron, Akron, Ohio 44325-4402

Aquesada@uakron.edu

Resumen: En esta conferencia se revisaron brevemente los movimientos de reforma en la enseñanza de las matemáticas en Estados Unidos: su origen, objetivos, y el rol que la tecnología juega. Seguidamente se presentaron ejemplos para ilustrar cómo la variedad de representaciones que la tecnología provee facilita tanto el desarrollo de métodos no tradicionales para resolver problemas, como el acceso, en secundaria, a modelos usualmente reservados para nivel universitario. También se presentaron algunos descubrimientos recientes llevados a cabo por estudiantes de secundaria en el grupo de trabajo del Prof. A. Quesada.

(En el próximo número de nuestro Boletín está previsto publicar un artículo suyo, que incluirá el tema de la conferencia).

Nota: La fecha y hora de la conferencia no pudo precisarse hasta muy poco tiempo antes de celebrarse, dado que se aprovechó un día de paso por Madrid del Prof. Quesada. Como consecuencia, muchos socios no pudieron enterarse, por lo que la Junta Directiva pide disculpas a sus socios. Para paliar en lo sucesivo este tipo de dificultades, se ha decidido pedir la dirección de correo electrónico a todos los socios que dispongan de él, lo que se hace en este mismo número del Boletín.

Nuevo número de despacho para nuestra Sede

Por haber sido renumerados los despachos de la Facultad de Educación de la Univ. Complutense, donde tiene la Sede nuestra Sociedad, a partir de ahora esta se encuentra ubicada en el despacho número 3005, de la planta 3ª, pasillo central, correspondiente a la Sección Departamental de Algebra.

Los envíos postales deben dirigirse a la dirección indicada al final de la página segunda de este número del Boletín.

Nueva dirección de correo electrónico de nuestra Sociedad

A partir de ahora, la nueva dirección de correo electrónico de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas es la indicada a continuación:

puigadam@mat.ucm.es

Petición de su correo electrónico a nuestros Socios

Con el fín de poder avisar a nuestros socios de conferencias y otras actividades profesionales, que supongamos puedan ser de su interés, rogamos que todos aquellos que dispongan de dirección de correo electrónico nos envíen un mensaje indicándolo a la cuenta arriba indicada de nuestra Sociedad.

Nueva página web de nuestra Sociedad

Se esta elaborando una nueva página web de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, cuyo mantenimiento va a correr a cargo de nuestra consocia Adjunta a la Presidencia, María José Moreno Sánchez de la Serrana. En breve espacio de tiempo estará disponible:

www.ucm.es/info/secdealg/puigadam

XXXVIII Olimpiada Matemática Española
Segunda fase - Logroño

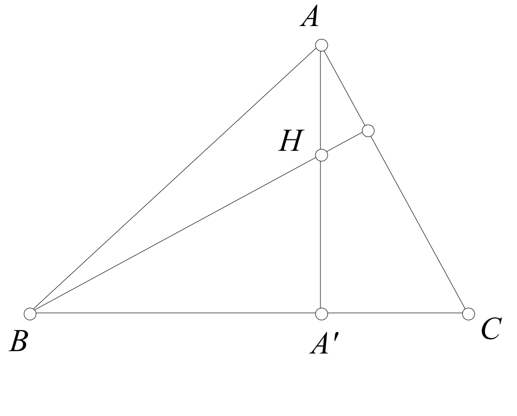
Durante el primer fin de semana de abril (5-6), se ha celebrado en La Rioja la fase nacional de la XXXVIII Olimpiada Matemática Española.

Los 114 participantes de todas las Comunidades del Estado español, que se alojaron en el IES La Laboral, tuvieron una agenda apretada, pues, además de dos sesiones de problemas de tres horas y media cada una, durante las mañanas de viernes y sábado, fueron recibidos por las autoridades municipales en el Ayuntamiento de Logroño, donde fueron invitados a un lunch, visitaron el Monasterio de Yuso, en San Millán de la Cogolla, en la tarde del sábado, donde asistieron a una charla a cargo del Profesor de La Rioja Luis Español González, sobre "Las Matemáticas en la Biblioteca del Monasterio de Yuso" y conocieron las bodegas Franco Españolas, en las que, además de descubrir los secretos del vino, fueron invitados a una suculenta cena, tanto ellos como los profesores delegados, y a la que asistieron también los familiares de los estudiantes que le dieron calor al acto de entrega de medallas a los ganadores.

Las pruebas se realizaron en el edificio de Filología de la Universidad de La Rioja, y los problemas propuestos fueron los siguientes:

Problema 1. Hallar todos los polinomios *P(t)* de una variable, que cumplen $P(x^2 - y^2) = P(x+y) \cdot P(x-y)$ para todos los números reales x e y.

Media de todos: 0.94 desviación: 1,736



Problema 2. En un triángulo *ABC*, *A*' es el pie de la altura relativa al vértice *A* y *H* el ortocentro.

a) Dado un número real positivo k tal que $\frac{AA'}{HA'} = k$, encontrar la relación entre los ángulos B y C en función de k.
b) Si B y C son fijos, hallar el lugar geométrico del vértice A para cada valor de k.

Media de todos: 1,23   desviación: 1,780

Problema 3. La función g se define sobre los números naturales y satisface las condiciones:

- $g(2) = 1$
- $g(2n) = g(n)$
- $g(2n + 1) = g(2n) + 1$

Sea n un número natural tal que $1 \le n \le 2002$. Calcula el valor máximo M de $g(n)$. Calcula también cuántos valores de n satisfacen $g(n) = M$.

Media de todos: 3,29   desviación: 2,401

Problema 4. Sea n un número natural y m el que resulta al escribir en orden inverso las cifras de n. Determinar, si existen, los números de tres cifras que cumplen $2m + S = n$, siendo S la suma de las cifras de n.

Media de todos: 3,75 desviación: 2,547

Problema 5. Se consideran 2002 segmentos en el plano tales que la suma de sus longitudes es la unidad. Probar que existe una recta r tal que la suma de las longitudes de las proyecciones de los 2002 segmentos dados sobre r es menor que 2/3.

Media de todos: 0,5   desviación: 0,843

Problema 6. En un polígono regular H de $6n+1$ lados (n entero positivo), r vértices se pintan de rojo y el resto de azul. Demostrar que el número de triángulos isósceles que tienen sus tres vértices del mismo color no depende del modo de distribuir los colores en los vértices de H.

Media de todos: 0.18   desviación: 0,465

Al igual que el año pasado, entre los seis Medallas de Oro que representarán a España en la Olimpiada Internacional que se celebrará en Glasgow el próximo verano, ha vuelto a haber dos madrileños: Luis Hernández Corbato (segundo lugar) y David García Soriano (cuarto lugar). Además, entre los doce Medallas de

Plata, ha habido tres estudiantes de nuestra Comunidad: Carlos Barragán del Rey, Javier Gómez Serrano y Javier Cóppola Rodríguez. Hay que resaltar que, además de los dos primeros clasificados (Luis y Daniel Rodrigo), el número de estudiantes de 1º de Bachillerato es cada vez más significativo. Esto se puede deber bien a la naturaleza de los problemas, que no requieren técnicas específicas de 2º de Bachillerato, o bien a un cierto abandono de los estudiantes de 2º, que también se observa en el Concurso de Primavera de Matemáticas, y que puede ser debido que están muy pendientes de la dichosa prueba de acceso.

Los alumnos que recibieron Medalla de Oro son los siguientes:

Daniel Rodrigo López, 1º Bto., IES Montserrat Miro i Vila, Montcada i Reixach.
Luis Hernández Corbato, 1º de Bachillerato, IES Fortuny (Madrid).
Sergio Millán López, 2º de Bto., IES Santa Eulalia (L´Hospitalet de Llobregat).
David García Soriano, 2º de Bto., Colegio Chamberí (Madrid).
Susana Ladra González, 2º de Bto., Colegio Peleteiro (Santiago de Compostela).
José Miguel Manzano Prego, 2º de Bto., IES La Zafra (Motril, Granada).

Les deseamos mucha suerte durante su estancia en Glasgow.

Joaquín Hernández Gómez

Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) y Mathematical Reviews incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN MATH REVIEW ISSUE 2002 a

#2002a: 26009 (26A30). Periodic functions, por *Julio Fernández Biarge*, Bol. Soc. Puig Adam 57 (Febrero 2001), págs. 41-51.

Titulo Propio de “Experto en Educación Matemática”

Impartido en la Facultad de Matemáticas de la Univ. Complutense

Curso 2002-03

Objetivos: Actualización científica y formación en aspectos didácticos en diferentes campos de la Matemática.

Titulación exigida: licenciado en cualquier carrera de Ciencias, arquitecto o ingeniero superior.

Horario: tardes, de lunes a viernes.

Plazo de matrícula: del 16 de setiembre al 12 de octubre de 2002.

Tasas: cada crédito, 12 euros. Es posible matricularse de cualquier número de materias del programa.

Obtención del Título: es necesario haber cursado 25 créditos del programa, de los cuales habrá al menos 8 pertenecientes al bloque de actualización didáctica y al menos 8 pertenecientes al bloque de actualización científica.

Dirección del Título: Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro (Vicedecana de Estudios de la Facultad de Matemáticas).

Informacion: www.mat.ucm.es y en el teléfono 91-3944616

Relación de Asignaturas del Título Propio

A) Actualización Didáctica

1. *El ordenador en la Educación Matemática*. 40 horas, 4 créditos. Profs. Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías (UCM).
2. *Programacion de taller de matematicas*. 15 horas, 1,5 créditos. Prof. Juan José Prieto Martínez (UCM).
3. *Las Matemáticas en Secundaria: un enfoque distinto al habitual*. 30 horas, 3 créditos. Prof.: Joaquín Hernández Gómez (UCM).
4. *Comprender, pensar y trabajar en Matemáticas*. 30 horas, 3 créditos. Prof. Inés M. Gómez Chacón (IEPS). Este curso tiene una parte presencial y otra mediante seguimiento virtual.

5. *El papel de los juegos en el desarrollo de la matematica y su enseñanza*. 20 horas, 2 créditos. Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz (UCM). Este curso podrá seguirse o bien de modo presencial o bien por internet.
6. *Taller de Astronomía*, 10 horas, 1 crédito. Prof. Ana Inés Gómez de Castro (UCM).
7. *Las matematicas en la vida cotidiana*. 20 horas, 2 créditos. Prof. María Luz Callejo de la Vega.(IEPS).
8. *Matematicas con Matlab*. 15 horas, 1,5 créditos. Prof. Roberto Rodríguez del Río (UCM).

B) Actualización científica

9. *Cartografia matemática*. 15 horas, 1,5 créditos. Prof. Jesús Otero Juez (UCM).
10. *Fundamentos de Geometría: áreas y volúmenes*, I. 20 horas, 2 créditos. Prof. Mariano Martínez Pérez (UCM). Este curso se impartirá en dos años académicos consecutivos: la primera parte en el curso 2002-03 y la segunda en el 2003-04. La segunda supondrá cursada la primera.
11. *Breve recorrido por la Filosofía de la Ciencia*. 15 horas, 1,5 créditos. Prof. José Mendoza Casas (UCM).
12. *Aritmética*. 15 horas, 1,5 créditos. Prof.: Juan Ramón Delgado Pérez (UCM).
13. *Tratamiento del azar: probabilidad*. 30 horas, 3 créditos. Prof. Carmen Isabel Colorado Álvarez (UCM).
14. *Estadística*. 30 horas, 3 créditos. Prof. Carmen Isabel Colorado Álvarez (UCM).
15. *Orígenes y nacimiento de la Geometría Proyectiva*, 20 horas, 2 créditos. Prof. Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro (UCM).
16. *Estudio y representación de curvas planas*. 15 horas, 1,5 créditos. Prof. Domingo García Casado (UCM).
17. *Sistemas Dinámicos*. 20 horas, 2 créditos. Profs. Carlos Fernández Pérez y José Manuel Vegas Montaner (UCM).
18. *Introducción a la modelización en Matemática Aplicada*. 15 horas, 1,5 créditos. Profs. Juan Francisco Padial Molina (UPM).
19. *Estadística y nuevas tecnologías*. 15 horas, 1,5 créditos. Prof. Francisco Javier García Crespo (UCM).
20. *Introducción a la teoría de la relatividad*. 15 horas, 1,5 créditos. Prof. Eduardo Aguirre Dabán (UCM).

Desde esta orilla (A la memoria del Profesor Santaló)

José Javier Etayo Miqueo

Tres matemáticos españoles se han reunido en Argentina un cierto día del año 1941. Uno es allí habitual desde veinte años antes: Rey Pastor va y viene y alterna estancias y enseñanzas entre Madrid y Buenos Aires. El segundo, Esteban Terradas, ha estado en la Universidad de La Plata, a donde llegó en 1937 dejando una España en guerra. Finalmente, Santaló, que fue discípulo del primero y alumno de Terradas en el Madrid de 1933, había recalado seis años más tarde en Rosario, en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional del Litoral. El motivo de ese encuentro es despedir a Terradas que se embarca de regreso a España. Y recuerda Santaló años después: "En aquellos momentos envidié su suerte. Pensé que nos veríamos allí al cabo de poco. Pero el destino fue otro. No lo volví a ver…". En efecto, Terradas murió en 1950, antes de que Santaló emprendiese sus no frecuentes pero tampoco raras visitas a España.

He querido señalar ese punto de añoranza por la patria lejana que sus palabras parecen delatar. También aquí se intentó facilitar en vano su vuelta y reincorporación. Todavía en enero de 1949 informaba Rey Pastor: "Dudo que se logre ofrecerle condiciones tan excelentes que puedan reconquistarlo para España; pero si esto fuera posible, contando con la atracción del terruño, la ganancia para nuestro prestigio sería incalculable y es seguro, dado su amor proselitista y su arte de interesar, que pronto florecería en España una pujante escuela geométrica". Pero además se había casado y tenía tres hijas; con una vida familiar ya hecha y rehecha la vida profesional su sitio estaba allí, en la otra orilla, océano por medio, sin que entre ambos lados faltasen el reconocimiento y el afecto. Podía aplicarse a sí mismo sus propias palabras en elogio del Dr. Avelino Gutiérrez (1864-1946): "Gran parte de la labor de acercamiento entre la Argentina y España en el ámbito cultural fue debida a él y a su intenso patriotismo, repartido por igual entre España, donde nació, y la Argentina, donde arraigó, formó familia y dedicó todo su saber".

Sesenta años después de la despedida antes evocada hemos de asistir con pesar a la suya definitiva: el 22 de noviembre de 2001 fallecía Santaló tras una larga enfermedad.

Luis Antonio Santaló y Sors había nacido en Gerona el 9 de octubre de 1911. En 1934 se licenció en Matemáticas por la Universidad de Madrid: entre sus compañeros, amistades ya de por vida, San Juan, Sixto Ríos y un recién licenciado Ancochea, nombrado profesor auxiliar. Rey Pastor los acogió en el Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios: "De aquel seminario –dice- instalado en un sótano, proceden nuestro gran geómetra Santaló y nuestros colegas San Juan y Ríos, que dominan el Análisis Matemático en su doble faz: el puro y el aplicado. Bastarían todos tres, que ya han conquistado merecido prestigio internacional, para desmentir el prejuicio racial, tan unánime como infundado". (Se refiere a la presunta incapacidad de los españoles para la ciencia).

A Santaló lo manda Rey Pastor con una beca a Alemania. En el seminario que Blaschke dirige en Hamburgo se inicia durante el curso 1934-35 en el estudio de la geometría diferencial y, sobre todo, asiste al lanzamiento de la que el mismo Blaschke empieza a llamar "geometría integral" y que va a constituir el territorio en que Santaló desplegará su más notable actividad. Allí coinciden con él como becarios S.S. Chern, B. Petkautschin y O. Varga, entre otros. A su vuelta a España se doctora pero en seguida estalla la guerra y, con ella, la dispersión.

Durante seis meses, en 1939, está en París con Elie Cartan y se le invita a dar conferencias en el Instituto Henri Poincaré; invitación que se repite en 1954 en el coloquio que con motivo del centenario del nacimiento del ilustre matemático que da nombre al Instituto organiza la Facultad de Ciencias de París y que Santaló aprovecha para una estancia allí de cinco meses.

Incorporado a la Facultad de Ingeniería del Litoral y al Instituto que allí dirige Beppo Levi, y del que es nombrado Vicedirector desde 1939 a 1949, pasa después a la Universidad de La Plata y finalmente a la de Buenos Aires, en cuyo Instituto vuelve a encontrar a Rey Pastor como Director, y desarrolla también su labor en la Escuela Superior Técnica del Ejército y en la Comisión Nacional de Energía Atómica. En medio, de 1947 al 49, trabaja con una beca Guggenheim en el Institute for Advanced Studies de Princeton, y cuando Stone reorganizó la Facultad de Matemáticas de Chicago, se llevó a Santaló, que explicó un cursillo sobre geometría integral, en especial sobre sus propios resultados. Uno de los primeros, cuenta Rey Pastor, fue convertir en igualdad la "desigualdad isoperimétrica", hasta el punto de que Blaschke retrasa la publicación de su tratado con la esperanza, truncada, de poder generalizar ese teorema al espacio: "En ese libro dedica capítulos enteros a la obra de Santaló, que expone como adquisición definitiva e importante de la nueva disciplina".

Aquel seminario de Blaschke marcó fuertemente la trayectoria investigadora de Santaló. La idea directriz era tomar desde un punto de vista exclusivamente geométrico resultados obtenidos a través de las probabilidades geométricas. En éstas se había pasado de contar, como hacían las probabilidades ordinarias, a medir conjuntos de puntos. La geometría integral salta de medir esos conjuntos, longitudes, áreas, etc., a conjuntos de rectas, segmentos, u otros elementos geométricos. Así, la primera cuestión era encontrar la densidad para conjuntos de subespacios lineales de espacios n-dimensionales euclídeos y no euclídeos. Blaschke tuvo la idea de usar los métodos de Cartan que involucraban grupos de Lie e invariantes integrales. Pareció que el álgebra exterior de formas diferenciales era el método más conveniente y así se iniciaron los asistentes al seminario, que se vio reforzado por otro que dedicó Kähler a sistemas de ecuaciones diferenciales.

Todos aquellos discípulos desarrollaron tales ideas y, en particular, Santaló fue ocupándose sucesivamente de los problemas concernientes a la medida cinética en el plano y en el espacio, que la editorial Hermann le publicó en 1936, de la geometría integral en espacios proyectivos y afines, aparecido en 1950 en los *Ann. of Math.*, o de la geometría integral y probabilidad geométrica, en Addison-Wesley, 1976, por poner algunos ejemplos. Sólo algunos, pues sus publicaciones, seguramente más de doscientas cincuenta, van llenando páginas de las principales revistas, *Duke Math. Journal, Bull. of the Amer. Math. Soc., Am. J. of Math., Compt. rend. de Paris*, sin contar las abundantísimas en Argentina y demás países iberoamericanos, Portugal, España, Japón, Italia, etc.

Personalmente no puedo dejar de rememorar la primera noticia que saltó a nuestros ojos, en aquellos tiempos de licenciados bisoños que se enfrentaban ilusionadamente al Bourbaki, al encontrar en la misma colección de las Actualités Sci. Ind., de la editorial Hermann de París, el libro quizá más conocido y afamado de Santaló, *Introduction to integral geometry*. Del orgullo que entonces sentimos puede deducirse con qué gusto recibí veinte años más tarde el volumen que la revista *Tensor* dedicó a su fundador Kawaguchi y para el que me había pedido colaboración; junto a la mía sólo las de otros dos españoles se ven allí recogidas: una del profesor Soler Torrent, entonces en Canadá y al que había dirigido la tesis doctoral, y, ya se habrá adivinado, la de Santaló, de cuya compañía me sentí tan honrado. Aquí el tema es ya muy otro, sobre las teorías del campo unificado deducidas de un principio variacional, y es que los centros de interés de Santaló recorrían vastas zonas, desde la estadística a la geometría diferencial, aunque relacionadas entre sí.

Se me figura, no obstante, que siempre había en él un regreso a su primer amor, aquella geometría integral a cuyo nacimiento asistió y cuyos precedentes y evolución posterior eran objeto de algunas de las exposiciones, siempre amenas y claras, con las que nos deleitó. Empezaba por el *Ensayo de aritmética moral* de

Buffon, que quería medir de algún modo los sentimientos y redescubrir la "esperanza moral", lo que le llevó a estudiar ciertos juegos de azar, como su famoso "problema de la aguja", seguramente el primero en que asoma la idea de probabilidad geométrica. Y seguía con las aportaciones de Laplace, el método de Monte Carlo, hasta la geometría integral de Blaschke, en 1936. Vendría luego, entre 1960-70, la geometría estocástica que pasa de los procesos estocásticos de puntos a los de rectas u otros objetos geométricos. Y, después, las aplicaciones que estas teorías han propiciado: la tomografía computerizada por rayos X, de uso revolucionario en medicina para localización de irregularidades en el cuerpo humano; tráfico de autopistas; estereología, o conjunto de métodos para la exploración de cuerpos opacos en el espacio tridimensional a partir de secciones planas o rectas que los atraviesan, y que sirven a disciplinas como biología, mineralogía o metalurgia; estimación de medidas geométricas, número y forma de partículas o corpúsculos convexos, integrales de curvaturas, etc.

