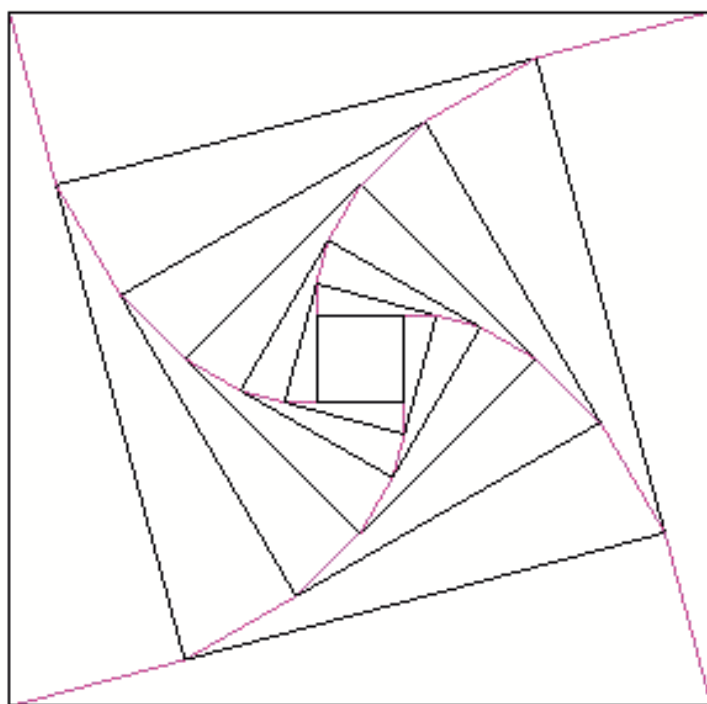


SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



**BOLETÍN N.º 60
FEBRERO DE 2002**

ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2002	5
XX Concurso de Resolución de Problemas	6
XXXVIII Olimpiada Matemática Española (1ª Fase - Madrid)	8
Problemas Propuestos en la Primera Fase de la XXXVIII O.M.E. en los distritos de Madrid	11
Recensiones en “Zentralblatt (ZDM)” y en “Mathematical Reviews”	13
Presentación del Profesor B. Kutzler	14
The Algebraic Calculator as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics, por <i>Bernhard Kutzler</i>	15
El Goniocentro, por <i>Julio Fernández Biarge</i>	38
Desigualdades para funciones f que satisfacen la ecuación funcional $f(x-y)=g(f(x),f(y))$, por <i>Juan C. Cortés López, Gema Calbo Sanjuán</i>	46
Una reflexión en torno a la ecuación de segundo grado, por <i>J.M. Aroca</i>	52
Una demostración breve del Teorema de Tales, por <i>Pedro Pescador Díaz</i>	55
Obtención del Triángulo de Pascal a partir del cubo n-dimensional, por <i>Sergio Falcón Santana</i>	58
Un análisis de los “Elementos de aritmética, álgebra y geometría” de Juan Justo García Rodríguez, por <i>J. Cabezas Corchero y F. Moreno Soto</i>	63
El Teorema de Π entre Vaschy y Buckingham: el método de las varia- bles de dimensión cero, por <i>Francisco González Redondo</i>	71
Uso de CABRI GEOMETRE II en Tecnologías de la Información, por <i>Enrique Rubiales Camino</i>	82
Acerca de un problema de la “Optica” de Euclides, por <i>Juan Tarrés Freixenet</i>	86
Anuncios de Congresos	93
Instrucciones para el envío de originales	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción	96

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews**

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 305 de la Facultad de Educación (hasta ahora era el despacho 3517):

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 62 48

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS	(Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ	(Castilla-León)
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES	(Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO	(Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

Adjuntos a la presidencia:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA
ENRIQUE RUBIALES CAMINO

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2002

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2002 para el sábado *día 6 de abril del 2002*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

XX Concurso de Resolución de Problemas

convocado por la

Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas

y el

Colegio de Doctores y Licenciados
en Ciencias y en Filosofía y Letras

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

- a) *Primer nivel:* alumnos de 3º de E.S.O.
- b) *Segundo nivel:* alumnos de 4º de E.S.O.
- c) *Tercer nivel:* alumnos de 1º Bachillerato (2º y 3º de F.P. II)

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *22 de junio del 2002* a partir de las 10 horas en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 21 de Mayo del 2002, dirigiéndose por carta al presidente de nuestra Sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2001-2002.

Nota importante: Los dos primeros clasificados de cada nivel son invitados a participar en la Olimpiada Rioplatense de Argentina, en diciembre de 2002 (en el supuesto de que se consigan becas para pagar los billetes hasta Buenos Aires).

XXXVIII Olimpiada Matemática Española

Primera Fase - Madrid

Las pruebas de la Primera Fase de la “XXXVIII Olimpiada Matemática Española” correspondientes al curso 2001-2002 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 18 y 19 de Enero de 2002.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio* y se desarrolla en dos fases: la Primera tiene lugar en distintos distritos; este año, tres de ellos corresponden a la Comunidad de Madrid, que cuenta con cinco Universidades estatales, además de las privadas.

Los tres ganadores de cada distrito reciben un Diploma acreditativo de la Real Sociedad Matemática Española y son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio para la concesión de un premio en metálico que este año es de 380, 285 y 220 euros para los ganadores de cada Distrito, algo más que en años anteriores.

Los alumnos premiados son invitados a participar en la Segunda Fase, que este año tendrá lugar en *Logroño*, del 4 al 7 de Abril. En ella se entregarán 6 Medallas de Oro, 12 de Plata y 18 de Bronce. Las medallas de oro llevarán anejas premios en metálico de 750 euros.

Con los mejores clasificados en esa segunda fase, se formará el equipo que representará a España en la *43^o Olimpiada Matemática Internacional* que se celebrará en *Glasgow* (Reino Unido) en Julio de 2002 y en la *XVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas* que tendrá lugar en *El Salvador*, en Septiembre.

Las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de tres horas y media de duración cada una, en las que se propusieron seis problemas, cuyos enunciados damos en este número de nuestro Boletín. Las pruebas de los tres distritos que corresponden este año a todas las Universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurrieron 52 alumnos: un número todavía inferior al registrado en los años precedentes, que ya fue menor de lo esperado.

Cada problema se calificó con un máximo de *7 puntos*, como en la mayor parte de las competiciones internacionales y como ya se hizo el curso anterior. De este modo, había una posibilidad teórica de obtener *42 puntos*.

Damos a continuación los nombres de los *diez* alumnos premiados en los distritos de Madrid *A*, *B* y *C*, ordenados por puntuaciones decrecientes:

1º A. - D. Javier COPPOLA RODRIGUEZ , de 2º de Bach. del Colegio Santa María del Yermo, de Madrid	42 puntos
1º B. - D. Luis HERNÁNDEZ CORBATO , de 1º de Bach. del I. E. S. Fortuny de Madrid.....	37 puntos
1º C - D. Carlos BARRAGÁN DEL REY , de 2º de Bach. del Colegio Jesús María de Madrid	29 puntos
2º A - D. David GARCÍA SORIANO , de 2º de Bach. del Colegio Chamberí de Madrid	26 puntos
2º B - D. Javier GÓMEZ SERRANO , de 1º de Bach. del Colegio Alemán de Madrid	25 puntos
2º C - D. Alejandro CRUZ ROBLEDILLO , de 1º de Bach. del Colegio Santa María del Pilar de Madrid	24 puntos
3º A - Dª María Elena ORTEGA LÉRIDA , de 2º de Bach. del Colegio Bernadette de Madrid	18 puntos
3º B - D. Andrés GONZÁLEZ GONZÁLEZ , de 2º de Bach. del Colegio Alameda de Osuna de Madrid	15 puntos
3º C (ex equo) - D. Álvaro GARCÍA GIL , de 2º de Bach. del Colegio Los Olmos de Madrid	13 puntos
3º C (ex equo) - D. Juan Manuel GÓMEZ DE AGÜERO RODRIGUEZ , de 2º de Bach. Del Colegio Jesús Maestro de Madrid	13 puntos

Debemos resaltar que entre los seis primeros premiados hay tres que están cursando 1º de Bachillerato. Otros de los citados tienen un notable historial de éxitos en anteriores competiciones:

El 1ºA, **Javier COPPOLA RODRÍGUEZ**, de nacionalidad uruguaya, ya se clasificó como 2ºA en 2001 y obtuvo Medalla de Oro en la fase final de la XXXVII OME. Participó en la 42 O. Internacional de M. celebrada en Washington, pero formando parte del equipo de su país.

El 1ºB, **Luis HERNÁNDEZ CORBATO**, que cursa 1º de Bachillerato, se clasificó como 2ºB en 2001 y obtuvo Medalla de Oro en la fase final de la

XXXVII OME, por lo que concurrió a la 42 O. Internacional de M. en la que obtuvo Medalla de Bronce. También obtuvo Medallas de Oro en la Olimpiada de Mayo de 1998 y en la VII O. M. Rioplatense. En nuestros Concursos de Resolución de Problemas, obtuvo el primer puesto del Nivel I en 2000.

El 1°C, **Carlos BARRAGÁN DEL REY**, se clasificó como 3°C en 2001, siendo alumno de 1° de Bachillerato, y obtuvo Medalla de Plata en la fase final de la XXXVII OME.

El 2°A, **David GARCÍA SORIANO**, fue 1° de Nivel II en nuestro Concurso de Resolución de Problemas de 2000 y 2° de Nivel III en el de 2001.

El 2°B, **Javier GÓMEZ SERRANO**, de 1° de Bachillerato, en nuestros Concursos de Resolución de Problemas, fue 4° de Nivel I en 1999, 1° de Nivel I en 2000 y 1° de Nivel II en 2001.

Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

En este mismo Boletín, damos los enunciados de esos problemas y, junto con cada uno, las puntuaciones medias alcanzadas en él, por todos los participantes y por los diez premiados, así como el número de soluciones calificadas con 6 o con 7, que consideramos aceptables.

Problemas Propuestos en la Primera Fase de la XXXVIII O.M.E., en los Distritos de Madrid

(Los mismos problemas que en la mayor parte de los distritos españoles)

Problema 1º:

En un equipo de fútbol tenemos 11 jugadores, cuyas camisetas están numeradas del 1 al 11. Elegimos al azar 6 de ellos. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números de sus camisetas sea impar?

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 2,0

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 6,1

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 52): 10

Problema 2º:

La suma de las edades de los 120 estudiantes que participaron el año pasado en la fase de la Olimpiada Matemática fue de 2002 años. Demuestra que podrías haber elegido 3 de ellos tales que la suma de sus edades no fuera menor de 51 años.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,3

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 4,4

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 52): 4

Problema 3º:

Escribo en la pizarra 14 números enteros, no necesariamente distintos, que verifican la propiedad de que al borrar cualquiera de ellos, puedo agrupar los trece restantes en tres montones de igual suma.

- a) Demuestra que cada uno de los catorce es múltiplo de 3.
- b) ¿Es posible que alguno de los catorce que he escrito no sea el 0?

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,0.

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 3,7

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 52): 3

Problema 4º:

En el triángulo acutángulo ABC , AH , AD y AM son, respectivamente, la altura, la bisectriz y la mediana que parten desde A , estando H , D y M en el lado BC . Si las longitudes de AB , AC y MD son, respectivamente, 11, 8 y 1, calcula la longitud del segmento DH .

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 0,4

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 1,8

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 52): 2

Problema 5º:

Se sabe que el número de soluciones reales del sistema

$$(y^2 + 6)(x - 1) = y(x^2 + 1)$$

$$(x^2 + 6)(y - 1) = x(y^2 + 1)$$

es finito. Prueba que este sistema tiene un número par de soluciones reales.

(Nota: Decimos que la solución (x_0, y_0) es real cuando x_0 e y_0 son números reales).

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,4

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 5,1

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 52): 8

Problema 6º:

Considera 7 puntos arbitrarios del plano y los 21 segmentos que los conectan entre sí. Demuestra que al menos 3 de estos 21 segmentos son de distinta longitud.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 0,9

Puntuación media obtenida por los diez premiados (sobre 7): 3,0

Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 52): 2

Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) y Mathematical Reviews incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 33 (6) DE 2001

- #5233 (sección H60). Vectores deslizantes; pares de vectores, por *José Pérez Blanco*, Bol. Soc. Puig Adam 52 (Junio 1999), págs. 56-60.
- #5423 (sección M40). Sobre cálculo con funciones usuales en el análisis económico, por *Manuel Suárez Fernández* y *M. Elisa Amo Saus*, Bol. Soc. Puig Adam 52 (Junio 1999), págs. 63-73.

Presentación del Dr. B. Kutzler

El Dr. Bernhard Kutzler, austriaco, es una de las autoridades mundiales en el campo de la Didáctica del Álgebra Computacional.

Su doctorado versó sobre la demostración automática de teoremas geométricos, pero ha llevado a cabo muy diversas actividades. Ha sido ingeniero de software, investigador en el prestigioso centro RISC-Linz (con el profesor Bruno Buchberger), consultor de Texas Instruments, profesor de la Universidad de Linz, editor de la editorial BK Teachware,...

Es de destacar además su intensa actividad como organizador de congresos y sesiones especiales, conferenciante, divulgador y autor; siempre en el campo de la Didáctica del Álgebra Computacional (y más en particular del uso de Derive y las TI-92/89).

Se puede encontrar más información sobre él, sus trabajos, avisos de congresos... en su interesante página web (www.kutzler.com).

Persona alegre y afable (y, por cierto, gran experto en baile de salón) ha aceptado prepararnos el artículo que incluimos a continuación.

Eugenio Roanes Lozano

The Algebraic Calculator

as a Pedagogical Tool for Teaching Mathematics

Bernhard Kutzler

Abstract

Computer algebra systems (CAS) make us think about WHAT and HOW we teach mathematics. In this article we focus on the HOW by developing a two level framework for understanding, categorizing, and planning the use of technology, in particular CAS, in teaching and learning mathematics. First we look at two kinds of support a tool can give: automation and compensation. Second we look at four pedagogical approaches for teaching and learning mathematics which are greatly facilitated when using CAS properly: trivialization, experimentation, visualization, and concentration. Based on this framework we introduce the scaffolding method as a pedagogically justified sequence of using and not using technology to achieve certain teaching goals.

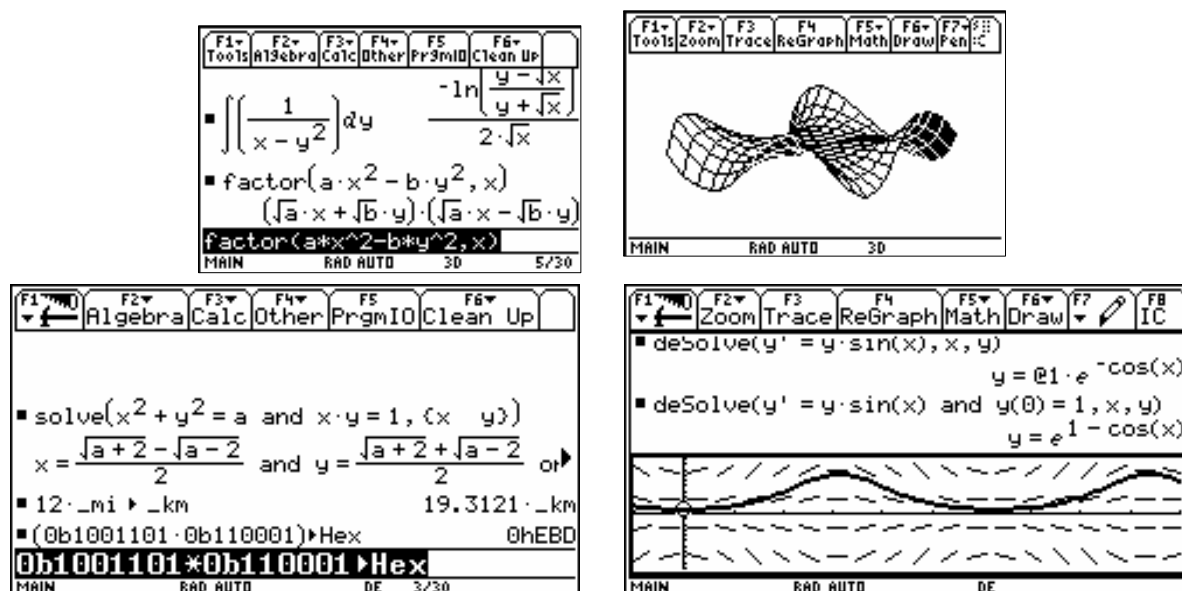
1 Introduction

1.1 Algebraic Calculator

Algebraic Calculators are graphic calculators which offer features that so far were available only on computers. These calculators can simplify expressions, differentiate, integrate, and plot functions, solve equations, manipulate matrices, etc. In short: They can do most of what we teach in mathematics at schools and colleges.

Following are two screen images each of the algebraic calculators TI-89 and the TI-92. The first picture demonstrates the calculation of an antiderivative (indefinite integral) and the decomposition of a polynomial into linear factors. The second picture shows a 3-dimensional graph, which even can be rotated in real-time. The third picture shows the solution of a system

of non-linear equations, a physical units conversion, and the conversion of the result of a binary number calculation into the hexadecimal system. The fourth picture provides you with the algebraic and the numeric/graphic solution of a differential equation.



Such calculators soon will be the standard tool as it is the scientific or graphic calculator today. In this article I discuss in detail how this technology is likely to effect the teaching of mathematics. As an introduction I look at the role of technology in general.

1.2 Technology

The word 'technology' comes from the Greek word *technikos* which means „artistic, expert, professional“. In form of computers, technology enters more and more areas of life. In the sequel I look at two areas and explain the importance and significance of technology therein. The two areas are *mathematics* (intellectual) and *moving/transportation* (physical). This comparison was stimulated by Frank Demana.

The most elementary method of moving is *walking*. Walking is a physical achievement obtained with mere muscle power. The corresponding activity in mathematics is *mental calculation* (mental arithmetic and mental algebra.) Mental calculation requires nothing but „brain power“.

Riding a bicycle is a method of moving, where we employ a mechanical device for making more effective use of our muscle power. Compared to walking we can move greater distances or faster. The corresponding activity in mathematics is *paper and pencil calculation*. We use paper and pencil as „external memory“ which allows us to use our brain power more efficiently.

Another method of moving is *driving a car*. The car is a device that produces movement. The driver needs (almost) no muscle power for driving, but needs new skills: He must be able to start the engine, to accelerate, to steer, to brake, to stick to the traffic regulations, etc. The corresponding activity in mathematics is *calculator/ computer calculation*. The calculator or computer produces the result, while its user needs to know how to operate it.

What method of moving is sensible in which situation? If we ask a colleague to get a newspaper from a 250 meter distant newsstand, he probably will walk. In case the newsstand is 1,000 meters away, a bicycle may be the most reasonable means of transportation. In case the distance to the shop is 10,000 meters, one will use a car. In mathematics, the sensible use of technology is accordingly: The multiplication of two one-digit numbers is best done mentally. Two two-digit numbers can well be multiplied using paper and pencil, while for the product of two five-digit numbers one will use a calculator.

