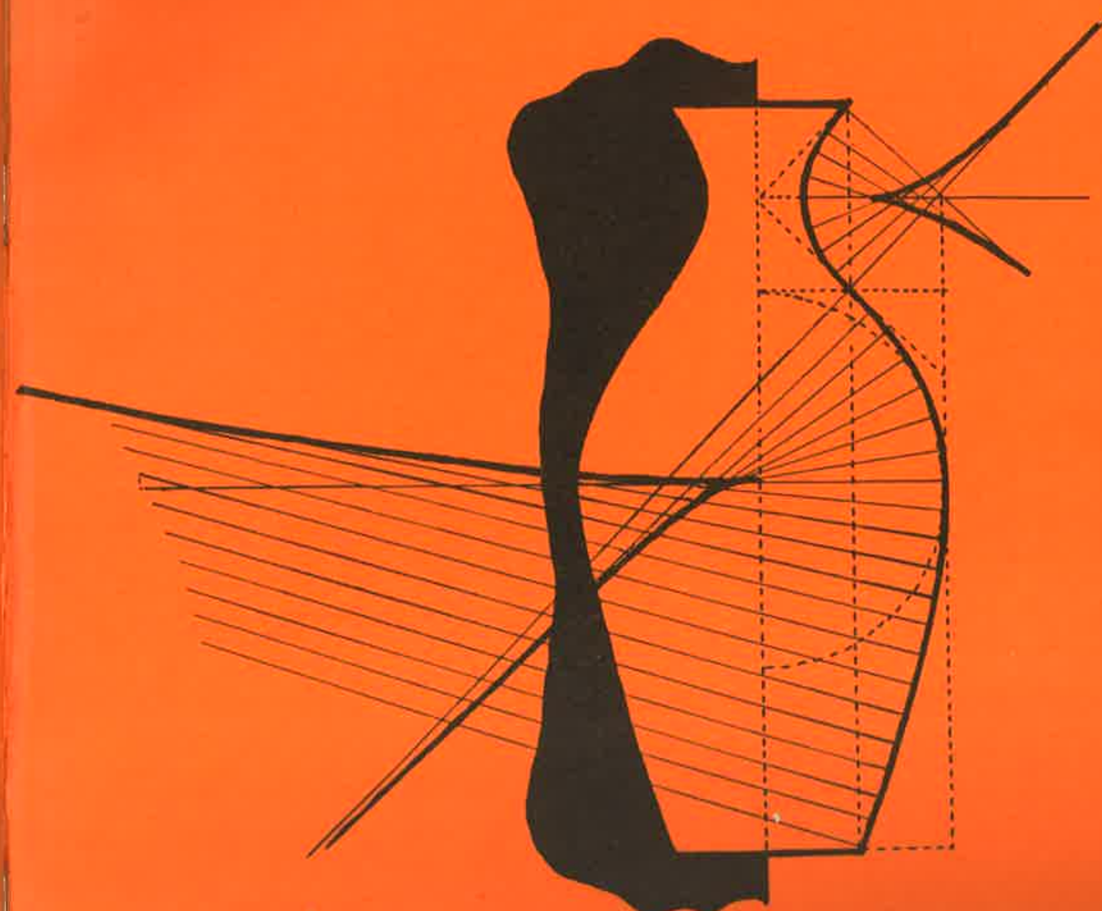
boletín número 6



sociedad castellana

PUIG ADAM

de profesores de matemáticas

B O L E T I N de la Sociedad Castellana de Profesores de Matemáticas "PUIG ADAM"

nº6 (1984-85)

- La Sociedad tiene su domicilio provisional en:

  Ronda de Atocha 2 (INBAD)
  MADRID

- La correspondencia deberá dirigirse al

  Apartado nª 9479
  28080 MADRID

- La confección de este número ha estado a cargo de:

  PASCUAL IBARRA, José Ramón
  FERNANDEZ BIARGE, Julio
  OCHOA MELIDA, Juan

- En la portada, de J.F.B., aparece el perfil ideal de un ánfora, según la teoría de valoración estética de las figuras debida a Birkhoff, según cita Puig Adam en "La Matemática y la Belleza", junto con la evoluta de ese perfil.

- El presente número está especialmente dedicado a la Informática, aunque continuamos aportando ideas y datos útiles para formar opinión sobre la próxima reforma de las Enseñanzas Medias.

INDICE

Este BOLETIN se distribuye gratuitamente entre los socios de la Sociedad Castellana PUIG ADAM de Profesores de Matemáticas y Centros adscritos a la misma. No se vende ni se admiten suscripciones.

JUNTA DIRECTIVA

Presidente: Julio Fernández Biarge

Vicepresidentes:

José Manuel Martínez Sánchez (Madrid)
Juan Manuel Linares Cáceres (Toledo)
Salvador Herrero Pallardó (Ciudad Real)
Valero Antonio Alías Tuduri (Cuenca)
Angel Mª Alcalá del Olmo Pérez (Guadalajara)-8802053.
Juan Luis Sanz de Andrés (Segovia)

Secretario: José Francisco Carballido Quesada

Vicesecretario: María Luisa Pacios

Tesorero: Alberto Aizpún López

Bibliotecario: Joaquín Gómez Rey

- V I D A D E L A S O C I E D A D -

- El día 25 de Mayo de 1985 se celebró la Asamblea General de la Sociedad, en los locales del Instituto "Isabel la Católica". Se procedió en ella a la renovación reglamentaria de la mitad de los miembros de la Junta Directiva, que quedó constituida en la forma que aparece en la página anterior.

- Se han recibido las preinscripciones de 40 centros para nuestro III Concurso de Problemas, muchos de ellos para participar con sus representantes, tanto de primer curso como de segundo.

Los ejercicios de este Concurso tendrán lugar el día 22 de Junio, a las 10 h 15 m, en el Instituto Beatriz Galindo (calle de Goya 10, Madrid) y la entrega de premios se realizará, el mismo día, en el salón de actos de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (calle de Valverde 22), a las 19 h.

Agradecemos a la dirección del Instituto citado la amable cesión de sus locales y servicios y a la Real Academia el ofrecernos su colaboración, proporcionándonos un marco de tanto prestigio para la entrega de diplomas.

También agradecemos al Instituto de la Juventud del Ministerio de Cultura su donación de lotes de libros, que serán entregados a los ganadores. y a la Inspección de Bachillerato del Distrito de Madrid su colaboración en la difusión de la convocatoria.

Publicaremos en nuestro próximo Boletín la crónica de este Concurso.

RUEGOS A NUESTROS SOCIOS

Se ruega encarecidamente a nuestros socios que:

- Nos comuniquen cualquier cambio de domicilio o cuenta corriente, pues nos devuelven con frecuencia boletines o recibos, con el consiguiente perjuicio para todos.

- Procuren que otros compañeros ingresen en la Sociedad, para lo cual incluímos en cada número del boletín una hoja de inscripción. El futuro de nuestra Sociedad depende de que mantenga un colectivo suficiente de socios.

- Nos hagan llegar rápidamente cualquier noticia sobre congresos, conferencias, concursos, etc., cuya difusión entre los socios estimen interesante, para su inclusión en nuestro boletín, antes de que pierdan actualidad.

- Nos envíen artículos, trabajos, experiencias didácticas, enunciados de problemas o soluciones a los propuestos, para su publicación en nuestro boletín.

- Nos hagan llegar iniciativas o sugerencias de cualquier tipo sobre posibles actividades de la Sociedad o sobre el contenido de su publicación.

La Junta Directiva agradece a todos su colaboración y recuerda que la correspondencia debe dirigirse al Aptdo. 9479 de 28080 Madrid.

* * * * *
* * * *

- N O T I C I A S -

- La Real Sociedad Matemática Española, organizadora de la Olimpiada Matemática, ha anunciado que su fase de Distritos, que este año iba a celebrarse en el mes de Junio, tendrá lugar dentro de los meses de Septiembre u Octubre próximos. Las fechas exactas se anunciarán oportunamente.

- La Sociedad Canaria de Profesores de Matemáticas "Isaac Newton" ha celebrado en Santa Cruz de la Palma, durante los días 1 al 4 de Mayo, sus VI Jornadas, en torno al tema del proyecto de reforma de las Enseñanzas General Básica y Medias.

- La Escuela Universitaria del Magisterio de Jaén, ha celebrado su IV Semana Cultural, los pasados días 6 al 11 de Mayo. Este año ha estado decidada al tema "Informática y Educación". Incluyó la Exposición "De la Calculadora Mecánica al Ordenador Moderno", con material cedido por el Museo de la Ciencia de la Universidad de Granada, y una compleja colección monográfica de libros. Pronunciaron conferencias los profesores Fernández Biarge, de nuestra Sociedad, Gallego Perea y Correas Dobato. Felicitamos a nuestros compañeros de Jaén por la brillante organización de esa Semana Cultural y por el éxito obtenido en la misma.

- Patrocinadas por la Secretaría de Estado de Universidades e Investigación y la Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia, los días 22 al 24 de Mayo, se han celebrado las Jornadas sobre "Informática Universitaria", dirigidas a los equipos de Gobierno, etc. Pronunciaron interesantes conferencias los profesores Galván Ruiz, Insúa-Negrao y de la Puente Alfaro, y fueron ponentes los profesores Caridad Ocerín, Fernández Biarge, Dositeo Rodríguez, Guilera i Aguera, Dormido Bencomo y Sánchez Marcos. Las conclusiones, de gran trascendencia, fueron presentadas por don Pedro Albertos Pérez.

- La revista de investigación y experiencias didácticas "Enseñanza de las Ciencias", en colaboración con los Institutos de Ciencias de la Educación de las Universidades Autónoma de Barcelona y de Valencia, ha organizado el I Congreso Internacional sobre Investigación en la Didáctica de las Ciencias y de las Matemáticas. Puede obtenerse información en el teléfono (93) 6920200, extensión 1598. Nuestra Sociedad está segura de que en este Congreso se obtendrán provechosos frutos para la Enseñanza.

- La Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas THALES ha organizado las II Jornadas Andaluzas de Didáctica de las Matemáticas, que se celebrarán en Almería, del 9 al 12 de Septiembre de 1985. En ellas intervendrán los profesores Ubiratan d'Ambrosio (del Brasil), Miguel de Guzmán, Alberto Requena, Teodoro Vives, Eladio Domínguez Murillo y Vicente Meavilla. La dirección de la Asociación Thales, en Almería, es: Plaza de Marín 14 (Ateneo). Deseamos a nuestros compañeros andaluces el mayor éxito en estas Jornadas.

- Entre los días 1 y 11 de julio tendrá lugar en Helsinki la XXVI Olimpiada Matemática Internacional. España, que ha sido invitada, presentará probablemente cuatro alumnos de C.O.U., previamente seleccionados. Ostentará la Delegación de nuestra patria el Catedrático de Geometría Diferencial de la Universidad de Granada, don Ceferino Ruíz Garrido, y la tutoría de los alumnos la profesora doña María Gaspar Alonso-Vega, del Instituto "Beatriz Galindo".

CORRIGENDA

En nuestro Boletín nª 5, al referirnos, en las páginas 4 y 51, al trabajo del Profesor Alan G. Kaye, decíamos que los "Coloquios Internacionales Universidad-Enseñanza Media" fueron organizados por la "Asociación para la Renovación de la Enseñanza", cuando lo correcto es que lo fueron por la "Asociación para la Renovación de la Didáctica".

ORDENADORES Y EDUCACION

Por Millán Arroyo
Director del Departamento de Pedagogía Sistemática de la Facultad de Filosofía y C. de la Educación. Universidad Complutense

---

Nota de la redacción: El presente artículo, está tomado del número de Marzo de 1985 de la revista RAZON Y FE. Agradecemos a su dirección y al autor, las amables autorizaciones para su reproducción en este Boletín.

LA excitante cuestión del uso de los ordenadores en educación se remonta a algo más de veinte años. En los años sesenta se anunciaba con sensacionalismo una "revolución educativa" (Papert, 1979)*. Luego resultaría que la tal revolución siempre estaba a la vuelta de la esquina. Hoy, en cambio, el poder casi mágico de esa herramienta llamada ordenador o microordenador ha hecho estallar la revolución. Y no ya sólo en la sociedad, en la economía, en la industria, en la oficina, sino también en la escuela y en el hogar. Increíble, pero cierto, una singular innovación tecnológica, el *chip* de silicio es en gran parte responsable de la revolución del ordenador y de la más amplia revolución de la electrónica de la cual él es sólo una parte. Componentes electrónicos cada vez más pequeños y más baratos han generado los microprocesadores y hecho posible la ola del ordenador en la sociedad de consumo. ¿Qué va a pasar en las escuelas? ¿Cómo va a afectar el fenómeno a la educación? ¿Cuál es en este momento el estado de la cuestión? ¿Qué podemos aprender de la experiencia de otros?

La revolución naciente

Los ordenadores están haciendo acto de presencia en las escuelas. En los países de tecnología avanzada es ya una ola creciente, que promueve cambios, innovaciones radicales, controversias y expectativas promisorias. En U.S.A. se estima que hay ya unos 500.000 ordenadores en las escuelas, y en el próximo quinquenio se va a doblar la cifra cada año (Bork, 1984, p. 178; Vaccari, 1985). En Inglaterra tras diez años de apoyo a un problema nacional de enseñanza-aprendizaje asistido por ordenador, se generalizan los programas didácticos y educativos con el ordenador BBC, construido por la casa Acorn Computer (Pentiraro, 1983). En Alemania salta el tema a las portadas de los semanarios, que hablan de "Revolución en la enseñanza. El ordenador materia obligada". Y se anuncia que el programa "Ordenadores en todas las escuelas, todos los alumnos frente al ordenador", entra en los planes de los Ministros de Educación de los Länder. Aunque hay resistencias y problemas (*Der Spiegel*, 19-XI-1984).

---

* Cfr. La referencia bibliográfica completa, al final del artículo.

En Francia, el nuevo Jefe de Gobierno ha anunciado con cierto aroma de "grandeur" la voluntad decidida de propulsar un plan nacional para que todos los franceses en todas las aldeas puedan tener acceso a la nueva cultura del ordenador. Y entre nosotros, el Ministerio de Educación, hace unos meses, en el SIMO (nov. 1984) y en unas Jornadas sobre Informática y Educación (18-20 nov. 1984), anunció publicitariamente su *Proyecto Atenea*, para introducir los ordenadores en las aulas. Como diciendo: no podemos, no queremos perder el tren de la nueva revolución educativa. Qué alcance y repercusión tendrá ese proyecto, es todavía una incógnita (*El Periódico Informático,* 6-XII-1984; *Diario 16,* 7-XII-1984). La inquietud existe en Italia, con todavía escasos apoyos públicos. A juicio de Pentiraro (1984, p. 187) los ordenadores instalados en las aulas son unos 3.000. De eficiencia didáctica no hay datos comprobados (Theodori, 1985). Otros países, como Japón, se sitúan en la vanguardia tecnológica de la revolución educativa, impulsada por la agresividad de su "marketing" multinacional. Canadá y además países del mundo occidental entran en la órbita de la nueva cultura y tecnología de los ordenadores.