Este podría ser el resumen de algunas de las conferencias con que nos dio aquí a conocer el ámbito de sus investigaciones, juntamente con la presentación de comunicaciones en nuestros congresos y con reflexiones y lecciones sobre enseñanza de las matemáticas. Porque ésa es otra de las facetas que debemos señalar en él: la preocupación por la enseñanza, acorde con el movimiento general que por aquellos años se produjo en todos los países. El mismo dice que le venía de lejos, que su abuelo, su padre, hermanas y tíos, habían sido maestros y tenía un hermano en la enseñanza media. Y también él, recién terminada la licenciatura, estuvo de profesor en el Instituto "Lope de Vega" que se acababa de crear en Madrid. "Aprendí a aprender para enseñar y a enseñar para aprender", dice, recordando estas fases de su carrera docente, cuando en 1988 ingresa en la Academia Nacional de Educación de Buenos Aires.

Libros suyos sobre educación matemática, formación de profesores y testimonios de su experiencia de enseñar, amén de conferencias sobre temas pedagógicos y didácticos, algunas de ellas pronunciadas en España, avalan esta sentida dedicación suya. Aquí se publicó un libro sobre *La enseñanza de la matemática en la educación secundaria*, en el que Santaló aborda la enseñanza de la estadística, que consideraba de obligado estudio en edades tempranas. Se me podrá permitir, espero, la pequeña ufanía de haber colaborado en ese libro con él, Ríos y otros colegas, sin que suene a fatuidad lo que no es más que la satisfacción de sentirme rodeado de tan inestimable compañía.

Como guardo también con cariñoso cuidado uno de sus textos universitarios, *Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables*, que me envió dedicado de su propia mano. Está modestamente editado, como guía de un curso, por la Universidad de Buenos Aires, pero con qué claridad escrito, verdadero modelo de exposición propia de un verdadero maestro. Como sin duda lo estarían otros que allí le publicaron, sobre tensores, geometría proyectiva, probabilidades, geometría espinorial, etc. Ya decía Rey Pastor que había conquistado justa fama de expositor clarísimo y, en su opinión, "también en este aspecto ocupa el primer lugar entre los profesores de diversos países que he visto actuar en la cátedra".

Para entonces ya habíamos entrado en una relación que en seguida fue amigable y afectuosa. Santaló era un hombre extraordinariamente afable, sencillo, caballeroso y delicado en su trato y nos distinguió a todos con una amabilidad nada forzada ni artificial. En una de sus estancias ponderó alguien en público la benevolencia con que trataba a sus compañeros españoles en las recensiones que de sus trabajos hacía en el *Math. Reviews*: cuando le saludé a continuación le dije que yo era uno de los beneficiados por aquella generosidad suya, pero ni siquiera me dejó terminar la frase.

Debió de ser en 1967 cuando le conocí personalmente en uno de los coloquios de geometría diferencial que el profesor Vidal Abascal organizaba en Santiago de Compostela. Creo que también asistió a los de 1972 y 1978. Y este último año lo vimos igualmente en Madrid dando algunas conferencias en la Facultad y en la Academia de Ciencias a la que visitó en otras varias ocasiones: lo hizo, como Presidente de la Academia argentina, junto con otros miembros de academias hispanoamericanas, para dar a conocer la aparición de nuestro *Vocabulario científico y técnico*, al que habían aportado contribuciones y sugerencias; lo hizo también, con sentidas intervenciones públicas, en los homenajes que la Academia rindió a la memoria de Terradas y Rey Pastor en los años 83 y 88, respectivamente.

Ciertamente fue la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales la primera institución española que supo reconocer y honrar la personalidad científica de Santaló, nombrándole ya en 1955 Académico Correspondiente; el más veterano durante los últimos veinte años, más o menos. La propuesta para su elección, en la que se le calificaba de "verdadero prestigio internacional y sin duda el matemático hispano más conocido en el mundo matemático extranjero", estaba firmada por D. Julio Rey Pastor, D. José G. Alvarez Ude y D. José Mª Torroja Miret.

En 1970 fue designado Correspondiente de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona, como lo fue también de las Academias de Ciencias de Córdoba (Argentina) y de Lima (Perú), y Miembro Honorario de la Academia de Ciencias de América Latina. Ya hemos señalado su adscripción como Miembro Titular de la Academia Nacional de Educación de Buenos Aires y de la Academia Nacional de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la que fue Presidente en el periodo 1980-84. Asimismo fue titular de la Academia de Ciencias de Buenos Aires.

Doctorados *honoris causa* los ha recibido de las Universidades argentinas de Buenos Aires, de la que fue Profesor Emérito, de Tucumán, del Nordeste, de Misiones y de San Juan, y de las españolas Politécnica de Cataluña en 1977, Autónoma de Barcelona en 1986, y de Sevilla en 1990. Sus paisanos catalanes no le han escatimado honores: Miembro Correspondiente del Instituto de Estudios Catalanes; Medalla Narcis Monturiol a la Ciencia y la Tecnología, y Cruz de Sant Jordi, ambas de la Generalidad de Cataluña; creación de la Cátedra Santaló de la Universidad de Gerona y nombramiento de Socio de honor de la Sociedad Catalana de Matemáticas. También la Real Sociedad Matemática Española le designó Socio de honor, en visita que su Presidente le hizo en 1999, y la Universidad de Valencia le otorgó su Medalla en 1993.

En 1996 le fue entregada por el Embajador de España en Argentina la Encomienda de la Orden de Alfonso el Sabio que le había concedido el Rey Juan Carlos y en 1983 recibió el Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica, el tercero de esa denominación y el primero, y hasta ahora me parece que el único, que ha correspondido a un matemático.

Continuada ha sido pues la atención con que desde esta orilla de "la mar océana" se ha seguido la vida y la obra de un hijo preclaro que se afincó en la otra orilla sin que ello supusiera una total ruptura sino una comunicación entre ambas, varias veces materializada en encuentros y relaciones y en reconocimientos y honores sobradamente merecidos por él. Hoy aquella orilla se ha trasladado a regiones superiores inalcanzables desde la nuestra y se nos priva así de la presencia que, siquiera intermitentemente, nos brindaba aquel hombre modesto y bueno, maestro, compañero y amigo, que a su alrededor derramaba, además de ciencia, sosiego, cortesía y paz. Una paz de la que esperamos y pedimos goce ya intemporal y definitivamente.

Sobre el logotipo de nuestra Sociedad

Julio Fernández Biarge
Profesor Emérito de la Universidad Politécnica de Madrid

Abstract

In October of 2000, our Society adopted a logo taken from the cover of a Puig Adam's book. We show here some very elementary geometric properties of this beautiful figure, and some generalizations that it suggests.

En Octubre de 2000 nuestra Sociedad adoptó como logotipo una figura, tomada de la portada del maravilloso libro de don Pedro Puig Adam titulado *"La Matemática y su enseñanza actual"*, que desde el número 55, figura en la cubierta de todos los números de nuestro *Boletín*. En su número 30 comenté las propiedades del logotipo de la XXVIII Olimpiada Matemática Española y ahora querría analizar las propiedades del nuestro y las ideas que sugiere.

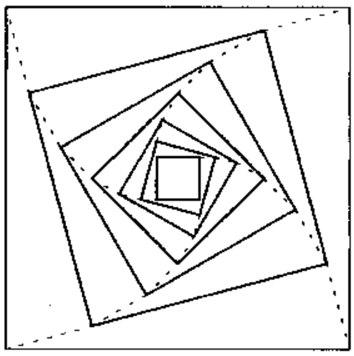


Figura 1

Es una bonita figura, formada por siete cuadrados (ver figura 1); cada uno de ellos, a partir del primero, tiene sus lados sobre las rectas que se obtienen girando los lados del anterior un ángulo de 15 grados ($\pi/12$ radianes) hacia el interior en torno a un extremo. Así, el séptimo cuadrado tiene sus lados paralelos al primero, al ser $6\pi/12 = \pi/2$.

Podemos preguntarnos ¿por qué don Pedro escogió el valor $\pi/12$ para el citado ángulo de giro? Suponemos, desde luego, que no necesitó hacer cálculos para ello, sino que se dejó llevar por su indudable sentido estético. Pero precisamente el libro de cuya cubierta está tomado el logotipo, comienza con el texto de la magnífica conferencia *"La Matemática y la Belleza"*, y en su IV parte: *"¿Qué hay de matemático en lo bello?"*, ahonda en las razones matemáticas que hacen armoniosa y bella una figura. Trataremos de aplicarlo a nuestro logotipo.

Don Pedro, para conseguir un efecto análogo, podía haber escogido otros valores para el ángulo α. Si deseaba que el cuadrado $(n+1)$-ésimo fuese el primero que tuviese los lados paralelos al inicial, ese ángulo tendría que ser $\alpha = m\pi/(2n)$, con m y n primos entre sí, y $2m < n$ (Para que α resulte inferior a $\pi/4$).

Con $n = 6$ y $m = 1$, resulta $\alpha = \pi/12$, y se cumple lo que se pretendía, con 7 cuadrados. Podría haberse tomado $n = 3$ y $m = 1$ ($\alpha = \pi/6$), pero entonces la figura constaría sólo de 4 cuadrados (o si se construían 7, habría dos con lados paralelos al inicial); el resultado es poco atractivo.

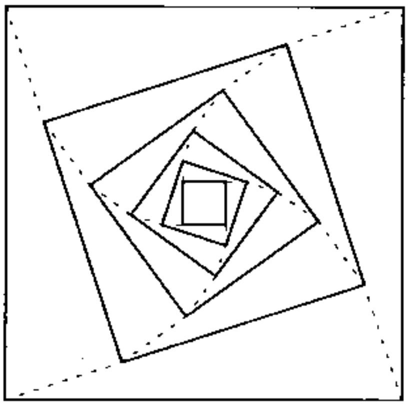


Figura 2

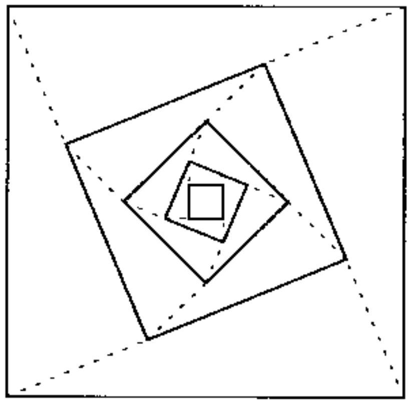


Figura 3

Tomando $n = 5$ y $m = 1$ ($\alpha = \pi/10$, o sea 18º), resulta una figura con 6 cuadrados que podría competir en belleza con nuestro logotipo (ver figura 2). La elección $n = 5$ y $m = 2$ ($\alpha = \pi/5$, o sea 36º) da una figura también con 6 cuadrados, pero mucho menos armoniosa a la vista. La tentativa $n = 4$ y $m = 1$ ($\alpha = \pi/8$) que produce 5 cuadrados, también se podría considerar (ver figura 3).

¿Hay algo interesante en la elección $n = 6$ y $m = 1$, ($\alpha = \pi/12$) que contribuya a explicar la elección efectuada por don Pedro, frente a las otras consideradas? Lo hay: quizás pocos hayan reparado en ello, pero en nuestro logotipo (ver figura 4), *las circunferencias circunscritas a cada uno de los cuadrados, a partir del segundo, están inscritas en el cuadrado anterior*, lo que no ocurriría para las otras figuras consideradas y ello, aun cuando esas circunferencias no están dibujadas, da inconscientemente una especial armonía al conjunto.

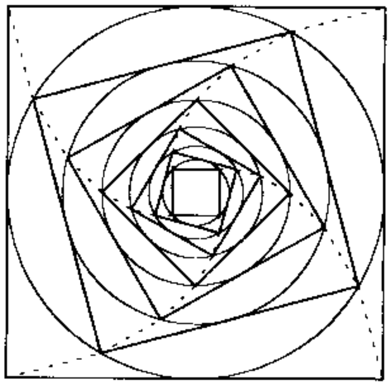


Figura 4

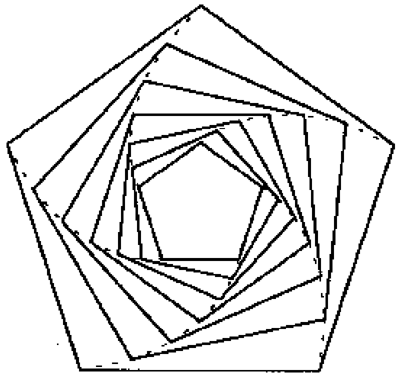


Figura 5

Otra particularidad interesante, consecuencia inmediata de la anterior es que *cada uno de los cuadrados que se generan tiene un área que es la mitad de la del anterior*. Así, el último cuadrado de la figura es 1/64 del primero, como una casilla de un tablero de ajedrez construido sobre éste. En la citada portada, este cuadrado aparece en rojo, resaltando la proporción señalada.

Para estudiar las propiedades de las figuras inspiradas en la misma idea de este logotipo, consideraremos un caso más general, formado por n+1 polígonos regulares de p lados, generados a partir del primero, de modo que sus lados estén sobre las rectas que resultan de girar un ángulo α los lados del anterior, en torno a un extremo y hacia el interior. En la figura 5 se ve el resultado para $p = 5$, $n = 6$ con $\alpha = \pi/15$ (=12º).

Recordaremos que los ángulos exteriores del polígono de p lados son de $2\pi/p$ radianes y cada uno de los interiores de $\pi(p\text{-}2)/p$. Podemos exigir que el ángulo α sea inferior a la mitad de un ángulo interior, o sea $\alpha < \pi(p\text{-}2)/(2p)$. En general, si designamos con r_k y a_k el radio y la apotema del k-ésimo polígono, será $a_k = r_k$

$\cos(\pi/p)$, $a_{k+1} = r_k \cos(\pi/p + \alpha)$. La razón de semejanza entre dos polígonos consecutivos es, por tanto,

$$\rho = \cos(\pi/p + \alpha)/\cos(\pi/p) = \cos\alpha - \mathrm{tg}(\pi/p)\,\mathrm{sen}\,\alpha \, . \qquad [1]$$

En nuestro logotipo, es

$$\rho = \cos(\pi/4 + \pi/12)/\cos(\pi/4) = \cos(\pi/3)/\cos(\pi/4) = 1/\sqrt{2} \, . \quad [2]$$

Si además deseamos que el polígono (n+1)-ésimo sea el primero que tenga sus lados paralelos a los del primero (sin quedar "invertido" cuando p sea impar), debe ser $\alpha = 2m\pi/(np)$, con $m < n(p-2)/4$ y m primo con n. En el ejemplo anterior de la figura 5 se cumplen estas relaciones con $m = 1$.

¿En qué casos se dará la afortunada circunstancia de que cada polígono (salvo el primero) esté inscrito en la circunferencia inscrita en el anterior, como ocurre en nuestro logotipo? Ello se dará tan sólo cuando sea $r_{k+1} = a_k$, o sea $a_{k+1}/\cos(\pi/p) = r_k \cos(\pi/p)$ y, en definitiva, cuando

$$\cos(\pi/p + \alpha) = \cos^2(\pi/p),$$

ecuación que permite determinar α conocido p. En nuestro caso es $p = 4$ y queda $\cos(\pi/4 + \alpha) = 1/2$, lo que da $\pi/4 + \alpha = \pi/3$ y en definitiva, $\alpha = \pi/12$, como sabemos.

El que cada polígono construido tenga la mitad de área que el anterior se cumple sólo si $\rho = 1/\sqrt{2}$, o sea si

$$\cos(\pi/p + \alpha) = \cos(\pi/p)/\sqrt{2} \quad ,$$

que para $p = 4$, da también $\alpha = \pi/12$.

Fijado el número de lados p y tomando $m = 1$ en las fórmulas obtenidas, el ángulo $\alpha = 2\pi/(np)$ da lugar a una sucesión de polígonos, tal que el (n+1)-ésimo tiene lados paralelos al de partida; el tamaño de éste depende de n y será el del primer polígono multiplicado por ρ^n o sea por $[\cos((1+2/n)\pi/p)/\cos(\pi/p)]^n$. Para cada p, este factor va creciendo con n pero se mantiene acotado; su límite cuando n tiene a infinito (es del tipo 1^∞ y se calcula como exp(L) donde L es el límite del exponente multiplicado por la base menos uno) es $\exp(-(2\pi/p).\mathrm{tg}(\pi/p))$, que en el caso particular de $p = 4$ se convierte en $\exp(-\pi/2)$.

Haciendo uso de un programa adecuado, como Maple. se calculan rápidamente los valores de esta razón de semejanza (del (n+1)-ésimo al primero) para $p = 4$ y distintos valores de n:

n :	3	4	5	6	7	8	20	100	límite
razón:	0,0490	0,0858	0,1091	0,1250	0,1365	0,1452	0,1825	0,2028	0,2079
Figura:		3ª	2ª	1ª					

Con $p = 5$, se obtiene análogamente, para $n = 6$ (Figura 5ª), la razón 0,32012 y el límite, para n tendiendo a infinito, 0,40132.

Otros elementos de nuestro logotipo que llaman la atención al matemático son las cuatro quebradas que aparecen como líneas de puntos. Cuando el número n aumenta indefinidamente manteniendo $\alpha = \pi/(2n)$, esas quebradas se irán aproximando a curvas que unen los vértices del cuadrado original de lado d con los del cuadrado límite, de lado $d.\exp(-\pi/2)$ que hemos considerado antes. La razón de semejanza entre dos cuadrados consecutivos es, según [1]:

$$\rho = \cos(\pi/4 + \alpha)/\cos(\pi/4) = \cos(\pi/4 + \pi/(2n))/\cos(\pi/4).$$

Así la razón de semejanza entre el cuadrado (k+1)-ésimo y el primero será

$$\rho^k = [\cos(\pi/4 + \pi/(2n))/\cos(\pi/4)]^k . \qquad [3]$$

Por otra parte, el ángulo φ_{k+1} que forman los lados de ese cuadrado (k+1)-ésimo con los del primero será

$$\varphi_{k+1} = k.\alpha = k\pi/(2n) . \qquad [4]$$

Como el radio del cuadrado primero es $r = d/\sqrt{2}$, el radio del cuadrado (k+1)-ésimo será

$$r_{k+1} = \rho^k\, d/\sqrt{2}, \quad \text{con } \rho^k \text{ dado por [3].}$$

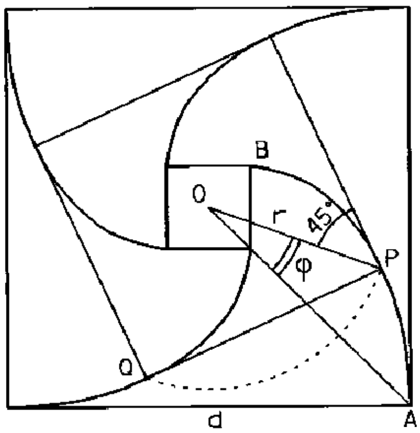


Figura 6

En el segundo miembro podemos sustituir k por $2n\varphi_{k+1}/\pi$, según [4], quedando así expresado r_{k+1} como una función de φ_{k+1} que contiene como parámetro a n. En definitiva:

$$r_{k+1} = (d/\sqrt{2}).[\cos(\pi/4 + \pi/(2n))/\cos(\pi/4)]^k \text{ , con } k = 2n\varphi_{k+1}/\pi \text{ .} \qquad [5]$$

Teniendo en cuenta que, para un n determinado, φ_{k+1} es el ángulo que forma un radio del cuadrado (k+1)-ésimo con el radio OA del cuadrado de partida (ver figura 6ª), la ecuación [5] se puede considerar como la ecuación en coordenadas polares de una curva que contiene un vértice de cada cuadrado (k=1,2, ... n+1), tomando como rayo origen el radio OA. Esta curva se modifica al cambiar n ; podemos hallar el límite cuando n tiende a infinito (el cálculo es fácil, del tipo de 1^∞, como en un caso anterior) y se obtiene la curva de ecuación, en polares (r, φ):

$$r = (d/\sqrt{2}).\exp(-\varphi),$$

es decir, se trata de una *espiral logarítmica*. Esta curva une, por supuesto, el vértice A del cuadrado inicial (de lado d) con el vértice B del cuadrado límite considerado antes, (de lado d.exp(-π/2)). Las curvas correspondientes a los otros vértices se obtienen de ésta, mediante giros de π/2 en torno a O.

Recordemos que en una curva dada en polares, como $r = r(\varphi)$, el ángulo V que forma la tangente en un punto P con el radio vector OP se calcula mediante tg V = - $r(\varphi)/r'(\varphi)$, o sea, en nuestro caso, tg V = 1 y V = π/4 (o sea 45º), lo que es una propiedad bien conocida de la espiral logarítmica. Esto hace que la tangente y la normal en el punto P estén sobre los lados de un cuadrado de centro en O; uno de estos lados es PQ, siendo tangente en Q a otra de las espirales logarítmicas consideradas.

Resulta así la notable propiedad de la figura de que cada una de las cuatro espirales logarítmicas es la evoluta de otra de ellas (como envolvente de sus normales). Puede dibujarse una infinidad de cuadrados que tienen sus vértices sobre las cuatro curvas, de modo que en cada uno un lado es tangente y otro normal a ellas.

Una generalización para cuadriláteros del Teorema de Napoleón

Juan Tarrés Freixenet
Universidad Complutense. Madrid
juan_tarres@mat.ucm.es

Abstract

We state a generalization of the Triangle Napoleon's Theorem: The quadrilateral defined by the centers of the squares drawn on each side of a quadrilateral is a square if and only if the former quadrilateral is a parallelogram.