One could throw in that „*many students use a calculator to obtain the product of 7 and 9*“, hence they are likely to loose the skill of performing mental arithmetic. This is a clear case of improper use of technology, which happens not just in mathematics. Some people misuse their car by driving 250 meters to the next newsstand. Those, who do so, harm themselves (lack of physical exercise) and our environment (through the exhaust fumes). Despite the possible misuse of the car we do not demand its abolition. Similarly we should not banish calculators and computers just because some students might use them improperly. As much as we needed (and still need) to create a general awareness that physical exercises are essential for physical fitness and health, we need to create the awareness that intellectual exercises (mental arithmetic and mental algebra are such exercises) are essential for intellectual fitness and health. More on this will be discussed in the last but first section.

The analogy is not finished yet. What, if the colleague, who we asked to get a newspaper from a 250 meter away newsstand, can't walk properly (because he is physically challenged or has a broken leg)? For him, walking 250 meters can be

very difficult, if not undoable. There is technology available to help these people, for example a wheel chair. *Using a wheel-chair* is a method of technology-supported moving, where a physical weakness is compensated. In an intellectual activity weaknesses could occur as well, whose compensation is desirable if not necessary. I give an example from mathematics teaching: A student with a weakness in solving systems of linear equations will find it difficult to solve analytic geometry problems, simply because the solving of a system of equations is a subproblem encountered frequently in analytic geometry. It is not only an act of humanity, but our pedagogical duty to provide this student with a tool which compensates his or her weakness, hence allowing the student to do analytic geometry properly despite the weakness.

As we will demonstrate later with more examples, calculators and computers can be excellent mathematical compensation tools which allow less gifted students to deal with advanced topics. It goes without saying, that the ultimate goal in mathematics teaching is to weed out all weaknesses in skills that are regarded essential. A physically challenged person need not be tied to a wheel chair for the rest of his life. A physician will endeavor to repair a patient's physical disability as much as possible, using an individual therapy. Similarly, a teacher should endeavor to repair a student's intellectual/mathematical disability with a proper, individual therapy. In both cases we will facilitate the patient's „daily life with the disability“ – i.e. the time outside the therapy – by providing an appropriate compensation tool (wheel chair, calculator).

Following is a summary of the analogy.

Moving/Transportation	Mathematics
<i>physical</i>	<i>intellectual</i>
walking	mental calculation
riding a bicycle	paper & pencil calculation
driving a car	calculator/computer calculation (automation)
using a wheel chair	calculator/computer calculation (compensation)

2 Teaching with Technology

Based on what we explained in the previous section, we distinguish two elementary uses of calculators or computers in teaching: automation and compensation. Based on these two application types, we demonstrate how one can use calcula-

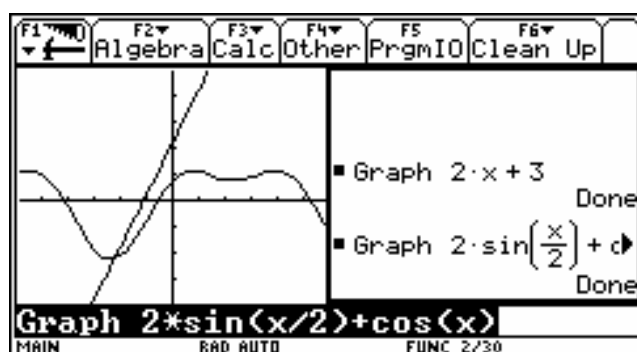
tors and computers as valuable teaching tools by looking at four topics which I think are especially important in mathematics education: trivialization, experimentation, visualization, and concentration.

2.1 Trivialization

The car broadened our „moving/transportation horizons“ by trivializing moving up to certain distances. Similarly, the calculator broadens our „calculation horizons“.

Remember the „old days“ before scientific calculators? Exam questions or homework problems had to be chosen very carefully so that all intermediate and final results were „nice“. A „nice“ result was an integer, a simple fraction, or a simple radical which, later in the calculation, often would disappear again. This was important, as otherwise the students would have had to use most of their time performing arithmetic operations. With a scientific calculator one can multiply two seven-digit numbers as quickly as two one-digit numbers. The scientific calculator trivializes the performing of arithmetic operations.

Drawing the graph of a linear function (e.g. $y=2x+3$) is simple once you know the geometric meaning of the two coefficients. Only a glimpse of talent and a ruler are enough to produce a proper graph. Drawing the graph of a function such as $y=2\sin(x/2)+\cos(x)$ is much more difficult and the production of a proper graph requires a reasonable degree of talent for drawing. With a graphics calculator one can plot both functions within the same amount of time and talent. The graphics calculator trivializes the production of graphs.



Computing the first derivative of $y=x^2$ is simple once you know the differentiation rule for powers. Determining the first derivative of $y=\ln(|\sin(\cos(\tan(\sqrt{x^2-x+1})))|)$

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(|\sin(\cos(\tan(\sqrt{x^2-x+1})))|\right)\right) = \frac{-(2x-1) \cdot \sin(\tan(\sqrt{x^2-x+1}))}{2 \cdot \sqrt{x^2-x+1} \cdot (\cos(\sqrt{x^2-x+1}))^2 \cdot \tan(\cos(\tan(\sqrt{x^2-x+1}))) \cdot \cos(\tan(\sqrt{x^2-x+1}))}$$

however, is a lot of work even for a good mathematician. The algebraic calculator can manage both examples within seconds. The algebraic calculator trivializes algebraic (symbolic) computations. A landmark paper about trivialization of algebraic computation in mathematics teaching is [Buchberger 1989], where the WhiteBox/BlackBox principle is introduced.

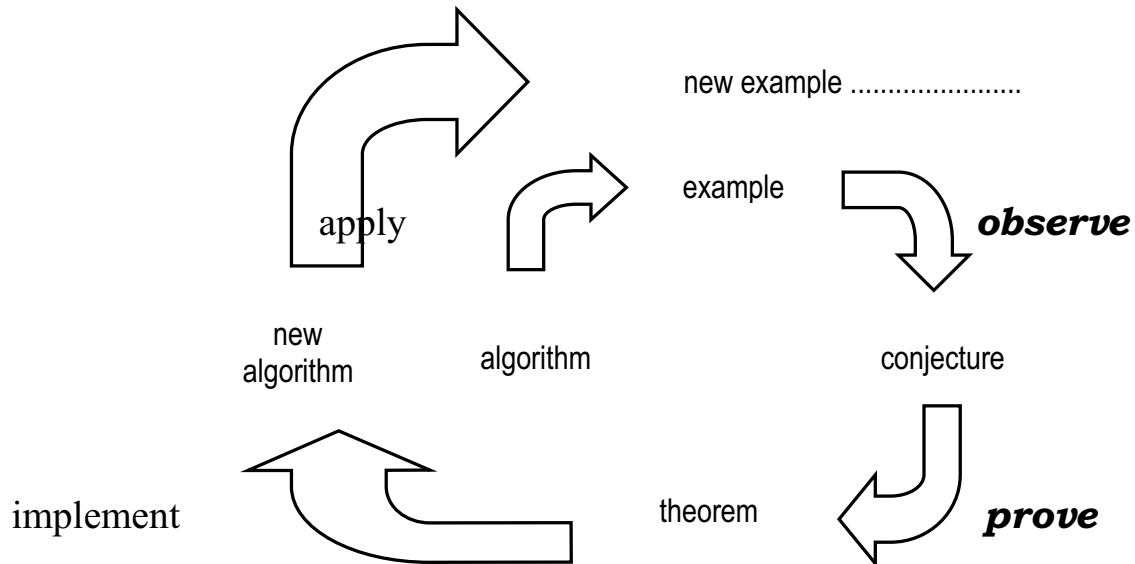
The car (i.e. the trivialization of moving and transportation) made a distance such as Los Angeles to San Diego easily managable. In other words, moving and transportation tasks that have been considered difficult in earlier times nowadays are fulfilled routinely with cars. Similarly, calculators and computers (i.e. the trivialization of arithmetic, graphics, and algebra) in teaching mean that we can tackle

- (more) complex problems and
- (more) realistic problems.

2.2 Experimentation

How did we discover all the mathematical knowledge we know today and how do we find more mathematical knowledge? According to one of the epistemologically oriented theories one can visualize the main steps of these discoveries as follows: Applying known algorithms produces *examples*. From the examples we *observe* properties, which are expressed as a *conjecture*. Proving the conjecture yields a *theorem*, i.e. guaranteed knowledge. The theorem's algorithmically us-

able knowledge is *implemented* in a new *algorithm*. Then the algorithm is *applied* to new data, yielding *new examples*, which lead to new observations, ...



This picture of a spiral which demonstrates the path of discovery of (mathematical) knowledge was proposed by Bruno Buchberger. A detailed description of *Buchberger's Creativity Spiral* and references to related models can be found in the highly recommended (German language) book [Heugl/Klinger/Lechner 1996].

In this spiral we find three phases. During the *phase of experimentation* one applies known algorithms to generate examples, then obtains conjectures through observation. During the *phase of exactification* conjectures are turned into theorems through the method of proving, then algorithmically useful knowledge is implemented as algorithms. During the *phase of application* one applies algorithms to real or fictitious data. Typically, the solution of real problems serves the purpose of mastering or facilitating life, while the solution of fictitious problems serves the purpose of entertainment/diversion (e.g. mind puzzles) or the finding of new knowledge (i.e. the satisfaction of scientific curiosity).

Mathematics is about 5,000 years old. The first 2,500 years it was an experimental science and belonged to the cultural assets of the Egyptians and other ancient civilizations. Using the above notions, it consisted only of the phases of experimentation and application. About 500 B.C. the Greek took the Egyptian mathematics and applied to it the deductive methods of their philosophy (i.e. they added the phase of exactification), thus establishing mathematics as the deductive science as we know it today. From then on scientific mathematics comprised all three phases. After the mathematical knowledge grew for a while, a group around the French mathematician Dieudonne (the group became known under the name „Bourbaki“) undertook a projekt aiming at writing down the mathematical knowledge of their time in a uniform and concise manner. They developed the system of „definition-theorem-proof-corollary-...“, which has become characteristic to modern mathematics. This Bourbaki system, being developed for the purpose of inner-mathematical communication, did without documenting the phase of experimentation, hence it consisted only of the phases of exactification and application.

Gradually, Bourbakism lodged itself in teaching and learning. It has become customary to teach mathematics by deductively presenting mathematical knowledge, then asking the students to learn it and use/apply it to solve home work and exam problems. This is as if one would have to learn walking (or cycling, or dancing, ...) by studying, understanding, then applying scientific descriptions of the muscle motions required for walking (or cycling, or dancing, ...) – instead of learning by trial and error (i.e. experimentation), as it is done naturally. Most of today’s psychological theories of learning consider learning to be an inductive process in which experimentation plays an important role. This is why Freudenthal demanded that we should not teach students something that they could discover themselves (see [Freudenthal 1979]).

Hardly any mathematician on this planet could do mathematical research the way we demand our students to get into this subject. A student has to „locally“ build his individual little „house of mathematics“. A scientist does pretty much the same „globally“, i.e. on a much larger scale. For both the scientist and the student a substantial part of knowledge acquisition happens during the phase of experimentation. From this point of view it becomes understandable why so many students are at loggerheads with mathematics and one will demand that experimentation obtains its due position within the teaching of mathematics. Phases of experimentation should complete the traditional teaching methods – not substitute

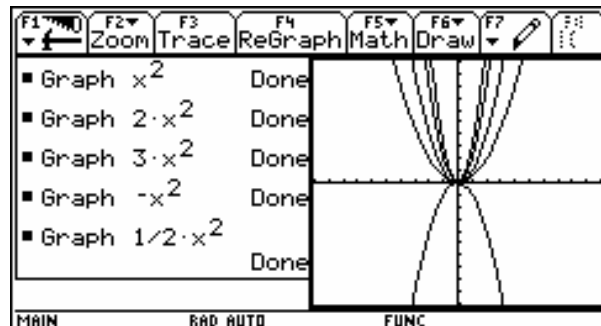
them! We do not advocate the return to Egyptian experimental mathematics. Simply, mathematics teaching should go through all three phases of the above spiral.

However, it is understandable that, within the framework of today's curricula, there was hardly any experimentation in the sense of Buchberger's creativity spiral. This kind of experimentation, performed with paper and pencil, is both time-consuming and errorprone. Within the time available at school, students could produce only a very small number of examples for the purpose of observing and discovering, and a hefty portion of these examples could be faulty due to calculation errors. There is nothing you can observe from only a few, partly wrong examples! From now on algebraic calculators enable students to experiment within almost all topics treated in mathematics teaching. There is no limit to the number of examples the student can do and the electronic assistant guarantees the properness of the results. Talking about an assistant: Records indicate that great mathematicians such as Carl Friedrich Gauss employed herds of human „calculators“ without which they would not have made most of their famous findings.

The great genius Johann Wolfgang Goethe called for „learning through doing and observing“. Using algebraic calculators we can now meet Goethe's demand.

2.3 Visualization

Visualization means illustration of an object, fact, or process. The result can be graphic, numeric, or algebraic. Today, the term is mostly used for graphic illustrations of algebraic or numeric objects or facts. (The term is used either for the process of illustration or for the result of the illustration process.) Visualization as a technique of teaching mathematics has become important mostly in those countries, where graphics calculators are widely used. Today it is mainly used to acquire the competence of changing between representations, mostly for the purpose of studying the correspondance between algebraic and graphic representations. A typical example is studying how the parameter a effects the shape of the graph of the function $y = a \cdot x^2$:



Frank Demana and Bert Waits are the leading advocates of a teaching style that is called the „power of visualization“ (see [Demana/Waits 1990, 1992, 1994]).

In the psychology of learning scientists discovered the concept of *reinforcement* and showed, that reinforcement works best if it follows the action immediately. An example from everyday life is a child who puts its hand on a hot stove. The immediate pain is the best prerequisite for the child to learn not to do this anymore. If the pain would be felt only several minutes later, the child probably would not connect it with the (long ago) touching of the hotplate and it probably would not learn anything.

When using a calculator as a visualization tool, the immediate feedback is of central importance. If you enter into your calculator, for example, x^2 , then press the right key, the corresponding graph appears only fractions of a second later. The resulting picture can be discussed, the graph can be associated with the expression, etc. Consider a less gifted student and compare the learning effect when the student has to draw the graph manually with when the student is allowed to use a calculator: A manually produced graph would take too much time and most probably it would have only a vague resemblance with the true graph. („What can you observe from wrong examples?“) Only with the help of the calculator this student has a realistic chance to memorize the correspondance between the expression and the (proper!) graph. Producing graphs with paper and pencil certainly continues to be a worthwhile activity which is important in learning to *understand* the correspondance between algebraic and graphic representations.

However, immediacy and correctness are such crucial psychological factors, that providing less gifted students with an appropriate tool (such as a graphic calculator) is a pedagogical duty.

If and how a teacher uses a tool for supporting an activity depends on the pedagogical goals connected with the activity. Helmut Heugl once said „*If it is not (pedagogically) necessary to use an algebraic calculator, it is (pedagogically) necessary not to use the algebraic calculator.*“ This means, in particular, that the teacher becomes more and more important in a technology-supported mathematics education, hence the importance of teacher preservice and inservice training grows.

2.4 Concentration

We can compare teaching and learning mathematics with building a house, the „house of mathematics“. The topics which we teach and the dependencies between them are comparable to the storeys of a house. Before one can build the house's second storey, one has to complete its first. Similarly, the treatment of almost any mathematical topic requires the mastery of earlier learned topics. We demonstrate this using the topic „solving of a linear equation in one variable“.

We look at the equation $5x-6=2x+15$. One has to transform it into the form $x=...$. This is achieved through choosing and applying an appropriate sequence of equivalence transformations. Typically, the student is advised to „bring terms with x to one side of the equation“ and to „bring all other terms to the other side“. Therefore we start by subtracting $2x$:

$$5x-6 = 2x+15 \quad | -2x$$

After *choosing* this equivalence transformation, we *apply* it to both sides of the equation i.e. we have to simplify:

$$3x-6 = 15$$

Now we have to choose another equivalence transformation, namely $+6$:

$$3x-6 = 15 \quad | +6$$

And we simplify again:

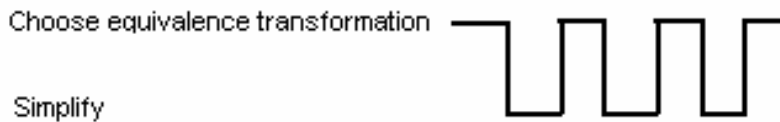
$$3x = 21$$

We are interested in the *practice* of teaching mathematics. In particular we want to know why students make what errors. A typical mistake starts with the following argument: „*There is a 3 in front of the variable x. To get rid of the 3 I need to subtract 3*“. This student is most likely to write ...

$$\begin{array}{l} 3x = 21 \quad | -3 \\ x = 18 \end{array}$$

..., believing that the equation is solved.

What goes wrong and how can technology help to make it better? An analysis of the steps taken above reveals two alternating tasks: (1) the choice of an equivalence transformation and (2) the simplification of algebraic expressions. Here, the choice of an equivalence transformation is a higher-level task insofar as it is the essence of the strategy for finding the solution of an equation. It is the new skill which the student has to learn when learning to solve equations. The simplification of expressions is a lower-level task, for which the teacher has to assume that the student is sufficiently well trained.



This picture demonstrates that a student, while trying to learn a new skill, repeatedly has to interrupt the learning process in order to perform a calculation. This is as if one would repeatedly be interrupted during a difficult chess game. In fact, it is even worse, because the interruption can influence the „game“: A mistake made during the interruption, i.e. during the lower-level task, severely disturbs the higher-level task and may prevent the student from learning. This is exactly what led to the wrong solution $x=18$ in the above example: After deciding to subtract 3, the student should fully concentrate on subtracting 3 from both sides of the equation while „forgetting“ the reason for choosing this equivalence transformation. But, in reality, the student starts the next line with „ $x=$ “ simply „*because the transformation -3 was chosen in order to generate $x=$ on the left hand side*“.

At the higher level the student has the (wrong) impression that -3 simplified the equation as desired.

This continuous change of levels inevitably occurs in almost all topics in school mathematics. It appears to be one of the central problems in mathematics education that students have to learn a new ability/skill while still practising an „old“ one.

Using an algebraic calculator the learning process could be conducted as follows. First we enter the equation.

$5x-6=2x+15$ (ENTER)

■ $5 \cdot x - 6 = 2 \cdot x + 15$	$5 \cdot x - 6 = 2 \cdot x + 15$
$5x-6=2x+15$	
MAIN	RAD AUTO FUNC 1/30

Then follows the input of the equivalence transformation. (The calculator automatically applies the subtraction operator to the last expression, i.e. the equation as its first argument.)