Toda revolución genera traumas; sus dosis de utopía provocan recelos; y no siempre puede aportar garantías para los cambios radicales que postula. Todo ello desemboca en la controversia. El debate en cuanto al papel que los ordenadores van a jugar en la educación está planteado.

¿Van a afectar los ordenadores a la educación?

Que los ordenadores van a afectar a la educación y a las escuelas de algún modo y en algún grado, nadie lo discute. Al menos indirectamente a través de las repercusiones económicas, de estructura, de empleo, de transformación de servicios, de comunicaciones, de potencial informativo, etc. Pero la cuestión vital es cómo van a afectar al auténtico desarrollo de la personalidad, al aprendizaje en general, a la transmisión de la cultura, al proceso de una óptima socialización enriquecedora, al desarrollo de la inteligencia y la creatividad personal.

Las opiniones se decantan, de un lado, hacia posturas netamente optimistas y, de otro, aunque más escasas, hacia juicios más bien negativos, escépticos o pesimistas. Para Bork, director del Centro de Tecnología Educativa de la Universidad de California, Irving, y autor de varios libros importantes sobre los ordenadores y la educación (1980, 1981, 1984), "el ordenador es el nuevo y más poderoso instrumento de aprendizaje desde la invención de la prensa impresa y el libro de texto" (1984 b, 178). En cambio, el profesor de Pedagogía de Bielefeld (Alemania Occ.) Von Hentig declaraba en un programa televisivo de gran audiencia que "el ordenador es un instrumento poco infantil, antifilosófico, impolítico" que le gustaría mantener lejos de las escuelas (*Der Spiegel,* 19-XI-1984).

Tales actitudes contrapuestas pueden ampararse en una cobertura defensiva apelando a experiencias, pasadas o presentes, deducciones hipotéticas, juicios de valor y predicciones más o menos fundadas. Por uno y otro bando habría que hacer muchas matizaciones. Señalemos cómo se ve el debate en torno a los ordenadores y la educación desde la doble perspectiva optimista o escéptico-pesimista.

La visión optimista

Participan de ella quienes asocian a los ordenadores con la pronta realización de muchos cambios soñados por los reformadores de la educación o postulados por la mejor psicología y pedagogía científica. He aquí algunas de sus mejores expectativas:

1. El final de los problemas de adquisición de las destrezas básicas de lectura, escritura, cálculo aritmético, en la medida en que primero pueden ser fácilmente aprendidas mediante ordenador y luego, en la vida cotidiana y profesional, potenciada su aplicación con la nueva "herramienta" tecnológica.
2. Liberar a los profesores de tareas repetitivas, administrativas y burocráticas, de modo que puedan prestar su atención a aspectos más personalizados de la enseñanza, a actividades más creativas, a un contacto más individualizado con los estudiantes o su medio ambiente.
3. Los ordenadores podrán atender a necesidades de aprendizaje de estudiantes físicamente impedidos, bilingües, mejor dotados, con anomalías de aprendizaje o retrasados, retenidos en su hogar, emocialmente perturbados, delincuentes, aislados geográficamente, apenas motivados, etc.
4. Volverán a renacer escuelas más pequeña, más locales, aunque ahora, gracias a los ordenadores, sin las desventajas de la carencia de recursos que en otro tiempo sufrieron y determinaron su desaparición.
5. Se optimizarán los recursos pedagógico-didácticos mediante el vídeo, color, gráficos de alta resolución, animación, sonido, síntesis de lenguaje, interacción, y la capacida de manipular con velocidad y precisión grandes cantidades de datos.
6. Las escuelas interconectadas con amplias redes de información y comunicación permitirán a maestros y estudiantes un fácil acceso a una cantidad y calidad de conocimientos hoy muy costosos de adquirir.
7. Los lazos familiares se consolidarán al permitir los ordenadores trabajar en casa a más gente. Habrá niños menos alienados y los padres se interesarán más por las experiencias escolares de los hijos.
8. Los ordenadores se convertirán en antídoto para muchos efectos negativos de la televisión, por cuanto su uso promueve una conducta activa, creativa, individualizada en los niños.

Esta es, sin duda, una visión esperanzadora y brillante de lo que puede hacerse con los ordenadores.

La visión escéptica y crítica

¿Es realista la visión anterior? Para otros, más escépticos y críticos, resulta más bien ingenua. He aquí sus motivos para enfriar el optimismo. Consideran previsible:

1. Una erosión de la cultura de la letra impresa en la cual se basan las escuelas, a medida que se gasta más tiempo con los ordenadores y menos con libros y revistas.
2. Un declive en las destrezas de cálculo necesarias, al ir confiando a los ordenadores cada vez más el uso habitual de los números.
3. Nuevos problemas y presiones sobre la escuela para ofrecer igualdad de oportunidades en una sociedad en la que el ordenador va a ensanchar probablemente las distancias entre ricos y pobres, poderosos y desprovistos de medios.
4. Más resistencia a la escuela, que no puede ofrecer la excitación inmediata de los juegos de ordenador.
5. Utilización pasiva y rutinaria del ordenador. Seducción del niño ante la pantalla, falsa imagen de la realidad y de la vida, con lo cual se alejaría al niño de múltiples experiencias humanas y de contacto con la naturaleza.
6. Frente a la visión optimista del ordenador en sí mismo como producto tecnológico, los críticos subrayan, apoyados en experiencias, las deficiencias de los aparatos, que también alguna vez se estropean; la dificultad y coste del mantenimiento; la no segura compatibilidad de los programas en aparatos deferentes, a pesar de la publicidad, y a veces en equipos de la misma marca. Otra fuente de problemas proviene de las deficiencias de los manuales de instrucción: o excesivamente técnicos o incompletos.
7. El uso limitado de tiempo por persona ante cada pantalla, el alto coste de determinados equipos y su ulterior alimentación con programas de calidad han disminuido no pocos entusiasmos iniciales.

¿Qué postura cabe adoptar frente a los argumentos entusiastas y críticos de los ordenadores en educación? Al margen del probable idealismo de unos y de un cierto prejuicio negativo en otros, se impone a cualquier educador la aceptación en principio de un instrumento tecnológico, dotado de un potencial educativo extraordinario. No hay nada mágico en el ordenador. Como cualquier tecnología puede usarse bien o mal. Por eso la preparación adecuada en los educadores exigirá tomar conciencia de las reales, no utópicas, posibilidades del ordenador así como de sus limitaciones o riesgos. En la historia reciente del uso de los ordenadores en educación, sobre todo en la última década, abundan ya elementos para un análisis fructífero. (*Creat. Comp.*, 1984; Ahl, 1984.)

Aplicaciones educativas del ordenador

La verdadera revolución del ordenador que estamos viviendo tiene su origen inmediato a mediados de 1975 con la aparición de los primeros microordenadores. Poco después, con la entrada en el mercado en 1977 de los sistemas compactos, se da el impulso definitivo. El éxito de Apple II, Commodore Pet y TRS-80 inauguran la gran batalla comercial del mercado del ordenador personal (PC-Personal Computer) (Ahl, 1984, p. 30 y ss.). En 1981 el gigante azul IBM entra en escena y convierte en estándar a su IBM-PC, generando en seguida múltiples imitadores.

Ese momento crucial a mediados de los setenta permite discriminar dos etapas en la importancia que revisten las aplicaciones del ordenador a la educación. Antes de 1975 el esfuerzo se vuelca en la investigación, desarrollo de proyectos piloto, elaboración de programas. El influjo en la educación masiva será más bien escaso según confirmó en 1972 un importante estudio (Anastasio, 1972). Los costes de los grandes ordenadores principales —mainframe— eran muy elevados y los estudiantes, que podían utilizar los terminales de tiempo compartido en las clases, una minoría privilegiada (Brumbaugh, 1984).

Para la mejor comprensión de cómo pueden ser utilizados los ordenadores en educación, contamos ahora con la perspectiva de un lapso de veinte años de constantes innovaciones y experiencias de variado éxito. No hay unanimidad en cuanto a la clasificación sistemática de aplicaciones educativas del ordenador, depende de los criterios adoptados. Así, el Laboratorio Regional Educativo del Nordeste (U.S.A.) ve al "ordenador como: instructor, laboratorio, calculador, objeto de instrucción y ayudante del instructor". Coburn et al. (1982) mencionan cinco categorías de aplicación: enseñanza asistida por ordenador (CAI); instrumento de enseñanza/aprendizaje; instrucción gestionada por ordenador (CMI, Computer Managed Instruction); programación; alfabetización informática ("computer literacy"). Simplificando la cuestión, Sherwood de la Universidad de Nueva York distingue tres enfoques: aprenderse *el* ordenador, aprender *a través del* ordenador, aprender *con* el ordenador. Pentiraro (1983, p. 43) añade una cuarta tarea: imponerse en la cultura de la informática.

Con alguna variante de matiz compartimos estos dos últimos enfoques. No obstante, en la exposición atendemos a la vigencia en el desarrollo histórico de las aplicaciones y al papel ideológico ejercido por algunas figuras relevantes. Se puede, pues, categorizar el uso de los ordenadores en educación como: 1. Aprender *a través* del ordenador; 2. Aprender *con* el ordenador (instrumento de *aprendizaje universal* y de *trabajo*); 3. *Autoeducarse-Educar en interacción* con el ordenador; 4. Aprender *el* o *sobre el* ordenador: "cultura informática".

Aprender a través del ordenador (CAI-EAO)

Es la primera utilización al servicio de la enseñanza y la didáctica. El influjo de la psicología skinneriana produjo la "máquina de enseñar" y el desarrollo de la enseñanza programada en los años cincuenta y sesenta (Skinner, 1954, 1965). Patrick Suppes, del Instituto de Estudios Matemáticos para las Ciencias Sociales en la Universidad de Stanford, ha sido considerado casi como el padre de la *Enseñanza Asistida por Ordenador* (Coburns et al., 1982) —Computer Assisted Instruction, CAI—. No se cumplió del todo su sueño: hacer de cada alumno un nuevo Alejandro Magno con un ordenador como tutor individual, tan inteligente, creativo y brillante como Aristóteles. Pero todos sus esfuerzos se orientaron a optimizar la enseñanza por medio del ordenador, la mejor "máquina de enseñar" y el más versátil instrumento audiovisual. El enorme esfuerzo requerido para diseñar los sistemas y su elevado coste obligó a Suppes a concentrar su interés en poblaciones específicas: estudiantes de bajo rendimiento o con anomalías, grupos pequeños, alumnos bien dotados eran los destinatarios principales. Dos organizaciones, la *Computer Curriculum Corporation* fundada por Suppes y el MECC *(Minnesota Educational Computing Consortium)* impulsado por Brumbaugh (1984) ejercerán, a partir de entonces, gran influencia en el desarrollo de materiales educativos para el ordenador.

Se diferencian como modalidades de EAO: los programas de *ejercicios y prácticas* ("drill and practice"); los propiamente *"instructivos" o "tutoriales"* (el ordenador hace de maestro que expone, pregunta, corrige, evalúa); las *demostraciones* (Ciencias, fisiología, matemáticas, astronomía), apoyadas en gráficos, color, sonido para presentar la realidad o esquematizarla. Tales aplicaciones más o menos tradicionales se complementan con otras dos más difíciles de programar, pero que tienen su mejor soporte en la tecnología del ordenador: las *simulaciones* y los *juegos educativos*. (Thomas, ed., 1981; Edwards et al., 1978; Horn y Cleaves, 1980; *Annual Soft.,* 1985; Loras, 1984).

Aprender con el ordenador

En la EAO el ordenador está al servicio de la enseñanza. Primariamente ayuda o sustituye al maestro. "Aprender-con" equivale a afirmar que el ordenador se convierte en "instrumento" con el que nos abrimos ilimitadas posibilidades de aprendizaje dentro y fuera de la escuela.

Arthur Luehrmann ha sido uno de los destacados promotores de un concepto más amplio y profundo de la llamada "computer literacy" (Taylor, 1981). Esta expresión no significa, como para otros, una información básica sobre los ordenadores o el mero uso didáctico de los mismos, sino más bien el dominio de las destrezas necesarias para *controlar* los ordenadores. Exige, por tanto, aprender a *programar*, potenciando así al máximo el aprendizaje personal y creativo gracias al ordenador y la iniciativa individual. En su célebre artículo *Should the Computer Teach the Student or Vice-Versa?* (1972) planteó Luehrmann su tesis, inmediatamente compartida por muchos y discutida por otros (Johnson et al., 1981). El sistema CAI no era suficiente para aprovechar el enorme potencial educativo de la nueva tecnología. Automatismo, dirigismo y actitudes pasivas podrían perpetuarse bajo la seducción de una pantalla dialogante reemplazando al profesor. Así sólo formaríamos ciudadanos de segunda clase, de una sociedad en la que los puestos de empleo, el status social y la influencia cada vez más irán siendo asumidos por quienes puedan comprender y controlar los ordenadores. En 1981, Luehrmann funda su propia compañía *Computer Literacy Inc.* y empieza a desarrollar programas destinados a enseñar a todos los estudiantes del final de la educación elemental a programar ordenadores mediante el lenguaje BASIC (Luehrmann, 1982). La tesis es obvia: lenguaje y programación —el "software"— son los poderosos resortes con que contamos para obtener el máximo rendimiento del equipo físico o máquina —"hardware"— (Riedl, Liedtke, 1985).

Programar al ordenador

Los objetivos de la educación se ampliarán al dominio de los diversos lenguajes. Recordemos que hemos de hablar a la máquina en un lenguaje que ella "entienda", o con un lenguaje que le sea traducido. Sobre la base del "lenguaje máquina" —sistema binario— de máxima comunicación, fueron surgiendo con los ordenadores, primero, los lenguajes de "bajo nivel": *Ensamblador* (1945), y *Macroensamblador* (1950), próximos al lenguaje máquina. En la década de los cincuenta aparecen los lenguajes de "alto nivel", con instrucciones muy semejantes al lenguaje humano, como el COBOL (*Common Business Oriented Language*) para aplicaciones de gestión, administración y cálculo, y el FORTRAN (*Formula Translation*), desarrollado por IBM para la investigación científica y técnica. El acontecimiento más significativo, visto ya con perspectiva histórica, tiene lugar a mediados de los años sesenta en el Darmouth College (New Hampshire, USA). Los profesores Kemeney y Kurtz elaboran las primeras versiones del lenguaje BASIC (iniciales de Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code). Por su sintaxis sencilla y aprendizaje relativamente fácil el BASIC se ha convertido, con múltiples adaptaciones a distintos equipos, (Lockwood, 1984) en el lenguaje de programación más difundido del mundo. Sobre él hay una amplísima literatura (Annual Software Review, 1985; Joyanes, 1984; Lien, 1984). Como última novedad Kemeney y Kurtz anuncian el *True Basic* (Fluegelman, 1984; Stewart, 1984).

El ordenador: "Herramienta" de trabajo

Menos conocidos, aunque en ascendente estimación entre los expertos destacan el lenguaje PASCAL y el lenguaje "C", ambos potentes, flexibles, pensados para la programación estructurada. Un nuevo lenguaje de programación ADA (nombre de la condesa Ada, hija de Lord Byron y colaboradora de Babbage), está orientado al proceso en tiempo real. Finalmente, por su especial aplicación pedagógica, destaquemos el PILOT (Programmed Inquiry Learning or Teaching), llamado lenguaje de autor por destinarse, sobre todo, a la preparación de "software" educativo.