Introducción

Napoleón Bonaparte fue un gran aficionado a la Geometría. A él se atribuye un bonito resultado de la geometría del triángulo, conocido como el

Teorema de Napoleón (ver, por ejemplo, [Co]): *Si sobre cada uno de los lados de un triángulo cualquiera se traza un triángulo equilátero, el triángulo determinado por los centros de los mismos es también equilátero.*

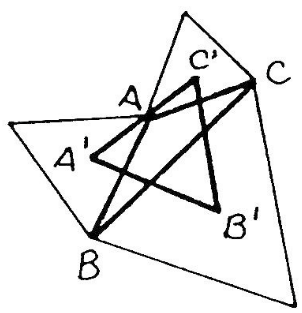


Fig. 1

El triángulo equilátero A'B'C' obtenido por este procedimiento recibe el nombre de *triángulo de Napoleón* del triángulo ABC.

Nos preguntamos sobre una posible generalización de este teorema a polígonos de mayor número de lados en el sentido de que, si sobre cada uno de los lados de un polígono de *n* lados se construye un polígono regular también de *n* lados, ¿será regular el polígono que determinan los *n* centros de los mismos?.

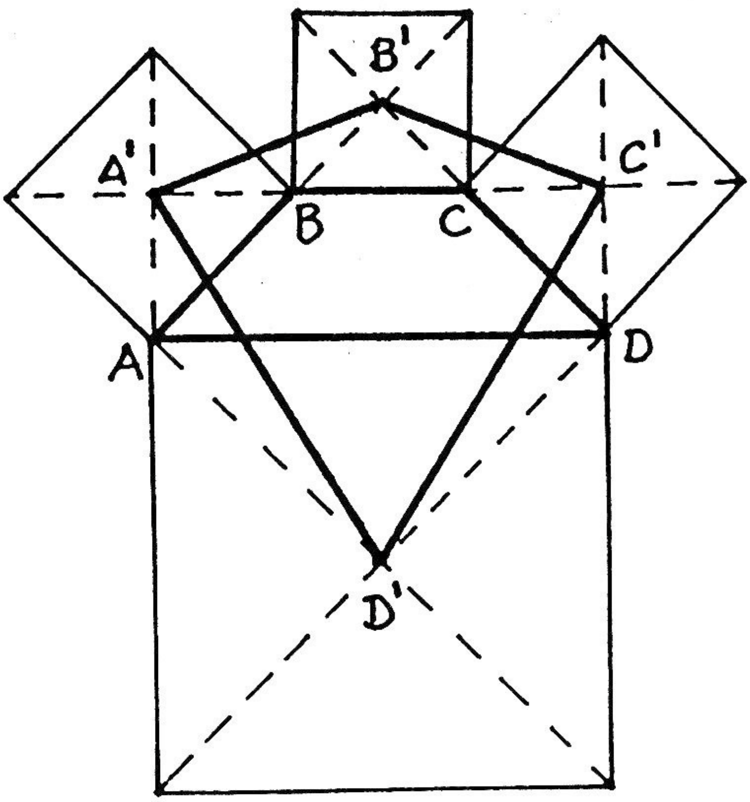


Fig. 2

La respuesta es, en general, negativa. Basta considerar el trapecio ABCD de la figura 2 y construir un cuadrado sobre cada uno de sus lados para obtener el cuadrilátero A'B'C'D' definido por sus centros respectivos.

Es obvio que A'B'C'D' no es un cuadrado, pues los lados A'B' y B'C' son menores que C'D' y D'A'; además, sus ángulos no son rectos.

No obstante, se puede plantear la cuestión de averiguar en qué casos el polígono obtenido es regular. En esta nota restringiremos nuestro estudio al caso de los cuadriláteros. Un resultado de carácter general se nos antoja muy difícil.

2. El teorema de van Aubel

Relacionado con el problema de caracterizar los cuadriláteros que admiten una generalización del teorema de Napoleón está un bonito teorema, debido al matemático flamenco del siglo XIX *Henricus Hubertus van Aubel* (Maastricht, 1830; Antwerpen, 1906):

Teorema de van Aubel: *Si* ABCD *es un cuadrilátero cualquiera y sobre cada uno de sus lados se trazan cuadrados exteriores, las diagonales del cuadrilátero* A'B'C'D' *determinado por los centros de los mismos, son perpendiculares y de la misma longitud.*

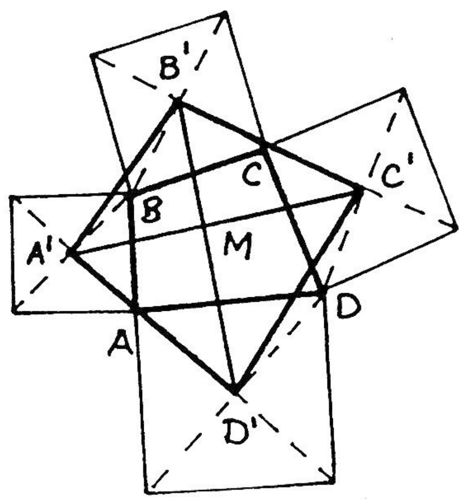


Fig. 3

La demostración de este teorema es sencilla (ver [Ya], p. 94). Para ello basta recordar algunos resultados bien conocidos de la composición de giros en el plano ([Ya], pp. 33-35):

1) La composición de dos giros del plano, de ángulos α y β, respectivamente, es un giro de ángulo $\alpha+\beta$, si $\alpha+\beta \neq 360^{\circ}$, y una traslación, si $\alpha+\beta = 360^{\circ}$.

2) Si O_1 y O_2 son los centros de sendos giros del plano, de ángulos α y β, respectivamente, y $\alpha+\beta \neq 360^{\circ}$, el centro del giro resultante de la composición de los mismos es un punto O tal que:

$$\angle OO_1O_2 = \frac{\alpha}{2} \qquad \angle OO_2O_1 = \frac{\beta}{2}$$

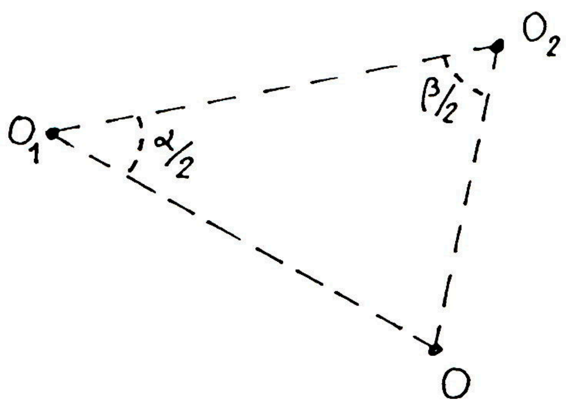


Fig. 4

3) Si, para los dos giros anteriores, es $\alpha+\beta = 360^{\circ}$, y la composición de los mismos tiene un punto fijo, este último movimiento es la identidad.

<u>*Demostración del Teorema*</u>. La composición de los giros de centros A', B', C' y D', y ángulo de 90º en cada caso, es igual a la identidad, pues la suma de los cuatro ángulos es 360º y el punto A es fijo por esta composición.

Por otra parte, la composición de los giros anteriores de centros A' y B' es un giro de 180º. Su centro, M, es el punto medio de la diagonal AC del cuadrilátero ABCD, pues transforma A en C. Además, el triángulo A'MB' es isósceles y rectángulo en M, ya que $\angle MA'B' = \angle MB'A' = 45^{\circ}$.

Asimismo, la composición de los giros de 90º y centros respectivos en C' y D' es también un giro de 180º y transforma C en A. Su centro es el mismo punto M de la composición anterior. El triángulo C'MD' es isósceles y rectángulo en M, igual que A'MB'.

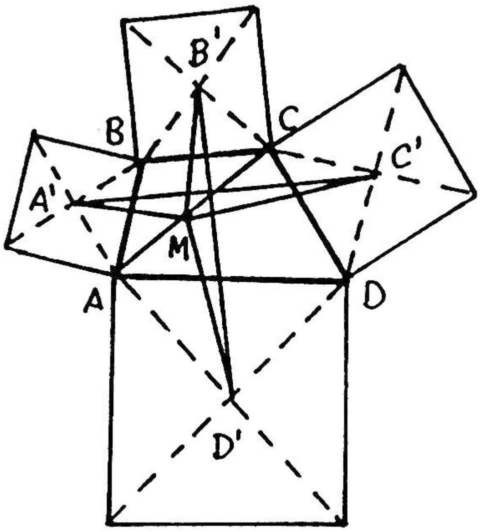


Fig. 5

La rotación de centro M y ángulo 90º transforma el triángulo A'MC' en el triángulo B'MD'. En consecuencia, la diagonal A'C' se transformará en la otra diagonal B'D'. Luego, las dos diagonales A'C' y B'D' son perpendiculares y ambas tienen la misma longitud.

2. El cuadrilátero de van Aubel

A la vista de la construcción realizada en el teorema anterior podemos dar la siguiente:

Definición. *Llamaremos* ***cuadrilátero de van Aubel*** *de* ABCD *al cuadrilátero* A'B'C'D' *definido por los centros de los cuadrados trazados sobre cada uno de los lados del cuadrilátero* ABCD.

En la introducción hemos visto que este cuadrilátero, en general, no es un cuadrado. Sin embargo:

Proposición. ([Ya], p. 39) *El cuadrilátero de van Aubel de un paralelogramo es un cuadrado.*

<u>*Demostración*</u>**.** ([Ya], p. 97). El punto M en el que se cortan las dos diagonales de ABCD es el centro de simetría de dicho cuadrilátero.

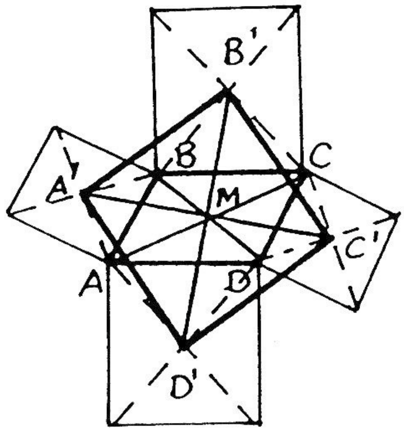


Fig. 6

Por otra parte, M es también el centro de simetría de la figura 6, por lo que las dos diagonales A'C' y B'D' del cuadrilátero de van Aubel se cortan en su punto medio. Al ser iguales y perpendiculares, A'B'C'D' es un cuadrado.

Así pues, en el caso de los paralelogramos, se verifica la generalización propuesta del teorema de Napoleón. Tenemos también:

Proposición. *Si el cuadrilátero de van Aubel de ABCD es un cuadrado, ABCD es un paralelogramo.*

<u>*Demostración*</u>. Si A'B'C'D' es un cuadrado, sea M, el centro del mismo. Según hemos visto en la demostración del teorema de van Aubel, M es el punto medio de la diagonal AC del cuadrilátero ABCD. El giro de centro M y ángulo 90º transforma los puntos (A'B'C'D') en (B'C'D'A').

La composición de los giros de centros B' y C', y ángulo 90º en cada caso es un giro de 180º con centro en el punto M', punto medio de la diagonal BD de

ABCD. El giro de centro M' y ángulo 90º transforma los puntos (B'C'D'A') en (C'D'A'B'); es decir, es el mismo giro de centro M y ángulo 90º. Luego, M = M'.

Como consecuencia de todo lo anterior, las diagonales AC y BD se cortan en su punto medio. Por lo tanto, el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Podemos enunciar, pues, la siguiente generalización para cuadriláteros del teorema de Napoleón:

Teorema (de Napoleón-van Aubel). *El cuadrilátero de van Aubel de un cuadrilátero ABCD es un cuadrado si y sólo si ABCD es un paralelogramo.*

Se puede calcular con facilidad el área del cuadrado de van Aubel en función de las longitudes de los lados del paralelogramo inicial:

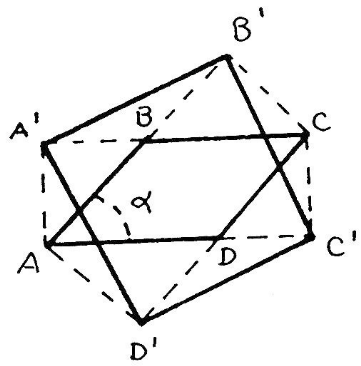


Fig. 7

Si AB = a y BC = b son las longitudes de los lados del paralelogramo ABCD, y $\alpha \leq 90°$ es el ángulo en el vértice A (fig. 7), en el triángulo A'AD' es:

$$A'A = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad AD' = \frac{b}{\sqrt{2}} \qquad \angle A'AD' = 90° + \alpha$$

Aplicando el teorema del coseno en este triángulo se obtiene:

$$A'D'^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - a.b.\cos(90° + \alpha) =$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} + a.b.\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}(a+b)^2 - a.b.(1 - \text{sen}\,\alpha)$$

es decir:

Proposición. *Dado el paralelogramo* ABCD, *con* AB = a *y* BC = b, *y tal que el ángulo en* A *es* $\alpha \leq 90º$, *el área de su cuadrado de van Aubel es:*

$$S = \frac{1}{2}(a+b)^2 - a.b.(1 - \text{sen}\,\alpha)$$

Corolario. *a*) *Si* ABCD *es un cuadrado de lado a, y* S *es el área de su cuadrado de van Aubel, es:* $S = 2 \,.\, a^2$

b) *Si* ABCD *es un rectángulo de lados a y b, es:* $S = \frac{1}{2} \,.\, (a+b)^2$

c) *Si* ABCD *es un rombo de lado a*: $S = a^2 \,.\, (1 + \text{sen}\,\alpha)$

3. El cuadrilátero interior de van Aubel

Si los cuadrados construídos sobre cada uno de los lados de un cuadrilátero ABCD se trazan hacia el interior del mismo, sus centros determinan otro cuadrilátero A"B"C"D", que llamaremos el *cuadrilátero interior de van Aubel* de ABCD**.**

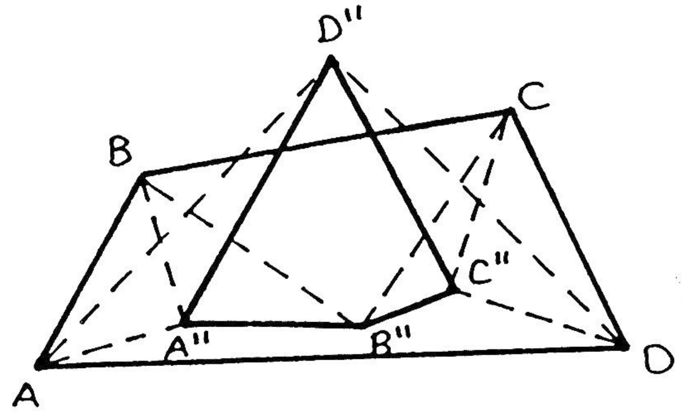


Fig. 8

Para distinguir este cuadrilátero del construido en los apartados anteriores, designaremos el anterior como el *cuadrilátero exterior de van Aubel* de ABCD.

Razonamientos análogos a los de los apartados anteriores permiten obtener:

Teorema de van Aubel. *Las diagonales del cuadrilátero interior de van Aubel de un cuadrilátero cualquiera tienen la misma longitud y son perpendiculares.*

Teorema de Napoleón - van Aubel. *El cuadrilátero interior de van Aubel de un cuadrilátero ABCD es un cuadrado si y sólo si ABCD es un paralelogramo.*

Vamos a calcular el área del cuadrilátero interior de van Aubel de un paralelogramo ABCD:

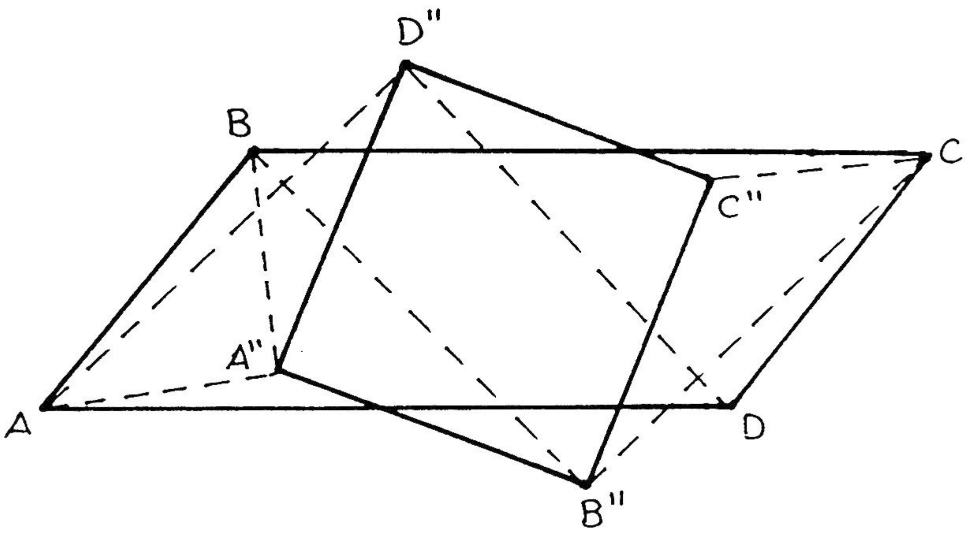


Fig. 9

Si $\alpha \leq 90^\circ$ es el ángulo en el vértice A y AB = a , BC = b son las longitudes de sus lados, en el triángulo C"DD" de la figura 9 se tiene:

$$C''D = \frac{a}{\sqrt{2}} \qquad DD'' = \frac{b}{\sqrt{2}} \qquad \angle\, C''DD'' = 90^\circ - \alpha$$

Aplicando el teorema del coseno en este triángulo se obtiene:

$$C''D''^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - a.b.\cos(90^o - \alpha) =$$

$$= \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} - a.b.\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}(a - b)^2 + a.b.(1 - \text{sen}\,\alpha)$$

En consecuencia:

Proposición. *Dado el paralelogramo* ABCD*, con* AB = *a y* BC = *b, y tal que el ángulo en A es* $\alpha \leq 90^o$*, el área de su cuadrado interior de van Aubel es:*

$$S = \frac{1}{2}(a - b)^2 + a.b\,(1 - \text{sen}\,\alpha)$$

Corolario. a) *Si* ABCD *es un cuadrado su cuadrado interior de van Aubel se reduce un punto y es* S = 0.

b) *Si* ABCD *es un rectángulo de lados a y b es*: $S = \frac{1}{2}(a - b)^2$

c) *Si* ABCD *es un rombo de lado a, es*: $S = a^2.\,(1 - \text{sen}\,\alpha)$

Es un resultado conocido que la diferencia de las áreas de los triángulos exterior e interior de Napoleón de un triángulo ABC es, precisamente, el área del propio triángulo ABC [Co].

Para los cuadrados exterior e interior de van Aubel de un paralelogramo ABCD, si S y S' son, respectivamente, las áreas de sus cuadrados exterior e interior de van Aubel, se obtiene:

$$S - S' = \left[\frac{1}{2}(a + b)^2 - a.b.(1 - \text{sen}\,\alpha)\right] - \left[\frac{1}{2}(a - b)^2 + a.b.(1 - \text{sen}\,\alpha)\right]$$

Efectuando operaciones y simplificando, resulta:

$$S - S' = 2.a.b. \text{ sen } \alpha$$

Así:

Proposición. *La diferencia de las áreas de los cuadrados exterior e interior de van Aubel de un paralelogramo* ABCD, *de lados* AB = a , BC = b *y ángulo en* A *igual a* $\alpha \leq 90º$ es:

$$d = 2.a.b. \text{ sen } \alpha$$

Corolario. a) *Si* ABCD *es un cuadrado o un rectángulo, la diferencia de las áreas de sus cuadrados exterior e interior de van Aubel es igual al doble del área de* ABCD.

b) *Si* ABCD *es un rombo de lado a y ángulo* $\alpha \leq 90º$ *en* A, *es* $d = 2.a^2. \text{ sen } \alpha$

Referencias

[Co]. COXETER, H.S.M.; Greitzer, S.L. *Retorno a la Geometría*. La Tortuga de Aquiles, nº 1. DSL-EULER, Editores. Madrid, 1993.

[Ya]. YAGLOM, I. M. *Geometric Transformations I*. The Mathematical Association of America. New Mathematical Library, 8. 1962.

Propiedades y Problemas relacionados con las Funciones de Smarandache

Sebastián Martín Ruiz

Avda. De Regla, 43, Chipiona 11550 (Cádiz)

Minh Perez

Rehoboth, Box 141, NM 87301, EE. UU.

e-mail: minh@yahoo.com

Abstract

In this paper we present the definitions and some properties of several Smarandache type functions that are involved in many proposed solved and unsolved problems and conjectures in number theory and recreational mathematics. Examples are also provided. Interesting problems related to them are proposed as addenda to this article.

1. Introducción

La *Función de Smarandache* más conocida, la cual ha llegado a ser una función clásica en teoría de números es la siguiente:

S: N → N*, S(1)=1,S(n) es el menor entero tal que S(n)! es divisible por n.*

Por ejemplo: S(6)=3, ya que $3!=1\cdot 2\cdot 3=6$ que es divisible por 6, y 3 es el menor número con esta propiedad, i.e. 2! no es divisible por 6. S(8)=4, S(11)=11.

Esta función ha sido muy estudiada la pasada década y se han descubierto interesantes propiedades en relación a ella.

2. Propiedades

2.1. Max{p, p es primo y p divide n} $\leq$ S(n) $\leq$ n para cualquier entero positivo n.

2.2. Si n = (p_1^s_1) · (p_2^s_2) ·…· (p_k^s_k), donde p_1, p_2, …, p_k son primos distintos entonces $S(n) = \max_{1\leq i \leq k} \{S(p_i\text{^}s_i)\} \leq \max_{1\leq i \leq k}\{p_i \cdot s_i\}$.