$-2x$ (ENTER)

■ $(5 \cdot x - 6 = 2 \cdot x + 15) - 2 \cdot x$	$3 \cdot x - 6 = 15$
$\text{ans}(1)-2x$	
MAIN	RAD AUTO FUNC 2/30

The simplification, i.e. the application of the equivalence transformation to both sides of the equation, was performed by the calculator. Then the student chooses the next equivalence transformation:

$+6$ (ENTER)

■ $(3 \cdot x - 6 = 15) + 6$	$3 \cdot x = 21$
$\text{ans}(1)+6$	
MAIN	RAD AUTO FUNC 3/30

We mimic a student who makes the above discussed mistake:

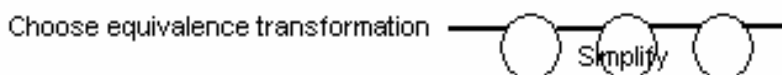
-3 (ENTER)

$(3 \cdot x = 21) - 3$	$3 \cdot x - 3 = 18$
ans(1)-3	
MAIN	RAD AUTO FUNC 4/30

It goes without saying that the calculator simplifies properly, hence the student receives an immediate feedback that the transformation -3 was not successful (i.e. did not simplify the equation to „ $x=$ “).

Here we meet again two issues that we discussed earlier: (1) The student *experiments* with possible equivalence transformations, hence there is an experimental learning phase, and (2) the *immediacy* of the result of applying the transformation tallies with what we asked for in the section on visualization.

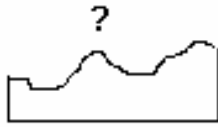
A student who follows the above calculator-supported exercise can fully concentrate on the (higher-level) skill of choosing an equivalence transformation. The lower-level skill of simplification is performed (at least for the moment) by the calculator.



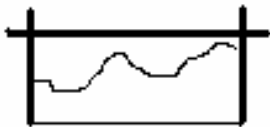
In [Kutzler 1998a] I give detailed instructions how to use a TI-92 (or TI-89) to teach/learn solving of linear equations. The above algebraic approach is discussed in further detail as well as numeric and graphic approaches.

(3) The Scaffolding Method

In the above subsection on concentration we compared teaching mathematics with building a house. In the language of this metaphor the above mentioned problem of mathematics education translates into the problem of building a new storey on top of an incomplete storey. For example, as soon as we start building the storey of „choosing equivalence transformations“, the storey of „simplifying“ is still incomplete for many of our students. In mathematics teaching at school we simply don’t have enough time for waiting until all students have completed all previous storeys. The curriculum forces the teacher to continue with the next topic, independent of the progress of individual students. So, it remains to ask how a student can build a storey on top of an incomplete one.



The above example demonstrates how I suggest to answer this question: While the student learns the higher-level skill, the calculator solves all subproblems that require the lower-level skill. Using the language of the metaphor, the calculator is a scaffolding above the incomplete storey.



Using the example of solving a linear equation we demonstrated the use of an algebraic calculator as a scaffolding above the simplification storey. In the sequel we apply the scaffolding method to another example, namely the solving of a system of linear equations with Gaussian elimination.

We use the system $2x+3y=4$, $3x-4y=5$. First, the student enters the equations:

$$2x+3y = 4 \text{ (ENTER)}$$

$$3x-4y = 5 \text{ (ENTER)}$$

■ $2 \cdot x + 3 \cdot y = 4$	$2 \cdot x + 3 \cdot y = 4$
■ $3 \cdot x - 4 \cdot y = 5$	$3 \cdot x - 4 \cdot y = 5$
$3x-4y=5$	
MAIN	FUNC 2/30

Gaussian elimination requires us to choose a linear combination of the two equations such that one variable is eliminated. This is what needs to be learned. Everything else (simplification, substitution, solving of an equation in one variable) are prerequisites of which the teacher expects that the students are well enough trained.

Choose linear combination

Simplify, substitute, solve
equation in one variable



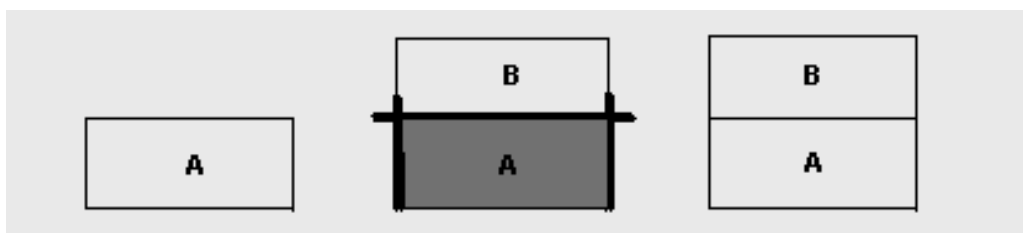
We try to eliminate y by adding four times the first equation and three times the second equation. (On both the TI-92 and the TI-89 there is a simple technique for autopasting a previously entered equation into the entry line. We don't give the details here.)

$4*(\dots \text{first equation} \dots) + 3*(\dots \text{second equation} \dots)$ (ENTER)

■ $4 \cdot (2 \cdot x + 3 \cdot y = 4) + 3 \cdot (3 \cdot x - 4 \cdot y = 5)$
 $17 \cdot x = 31$
 $4 \cdot (2 \cdot x + 3 \cdot y = 4) + 3 \cdot (3 \cdot x - 4 \cdot y = 5)$
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

Voila. Variable y disappeared as requested. What is the practice of teaching this topic at school? Some students choose the right linear combination, but, due to a calculation error, the variable does not disappear. Other students choose a wrong linear combination, but, again due to a calculation error, the variable disappears (because it „must“ disappear.) For both groups of students their weakness in algebraic simplification is a stumbling block for successfully learning the basic technique of Gaussian elimination. Exactly those students lag behind more and more the „higher“ they get in the house of mathematics.

In the above exercise, the algebraic calculator is a scaffolding that compensates any weakness with the lower-level skills, hence it helps avoiding mistakes. In case the final teaching goal is to have students be able to solve systems of equations (or perform any other skill B) manually (because, for example, the students are assessed centrally at the end of the school year), then it is recommended to perform the following three steps. The first step is teaching and practising skill A. The second step is teaching and practising skill B, while using the algebraic calculator to solve all those subproblems that require skill A (i.e. the student can fully concentrate on learning skill B.) The third step is to combine skills A and B with no support from technology.



This is one of many conceivable methods of using algebraic calculators and computers as pedagogical tools.

The temporary use of technology can help to break down the learning process into smaller, easier „digestible“ pieces. For less gifted students, who could not swallow the „big pieces“ we offered them so far, this may be the only way of mastering these learning steps. They find it easier to keep track of the steps without getting lost (or screwed up) in details such as simplification. When comparing the teaching of mathematics with building a house, the use of technology compares with using a scaffolding.

The *scaffolding method* is any pedagogically justified sequence of using and not using technology for trivialization, experimentation, visualization, or concentration either in the sense of automation or compensation.

The presented use of technology as a pedagogical tool is completely independent whether or not technology may be used during an exam. The scaffolding method aims at supporting the learning process, i.e. it can help reaching (traditional) teaching goals. Here, technology is only a training instrument. Like a home trainer can help us acquiring physical skills, an algebraic calculator can help us acquiring intellectual/mathematical skills. Consequently, technology should be introduced as a pedagogical tool independently of any changes to the curriculum or the assessment scheme. Algebraic calculators can help at all levels of mathematics in secondary education.

In [Kutzler 1998b] I describe how one can use a TI-92 (or a TI-89) to treat the topic „solving of systems of linear equations“ at school. Besides giving further details on the above approach, the booklet also describes numeric and graphic methods as well as the substitution method.

4 Goals of mathematics education

I believe that the two central goals in mathematics education should be to train the students in the two disciplines *intellectual sports* and *problem solving*.

4.1 Intellectual sports

Given the existence of algebraic calculators, Bruno Buchberger raised the question „*Why Should Students Learn Integration Rules?*“ ([Buchberger 1989]) and Wilfried Herget asked „*How Much Simplification Do We Need?*“ („*Wieviel Termumformung braucht der Mensch?*“), see the remark on page 8 in [Hischer 1992]. In all areas of life we need to ask how far we should go in automation.

At the beginning we compared mathematics with moving/transportation. Our transportation technology is far enough developed so that we would not need to walk at any time in our life. We could use moving tools from infancy on. But we don't do it. We know, that this would be devastating for our physical fitness and health: Our muscles would – because never used – degenerate, and this would certainly effect the whole body.

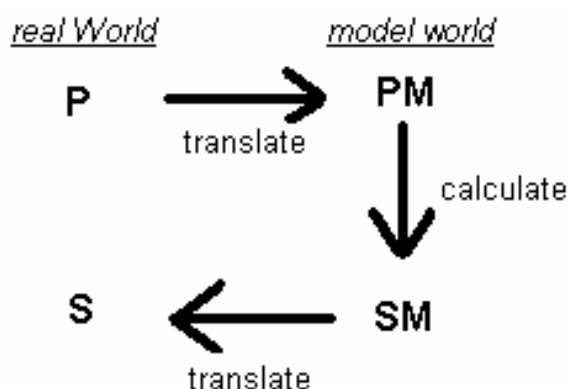
Due to a massive increase of automation over the past years, many of our intellectual skills are in jeopardy. In the past we needed to memorize phone numbers – today we just use the phone's memory keys. In the past we had to memorize how to program the video recorder – today we just swipe a bar code reader over the TV programme. It goes without saying that all this makes life so much more comfortable. BUT it leads us to loosing what I call „intellectual fitness“. Many teachers complain about students' lack of concentration and their weak memories. These are two typical symptoms for a diminishing intellectual health.

In medicine there exist definitions of what a „healthy“ person must be able to do physically. After a heart attack, for example, a patient must be able to walk a certain distance and to take the stairs a certain number of levels before he is considered cured. We need something similar for our intellectual capabilities, i.e. a definition of what an „intellectually healthy“ person must be able to do in terms of, for example, memorization, or mental calculations.

For what concerns our physical capabilities, we introduced the school subject „sports“ in order to fight a further deterioration. We need to take similar steps regarding our intellectual capabilities, e.g. we need the introduction of a school subject „intellectual sports“. I believe that this should be *one* of the goals of mathematics education.

4.2 Problem solving

In mathematics I consider problem solving to be the ability to use mathematical tools for solving real world technical problems. Characteristic for problem solving are the three steps shown in the graphics below. The first step is choosing the model and translating the real world problem into the language of the model, which requires us to grasp and understand the problem. (An optimization problem, for example, would translate into a function to be optimized and equations which describe any constraints between the variables involved.) The second step is applying the available algorithms to solve the model problem PM, yielding a model solution SM. The third step, finally, is to translate the model solution into a real world solution S. (Often, people refer to this re-translation as interpretation.)



However, now we still need to test, if **S** actually is a solution of **P**. In case it is not, then the whole process (i.e. all three steps) need to be repeated, because the mistake or error could be anywhere: The chosen model may be inappropriate, the translation may be faulty, or the calculation may be wrong.

Today, problem solving is treated at school only half-heartedly. The main emphasis is put on the second step, calculation, and its execution with paper and pencil. Therefore, most problem solving exercises turn into exercises for practising calculation skills. Since translation hardly is taught explicitly, it is understandable that a majority of students don't develop this ability, hence they are afraid of this type of exercises. As a consequence, most students believe that such exercises are only for the most ingenious among them. 1996].

By employing technology as widely as possible, we can dedicate enough time to teach the choosing of models and the translating. Once these skills are taught explicitly, more students will appreciate and master them.

4.3 The future of teaching mathematics

Curricula should aim at educating students in the disciplines *intellectual sports* and *problem solving*.

The goal of intellectual sports are intellectual fitness and health as has been described in detail earlier. It goes without saying that technology should only be an training tool („mathematical home trainer“) and must not be used when testing these abilities.

The goal of problem solving is the ability of using given tools for solving given problems. It goes without saying that the use of technology should be highly welcome here.

Once again I draw a parallel using the initial comparision of mathematics with moving/transportation. Problem solving compares with an actual desire of moving from A to B (or transporting something from A to B). Only the reaching of B counts. It is less important (maybe even unimportant) how we got there. Intellectual sports compares with a jogger who runs along a track in order to gain physical fitness. Only the jogging counts. It is unimportant where the track is or where it leads to. Transferred to mathematics this means the following: In problem solving only the result counts. It is irrelevant how the calculations were performed. In intellectual sports only the performing of the calculation counts, while the result is unimportant.

4.4 Assessment

The above yields a very simple rule for assessment: When assessing intellectual fitness, no tool is allowed, not even a simple four-function calculator. When assessing problem solving, all tools are allowed (better: solicited), in particular graphic or algebraic calculators. In case this splitting is not managable within an exam, one should assess the two disciplines at different times. It is obvious to draw a parallel with ice skating: Intellectual sports compares with the compulsory exercise, in which the athlete demonstrates the mastery of the basic techniques. Problem solving compares with the voluntary exercise (freestyle), in which the athlete demonstrates the ability to combine the basic techniques into a nice chore-

ography. The total score depends on the scores of both the compulsory and the voluntary part.

In the end technology should play a secondary role in both disciplines. In intellectual sports the goal is a performance with a minimum of tools. In problem solving the goal is to learn all those skills and abilities that are needed for problem solving and that are not supported by any technology. A good mathematics education will use a calculator or computer like language education uses dictionaries.

5 Concluding remarks

William Shakespear once said: „*Nothing is either good or bad – only thinking makes it so.*“ Looking at technology for (mathematics) teaching one may change this into: „*Calculators and computers are neither good nor bad teaching tools – only using makes them so.*“ When driving a car, the most important is the driver – the car is secondary. Similarly, when teaching with technology the most important is the teacher – technology comes second. This is another plead for strenghtening teacher preservice and inservice training.

In Austria in 1991 all general high schools (Gymnasien) and technical high schools (Höhere Technische Lehranstalten) were equipped with the DERIVE computer algebra system. In the sequel a research project was conducted which became known as the „Austrian DERIVE Project“. The project involved 800 students who were taught regular mathematics with DERIVE. The results were published in the German language book [Heugl/Klinger/ Lechner 1996] and can also be found in the English language publication [Aspetsberger/Fuchs 1996]. In the academic year 1997/98 the same team carried out the „Austrian TI-92 Project“ with 2,000 students using the TI-92 in regular mathematics classes. The results can be found in the internet at the address <http://www.acdca.ac.at>. Currently another TI-92 project is on involving 3,000 students.

The Austrian and other investigations showed the following: If technology is used properly, it leads to

- more efficient teaching and learning,
- more inpedendent productive student activity,
- more student creativity,
- an increased importance of the teacher.

The teacher has the duty to accompany and direct the students at their partly individual voyage of discovery through the world of mathematics. Consequently the key to the success in teaching mathematics is good teacher training. Not technology changes teaching, but technology is a catalyst for teachers to change their teaching methods and focus on topics and skills, aiming at a better teaching of mathematics.

In case you have questions or suggestions, please write to me at b.kutzler@eunet.at. A regularly updated collection of information about technology in mathematics education can be found at www.kutzler.com.

Special thanks to Vlasta Kokol-Voljc for her valuable feedback and input.

Literatur

K Aspetsberger, K Fuchs, 1996 (guest editors): The International DERIVE Journal Vol 3, No. 1. (The whole issue was dedicated to the Austrian DERIVE project.) Hemel Hempstead:Research Information Ltd., 106 pages, ISSN 1351-0789.

B Buchberger, 1989: *Why Should Students Learn Integration Rules?* RISC-Linz Technical Report no. 89-7.0, Univ of Linz, Austria.

F Demana, B Waits, 1990: *The Role of Technology in Teaching Mathematics*. In: „The Mathematics Teacher“, National Council of Teachers of Mathematics, vol. 82, no. 1.

F Demana, B Waits, 1992: *A Computer for All Students*. In: „The Mathematics Teacher“, National Council of Teachers of Mathematics, vol. 84, no. 2.

F Demana, B Waits, 1994: Graphing Calculator Intensive Calculus: A First Step in Calculus Reform for All Students. In: „Proc. Of the Preparing for New Calculus Conference“ (ed. A. Solow), Mathematical Association of America.

H Freudenthal, 1979: *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Klett Studienbücher.

H Heugl, W Klinger, J Lechner, 1996: *Mathematikunterricht mit Computeralgebra-Systemen (Ein didaktisches Lehrerbuch mit Erfahrungen aus dem österreichischen DERIVE-Projekt)*. Bonn:Addison-Wesley, 307 pages, ISBN 3-8273-1082-2.

H Hischer, 1992 (ed): *Wieviel Termumformung braucht der Mensch?* Proceedings of the 10th Symposium of the Working Group „Mathematics Teaching and Computer Science“ of the Austrian/German Society of Mathematics Education (Gesellschaft für Didaktik der Mathematik e.V.), Sept 25-27, 1992, Wolfenbüttel, Germany, ISBN 3-88120-221-8.

B Kutzler, 1995: *Improving Mathematics Teaching with DERIVE*. Bromley:Chartwell-Bratt, 185 pages, ISBN 0-86238-422-2 (available in the US from west@trib.com, in the UK from info@ChartwellYorke.com).

B Kutzler, 1996: *Introduction to the TI-92 (Handheld Computer Algebra)*. Hagenberg:bk teachware, 184 pages, ISBN 3-901769-02-1.

B Kutzler, 1998a: *Solving Linear Equations with the TI-92 (Experimental Learning / Visualization / Scaffolding Method)*. Hagenberg:bk teachware, 36 pages, ISBN 3-901769-03-X

B Kutzler, 1998b: *Solving Systems of Equations with the TI-92 (Experimental Learning / Visualization / Scaffolding Method)*. Hagenberg:bk teachware, 44 Seiten, ISBN 3-901769-05-6

The last three publications are available in the US from EAI, info@eaiusa.com, in the UK from Chartwell-Yorke, info@ChartwellYorke.com, and worldwide from the publisher bk teachware, info@bk-teachware.com.

El Goniocentro

Julio Fernández Biarge

Profesor Emérito de la Universidad Politécnica de Madrid

Abstract

A concept, the goniocenter, based on a very simple intuition, is defined. Then, in a process having didactic interest, a chain of successive generalizations is introduced, showing an educational example of mathematical construction.

1. Introducción

Partimos de una idea muy intuitiva de la geometría elemental, que nos sugiere la siguiente:

Definición: *Denominaremos goniocentro de una línea poligonal plana cerrada no entrecruzada de n lados, que encierra un polígono convexo, al centro de gravedad de un conjunto de n masas situadas en sus vértices, de magnitud proporcional al ángulo exterior correspondiente a cada vértice.*

Recuérdese que los ángulos exteriores de tal poligonal son suplementarios de los interiores correspondientes y que la suma de todos ellos es 2π . Si se desea, puede suponerse que las medidas de esas masas (en una unidad escogida arbitrariamente) son exactamente las de los ángulos exteriores correspondientes, en radianes (la masa total es, entonces, 2π). Intuitivamente, si se recorre la línea poligonal en sentido positivo, los ángulos exteriores miden las variaciones de dirección que se sufre en cada vértice, hasta completar una vuelta.