Otro tipo de programas convierten al ordenador no tanto en instrumento de aprendizaje como en instrumento o "herramienta de trabajo". Con ayuda del ordenador, tareas complejas y difíciles se resuelven con una rapidez y precisión asombrosa. Pertenecen a este tipo los programas de análisis y proceso de datos, contabilidad, gráficos y, entre los de más éxito, los de "proceso de textos" (1) una de las "grandes razones" por la que el ordenador llega a la oficina, el hogar o la clase (Lockwood, 1984, p. 126). En 1984 se ha producido en el "software" instrumental un salto cualitativo, con la aparición de los programas

---

(1) Agradecemos las demostraciones de los equipos especiales de proceso de textos de Olivetti (ETS-1010 WS) y de Digital Equipment (AEC-Mate III). Asimismo la verificación de programas de proceso de textos facilitada por los distribuidores: IDYNSA (*Easy Writer,* en IBM-PC; MacWrite, en Macintosh de Apple); Ibérica Digital (*Wordstar,* en Rainbow de Digital) e Intermicros, S. A. (*Wordperfect* en IBM-PCXT). La calidad alcanzada por el proceso de textos en ordenador satisfará todas las exigencias de quienes trabajan el lenguaje.

o paquetes "integrados" (v. gr. Open Access, Symphony, Framework, Peach Pack) (García, 1984; Hood et al., 1984). La utilidad del ordenador se incrementa día a día, con la aparición de programas para tareas y profesiones específicas: abogados, médicos, farmacias, etc. (*Annual Soft.*, 1985); y por supuesto con la adaptación castellana del software. (Guía-PC Magazine, 1984).

Educación y autoeducación en interacción con el ordenador

La postura más avanzada y de mayor transcendencia educativa en el uso de los ordenadores está representada por las ideas de Seymour Pappert. A finales de los años sesenta, más preocupado por crear condiciones óptimas de educación del niño que por su adaptación a un puesto de trabajo en la sociedad informatizada, decide Papert crear un lenguaje para ordenador con finalidad expresamente educativa y utilizable incluso por los niños. Sus ideas, expuestas con singular vigor y originalidad, encierran toda una filosofía y psicología de la educación, con sólidas bases científicas, de clara intencionalidad crítica frente a ciertas orientaciones presuntamente educativas del uso del ordenador. Nos ofrece una visión optimista sobre la posible revolución educativa previsible, si sabemos utilizar bien el ordenador como educadores. Su pensamiento, expuesto primero en trabajos parciales, se apoya en el proyecto de investigación LOGO (Papert et al., 1980; 1979), y cristaliza en un best-seller de la problemática ordenadores y educación con el explícito título *Mindstorms: Children Computers and Powerful Ideas* (Papert, 1980 b) (2).

Papert explica en su obra las investigaciones realizadas por su equipo del MIT (Massachusetts Institute of Technology) que dan origen a la creación de un nuevo lenguaje de ordenador, el LOGO. Por su formación previa Pappert estaba mejor que nadie capacitado para una creación tan original y compleja. Profesor de matemáticas e interesado por la psicología del aprendizaje pasa seis años en Ginebra trabajando directamente con Jean Piaget. Vuelve al Laboratorio de Inteligencia Artificial del MIT, donde en 1968 iniciará las experiencias del LOGO y la famosa "tortuga" con alumnos de diversas edades. Pappert subraya la radical diferencia de su proyecto con la "enseñanza asistida por ordenador":

> "En muchas escuelas de la actualidad, la frase "enseñanza asistida por ordenador" significa hacer que la computadora *enseñe* al niño. Podría decirse que *se utiliza al ordenador para programar* al niño. En mi concepción, *el niño programa al ordenador* y, al hacerlo, adquiere un sentido de dominio sobre un elemento de la tecnología más moderna y poderosa y a la vez establece un íntimo contacto con algunas de las ideas más profundas de la ciencia, de la matemática y el arte de construcción de modelos intelectuales" (1981, p. 18).

(2) La idea de "torbellino" o "revolución mental" —*Mindstorms*— queda mitigada en la versión castellana existente: *Desafío a la mente. Computadores y educación.* Buenos Aires: Ed. Galápago, 1984.

El "ambiente LOGO"

La idea piagetiana del niño como "constructor" de sus propias estructuras intelectuales, si cuenta con el medio adecuado (Arroyo, 1980), ha sido explorada genialmente por Papert inventando un lenguaje aparentemente sencillo, dotado de gran flexibilidad y sin techo en cuanto a complejidad eventual. LOGO sirve para dictar órdenes y programar a la "tortuga", ente real en pantalla capaz de orientación y movimiento. La "tortuga" obedece y deja la huella visible de lo que la mente del niño concibe, y comunica. El efecto perceptible inmediatamente puede ser interpretado, corregido, mejorado por el niño.

El LOGO original elaborado por Papert, ha dado lugar a distintas versiones enriquecidas con nuevas posibilidades gracias al avance tecnológico de los ordenadores. Destacan las versiones para el TRS80 Color Computer, el Coleco Adam y sobre todo las varias de que disponen los ordenadores APPLE y los IBM-PC. También hay versiones para el TI 99/4A, Commodore 64 y Atari (Roth, 1984).

Pappert no ve la tecnología del ordenador como un mero instrumento al servicio de la enseñanza en las escuelas ("reformistas"), ni aun siquiera como las máquinas de enseñanza en todos los hogares, conectadas con redes, que harán obsoleta a la escuela que conocemos ("revolucionarios"), sino como un catalizador que, al brindar un ambiente de aprendizaje optimizado, hace posible que de la matriz activa de la mente del niño broten ideas poderosas en interacción con un ambiente —"ambiente LOGO"— de un modo connatural, activo, reflexivo, crítico, en suma, como si de un investigador nato se tratase. Y es que el niño en realidad lo es, como decía Piaget. Por eso afirma: "Mi propia filosofía es revolucionaria antes que reformista en su concepto del cambio. Pero la revolución que yo avizoro es de ideas, no de tecnología. Consiste en nuevas comprensiones de dominios temáticos específicos y en nuevas comprensiones del proceso mismo de aprendizaje. Consiste en la fijación de un rumbo nuevo y mucho más ambicioso de las perspectivas de las aspiraciones educacionales" (1981, 213).

El problema principal que se presenta a la visión revolucionaria de Pappert es el de los maestros. Se requieren personas que no sólo dominen muy bien su materia específica, sino los mecanismos y procesos psicológicos subyacentes en el verdadero aprendizaje. Formar a tales personas y desarrollar los materiales adecuados para apoyar nuevas formas de enseñanza y aprendizaje se convierte en la dificultad crítica para que la idea de Pappert llegue a generalizarse. Nuevas experiencias y aplicaciones de las ideas de Pappert irán demostrando con el tiempo que la orientación por él iniciada, aunque no fácil de realizar, es, desde una sana antropología pedagógica, la más correcta.

La cultura informática: nuevo desafío educativo

Toda tecnología innovadora está llamada a transformar de algún modo las pautas de vida individual y social. Teléfono, radio, automóvil, avión, televisión, vídeo, electrónica, forman parte del entramado de una civilización cuyos destellos luminosos, y también sus sombras, nos afectan.

Por otra parte, mirando al pasado no vemos que los métodos y la praxis del proceso de la educación a nivel individual e institucional hayan sufrido alteraciones profundas. Diríase que el proceso básico de socialización e inculturación a través de la familia y la escuela se desarrolla aun hoy según pautas semejantes a las de hace un siglo. Tan sólo la generalidad del acceso a la cultura básica y la participación en la cultura de masas, servida por los grandes medios de comunicación, señalan un cambio socialmente perceptible. Su incidencia ha sido más bien cuantitativa, con escasa relevancia en la dimensión metodológica y cuantitativa. Al observar *cómo se aprende y cómo se enseña* hoy, será difícil etiquetar como "revolucionario" el proceso educativo del hombre actual frente al de generaciones anteriores.

¿Cabe pensar que tampoco la llamada "revolución informática" va a afectar mucho al ámbito de la educación? Los indicios, ya realidades próximas, apuntan a transformaciones profundas. La información, como base de la actividad intelectual, y la información procesada, es decir la Informática, potenciadas por la tecnología derivada de la microelectrónica, están cambiando sustancialmente la realidad que nos rodea. Con la *Robótica* alumbra ya la nueva revolución postindustrial; la *Telemática* venciendo espacio y tiempo, extiende el alcance del ojo y oído humanos a todo el planeta; la *Burótica u Ofimática* traza ya veloces autopistas en la hasta ahora inmensa jungla burocrática. Y el *ordenador personal* se convierte en instrumento individual accesible, capaz de hacer partícipe a cada uno del enorme potencial educativo que entraña.

La necesidad, pues, de una "cultura informática" afecta en principio a todos. Constituye una responsabilidad sociopolítica para las autoridades educativas de cualquier país. Como fenómeno socio-cultural es ya un signo de nuestro tiempo. Han pasado sólo diez años desde que en enero de 1975 se lanzaba al mercado el *Altair 8800* como "el primer miniordenador del mundo" (Forrest, 1984); ahora disponemos, sólo en el mercado español, de unos 250 modelos en la escala que va desde los microordenadores hasta los equipos de media gestión (Haymarket, 1985). El mismo año 1975 se abría en Los Angeles la primera tienda de ordenadores (Ahl, 1984); hoy se hallan extendidas por todo el mundo. A las dos primeras revistas especializadas en ordenadores de 1975, *Creative Computing y Byte* han seguido una serie de publicaciones de todo tipo distribuidas por grupos multinacionales en todo el mundo en ediciones paralelas o filiales. El espacio ocupado en los quioscos de prensa es un claro testimonio de su calado social. El desarrollo científico de la Informática y sus aplicaciones viene reflejado en centenares de revistas especializadas (3).

Si a todo ello añadimos el impacto de la nueva tecnología en las estructuras socioeconómicas y de empleo, no parece exagerada la afirmación de Goldberg (1984) de que "estamos en una trayectoria dramática de cara al año 2000.

(3) Agradecemos la cortesía de la librería *Díaz de Santos*, S. A. (Madrid), que en breves minutos, mediante ordenador, nos ha facilitado información completa sobre más de 400 revistas de informática.

Hacia 1990, por ejemplo, habrá 30 millones de empleos relacionados con el ordenador". Y habla sólo de USA.

La consecuencia lógica de todo ello es que un cierto grado de "cultura informática" se impone a cualquier persona responsable. Al menos en la medida en que su carencia puede limitar su desarrollo personal y profesional o incapacitarle para ayudar a otros. Pienso en el papel de padres y educadores que con sus actitudes pueden condicionar, para bien o para mal, la orientación futura de los jóvenes.

Por lo demás, concierne a la autoridad pública tomar conciencia, como sucede en otros países, de la importancia que reviste el desarrollo de la "alfabetización informática" y de la "cultura del ordenador" en relación con el progreso humano y social. Hemos de saltar a un tren que acelera su marcha hacia el siglo XXI. Ello obliga, por supuesto, a un serio estudio de opciones y alternativas, para luego adoptar decisiones eficaces.

Actitudes, opciones y decisiones

Cuanto hemos dicho hasta aquí puede contribuir tal vez a promover un cambio de actitudes en torno a la relación ordenadores y educación. El hombre adulto, cogido de sorpresa por la nueva tecnología, necesita superar la natural aprensión y hasta el miedo hacia esos artilugios que entusiasman a niños y adolescentes. Habrá que recordar que no se trata de "juguetes", aunque para muchos sean un "fantástico juguete", sino de instrumentos poderosos que van a configurar muchos aspectos de la vida personal y social.

Asumida una actitud favorable al ordenador y resuelta la alternativa "¿comprar o no comprar?", surgen inmediatamente las cuestiones: ¿qué aparato o sistema?, ¿qué ventajas o inconvenientes?... Y luego las dudas otra vez a medida que aparecen las múltiples ofertas del mercado. De la abundante literatura especializada sobre "¿cómo elegir un ordenador?", resaltemos la estrategia principal que puede evitar muchos errores, y tener su influencia educativa.

Esa estrategia abarca esencialmente tres fases: 1) Existencia de *motivación* real, basada en una *necesidad* real —personal, institucional, social—; 2) estudio del *software* disponible en el mercado, *programas* que resuelven el problema o satisfacen la necesidad y las ventajas que ofrecen; 3) elección del *hardware* o equipo físico que mejor satisfaga las necesidades contempladas. Es obvio que el factor *económico,* aun siendo importante, ha de conjugarse con otras variables como la *potencia* y *flexibilidad* del sistema, la *pluralidad de lenguajes* admisibles, etc., que pueden modificar sustancialmente el concepto de *rentabilidad.*

También sin duda, el ahorro de *esfuerzo físico* y de *tiempo* producidos por el ordenador constituye un factor de clara incidencia económica.

Si trasladamos el problema al plano más elevado de las decisiones políticas que van a repercutir en la introducción de los ordenadores en las instituciones educativas, permítasenos recordar la experiencia acumulada en otros países. Los problemas educativos no se resuelven por el mero hecho de desembalar una caja con un teclado, la Unidad Central de Proceso, una pantalla o monitor y la impresora, los cuatro elementos imprescindibles del "hardware", junto con algún que otro *programa*. La eficacia educativa del aparato dependerá en gran parte, y casi decisivamente, del grado de *preparación del profesorado* que va a utilizar el ordenador para sí o al servicio de los alumnos. De ahí que la cuestión: "¿Cómo proporcionar a los maestros la formación necesaria para obtener la mayor rentabilidad educativa del ordenador en la escuela?", adquiere la máxima importancia. Como también la tiene para paliar esa necesidad el que los Departamentos de Pedagogía universitaria dispongan cuanto antes de un mínimo de *equipos* para que profesores y alumnos puedan iniciar tareas de investigación, estudio, creación y valoración de programas. Equipos, es desalentador decirlo, que todavía no existen.

Las decisiones importantes que se adopten a nivel nacional relativas a los ordenadores y la educación van a condicionar por largo tiempo nuestro futuro. No en vano, como ha dicho Stonier (1984, p. 252), presidente de Applied Systems Knowledge, empresa inglesa destacada en producción de *software* educativo: "El ordenador representa la primera genuina revolución de la educación en más de un siglo."

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

AHL, D. (1984). The first decade of personal computing. *Creative Computing, 10* (11), 30-48.

ANASTASIO, E. y MORGAN, J. (1972). Study of factors that have inhibited a more widespread use of computers in the instructional process. Princeton, N. J.: EDUCOM-E.T.S.

Annual Software Review (1985). *PC World* (Special edition), *2*(14), Winter 1984/1985 (1.500 programas para IBM-PC y compatibles).

ARROYO, M. (1980). Jean Piaget, un genio innovador. *Razón y Fe*, 992, 338-347.

ARROYO, N. (1984). Singularidad y complejidad de la Pedagogía. En *Presente y futuro de la educación. Cincuentenario de los estudios universitarios de Pedagogía* (pp. 169-192). Madrid: Edit. Universidad Complutense.