2.3.Caracterización de los números primos
Sea p un entero > 4. Entonces: p es primo si y solo si S(p)=p.

Demostración: Sea p un número primo>4 y supongamos que S(p)=m<p, entonces m! no es divisible por p, por tanto S(p)=p. Por otro lado, sea S(p) = p y p $\neq$ 4; supongamos que p no es primo, por tanto existen dos enteros s y t, con s$\leq$t<p, tal que p = s·t, pero entonces S(p) $\leq$ t $\neq$ p ya que t! es divisible por s y t a la vez (i.e. t! es divisible por p). Contradicción.

2.4 *Una fórmula exacta para calcular el número de primos menores o iguales que x* (L. Seagull): Si x es un entero $\geq$ 4, entonces el número de primos $\leq$ x es:

$$\Pi(x) = -1 + \sum_{k=2}^{x} \left\lfloor \frac{S(k)}{k} \right\rfloor$$

donde S(k) es la Función de Smarandache clásica, y $\lfloor a \rfloor$ es la parte entera de a (el mayor entero menor o igual que a).

Demostración: Conocemos que la función de Smarandache tiene la propiedad que si p > 4 entonces S(p) = p si y solo si p es primo, además S(k)<=k para todo k, y S(4)=4 (la única excepción para lo primero), con esto podemos encontrar fácilmente la fórmula exacta para el número de primos menores o iguales que x.

3. Conjeturas

3.1. La ecuación diofántica S(n) = S(n+1) no tiene solución. (L. Tutescu)

3.2. La ecuación diofántica S(n) + S(n+1) = S(n+2) tiene infinitas soluciones (I. M. Radu)

4. Mas Tipos de Funciones de Smarandache

Las siguientes han sido consideradas y estudiadas:

4.1 La *Función Doble Factorial de Smarandache*:
Sdf(n) es el menor entero tal que Sdf(n)!! es divisible por n, donde el doble factorial se define como: m!! = 1·3·5·...·m, si m es impar; y m!! = 2·4·6·...·m, si m es par.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
SDF(n)	1	2	3	4	5	6	7	4	9	10	11	6	13	14	5	6

4.2 *Función de Smarandache-Kurepa*:
Para un primo p, SK(p) es el menor entero tal que !SK(p) es divisible por p, donde !m = 0! + 1! + 2! + ... + (m-1)!

Por ejemplo:

p	2	3	7	11	17	19	23	31	37	41	61	71	73	89
SK(p)	2	4	6	6	5	7	7	12	22	16	55	54	42	24

4.3 *Función de Smarandache-Wagstaff*:
Para un primo p, SW(p) es el menor entero tal que W(SW(p)) es divisible por p, donde W(m) = 1! + 2! + ... + (m)!

Por ejemplo:

p	3	11	17	23	29	37	41	43	53	67	73	79	97
SW(p)	2	4	5	12	19	24	32	19	20	20	7	57	6

4.4 *La función Superior de Smarandache de orden k*:
Sk(n) es el menor entero para el cual n divide a Sk(n)^k

Por ejemplo, para k=2, tenemos:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
S2(n)	1	2	3	2	5	6	7	4	3	10	11	6	13	14	15	4

4.5 *Función Pseudo-Smarandache:*
Z(n) es el menor entero tal que 1 + 2 + ... + Z(n) es divisible por n.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7
Z(n)	1	3	2	3	4	3	6

4.6 *Función Entorno al Primorial de Smarandache*:
SNTP(n) es el menor primo tal que alguno de estos tres valores p# - 1, p#, o p# + 1 es divisible por n, donde p# , para un número primo p, es el producto de todos los primos menores o iguales que p. Esta función solo existe para valores de n libres de cuadrados.

Por ejemplo:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...	59	...
SNTP(n)	2	2	2	?	3	3	3	?	?	5	11	...	13	...

5. Otros tipos de funciones de Smarandache

Las siguientes han sido estudiadas los últimos años:

5.1 Sea f: Z $\rightarrow$ Z una función estrictamente creciente y x un elemento de R, Entonces:

a) *f-Parte Inferior de Smarandache* de x, ISf(x), es el menor k tal que $f(k) \leq x < f(k+1)$.
b) *f-parte Superior Smarandache* de x, SSf(x) es el menor k tal que $f(k) < x \leq f(k+1)$.

Casos Particulares:

a) Parte S-Prima Inferior:
Para cualquier número real n positivo definimos ISp(n) como el mayor primo menor o igual que n.
Los primeros valores de esta función son:
2,3,3,5,5,7,7,7,7,11,11,13,13,13,13,17,17,19,19,19,19,23,23.

b) Parte S-Prima Superior:
Para cualquier número real positivo n definimos SSp(n) es el menor primo mayor o igual que n:
Los primeros valores de esta función son:
2,2,2,3,5,5,7,7,11,11,11,11,13,13,17,17,17,17,19,19,23,23,23.

c) Parte S-Cuadrada Inferior:
Para cualquier número real positivo n definimos ISs(n) como el mayor cuadrado menor o igual que n:
Los primeros valores de esta función son:
0,1,1,1,4,4,4,4,4,9,9,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,16,25,25.

d) Parte S-Cuadrada Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSs(n) como el menor cuadrado mayor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

0,1,4,4,4,9,9,9,9,9,16,16,16,16,16,16,16,25,25,25,25,25,25,25,25,25,36.

e) Parte S-Cúbica Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos ISc(n) el mayor cubo menor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

0,1,1,1,1,1,1,1,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,8,27,27,27,27.

f) Parte S-Cúbica Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSc(n) es el menor cubo mayor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

0,1,8,8,8,8,8,8,8,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27,27.

g) Parte S-Factorial Inferior:

Para cualquier número real positivo n definimos ISf(n) el mayor factorial menor o igual que n.

Los primeros valores de esta función son:

1,2,2,2,2,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,6,24,24,24,24,24,24,24.

h) Parte S-Factorial Superior:

Para cualquier número real positivo n definimos SSf(n) el menor factorial mayor o igual que n:

Los primeros valores de esta función son:

1,2,6,6,6,6,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,24,120.

Comentario 1: Esto es una generalización de la parte entera superior/inferior de un número.

5.2. Sea f: $Z \rightarrow Z$ una función estrictamente creciente y x un elemento de R. Entonces:

definimos la *f-Parte Fraccionaria de Smarandache* de x, FSf(x)=x-ISf(x), donde ISf(x) es la f-Parte Inferior de Smarandache definida arriba.

Casos Particulares:

a) Parte S-Prima Fraccionaria:

FSp(x)=x – ISp(x),

donde ISp(x) es la Parte S-Prima Inferior definida arriba.

Ejemplo: FSp(12.501) = 12.501 - 11 = 1.501.

b) Parte S-Cuadrada Fraccionaria:

FSs(x) = x - ISs(x),

donde ISs(x) es la Parte S-Cuadrada Inferior definida arriba.

Ejemplo: FSs(12.501) = 12.501 - 9 = 3.501.

c) Parte S-Cúbica Fraccionaria:

FSc(x) = x - ISc(x),

donde ISc(x) es la Parte S-Cúbica Inferior definida arriba.

Ejemplo: FSc(12.501) = 12.501 - 8 = 4.501.

d) Parte S-Factorial Fraccionaria:

FSf(x) = x - ISf(x),

donde ISf(x) es la Parte S-Factorial Inferior definida arriba.

Ejemplo: FSf(12.501) = 12.501 - 6 = 6.501.

Comentario 2.1: Esto es una generalización de la parte fraccionaria de un número.

Comentario 2.2: De forma similar podemos definir:

– La f-Parte Inferior Fraccionaria de Smarandache:

IFSf(x) = x - ISf(x) = FSf(x);

– La f-Parte Superior Fraccionaria de Smarandache:

SFSf(x) = SSf(x) - x;

Por ejemplo: Parte Cúbica Superior Fraccionaria de Smarandache de 12.501 = 27 - 12.501 = 14.499.

5.3 Sea g: A $\rightarrow$ A una función estrictamente creciente, y sea "~" una ley de composición interna en A. Entonces decimos que f: A $\rightarrow$ A es la *función complementaria de Smarandache respecto de la función g y la ley interna "~"* si:

f(x) es el menor k tal que existe un z en A que verifica x~k = g(z)

Casos Particulares:

a) Función de Smarandache Complementario del Cuadrado:

f: N $\rightarrow$ N, f(x) = es el menor k tal que x·k es un cuadrado perfecto.

Los primeros valores de esta función son:

1,2,3,1,5,6,7,2,1,10,11,3,14,15,1,17,2,19,5,21,22,23,6,1,26,3,7.

b) Función de Smarandache Complementario del Cubo:

f: N $\rightarrow$ N, f(x) = es el menor k tal que x·k es un cubo perfecto.

Los primeros valores de esta función son:

1,4,9,2,25,36,49,1,3,100,121,18,169,196,225,4,289,12,361,50.

De forma más general:

c) Función de Smarandache Complementario de la Potencia m-ésima:
$f: N \to N$, $f(x)$ = menor k tal que $x \cdot k$ es una potencia m-ésima

d) Función de Smarandache Complementario del primo:
$f: N \to N$, $f(x)$ = es el menor k tal que $x+k$ es un número primo.
Los primeros valores de esta función son:
1,0,0,1,0,1,0,3,2,1,0,1,0,3,2,1,0,1,0,3,2,1,0,5,4,3,2,1,0,1,0,5.

5.4 *Función S-Multiplicativa*:

es una función $f : N^* \to N^*$ tal que para cualquier $(a, b) = 1$, $f(a \cdot b) = \max \{f(a), f(b)\}$; [i.e. cumple la principal propiedad de la función de Smarandache].
Las siguientes funciones son obviamente S-multiplicativas:
a) La función constante $f : N^* \to N^*$, $f(n) = 1$.
b) La función de Smarandache $S: N^* \to N$, $S(n) = \max\{ p | \, p! : n\}$.
Ciertamente muchas propiedades de funciones multiplicativas pueden ser trasladadas a funciones S-multiplicativas.

6. Iteraciones Funcionales de Smarandache

6.1 *Iteración funcional de Smarandache de Primera Especie*:

Sea $f: A \to A$ una función, tal que $f(x) \leq x$ para todo x, y
$\min \{f(x), x \in A\} \geq m_0 \neq -\infty$.
Supongamos que f tiene en $p \geq 1$ un punto fijo: $m_0 \leq x_1 < x_2 < ... < x_p$.
[Un punto x es llamado punto fijo si $f(x) = x$.] Entonces:
$SI1_f(x)$ = es el menor número de iteraciones k tal que $f(f(...f(x)...))$ = constante iterada k veces.

Ejemplo: Sea $n > 1$ un número entero, y $d(n)$ el número de divisores positivos de n, $d: N \to N$. Entonces $SI1_d(n)$ es el menor número de iteraciones tal que $d(d(...d(n)...)) = 2$, iterada k veces, puesto que $d(n) < n$ para $n > 2$, y el punto fijo de la función d es 1 y 2. Tenemos que $SI1_d(6) = 3$, ya que $d(d(d(6))) = d(d(4)) = d(3) = 2$ = constante. $SI1_d(5) = 1$, puesto que $d(5) = 2$.

6.2. *Iteración funcional de Smarandache de Segunda especie*:

Sea $g: A \to A$ una función, tal que $g(x) > x$ para todo x, y sea $b > x$. Entonces:
$SI2_g(x, b)$ = es el menor número de iteraciones tal que $g(g(...g(x)...)) \geq b$ iterada k veces

Ejemplo: Sea $n > 1$ un número entero, y $\Sigma(n)$ la suma de los divisores positivos de n (1 y n incluidos), $\Sigma: N \to N$. Entonces $SI2_{\Sigma}$ (n, b) es el menor número de iteraciones k tal que $\Sigma(\Sigma(\ldots\Sigma(n)\ldots)) \geq b$, iterada k veces puesto que $\Sigma(n) > n$ para $n > 1$. Se tiene $SI2_{\Sigma}(4, 11) = 3$, ya que $\Sigma(\Sigma(\Sigma(4))) = \Sigma(\Sigma(7)) = \Sigma(8) = 15 \geq 11$.

6.3 *Iteración Funcional de Smarandache de Tercera Especie*:

Sea h: $\to$ A una función, tal que $h(x) < x$ para todo x, y sea $b < x$. Estonces: $SI3_h$ (x, b) = es el menor número de iteraciones k tal que $h(h(\ldots h(x)\ldots)) \leq b$, iterada k veces.

Ejemplo: Sea n un número entero y gd(n) el mayor divisor de n, menor que n, gd: $N^* \to N^*$ con $gd(n) < n$ para $n > 1$. $SI3_{gd}(60, 3) = 4$, puesto que $gd(gd(gd(gd(60)))) = gd(gd(gd(30))) = gd(gd(15)) = gd(5) = 1 \leq 3$.

Referencias

[1] Ashbacher, C., "A Note on the Smarandache Near-To-Primordial Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 46-49, 1996.

[2] Ashbacher, C., "Some Properties of the Smarandache-Kurepa and Smarandache-Wagstaff Functions", <Mathematics and Informatics Quarterly>, Vol. 7, No. 3, pp. 114-116, 1997.

[3] Begay, A., "Smarandache Ceil Functions", in <Bulletin of Pure and Applied Sciences>, India, Vol. 16E, No. 2, 227-229, 1997.

[4] Castillo, Jose, "Other Smarandache Type Functions", http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/funct2.txt

[5] Dumitrescu, C., Seleacu, V., "Some notions and questions in number theory", Erhus Univ. Press, Glendale, 1994. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/snaqint.txt

[6] Ibstedt, H., "Smarandache Iterations of First and Second Kinds", <Abstracts of Papers Presented to the American Mathematical Society>, Vol. 17, No. 4, Issue 106, 680, 1996.

[7] Kashihara, K., "Comments and Topics on Smarandache Notions and Problems", Erhus Univ. Press, Vail, USA, 1996. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/Kashihara.pdf

[8] Mudge, Mike, "The Smarandache Near-To-Primordial (S.N.T.P.) Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 45, 1996.

[9] Popescu, Marcela, Nicolescu, Mariana, "About the Smarandache Complementary Cubic Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, no. 1-2-3, 54-62, 1996.

[10] POPESCU, Marcela, Seleacu, Vasile, "About the Smarandache Complementary Prime Function", <Smarandache Notions Journal>, Vol. 7, No. 1-2-3, 12-22, 1996.

[11] RUIZ, Sebastian Martin, "Applications of Smarandache Function, Prime and Co-prime Functions", American Research Press, Rehoboth, 2002;
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/SMRuiz-eBook.pdf

[12] SEAGULL, L., "The smarandache Function and the number of primes up to x", <Mathematical Spectrum>, University of Shielfield, Vol. 28, No. 3, 53, 1995/6. http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/FORMULA.TXT

[13] SMARANDACHE, F., "A Function in Number Theory", Analele Univ. Timisoara, XVIII, fasc. 1, 79-88, 1980;
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/SFBook1.pdf

[14] SMARANDACHE, Florentin, "Only Problems, not Solutions!", Xiquan Publishing House, Phoenix-Chicago, 1990, 1991, 1993;
http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/OPNS.pdf

[15] "The Florentin Smarandache papers" Special Collection, Arizona State University, Hayden Library, Tempe, Box 871006, AZ 85287-1006, USA;

[16] TABIRCA, Sabin, "About S-Multiplicative Functions", <Octogon>, Brasov, Vol. 7, No. 1, 169-170, 1999.

[17] Weisstein, Eric W., "CRC Concise Encyclopedia of Mathematics", CRC Press, Boca Raton, 1998.

Otros libros electrónicos de Sucesiones y Funciones de Smarandache pueden bajarse de Internet en la dirección

http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/eBooks-otherformats.htm

y hay trabajos de investigación en

http://www.gallup.unm.edu/~smarandache/math.htm.

Problemas propuestos sobre Funciones de Smarandache

Problema 1. Sea S(n) el menor número entero tal que S(n)! es divisible por n, donde m!=1·2·3·...·m (factorial de m), y S(1)=1 (Función de Smarandache). Probar que si p es primo se tiene que S(p)=p. Calcular S(42).

Propuesto por Anthony Begay

Problema 2. Sea Sdf(n) la función doble factorial de Smarandache, i. e. El menor entero tal que Sdf(n)!! es divisible por n, donde m!!=1x3x5x7x...xm si m es impar y m!!=2x4x6x...xm si m es par. Si n es un entero par libre de cuadrados y p es el mayor primo que divide a n, se tiene que Sdf(n)= 2p.

Gilbert Johnson (New Mexico, USA)

Problema 3. Si p es un primo impar de la forma p=2k+1, calcular Sdf(p^((k+2)), donde Sdf(n) es la función doble factorial de Smaradache (esto es, el menor entero tal que Sdf (n)!! es divisible por n, donde el doble factorial toma los valores m!!=1x3x5x...xm si m es impar , y m!!=2x4x6x...xm si m es par).

Ivan Godunov (Moscú, Rusia)
Leonardo Motta (Belem, Brasil)

Problema 4. Sea p un número primo positivo, y sea S(n) la Función de Smarandache, definida como en menor entero tal que S(n)! es divisible por n. El factorial de m es el producto de todos los enteros de 1 hasta m. Probar que $S(p^p)=p^2$.

Alecu Stuparu (Valcea, Rumania)

Problema 5. Consideremos la función Sdf(n), llamada función doble factorial de Smarandache, cuyo valor es en menor entero positivo tal que Sdf(n)!! es divisible por n. Donde el doble factorial toma los valores m!!=1x3x5x...xm si m es impar , y m!!=2x4x6x...xm si m es par. Resuelve la ecuación Sdf(x)=p, con p primo. ¿Cuántas soluciones tiene esta ecuación?

Carlos Gustavo Moreira (Río de Janeiro, Brasil)

HIERONYMI CAR DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,

ARTIS MAGNÆ,

SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,

Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod

OPVS PERFECTVM

inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſ ſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni ęquales fuerint, nodum explicant. Hunc aūt librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſsimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarētur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Las relaciones de Cardano en la Enseñanza de las Matemáticas en Secundaria

María Belén Rodríguez Rodríguez

I.E.S. Sefarad, Toledo

Abstract

We present some examples showing how to use Cardano´s relations in solving elementary problems of analytic geometry. These contents have disappeared of the current curricula of our Bachillerato´s studies, and we defend its presence.

Introducción

El estudio de las raíces de los polinomios ha constituido un hilo conductor fundamental en el desarrollo del Algebra, al menos hasta mediados del siglo XIX. Sin embargo, su presencia entre los contenidos de Matemáticas del actual Bachillerato es poco más que testimonial. De hecho, salvo las rutinas de sumar, multiplicar y dividir polinomios, el teorema del resto y la regla de Ruffini, y el cálculo de las raíces de las ecuaciones de segundo grado y las que se derivan trivialmente de ellas, poco más escuchan los estudiantes de Secundaria acerca de una cuestión por la que, desde la antigüedad, se han ocupado eminentes matemáticos. Nuestra convicción es que el estudio de las relaciones de Cardano que ligan las raíces de un polinomio con sus coeficientes es, por un lado, de más fácil comprensión que buena parte de los ítems que constituyen el actual currículum del estudiante de Secundaria; de hecho es habitual explicarlas para los de grado dos, lo que no presenta mayor dificultad, ni la presentaría para los de grado superior. No cabe duda que las cuestiones relacionadas con el "paso al límite" que llenan las páginas de los libros de texto "se aprehenden" mucho peor, y ni el álgebra lineal, ni la trigonometría, ni el cálculo vectorial, ni la combinatoria, ..., resultan más fáciles. Por otro lado, pensamos que se trata de un material útil para el alumno, que con frecuencia se desalienta o emprende caminos alternativos cuando la búsqueda de un lugar geométrico, o las coordenadas de ciertos puntos, conlleva la necesidad de manipular ecuaciones polinómicas que, sin embargo, no necesita resolver.

Incluso buena parte de los estudiantes universitarios no disponen de tan elemental herramienta cuando aprenden los rudimentos de geometría analítica o reciben cursos de cónicas o curvas y superficies diferenciables, y sucede con frecuencia que al estudiar las relaciones de Cardano en el primer curso de álgebra no lineal no tienen oportunidad de emplearlas en contextos geométricos.

Presentamos a continuación tres ejemplos en los que el uso de las relaciones de Cardano para polinomios de grado dos, tres y cuatro permite resolver sencillos problemas de geometría analítica que hoy en día no saben abordar nuestros alumnos, ni siquiera en casos particulares.

Aunque el núcleo de los argumentos utilizados no excede un nivel que juzgamos adecuado para la Enseñanza Secundaria, hemos de señalar que para desarrollar rigurosamente el primer ejemplo es necesario conocer, además, qué cumplen los coeficientes reales de un polinomio de grado tres cuyas raíces sean reales. Por otro lado, el tercero de los ejemplos consiste en el cálculo de la envolvente de una familia de rectas; es obvio que nuestra pretensión al respecto es enseñar en el Bachillerato únicamente cómo encontrar ecuaciones implícitas de los miembros de la familia.