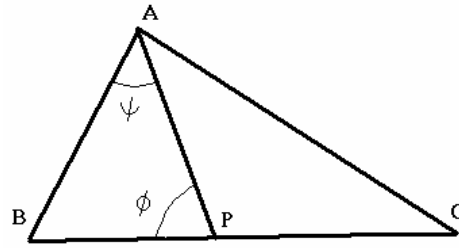
Analíticamente, si $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, ... son los vectores de posición de los vértices y los ángulos interiores del polígono correspondientes son A , B , C , ..., el goniocentro G tiene como vector de posición:

$$\mathbf{g} = [(\pi-A)\mathbf{a} + (\pi-B)\mathbf{b} + (\pi-C)\mathbf{c} + \dots]/(2\pi) \quad (1)$$

Nótese que si en un polígono de n lados se introduce un punto P en uno de sus lados como nuevo vértice y el polígono se considera como uno de $n+1$ lados con el ángulo en P igual a un llano (ángulo exterior nulo), no se altera la posición de su goniocentro, pues la masa introducida es nula. Precisamente en la definición adoptada se han tomado masas proporcionales a los ángulos exteriores del polígono y no a los interiores, pues si hubiésemos tomado éstos, el concepto no gozará de esta propiedad, y sería difícilmente generalizable a otros tipos de líneas.

Podemos enunciar ahora algunas proposiciones, como las siguientes:

1) Si un triángulo ABC se descompone en dos: ABP y ACP , siendo P un punto de BC , y si M es el punto medio de AP , G el goniocentro de ABC y G_b y G_c los goniocentros de ABP y ACP , el cuadrilátero GG_bMG_c es un paralelogramo.



En efecto,

$$\mathbf{g}_b = [(\pi-B)\mathbf{b} + (\pi-\phi)\mathbf{p} + (\pi-\psi)\mathbf{a}]/(2\pi)$$

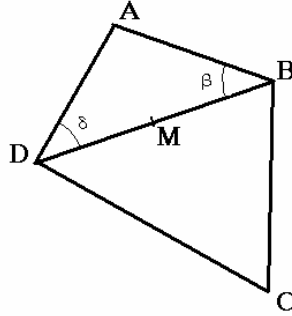
$$\mathbf{g}_c = [(\pi-C)\mathbf{c} + \phi\mathbf{p} + (\pi-A+\psi)\mathbf{a}]/(2\pi)$$

$$\mathbf{m} = (\mathbf{a} + \mathbf{p})/2$$

$$\mathbf{g} = [(\pi-A)\mathbf{a} + (\pi-B)\mathbf{b} + (\pi-C)\mathbf{c}]/(2\pi)$$

y se comprueba que el punto medio de G_bG_c coincide con el punto medio de AP .

2) Si un cuadrilátero, de goniocentro G , se descompone en dos triángulos mediante una diagonal, cuyo punto medio es M , y G_1 y G_2 son los goniocentros de esos triángulos, el cuadrilátero GG_1MG_2 es un paralelogramo.



(Debe advertirse que ese paralelogramo puede ser degenerado si los cuatro vértices están alineados e incluso si G y M coinciden entre sí y con el punto medio de G_b y G_c).

En efecto, si el cuadrilátero es $ABCD$ y la diagonal BD , será

$$\mathbf{m} = (\mathbf{b} + \mathbf{d})/2$$

$$\mathbf{g} = [(\pi - A)\mathbf{a} + (\pi - B)\mathbf{b} + (\pi - C)\mathbf{c} + (\pi - D)\mathbf{d}]/(2\pi)$$

$$\mathbf{g}_1 = [(\pi - A)\mathbf{a} + (\pi - \delta)\mathbf{d} + (\pi - \beta)\mathbf{b}]/(2\pi)$$

$$\mathbf{g}_2 = [(\pi - C)\mathbf{c} + (\pi - D + \delta)\mathbf{d} + (\pi - B + \beta)\mathbf{b}]/(2\pi)$$

y es inmediata la comprobación de que el punto medio del segmento G_1G_2 coincide con el punto medio de GM .

3) El goniocentro de un triángulo rectángulo está situado sobre una paralela a la hipotenusa trazada a una distancia de ella igual a $1/4$ de su altura. Más en general: Si un triángulo tiene un ángulo de π/m , su goniocentro está situado sobre una paralela al lado opuesto trazada a una distancia igual a $(m-1)/(2m)$.

En efecto, si $A = \pi/m$, la masa atribuida a A será $\pi(m-1)/m$ y las masas atribuidas a los otros vértices, $\pi-B$ y $\pi-C$ se podrán sustituir por una sola igual a su suma

$$2\pi - (B + C) = \pi + A = \pi(m+1)/m$$

situada en el centro de gravedad de ambas, P (perteneciente a BC). El goniocentro estará sobre AP, a una distancia de P igual a $AP(m-1)/(2m)$, de donde se deduce la propiedad.

2. Generalizaciones

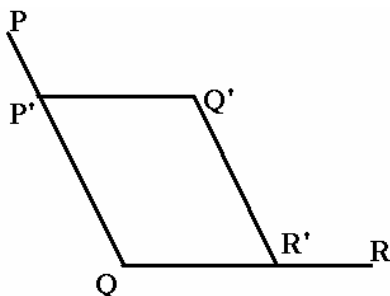
Por encima del interés que el concepto introducido pueda tener en las aplicaciones, vamos a centrarnos en el interés didáctico que encierra el proceso de sucesivas generalizaciones a que vamos a someterlo, mostrando las dificultades que se encuentran y las excepciones que es preciso considerar.

En primer lugar, es fácil generalizar el concepto anterior prescindiendo de la condición de que la línea poligonal encierre un polígono convexo. El goniocentro será, como antes, el centro de gravedad de un sistema de masas proporcionales a los ángulos exteriores, que miden los cambios de dirección que se producen en los vértices al recorrer la línea. Sigue teniendo validez la expresión (1), pero ahora debe tenerse en cuenta el signo de estos cambios, o lo que es lo mismo, pueden asignarse masas negativas a algunos vértices. Se podría escribir

$$\mathbf{g} = [\Delta A \mathbf{a} + \Delta B \mathbf{b} + \Delta C \mathbf{c} + \dots]/(2\pi) \quad (2)$$

donde ΔA , ΔB , ΔC , ...son los citados cambios de dirección (en radianes, con signo). Con esta generalización, podemos enunciar esta curiosa proposición:

4) *Si una línea poligonal no entrecruzada de n lados, ...PQR..., se sustituye por otra de $n+2$ lados ...PP'Q'R'R..., de modo que P'QR'Q' sea un paralelogramo, el goniocentro de la segunda es el mismo que el de la primera.*

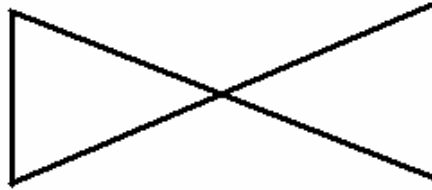


En efecto, si la masa asignada a Q es m , las que intervienen en la nueva línea en P', Q' y R' serán, respectivamente, m , $-m$ y m . con una masa total m , que puede suponerse concentrada en el centro de gravedad de las tres, que es Q.

¿Puede generalizarse la definición del goniocentro al caso de que la poligonal sea entrecruzada? Para hacerlo, habría que mantener, desde luego, la interpretación de los ángulos exteriores como medidas de los cambios de dirección, en cada vértice, en un recorrido de la línea, teniendo en cuenta el sentido. No obstante, ahora ha de tenerse en cuenta que la línea entrecruzada puede “dar varias vueltas”, con lo que la expresión (2) debería cambiarse por

$$\mathbf{g} = [\Delta A \mathbf{a} + \Delta B \mathbf{b} + \Delta C \mathbf{c} + \dots]/(2\pi m) \quad (3)$$

donde m es el citado número de vueltas o *género* de la línea, lo que equivale a poner $m = (\Delta A + \Delta B + \Delta C + \dots)/(2\pi)$. Los incrementos ΔA , ΔB , ΔC , ... deben tomarse con su signo (supuesta previamente una orientación), pero con valor absoluto siempre inferior a π . Lo malo es que en ciertas líneas m puede ser cero, por lo que hay que excluir ese caso (como el de la figura).



Si se admiten las poligonales entrecruzadas, se puede tomar la definición dada por [3] *excluyendo las de género nulo*.

También hay que excluir el caso de poligonales con dos lados consecutivos situados sobre la misma recta pero en sentido contrario, pues si el vértice que los une es M, no se puede determinar si $\Delta M = \pi$ o $\Delta M = -\pi$ (en ninguno de ambos casos el valor absoluto de ΔM es inferior a π , que es el criterio que se había adoptado para evitar ambigüedades).

La intuición que condujo al concepto anterior, se generaliza fácilmente a las curvas.

Definición: Se llama goniocentro de una curva cerrada con curvatura finita en todos sus puntos al centro de gravedad de una masa distribuida a lo largo de la curva con densidad lineal en cada punto proporcional a la curvatura en el mismo.

Si la curva no es convexa, debe considerarse la curvatura con signo y, por tanto, densidades lineales de masa negativas donde corresponda. La curva puede ser entrecruzada, pero si es de género nulo, o sea si la masa total asignada es nula, no existe el centro de gravedad y tampoco puede definirse el goniocentro.

Como antes, puede suponerse que elegida una determinada unidad de medida para la masa, la de un elemento de arco con curvatura κ , de longitud ds , sea precisamente $d\theta = \kappa ds$, o sea el ángulo elemental formado por las tangentes en los extremos (en radianes) (Entonces, la masa total distribuida en la curva es $2\pi m$, siendo m el género o “número de vueltas”).

Analíticamente, dada una curva cerrada expresada paramétricamente mediante la función periódica (de clase C_2 y periodo $L =$ longitud total de la curva cerrada) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$, siendo s el parámetro *longitud del arco* y $\kappa(s)$ su curvatura en función de s , el goniocentro $\mathbf{g}$ de la misma vendrá dado por

$$\mathbf{g} = \int \mathbf{x}(s)\kappa(s)ds / \int \kappa(s)ds = \int \mathbf{x}(s)\kappa(s)ds / (2\pi m) \quad (4)$$

donde las integrales están extendidas a un periodo y m es el género o “número de vueltas de la curva”. Se debe excluir el caso $m = 0$.

La definición dada para polígonos y esta última dada para curvas, pueden reunirse en una sola, mediante la generalización de Stieltjes:

$$\mathbf{g} = \int \mathbf{x}(s)d\Theta(s) / \int d\Theta(s) = \int \mathbf{x}(s)d\Theta(s) / (2\pi m) \quad (5)$$

donde $\Theta(s)$ es la función de distribución que expresa el ángulo formado con la horizontal por la tangente a la línea en el punto de parámetro s . Esta función es escalonada en el caso del polígono y continua en el de las curvas consideradas antes.

Esta generalización se aplica inmediatamente a líneas cerradas compuestas de arcos con curvatura finita y segmentos rectilíneos empalmados en puntos angulosos. La fórmula (5) incluye como caso particular a todas las anteriores.

Podemos preguntar ahora: ¿Es posible una generalización de este concepto a las superficies poliédricas en el espacio de tres dimensiones? ¿Qué concepto análogo al de ángulo exterior debemos considerar para cada vértice de la superficie poliédrica?

Consideraremos las superficies de los poliedros convexos. Para cada vértice A, los planos de las n_A caras que concurren en él, forman un ángulo poliedro en el que la suma σ de sus caras no puede exceder de 2π . Llamaremos *defecto angular* del vértice A del poliedro al valor de $2\pi - \sigma$ y lo designaremos con ΔA . Si consideramos el ángulo poliedro polar del anterior, cuyos diedros son suplementarios de las caras del anterior, la suma de esos diedros será $n_A\pi - \sigma$ y su exceso esférico, que es el valor de su ángulo sólido, será

$$n_A\pi - \sigma - (n_A - 2)\pi = \Delta A$$

Como en un poliedro convexo, los ángulos poliedros polares correspondientes a todos sus vértices llenan el espacio (ángulo sólido total 4π), podemos afirmar que *la suma de los defectos angulares de todos los vértices de un poliedro convexo es 4π* .

Esto hace que el mencionado *defecto angular* sea la generalización adecuada del ángulo exterior de los polígonos (lo que resulta más intuitivo si ese ángulo exterior se considera como ángulo formado por las perpendiculares a los lados del ángulo trazadas desde un punto). Con ello, podemos dar la definición de goniocentro generalizada en la forma siguiente.

Definición: Llamaremos goniocentro de la superficie de un poliedro convexo con n vértices al centro de gravedad de un conjunto de n masas situadas en ellos, de magnitud proporcional al defecto angular de cada uno.

Analíticamente

$$\mathbf{g} = [\Delta A \mathbf{a} + \Delta B \mathbf{b} + \Delta C \mathbf{c} + \dots]/(4\pi) \quad (6)$$

Nótese que el goniocentro de una superficie poliédrica no se altera si se fracciona alguna de sus caras mediante diagonales o si se introducen nuevos vértices y aristas situados sobre la superficie, fraccionando así sus caras, pues los defectos angulares de los nuevos vértices introducidos son nulos.

Nuevamente podríamos intentar sucesivas generalizaciones de este concepto, para extenderlo a otros tipos de superficies poliédricas, lo que nos llevaría a estudiar detenidamente la clasificación de éstas, pues por ejemplo en el poliedro de la figura, los defectos angulares de algunos de los vértices son negativos y la suma de todos ellos, lejos de ser 4π , es nula, con lo que no se puede determinar el centro de gravedad necesario para definir el goniocentro.



Los estudiantes de geometría diferencial encontrarán interesante tratar de extender el concepto a determinados tipos de superficies curvas.

Desigualdades para funciones f que satisfacen la ecuación funcional $f(x-y)=g(f(x),f(y))$

**Juan C. Cortés López, Gema Calbo Sanjuán
y Fernando López Pelayo**

Escuela Politécnica Superior de Albacete
Universidad de Castilla-La Mancha
Campus Universitario s/n. 02071. Albacete.
{jccortes, fpelayo}@info-ab.uclm.es

Resumen

In this article we provide a method in order to generate some numeric inequalities from a special sort of functions f which satisfy identities containing the terms $f(x-y)$, $f(x)$ and $f(y)$, like exponential and trigonometric functions.

1 Introducción

En la misma línea del trabajo [1] dónde se proporcionaban desigualdades en dos variables, en el presente artículo analizaremos un método para generar desigualdades válidas sobre intervalos de longitud finita o infinita, a partir de funciones f que satisfacen una ecuación funcional del tipo $f(x-y)=g(f(x),f(y))$. Las funciones exponencial, seno, coseno, tangente, cotangente son ejemplos de este tipo de funciones.

2 Un primer ejemplo con la función exponencial

Comenzaremos este apartado con un ejemplo sencillo a partir del cual introduciremos las ideas que posteriormente se desarrollarán.

Ejemplo: *Demuéstrese que dados once números reales $\{y_i\}_{i=1}^{11}$ cualesquiera en el intervalo $I = [1, 22000]$, siempre es posible elegir dos de ellos, digamos α y β , de modo que*

$$1 < \frac{\alpha}{\beta} < 3 \quad (1)$$

Podemos enfocar la resolución del problema de manera constructiva, intentando encajar once números distintos en el intervalo I de manera que no se cumpla la condición (1), y viendo que ello es imposible, lo cual respondería al problema. De esta forma, introducimos de forma natural las progresiones geométricas. En efecto, empezando por el extremo inferior del intervalo I construimos la sucesión *mínima* que podemos proponer, es decir, aquella formada por números $x < y$, de modo que $y = 3 \cdot x$:

$$\{y_i\} = \{1, 3, 3^2 = 9, 3^3 = 27, 3^4 = 81, 3^5 = 243, 3^6 = 729, \dots, 3^9 = 19683\}$$

se observa que la inclusión de un undécimo número en la familia anterior, violaría las condiciones del problema, pues $3^{10} = 59049 > 22000$.

Sin embargo, observemos que el resultado es también consecuencia de las propiedades que posee la función exponencial. En efecto, dados los números $\{y_i\}_{i=1}^{11}$ con $y_i \in I = [1, 22000]$ y debido a la sobreyectividad de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo $I = [1, 22000]$ podemos asegurar

$$\exists x_i \in [0, 10] \quad \text{tales que} \quad e^{x_i} = y_i \quad \forall i : 1 \leq i \leq 11$$

Obsérvese que $e^{10} \cong 22026 > 22000$. Dividamos ahora el intervalo $[0, 10]$ en diez partes iguales, de longitud 1, entonces es seguro que al menos dos de los números $x_1, x_2, \dots, x_{11}$, digamos a y b ($a > b$), cumplen que

$$0 < a - b < 1$$

(véase figura 1) entonces por ser la función exponencial estrictamente creciente en todo $\mathbb{R}$ se cumplirá

$$1 = e^0 < e^{a-b} < e^1$$

o equivalentemente

$$1 < \frac{e^a}{e^b} < e$$

Obsérvese que $e \cong 2.7172 < 3$, entonces tomando $\alpha = e^a, \beta = e^b$ se concluye la demostración.

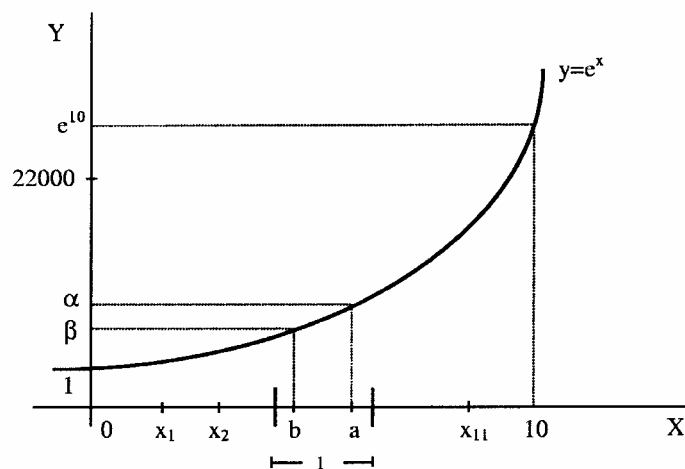


Figura 1: Resolución del problema mediante la exponencial.

Puede comprobarse que también se puede responder al problema tomando $f(x) = 4^x$ sobre el intervalo $[0, 7.5]$.

Y más generalmente, por este método se puede demostrar que dados n números reales $\{y_i\}_{i=1}^n$ cualesquiera en el intervalo $I = [0, d]$, siempre es posible elegir dos de ellos, digamos α y β , de manera que

$$1 < \frac{\alpha}{\beta} < r$$

naturalmente, siempre que $d < r^{n-1}$.

Para demostrar esto siguiendo la misma técnica del ejemplo, podemos elegir cualquier función exponencial $f(x) = c^x$ aplicada sobre el intervalo

$x \in [0, s]$ con tal que c y s estén elegidos satisfaciendo la condición

$$d < c^s < r^{n-1}$$

tal y como parece intuitivo.

Obsérvese sin embargo, que gran parte del peso de la demostración se apoya en la propiedad $c^{a-b} = \frac{c^a}{c^b}$. En los próximos apartados veremos cómo puede aprovecharse este razonamiento para generar desigualdades sobre funciones, como la función seno o tangente, que satisfacen una propiedad del tipo anterior.