BORK, A. (1980). *Computer assisted learning in physics education*. New York: Pergamon Press.

BORK, A. (1984a). Computer futures for education. *Creative Computing, 10* (11), 178-180.

BORK, A. (1981). *Learning with computers*. New York: Digital Press.

BORK, A. (1984b). *Personal computers for education*. New York: Harper and Row.

BULLON, P. (1984). Por fin el Proyecto Atenea. *Ordenador Popular*, 20, dic., 99-100.

BRUMBAUGH, K. (1984). Reflections on educational computing. *Creative Computing, 10* (11), 170-173.

COBURN, P. et al. (1982). *Practical guide to computers in education*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

Cómo comprar un equipo (1984). *Informática Práctica*, 7, nov.-dic., 3-10.

Cómo elegir un procesador de textos. (1984). *Informática Práctica*, 7, nov.-dic., 11-18.

Computer in alle Schulen, alle Schulen an die Computer. (1984). *Der Spiegel*, 47, 19 nov., 97-129.

Creative Computing. (1984). *Tenth Anniversary*. *10* (11), November. (N.° monográfico).

DERTOUZOS, M. y MOSES, J. (Eds.) (1979). *The computer age: A twenty year view*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

EDWARDS, J. B., ELLIS, A., RICHARDSON, D., HOLZNAGEL, D. y KLASSEN, D. (1978). *Computer applications in instruction: A teacher's guide to selection and use*. Hanover, N. H.: TSC/Houghton Mifflin.

FLUEGELMAN, A. (Ed.) (1984). In quest of True Basic. *PC World, 2* (12), 120-128.

GARCIA, R. (1984). Paquetes integrados: Symphony, Open Access, Peach Pack. *Informática Test*, 15, noviembre, 62-74.

GOLDBERG, S. (1984). Computer technology: Greatest impact on America since the industrial revolution. *Creative Computing, 10*, 11, 280-284.

Guía del comprador. (1984). *PC Magazine* (ed. cast.), *1*, (1), 89-98. (Catálogo de software para IBM PC y compatibles).

Guía del comprador de Informática 85 (1985). Barcelona: Haymarket. (Información completa de equipos, y características, en el mercado, desde nanocomputadores a media gestión).

HOOD, R. R., WILDING, M. y GOLDNER, P. (1984). Symphony versus Framework. The Corporate Showdown. *PC Magazine, 3* (24), 278-286.

HORN, R. E. y CLEAVES, A. (Eds.) (1980). *The guide to simulation/Games for education and training* (4.ª ed.). Beverly Hills: Sage Publications.

Informática en los colegios americanos-USA. (1985). *Microsistemas*, 18, febrero, 69-74.

JOHNSON, A. et al. (1980). Computer literacy. What is it? *Mathematics Teacher, 73*, 2, february.

JOYANES, L. (1984). *Programación Basic para microcomputadoras*. Madrid: McGraw-Hill. Lenguajes de programación (1984). *Informática Práctica*, 7, nov.-dic., 27-34.

LIEN, D. A. (1984). *Diccionario del BASIC*. Barcelona: Elisa, S. A.

LOCKWOOD, R. (1984a). Choosing and using a word processor. *Creative Computing, 10* (12).

LOCKWOOD, R. (1984b). The genealogy of Basic. *Creative Computing, 10* (11), 86-87.

LORAS, E. y RECASENS, R. (1984). EAO. La nueva formación. *Informática Test*, 16, 59-72.

LUEHRMANN, A. (1972). Should the computer teach the students or vice-versa? *Proceedings of the American Federation of Information Societies*. Cf. en R. TAYLOR (1981).

LUEHRMANN, A., PECKHAM, H. y RAMIREZ, M. (1982). *A first course in computing*. New York: McGraw-Hill.

LUEHRMANN, A. (1981). Computer literacy: What should it be? *Mathematics Teacher, 74*, 9, december.

MIMS, F. M. (1984). Early days at MITS. The Altair story. *Creative Computing, 10* (11), 17-27.

MUÑOZ, J. (1984). Software educativo. *Informática Test*, 16, 79-86.

PAPERT, S. (1979). Computers and learning. En: M. DERTOUZOS y J. MOSES (Eds.).

PAPERT, S. (1980a). *Mindstorms: Children, computers and powerful ideas*. New York: Basic Books. (Trad. cast.: *Desafío a la mente: Computadoras y educación*. Buenos Aires: Ed. Galápago, 1984, 3.ª ed.).

PAPERT, S., ABELSON, H., DISESSA, A., WATT, D. y WEIR, D. (1980b). *The final Report of the Brookline LOGO Proyect*. Cambridge; Mass: MIT LOGO Group.

PENTIRARO, E. (1984). *El ordenador en el aula*. Madrid: Anaya.

RIEDL, H. y LIEDTKE, J. (1985). Basic in Unterricht: Pro und Contra. *Chip. Das Mikrocomputer Magazine*, Januar, 22.

ROTH, R. (1984). A comparison of logos. *Creative Computing, 10* (12), 94-106.

SKINNER, B. F. (1965). Reflections on a decade of teaching machines. En R. GLASER (Ed.), *Teaching Machines and programmed learning. II. Data and directions* (5-20). Washington: NEA.

SKINNER, B. F. (1954). The science of learning and the art of teaching. En A. A. LUMSDAINE y R. GLASER (Eds.) (1960), *Teaching machines and programmed learning* (99-113). Washington: NEA.

STEWART, G. (1984). EL BASIC auténtico (True Basic). *Ordenador Popular, 2* (20), 58-72.

TAYLOR, R. P. (Ed.) (1981). *The computer in the school: Tutor, tool, tutee*. New York: Teachers College Press.

TEODORI, M. A. (1985). Il computer nelle scuole. La realtà intaliana. *Europeo, 41* (3), Gennaio 17, 101-103.

THOMAS, J. L. (Ed.) (1981). *Microcomputers in the schools*. Phoenix: Ariz.: The Onyx Press.

VACCARI, L. (1985). Il computer nelle scuole. L'esperienza americana. *Europeo, 41* (3), Gennaio 17, 98-101.

EJERCICIOS CRITICOS SOBRE ALGORITMOS

Por Julio Fernández Biarge
Catedrático de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales

El concepto de algoritmo es todavía más antiguo de lo que sugiere el origen árabe de la palabra que lo designa, ya que procede de los matemáticos de la antigua Grecia, y siempre ha tenido un sitio en la enseñanza de las Matemáticas elementales. No obstante, el reciente desarrollo de la Informática ha aumentado enormemente su importancia, y hoy día, los alumnos de cualquier nivel deben encontrar motivos para ejercitarse en la comprensión, elaboración y discusión de algoritmos. Poco a poco deberán familiarizarse con ese concepto fundamental y con otros relacionados con él, como son los de ciclos, iteración, rutinas, procedimientos, recursividad (debería decirse recurrencia, evitando el anglicismo, pero la palabra está ya demasiado generalizada), etc. Se trata de temas cuya importancia conceptual excede con mucho a la de su papel instrumental en la programación con destino a los ordenadores.

La introducción de los conceptos mencionados en la enseñanza ha de tener un carácter eminentemente práctico; puede hacerse a través de diversas formas de expresión. En general, parece conveniente el uso de diagramas de flujo u organigramas, pero también puede utilizarse directamente un lenguaje de programación bien estructurado. El uso directo de lenguajes que no exhiben con suficiente claridad la estructura de los programas, como son el BASIC o el FORTRAN, presenta inconvenientes educativos, que hacen aconsejable la confección previa de organigramas.

La capacidad de los alumnos para adquirir las habilidades necesarias para valerse eficazmente de los algoritmos y de su expresión mediante organigramas, como medio eficaz de resolución de problemas, varía mucho de unos a otros. Hay alumnos que adoptan con rapidez y entusiasmo el nuevo medio de expresión que se les ofrece, valorando su sencillez y claridad, mientras que otros lo aceptan con cierta repugnancia, debido precisamente a sus exigencias de precisión y minuciosidad. Los resultados de la enseñanza de este tema en una clase pueden ser tan dispares como cuando se trata de enseñar a tocar la flauta o a saltar el potro.

La precisión y ausencia de ambigüedad a que obliga la expresión de soluciones de problemas mediante organigramas o lenguajes de programación (que constituye uno de los aspectos más educativos de su enseñanza), conduce inevitablemente a exigir análoga claridad y minuciosidad en la formulación del problema: No bastará con decir qué datos se dan y qué resultados se desean, sino que será importante saber en qué forma serán dados esos datos y cómo se desea expresar el resultado, y sobre todo, cuales son los medios que se suponen disponibles. El alumno se percatará muy pronto de que la dificultad del problema puede depender esencialmente de esos extremos, que en la enseñanza tradicional de las Matemáticas eran considerados como detalles sin importancia.

El estudio de los algoritmos debe de ir acompañado muy pronto de una invitación a su crítica desde el punto de vista de su eficiencia. Un mismo problema puede resolverse mediante distintos algoritmos, pero estos pueden conducir a ejecuciones más o menos laboriosas en cada caso concreto. Las diferencias de eficacia de unos y otros pueden llegar a ser enormes, hasta hacer que algunos de ellos deban de ser rechazados como impracticables cuando algún parámetro que mide el "tamaño" del problema se hace algo grande, por exigir tiempos de ejecución desorbitados, incluso con el auxilio de ordenadores rápidos. La experiencia convencerá al alumno, no obstante, de que la eficacia o calidad de un algoritmo no es un valor intrínseco del mismo, sino que depende muy esencialmente de los medios dispo-

nibles (capacidad de almacenamiento o memoria, rapidez de cálculo, necesidad de acceso a datos del exterior, etc.) y del tamaño de los problemas a que será aplicado.

Como invitación a reflexionar sobre la eficiencia comparada de distintos algoritmos, deberá presentarse a los alumnos algún problema que reúna ciertas características: Convendrá que admita diversidad de métodos de resolución; que por su escasa novedad, no distraiga la atención del alumno (que deberá concentrarse en los detalles del proceso de ejecución de cada algoritmo estudiado) y que aparezca en forma muy clara cuál es la solución a que se trata de llegar.

Un problema que reúne esas características es el de tomar una secuencia de elementos de un conjunto (números, nombres, registros, ejercicios de examen, documentos o libros) y colocarlos en un orden determinado, con arreglo a unas "claves" que los identifican. Se trata de un problema que apenas tiene contenido matemático; un profesor o un alumno de Matemáticas suele decir: "Sean $a_1, a_2, \dots, a_n$ los números del conjunto C, ordenados de menor a mayor", pero no hace referencia a cómo se ha conseguido ordenarlos efectivamente; le basta con saber que ello es siempre posible y que el resultado es único. Muy distinto es el punto de vista del informático, que sabe que en cada caso tendrá que llevar a cabo realmente la reordenación, si bien contará para ello con medios tan potentes como son los ordenadores.

Todos los profesores hemos ensayado consciente o inconscientemente diversos algoritmos para ordenar alfabéticmante un montón de ejercicios escritos (clave = primer apellido); así hemos adquirido la experiencia de que la eficacia de cada método probado depende mucho del tamaño de la mesa disponible y de si se trata de centenares o de millares de ejercicios. Un procedimiento que juzgásemos adecuado para esa tarea fracasaría sin duda si intentásemos aplicarlo a poner por orden alfabético de autores un gran montón de libros, para formar una biblioteca (sin haber hecho previamente un fichero de la misma).

Será preciso, por tanto, precisar qué es lo que se desea ordenar, y con qué criterio; supuesto que los alumnos han adquirido ya un cierto dominio de la interpretación o elaboración de organigramas, incluyendo el manejo de ciclos, índices y formaciones de variables (arrays), se puede reducir el problema a ordenar una secuencia de bloques de información de igual longitud, de cada uno de los cuales se puede extraer (con mayor o menor trabajo) una "clave" alfabética o numérica; la ordenación se hará moviendo efectivamente esos bloques, de modo que queden con sus claves por orden alfabético o numérico creciente (o no decreciente, al menos). Por ejemplo, cada bloque puede estar formado por un texto, y la clave consistir en sus ocho primeras letras, o por una terna de coordenadas, representando un punto, y la clave ser su distancia al origen, o por una tira de símbolos, y la clave ser el número de veces que aparece en ella uno determinado, etc.

Se conoce el número total de esos bloques, y se supone que ese número está almacenado en la variable N. Cada uno de esos bloques (que en determinados problemas puede consistir tan sólo en su clave) habrá sido previamente leído y almacenado en la memoria como el contenido de una variable de una formación A (esas variables serán A(1), A(2),.., A(N), y el programa las manipulará mediante índices). En otra versión del problema los bloques de información podrían estar grabados cada uno en un registro de un archivo alojado en un dispositivo de acceso directo, al que puede accederse por su "llave" que es su número de orden dentro del archivo (y entonces llamaríamos A(I) al contenido del registro de llave I). Representaremos con la notación cl(A(I)) la clave que corresponde al elemento A(I) y supondremos que el ordenador utilizado dispone de medios para decidir si una clave es anterior o posterior a otra en criterio de ordenación adoptado. Se trata de mover los contenidos de las varaibles de la formación A de modo que, al final, sus variables contengan los mismos bloques de información que al principio, pero con sus claves en el orden deseado. Puede haber distintos bloques con la misma clave, y entonces, en el resultado final, aparecerán seguidos, en orden arbitrario.

Prescindiremos de la parte del algoritmo que trata del proceso de lectura de los bloques A(1),..., A(N) y de la que trata del uso posterior de la formación ordenada, para su impresión, grabación, etc. En consecuencia, los organigramas que presentaremos tendrán la forma de rutinas, cuyos parámetros de entrada serán la variable N y la formación A, y cuyo parámetro de salida será la misma formación A (en la cual aparecerán los elementos con los valores de sus claves en el orden apetecido).

De momento impondremos la restricción de que la rutina no utilice áreas de trabajo de tamaño dependiente del valor de N, es decir, que efectúe la reordenación sobre la propia formación A. Después veremos las ventajas que puede ofrecer el prescindir de esa restricción.

Podemos resolver el problema así planteado con muy diversas estrategias; vamos a presentar por medio de sus organigramas algunos algoritmos que lo resuelven; las notaciones empleadas se explican casi por sí mismas. Se recomendará a los alumnos que ensayen manualmente la aplicación, paso a paso, de los algoritmos que ofrecemos, a casos concretos con N = 4 y bloques coincidentes con sus claves, formados por una sola letra (A, B, C y D, dados en distintos órdenes).

En la Figura 1 presentamos el algoritmo correspondiente al método de las transposiciones; recorriendo la formación de arriba a abajo, se comparan las claves de los pares de elementos consecutivos, y si se encuentran en orden inverso, se efectúa su transposición; la variable lógica L se hace cero al principio y 1 en cuanto se ha efectuado una transposición; el proceso completo se reinicia hasta que L termine con valor 0, por no haberse efectuado transposiciones, lo que equivale a haber comprobado que se ha alcanzado el orden deseado. Con objeto de evitar que en cada comparación haya que extraer las claves de los dos bloques, se conserva en CA una clave ya obtenida que va a ser utilizada en la comparación siguiente.