En realidad, a lo largo de las páginas que siguen no emplearemos todas las fórmulas de Cardano sino sólo las siguientes igualdades:

1. Si $a \neq 0$ y x_1, x_2 son las raíces del polinomio $aX^2 - bX + c$, entonces

$$x_1 + x_2 = b/a \quad ; \quad x_1x_2 = c/a.$$

2. Si $a \neq 0$ y x_1, x_2, x_3 son las raíces del polinomio $aX^3 - bX^2 + cX - d$, entonces

$$x_1 + x_2 + x_3 = b/a \quad ; \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = c/a \quad ; \quad x_1x_2x_3 = d/a.$$

3. Si $a \neq 0$ y x_1, x_2, x_3, x_4 son las raíces del polinomio $aX^4 - bX^3 + cX^2 - dX + e$, entonces

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = b/a.$$

Ejemplo 1

Cálculo de una ecuación implícita del lugar geométrico □ de los puntos del plano desde los que se pueden trazar dos tangentes perpendiculares entre sí a la curva

$$C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : yx^2 + 4 = 0\}.$$

Sea $p = (u, v) \in \mathbf{R}^2$ un punto cualquiera del plano. La recta $r(x)$ que lo une con el punto $(x, -4/x^2) \in C$ es tangente a C en p si su pendiente vale $m(x) = 8/x^3$. Como también $m(x) = (vx^2 + 4) / x^2(u - x)$, resulta que la recta $r(x)$ es tangente a la curva C si y sólo si $8/x^3 = (vx^2 + 4)/x^2(u - x)$, esto es, x ha de ser una raíz real no nula del polinomio

$$P_p(T) = vT^3 + 12T - 8u.$$

Por lo tanto, fijado $p \in \mathbf{R}^2$, las abscisas de los puntos de tangencia de las rectas tangentes a la curva C que pasan por p son las raíces reales no nulas del polinomio P_p . En particular, si $p \in \Gamma$, desde p se pueden trazar dos tangentes distintas a C, luego P_p ha de tener al menos dos raíces reales distintas. Esto equivale, véase por ejemplo [1, pag 7] a

$$v \neq 0 \quad ; \quad u^2v^2 + 4v \leq 0. \qquad (1.1)$$

Obsérvese que estas condiciones garantizan, de hecho, la existencia de dos raíces reales no nulas de P_p, porque si dos fuesen nulas lo serían las tres por ser nulo el coeficiente de T^2 de P_p , y entonces $P_p(T) = vT^3$, que es falso.

Dado un punto p que cumpla (1.1), denotemos por x, y, z las raíces, no necesariamente distintas, del polinomio P_p. La primera de las relaciones de Cardano dice que $x + y + z = 0$, i.e., $z = -(x + y)$, y por tanto las otras dos se reescriben como

$$12 = v[xy + xz + yz] = v[xy - (x + y)^2] \quad ; \quad 8u = vxyz = -v(x + y)xy. \qquad (1.2)$$

Sin pérdida de generalidad, el punto $p \in \Gamma$ si y sólo si las rectas $r(x)$ y $r(y)$ son perpendiculares, o lo que es lo mismo, sus pendientes $m(x)$ y $m(y)$ satisfacen la igualdad $m(x)\, m(y) = -1$, es decir, $xy = -4$. Sustituyendo en (1.2) se tiene

$$12 = -v[4 + (x + y)^2] \quad ; \quad 2u = v(x + y).$$

Eliminando $x + y$ en estas igualdades se concluye que $u^2 + v^2 + 3v = 0$.

Todos los puntos de la circunferencia $\{u^2 + v^2 + 3v = 0\}$ cumplen la desigualdad laxa de (1.1). En efecto, para dichos puntos se cumple que $v \leq 0$, por lo que

$$u^2v^2 + 4v = -(v^2 + 3v)v^2 + 4v = -v(v - 1)(v + 2)^2 \leq 0.$$

En conclusión,

$$\Gamma = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 : u^2 + v^2 + 3v = 0 \ ; \ v \neq 0\}. \ \blacklozenge$$

En los dos ejemplos que siguen emplearemos, únicamente, la relación que expresa la suma de las raíces de un polinomio. En primer lugar lo haremos con polinomios de grado cuatro.

Ejemplo 2

Sean en $\mathbf{R}^2$ una Γ cónica, no degenerada, que no es circunferencia y Λ el lugar geométrico de los baricentros de los triángulos equiláteros inscritos en Γ. Entonces Λ es una cónica de la misma naturaleza que Γ, salvo si la excentricidad de ésta vale 2 o $2\sqrt{3}/3$, en cuyo caso Λ es un par de rectas paralelas.

En efecto, un punto $p = (u, v)$ de $\mathbf{R}^2$ pertenece a Λ si y sólo si existen tres puntos q_1, q_2 y q_3 en Γ de coordenadas $q_i = (x_i, y_i)$ tales que p es baricentro del triángulo T de vértices q_1, q_2 y q_3. Por supuesto, en tal caso

$$3u = x_1 + x_2 + x_3 \quad ; \quad 3v = y_1 + y_2 + y_3.$$

Nótese que el baricentro de T es el centro de la circunferencia S circunscrita a T, y los puntos q_1, q_2 y q_3 están en Γ y en S. Si denotamos por r el radio de S, la ecuación de ésta es

$$S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2\},$$

por lo que si $P(X, Y) \in \mathbf{R}[X, Y]$ es un polinomio de segundo grado tal que

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : P(x, y) = 0\},$$

la cónica Γ y la circunferencia S se cortan en cuatro puntos, no necesariamente distintos, tres de los cuales son los vértices de T. Llamamos $q_4 = (x_4, y_4)$ al cuarto punto de intersección de Γ y S, y observamos que

$$\Gamma \cap S = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2 \ ; \ P(x, y) = 0\}. \qquad (2.1)$$

Vamos a calcular el valor de las sumas de abscisas y ordenadas

$$3u + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad ; \quad 3v + y_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4.$$

En virtud de las fórmulas de Cardano es suficiente encontrar polinomios de grado 4 cuyas raíces sean x_1, x_2, x_3, x_4 en el primer caso, e y_1, y_2, y_3, y_4 en el segundo. Con tal fin es conveniente distinguir dos casos:

Caso 1: *Γ es una parábola.*

Se puede suponer entonces que $P(X, Y) = Y - aX^2$ para cierto número real no nulo a. De este modo, a la vista de (2.1), un punto (x, y) pertenece a $\Gamma \cap S$ si y sólo si $y = ax^2$ y además x es raíz del polinomio de grado cuatro

$$(X - u)^2 + (aX^2 - v)^2 - r^2 = 0.$$

Este polinomio, cuyas raíces son x_1, x_2, x_3 y x_4, carece de término en X^3, luego por las fórmulas de Cardano,

$$3u + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0. \qquad (2.2)$$

Para obtener el valor de $3v + y_4$ procedemos como sigue. El punto $(x, y) \in \Gamma \cap S$ si y sólo si $y = ax^2$ y además $0 = ax^2 - 2aux + ba$, siendo $b = u^2 + (y - v)^2 - r^2$. La condición anterior se lee $x = (y + ab)/2au$, y sustituyendo este valor en la ecuación de la circunferencia S, resulta que y es raíz de un polinomio de la forma

$$a^2Y^4 + 2a(1 - 2av)Y^3 + \ldots$$

En consecuencia,

$$3v + y_4 = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2(2av - 1)/a. \qquad (2.3)$$

A partir de (2.2) y (2.3) se deduce que $x_4 = -3u$; $y_4 = v - 2/a$. Ahora bien, el punto $q_4 = (x_4, y_4) = (-3u, v - 2/a)$ pertenece a Γ, y por tanto, $v - 2/a = 9au^2$. Por tanto, el lugar buscado Λ es también una parábola, de ecuación

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \ y - 2/a = 9ax^2\}.$$

Caso 2: *Γ es una elipse que no es circunferencia o una hipérbola.*

Podemos suponer en este caso que existen números reales no nulos A, B y C tales que $A \neq B$ de modo que

$$P(X, Y) = AX^2 + BY^2 - C^2.$$

Las condiciones para que un punto $(x, y) \in \Gamma \cap S$ son ahora

$$(x-u)^2 + (y-v)^2 = r^2 \; ; \;\; Ax^2 + By^2 - C^2 = 0.$$

Vamos a hallar, como en el caso anterior, un polinomio de grado 4 cuyas raíces sean las abscisas de los puntos comunes a Γ y S. Para ello eliminaremos la variable y en las ecuaciones precedentes. Restando a la segunda de ellas el resultado de multiplicar la primera por B, y llamando

$$\mu = (x-u)^2 + v^2 - r^2 \text{ y } \gamma = Ax^2 - C^2,$$

se despeja $y = (B\mu - \gamma) / 2Bv$. Sustituyendo este valor en la ecuación de Γ se deduce que la abscisa x es raíz de un polinomio de la forma

$$(B-A)X^4 - 4BuX^3 + \ldots$$

En consecuencia,

$$3u + x_4 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4Bu/(B-A).$$

Pasando de miembro resulta $x_4 = (B + 3A)u/(B-A)$ y operando del mismo modo se obtiene $y_4 = (A + 3B)v/(A-B)$. El punto $q_4 = (x_4 , y_4) \in \Gamma$, luego sustituyendo los valores anteriores, y denotando

$$a = A(B+3A)^2/C^2(B-A)^2 \quad ; \quad b = B(A+3B)^2/C^2(B-A)^2,$$

una ecuación del lugar buscado Λ es

$$\Lambda = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : ax^2 + by^2 = 1\}. \qquad (2.4)$$

Se trata, por tanto, de una cónica no degenerada salvo en los casos en que el producto $(B + 3A)(A + 3B) = 0$. En los restantes, el signo del producto ab coincide con el de AB, luego Λ y Γ son, como en el caso 1, cónicas de la misma naturaleza. Se desprende también de (2.4) que en el caso degenerado Λ consiste en un par de rectas paralelas. Es sencillo comprobar que la condición $ab = 0$, i. e, $(B + 3A)(A + 3B) = 0$ equivale, como anunciamos, a que la excentricidad de Γ sea 2 o $2\sqrt{3}/3$. ♦

En nuestro último ejemplo empleamos las relaciones de Cardano en el caso más elemental: para polinomios de grado dos.

Ejemplo 3

Sea Γ una cónica no degenerada de $\mathbf{R}^2$ y r una recta que no pasa por el centro de Γ. Suponemos además que r no es paralela al eje de Γ si ésta es una parábola, ni a ninguna de sus asíntotas si se trata de una hipérbola. Entonces, la envolvente de la familia de rectas que cortan a Γ en dos puntos tales que el punto medio del segmento que los tiene por extremos pertenece a r, es una parábola.

En efecto, eligiendo adecuadamente el sistema de referencia en el plano podemos escribir

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \varphi(x, y) = 0\},$$

para cierto polinomio de grado dos

$$\varphi(X, Y) = AX^2 + BY^2 + CX + DY + E \in \mathbf{R}[X, Y].$$

A su vez existen $\theta \in [0, 2\pi)$ y $c \in \mathbf{R}$ tales que

$$r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \cos\theta + y \operatorname{sen}\theta = c\}.$$

El punto $(c \cos\theta, c \operatorname{sen}\theta) \in r$, por lo que el punto genérico M_s de esta recta se escribe $M_s = (x(s), y(s))$, donde

$$x(s) = c \cos\theta + s \operatorname{sen}\theta \; ; \; y(s) = c \operatorname{sen}\theta - s \cos\theta.$$

La familia F de rectas buscada está formada por aquellas rectas r_s , $s \in \mathbf{R}$, tales que M_s es punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos en que r_s corta a Γ. Si denotamos por $\omega_s = (\xi_s , \eta_s)$ un vector director de r_s , los puntos de ésta son de la forma

$$M_s + t\,\omega_s = (x(s) + t\,\xi_s , y(s) + t\,\eta_s),\ t \in \mathbf{R},$$

y los de corte con Γ se obtienen para aquellos valores de t que son raíz del polinomio de segundo grado

$$P_s(T) = \varphi(x(s) + T\,\xi_s\,,\, y(s) + T\,\eta_s) \in \mathbf{R}[T].$$

El que el segmento que tiene estos puntos de corte por extremos tenga a M_s por punto medio se traduce en que las dos raíces de $P_s(T)$ sean opuestas, lo que equivale a que el coeficiente de T en el polinomio $P_s(T)$ sea nulo. Sin más que operar se obtiene dicho coeficiente:

$$0 = \xi_s\,(2A\,x(s) + C) + \eta_s\,(2B\,y(s) + D). \qquad (3.1)$$

Esta condición dice que el vector $(a(s) = 2A\,x(s) + C,\, b(s) = 2B\,y(s) + D)$ es ortogonal a r_s, y como ésta pasa por M_s, una ecuación implícita suya es

$$r_s = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : a(s)x + b(s)y = d(s)\},\text{ donde } d(s) = a(s)x(s) + b(s)y(s).$$

Obtenidas las ecuaciones de los miembros de la familia de rectas, podemos hallar su envolvente Λ. Si uno de sus arcos se parametriza mediante

$$\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2 : s \to (u(s), v(s)),$$

para ciertas funciones u y v que vamos a determinar, para cada $s \in \mathbf{R}$ la recta r_s es la tangente a Λ en el punto $\alpha(s)$. Esto significa que $\alpha(s) \in r_s$ y además $\alpha'(s)$ es un vector director de r_s, esto es

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = d(s) \quad ; \quad a(s)u'(s) + b(s)v'(s) = 0.$$

Derivando respecto de s la primera de estas igualdades, y empleando la segunda, resulta que u(s) y v(s) son soluciones del sistema lineal de ecuaciones

$$\{a(s)u(s) + b(s)v(s) = d(s) \quad ; \quad a'(s)u(s) + b'(s)v(s) = d'(s)\}, \qquad (3.2)$$

cuya matriz de coeficientes tiene por determinante

$$\Delta(s) = a(s)b'(s) - b(s)a'(s) = 4AB[x(s)y'(s) - x'(s)y(s)] + 2[BC\,y'(s) - AD\,x'(s)].$$

Desarrollando resulta que $x(s)y'(s) - x'(s)y(s) = -c$, y de este modo

$$\Delta(s) = -2[2AB\,c + BC\cos\theta + AD\,\mathrm{sen}\,\theta],$$

que denotaremos Δ, pues no depende de s, y de hecho es no nulo por las hipótesis impuestas a la posición relativa de r y Γ. En consecuencia, al resolver el sistema (3.2) se obtiene

$$u(s) = [d(s)b'(s) - d'(s)b(s)] / \Delta \quad ; \quad [d(s)b'(s) - d'(s)b(s)] / \Delta.$$

Tanto $f = \Delta\, u$ como $g = \Delta\, v$ son polinomios de grado menor que tres, luego para concluir que la envolvente Λ es una parábola es suficiente comprobar que alguno de los dos tiene grado dos y ninguno de ellos es constante. Derivando se tiene

$$f'(s) = -4b(s)\,[A \operatorname{sen}^2 \theta + B \cos^2 \theta\,]\ ;\ g'(s) = 4a(s)\,[A \operatorname{sen}^2 \theta + B \cos^2 \theta\,].$$

Puesto que r no es paralela a ninguna de las asíntotas de Γ si ésta es hipérbola, ni a su eje si es parábola, resulta que $\delta = A \operatorname{sen}^2 \theta + B \cos^2 \theta \neq 0$, luego se trata de comprobar que bien a(s), bien b(s), tienen grado uno, y además ninguna de las dos es nula. Las expresiones explícitas de estos polinomios son:

$$a(s) = (2A \operatorname{sen} \theta)\, s + 2Ac \cos \theta + C \quad ; \quad b(s) = -(2B \cos \theta)\, s + 2Bc \operatorname{sen} \theta + D.$$

Si ambos fueran constantes sería $A \operatorname{sen} \theta = B \cos \theta = 0$, por lo que $\delta = 0$, mientras que si una de ellas fuese nula, también se anularía Δ. En ambos casos llegamos a contradicción, lo que prueba el resultado. ♦

Referencias

[1] *Andanzas y aventuras de las ecuaciones cúbica y cuártica a su paso por España.* Ricardo Moreno Castillo. Colección Línea 300. Ed. Complutense. Madrid (2001).

Aplicaciones Didácticas de Matrices y Grafos en el Estudio de Relaciones

Juan A. Aledo y José C. Valverde
Departamento de Matemáticas
Escuela Politécnica Superior de Albacete
Universidad de Castilla-La Mancha
`jaledo@pol-ab.uclm.es, valverde@pol-ab.uclm.es`

Abstract

In this paper our purposes are to examine how to study the properties of (ordinary and fuzzy) binary relations by means of the associated matrix or graph, and to point out that it is the primary students' choice of strategy.

Introducción

Sean A y B dos conjuntos. Una *relación binaria* $\mathcal{R}$ entre ambos conjuntos es un criterio que determina cuándo un elemento $a \in A$ está asociado con otro $b \in B$. En tal caso se escribe $a\mathcal{R}b$. Es frecuente que el conjunto B coincida con A, en cuyo caso se habla de *relación binaria en el conjunto* A.

Desde el punto de vista teórico, las relaciones se formalizan como subconjuntos del producto cartesiano $A \times B$, de manera que un par (a, b) pertenecerá a dicho subconjunto sólo en caso de que $a\mathcal{R}b$. No obstante, cuando los conjuntos A y B son finitos, una alternativa más práctica y visual es darlas mediante una matriz de ceros y unos, de forma que si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, el elemento situado en la posición (i, j) de la matriz es 1 si $a_i\mathcal{R}b_j$ y 0 en caso contrario.

Esta matriz puede interpretarse a su vez como la *matriz de adyacencia* de un grafo dirigido y por ende la relación puede considerarse representada por este grafo. Cuando la relación $\mathcal{R}$ verifica la propiedad simétrica, ésta suele representarse también mediante un grafo no dirigido o bien mediante un grafo dirigido en el que dos arcos simétricos se expresan mediante uno solo pero con dos puntas, como se ve en el ejemplo siguiente.

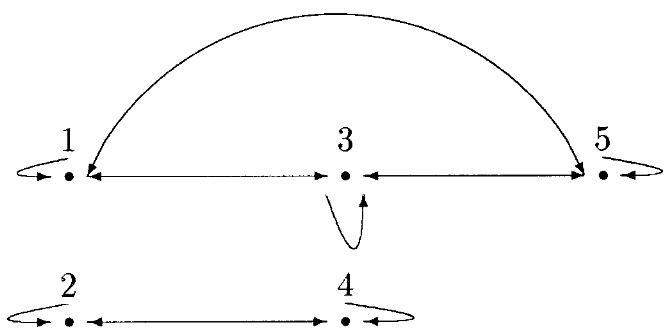
Ejemplo **1** Consideremos el subconjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sobre el que definimos la relación *tener el mismo resto al dividir por 2*, o lo que es lo mismo

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \text{ es un múltiplo entero de 2.}$$

En este caso la matriz que representa a la relación es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que puede interpretarse como la matriz de adyacencia del grafo dirigido



Uno de nuestros propósitos es mostrar cómo pueden estudiarse las propiedades de una relación binaria en un conjunto a partir de las de su matriz y su grafo asociados. Ello da pie a que el alumno de primer curso de ingeniería, que conoce las teorías de matrices y grafos, pueda proceder de manera puramente algebraica y evitar la deducción (lógica) de dichas propiedades que a estos niveles suele resultarle complicada. Además, con ello se deja un puerta abierta al empleo del ordenador: la máquina puede ser fácilmente programada para que, de una relación cualquiera dada por su matriz, nos diga sus propiedades y si ésta es de equivalencia o de orden.

Una generalización de este estudio conduce directamente al análisis de las *relaciones borrosas*, concepto de suma importancia en la Teoría de Lógica Borrosa o Difusa (*Fuzzy logic*), la cual se ha convertido en una disciplina de enorme auge en estos últimos años por constituir una de las bases fundamentales de la *Inteligencia Artificial.* Dados A y B dos conjuntos, una *relación borrosa (binaria)* $\mathcal{R}$ entre ambos conjuntos es un criterio que, a diferencia del caso de una relación ordinaria, determina para cada par de elementos $a \in A$ y $b \in B$, el *grado de relación* entre ellos. Este grado de relación se expresa mediante un número real entre 0 y 1 que denotaremos por $\mu_{\mathcal{R}}(a, b)$, de modo que 1 expresa que el grado de relación es total y 0 la ausencia total de relación.

Cuando $A = B$, se pueden definir para este tipo de relaciones propiedades similares a las ya conocidas para relaciones ordinarias:

- *Reflexiva:* Diremos que $\mathcal{R}$ es reflexiva si

$$\forall a \in A, \ \mu_{\mathcal{R}}(a, a) = 1.$$

- *Simétrica:* Diremos que $\mathcal{R}$ es simétrica si

$$\forall a, a' \in A, \ \mu_{\mathcal{R}}(a, a') = \mu_{\mathcal{R}}(a', a)$$

- *Antisimétrica:* Diremos que $\mathcal{R}$ es antisimétrica si

$$\forall a, a' \in A, \ \mu_{\mathcal{R}}(a, a') > 0 \Longrightarrow \mu_{\mathcal{R}}(a', a) = 0.$$

- *Transitiva:* Diremos que $\mathcal{R}$ es transitiva si

$$\forall a, a'' \in A, \;\; \mu_{\mathcal{R}}(a, a'') \geq \max_{a' \in A}\{\min\{\mu_{\mathcal{R}}(a, a'), \mu_{\mathcal{R}}(a', a'')\}\}.$$

Como en el caso de las relaciones ordinarias, son especialmente significativas las relaciones que verifican las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, a las que se denomina *similitudes*, así como las que cumplen la reflexiva, antisimétrica y transitiva, a las que se llama *ordenes borrosos*.