3 Desigualdades en intervalos acotados a partir de la función seno

Consideramos ahora la función seno en un intervalo donde sea estrictamente creciente, por ejemplo, $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Así, elegidos $n + 1$ números reales cualesquiera $\{y_i\}_{i=1}^{n+1}$ en el intervalo $] -1, 1[$, por la sobreyectividad de la función seno se cumple que

$$\exists x_i \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{tales que} \quad \sin(x_i) = y_i \quad \forall i : 1 \leq i \leq n + 1$$

Si dividimos el intervalo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ en n partes iguales, podemos garantizar que al menos dos valores x_a y x_b pertenecientes a la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ cumplen que

$$0 \leq x_a - x_b \leq \frac{\pi}{n}$$

y por ser la función seno creciente en $]0, \frac{\pi}{n}[\subseteq] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \forall n \geq 2$

$$0 \leq \sin(x_a - x_b) \leq \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

y teniendo en cuenta la fórmula del seno de la diferencia de ángulos

$$\begin{aligned} \sin(x_a - x_b) &= \sin(x_a) \cdot \cos(x_b) - \cos(x_a) \cdot \sin(x_b) = \\ &= \sin(x_a) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(x_b)} - \sqrt{1 - \sin^2(x_a)} \cdot \sin(x_b) \end{aligned}$$

la última desigualdad doble se escribe como

$$0 \leq \sin(x_a) \cdot \sqrt{1 - \sin^2(x_b)} - \sqrt{1 - \sin^2(x_a)} \cdot \sin(x_b) \leq \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

De esta manera, como $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$, en particular podemos asegurar que dados siete números reales cualesquiera en el intervalo $] -1, 1[$, existen al menos dos, digamos α y β , de modo que

$$0 \leq \alpha \cdot \sqrt{1 - \beta^2} - \sqrt{1 - \alpha^2} \cdot \beta \leq \frac{1}{2} \quad (2)$$

siendo $\alpha = \sin(x_a)$ y $\beta = \sin(x_b)$.

4 Desigualdades en intervalos no acotados a partir de la función tangente

Consideramos ahora la función tangente en el intervalo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donde es biyectiva (y en particular sobreyectiva) por ser estrictamente creciente. Entonces, elegidos $n + 1$ números reales cualesquiera $\{y_i\}_{i=1}^{n+1}$, por ser la función tangente sobreyectiva se cumple que para cada y_i con $1 \leq i \leq n + 1$ existirá un x_i de modo que

$$\tan(x_i) = y_i, \quad -\frac{\pi}{2} < x_i < \frac{\pi}{2} \quad \forall i : 1 \leq i \leq n + 1$$

Si ahora dividimos el intervalo $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de longitud π en n partes o subintervalos iguales, podemos garantizar que al menos dos valores x_a y x_b pertenecientes a la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{n+1}$ están dentro de uno de estos subintervalos de longitud $\frac{\pi}{n}$, es decir

$$0 \leq x_a - x_b \leq \frac{\pi}{n}$$

y por ser la función tangente creciente en $]0, \frac{\pi}{n}[\subseteq] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \forall n \geq 2$

$$0 \leq \tan(x_a - x_b) \leq \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

esto es, aplicando la fórmula de la tangente de la diferencia de ángulos

$$0 = \tan 0 \leq \frac{\tan(x_a) - \tan(x_b)}{1 + \tan(x_a) \cdot \tan(x_b)} \leq \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (3)$$

De esta forma, como $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, en particular podemos asegurar que dados siete números reales cualesquiera, existen al menos dos, digamos α y β , de modo que

$$0 \leq \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha \cdot \beta} \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4)$$

Obsérvese que tomando límites en cuando $n \rightarrow \infty$ en (3), como $\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$, el resultado es muy intuitivo.

Para terminar conviene subrayar que mientras la desigualdad (2) se da sobre un intervalo acotado, el $] -1, 1[$, la (4) se establece sobre un intervalo infinito.

Referencias

- [1] Juan C. Cortés López, *Algunas aplicaciones de un teorema de Peano*, Boletín de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas, núm. 48, págs 59-65.

Una reflexión en torno a la ecuación de segundo grado

J.M. Aroca

Facultad de Ciencias de la Univ. de Valladolid
Departamento de Álgebra y Geometría
aroca@cpd.uva.es

Abstract

The author analyzes in this note the abandonment of Reasoning in Mathematics Teaching observed in modern curricula. A return to classic curricula is proposed as an alternative to avoid this problem.

Tuve ocasión de asistir al nombramiento de Elon Lima como Profesor de honor de la Universidad Católica de Lima. En una conferencia anterior al acto titulada: *La formación del profesor de matemáticas*, Elon Lima ofreció una serie de ejemplos, con la idea de demostrar como la aplicación automática de una fórmula podía ser suplantada por un razonamiento más elemental que la fórmula usada. Su idea no era abogar por la supresión de las fórmulas, sino mostrar la conveniencia de complementarlas con razonamientos. De la magnífica conferencia del Profesor Lima quiero recoger aquí el ejemplo que estimo más representativo.

Supongamos que se plantea el problema siguiente: *Dados dos números reales a y b , construir otros dos números reales x e y , tales que:*

$$\begin{cases} x + y = a \\ x \cdot y = b \end{cases}$$

La mayoría de los profesores de matemáticas, deducirían que los números buscados son las raíces de la ecuación de segundo grado

$$z^2 - az + b = 0$$

y mediante la formula correspondiente resolverían la ecuación, si tiene discriminante no negativo, y dirían que el problema no tiene solución si el discriminante es negativo. As, si $a = 2, b = 5$, la conclusion de la aplicación de la formula sería que el problema no tiene solución. Ahora bien podemos enfocar el problema de otra forma:

- Como el producto de los números buscados es positivo, ambos son positivos o negativos simultáneamente
- Como la suma es positiva, ambos son positivos
- Como la suma es dos, ambos son menores o iguales a dos
- En consecuencia su producto no puede ser cinco

El ejemplo me pareció muy interesante y lo comenté al siguiente día con varios colegas entre los que se encontraba J. C. Yoccoz. Este reconoció la belleza del ejemplo, pero puntualizó que la fórmula es imprescindible porque el método de Lima no es valido si por ejemplo $a = 4, b = 5$. Y, efectivamente, no es válido, a menos que se modifique ligeramente:

- Como el producto de los números buscados es positivo, ambos son positivos o negativos simultáneamente
- Como la suma es positiva, ambos son positivos
- Como la suma es 4, uno de ellos es $2 + r$ y el otro $2 - r$
- En consecuencia su producto es $4 - r^2$, que no puede ser igual a 5, para ningún valor real de r

Claro está que la aplicación de este método en el caso general, dá precisamente la fórmula, aunque su obtención se complica con la casuística de los signos de a y b . Pero, en todo caso, el ejemplo utiliza varios hechos conocidos por

el alumno que encajan de modo admirable, dando lugar a un razonamiento bonito.

La conferencia toda de Elon Lima, estaba llena de atractivo, y oyéndola no se podía menos que lamentar la pérdida, cada vez más acusada, del razonamiento en la enseñanza de las Matemáticas.

En una ocasión y ante una consulta sobre planes de estudios, precedida de la literatura usual sobre el incremento progresivo del rechazo de la Matemática, que sólo podría ser corregido mediante nuevos y maravillosos planes, me limite a responder:

No es necesario experimentar novedades, si el rechazo a la matemática es mayor hoy que ayer, volvamos al plan de ayer, que obviamente suscitaba menos rechazo, y por tanto era mejor que el actual.

La respuesta era una simplificación complementemente consciente. Naturalmente los contenidos de matemáticas no son la única causa del rechazo de las mismas, ni creo que sea tampoco la más importante, pero es la más fácil de atacar. Ahora que parece que de nuevo vamos a buscar la piedra filosofal en materia curricular, quizás debiéramos recordar que las matemáticas ante todo son bonitas, y obrar en consecuencia.

Una demostración breve del Teorema de Tales

Pedro Pescador Díaz

I.E.S. "Juana de Pimentel"

Abstract

In this article a brief proof of Tales' Theorem is given. It uses elemental proprieties of area and it also tries to avoid any matter related to irrational numbers.

1. Teorema de Tales

Si dos triángulos T y T' son semejantes entonces se puede construir el paralelogramo con estos triángulos colocados tal como se indica en la figura 1.

Observamos que por ser los tres triángulos que hay sobre la diagonal respectivamente iguales a los tres que hay por debajo, la superficie de los paralelogramos que quedan a ambos lados de ésta tienen igual área.

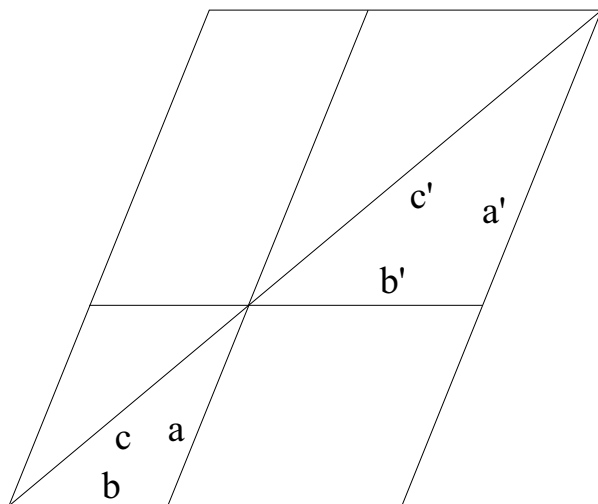


Fig. 1

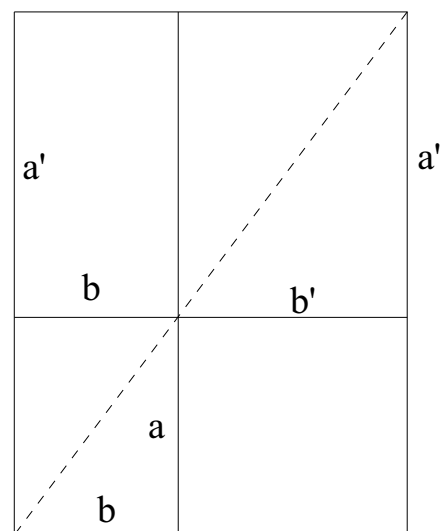


Fig. 2

Consideremos ahora la transformación que vemos en el paralelogramo que forman las varillas del pantógrafo, es decir la que conserva las longitudes de los lados del paralelogramo pero permite cambiar el ángulo que forman dos de sus lados. Esta transformación además convierte superficies iguales en superficies iguales. Así, por ser iguales las áreas de los paralelogramos mencionados en la figura 1, lo serán también las áreas de los rectángulos en los que se transforman en la figura 2, es decir,

$$a' b = a b'$$

de donde

$$a'/a = b'/b$$

Del mismo modo $b'c' = b'c$ y por consiguiente $b'/b = c'/c$. El recíproco se halla en [1].

2. En el aula

De cara a su explicación en el aula propongo:

1º Si no se creen que la transformación convierte superficies iguales en otras también iguales entre sí y distintas de las anteriores en general, podéis proponerles que llenen los paralelogramos con baldosas rombo adecuadas en la figura 1 y cuadradas o rectangulares en la figura 2. Eso les puede llevar a la idea de que si las m baldosas rombos con las que se construye un objeto T se transforman todas de igual modo en rectángulos para construir, con el mismo número m el objeto transformado y esto ocurre con todos los objetos, sea por ejemplo n para T' , entonces la relación entre las superficies en la figura 1 será m/n e igual en la figura 2.

2ª Si siguen sin creer que la transformación conserva la superficie relativa entonces puede hacerse el siguiente razonamiento: *“La transformación convierte a los triángulos iguales en regiones iguales de modo que, sobre la figura 2, por ser las tres regiones que están a la izquierda, respectivamente iguales a las que están a la derecha, resulta que las áreas de los rectángulos que hay a la izquierda y derecha ...”*. Obsérvese que no se necesita saber si esas regiones son triángulos o no. Aunque en la figura 2 la cruz se halla sobre la diagonal, tampoco se hace uso de ello.

3º Que hagan un modelo, con varillas de madera el marco y con gomas la cruz y la diagonal. ¿ Se desplaza la cruz siempre sobre el mismo punto de la diagonal? Quien vea que la diagonal de la primera figura se transforma en la diagonal de la segunda podrá hacer su propia versión de ésta demostración.

Referencias bibliográficas

- [1] MORENO CASTILLO, R. (1997): *Una demostración del teorema de Tales*. Bol. de la Soc. “Puig Adam” N° 45.
- [2] PESCADOR DÍAZ, P. (1997): *Demostración del teorema de Tales, por métodos elementales*. Bol. de la Soc. “Puig Adam” N° 47.
- [3] PESCADOR DÍAZ, P. (1998): Superficies y teorema de Tales. Bol. de la Soc. “Puig Adam” N° 50.
- [4] GARCÍA SÚAREZ, J. A. (1999): El teorema de Pitágoras en la semejanza de triángulos”. Bol. de la Soc. “Puig Adam” N° 52.
- [5] GARCÍA SÚAREZ, J. A. (2001): Área, proporcionalidad y semejanza de triángulos. Bol. de la Soc. “Puig Adam” N° 59.

Obtención del Triángulo de Pascal a partir del cubo n -dimensional

Sergio Falcón Santana

Departamento de Matemáticas
Universidad de Las Palmas de G.C.
e-mail: `sfalcon@dma.ulpgc.es`

Resumen

In this paper we establish a relation between Geometry and the Combinatorial Numbers from which we will obtain the numbers that form the call Pascal triangle. In order to obtain it, the n -dimensional cube is defined in the first place in which the different linear varieties will be obtained that contain. From the number of these linear varieties, the Pascal triangle will be deduced. Like annexed to this work and consequences of the previous numbers of linear varieties, two classical formulí of Geometry are deduced.

1 Dos definiciones de cubo n -dimensional

1. Sea $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ una base ortogonal del espacio euclídeo $\mathcal{R}^n$ con la condición de que $|\vec{u}_i| = k$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

Se llama cubo n -dimensional en $\mathcal{R}^n$ al paralelotopo construido sobre B . Es decir, es el conjunto de puntos determinados por los extremos de los vectores $\vec{x} = \sum_{i=1}^n a_i \vec{u}_i$ con la condición de que $0 \leq a_i \leq 1$.

2. Se llama cubo n -dimensional al conjunto de puntos $P = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ tales que $0 \leq x_i \leq k$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Ambas definiciones son equivalentes, puesto que si en la primera de ellas se hace que cada uno de los parámetros a_i sólo tome los valores 0 ó 1, se obtienen los vectores cuyos extremos son los puntos de la segunda definición.

2 Variedades lineales en un cubo n -dimensional

1. Es fácil comprobar que, si en la segunda definición anterior se efectúan todas las combinaciones posibles para $x_i = 0$, $x_j = k$ (constante), se obtienen 2^n puntos llamados *vértices* o variedades lineales de dimensión cero los cuales representaremos por L_0 .

El número de elementos L_0 contenidos en el cubo n -dimensional es $n(L_0) = 2^n$.

2. Llamamos *arista* o variedad lineal de dimensión uno a todo espacio euclídeo determinado por dos (2^1) vértices que tienen iguales $n - 1$ coordenadas. También se puede definir una arista como el segmento de recta que une dos de estos puntos.

Se representa por L_1 y su número es $n(L_1) = 2^{n-1} \binom{n}{1} = 2^{n-1}n$

3. Llamamos *cara* del cubo o variedad lineal de dimensión dos (L_2) a todo espacio euclídeo determinado por cuatro (2^2) vértices que tienen iguales $n - 2$ coordenadas. También se puede definir como el plano comprendido entre cuatro de estos puntos.

Su número es $n(L_2) = 2^{n-2} \binom{n}{2} = 2^{n-2}n(n-1)/2!$

4. Llamamos *cubo tridimensional* o variedad lineal de dimensión tres (L_3) a todo espacio euclídeo determinado por ocho (2^3) vértices que tienen iguales $n - 3$ coordenadas (o al espacio comprendido entre ocho de estos puntos).

Su número es $n(L_3) = 2^{n-3} \binom{n}{3} = 2^{n-3}n(n-1)(n-2)/3!$

5. Llamamos variedad lineal L_4 a todo espacio euclídeo determinado por dieciséis (2^4) vértices que tienen iguales $n - 4$ coordenadas (o al espacio comprendido entre ocho de estos puntos).

Su número es $n(L_4) = 2^{n-4} \binom{n}{4} = 2^{n-4}n(n-1)(n-2)(n-4)/4!$

6. ... Y, en general, si llamamos variedad lineal L_r a todo espacio euclídeo determinado por los vértices que tienen iguales $n - r$ coordenadas, se encuentra que $n(L_r) = 2^{n-r} \binom{n}{r}$

En resumen, y para las primeras variedades lineales, se tiene el siguiente cuadro:

Dimensión del cubo dim	Variedades lineales					
	L_0	L_1	L_2	L_3	L_4	L_5
0	1					
1	2	1				
2	4	4	1			
3	8	12	6	1		
4	16	32	24	8	1	
5	32	80	80	40	10	1

Los elementos del conjunto $L_0 = \{1, 2, 4, 8, \dots\} = \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots\}$ los llamaremos elementos base.

En el cuadro anterior, consideremos los conjuntos diagonales

$$D_0 = \{1, 1, 1, \dots\} = 2^0 \{1, 1, 1, 1, \dots\}.$$

$$D_1 = \{2, 4, 6, 8, \dots\} = 2^1 \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

$$D_2 = \{4, 12, 24, 40, \dots\} = 2^2 \{1, 3, 6, 10, 15, \dots\}$$

$$D_3 = \{8, 32, 80, \dots\} = 2^3 \{1, 4, 10, \dots\}, \text{ etc.}$$

Colocando los nuevos conjuntos obtenidos en sus lugares respectivos para obtener la tabla anterior, se obtiene esta otra tabla:

Dim						
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

O, en forma clásica,

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & 1 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & 1 \\
 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & 1
 \end{array}$$

el cual es el archiconocido *Triángulo de Pascal*

3 Anexo

Aunque sin relación con la obtención del triángulo de Pascal que hemos indicado, pero sí haciendo uso de los números obtenidos en el desarrollo anterior, es curioso destacar dos relaciones que se verifican en un cubo n -dimensional y que dan origen a dos fórmulas clásicas de Geometría.