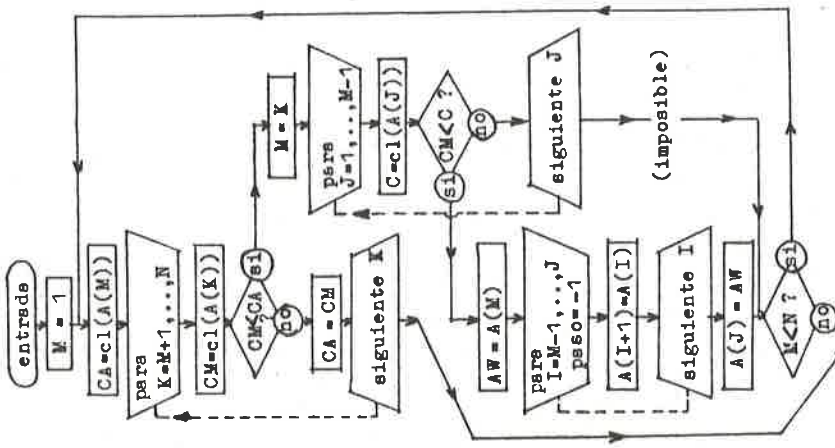


Figura 4ª

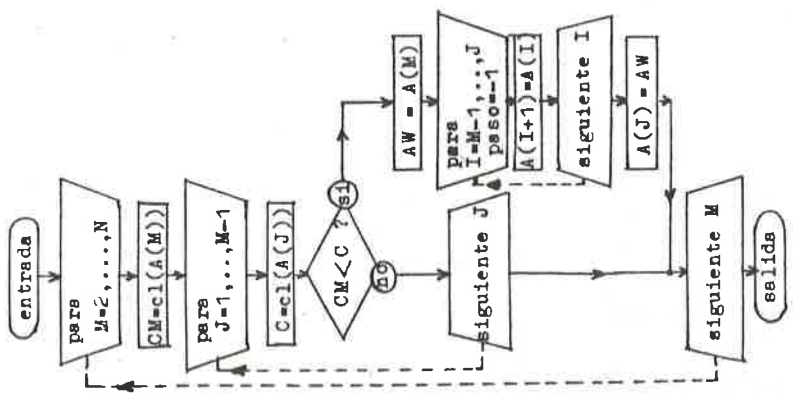


Figura 3ª

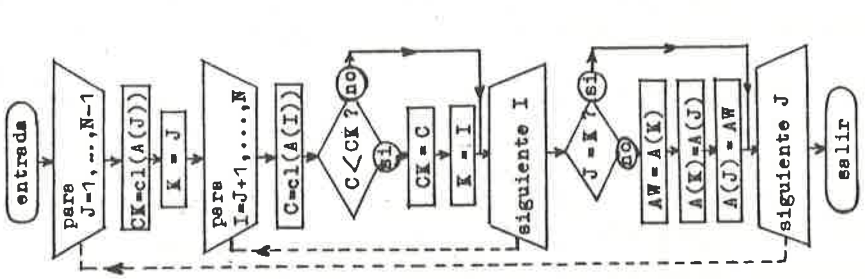


Figura 2ª

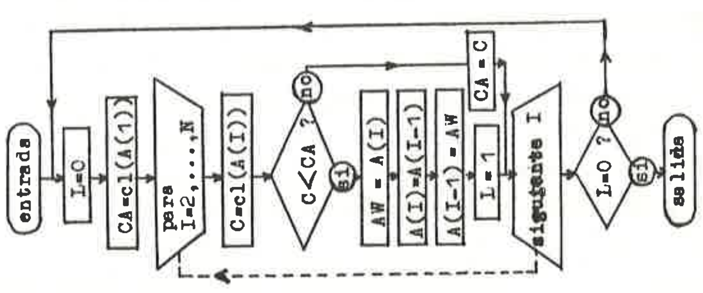


Figura 1ª

El algoritmo precedente es el que da lugar a un organigrama más simple, pero pueden ser concebidos otros muchos. En la Figura 2 se da otro que consiste en ir colocando en su posición definitiva los bloques, comenzando por la primera posición, en la que se colocará el bloque de mínima clave, llevando el que estaba en esa posición a la que deja libre ese bloque al ser movido; en segunda posición se colocará el de clave mínima de los restantes, de análoga manera, y así sucesivamente. La variable CK contiene la mínima clave encontrada hasta el momento en el ciclo para I, y la K el lugar en que se encontraba el bloque con esa clave mínima.

Un tercer procedimiento es el que muestra el organigrama de la Figura 3, basado en suponer (para M = 2,.., N) que los M-1 primeros bloques de la formación están ya en el debido orden entre ellos, y averiguar dónde hay que intercalar un M-ésimo; para hacerlo, se salva éste en AW y se "corren" hacia abajo los que quedan por debajo de ese lugar hasta el lugar de número M, insertando entonces el bloque AW en el sitio debido, así se procede sucesivamente hasta que se termina con el valor de M igual al de N.

Un perfeccionamiento de este algoritmo consiste en no hacer variar M de uno en uno, sino incrementarlo cada vez hasta que la clave de A(M) sea anterior a la de A(M-1). El organigrama así modificado se da en la Figura 4, y es una combinación de los dados en las Figuras 1 y 3.

No se puede decidir cual de estos algoritmos es más eficiente sin atribuir previamente unos costos o penalidades a cada uno de los tipos de operaciones que intervienen en ellos. Por ejemplo, podemos llamar h al número de obtenciones de claves (usos de la función cl), k al número de comparaciones de claves efectuadas, m al número de movimientos de bloques y n al número de asignaciones de elementos de otras formaciones; podemos atribuir un costo a cada una de esas operaciones y despreciar las restantes tareas realizadas en una ejecución (manejo de índices, control de los ciclos, etc., lo cual advertimos que no siempre será afortunado). Para investigar experimentalmente sobre la eficiencia de esos algoritmos, pueden convertirse esos organigramas en programas para un ordenador, añadiéndoles las instrucciones necesarias, para contar cuántas operaciones de cada uno de los tres tipos citados se han realizado en una ejecución del programa. Estos programas pueden someterse después a pruebas en los que los bloques sean simplemente números enteros, y coincidan cada uno con su clave; se podrán probar distintos valores de N y distintas ordenaciones iniciales de los bloques.

Con objeto de tener algún elemento de juicio sin recurrir a la experimentación consideraremos tres casos particulares, en los que supondremos que no hay dos bloques con la misma clave:

CASO A: Los bloques estaban ya en el orden deseado, con lo que el programa se debe limitar a comprobar que ocurre tal cosa y dejar la formación inalterada.

CASO B: Todos los bloques están, entre sí, en el orden deseado excepto el que debía estar en primer lugar, que se encuentra precisamente en el último.

CASO C: Los bloques se dan exactamente en orden inverso al deseado.

Es fácil, aunque laborioso, determinar las funciones de N que dan los valores de $\underline{h}$, $\underline{k}$, $\underline{m}$ y $\underline{n}$ en estos casos, y se obtienen polinomios. Como estamos interesados principalmente en lo que ocurre para valores grandes de N (para los pequeños, cualquier procedimiento es bueno), de esos polinomios retendremos tan sólo el término de mayor grado (parte principal para $N \to +\infty$). Los resultados para los algoritmos estudiados y

para otros que estudiaremos después, se dan en la TABLA de la Figura 9. Se ve en ella que el algoritmo 4ª es ventajoso sobre los anteriores, en los casos considerados, salvo que el costo de los movimientos de bloques (que ha de multiplicarse por $\underline{m}$) sea mucho más elevado que el de las otras operaciones, en cuyo caso aparece como más eficiente el 2ª. También se ve, no obstante, que el resultado depende mucho del caso particular considerado. Los alumnos comprenderán la importancia de estos análisis en cuanto comprueben que el algoritmo 1ª, por ejemplo, para tratar el caso C, con N = 500, tiene que hacer 249.500 comparaciones de claves y 374.250 movimientos de bloques, mientras que el 4ª tiene que hacer sólo 998 y 125.748, respectivamente, y el 2ª, 124.750 y 750. Se ve que la diferencia de eficacia puede ser enorme, según sean los costos (en tiempo de ordenador) de unas u otras operaciones.

Llamaremos la atención sobre el hecho de que en casi todos los casos $\underline{h}$ excede de N, lo que quiere decir que los algoritmos obligan a determinar varias veces la clave del mismo bloque, a lo largo de la ejecución.

Puede interesar eliminar los costos de los movimientos de bloques o la determinación redundante de claves. Todo ello es fácil si se prescinde de la restricción antes aceptada de que la rutina de ordenación no utilice áreas de trabajo de tamaño dependiente de N. Eliminada esa restricción, puede comenzarse con un ciclo para determinar las claves de todos los bloques y almacenarlas en una formación de variables de trabajo, de donde se pueden tomar cuando se precisen, en lugar de recalcularlas cada vez. De esa manera queda $\underline{h}$ = N, cualquiera que sea el algoritmo que se aplique después. Esta operación es superflua cuando el costo de obtención de la clave es despreciable, como ocurre cuando ésta coincide con el bloque o es una cierta parte de él.

Pero más importante es otro artificio que permite eliminar los movimientos de bloques, que vamos a describir a continuación: En muchas aplicaciones no interesa exactamente lle

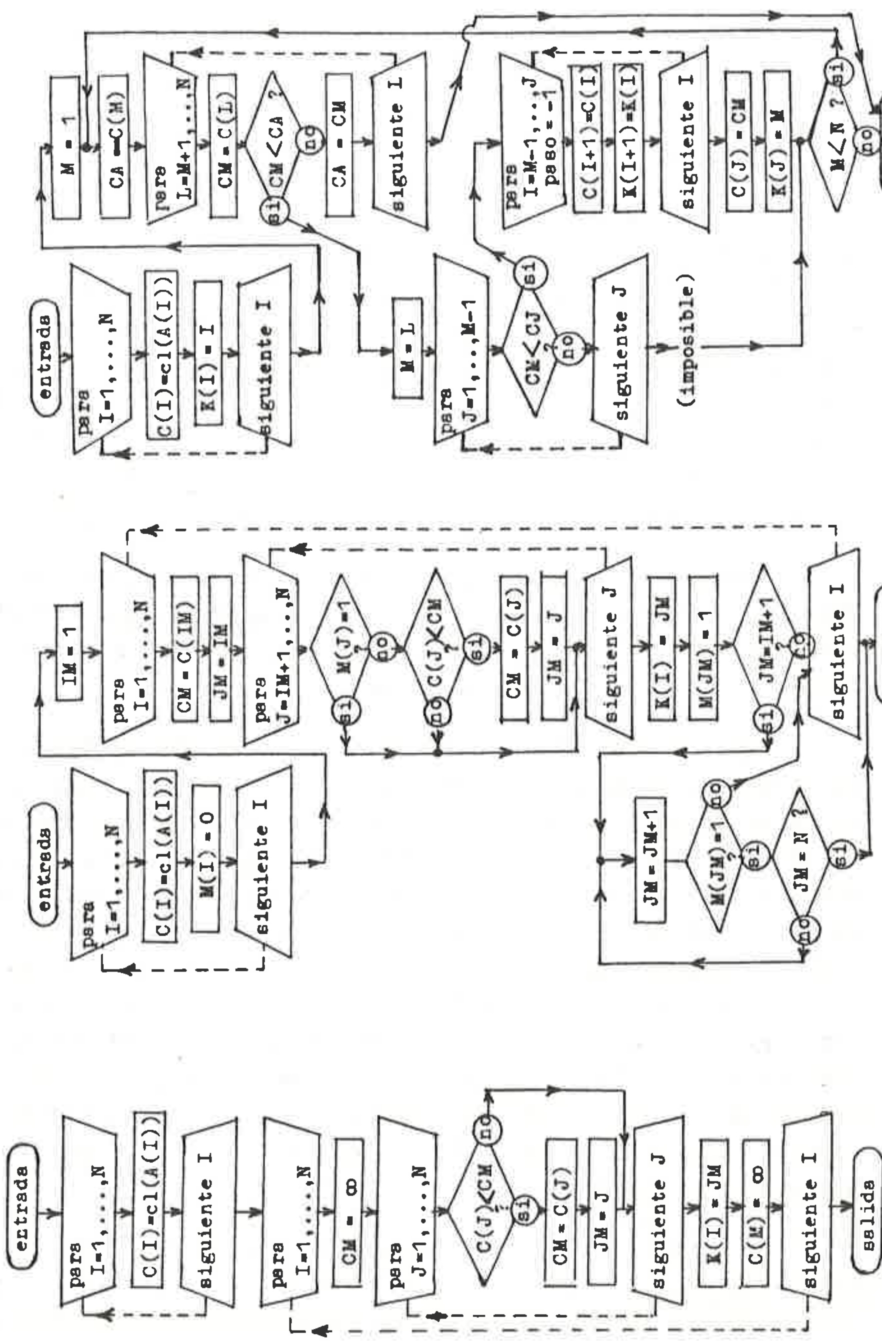


Figura 7ª

Figura 6ª

Figura 5ª

gar a tener una formación con los bloques realmente colocados por orden creciente de claves, sino poder ir tomándolos en ese orden. Para ello bastará con construir una formación K de variables, con tantos elementos como A, de modo que el valor de K(I) sea el lugar que ocupa en la formación A el elemento que ocuparía el lugar I si ésta se reordenase en la forma apetecida. De ese modo, los bloques podrán obtenerse en el orden deseado como A(K(1)), A(K(2)),..., A(K(N)).

La Figura 5 muestra un organigrama que resuelve el problema de la ordenación aprovechando las ideas anteriores. Comienza por obtener las claves de todos los bloques en la formación C; se representa con el símbolo ∞ un valor de clave que exceda con seguridad a todos los de las claves de los bloques; se halla K(1) determinando la posición JM de la mínima clave en la formación C; la clave mínima encontrada se sustituye por ∞ para no volverla a encontrar; se repite el proceso para hallar K(2), y así sucesivamente hasta determinar K(N).

En la Figura 6 se da un perfeccionamiento del anterior que ahorra comparaciones de claves, a costa de introducir una formación de "marcas", M, para indicar qué elementos han sido ya seleccionados como mínimos, y una variable IM que indica la posición que ocupa el primer elemento que no está marcado. Evita el uso del valor ∞ y si la clave coincide con el bloque o se extrae fácilmente de él, se puede prescindir del ciclo inicial de obtención de las claves (cosa que no se podía hacer en el caso de la figura 5, ya que las marcas se iban colocando, como ∞, en la formación auxiliar de claves).

Por último, la Figura 7 da una adaptación del algoritmo de la figura 4 al método de construcción de la formación auxiliar K, con la cual se consigue mover sólo claves en la formación C (en lugar de bloques en la A), pero moviendo a la vez análogamente los elementos de K para mantener la relación entre las claves de C y los bloques de A.