Cuando el conjunto A es finito, estas relaciones pueden expresarse mediante una matriz de números reales entre 0 y 1, de forma que si $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, el elemento situado en la posición (i, j) de la matriz es el grado de relación $\mu_{\mathcal{R}}(a_i, a_j)$ entre a_i y a_j. Esta matriz puede interpretarse a su vez como la *matriz de pesos* de un grafo dirigido rotulado, y asimismo la relación puede considerarse representada por este grafo.

Ejemplo **2** Tomando

$$A = \{Albacete(A), Compostela(C), Sevilla(S), Huelva(H)\}$$

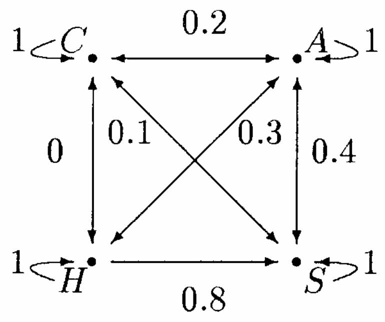
y la relación borrosa *ser ciudades cercanas* dada por

$$\{(A, A)|1, (A, C)|0.2, (A, S)|0.4, (A, H)|0.3, (C, A)|0.2, (C, C)|1, (C, S)|0.1, (C, H)|0, (S, A)|0.4, (S, C)|0.1, (S, S)|1, (S, H)|0.8, (H, A)|0.3, (H, C)|0, (H, S)|0.8, (H, H)|1\},$$

la matriz que expresa dicha relación viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 1 & 0.1 & 0 \\ 0.4 & 0.1 & 1 & 0.8 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 1 \end{pmatrix}$$

y el grafo correspondiente es



∎

El otro objetivo que nos proponemos es ver cómo los alumnos de los primeros cursos de las distintas carreras de ingenierías, en especial de informática, poco dados a las demostraciones formales, y sí muy interesados por el aspecto calculista de las Matemáticas y la programación de algoritmos, aprenden de manera rápida incentivados por la presencia de reglas que les evitan una deducción formal de las propiedades de dichas relaciones.

Todos los conceptos relativos a matrices o grafos que aparecen en este trabajo pueden encontrarse en [1], [3].

1 Estudio de relaciones ordinarias

1.1 Relaciones ordinarias y matrices

Para una relación binaria $\mathcal{R}$ en un conjunto finito $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, es claro que la propiedad reflexiva equivale a que los elementos de la diagonal principal de su matriz asociada sean todos 1, y la propiedad simétrica a que la matriz sea simétrica. Por su parte, las propiedades antisimétrica y transitiva de la relación también equivalen, cada una de ellas, a una condición sobre la matriz asociada como se expone a continuación.

Si (a_{ij}) es la matriz de ceros y unos asociada a dicha relación, $\mathcal{R}$ verificará la propiedad antisimétrica si y sólo si para cada $i \neq j$, $a_{ij} \neq 0$ implica $a_{ji} = 0$. La comprobación de este hecho es inmediata sin más que tener en cuenta que

$a_{ij} \neq 0$ equivale a que $a_i \mathcal{R} a_j$. En otras palabras, la propiedad antisimétrica de la relación equivale a que cada par de elementos simétricos con respecto a la diagonal principal no sean simultáneamente iguales a 1.

Por otra parte, $\mathcal{R}$ verifica la propiedad transitiva si y sólo si $a_{ij}^{[2]} \neq 0$ implica $a_{ij} \neq 0$, donde $a_{ij}^{[2]}$ denota el elemento de la matriz $(a_{ij})^2$ situado en la posición (i, j).

En efecto, si suponemos que la relación es transitiva y se tiene que $a_{ij}^{[2]} \neq 0$, puesto que dicho elemento viene dado por

$$a_{ij}^{[2]} = a_{i1}a_{1j} + \cdots + a_{ik}a_{kj} + \cdots + a_{im}a_{mj}$$

necesariamente alguno de los sumandos, $a_{ik}a_{kj}$, (los cuales pueden ser sólo 0 ó 1) ha de ser igual a 1, de donde se sigue que ambos factores deben ser simultáneamente 1. Ahora bien, $a_{ik} = 1$ equivale a que $a_i \mathcal{R} a_k$ y $a_{kj} = 1$ a que $a_k \mathcal{R} a_j$, lo que permite concluir, en virtud de la transitividad de $\mathcal{R}$, que $a_i \mathcal{R} a_j$ y por consiguiente que $a_{ij} \neq 0$.

Recíprocamente, en el supuesto de que $a_{ij}^{[2]} \neq 0$ implique $a_{ij} \neq 0$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, m$, si $a_i, a_k, a_j \in A$ son tres elementos tales que $a_i \mathcal{R} a_k$ y $a_k \mathcal{R} a_j$, entonces el elemento

$$a_{ij}^{[2]} = a_{i1}a_{1j} + \cdots + a_{ik}a_{kj} + \cdots + a_{im}a_{mj}$$

de la matriz $(a_{ij})^2$ es distinto de 0, pues $a_{ik}a_{kj} = 1$. En consecuencia $a_{ij} \neq 0$, lo que equivale a que $a_i \mathcal{R} a_j$ como era nuestro propósito mostrar.

Dicho de otra manera, la propiedad transitiva de la relación es equivalente a que la matriz de la relación tenga al menos los mismos elementos no nulos que la matriz que se obtiene al elevarla al cuadrado.

1.2 Relaciones ordinarias y grafos

Para una relación binaria $\mathcal{R}$ en un conjunto finito $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, la propiedad reflexiva equivale a que cada vértice del grafo dirigido asociado tenga un lazo, esto es, un arco que comience y acabe en dicho vértice; la propiedad simétrica a que el grafo sea *simétrico*, es decir, si existe un arco de a_i a a_j, existe otro de a_j a a_i; la antisimétrica a que el grafo sea *antisimétrico*, lo que significa que si existe un arco de a_i a a_j, no existe otro de a_j a a_i (véase [1], [3]); y la transitiva a que si existe un camino de longitud 2 entre dos nodos, entonces exista entre ambos un camino de longitud 1 (o lo que es lo mismo un arco) con la misma dirección que el primero.

La relación del Ejemplo 1 verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, como puede deducirse de su matriz o de su grafo.

2 Estudio de relaciones borrosas o difusas

2.1 Relaciones borrosas y matrices

Para el caso de una relación borrosa $\mathcal{R}$ en un conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ finito, se vuelve a tener que la propiedad reflexiva equivale a que los elementos de la diagonal principal de su matriz asociada sean todos unos, y la propiedad simétrica a que la matriz sea simétrica.

Por su parte, y como ya ocurriera en el caso de relaciones binarias, si (a_{ij}) es la matriz asociada a dicha relación, $\mathcal{R}$ verificará la propiedad antisimétrica si y sólo si para cada $i \neq j$, $a_{ij} \neq 0$ implica $a_{ji} = 0$.

Finalmente, $\mathcal{R}$ verificará la propiedad transitiva si y sólo si $a_{ij} \geq a_{ij}^{[2]}$ para $i, j = 1, 2, \ldots, m$, donde $a_{ij}^{[2]}$ denota el elemento situado en la posición (i, j) de la matriz $(a_{ij})^2$ obtenida mediante el denominado *producto matricial máximo-mínimo*. Éste consiste en operar los elementos de las matrices como en el producto ordinario, sólo que sustituyendo la operación suma por la operación máximo y la operación producto por la operación mínimo.

Ejemplo **3** Sea (a_{ij}) la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot_{\min}^{\max} \begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

da como resultado la matriz inicial. ■

La comprobación de esta propiedad es inmediata, pues

$$a_{ij}^{[2]} = \max_{k=1,2,\ldots,m}\{\min\{a_{ik}, a_{kj}\}\} = \max_{a_k \in A}\{\min\{\mu_{\mathcal{R}}(a_i, a_k), \mu_{\mathcal{R}}(a_k, a_j)\}\}.$$

Para finalizar, analizaremos un ejemplo de similitud y otro de orden borroso haciendo uso de las matrices asociadas correspondientes.

Ejemplo 4 **(Similitud)** Consideremos el conjunto de colores correspondiente a los libros de una biblioteca

$$\{Azul(A), Verde(V), Fucsia(F), Naranja(N), Rojo(R)\}$$

y la relación borrosa *tener un color similar* dada según los siguientes grados de relación

$$\{(A,A)|1, (A,V)|0.8, (A,F)|0.2, (A,N)|0.2, (A,R)|0.2, (V,A)|0.8, (V,V)|1, (V,F)|0.2, (V,N)|0.2, (V,R)|0.2, (F,A)|0.2, (F,V)|0.2, (F,F)|1, (F,N)|0.6, (F,R)|0.6, (N,A)|0.2, (N,V)|0.2, (N,F)|0.6, (N,N)|1, (N,R)|1, (R,A)|0.2, (R,V)|0.2, (R,F)|0.6, (R,N)|1, (R,R)|1\}$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.8 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.8 & 1 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

El cuadrado de dicha matriz haciendo el producto matricial max-min vuelve a ser ella misma. Como la matriz asociada a la relación tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1, es simétrica y $a_{ij} \geq a_{ij}^{[2]}$, la relación borrosa que representa es una similitud. ■

Ejemplo **5 (Orden borroso)** Pensemos ahora en el conjunto de ciudades españolas $\{Toledo(T), Sevilla(S), Vigo(V), Bilbao(B)\}$ en el que se define la relación borrosa *ser tan o más bonita que* expresada por

$$\{(T,T)|1, (T,S)|0, (T,V)|0.8, (T,B)|0.8, (S,T)|0.2, (S,S)|1, (S,V)|1, (S,B)|1$$
$$(V,T)|0, (V,S)|0, (V,V)|1, (V,B)|0, (B,T)|0, (B,S)|0, (B,V)|0.1, (B,B)|1\},$$

cuya matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.8 & 0.8 \\ 0.2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

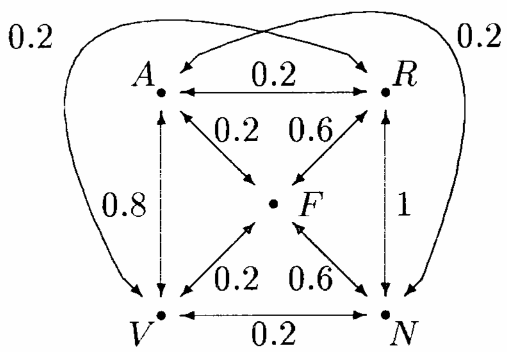
Es sencillo comprobar que el cuadrado de dicha matriz, obtenido mediante el producto max-min, coincide con ella misma. Obsérvese que la matriz asociada a la relación tiene todos los elementos de la diagonal principal iguales a 1; fuera de la diagonal principal, cada dos elementos simétricos no son simultáneamente distintos de 0; y $a_{ij} = a_{ij}^{[2]}$ para $i, j = 1, 2, \ldots, m$. De todo ello podemos concluir que la relación a la que representa es un orden borroso. ■

2.2 Relaciones borrosas y grafos rotulados

Para una relación borrosa $\mathcal{R}$ en un conjunto finito $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$, la propiedad reflexiva equivale a que cada vértice del grafo dirigido (rotulado) asociado venga acompañado de un lazo de *peso* 1; la propiedad simétrica a que el grafo sea *simétrico* y además a que todo par de arcos que incidan sobre el mismo par de nodos tengan el mismo peso; la antisimétrica a que el grafo sea *antisimétrico*, entendiéndose que un arco con peso 0 no aparece en dicho grafo; y la transitiva a que si existe un camino de longitud 2 entre dos nodos, entonces existe entre ambos un arco con la misma dirección, cuyo peso es mayor que el menor de los pesos de los arcos que forman el camino de longitud 2.

Como en el caso de matrices, terminaremos analizando los mismos ejemplos de relaciones borrosas haciendo uso en este caso de los grafos asociados.

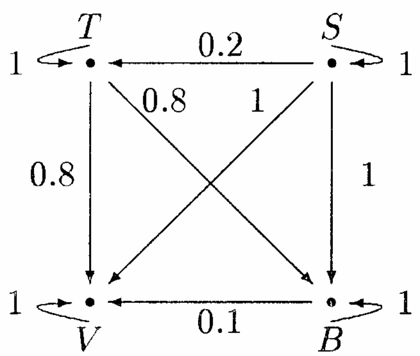
Ejemplo **6 (Similitud)** Consideremos de nuevo el conjunto de colores de ciertos libros $\{Azul(A), Verde(V), Fucsia(F), Naranja(N), Rojo(R)\}$ y la relación borrosa *tener un color similar* dada en el ejemplo 4. El grafo asociado a dicha relación es



Se trata de un grafo dirigido rotulado (en el que se han omitido los lazos, todos ellos con peso 1 para ganar en claridad), simétrico y verificando que todo par de arcos que inciden sobre el mismo par de nodos (representados en el grafo por un solo arco con dos puntas) tienen el mismo peso; y en el cual, para cada par de nodos unidos por un camino de longitud 2 existe un arco con la misma dirección que los une, cuyo peso es mayor que el menor de los pesos de los arcos que forman el camino de longitud 2. Todo ello significa, como hemos visto, que la relación a la que representa es una similitud. ■

Ejemplo 7 **(Orden borroso)** Tomemos nuevamente el conjunto de ciudades españolas $\{Toledo(T), Sevilla(S), Vigo(V), Bilbao(B)\}$ en el que se define la relación borrosa *ser tan o más bonita que* que viene expresada en el ejemplo 5.

El grafo asociado a la relación es



donde no se han reflejado los arcos de peso 0.

Se trata de un grafo dirigido antisimétrico, en el que todos los vértices vienen acompañados por un lazo de peso 1 y para cada par de nodos unidos por un camino de longitud 2 existe un arco con la misma dirección que los une, cuyo peso es mayor que el menor de los pesos de los arcos que forman el camino de longitud 2. Así pues, podemos concluir que la relación a la que representa es un orden borroso. ■

3 Estudio del carácter didáctico

3.1 El problema

Preocupados por la apatía que suele provocar en los alumnos de los primeros cursos de las distintas carreras de informática la comprobación deductiva de las propiedades de las relaciones binarias y a sabiendas de que cada relación se puede interpretar mediante una matriz o un grafo, decidimos en su día investigar cómo se traducían estas propiedades en relación a tales matrices y grafos. Asimismo, intentamos comprobar cuál era el efecto de este nuevo enfoque entre el alumnado, mucho más proclive al empleo de reglas algebraicas que a cualquier tipo de deducción formal.

3.2 Metodología

Una vez comprobado el resultado negativo obtenido a lo largo de varios cursos en el estudio de las propiedades de una relación binaria introducidas de manera formal, los autores decidimos enfocar la materia usando la Teoría de matrices, que los alumnos conocen desde el Bachillerato, y la Teoría de grafos, que asimilan rápidamente durante el curso por el aspecto visual de ésta.

La investigación consistió en realizar pruebas tipo test tras emplear este tipo de enfoque en una población de unos 500 alumnos y los resultados fueron sumamente positivos en relación a los años anteriores.

3.3 Resultados

Hasta la introducción de esta estrategia, más de la mitad de los alumnos erraron en sus respuestas al intentar discernir si las relaciones borrosas propuestas eran similitudes u ordenes borrosos. Por el contrario, en los años siguientes la práctica mayoría de los alumnos obtuvo el resultado y en mucho menos tiempo. Además, casi todas las respuestas erróneas fueron debidas a fallos de cálculo mientras se realizaba el producto max-min.

Por otro lado, cabe resaltar que los estudiantes, sumamente satisfechos por confirmar su aprendizaje, se interesaron más aún por esta cuestión, llegando un grupo de ellos a programar un algoritmo con el que el ordenador encontraba las propiedades que la relación verificaba.

3.4 Conclusiones

¿Por qué esa gran aversión por parte de los estudiantes de las distintas ingenierías al razonamiento formal? A nuestro juicio existen dos motivos:

- *La ausencia de hábito de pensamiento*: El trabajo en la escuela y el instituto en los últimos tiempos suele ser repetitivo. El ejercicio de razonar, fundamental para el alumno que desee continuar estudios técnico-científicos entre los que se incluyen los de cualquier tipo de ingeniería, ha sido suprimido y provoca desasosiego y apatía en el estudiante que no está acostumbrado a ello.

- *El gusto por el aspecto calculista de las Matemáticas*: Nuestra experiencia confirma que el estudiante de ingenierías no sólo se muestra hostil ante todo tipo de demostración, sino también ante cualquier sentencia formal o frente a la simbología propia de las Matemáticas. Es su gusto por el cálculo numérico y el manejo de algoritmos lo que más incentiva su interés por el aprendizaje de la materia.

¿Qué conclusiones podemos extraer de este estudio? Resulta ser enormemente productivo adaptarse a la demanda de los alumnos; acercar a ellos el placer que supone dominar las Matemáticas e intentar así fomentar el gusto por comprenderlas; y todo ello con la finalidad de que, viéndolas como algo accesible y sumamente útil, las aprehendan como la herramienta fundamental que suponen. Además, de este modo aumenta la predisposición de los alumnos para introducir ahora estas cuestiones de manera formal.

Referencias

[1] Aledo, J.A.; Penabad, J; Valverde, J.C.; Villaverde J.J. (2000): *Álgebra y Matemática Discreta.* Alpeviva, Albacete.

[2] Aranda, J.; Fernández, J.L.; Morilla, F. (1993): *Lógica Matemática.* Sanz y Torres, Madrid.

[3] Canovas, L.; Pelegrín, B. (1993): *Algoritmos en grafos y redes.* Ed. PPU, S.A., Madrid.

[4] Deaño, A. (1974): *Introducción a la lógica formal.* Alianza Universidad Textos, Madrid.

[5] Fernández, G.; Saez Vacas, F. (1987): *Fundamentos de Infórmatica,* Alianza Editorial, Madrid.

[6] Novak, V. (1989): *Fuzzy sets and their applications.* Adam Hilger.

[7] Zadeh, L.A. (1965): "Fuzzy sets". *Information and Control* **8**, 338-353.

Un Sistema Experto sobre Normas Urbanísticas*

Ana González Uriel[1] **Eugenio Roanes Lozano**
Departamento de Álgebra
Universidad Complutense de Madrid
anauriel@hotmail.com eroanes@mat.ucm.es

Abstract

This article details the development of an Expert System for managing Urban Planning parameters. Information about the building possibilities assigned to a site by the law is obtained in a quick and easy way (the regulations of the City Council of Madrid have been implemented in this case). Therefore, this Expert System frees the designer team from this tedious but imperative work. The inference engine uses Computer Algebra techniques (Gröbner Bases) and is implemented in CoCoA.

1. Nota Preliminar

Se presenta a continuación una aplicación inusual del Álgebra, mostrándose cómo las herramientas matemáticas pueden resultar útiles en las más diversas áreas. En este caso, mediante el uso de un Sistema de Cálculo Simbólico y utilizando un modelo polinomial de construcción de Sistemas Expertos, es posible automatizar un proceso de extracción de conocimiento a partir de un conjunto de hechos y reglas, cuyo número y nivel de interrelación, si son altos, pueden hacer muy incómodo su cálculo manual.

Entendemos que presentar aplicaciones reales a los estudiantes de las asignaturas matemáticas de las Escuelas Técnicas puede proporcionar a los mismos una visión utilitaria de estas asignaturas, que aumente su motivación y les ayude a valorar la importancia que tienen y el enorme potencial de la Matemática.

* Trabajo parcialmente subvencionado por el proyecto TIC2000-1368-C03-03, Ministerio de Ciencia y Tecnología.

[1] Arquitecto. Becaria predoctoral FPI del proyecto citado.

2. Introducción

Actualmente, gran parte de la labor de los encargados de proyectar edificios no singulares (y, sobre todo, viviendas) consiste en interpretar las normas legales a que han de ceñirse: Normas Urbanísticas, Normas de Protección Contra Incendios, disposiciones de Seguridad e Higiene, etc. En este artículo se presenta un paquete informático de ayuda técnica para que el arquitecto pueda dedicar su tiempo y su esfuerzo al diseño del edificio en sí, con los grados de libertad que la normativa le deje.

Se ha desarrollado un pequeño sistema experto para obtener de forma sencilla y rápida las posibilidades edificatorias de parcelas en suelo urbano (zonas 4, 5 y 8) en virtud de las condiciones legales reguladas en las Normas Urbanísticas del Plan General de Ordenación Urbana de Madrid [1].

Lo que se explica a continuación es el núcleo del sistema experto (codificación, introducción y tratamiento de los datos). Se prevé para más adelante la elaboración de una interface que facilite su empleo por usuarios no expertos en programación o urbanismo.

3. Sistematización

De los posibles enfoques (comprobación a partir de un proyecto, establecimiento a priori de algunas variables[2], etc.), se adopta el que aparece como más abierto y semejante a la realidad, en que se parte de una parcela concreta, y se identifican como datos únicamente sus características intrínsecas.

3.1 Datos

El usuario debe introducir los siguientes datos:

- superficie de la parcela, en metros cuadrados (ejemplo: `Area:=1200;`)
- código y, en su caso, grado que tiene asignado en el plano de ordenación
- ancho(s) de la(s) calle(s) a que da la parcela
- características de las parcelas limítrofes: misma tipología edificatoria diferente, existencia de lienzos medianeros o viviendas adosadas…
- relación con unidades superiores: si se trata de una manzana completa o la parcela abarca todo el frente de ella, etc.