1. *Volumen del cubo.*

A partir de la primera definición de cubo indicada al principio de este trabajo, llamamos volumen del cubo n -dimensional al valor

$$vol(C_n) = \prod_{i=1}^n |\vec{u}_i| = k^n$$

Como casos particulares, de esta fórmula se obtiene:

$vol(C_1) = k$: longitud del segmento

$vol(C_2) = k^2$: área del cuadrado

$vol(C_3) = k^3$: volumen del cubo tridimensional

2. *Fórmula de Euler para un cubo n -dimensional.*

Es evidente que

$$2^n + 2^{n-3}n(n-1) - 2^{n-1}n = 2^{n-3}(2^3 + n(n-1) - 2^2n) = 2^{n-3}(n^2 - 5n + 8)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el desarrollo anterior, es $n(L_0) = 2^n$, $n(L_1) = 2^{n-1}n$ y, finalmente, $n(L_2) = 2^{n-2}n(n-1)/2 = 2^{n-3}n(n-1)$ por lo que, sustituyendo estos valores en la igualdad anterior, resulta la fórmula de Euler para cubos n -dimensionales (y en general, para poliedros):

$$n(L_2) + n(L_0) = n(L_1) + 2^{n-3}(n^2 - 5n + 8)$$

En el caso del espacio tridimensional ($n = 3$), se obtiene la conocida fórmula de Euler:

$$n(caras) + n(vértices) = n(aristas) + 2$$

Un análisis de los “Elementos de aritmética, álgebra y geometría” de Juan Justo García Rodríguez

J. Cabezas Corchero

IES Rodríguez-Moñino (Badajoz)
justocabezas@terra.es

F. Moreno Soto

Dpto. Matemáticas, Univ. de Extremadura
pacomoreno@unex.es

Abstract

This paper evaluates the changes experienced by García-Rodríguez’s work entitled “Elementos de Aritmética, Álgebra y Geometría”. We focused on the historical introduction of the above-mentioned work. Both, quantitative and qualitative computer-based analyses of the historical introduction have been performed. It is concluded that García-Rodríguez work shows a strong pedagogic component, higher than that showed by other mathematical publications from the 18th century.

1 Breve presentación biográfica

Juan Justo García Rodríguez fue el autor de uno de los textos de matemáticas de mayor proyección en la matemática de la universidad española de los siglos XVIII y XIX. Nació en Zafra (Badajoz) en 1752. Su primera formación fue la de presbítero, pero su labor principal la desarrolló como catedrático de álgebra de la Universidad de Salamanca, cátedra a la que accedió en 1774 y obtuvo a perpetuidad tres años después. Durante 1820 y 1821 fue diputado a Cortes por la provincia de Extremadura. Fue impurificado en 1825 y se le retiraron las rentas de jubilación. Falleció en Madrid, en algún día del primer trimestre de 1830.

Además de su texto, al que nos referiremos inmediatamente, publicó en 1818 y 1819 unos *Nuevos elementos de geografía general* en dos volúmenes, impresos en Salamanca. En 1821 aparecen en Madrid los *Elementos de la verdadera lógica*, compendio de *Los elementos de ideología* del senador Destutt-Tracy. En esta obra se recogen las doctrinas epistemológicas y metodológicas que condicionaron el Plan de estudios de 1807 de la Facultad de Filosofía y que presentó la Universidad en 1813 (García Pérez, 1996).

Su presencia en la Universidad salmantina es relevante en muchos campos a lo largo de los más de cincuenta años en que permaneció como profesor en activo en ella. Destaquemos, por ejemplo, su papel decisivo en la gestación y constitución del Colegio de Filosofía entre los años 1788 y 1792.

Pero su aportación fundamental a la universidad y a la matemática española es su libro de texto *Elementos de aritmética, álgebra y geometría*, que terminó en 1779 y publicó en 1782 y que fue texto único en todas las universidades. El libro tuvo sucesivas ediciones: la segunda en 1794 y la tercera en 1801, ambas en Salamanca. La siguiente edición cambia el título por el de *Principios de aritmética y geometría* y el formato, que pasa a ser en dos tomos. La última edición ve la luz en Madrid, en 1821 el primer tomo y en 1822 el segundo.

2 Los Elementos de aritmética, álgebra y geometría

En 1974 el profesor Norberto Cuesta Dutari, por entonces catedrático de Análisis matemático de la Universidad de Salamanca, realiza un exhaustivo estudio sobre la vida y obra del matemático que nos ocupa, que fue recogido en *El maestro Juan Justo García*. Desde ese momento dicha obra pasa a ser imprescindible para conocer la personalidad tanto desde el punto de vista humano como desde el científico de nuestro profesor.

Queremos resaltar tres aspectos del texto de García Rodríguez. En primer lugar asumimos la idea de Cuesta Dutari de que la principal aportación del erudito extremeño a la matemática en España fue fundamentalmente la introducción del cálculo infinitesimal.

En segundo lugar creemos que un aspecto de la obra que merece destacarse es la presencia de argumentos educacionales en la misma, poco frecuentes en la época; el autor cuida los aspectos metodológicos al escribir los *Elementos*. No es

pues, un libro de matemáticas, sino un texto para aprender matemáticas. Así, en el prólogo de las tercera y cuarta ediciones indica que «Con efecto, son cosas muy diferentes el saber y el enseñar debidamente lo que se sabe» y, más adelante, critica a los autores oscuros y rigoristas, de «explicaciones largas y minuciosas» de modo tajante: «Ninguno de estos Autores han enseñado las material de que tratan» (*sic*).

Finalmente digamos que la obra, de cuya parte estrictamente matemática Cuesta indica que se inspira en distintas fuentes (Sauri, Gherli y Riccati), comienza con una introducción histórica cuidadosa, inusual para el tiempo y lugar en la que fue escrita, lo que quizás constituya el aspecto más interesante del texto. Dicha introducción es considerada por muchos estudiosos como una joya de las matemáticas de esa época; nosotros queremos ver, además, que con ella se vuelve a poner de manifiesto la preocupación de este autor por la componente didáctica de las matemáticas. La introducción sufrió cambios a lo largo de las sucesivas ediciones. Pasamos a comentarla más detalladamente.

3 Análisis de la introducción histórica de los “Elementos de aritmética, álgebra y geometría”

Intentaremos realizar un análisis de la evolución de la introducción histórica primero cuantitativo, con las técnicas de recuento y de edición que proporcionan hoy las nuevas tecnologías, y luego cualitativo.

Comencemos diciendo que la introducción histórica está dividida en tres partes: aritmética, álgebra y geometría. En cada una de ellas se relata la historia de estos campos de la matemática desde sus orígenes remotos hasta las fechas en las que fueron escritas las cinco ediciones de la mencionada obra. Creemos que la evolución delata que el autor se informó en diversas fuentes, según el tiempo.

3.1 Cuantitativo

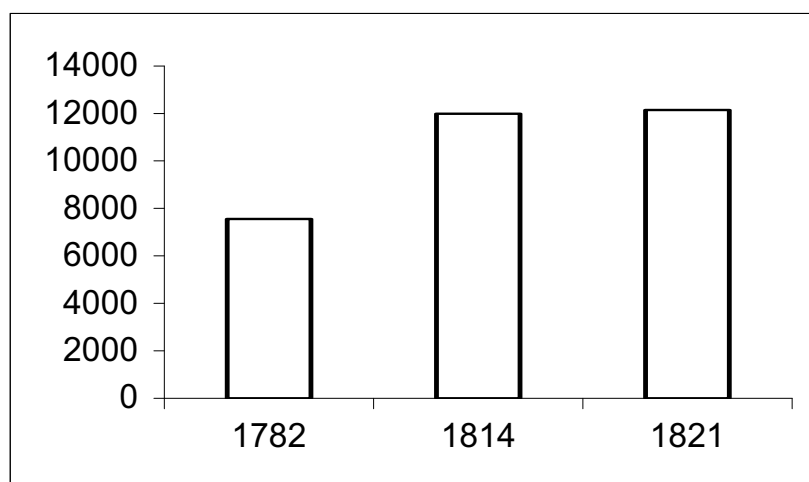
Hemos realizado el análisis cuantitativo de los textos de cada una de las partes en las sucesivas ediciones, midiendo el número de palabras. Señalemos que hemos utilizado tres ediciones: la de 1782, la de 1814 y la de 1821 (en la de 1794 suprimió el resumen histórico y otras partes de la primera).

Este recuento de palabras se presenta en la siguiente tabla:

Edición	1782	1814			1821		
	Total	Suprime	Añade	Total	Suprime	Añade	Total
Aritmética	1137	-148	1846	2835	0	1	2836
Álgebra	1667	-261	2068	3474	0	0	3474
Geometría	4751	-187	1114	5678	-171	335	5842
Total	7555	-596	5028	11987	-171	336	12152

Así se comprueba que, fundamentalmente, el texto se modifica en la segunda edición con respecto a la primera, suprimiendo algunos párrafos y aumentando bastante otros. En la última edición casi solamente se incluyen algunas palabras al final de la parte dedicada a geometría, por lo que esta introducción es muy parecida a la segunda.

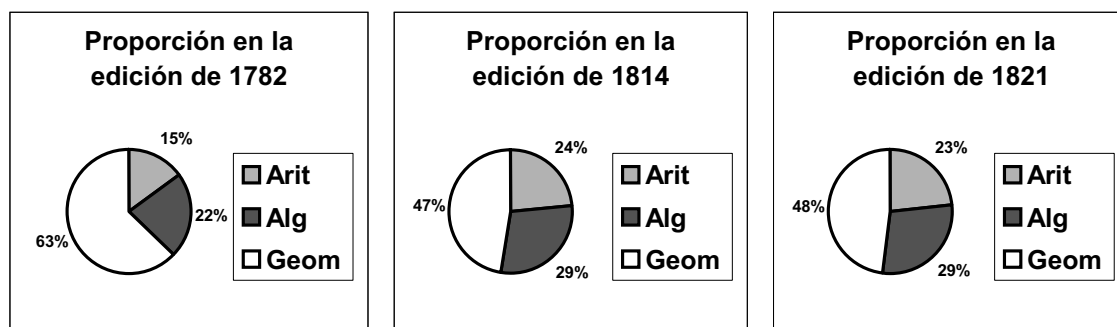
Un resumen sobre el total del texto viene dado en el siguiente diagrama de cajas.



A continuación hemos realizado un segundo análisis con el que tratamos de comprobar que peso tiene cada una de las tres partes (aritmética, álgebra y geometría) en la introducción histórica. Al realizar dicho análisis para las sucesivas edi-

ciones, podemos constatar la evolución de la importancia, o quizá también de las novedades, de las distintas partes de la matemática durante esos años.

Los resultados de este análisis están recogidos en los siguientes diagramas de sectores:



Se puede comprobar como de la primera edición a la segunda y tercera se produce un descenso acusado en la proporción de texto dedicada a la geometría en favor de la dedicada al álgebra y la aritmética, especialmente hacia esta última. Sin embargo (primer análisis), hablando en términos absolutos, la cantidad de texto dedicada a cada parte aumenta considerablemente a partir de la segunda edición.

3.2 Cualitativo

3.2.1 Cultura árabe en la primera y segunda edición

En la primera edición no existen prácticamente alusiones a la cultura árabe, salvo una pequeña nota sobre Mohamed Ben-Musa referente a las ecuaciones de segundo grado dentro de la parte dedicada al álgebra. Sin embargo, en las tres partes de la segunda edición, la presencia de la cultura árabe es notoria. Así, en la aritmética, después de citar a Eratóstenes y de indicar que a Diofanto y otros los estudiará en álgebra, desarrolla la evolución de la cultura matemática árabe y dice: «A los árabes, únicos depositarios de los conocimientos matemáticos, mas que a los latinos, ha debido la aritmética sus mayores progresos. Son infinitos sus escritos en esta materia. Thebit ben Corah que trató de los números polígonos, de los que se multiplican al infinito, y de la proporción compuesta: Abi Abadía Moamad llamado el aritmético, Aben Barza el calculador son los más celebres: y en sus obras

aparece una suma destreza en el manejo de los números, un conocimiento fino de sus relaciones, diferentes doctrinas acerca de sus propiedades, y nuevos métodos para resolver problemas: entre ello, *la regla de falsa posición simple y compuesta*, que prueba su profundo saber en aritmética....» (*sic*). El texto es el mismo en las dos últimas ediciones, aunque la sintaxis varía: hemos transcrito la de la última, de sintaxis más parecida a la actual.

3.2.2 Otras variaciones en la segunda edición

También incluye en la primera parte de la segunda edición alusiones a los indios y a otros matemáticos europeos, entre ellos al español Girberto, que después fue papa con el nombre de Silvestre II. Más adelante, y también dentro de la parte dedicada a la aritmética rellena algunas líneas con los logaritmos y con las máquinas de calcular. Del mismo modo, aunque no tan extensas, añade notas en geometría.

Hay una curiosa corrección de los nombres de los matemáticos (en todos los casos en la primera edición están castellanizados y en la segunda se indica en el idioma original). También van apareciendo añadidos de pequeñas incidencias (el accidente de Tartaglia, o algunos apodos), al igual que correcciones en las fechas de nacimientos, etc.

3.2.3 La tercera edición

Como única novedad de la tercera edición con respecto a la segunda, aparece en la parte de geometría lo que Monge denomina geometría descriptiva, así como una síntesis de los trabajos de este.

4 Algunas conclusiones (aventuradas)

4.1 Las fuentes

Nuestro estudio incide nuevamente en la conclusión de Cuesta sobre el uso de distintas fuentes por parte de Juan Justo García para la elaboración de la introducción histórica. Seguramente estas fuentes no coinciden en el tiempo: parece claro que el autor realiza un aprendizaje progresivo de los datos que incorpora a las notas históricas, como puede deducirse de las sucesivas ampliaciones de las intro-

ducciones. Probablemente las dificultades para la difusión del conocimiento y para el tráfico de personas y mercancías haría prácticamente imposible disponer de las últimas novedades, por lo que el conocimiento de estas se produciría poco a poco. Aún así, ya hemos citado que se le considera el introductor en España del cálculo infinitesimal.

4.2 Influencias personales y sociales

Pensamos que la introducción histórica se encuentra claramente influenciada tanto por su condición de canónigo, como por los condicionantes históricos de la época, principalmente la invasión napoleónica de la Península Ibérica la cual produjo un afrancesamiento de la universidad española.

4.3 La componente didáctica

Parece innegable la vocación didáctica de este matemático, poco frecuente en la universidad de entonces, aunque se pueden encontrar textos anteriores con esta vocación en los *novatores*, científicos de esta época que intentan una ciencia moderna, pero fuera de la universidad. Posiblemente la vocación encuentre su apoyo en las condiciones en las que escribe el texto en su primera edición de esta obra, ya que cuando gana su plaza de álgebra en la universidad de Salamanca en 1774, la posesión de esta depende de «su aplicación y del aprovechamiento de sus discípulos», lo que debió de conseguir, logrando la plaza a perpetuidad, como se ha dicho, tres años después.

Bibliografía

COBOS, J. M. y FERNÁNDEZ-DAZA, C. *El cálculo infinitesimal en los ilustrados españoles: Francisco de Villalpando y Juan Justo García*. Univ. de Extremadura. Cáceres, 1997.

CUESTA DUTARI, N. *El maestro Juan Justo García*. Univ. de Salamanca. Salamanca, 1974.

Gran Enciclopedia Extremeña. Ediciones Extremeñas. Mérida, 1992.

GARCÍA PÉREZ, A. Las fuentes del pensamiento de Miguel Martel. *El Basilisco*, 21 (1996), 34-35.

SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. *Las matemáticas en la biblioteca de El Escorial*. Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Madrid, 1929 (p. 124).

TEIXIDÓ, F. *Científicos Extremeños*. Universitas Editorial. Badajoz, 1997.

El Teorema Π entre Vaschy y Buckingham: el método de las variables de dimensión cero

Francisco A. González Redondo

Departamento de Álgebra
Universidad Complutense de Madrid
faglezr@eucmos.sim.ucm.es

Abstract

In this paper the period 1892-1914 in the evolution of Dimensional Analysis is studied with the purpose of covering those contributions in the history of the Π Theorem between Vaschy's and Buckingham's.

1. Introducción

En trabajos anteriores [1, 2] se hizo notar cómo el que hoy se conoce como Teorema Π o de Buckingham [3], científico norteamericano al que se suele atribuir su enunciado y demostración, se debía prácticamente al francés Vaschy [4], el primero en publicarlo aunque la comunidad científica no le prestara en su momento la debida atención. Estos teoremas fueron expuestos por ambos autores (y respetamos su notación) en la manera que sigue.

Teorema de Vaschy (1892)

Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ cantidades físicas tales que las p primeras se expresan en términos de unidades fundamentales diferentes, y las últimas $n-p$ cantidades se refieren a unidades derivadas a partir de las p unidades fundamentales. Si entre estas n cantidades existe una relación de la forma

$$F(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0 \quad (1)$$

que se mantiene para cualquier elección de las unidades fundamentales, esta relación puede transformarse en otra que solamente tenga $n-p$ parámetros, v.g.

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-p}) = 0 \quad (2)$$

siendo los parámetros $x_1, x_2, \dots, x_{n-p}$ funciones monómicas de $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Teorema de Buckingham (1914)

Toda ecuación que describa un fenómeno físico

$$F(Q_1, Q_2, \dots, Q_n) = 0 \quad (3)$$

que sea completa puede reducirse a la forma

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{n-k}) = 0 \quad (4)$$

en la que k es el número de unidades fundamentales independientes necesarias para determinar las unidades de la Q y las $n-k$ magnitudes Π_x son productos adimensionales independientes de la forma

$$\Pi_x = Q_1^\alpha Q_2^\beta \dots Q_k^\kappa P_x \quad (5)$$

donde P_x es cada uno de las restantes $n-k$ magnitudes que se derivan de las $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$ correspondientes a las k unidades fundamentales.

Como veíamos en los trabajos publicados anteriormente en este *Boletín*, Buckingham, que desconocía por completo la obra de Vaschy, tardó varios años en confesar que había basado su contribución al tema en una serie de trabajos previos de un ingeniero ruso, D. Riabouchinsky. Quedaba pendiente, por tanto, completar el período 1892-1914, dando entrada en esta historia a los personajes anteriores a Buckingham que irán *redescubriendo* sucesivamente un resultado que Vaschy no tuvo la fortuna de establecer como definitivo.

2. Un paso intermedio: las consideraciones dimensionales de Jeans

J. H. Jeans, Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad de Princeton, presentó en noviembre de 1905 a la Royal Society de Londres un trabajo [5] sobre la obtención de la ley de la radiación emitida por un cuerpo radiante, basado en consideraciones precedentes propias y otras de Lord Rayleigh [6]. En él hace uso de elementos dimensionales cuando quiere determinar la forma de la función $\phi(\lambda, T)d\lambda$, que expresa la energía de la radiación por unidad de volumen emitida en un punto cualquiera de la superficie, para longitudes de onda entre λ y $\lambda+d\lambda$, siendo T la temperatura del radiador. El procedimiento de resolución empleado, sin embargo, es mucho más próximo al Teorema de Vaschy (aunque no cite al autor francés) que al método de Rayleigh. Veámoslo.