T A B L A

Algoritmo de la Figura	Caso A h	Caso A k	Caso A m	Caso A n	Caso B h	Caso B k	Caso B m	Caso B n	Caso C h	Caso C k	Caso C m	Caso C n
1ª	N	N	0	0	N^2	N^2	$3N$	0	N^2	N^2	$\frac{3}{2}N^2$	0
2ª	$\frac{1}{2}N^2$	$\frac{1}{2}N^2$	0	0	$\frac{1}{2}N^2$	$\frac{1}{2}N^2$	$3N$	0	$\frac{1}{2}N^2$	$\frac{1}{2}N^2$	$\frac{3}{2}N^2$	0
3ª	$\frac{1}{2}N^2$	$\frac{1}{2}N^2$	0	0	$\frac{1}{2}N^2$	$\frac{1}{2}N^2$	N	0	$2N$	N	$\frac{1}{2}N^2$	0
4ª	N	N	0	0	N	N	N	0	$3N$	$2N$	$\frac{1}{2}N^2$	0
5ª	N	N^2	0	$2N$	N	N^2	0	$2N$	N	N^2	0	$2N$
6ª	N	$\frac{1}{2}N^2$	0	$3N$	N	$\frac{1}{2}N^2$	0	$3N$	N	$\frac{1}{2}N^2$	0	$3N$
7ª	N	N	0	$2N$	N	N	0	$3N$	N	$2N$	0	N^2
8ª	N	$\frac{1}{2}N^2$	0	$3N$	N	$\frac{1}{2}N^2$	0	$\frac{5}{2}N$	N	N	0	$\frac{5}{2}N$

Figura 9ª

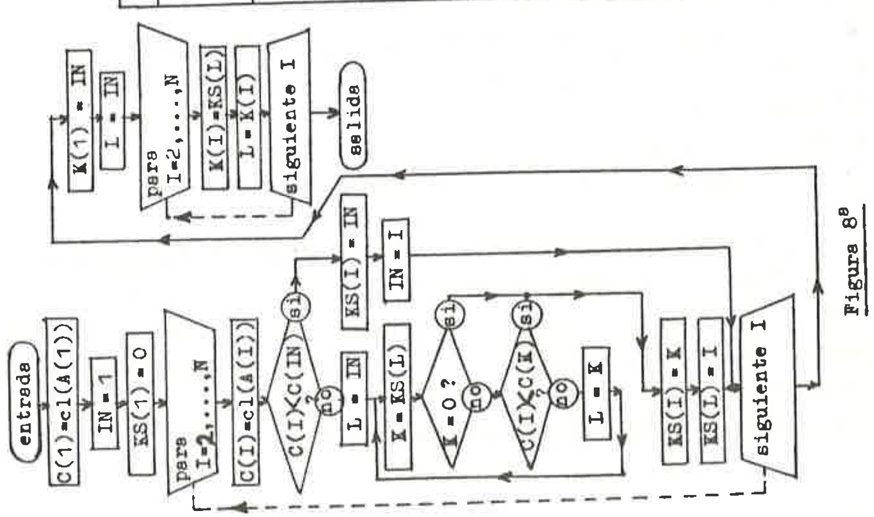


Figura 8ª

Pueden construirse otros algoritmos con distinto fundamento; como ejemplo, damos el de la Figura 8 que se basa en recorrer una sóla vez la formación de claves C (que no se altera a lo largo del proceso) e ir construyendo una formación auxiliar KS de la manera siguiente: Cuando se tome la clave I-ésima C(I), los I-1 primeros elementos de KS estarán calculados de modo que KS(L) es el número del lugar ocupado en la formación por la clave que sigue, en orden ascendente de valor, a la clave L-ésima, en la ordenación relativa de las I-1 primeras claves; si la L-ésima clave es la máxima entre las I-1 primeras, pondremos KS(L) = 0 (no le sigue ninguna). La variable IN indica la posición de la mínima clave encontrada hasta el momento. Una vez construida la formación KS se construye la K en un solo ciclo muy simple, pues K(1) es IN y se sabe cual es el siguiente de cada uno.

En la TABLA de la Figura 9 se dan también los términos de mayor grado de h, k, m y n, como polinomios en N, para los algoritmos ultimamente estudiados, lo que permite hacer un juicio comparativo de ellos, según los costos de las operaciones.

Los análisis anteriores pueden tener gran interés didáctico e ilustrar algunos recursos utilizables en los buenos programas de ordenación, pero de ninguna manera pueden hacernos creer que alguno de los algoritmos descritos es el óptimo, o al menos que se comportará con eficiencia aunque N sea grande. Los de las figuras 3, 4, 6 y 7, por ejemplo, utilizan el proceso de averiguar en qué punto debe intercalarse un elemento nuevo en una secuencia ya ordenada de M elementos, y lo hacen comparándolo sucesivamente con los de la secuencia, comenzando por el primero, hasta encontrar uno mayor. A nadie se le ocurriría este procedimiento para buscar una palabra en un diccionario. Una búsqueda dicotómica, localizándolo cada vez en una secuencia con aproximadamente la mitad de elementos de la anterior, conduciría mucho más rápidamente al resultado (con número medio de comparaciones del orden de $\log_2 M$ en lugar de $\frac{1}{2}$ M), pero no la hemos introducido en los organigramas, pues con ello se compli carían demasiado, para la utilización didáctica que nos habíamos propuesto. Incluso podría dotarse de una cierta potencia heurística al programa haciendo que fuese adquiriendo una "experiencia" sobre los valores de las claves manejadas, y basándose en ella, hiciese conjeturas sobre la parte de la secuencia de los M elementos en que convendría comenzar la exploración (así lo hacemos al buscar una palabra en un diccionario). Consideraciones análogas son aplicables a otros procesos empleados.

Los programas de ordenación realmente utilizados para conjuntos con valores de N muy grandes son complicados y en su elaboración se ha invertido un gran trabajo. Frecuentemente son objeto de explotación comercial, y se venden o alquilan, con el nombre de programas de SORT. Además de emplear algoritmos muy refinados, resuelven los problemas que se derivan de la frecuente imposibilidad de introducir toda la información que se desea ordenar en la memoria central del ordenador, haciendo un uso inteligente de memorias externas auxiliares.

PROGRAMAS DE COMBINATORIA EN LENGUAJE "BASIC"

Por Joaquín Gómez Rey
Catedrático de Matemáticas en el I.B. mixto de Aranjuez

Los tres programas que siguen generan, respectivamente, las permutaciones de orden N, las combinaciones de M elemenos tomados de N en N y las variaciones de M elementos tomados N a N.

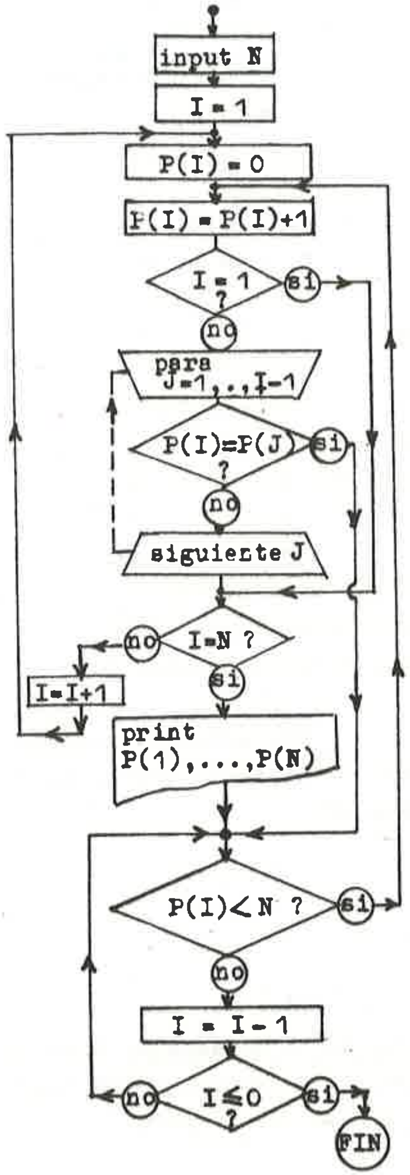
Los programas se han escrito en lenguaje BASIC, y ha sido preciso complicar algo su estructura para adaptarlos a las limitaciones del mismo.

Estos programas pueden ser utilizados directamente o servir como partes o subrutinas de otros, en los que se necesite generar variaciones, combinaciones o permutaciones, mediante una fácil adaptación.

Mediante las pequeñas modificaciones que se indican en los dos últimos, generarán combinaciones o variaciones con repetición.

Nota de la Redacción: Para facilitar la interpretación de estos programas a los lectores que utilicen otros lengaujes, damos un organigrama al lado de cada programa.

```
1ØØ REM "PERMUTACIONES DE ORDEN N"
11Ø PRINT "ORDEN";
12Ø INPUT N
13Ø DIM P(N)
14Ø LET I=1
2ØØ LET P(I)=Ø
25Ø LET P(I)=P(I)+1
3ØØ IF I=1 THEN 4ØØ
32Ø FOR J=1 TO I-1
34Ø IF P(I)=P(J) THEN 5ØØ
36Ø NEXT J
4ØØ IF I=N THEN 44Ø
42Ø LET I=I+1
43Ø GO TO 2ØØ
44Ø FOR K=1 TO N
45Ø PRINT P(K);
46Ø NEXT K
47Ø PRINT
5ØØ IF P(I)< N THEN 25Ø
52Ø LET I=I-1
54Ø IF I>Ø THEN 5ØØ
6ØØ END
```

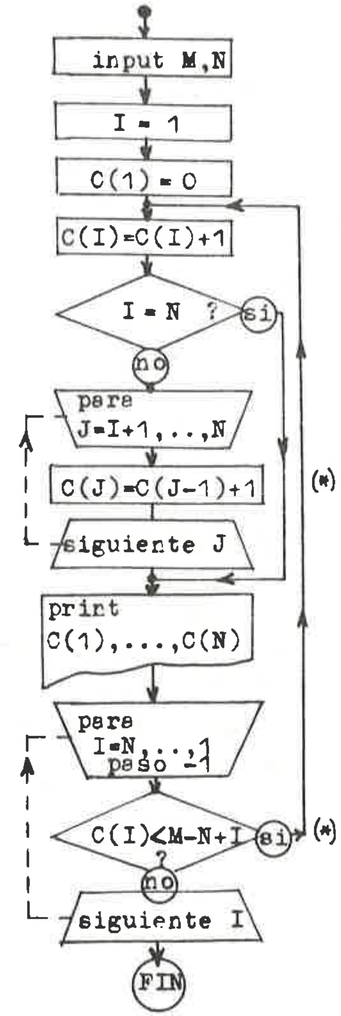


Ejemplo:

```
RUN
ORDEN? 3
1 2 3
1 3 2
2 1 3
2 3 1
3 1 2
3 2 1
```

Permutaciones


```
1ØØ REM "COMBINACIONES DE M ELEMENTOS TOMADOS DE N EN N"
11Ø PRINT "M,N";
12Ø INPUT M,N
13Ø DIM C(N)
14Ø LET I=1
2ØØ LET C(1)=Ø
25Ø LET C(I)=C(I)+1
3ØØ IF I=N THEN 4ØØ
32Ø FOR J=I+1 TO N
34Ø LET C(J)=C(J-1)+1
36Ø NEXT J
4ØØ FOR K=1 TO N
42Ø PRINT C(K);
44Ø NEXT K
46Ø PRINT
5ØØ FOR I=N TO 1 STEP -1
52Ø IF C(I)<M-N+I THEN 25Ø
54Ø NEXT I
6ØØ END
```

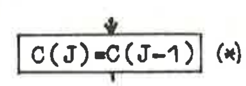


Ejemplo:

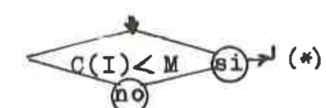
```
RUN
M,N? 4,2
1 2
1 3
1 4
2 3
2 4
3 4
```

Si se desean <u>con repetición</u>:

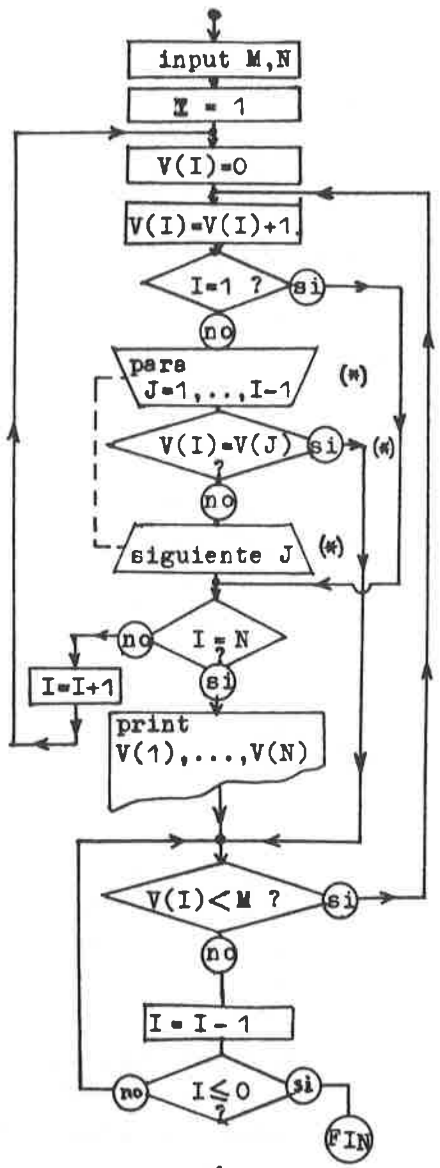
- Cambiar la líneas 34Ø por 34Ø LET C(J)=C(J-1)
- Cambiar la líneas 52Ø por 52Ø IF C(I) M THEN 25Ø



Combinaciones



```
100 REM "VARIACIONES DE M ELEMENTOS TOMADOS N A N"
110 PRINT "M,N";
120 INPUT M,N
130 DIM V(N)
140 LET I=1
200 LET V(I)=0
250 LET V(I)=V(I)+1
300 IF I=1 THEN 400
320 FOR J=1 TO I-1
340 IF V(I)=V(J) THEN 500
360 NEXT J
400 IF I=N THEN 440
420 LET I=I+1
430 GO TO 200
440 FOR K=1 TO N
450 PRINT V(K);
460 NEXT K
470 PRINT
500 IF V(I)<M THEN 250
520 LET I=I-1
540 IF I>0 THEN 500
600 END
```



Ejemplo:

```
RUN
M,N? 3,2
1 2
1 3
2 1
2 3
3 1
3 2
```

Si se desean <u>con repetición</u> suprimir las líneas: 320 , 340 y 360 .

<u>Variaciones</u>

GRAFICA DE UNA FUNCION

Por José Francisco Carballido Quesada
Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial de Madrid

---

El programa que ofrecemos en la página siguiente, permite obtener en la pantalla de un ordenador COMMODORE VIC 20, la gráfica de una función real de variable real definida como FNY(X) 3n 30, en un intervalo [A,B] definido en 10 y 20

<u>Observaciones</u>

1ª. Si no se dispone del módulo de ampliación de memoria de 16 K deberá cambiarse 4096 por 7680 y 37888 por 38400.

2ª. Para otro ordenador deberá conocerse la dimensión de la pantalla (22 × 23 = 506 en este caso), su asignación en el POKE y la de los colores y los números que representan el asterisco y el guión horizontal y vertical.