[2] Algunos de los parámetros edificatorios están acotados por la ley no sólo en valores absolutos, sino también (alternativa o simultáneamente) con relación a ciertas características de la construcción. Por ejemplo, podemos encontrar mínimos para separación a linderos de 3m o “la mitad de la altura de la construcción (…)”. En estos casos se ha preferido dejar enunciada la condición, antes que introducir la altura máxima permitida en cada caso, evitando tomar una decisión que debe corresponder al usuario.

- si la parcela tiene acceso desde dos frentes opuestos

3.2 Objetivos

Se pretenden obtener los valores límite (máximos y mínimos) de los parámetros que definen la capacidad edificatoria de la parcela en cuestión:

- retranqueo o separación al frente (límite con la vía pública)
- separación a linderos laterales
- separación a lindero testero u opuesto al frente
- fondo edificable
- ocupación máxima posible de la parcela
- edificabilidad máxima
- altura máxima, en metros y/o en número de plantas
- vuelos permitidos
- dimensiones mínimas que habrían de tener las nuevas parcelas, en el caso de que el usuario tuviera la intención de dividir la parcela en unidades menores.

4. Representación del Conocimiento

4.1 Variables

Una vez identificado, cada dato es asociado a una variable, de modo que cada hecho potencial se corresponde:

(a) si hay dos posibilidades, con una variable proposicional o su negación. Ejemplo: hay que distinguir si el área es menor que *500* o no. Si escribimos *Area=400*, el programa asignará la variable q; en caso contrario (por ejemplo, *Area=1200*) el programa le hará corresponder $\neg q$

(b) si hay más de dos posibilidades, con una variable con un determinado subíndice. Hemos usado como subíndices los números naturales en orden correlativo, y no cifras vinculadas a los valores que representan (por ejemplo, r_1 , y no r_{10}, significa *retranqueo>10m*; r_2, y no r_7, significa *retranqueo>7m*), que, al no ser consecutivos, complicarían sobremanera la organización del sistema sin una ventaja proporcionada.

4.2 Lógica

A continuación, se trata de reordenar sistemáticamente las normas contenidas en el texto legal hasta reescribirlas en forma de sentencias lógicas (*si A entonces B*).

Desde 1984 se han desarrollado modelos algebraicos para la Lógica bivalente clásica [2,3], extendidos a Lógicas modales multivalentes [4] y a verificación y extracción de conocimiento en Sistemas Expertos [5,6]. Estos trabajos han dado lugar a aplicaciones en campos como la ingeniería del transporte [7], guías de práctica clínica [8], diagnóstico médico (anorexia, Alzheimer,...) [9], estando otras en desarrollo [10]. Estos trabajos se han desarrollado en el marco de varios proyectos de investigación financiados por el Estado español, entre ellos el que subvenciona este trabajo.

En el caso que nos ocupa se decide adoptar una lógica bivalente clásica (verdadero o falso), sin indeterminaciones, dado el carácter prescriptivo del texto de partida. Esta decisión influye también, obviamente, en la codificación de las variables.

4.2.1 Ejemplo: Sea `r` el retranqueo mínimo obligatorio. Representaremos con:

`r[1]` ⇨ *retranqueo>10m*
`r[2]` ⇨ *retranqueo>7m*
`r[3]` ⇨ *retranqueo>5m*
`r[4]` ⇨ *retranqueo>4m*
...

Para un conjunto de hechos potenciales (pongamos `c[82], ¬v, ¬q, ¬b`) obtendremos una única `r[i]` posible (por ejemplo `r[2]`, o sea, *retranqueo>7m*), porque el valor mínimo de *r* es sólo uno. Así, interesará que nuestro conjunto de hechos no implique `r[1]`, ni `r[3]`, ni `r[4]`, porque aunque un retranqueo mayor que *7* será por supuesto mayor que *4* y mayor que *5*, éstos no son la máxima cota inferior, que es el conocimiento que buscamos.

4.2.2 Nota: Otra alternativa habría sido tener en cuenta las relaciones lógicas entre los valores dados en los consecuentes (*10>7>5>4*) y entender las respuestas como indicativas de lo que "es legal hacer", haciendo que el sistema emitiera como válidos todos los *r* mayores que el mínimo obligatorio. Ello quizá sería lo más adecuado para "probar" si un *r* prefijado es admisible, pero hemos adoptado el criterio primero porque, para nuestro planteamiento, estimamos que es más eficaz obtener una sola respuesta (saber la cota inferior de *r*)

4.3 Reglas

Identificados (a partir de las características significativas de una parcela) los posibles conjuntos de hechos potenciales y las posibles consecuencias, se ponen en relación del modo más directo posible.

4.3.1 Ejemplo: En el Capítulo 8.8 –Condiciones (...) vivienda unifamiliar-, Artículo 9 de las Normas, se establece el coeficiente de edificabilidad neta para cada grado y nivel, tomando en cuenta además otras condiciones. Así, en el apartado c, se fija para parcelas calificadas con grado 3º "siete (7) metros cuadrados por cada diez (10) metros cuadrados"; y más abajo, en el apartado f, donde se refiere a las de grado 6º: "Para parcelas de superficie menor o igual a quinientos (500) metros, siete metros (7) por cada diez (10) metros cuadrados. Para parcelas de superficie mayor (...)"

En nuestro sistema, uno de los datos de entrada de que disponemos es la superficie (`Area`) de la parcela. Creamos una variable interna `q` a la que asignamos el significado "parcela menor de $500m^2$" y establecemos un preproceso en que determinamos asumir como hecho potencial `q` ó `¬q` , según la superficie dato que el usuario introduzca en cada caso.

A su vez, hemos codificado los grados y niveles de cada norma zonal con la letra *c* seguida del correspondiente subíndice, y los posibles coeficientes de edificabilidad, de modo que las disposiciones del párrafo anterior podemos escribirlas con la letra *e* y un subíndice:

$$c[83] \rightarrow e[3]$$
$$c[86] \wedge q \rightarrow e[3]$$

donde $c[83]$ indica que tenemos una parcela perteneciente a la zona 8 (vivienda unifamiliar) y con grado 3º, q supone que la parcela es menor de $500m^2$, y $e[3]$ significa que está permitido construir hasta $7m^2$ por cada $10m^2$ de parcela.

Una vez obtenidas las reglas lógicas se ha optado, como es usual, por agruparlas para reducir el número de ellas y organizar mejor el conocimiento:

1) sustituyendo pares de reglas $a \rightarrow b$ y $c \rightarrow b$ por $a \vee c \rightarrow b$. En el ejemplo anterior: $c[83] \vee (c[86] \wedge q) \rightarrow e[3]$
2) reuniendo pares de reglas $a \rightarrow b$ y $a \rightarrow c$ en $a \rightarrow b \wedge c$.

También en aras de optimizar el rendimiento, y dado el alto número de variables, se han establecido subsistemas con los conjuntos de reglas que atañen sólo a determinadas familias de hechos potenciales, de modo que en una fase inicial se discrimine cada caso (según sea vivienda unifamiliar, edificación en bloques o en manzana cerrada), y sea remitido a uno u otro sistema.

5. Verificación y Extracción de Conocimiento

Cada uno de estos subsistemas utiliza los mismos algoritmos de verificación y de extracción de conocimiento, particularizados para las reglas de ese subsistema y los posibles conjuntos de hechos potenciales a los que atañe.

El método es puramente algebraico y puede verse en detalle en [6,7]. Consiste en realizar:

i) una traducción polinomial de los conectivos lógicos, lo que permite obtener una traducción polinomial de los hechos y reglas (si la Lógica es bivalente y hay n variables proposicionales, estos polinomios pertenecen al anillo $R=(Z/2Z)[x_1,...,x_n]/I$, donde I es el ideal generado por los polinomios $x_i^2-x_i$)
ii) se demuestra que q_0 es consecuencia tautológica de $q_1,...,q_m$ si y sólo si la traducción polinomial de $\neg q_0$ pertenece al ideal de R generado por las traducciones polinomiales de $\neg q_1,..., \neg q_m$ (lo cual se puede comprobar inmediatamente usando bases de Gröbner)
iii) como consecuencia del punto anterior tenemos un modelo algebraico para la extracción de conocimiento en Sistemas Expertos
iv) también como consecuencia del punto 2, se puede verificar un conjunto de hechos y reglas de un Sistema Experto: basta ver si el ideal generado por sus negaciones degenera en todo el anillo.

Por el elevado número de variables en los consecuentes, la extracción de conocimiento se ha preparado haciendo un barrido sistemático de las posibles respuestas, de modo que la cuestión no sea si un determinado conjunto de hechos potenciales implica, por ejemplo, *r[1]*, sino más bien cuál de los *r[i]* es el pertinente para ese conjunto de partida.

6. Uso

Notemos que este será más inmediato y fácil una vez desarrollada una interface de usuario, como en los Sistemas Expertos más elaborados que hemos desarrollado, como [9].

6.1 Introducción de Datos

El punto de partida es una parcela concreta cuyas características inscribiremos en el archivo `DATOS.COC` de la manera indicada en el mismo. Sirve cualquier editor de texto, pero hay que poner especial cuidado en conservar la extensión `*.COC` al guardarlo.

Veamos algunos ejemplos:

- La superficie de parcela, en m^2: `Area:=1200;`
- El código (norma zonal), asignado a la parcela en el plano de ordenación, lo denotaremos con la letra c seguida de un subíndice entre corchetes:

  zona 4 ……………. `c[4]`
  zona 5, grado 1 ….. `c[51]`
  zona 5, grado 2 ….. `c[52]`

zona 5, grado 3 ….. `c[53]`
zona 8, grado 1 ….. `c[81]`
zona 8, grado 2 ….. `c[82]`
zona 8, grado 3 ….. `c[83]`
zona 8, grado 4 ….. `c[84]`
zona 8, grado 5 ….. `c[85]`
zona 8, grado 6 ….. `c[86]`

- Ancho de la calle a la que da la parcela, en metros:
  Por ejemplo, `Calle:=10;`

6.2 Elección de Subsistema y Ejecución

Cada parcela lleva asignado un tipo edificatorio, explícito en el código zonal con que aparece en el plano de ordenación. En función del tipo que tengamos, utilizaremos uno u otro subsistema:
– si tenemos `c[4]`, usaremos M (manzana).
– si tenemos `c[51]`,`c[52]` o `c[53]`, iremos a B (bloque)
– si tenemos `c[81]` a `c[86]`, será U (vivienda unifamiliar).

Una vez elegido el subsistema, ejecutaremos el Sistema de Cálculo Simbólico CoCoA v3.0b[3] cargando el archivo correspondiente desde MS-DOS y redireccionaremos la salida a archivo para ver cómodamente las respuestas. Por ejemplo, si queremos cargar en el arranque el archivo `M.COC` y direccionar la respuesta a `M.TXT` teclearemos (en MS-DOS):

```
> cocoa <<M.COC >M.TXT
```

6.3 Obtención de Respuestas

Bastará abrir, con cualquier editor de texto, el archivo de salida (`M.TXT`) que acabamos de crear. Si todo va bien, empezará comunicando que nuestros datos de partida son compatibles entre sí y con las reglas del sistema.

A continuación, nos dará información acerca de la edificabilidad, separación a linderos, etc., correspondientes a nuestra parcela, usando una serie de variables cuya decodificación será conocida. Por ejemplo, si las *r* corresponden a retranqueo obligatorio (distancia entre la línea de fachada y la alineación oficial), `r[1]` corresponde a "*retranqueo>10m*".

---

[3] CoCoA, a system for doing Computations in Commutative Algebra. Authors: A. Capani, G. Niesi, L. Robbiano. Available via anonymous ftp from: `cocoa.dima.unige.it`

7. Desarrollo de un ejemplo

Dada una parcela de $1200m^2$, con tipología de vivienda unifamiliar, grado 1, … el archivo `DATOS.COC` tendría el aspecto que sigue (los `--` se usan en CoCoA para indicar que es una línea de comentarios, no ejecutiva):

```
-- TOMA DE DATOS (9 items)

-- superficie de la parcela, en metros cuadrados:
Area:=1200;

-- código (norma zonal+grado) asignado a la parcela en
-- el plano de ordenación:
Cod:=c[81];

-- ancho de la calle correspondiente, en metros:
Calle:=10;

-- distancia (metros) del frente al lado opuesto de la
-- parcela
Fondo:=17;

-- ¿Son viviendas adosadas o en hilera? (0/1):
Hilera:=0;

-- ¿Es proyecto simultáneo o de posible acuerdo con el
-- vecino o hay ya un lienzo medianero? (0/1):
Vecino:=1;
-- ¿Tipología igual a la nuestra en la parcela
-- colindante? (0/1)
Misma:=1;

-- Nuestra actuación es: en la manzana completa (10),
-- en frente completo de manzana (5) o ninguna de las
-- anteriores (0):
Act:=0;
```

A continuación, desde MS-DOS, arrancaremos CoCoA cargando el archivo `U.COC` (que carga automáticamente los archivos necesarios: `URE.COC`, `PRE-PRO.COC`, `HPOT.COC`... además del de datos) y redireccionaremos la salida, p.e.j. a `EJEMPLO.TXT`:

```
> cocoa <<U.COC >EJEMPLO.TXT
```

Por último, una vez terminado el proceso, editaríamos él archivo `EJEMPLO.TXT` para leer el resultado. El contenido de este archivo puede ser algo como:

```
              )))
          ___(((_ _
         |       | )
         | CoCoA |/       (cocoa30b, 17/07/95, 19:28)
          \_____/


<<   'init.coc';
<<   'coclib.coc';
<<   'hp.coc';
<<   'userinit.coc';

Current ring is R = Q[t,x,y,z]
-------------------------------
<< 'URE.coc';
<< 'DATOS.coc';
<< 'PREPRO.coc';
<< 'HPOT.coc';

HECHOS POTENCIALES: Área 1200, c[81], Calle 10,
                    Fondo 17,
                    Hilera 0 ,Vecino 1, Misma 1, Act 0
-------------------------------
<< 'VE.coc';
VERIFICACIÓN (no debe salir [1]):
```

(aparece un largo polinomio, diferente de 1)

```
Fin de verificación
-------------------------------
<< 'ur.coc';
-------------------------------
RETRANQUEO MÍNIMO OBLIGADO,de entre r[1] a r[8]:
-------------------------------
```

```
      (Corresponde el de la línea en que aparece 0)
-------------------------------
0
-------------------------------
r[2] + 1
-------------------------------
r[3] + 1
-------------------------------
r[4] + 1
-------------------------------
r[5] + 1
-------------------------------
r[6] + 1
-------------------------------
r[7] + 1
-------------------------------
r[8] + 1
-------------------------------
...
...
```

Observemos que, en la ejecución mostrada, sólo se ha respondido a una pregunta (`ur`, esto es, “retranqueo”). El proceso sigue con las siguientes cuestiones por determinar.

8. Conclusiones

Hemos presentado aquí otra aplicación del motor de inferencia algebraico desarrollado por este grupo de trabajo. Como es usual, ha sido necesario realizar una interesante sistematización previa del conocimiento.

Una vez introducidos los datos, el tiempo de respuesta del sistema (lectura, ejecución y creación del archivo de resultados) depende del equipo utilizado. En un ordenador personal con procesador tipo Pentium III a 1100 MHz oscila en torno a los 9-10 minutos (para responder alrededor de una docena de preguntas).

Para un arquitecto puede suponer una útil ayuda técnica, por cuanto hace automática la obtención de una serie de datos que es imprescindible conocer para acometer la labor de diseño de determinados edificios en parcelas urbanas, tarea que, de otro modo, requeriría un poco creativo pero ineludible esfuerzo y dedicación temporal.

Bibliografía

[1] Plan General de Ordenación Urbana de Madrid 1997. Normas Urbanísticas. Ayuntamiento de Madrid. Segunda Tenencia de Alcaldía. Rama de Urbanismo, Vivienda y Medio Ambiente.

[2] HSIANG, J. (1985). Refutation Theorem Proving using Term-rewriting Systems, *Artificial Intelligence* **25**, 255-300.

[3] KAPUR, D; NARENDRAN, P. (1984). An Equational Approach to Theorem Proving in First-Order Predicate Calculus, 84CRD296, *General Electric Corporate Research Report*, Schenectady, NY, Marzo 1984, rev. Diciembre, y también en (1985) *Proceedings of IJCAI-85* 1146-1156.

[4] CHAZARAIN, J.; RISCOS, A.; ALONSO, J.A.; BRIALES, E. (1991). Multivalued Logic and Gröbner Bases with Applications to Modal Logic. *Journal of Symbolic Computation* **11**, 181-194.

[5] ROANES LOZANO, E.; LAITA, L.M.; ROANES MACÍAS, E. (1988). A Polynomial Model for Multivalued Logics with a Touch of Algebraic Geometry and Computer Algebra, Special Issue on Non Standard Applications of CA, *Mathematics and Computers in Simulation* **45-1**, 83-99.

[6] LAITA, L.M.; ROANES LOZANO, E.; DE LEDESMA, L. ; ALONSO, J. A. (1999). A Computer Algebra Approach to Verification and Deduction in Many-Valued Knowledge Systems, *Soft Computing* **3-1**, 7-19.

[7] ROANES-LOZANO, E.; Roanes-Macías, E; Laita, L.M. (2001). Railway Interlocking Systems and Gröbner Bases. *Mathematics and Computers in Simulation* **51/5**, 473-482.

[8] LAITA, L.M; ROANES-LOZANO, E.; MAOJO, V.; DE LEDESMA, L.; LAITA, L. (2001). An Expert System for Managing Medical Appropriateness Criteria based on Computer Algebra Techniques. *Computers and Mathematics with Applications* **42/12**, 1505-1522.

[9] PÉREZ-CARRETERO, C.; LAITA, L.M.; ROANES-LOZANO, E.; LÁZARO, L.; GONZÁLEZ-CAJAL, J.; LAITA, L. (2002). A Logic and Computer Algebra Based Expert System for Diagnosis of Anorexia. *Mathematics and Computers in Simulation*, 58/3, 183-202.

[10] ROANES LOZANO, E. et al. (2000). “A Gröbner bases-based shell for rule-based expert systems development”, *Expert Systems with Applications* 18, 221-230.

Un modelo historiográfico para las Ciencias. La evolución de la Matemática hasta su establecimiento como disciplina científica

Francisco A. González Redondo
Dpto. Álgebra. Facultad de Educación
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@edu.ucm.es

Abstract

In this paper a historiographical model for the analysis of the historical evolution of the different disciplines until they reach a real scientific nature, taking Mathematics as starting point is presented. Two cathegories, "Prehistory" and "Protohistory" are introduced and applied for the first time for the organization of the History of Science.

1. Introducción

Uno de los principales problemas con que debe enfrentarse todo aquel que se ocupa de enseñar la Historia de las Ciencias -en general, o de alguna de ellas en particular- es el del "punto de partida"; y esto en dos vertientes, la estrictamente temporal (en qué momento comenzar el tratamiento histórico), y la propiamente conceptual (la naturaleza del objeto estudiado). El ejemplo que se presenta a continuación ilustra esta problemática.

En la tablilla BM 85194, una de las conservadas en el British Museum de Londres, escrita con el simbolismo cuneiforme propio de la época babilónica de la que procede -*c*. 1800 a.C.-, y con el uso del sistema de numeración posicional sexagesimal desarrollado por los sabios del momento, se recogen, en tres apretadas columnas, un conjunto de 17 problemas de contenido aritmético y/o geométrico que ilustra el quehacer en la instrucción matemática usual en las escuelas de escribas de Mesopotamia [1], donde este tipo de materiales jugaban el papel de "libros de texto".

De entre todos ellos hay uno especialmente significativo. En lenguaje matemático más actual[1], el problema es el siguiente [5]. Una ciudad, rodeada por un muro circular, se ha expansionado en todas las direcciones de tal modo que resulta necesario construir un nuevo muro, también circular, que rodee las nuevas edificaciones. Los datos que se proporcionan son la distancia entre los dos muros (5, sin precisar unidades de longitud) y el área de la zona comprendida entre ambos (análogamente, sin referencia a unidades de superficie, 6,15), y se pide hallar el diámetro de las ciudades nueva y antigua.

Este sencillo ejercicio planteado a los aprendices de escribas (en el que se utilizará para nuestro π actual el valor 3), aparentemente, respondería a necesidades prácticas propias de las sociedades agrícolas desarrolladas entre el Tigris y el Éufrates, en concreto, a la planificación urbanística. La realidad, sin embargo, es muy diferente: en Mesopotamia todas las ciudades tenían planta rectangular (realmente cuadradas en su mayor parte). El problema, como tantos otros que pueden encontrarse en las numerosas tablillas que se conservan, no tenía ninguna aplicación en la vida real. Sin duda, se plantea por el interés intrínseco que tiene su contenido matemático; en consecuencia, la única utilidad que busca el maestro babilónico que lo inscribió sería de índole pedagógica: contribuiría a la formación matemática de los alumnos de su escuela.