Comienza detallando las magnitudes involucradas en la función ϕ , además de λ y T , que según él, son: V , velocidad de la luz; e , carga del electrón; m , masa del electrón; R , constante de la teoría de los gases; K , capacidad inductiva del éter; y $k_1, k_2, k_3, \dots$ magnitudes que especifican la estructura del sólido radiante. Por tanto, la ley de la radiación podría expresarse de forma más completa mediante

$$\phi(\lambda, T, V, e, m, R, K, k_1, k_2, \dots) d\lambda = 0 \quad (6)$$

Obtenidos los valores de $k_1, k_2, k_3, \dots$ cuando la radiación total a una temperatura dada alcanza el máximo, considera el valor de ϕ para el que denomina “radiador de máxima eficiencia”, ϕ_m , como función solamente de λ, T, V, e, m, R y K . A continuación presenta una relación de las “dimensiones físicas” de estas siete magnitudes en términos de las unidades de longitud L , masa M , tiempo t , capacidad inductiva K , y temperatura T . Es la siguiente:

Magnitud	dimensiones
λ	L
T	T
V	Lt^{-1}
e	$L^{3/2}M^{1/2}t^{-1}K^{1/2}$
m	M
R	$LMt^{-2}T^{-2}$
K	K

Para Jeans, al haber siete magnitudes y cinco unidades físicas independientes, tiene que ser posible combinar las siete magnitudes de dos formas independientes de modo que se forme un simple número. Éstas pueden ser

$$c_1 = RTm^{-1}V^{-2} \quad (7.a)$$

$$c_2 = \lambda RTKe^{-2} \quad (7.b)$$

Finalmente, concluye que cualquier otro número puro que pueda formarse a partir de estas siete magnitudes debe ser de la forma $\phi(c_1, c_2)$. Se observa la claridad de ideas sobre la construcción de un sistema de monomios adimensionales independientes para la “resolución dimensional” de un problema concreto, que puede considerarse como un bello prólogo a los diferentes enunciados y formalizaciones del Teorema II que le seguirán con carácter metodológico y de validez general... pero desconociendo (u olvidándose) éste y los que vienen después de la contribución de Vaschy.

3. El Método de las variables de dimensión cero de Riabouchinsky

En 1921 (tras siete años de dedicación al tema en los que publicó numerosos artículos), después de afirmar que el método dimensional para el análisis de problemas en Física se debía a Lord Rayleigh [7, 8] escribía Buckingham [9]: “Un procedimiento sistemático lo proporciona la formulación del principio de homogeneidad dimensional en la forma de teorema algebraico general, que publicó por primera vez Riabouchinsky ... El enunciado del teorema que se da en el presente artículo no difiere materialmente del de Riabouchinsky aparte de que éste último se limitó a las magnitudes mecánicas”.

El ingeniero ruso D. Riabouchinsky había financiado la construcción (comenzada en 1904) de un Laboratorio Aerodinámico en Koutchino, en las afueras de Moscú [10, 11], que dirigiría él mismo. Recoge los primeros resultados sobre los temas que nos interesan en el *Bulletin de l'Institut Aérodynamique de Koutchino* nº 2 (enero 1909) y nº 3 (diciembre 1909). Al año siguiente los resume en su primer artículo, publicado en Francia, sobre las hélices para la sustentación de aerostatos [12].

En estos trabajos no utiliza propiamente “elementos dimensionales”, pero, para el comportamiento de las hélices, obtiene, mediante utilización de las “fórmulas de semejanza”, las expresiones

$$\frac{Q}{m_1 S^2 N |N|} = \varphi \left(\frac{V}{NS^{\frac{1}{2}}}, \left| \frac{V}{NS^{\frac{1}{2}}} \right| \right) \quad (8.a)$$

$$\frac{T}{m_1 S^{\frac{5}{2}} N |N|} = \psi \left(\frac{V}{NS^{\frac{1}{2}}}, \left| \frac{V}{NS^{\frac{1}{2}}} \right| \right) \quad (8.b)$$

donde Q es el empuje, T la potencia, S la superficie y V la velocidad de traslación.

Sin embargo, en 1911 y refiriéndose a estos trabajos, sí considera Riabouchinsky [13] que él ha sido el primero en llevar directamente las relaciones de dimensión cero a los ejes coordenados. En concreto, y cambiando la notación, refiriendo $\frac{nr}{v}$ al eje de abscisas, y $\frac{P}{mv^2 r^2}$ al eje de ordenadas. Lord Rayleigh reunió este artículo de 1911 en el *Anuario* del Comité Aeronáutico Británico [14]. Y, precisamente, guiado por las indicaciones que contenía el resumen del artículo del ingeniero ruso, pudo formular Buckingham [3] su teorema y aplicarlo ilustrándolo con numerosos ejemplos.

Comenzaba Riabouchinsky de la misma manera que Buckingham, eludiendo toda referencia a Vaschy y atribuyendo a Rayleigh [15] el mérito de ser el primero en investigar la dependencia funcional no entre las variables ordinarias de los problemas físicos, sino entre combinaciones de éstas integradas en “agrupaciones” de dimensión cero. Es a estas “agrupaciones” a las que se llamará variables adimensionales y que él define como sigue:

Definición:

Se denomina *variable de dimensión cero* al producto de dos, tres o cuatro magnitudes físicas elevadas a potencias tales que la dimensión del producto con respec-

to a cada una de las unidades fundamentales (masa, longitud, tiempo) sea igual a cero.

Definido el concepto, ilustra su *método de las variables de dimensión cero* antes de formularlo en forma de Teorema. Considera (y en lo que sigue, por mor de la perspectiva histórica, utilizamos la notación del propio Riabouchinsky) el caso de la ecuación de un problema que dependiera de cuatro magnitudes a , b , c y d . La dimensión de cada una de ellas con respecto a la masa, la longitud y el tiempo, la expresa (entre paréntesis) desarrollándola como sigue:

$$(a) = M^p L^q T^r \quad (9.a)$$

$$(b) = M^{p_1} L^{q_1} T^{r_1} \quad (9.b)$$

$$(c) = M^{p_2} L^{q_2} T^{r_2} \quad (9.c)$$

$$(d) = M^{p_3} L^{q_3} T^{r_3} \quad (9.d)$$

Elige tres números x, y, z tales que la dimensión de d sea

$$(d) = (a^x b^y c^z) \quad (10)$$

Entonces deben satisfacerse las ecuaciones

$$p_3 = px + p_1 y + p_2 z \quad (11.a)$$

$$q_3 = qx + q_1 y + q_2 z \quad (11.b)$$

$$r_3 = rx + r_1 y + r_2 z \quad (11.c)$$

Para que x, y, z , tengan valores determinados, cualquiera que sea la dimensión de la magnitud d , las dimensiones de a, b , y c deben satisfacer la condición

$$\begin{vmatrix} p & p_1 & p_2 \\ q & q_1 & q_2 \\ r & r_1 & r_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (12)$$

En el caso de que $p_3 = q_3 = r_3 = 0$, el sistema (11) será compatible cuando el determinante (12) sea igual a cero. En este caso se pueden encontrar exponentes x, y, z tales que

$$(a^x b^y c^z) = M^0 L^0 T^0 \quad (13)$$

Considera, entonces, que si se tienen tres magnitudes físicas a, b, c , que verifican la condición (13) y se quieren encontrar potencias x_1, y_1 tales que

$$(c) = (a^{x_1} b^{y_1}) \quad (14)$$

para que x_1, y_1 tengan valores “finitos y determinados”, cualquiera que sea la dimensión de la magnitud c , al menos uno de los determinantes de orden 2 siguientes debe ser distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} p & q \\ p_1 & q_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} q & r \\ q_1 & r_1 \end{vmatrix} \text{ o } \begin{vmatrix} r & p \\ r_1 & p_1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (15)$$

Si (15) no se verifica, entonces

$$\frac{p}{p_1} = \frac{q}{q_1} = \frac{r}{r_1} \quad (16)$$

y, en consecuencia, será

$$(b) = (a^{x_2}). \quad (17)$$

4. El Teorema de Riabouchinsky

Una vez ilustrado el *método* con el caso concreto anterior, ya puede aproximarse a una formulación más general. Considera (y seguimos manteniendo la notación de Riabouchinsky) un problema definido por la relación entre n magnitudes físicas

$$f(a, b, c, \dots, i, k, l, m, n) = 0 \quad (18)$$

tal que, desarrollando f en serie, el término general tendría la forma

$$Ra^\alpha b^\beta c^\gamma \dots i^l k^x l^\lambda m^\mu n^\nu \quad (19)$$

donde R sería un “número abstracto” (que más adelante [16] llamará “número puro”).

Si entre las n variables ($n > 3$) se eligen tres cuyas dimensiones estén caracterizadas por exponentes que satisfagan la condición (12) puede multiplicarse y dividirse cada una de las variables por el producto de las tres magnitudes elegidas elevadas a potencias tales que la dimensión de este producto y el de las tres variables correspondientes sean iguales.

Si se supone que la condición (12) se verifica, entre otras, respecto a las magnitudes k, l, m , y se designan las relaciones de dimensión cero, obtenidas de la manera indicada anteriormente, por las letras mayúsculas correspondientes, la expresión (19) será

$$(Ra^\alpha b^\beta c^\gamma \dots I^l 111N^\nu) k^\xi l^\eta m^\zeta \quad (20)$$

donde ξ, η, ζ expresan, respectivamente, las sumas de los exponentes de k, l y m .

Como en el miembro de la derecha de la ecuación (18) figura un “número abstracto”, cada uno de los términos del desarrollo de la función f debe ser de dimensión cero. Además, como para las magnitudes k, l, m se satisface la desigualdad (12), se tiene que

$$\xi = \eta = \zeta = 0 \quad (21)$$

Así, una vez transformados de esta manera todos los términos del desarrollo, efectuando la suma se obtendrá la expresión siguiente:

$$f(A, B, C, \dots, I, 1, 1, 1, N) = 0 \quad (22)$$

Llegado a este punto, ya puede formular su teorema.

Teorema de Riabouchinsky:

El estudio de la dependencia entre n magnitudes físicas

$$f(a, b, c, \dots, i, k, l, m, n) = 0 \quad (23)$$

se reduce, si se cumple la condición (12) con respecto a tres de ellas, al estudio de la dependencia entre $n-3$ combinaciones de dimensión cero de estas magnitudes.

Esta conclusión la completa explicitando que para el paso de la expresión (18) a una expresión que encierre variables de dimensión cero, conviene elegir, entre las n variables, tres de ellas que satisfagan la desigualdad (12), y sustituir cada variable en la expresión (18) por la relación de esta variables con el producto de las tres magnitudes elegidas elevadas a potencias tales que esta relación sea de dimensión cero.

5. Consideraciones finales

A modo de conclusión pueden realizarse algunas consideraciones.

La primera, en la que puede observarse su dedicación como ingeniero a la experimentación sobre modelos reducidos de Mecánica de fluidos, es la importancia que para Riabouchinsky tiene el Método de las variables de dimensión cero:

1. El hecho de disminuir el número de variables independientes simplifica considerablemente el estudio gráfico de las dependencias empíricas.
2. Como cada una de las variables de dimensión cero representa una relación entre varias magnitudes físicas, puede estudiarse cómo influye la variación de cada una de éstas en aquélla.
3. Si la relación de dependencia entre dos magnitudes obtenida por este procedimiento indirecto no se confirma con el estudio directo experimental de dicha dependencia, la necesidad de concluir con la intervención de otro factor, cuya influencia se tendría en cuenta, orientaría las investigaciones hacia el descubrimiento de éste.

La segunda consideración, en este caso propiamente de la Historia de la Matemática que en este trabajo estudiamos, se refiere a la participación en la evolución del Teorema Π de los diferentes autores citados, el conocimiento que tienen unos de otros, las citas que realizan y los débitos que se presentan:

1. Riabouchinsky (quien publica en Francia, el país que a principios de siglo centraliza las investigaciones científicas en materia aeronáutica), parece desconocer absolutamente la contribución de Vaschy de 1892-1896, hasta el punto de tener que *redescubrir* el Teorema.
2. La Historiografía usual procederá generalizando el proceso reseñado en sus trabajos por los autores estudiados: Rayleigh retoma a finales del siglo XIX las breves consideraciones de Fourier [17] de 1822, Jeans las utiliza como herramienta, Riabouchinsky las formula como método sistemático, y Buckingham enuncia éste como teorema matemático, dándole el nombre de Teorema Π .
3. A partir de los tres artículos publicados en las páginas de este *Boletín de la Sociedad Puig Adam*, el problema histórico ha quedado clarificado. Faltan, eso sí, algunas contribuciones que, aunque importantes (sobre todo, la de A. Federman o T. Ehrenfest-Afanassjewa), no han quedado integradas en esta Historia. A ellas podrían dedicarse nuevos trabajos.

Bibliografía

- [1] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2000): “El Teorema Π de Buckingham: núcleo del Análisis Dimensional”. *Boletín de la Sociedad Puig Adam* nº 55, 67-75.
- [2] GONZÁLEZ REDONDO, F. A. (2001): “Génesis y primera formulación del Teorema Π ”. *Boletín de la Sociedad Puig Adam* nº 59, 83-93.
- [3] BUCKINGHAM, E. (1914): “On Physically Similar Systems. Illustrations of the Use of Dimensional Equations”. *Physical Review* 4, 345-376.
- [4] VASCHY, A. (1892): “Sur les Lois de Similitude en Physique”. *Annales Telegraphiques* 19, 25-28.
- [5] JEANS, J. H. (1905): “On the Laws of Radiation”. *Proceedings of the Royal Society* 76, 545-552.
- [6] RAYLEIGH, L. (1905): “On the Dynamical Theory of Gases and Radiation”. *Nature* (18 de mayo y 13 de julio).

- [7] RAYLEIGH, L. (1871): "On the Light from the Sky, its Polarization and Colour". *Philosophical Magazine* 41, 447-454.
- [8] RAYLEIGH, L. (1877-1878): *The Theory of Sound*. London: Macmillan. (2^a ed. 1894-1896). Reimpresión de la 2^a edición en Dover, New York, 1945.
- [9] BUCKINGHAM, E. (1921): "Notes on the Method of Dimensions". *Philosophical Magazine* 42, 696-719.
- [10] MASFRAND, A. (1909): "Un Institut d'aérodynamique en Russie". *L'Aerophile*, 194-197.
- [11] FOURNIER, L. (1909): "L'Institut Aérodynamique de Koutchino". *La Nature* 2, 133-141.
- [12] RIABOUCHINSKY, D. (1910): "Note sur les hélices aériennes". *La Technique Aéronautique* (septiembre), 153-156.
- [13] RIABOUCHINSKY, D. (1911): "Méthode des Variables de Dimension zero et son Application en Aérodynamique". *L'Aerophile* (septiembre), 407-408.
- [14] RAYLEIGH, L. (1912): "Summary 134". *Annual Report of the British Advisory Committee for Aeronautics for 1911-1912*, 260. ññ
- [15] RAYLEIGH, L. (1899): "Investigations in Capillarity". *Philosophical Magazine* 48, 321-326.
- [16] RIABOUCHINSKY, D. (1924): "Similitude Dynamique et son Application en Aérodynamique". *Bulletin Technique du Ministère de l'Air* (Francia) 17, 83-93.
- [17] FOURIER, J. B. J. (1822): *Théorie Analytique de la Chaleur*. París: Firmin Didot.

Uso de CABRI GÉOMÈTRE II en Tecnologías de la Información

Enrique Rubiales Camino

Catedrático de Bachillerato
Miembro de la Junta Directiva de la Soc. “Puig Adam”

Abstract

The following article describes the experience carried out the past academic year in the subject of Information Technology with first year High School students using the dynamic geometry program Cabri Géomètre II.

Por un lado, según preparaba enunciados de problemas para el Concurso de resolución de problemas que convoca la Sociedad “Puig Adam”, me encontré con el siguiente enunciado:

Se considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = R^2$, y en ella los puntos $A(-R, 0)$ y $B(R, 0)$. Sea P un punto variable de la circunferencia, M el punto medio del segmento BP y S el punto medio del segmento AM . Encontrar el lugar geométrico de S al recorrer P la circunferencia.

Por otro lado, como en los cursos de primero de Bachillerato, en la asignatura que se conoce con el nombre de Tecnologías de la Información, me encontraba explicando el programa de geometría dinámica llamado CABRI GÉOMÈTRE II, pensé que podía incluir este enunciado, pidiendo a los alumnos que lo hiciesen para distintos valores del radio. Por ejemplo, que tomasen $R = 4$, $R = 6$, etc., e intentar que viesen que lugar geométrico les salía, y como era una nueva circunferencia que me dijese cuánto valía el radio.

Ahora voy a explicar que es lo que hice con los alumnos, para obtener dicho lugar, con ayuda de CABRI GÉOMÈTRE II.

Paso 1: Marcamos **Mostrar ejes/ocultar ejes**.

Paso 2: Marcamos **Definir cuadrícula**. En uno de los ejes se pulsa el ratón y aparece la cuadrícula.

Paso 3: Marcamos **Circunferencia**. Con centro en el origen de coordenadas y radio 4 unidades, la trazamos.

Paso 4: Llamamos A al punto $(-4, 0)$ y B al punto $(4, 0)$. Para llevar a cabo este paso, hacemos lo siguiente: Marcamos **Punto sobre objeto**, a continuación **Etiqueta** y por último escribimos A . Lo mismo para el otro punto.

Paso 5: En este paso, para tomar el punto P sobre la circunferencia, lo hacemos en el arco que está en el primer cuadrante y más cerca del eje de ordenadas. Lo que hay que hacer a continuación es lo mismo que se hizo en el paso 4.

Paso 6: Marcamos **Segmento**, y así obtenemos el segmento PB . A continuación, marcamos **Punto medio**, y le llamamos M .

Paso 7: Haciendo lo mismo que en el paso 6, obtenemos el segmento AM y el punto medio S . En este momento ya estamos en condiciones de obtener el lugar geométrico, por lo que tenemos que hacer lo siguiente:

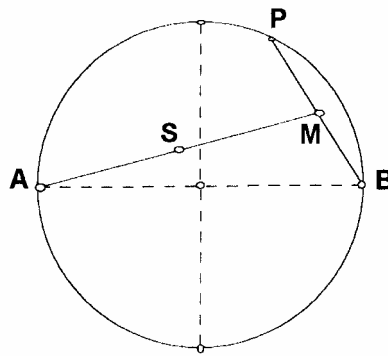
Paso 8: Marcamos **Lugar geométrico**. A continuación pulsamos con el ratón sobre el punto S y a continuación sobre el punto P . En este momento aparece el lugar geométrico. Se trata de que sean los alumnos los que digan que el centro de la circunferencia es el punto $(-1, 0)$ y el radio es 1. Si los alumnos no ven cuál es el centro y el radio de la circunferencia que ha salido, aunque tengamos la cuadrícula, pues les animamos a que utilicen la orden **Distancia y longitud**, que permite medir la distancia entre dos puntos, la longitud de un segmento o el radio de una circunferencia.

Si queremos que el lugar geométrico se vaya dibujando, y no aparezca de golpe, entonces el paso 8, se sustituye por las siguientes órdenes:

Paso 8': Marcamos **Traza**. Pulsamos con el ratón sobre el punto S . Marcamos **Animación**. Y pulsamos con el ratón sobre el punto P .

Lo lógico es que hagamos lo mismo con $R = 6$, y que los alumnos sean capaces de obtener que el centro es el punto $(-\frac{3}{2}, 0)$ y el radio es igual a $\frac{3}{2}$. De la misma forma se hace tomando $R = 8$, y obteniendo que el centro ahora es $(-2, 0)$ y el radio 2.