3ª. El máximo y mínimo absoluto de la función en este intervalo es (XA, MA) y (XI, MI), respectivamente.

4ª) Una vez dibujada una gráfica deberá borrarse la pantalla (SHIFT CLR HOME), para hacer nuevamente uso de ella.

```
5   REM "GRAFICA DE UNA FUNCION"
10  A =
20  B =
30  DEF FNY(X) =
40  DEF FNX(N) = A + N * (B - A) / 21
50  N = -1
60  N = N + 1
70  MA = FNY(FNX(N))
80  FOR M = 0 TO 21
90  IF MA < FNY(FNX(M)) THEN 60
100 NEXT M
105 XA = N
110 PRINT " [SHIFT] [CLR HOME]
120 FOR N = 0 TO 21
130 N = -1
140 N = N + 1
150 MI = FNY(FNX(N))
160 FOR M = 1 TO 21
170 IF MI > FNY(FNX(M)) THEN 140
180 NEXT M
185 XI = N
190 DEF FNZ(N) = 22 * (FNY(FNX(N)) - MI) / (MA - MI)
200 FOR H = 37888 TO 37888 + 506
210 POKE H,0
220 NEXT H
230 IF SGN(MI) = SGN(MA) THEN 280
240 T = INT(MA * 22 / (MA - MI) + .5)
250 FOR N = 0 TO 21
260 POKE 4096 + T * 22 + N, 67
270 NEXT N
280 IF SGN(A) = SGN(B) THEN 330
290 R = INT((- A * 21 / (B - A)) + .5)
300 FOR N = 0 TO 22
310 POKE 4096 + N * 22 + R, 93
320 NEXT N
330 FOR N = 0 TO 21
340 POKE 4096 + 22 * (22 - INT(FNZ(N) + .5)) + N, 42
350 NEXT N
```


LAS URNAS... ¿ESTAN PREDESTINADAS?

Por Ricardo Aguado Muñoz y Agustín Blanco

---

1. PROBLEMA INICIAL

Se parte de una urna cuya composición inicial es de una bola blanca y otra negra. Se extrae al azar una bola y se la devuelve a la urna acompañada de otra del mismo color. Se repite el proceso hasta que en la urna haya cien bolas (Fig. 1).

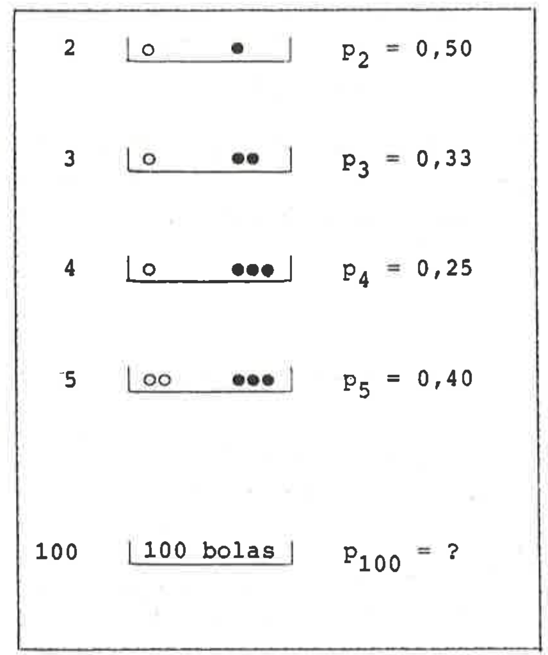


FIGURA 1

Podemos considerar que la urna es un sistema que cambia de estado a lo largo de las distintas etapas. Desde la etapa inicial (etapa 2) hasta la etapa final (etapa 100), la urna atraviesa distintos estados; entendiendo por estados cada una de las composiciones posibles. Así, por ejemplo, en la etapa 3 hay dos estados posibles: una bola blanca y dos negras, o dos blancas y una negra.

En la etapa 200 hay 99 estados posibles. ¿A cuál de estos 99 estados llegará la urna? Imposible predecirlo: todos ellos son igualmente probables; es decir, la probabilidad de que la urna llegue a un estado final concreto es 1/99.

Aunque al principio no podamos predecir qué estado final alcanzará la urna, sí que lo podemos hacer (con cierto margen) cuando hayan transcurrido algunas etapas; porque se puede probar, mediante simulación, el hecho notable de que la proporción de bolas blancas se estabiliza a lo largo del proceso.

Esto quiere decir que, aunque la urna no esté predestinada en su nacimiento, en las primeras etapas se decide su futuro. Y también, que la infancia de la urna condiciona toda su vida.

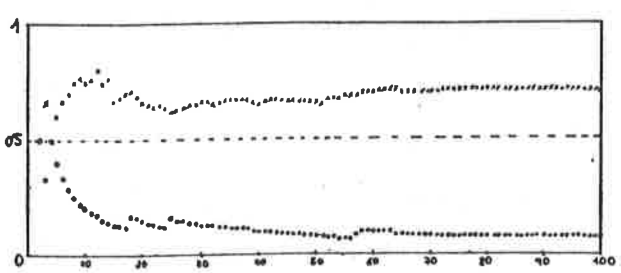


FIGURA 2

Con el ordenador hemos simulado el sistema, controlando en cada etapa la proporción p de bolas blancas. Representando la variación de p, hemos obtenido gráficos parecidos a los de la figura 2; en la cual podemos observar que la proporción de blancas se estabiliza en torno a un número.

Sospechamos que la primera bola extraída tiene una influencia decisiva sobre el estado final. Es decir, que si la primera bola que se extrae es blanca, la composición final de la urna será con mayoría de bolas blancas; y si es negra, la mayoría de las bolas al final serán negras. La confirmación de esta sospecha la obtuvimos realizando un número elevado de simulaciones y comparando la proporción de la etapa 3 con la de la etapa 100.

Número de la prueba	p_3	p_{100}
1	0,33	0,15
2	0,66	0,48
3	0,66	0,62
4	0,33	0,16
5	0,66	0,93
6	0,33	0,28
995	0,33	0,23
996	0,33	0,54
997	0,66	0,55
998	0,33	0,23
999	0,66	0,27
1000	0,66	0,87

FIGURA 3

En la tabla de la Figura 3 se puede observar que si el sistema empieza con baja proporción de bolas blancas ($p_3 = 0{,}33$), acaba también con baja proporción de blancas ($p_{100} < 0{,}50$) en la mayor parte de los casos, y que si $p_3 = 0{,}66$, entonces lo más frecuente es que sea $p_{100} > 0{,}50$.

Después de haber realizado mil pruebas, podemos concluir que únicamente en el 25% de los casos el destino inicial se tuerce.

Realizando también un número elevado de pruebas pudimos comprobar experimentalmente, una cosa que conocíamos teóricamente, a saber: que las proporciones finales p_{100} se distribuyen uniformemente en el intervalo $[0,1]$. Para ello dividimos este intervalo en 10 partes e hicimos el recuento de las veces que una proporción final p_{100} cae en cada uno de los intervalos parciales. Obtuvimos el siguiente diagrama de barras de frecuencias relativas (Fig. 4),

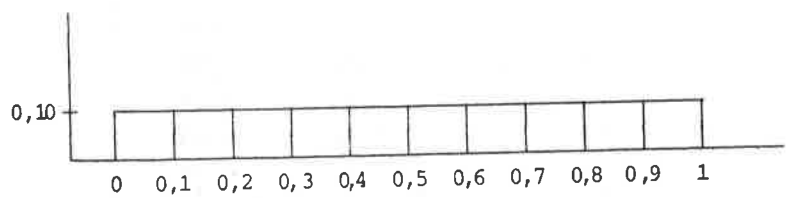


FIGURA 4

2. GENERALIZACION DEL PROBLEMA

El problema que acabamos de analizar es un ejemplo de sistema autorregulable, en el sentido de que la proporción de blancas, a partir de una cierta etapa, permanece estable. Acabamos de ver también, que las etapas iniciales son decisivas, y que al comienzo el destino de la urna no está determinado.

¿Este modelo matemático puede serlo de situaciones reales? ¿Es posible comparar la evolución de la urna con el desarrollo intelectual de una persona? ¿Se puede comparar con la evolución de sociedades cuyos miembros, blancos y negros, se reclutan por cooptación, por un procedimiento similar al de reclutamiento de las bolas para la urna?

Corresponde a los psicólogos y sociólogos opinar sobre la validez de tales comparaciones. Nosotros hemos querido admitir, a modo de juego, la validez de éstas y modificar algunas condiciones de la urna para ver cómo evoluciona.

Entendemos que las bolas blancas son cualidades positivas de la inteligencia, que las negras representan cualidades negativas y que, unas y otras, se adquieren a lo largo de los años siguiendo el modelo de la urna.

Nos interesa saber cómo influye el hecho de que, a una cierta edad, el individuo reciba una ayuda externa de cualidades positivas. En otros términos ¿qué pasa si en la etapa cinco se añaden a la urna tres bolas blancas de propina? Es evidente que la proporción final de bolas blancas aumentará en la mayoría de los casos; pero el efecto exacto lo tendremos cuando completemos el diagrama de barras correspondiente a un número elevado de simulaciones. Más aún, será interesante ver cómo varía el diagrama de barras al variar la "ayuda" y la "edad" en que ésta se realiza; esto es: al variar el número A de bolas blancas que se introducen y la etapa E en que se realiza el aporte.

Un programa de ordenador nos ha permitido obtener los diagramas de frecuencias relativas adjuntos (Fig. 5), en los que se aprecia la distribución de las proporciones finales de bolas blancas, cuando una misma ayuda A = 3 se aporta en las etapas E = 3, 4, 5, 10 y 50.

Observamos que una misma ayuda, hecha en una etapa temprana tiene más trascendencia que hecha en una etapa avanzada, donde la incidencia es mínima.

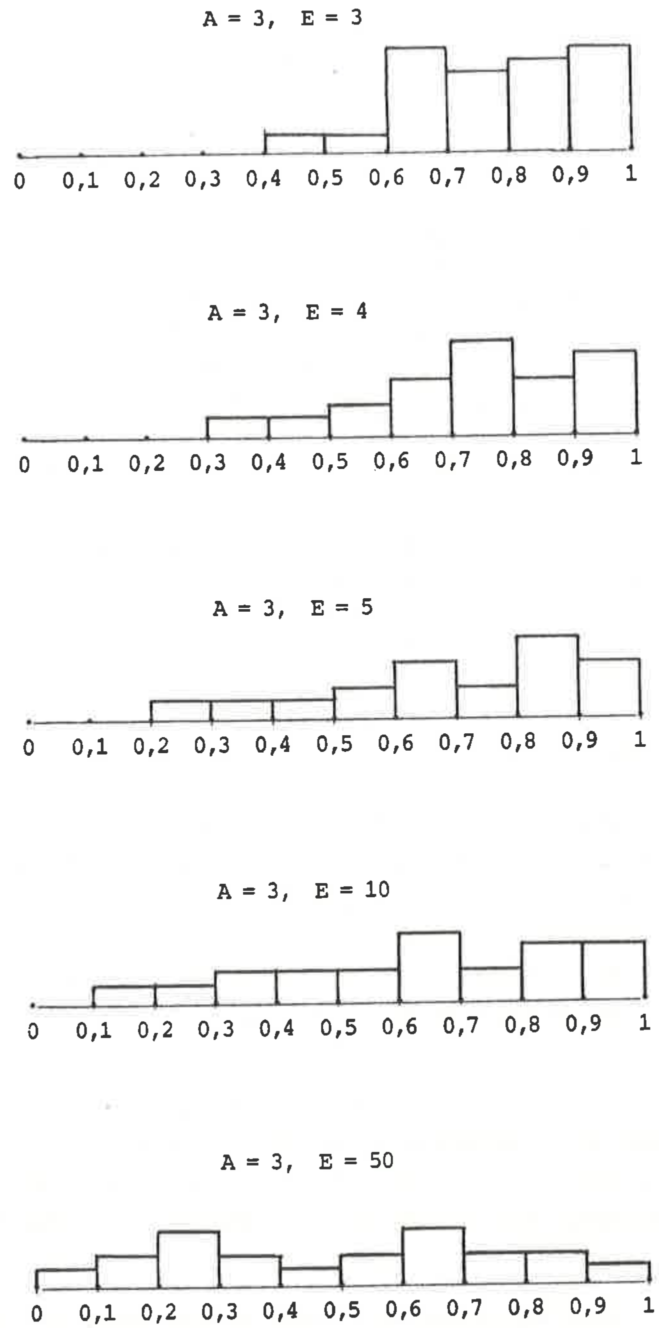


FIGURA 5

Otra cuestión interesante es ver cómo evolucionan los diagramas al variar las condiciones de reclutamiento de las bolas.

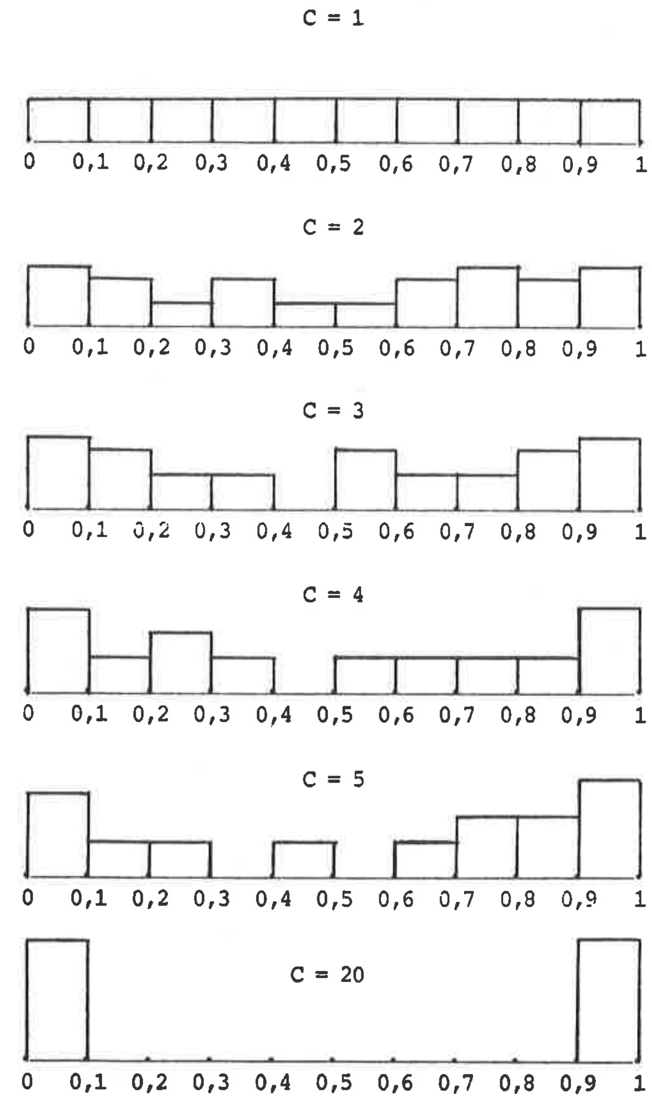


FIGURA 6

El caso que podríamos llamar normal es cuando al extraer una bola la devolvemos acompañada de una del mismo color. Pero, ¿qué pasaría si cada vez que extraemos una bola la devolvemos acompañada de tres del mismo color? Un programa que permitía variar el número C de bolas introducidas para acompañar a la extraída, nos dió los diagramas de la Fig. 6. Estos diagramas prueban que en los casos C = 1 las urnas tienen tendencia a acabar con proporciones de blancas altas o bajas (dependiendo fuertemente del color de la primera bola extraída).