Son los ejemplos de este tipo -muchos, por el elevado número de tablillas halladas-, junto con otros escritos en algunos papiros egipcios de la misma época -muy pocos, por el casi testimonial número de papiros conservados- [6], los que generan el entusiasmo por los sorprendentes hallazgos de las antiguas civilizaciones e invitan a su estudio detenido, lo que ocasiona a todo profesor dedicado a explicar el conjunto de la Historia de la Matemática un retraso que prácticamente no le permitirá pasar del siglo XVII al finalizar el curso[2]. Y es que estos hallazgos ocultan lo que desde hoy es una realidad: solamente contienen cálculos numéricos concretos (o referidos a unas medidas particulares presentes en figuras, objetos, terrenos, etc. concretos, de formas geométricas determinadas) y todavía falta mucho tiempo hasta que los intereses conceptuales propios de los métodos subyacentes den lugar a enunciados teóricos generales. En suma -y como veremos y justifi-

---

[1] Trabajos clásicos con transcripciones de numerosos escritos matemáticos mesopotámicos, algunos de los cuales se seleccionan en el libro fácilmente accesible de Fauvel y Gray [2], son los de Thureau-Dangin [3] y Neugebauer y Sachs [4].

[2] Análogamente, en Historia de la Física no pasarán del siglo XIX, en Historia de la Biología o Geología no llegarán al XX, etc.

caremos más adelante- pertenecen a unos momentos en la evolución de lo matemático que distan de ser científicos.

2. Perspectivas históricas sobre la naturaleza de la Matemática

En todo caso, en el ejemplo babilónico precedente se presentan dos aspectos de la Matemática que han venido teniendo una importancia capital al organizar su transmisión desde entonces hasta nuestros días: “lo matemático” que se enseña por necesidad contrapuesto a “lo matemático” como culminación del puro placer intelectual que sólo manifestará su proyección utilitaria como consecuencia. Estas perspectivas posibles conducen a la pregunta acerca de qué tipo de contenidos deben constituir la formación -general- de unos ciudadanos que distarán mucho de ser matemáticos profesionales y que van a ser -todo lo más- simples usuarios en su vida cotidiana de las herramientas que les proporciona esta Ciencia.

En paralelo e íntimamente relacionado con lo anterior, también existen dos puntos de vista sobre el origen histórico de la Matemática -en general, o, más en particular, de la Geometría-, los apuntados por Herodoto y Aristóteles, que no por haber sido citados tantas veces hasta el punto de haberse convertido en tópicos desaconsejan que los traigamos a estas páginas, pues ilustran sendas visiones acerca de la propia naturaleza histórica de la disciplina. Veámoslos con cierto detalle [2].

En su *Historia* (II, 109, escrita a mediados del siglo V a.C.)[3] sitúa Herodoto su opinión acerca del origen de la Geometría al describir el sistema de reparto de las tierras adoptado por el faraón entre todos los egipcios sobre el que basar el cobro de los correspondientes impuestos. La necesidad de que las lindes originales de los terrenos asignados fueran recompuestas tras las crecidas anuales del Nilo, exigía disponer de un cuerpo de funcionarios, conocidos como “los tensadores de la cuerda” -la “cuerda” era el útil para estimar longitudes- , que midieran los campos en proporción a los cuales se cobrarían los tributos. De acuerdo con esta perspectiva, los agrimensores -literalmente, medidores de campos de cultivo- y, por tanto, las necesidades prácticas, constituirían la fuente original donde los griegos habrían aprendido el arte de la Geometría.

Frente a Herodoto se sitúa el punto de vista que Aristóteles expone en su *Metafísica* (981^{b}20-25, mediados del siglo IV a.C.)[4]. Aquí, en su estudio acerca de

[3] Puede consultarse la versión publicada por Gredos en su colección de Clásicos.

[4] Como apuntábamos en nota anterior, puede consultarse la edición publicada por Gredos de esta obra de Aristóteles.

las diferencias entre las artes prácticas y las ciencias, explica que las segundas, que no están dirigidas a resolver las necesidades de la vida cotidiana, no se descubrieron hasta que las primeras no estuvieron firmemente establecidas. Éste, sabio multidisciplinar -como aquél, historiador-, sitúa el origen de las artes matemáticas en Egipto, pero en este caso atribuye ese origen a la "casta sacerdotal", custodios celosos de los templos e interlocutores de las divinidades y, por tanto, los únicos que podían permitirse disfrutar del suficiente tiempo libre como para dedicarse a estas tareas ociosas que constituían los saberes geométricos[5].

Por supuesto, entre los matemáticos de la Grecia clásica, pertenecientes al pequeño porcentaje de habitantes del mundo helénico con naturaleza de ciudadanos[6] (el resto -la mayoría de la población-, extranjeros, esclavos, metecos, etc., no tenían esa consideración) es el último punto de vista el que prevalecerá. Ilustrativo de ello es el tratamiento de otro campo distinto del de la Geometría, el de lo numérico, en el que los griegos distinguen claramente dos ámbitos. En primer lugar, la *Logística*, identificable actualmente con la Aritmética elemental, era propia de los mercaderes, de aquellos que tenían necesidad de utilizar los números y las operaciones realizables con ellos en la vida cotidiana. Lógicamente, para un pueblo de comerciantes como el griego resultaba imprescindible la instrucción del numeroso personal en las escuelas de contables. Frente a la "necesaria" *Logística*, ocupación de matemáticos verdaderos sería la "inútil" *Aritmética*, identificable hoy con la Teoría de números. Obviamente, los ciudadanos filósofos evitarían ocuparse de ninguna de las tareas -aquéllas- impropias de su clase, a la que sí corresponderían estas últimas, que serían las que se enseñasen en Academias y Liceos.

3. La naturaleza científica de la Matemática

A los efectos que interesan a estas páginas y, por tanto, prescindiendo de otras consideraciones, una Ciencia -en particular, la Matemática- es un conjunto de teorías científicas. Del mismo modo [7], una teoría científica es un sistema hipotético-deductivo, es decir, un conjunto de enunciados concatenados por las leyes de la Lógica -los teoremas-, que parten de unos primitivos que se admiten sin demos-

[5] Otros autores clásicos que se han referido a estas mismas cuestiones son Platón en *Fedro* (274 cd, comienzos del siglo IV a.C.) y Proclo en *Sobre Euclides* (I, siglo V d.C.)

[6] Como es natural, el referente de estas cuestiones es Atenas, donde durante los siglos V y IV a.C. existirían una media de 5.000 ciudadanos de una población de unos 80.000 habitantes.

tración -los axiomas-, y que se refieren a un conjunto de conceptos primarios indefinidos, cuya existencia se postula y admite, o a los definidos a partir de ellos.

Cabe preguntarse, por tanto, en qué momento los desarrollos matemáticos adquirieron naturaleza científica y, por tanto, cuándo nació la Matemática. La cuestión no es baladí. Fijar el particular, indisociable de determinar qué es la Matemática, resulta requisito imprescindible para organizar su enseñanza, pues dependiendo de qué concepto se tenga -o adopte- de la disciplina los enfoques docentes pueden diferir enormemente. En este sentido, el estudio histórico aporta algo de luz al tema.

De acuerdo con este enfoque, nuestra disciplina nacería en el momento en que se formulase la primera teoría matemática (es decir, la primera organización axiomático-deductiva de enunciados matemáticos), instante a partir del cual puede considerarse que ha alcanzado un estado científico. En ese momento en el que surgiría un objeto historiable, en el que comenzaría su Historia, en consecuencia, la enseñanza de lo matemático experimenta -necesariamente- un cambio revolucionario. Veamos cuándo sucede esto.

De acuerdo con lo que conocemos hoy, y a pesar de diferentes menciones a otros autores anteriores, el primer ejemplo de utilización sistemática del método axiomático-deductivo lo constituyen los *Elementos* de Euclides de Alejandría. Con este tratado (este "hito histórico") lo matemático adquiriría por primera vez carácter científico. Con él nacería la Matemática como Ciencia y comenzaría su Historia. Como escribe Luis Vega [8]: "No suele ocurrir que un solo tratado funde de una vez por todas una disciplina científica; aún es más extraño que además represente por más de veinte siglos el espejo y la norma del rigor de ésa y otras ciencias de la misma familia".

Comienza Euclides con la relación de 23 "definiciones" (realmente caracterizaciones de conceptos primarios indefinibles) de los objetos matemáticos sobre los que predicarán las diferentes proposiciones que compondrán los 13 libros del tratado: punto, línea (segmento rectilíneo), extremos de la línea, superficie, ángulo, etc. Continúa dividiendo los axiomas de su Geometría en dos grupos: "postulados" o axiomas propiamente geométricos, y "nociones comunes" o axiomas de validez universal que se podrían aplicar a todas las disciplinas a las que se quiera dar carácter científico. Hoy los denominaríamos, respectivamente, "sistema de axiomas no lógicos" y "sistema de axiomas lógicos" [9]. El resto del primer libro corresponde a las proposiciones que referidas a los objetos definidos, pueden demostrarse recurriendo únicamente a los axiomas admitidos. De ellas, 14 son realmente "problemas" (un objeto geométrico a construir) y 34 "teoremas" (asertos que se deben establecer acerca de alguna propiedad de los objetos definidos o construidos).

Los otros doce libros comenzarán con las definiciones de nuevos conceptos (en conjunto habrá un total de 132 definiciones) a los que se referirán las nuevas proposiciones (465 en el total de los 13 libros): 2 problemas y 12 teoremas en el Libro II, 5 y 32 -respectivamente- en el Libro III, etc.

Obviamente los *Elementos* no surgen de la nada, pero desconocemos prácticamente tanto sus precedentes matemáticos como las circunstancias en las que se escribió, por no insistir en la carencia completa de datos acerca del propio Euclides. Hoy se admite que constituyen la recopilación de numerosos enunciados propiamente matemáticos que no se habían reunido en un edificio sistemático hasta entonces pero, sobre todo, se destaca [10], y en esto se coincide con sus primeros comentaristas: a) lo certero en la selección de los problemas y teoremas que integra en el sistema, puesto que solamente incluye, de entre las enormes posibilidades a su alcance, aquellos resultados pertinentes para la construcción de elementos; y b) la variedad y riqueza de los métodos de demostración empleados.

Desde el punto de vista didáctico, como reconoce en sus comentarios Proclo, las perspectivas para la valoración de los *Elementos* crecen: a) en ellos se busca la claridad y la concisión, eliminando todo lo superfluo que dificulta la adquisición del conocimiento; b) se pretende que el estudiante que se aproxime al tratado obtenga una intelección precisa del conjunto de la materia; en suma, c) el autor no sólo pretende enseñar Geometría (y Aritmética), sino intenta formar a los lectores en cómo construirla y aprenderla.

Pero que nadie busque (porque no lo encontrará) ninguna “finalidad” al margen de la propiamente matemática en Euclides. No se detecta adscripción alguna a posibles escuelas filosóficas, solamente desarrollos matemáticos. No existe aplicabilidad (potencial), mucho menos aplicación a ningún otro ámbito científico -si lo hubiera- o técnico, como la Astronomía, Óptica o Geografía, que podían haber sido, si no desarrollados, sí mencionados. Los *Elementos* son sólo, pura y llanamente, Matemática, recogida, eso sí, de las diferentes tradiciones.

4. Categorías históricas, historiación y enseñanza de la Matemática

La búsqueda de algunos “hitos singulares” facilita los cortes históricos, los instantes delimitadores de períodos o fases. En el plano usual de la historia general los “hitos” de ordinario militares o guerreros son los determinantes, quizás por su concreción cronológica; en consecuencia, fácilmente utilizables como "límites" para la historiación. No sucede así, lógicamente, en las historias científicas y técnicas: la publicación de un libro científico tiene normalmente muy poco valor social y, por tanto, casi nada de trascendencia histórica desde su respectivo presente[7].

La perspectiva histórica de que disfrutamos es suficientemente amplia para que pueda afirmarse que tratados como el de Euclides se convierten en fundadores, en punto de inicio de la Historia de la Matemática, que podrá o no hacerse coincidir en la periodización de sus desarrollos posteriores con las etapas que se han establecido en la Historia universal: Antigüedad, Edad Media, Modernidad, Edad Contemporánea. Conjuntamente con ello, la utilización de los prefijos de antelación "pre" (previo pero de naturaleza distinta al lexema que complementa) y "proto" (previo pero de la misma naturaleza) facilitarán tanto la división en etapas -Prehistoria y Protohistoria- de la evolución del mundo de lo matemático hasta su constitución como Ciencia como la ubicación de los desarrollos de acuerdo a su momento histórico[8].

En tanto que prefijos de antelación también pueden utilizarse no sólo en sentido temporal, sino también conceptual. Así, previa a la existencia de la Matemática como Ciencia, pero conformada por conceptos, métodos y desarrollos de naturaleza propiamente matemática, lo que existiría sería Protomatemática. El conjunto de descubrimientos que conducirán directamente a la construcción de los conceptos matemáticos, con algo propio de los sentidos que tendrán posteriormente, pero anteriores a toda consideración teórica general conformarían la Prematemática.

Análogamente, los conceptos matemáticos pueden presentarse, explicarse o enseñarse de diferentes modos. En primer lugar, científicamente, es decir, integrados estrictamente en el formato axiomático-deductivo de la teoría a la que pertenece: sería una Presentación matemática. Pero también se pueden plantear los conceptos abstractos en un orden y con una interrelación entre ellos no sometidos al formato teórico: en este caso se trataría de una Presentación protomatemática. Finalmente, si el enfoque adoptado se limita a ejemplos o aplicaciones a métodos

---

[7] Este enfoque historiográfico lo presentamos por primera vez en González Redondo [11] y lo desarrollamos en González Redondo [12], todo ello en el marco de la escuela de Fundamentos y Filosofía de la Ciencia del Prof. F. González de Posada [13].

[8] Como parece claro estas consideraciones, que aplicadas a la Historia de la Ciencia consideramos originales, constituyen una adaptación tomada de la Historia Universal, que matizamos como sigue: la Historia del hombre comienza en el momento que se desarrolla la escritura; la Protohistoria discurriría desde que existe propiamente el hombre -la especie *homo sapiens*- hasta que se descubre la escritura; y Prehistoria todo lo anterior a la aparición de la especie.

concretos, en la que conceptos y teorías quedan solamente subyacentes, estaríamos ante una Presentación prematemática.

Cabe preguntarse, por tanto, si es posible fijar otro "hito" –previo a los *Elementos*– que permita dividir en dos etapas claramente diferenciadas la evolución histórica de los conceptos matemáticos hasta su constitución como Ciencia, una en la que los desarrollos tengan un carácter claramente científico –la inmediatamente precedente de Euclides–, y otra, previa y necesaria para las formulaciones posteriores, pero que debe distinguirse por la naturaleza aún no científica de las realizaciones[9].

Este "hito" puede ser la formulación, durante la primera mitad del siglo VI a.C., por parte de Tales de Mileto -pues así se le atribuye y reconoce en general-, de cinco enunciados acerca de propiedades generales de algunas figuras geométricas, supuestamente los primeros con estas características que aparecen en la Historia [14]:

1. Todo círculo queda dividido en dos partes iguales por un diámetro.
2. Los ángulos de la base de todo triángulo isósceles son iguales.
3. Los ángulos opuestos por el vértice que se forman al cortarse dos rectas son iguales.
4. Si dos triángulos son tales que dos ángulos y un lado de uno de ellos son, respectivamente, iguales a dos ángulos y un lado del otro, entonces los dos triángulos son congruentes.
5. Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

La idea de la necesidad de "demostración" que aparece por primera vez en Tales -si así lo admitimos- o, en cualquier caso, no mucho tiempo después -si hacemos caso al resumen de Proclo-, está en directa relación con la percepción de la posibilidad de conceptualización de lo verdadero, de la certeza, y a la posterior y generalizada aceptación incontestable de ella por todos los interlocutores. Esta posibilidad aporta un nuevo carácter a las atribuciones del conocimiento humano al conceder a la Filosofía lo que hasta ese momento solamente se admitía en el mundo de la religión o el mito.

[9] Igual que no todos los pueblos de la Tierra alcanzaron la etapa histórica al mismo tiempo que mesopotámicos y egipcios, en el mundo griego entre el siglo III a.C. y el V d.C. será en el primer y único lugar en el que se alcance la etapa propiamente matemática, hasta que en algunos países de la Europa occidental pueda considerarse recuperado el nivel en torno al siglo XVII.

Aunque atribuirle que realmente aportara demostraciones de estos teoremas resulta exagerado, en cualquier caso, por el carácter general puramente teórico de los enunciados, puede considerarse que Tales constituye el "hito" buscado. Con su figura puede hacerse el corte histórico que buscábamos. Todo lo anterior a Tales pertenecería a la Prehistoria de la Matemática. Todo lo comprendido entre él y Euclides constituiría la Protohistoria de la Matemática.

5. Consideraciones historiográficas finales

Como parece natural, este enfoque historiográfico de "hitos" que producen cortes podría ampliarse a la periodización de la evolución histórica del resto de los ámbitos científicos con los ajustes necesarios y las consecuentes implicaciones para la docencia. Así, en Biología Darwin puede utilizarse como origen de la Historia, situando entre Leeuwenhoek, Linneo y Lamarck -justificando la decisión- el comienzo de la Protohistoria. En Química Lavoisier y Mendeleiev también resultan especialmente significativos y podrían representar las oportunas rupturas. Algunos autores anteriores a Lyell intentaron sentar las bases de una Geología realmente científica, pero Werner y Hutton también le aportaron nuevos aires.

En suma, recurriendo al caso de la Matemática -primero de la Historia-, en este artículo hemos aportado un modelo que permite estructurar la evolución de las diferentes disciplinas hasta su establecimiento como ámbitos propiamente científicos. Para ello hemos introducido los conceptos de Prehistoria y Protohistoria de cada Ciencia. En próximos trabajos completaremos la tarea introduciendo periodizaciones en la evolución de las diferentes disciplinas desde su constitución como Ciencias partiendo, también, del caso de la Matemática.

Bibliografía

[1] NEUGEBAUER, O. (1969). *The Exact Sciences in Antiquity*. New York: Dover.

[2] FAUVEL, J. y GRAY, J. (1987): *The History of Mathematics: A Reader*. Milton Keynes: The Open University.

[3] THUREAU-DANGIN, F. (1938): *Textes Mathematiques Babyloniens*. Leiden: Brill.

[4] NEUGEBAUER, O. y SACHS, A. (1945): *Mathematical Cuneiform Texts*. New Haven: Yale University Press.

[5] BUNT, N. H., JONES, P. S. y BEDIENT, J. D. (1988): *The Historical Roots of Elementary Mathematics*. New York: Dover.

[6] GILLINGS, (1972): *Mathematics in the Times of the Pharaos*. MIT Press.
[7] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (1993): *El Análisis Dimensional en la obra de Mario Bunge*. Tesis Doctoral en Filosofía. Universidad Complutense de Madrid.
[8] VEGA REÑÓN, L. (1991): "Introducción General" a Euclides: *Elementos*, pp. 7-184. Madrid: Gredos.
[9] MARTÍNEZ, M. (1986): "Los Orígenes del método axiomático-deductivo". En *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII*, pp. 37-60. Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
[10] HEATH, T. (1956): *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. (3 vols.). New York: Dover.
[11] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (1995): "Historia del Postulado General de Homogeneidad. En torno a F. Viete (1591)". En *Anuario Científico 1994 del Grupo de Análisis Dimensional*, pp. 167-174. Universidad Politécnica de Madrid.
[12] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2000): *Historia del Análisis Dimensional*. Tesis Doctoral en Matemáticas. Universidad Politécnica de Madrid.
[13] GONZÁLEZ DE POSADA, F., GONZÁLEZ REDONDO, F.A., GONZÁLEZ REDONDO, M. y REDONDO ALVARADO, Mª. D. (1992): *Fundamentos de Termodinámica clásica*. Universidad Politécnica de Madrid.
[14] BOYER, C. B. (1986): *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.
[15] REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1985): *Historia de la matemática*. (2 vols.). Barcelona: Gedisa.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse *en papel por duplicado* y además *también en formato electrónico*, del modo especificado al final de estas instrucciones.

Formato

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LaTex (en este último caso deberá usarse estilo “article” y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

El formato de texto debe ser 17cm x 12.8cm. El tamaño de letra de texto 11 puntos (normal). Las páginas sin numerar, pero numeradas a lápiz al dorso.

Los artículos comenzarán con el título en minúsculas de 16 puntos, nombre de autores en minúsculas de 12 puntos, referencia de su departamento o institución de trabajo, dirección de correo electrónico (si se tiene) y “abstract” de unas líneas en inglés en letra itálica (cursiva).

Los epígrafes de sección en minúsculas negritas y numerados, sin punto después del número ni punto final, excepto el de introducción que irá sin numerar. Las subsecciones se numerarán con dos dígitos separados por un punto.

La primera línea posterior al título de sección o subsección no se indentará. Después de cada punto y aparte no se dejará ninguna línea en blanco y la siguiente línea se indentará sólo 5 espacios (tal como están escritas estas instrucciones).

La bibliografía al final, sin palabras completas en mayúsculas, con los títulos de libros o artículos en itálica, no incluyendo nada más después de la bibliografía.

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador, debiéndose evitar los bosquejos a mano alzada). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto y en el tamaño en que deban ser reproducidas.

Las soluciones de problemas propuestos en números anteriores del Boletín deben comenzar indicando: “Problema número (Boletín número)”, tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, terminando con el nombre del autor de la reseña.

Envío de las copias en papel

Se enviarán vía postal por duplicado a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Envío del fichero o ficheros en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta `puigadan@mat.ucm.es` o bien, junto con las copias en papel, en un disquete formateado para PC compatible, conteniendo el/los archivo/s del documento en el procesador de texto utilizado.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar. Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes: 35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60 y 61.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

Caja de Ingenieros, c/. Carranza, 5 Madrid-28004

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín. En la carta se indicará el número o números a adquirir, incluyendo en ella:

– la dirección a donde se han de enviar
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.