Como ya los alumnos se han dado cuenta, que si estamos en el caso general, la circunferencia tiene el centro en el punto $(-\frac{R}{4}, 0)$ y el radio es igual a $\frac{R}{4}$, lo interesante, en este momento, es como se podría encontrar este lugar geométrico.



Para ello, dibujamos una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio R , cuya ecuación es

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Por supuesto, para hacer el gráfico hemos tomado $R = 2$. Tomamos el punto $A(-R, 0)$ y el punto $B(R, 0)$. Además tomamos el punto $P(x', y')$ sobre la circunferencia. Dibujamos el segmento PB , y ahora hallamos el punto medio M , cuyas coordenadas son:

$$\left(\frac{R + x'}{2}, \frac{y'}{2} \right)$$

Ahora consideramos el segmento AM , y su punto medio S , que tendrá las siguientes coordenadas:

$$\left(\frac{\frac{R+x'}{2} - R}{2}, \frac{y'}{4} \right)$$

Si a estas coordenadas las llamamos (x, y) , tendremos:

$$x = \frac{\frac{R+x'}{2} - R}{2}, \quad y = \frac{y'}{4}$$

Simplificando, tenemos:

$$x = \frac{x' - R}{4}, \quad y = \frac{y'}{4}$$

Como el punto P es de la circunferencia debe satisfacer la ecuación, por lo que queda

$$x'^2 + y'^2 = R^2$$

Por tanto, si $x' = 4x + R$ e $y' = 4y$, tenemos:

$$(4x + R)^2 + 16y^2 = R^2$$

Operando, resulta

$$16x^2 + 8xR + R^2 + 16y^2 = R^2$$

$$2x^2 + 2y^2 + Rx = 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{R}{2}x = 0$$

que es el lugar geométrico buscado. Y a la conclusión que hemos llegado es que es la circunferencia de centro el punto $(-\frac{R}{4}, 0)$ y radio igual a $\frac{R}{4}$.

Bibliografía

- [1] CARRILLO, A. y LLAMAS, I. (1999), *Cabri Géomètre II para Windows*. Ra-Ma. Madrid.
- [2] REY PASTOR, J., SANTALÓ, L. A. y BALANZAT, M. (1959), *Geometría analítica*. Kapeluz. Buenos aires.
- [3] VASÍLIEV, N. B. y GUTENMÁJER, V. L. (1980), *Rectas y curvas*. MIR. Moscú.

Acerca de un problema de la “Óptica” de Euclides

Juan Tarrés Freixenet

Departamento de Geometría y Topología.
Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense
Juan_tarres@mat.ucm.es

Abstract

In this note, a question suggested by the Proposition 45 in the Euclid's Optics is solved: Find the locus of the points from which, two adjacent line segments are seen under the same angle.

Introducción

Además de sus famosísimos *Elementos*, Euclides escribió otras obras, en las que se tratan diversos aspectos de las Matemáticas, tanto puras como aplicadas, que no se contemplan en los *Elementos*. Entre ellas figura la *Óptica*, que es el tratado más antiguo que se conoce sobre esta cuestión. Es un libro que trata de la geometría de la visión y que tuvo una influencia decisiva, junto con otras obras, en el descubrimiento de la perspectiva que revolucionó el arte del Renacimiento.

La *Óptica* euclidiana contiene siete definiciones previas, a modo de axiomas, y un total de cincuenta y ocho proposiciones acerca de diferentes aspectos de lo que hoy conocemos como Óptica Geométrica.

Entre las definiciones previas, destaquemos las que figuran en segundo y cuarto lugar (ver [3]):

2) ... *la figura contenida por los rayos visuales es un cono que tiene el vértice en el ojo y la base en los extremos de los objetos vistos.*

4) ... *los objetos que se ven bajo un ángulo mayor parecen mayores; los que bajo un ángulo menor, menores, y los que se ven bajo ángulos iguales, iguales.*

De estas definiciones se deduce que, según Euclides, el tamaño aparente de un objeto viene determinado por el ángulo bajo el cual es observado por el ojo. De esta manera, un mismo objeto parece mayor ($AOB > A'OB'$) cuanto más cerca está del ojo del observador (proposición 5):

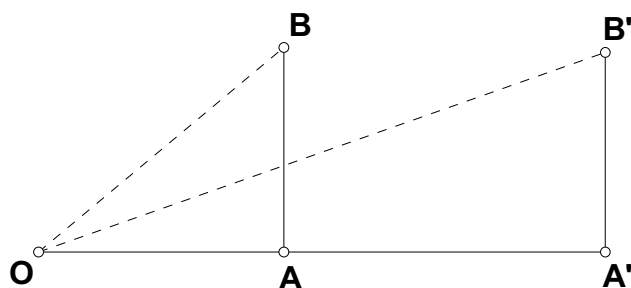


Fig. 1

Asimismo, es fácil imaginar que dos segmentos rectilíneos diferentes puedan aparecer iguales. Ésta es la cuestión que se plantea en la Proposición 45 del libro [3], que afirma: *“Existe un lugar común desde el cual las magnitudes desiguales parecen iguales”*

La solución que ofrece Euclides se limita a dar un único punto desde el cual las dos magnitudes, representadas por sendos segmentos rectilíneos adyacentes, situados sobre una misma recta, se ven bajo un mismo ángulo. Evidentemente, ésta no es más que una solución parcial del problema, puesto que el propio enunciado de la proposición sugiere que se debe encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano desde los cuales los dos segmentos se observan bajo el mismo ángulo y, por tanto, su tamaño aparente es el mismo ($AOP = BOP$).

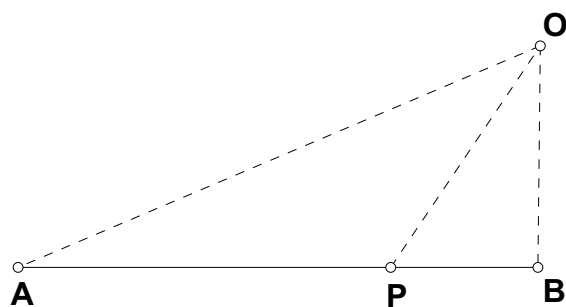


Fig. 2

1. La solución de Euclides

Para resolver la cuestión planteada, Euclides propone trazar un arco circular, mayor que una semicircunferencia en torno a AP y otro, semejante al anterior, cuya cuerda sea PB.

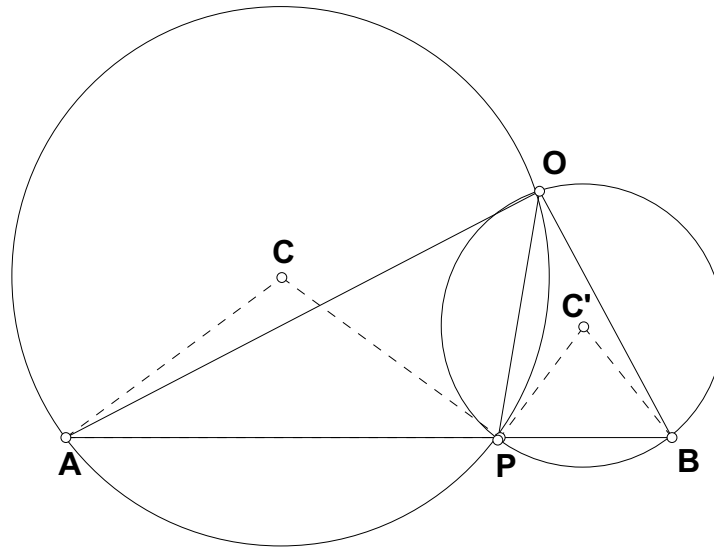


Fig. 3

Dichos arcos se cortan en un punto O, para el cual, los ángulos AOP y POB son iguales, pues son ángulos inscritos en sus circunferencias respectivas, que abarcan ángulos centrales iguales.

En esta solución, no se precisa cuál debe ser el ángulo bajo el cual deben observarse los segmentos mencionados. Si se pretende que el tamaño aparente de los mismos venga definido por un ángulo α previamente determinado, los arcos de circunferencia de la solución anterior deben ser los *arcos capaces* de cada segmento, correspondientes al ángulo $\alpha = \angle AOP = \angle POB$, trazados tal como se indica en la figura 4:

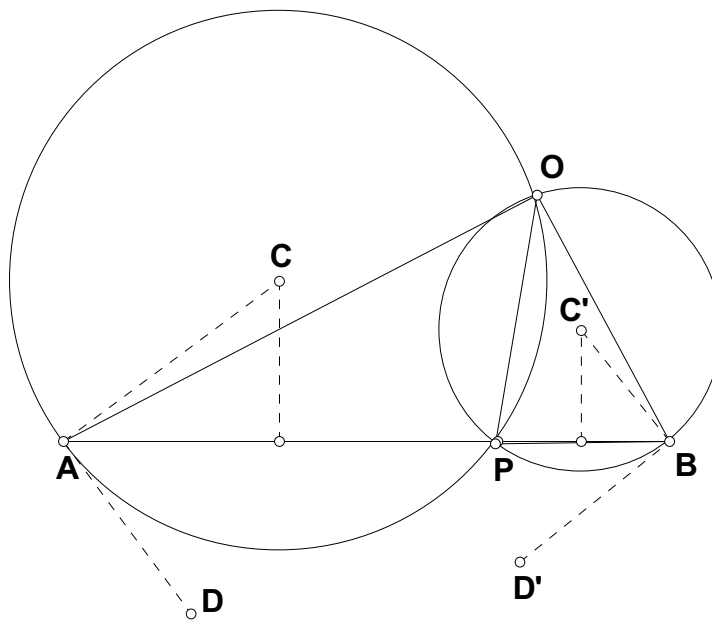


Fig. 4

donde $\alpha = \angle DAP = \angle D'BP$.

2. El caso general

Vamos a resolver el problema de determinar el lugar geométrico de los puntos del plano desde el cual se observan bajo el mismo ángulo dos segmentos rectilíneos situados uno a continuación del otro sobre una misma recta. Eliminamos de dicho lugar geométrico los puntos de la recta que contiene ambos segmentos, pues sus puntos representan una solución trivial del problema.

Si O es uno de tales puntos, no perteneciente a la recta AB , el segmento OP es una bisectriz interior del triángulo AOB (figura 2).

Por lo tanto, de acuerdo con el teorema de la bisectriz interior:

$$\frac{AP}{PB} = \frac{OA}{OB} = \lambda$$

Sea Q el punto de intersección de la prolongación del lado AB con la bisectriz exterior correspondiente al vértice O del triángulo AOB. Ahora, los puntos [A,B,P,Q] forman una cuaterna armónica (figura 5):

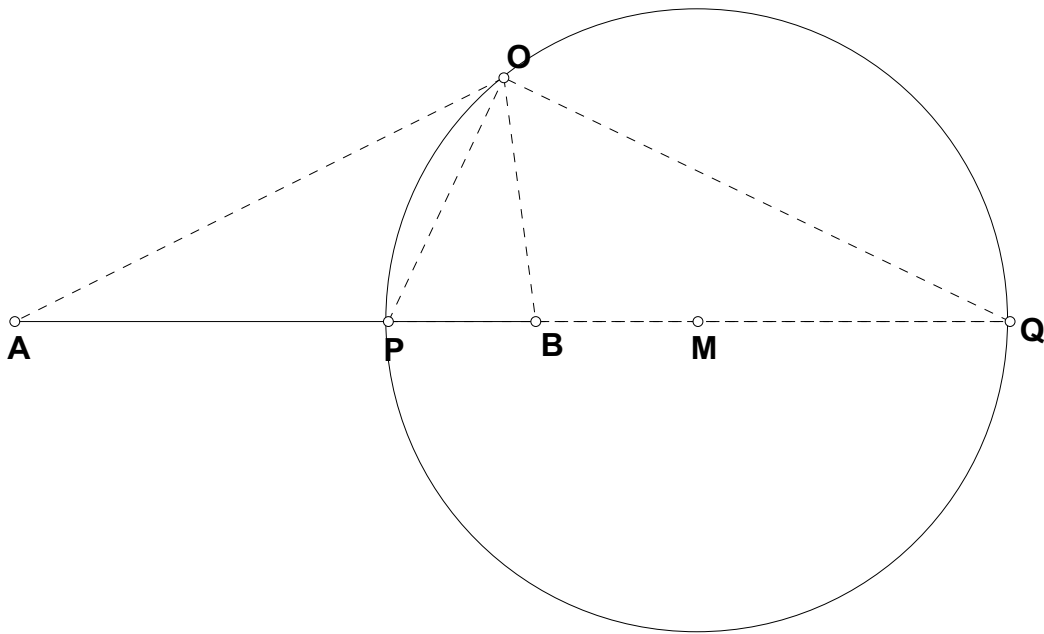


Fig. 5

Por otra parte, las bisectrices OP y OQ son perpendiculares. Así, el punto O debe pertenecer a la circunferencia de diámetro PQ. Se tiene así:

Si Q es el cuarto armónico de P respecto de los puntos A y B, la circunferencia de diámetro PQ es el lugar geométrico pedido.

En efecto, si O es un punto de dicha circunferencia, las rectas OP y OQ son perpendiculares, pues el ángulo POQ abarca una semicircunferencia. Por otra parte, como [A,B,P,Q] forman una cuaterna armónica, los puntos P y Q son los puntos

de intersección de las bisectrices interior y exterior, respectivamente, de cualquier triángulo AOB para el cual OP y OQ son rectas perpendiculares. Es decir, el punto O considerado es uno de tales vértices y, en consecuencia, los ángulos AOP y POB son iguales.

La circunferencia de diámetro PQ recibe el nombre de *circunferencia de Apolonio* del segmento AB, correspondiente a la razón λ ([4]).

3. Construcción

Fijados los segmentos AP y PB, se determina el cuarto armónico Q de P, respecto de A y B mediante la construcción realizada en la figura 6 ([1]):

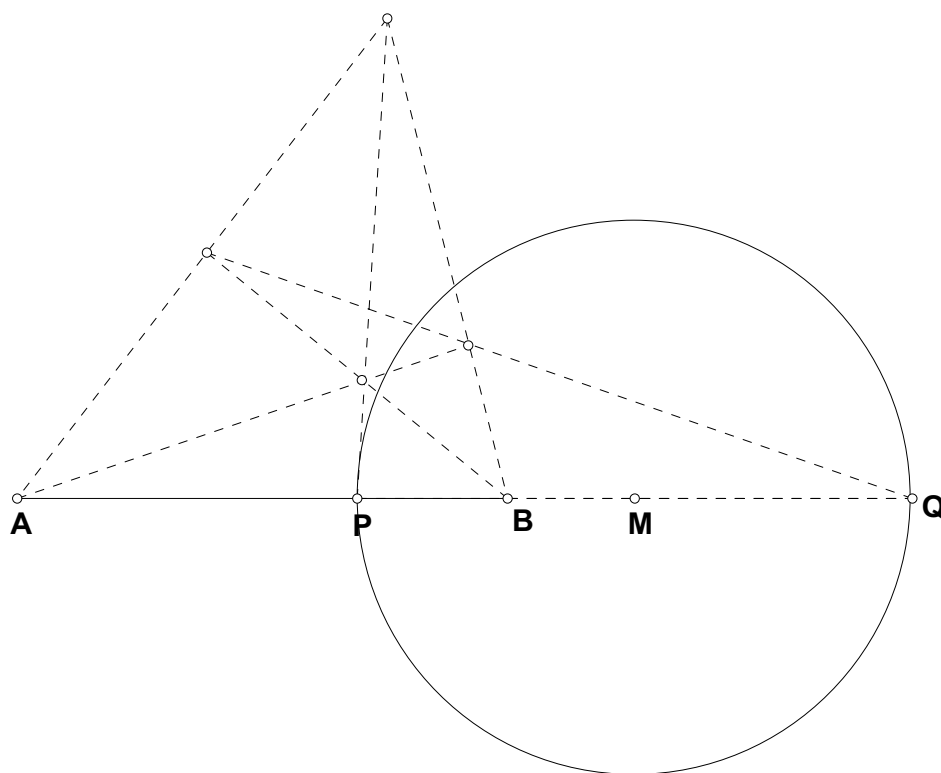


Fig. 6

El trazado de la circunferencia buscada es, entonces, inmediato.

Referencias

- [1] COXETER, H. S. M. *The Real Projective Plane*. Springer-Verlag. New York 1992
- [2] COXETER, H. S. M.; GREITZER, S.L. *Retorno a la Geometría*. La Tortuga de Aquiles, nº 1. DSL-EULER Editores. Madrid 1993.
- [3] EUCLIDES. *Óptica*. Trad. Paloma Ortiz García. Biblioteca Clásica Gredos, nº 277. Ed. Gredos. Madrid 2000.
- [4] EVES, H. *A survey of Geometry*. Allyn and Bacon. Boston 1963.

Anuncios de Congresos

XVIII Jornadas del SI_IDM

Organizadas por el Grupo de Trabajo:
La Didáctica de las Matemáticas como Disciplina Científica
Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática
Universitat “Jaume I” de Castelló, 19-21 abril 2002.

AISC 2002 Conference on Artificial Intelligence and Symbolic Computation (Theory, Implementations and Applications)

In conjunctions with **Calculemus 2002**
en Marseille, France, July 1th -5th 2002
aisc2002@cmi.univ-mrs.fr

Vienna Int'l Symposium on Integrating Technology into Maths Education
combining the 7th **ACDCA Summer Academy**
and the 5th **Int'l Derive Conference**, organized by
ACDCA (Austrian Center for Didactics of Computer Algebra)
en Vienna, Austria, 10-13 July 2002

Decimosexta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa
en La Habana, Cuba, 15 al 19 de julio de 2002.
Información: <http://www.clame.org.mx/relme16/index.htm>

Creativity in Mathematics Education and the Education of Gifted Students
en Riga, Latvia
Dates: July 15-19, 2002
For further information: agnis@lanet.lv o bien www.liis.lv

EACA-2002, Octavo Encuentro de Algebra Computacional y Aplicaciones
Valladolid, 11-13 septiembre 2002
www.uva.es/eaca2002/

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc, deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo especificado a continuación.

Copias en papel

Se enviarán por duplicado, escritas con un procesador de texto en hojas de tamaño DIN A-4. El formato debe ser 17cm x 12.8cm en 11 puntos.

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LATEX (en este último caso deberá usarse estilo “article” y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Los artículos comenzarán con el título (en minúsculas grandes), nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el Boletín), e-mail si se tiene y “abstract” de unas líneas en inglés. Se terminará el artículo con la bibliografía (y nada más después de ella).

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deban ser reproducidas (Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas).

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: “Problema número (Boletín número)”, tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en formato electrónico

Se enviará por correo electrónico a la cuenta: roanes@mat.ucm.es o bien en un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo el archivo del documento en el procesador de texto utilizado.

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

ADQUISICIÓN DE NÚMEROS ATRASADOS DE NUESTRO BOLETÍN

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de seis euros ejemplar.

Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59 y 60.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de la “*Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*”, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad:

SOCIEDAD “PUIG ADAM” DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n - Ciudad Universitaria
28040 Madrid

En la carta se incluirá:

- el número o números a adquirir,
- la dirección a donde se han de enviar,
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.