Por último, si la recluta de las bolas se hace con la condición de que al extraer una bola, la devolvemos en compañía de otra del color contrario, la intuición nos dice que el sistema tenderá a restablecer el equilibrio inicial entre blancas y negras, y esto muy rápidamente. El diagrama de barras correspondiente a cien repeticiones del experimento es del tipo:

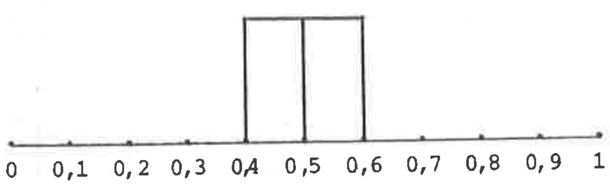


FIGURA 7

3. UTILIZACION DE ORDENADORES EN LA ENSEÑANZA

Dejando ya aparte el problema de la urna, entendido como modelo probabilístico, vamos a centrar nuestra atención en el uso que hemos hecho del ordenador.

Sabido es que la utilización de ordenadores en la enseñanza admite posibilidades distintas, algunas de ellas radicalmente opuestas desde el punto de vista pedagógico. Aquí, evidentemente, hemos simulado un sistema, y hemos visto cómo evoluciona; pero lo más interesante es que el programa permite escoger las variables N, número de veces que se repite el llenado de la urna; A, ayuda que se aporta; E, etapa en la que se ayuda; y C, número de bolas que se introducen del mismo color que la que se extrae. Todo ello da al usuario (profesor o alumno) la posibilidad de comprobar cómo varían los resultados en función de los parámetros iniciales, lo que permite observar el comportamiento del sistema bajo distintas hipótesis.

Este tipo de utilización es, nuestro juicio, una de las posibilidades más interesantes que ofrecen los ordenadores en el campo educativo.

BIBLIOGRAFIA

AGUADO-MUÑOZ, R., BLANCO, A., ZABALA, J. y ZAMARREÑO, R.- "Basic Básico", Curso de programación. Grupo Distribuidor Editorial, Madrid, 1982.

AGUADO-MUÑOZ, R., BLANCO, A. y ZAMARREÑO, R.- "Las calculadoras en el aula". Ediciones Anaya, Madrid, 1982.

NAYLOR, T.- "Técnicas de simulación en computadoras". Linusa. Méjico, 1977.

SOBOL, I.M.- "Método de Montecarlo". MIR. Moscú, 1975.

EL PAPEL DE LA MATEMATICA EN EL PROCESO EDUCATIVO INICIAL

Por Miguel de Guzmán
De la Real Academia de Ciencias

---

1. EDUCACION COMO TRANSMISION DE CULTURA

Educación es desarrollo integral de la persona dentro de un determinado contexto cultural y social. Comporta por tanto un proceso de transmisiión de una cultura y, al tiempo, una preparación para la posible superación de la Cultura transmitida.

La cultura connota un sinfín de componentes no fácilmente definibles, pero entre ellas se pueden destacar como fundamentales *la actividad intelectual y la receptividad a la belleza y sensibilidad humanas*, como afirma Whitehead (1917). Estas características están necesariamente sumergidas en un momento histórico y en un ambiente geográfico y social determinados. Se trata de elegir convenientemente los elementos que tales circunstancias concretas ofrecen para iniciar a las generaciones jóvenes en el ejercicio de la cultura.

Desde el punto de vista formal, la actividad intelectual conlleva un contenido sobre el que se ejercita y un estilo adecuado de ejercitarse. De cada uno de los aspectos de la cultura que nuestra sociedad juzga merecedores de perpetuarse por su fecundidad, utilidad, belleza, etc... es necesario se-

---

Nota de la Redacción

Este trabajo del Profesor Guzmán fue publicado inicialmente en ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 1984, pp. 91-95. Se reproduce en nuestro Boletín con autorización expresa de la mencionada Revista y por gentileza de su autor. Nuetra gratitud por ello.

leccionar cuidadosamente aquellos que más adecuadamente representan los valores a transmitir.

Puesto que lo que debe transmitirse no son meros contenidos, sino un espíritu de actividad intelectual, el estilo adecuado de transmisión será el que más eficazmente estimula la propia actividad. *No interesa en absoluto transmitir muchos conocimientos, sino transmitir mucha capacidad de actividad intelectual alrededor de unos pocos conocimientos representativos.* Puesto que se pretende transmitir también una capacidad de superación de la cultura heredada, *es importante transmitir una comprensión en profundidad que engendre la actividad del espíritu crítico acerca de su propio saber.*

La formación para la receptividad a la belleza requiere tener bien claro el tipo y características de la belleza que puedan encontrarse en el objeto en que nos ejercitamos. Será pues necesario escoger aspectos de este objeto en que mejor resplandezca la belleza propia de él. Aquellos aspectos ante los que el educador mismo es capaz de vibrar con más entusiasmo estético.

La apertura a la sensibilidad humana puede ser fomentada resaltando los elementos que el objeto en cuestión presenta con resonancias en el resto de la actitud profunda del hombre. La personalidad de los hombres que se han ejercitado con más entusiasmo e inspiración en él. La génesis y evolución de las ideas importantes, el entronque con la historia de la sociedad que les ha dado origen, etc... son aspectos que deberíamos subrayar en el proceso de transmisión de los diferentes aspectos importantes de nuestra cultura.

2. LA PRESENCIA DE LA MATEMATICA EN EL PROCESO EDUCATIVO

La presencia vigorosa de la matemática en el proceso educativo es algo que nadie discute hoy seriamente. Los aspectos más característicos del pensamiento occidental, su filosofía, su tecnología, están íntimamente ligados al pensamiento matemático, de forma especialmente profunda a partir del siglo VI a. de C. con los pitagóricos. Los momentos más pujantes de la cultura de occidente coinciden con los momentos de cultivo más intenso de la matemática, arrastrando consigo las otras ciencias en su desarrollo y propiciando la evolución tecnológica.

La matemática ha sido y es un saber extraordinariamente polivalente y como tal presenta características que la hacen extraordinariamente adecuada para la transmisión de las capacidades propias de nuestra cultura. La matemática es a la vez:

a) Una ciencia con sus fines propios. Entre ellos la ordenación racional y lógica de los aspectos cuantitativos, en sentido amplio, de las estructuras reales y mentales.

b) Un arte, que consigue, al menos como premio añadido a su esfuerzo por alcanzar sus objetivos específicos, la creación de estructuras mentales profundamente bellas.

c) Un instrumento poderoso de exploración y transformación del universo.

La múltiple aportación de la matemática al proceso educativo es así extraordinariamente valiosa y no es extraño en absoluto que haya sido desde los pitagóricos hasta nuestros días, pasando por el cuadrivio de la edad media, uno de los ejes fundamentales de la educación.

A lo largo de la historia, especialmente durante los últimos cuatro siglos, la sociedad que ha descuidado el cultivo activo de la matemática y de la ciencia ha visto sus potencialidades extraoridnariamente mermadas. Este ha sido en particular el caso de la nuestra, cuya creatividad matemática y científica ha ocupado un lugar tan bajo entre las diferentes sociedades de nuestro continente.

3. ALGUNOS DEFECTOS DE NUESTRA ENSEÑANZA MATEMATICA

A nivel mundial se ha dado una clara y fuerte crisis en la educación matemática elemental. Muchos países ya han tomado las medidas correctivas adecuadas. En el nuestro aún estamos padeciendo las consecuencias. El examen de los defectos principales que se pueden detectar en nuestro sistema educativo (Guzmán, 1983) puede darnos luz para tratar de salir de ellos y no volver a cometerlos

En la enseñanza básica de nuestros alumnos se observa un aglomerado extraño. Unos rudimentos de teoría de conjuntos, que vienen a costituir unos cuantos acertijos aislados cuya relación con la matemática tal vez consista para los niños en que se pueden expresar con unas palabras mágicas que además tienen su traducción cabalística en símbolos misteriosos. Una iniciación a otra familia de palabras como grupo, elemento neutro, inverso, anillo..., que se les dice que son entes muy importantes, aunque no se les explique muy bien qué se puede hacer con ellos. Y cuentas, que es lo que al parecer tiene algo que ver con la vida real, para averiguar que si en una granja hay veinticinco gallinas, cada una pone dos huevos diarios y la docena se vende a 96 pesetas... A esto se añaden unas pinceladas de rectas, ángulos, curvas, despilfarrando mucha más energía en nombres y distinciones (no se vaya a confundir un ángulo con una región angular) que en tratar de hacer algo interesante con los objetos que se introducen. En resumen, los defectos que, a mi parecer, aquejan más gravemente la enseñanza primaria podrían resumirse en cuanto a la forma en una notable desviación del objetivo principal de las matemáticas, que consiste en saber resolver problemas que puedan resultar adecuados e interesantes, en una ausencia de espíritu activo, de espíritu lúdico, de conexiones con el mundo real de los niños y sus intereses, en un énfasis excesivo y perjudicial en nombres y distinciones con merma de lo que es mucho más importante, la imagen, la intuición, los automatismos operativos útiles. En cuanto al contenido hay exceso de conjuntos, de álgebra, donde los problemas que se pueden proponer en una etapa incial son meras tautologías y reconocimiento de nombres. Por otra parte se nota la ausencia de

contenidos geométricos interesantes y de conexiones y aplicaciones a otras ciencias.

La enseñanza secundaria está afectada de un mal específico, además de adolecer de las mismas tendencias hacia el formalismo, abstracción y pasividad que enferman la primaria. En la enseñanza de BUP y COU se da además, a mi parecer, una confusión de objetivos que la convierten en una especie de minienseñanza universitaria. La enseñanza básica y la secundaria deberían tener idealmente unos objetivos plenamente diferenciados de los de la enseñanza universitaria. En aquellas, el elemento formativo debería ser claramente el esencial, debiendo estar los contenidos totalmente subordinados en su extensión y en su conformación a la finalidad formativa de estas etapas de la enseñanza. Con la enseñanza secundaria no se debe pretender impartir unos conocimientos que hagan de la personalidad del estudiante un mosaico de miniprofesionales de las diferentes materias. Se debe tratar con ella de ayudarle a conformar su personalidad intelectual mediante la asimilación profunda y activa de unas pocas ideas matrices en algunos campos de las ciencias y de las letras, asimilación realizada pausadamente, de modo vital, entroncando estas ideas matrices con la personalidad de sus descubridores, con la historia de su génesis y su evolución, con muestras de su fecundidad en nuestra cultura actual. En lugar de ello (véanse los libros de texto actuales) se ofrece al estudiante adolescente, muchas veces ávido de un contacto vital de este tipo, largas listas secas y pedantes de meros nombres o de ideas descarnadas de las que pronto se hastía por su aparente inutilidad. La matemática tiene una historia milenaria y apasionante, y constituye toda una aventura del pensamiento observar desde nuestra perspectiva los rodeos, los callejones sin salida aparente, los túneles oscuros, las controversias de la evolución del pensamiento matemático hastra nuestros días. Por otra parte la riqueza de la personalidad de muchos de los matemáticos más eminentes es ciertamente impresionante. La importancia sociológica y cultural de la matemática ha sido grande, especialmente en ciertas etapas de la evolución cultural de Occidente. La simbiosis de las matemáticas con otras ciencias, con la tecnología e incluso con la filosofía presenta aspectos muy interesantes que se prestan a discusión aun al nivel más elemental. ¿Cuántos de nuestros enseñantes hacen un esfuerzo por entreverar los conocimientos que imparten con explicaciones de este tipo?

4. ALGUNOS MALES CONCRETOS QUE HAY QUE EVITAR

A la vista de los defectos que actualmente sufrimos en nuestra educación matemática podemos tratar de delimitar explícitamente unos cuantos males que deberíamos tratar de evitar en una futura reestructuración de nuestra enseñanza. Estos son:

a) Ideas inertes en los contenidos

La actividad matemática se debe centrar en unos contenidos adecuados. ¿Cuáles? El principio abstracto es claro: *Aquellos contenidos que mejor estimulen el interés, la acción de los alumnos mismos a quienes se les proponen.* Más adelante trataré de especificar cuáles pueden ser estos contenidos, al menos con algunos ejemplos. Ahora quisiera solamente subrayar que lo que hay que evitar a toda costa son las que Whitehead ha llamado ideas inertes. *Ideas inertes son las que meramente se reciben en la mente, sin ser utilizadas, verificadas o introducidas en combinaciones nuevas.*

Al tratar de concretar los contenidos adecuados habremos de preguntarnos constantemente. ¿Serán los alumnos capaces de hacer algo hoy mismo con esta idea, con esta técnica? ¿Podrán asimilarla ahora mismo hasta el punto de que la incorporen en su esquema mental y pueda surgir espontáneamente en su espíritu ante la situación adecuada? ¿Serán capaces de convertirla hoy en una herramienta activa que les sirva ahora mismo para resolver algún problema que realmente les pueda interesar?

¿O servirá acaso solamente para formar parte de una lista de nombres y de conceptos inútiles que les ayude solamente para responder a las preguntas vacías de un examen y para estimular su propia pedantería? Incluso aquellos contenidos verdaderamente útiles los podemos presentar cargados de lastre conceptual inútil y perjudicial y de terminología pedante que oscurece la idea original que en su génesis presentaba mucho más clara su propia fecundidad.

Para presentar ejemplos de ideas inertes en nuestros actuales contenidos no hay más que ojear someramente los textos ordinarios de nuestra enseñanza básica y secundaria. He aquí unos cuantos:

El tratamiento explícito de elementos de la teoría de conjuntos en EGB y BUP. ¿Acaso hablamos explícitamente a los niños de EGB del principio de contradicción? El niño sabe mucho mejor lo que es un conjunto y las operaciones que con él se pueden hacer antes de que le obscurezcamos la mente con nombres pomposos y disquisiciones totalmente fuera de lugar y de tiempo. Son estructuras fundamentales de la mente sobre las que no sólo es inútil, sino probablemente perjudicial lucubrar a destiempo.

Las pedantes introducciones del número natural que se suelen encontrar en los textos de los primeros años de EGB. Si no se lo explican el niño sabe lo que es un número. Después de la explicación ya no. ¿Puede hacer algo el niño con tales explicaciones? Esta es probablemente una de las formas de originar claros bloqueos psicológicos de tantas y tantas personas adultas inteligentes que confiesan que siempre se les han dado tan mal las matemáticas.

Las disquisiciones sobre grupos, anillos, etc.,... a nivel elemental. La introducción del álgebra se pensó que podría ser la fuente alternativa de introducción al pensamiento riguroso, tan difícil en la introducción de la geometría del es tilo euclídeo. Ha resultado ser fundamentalmente una fuente de ideas inertes, mero reconocimiento de nombres sin interés ninguno para la actividad intelectual del niño.

Las pedantes y filosóficas disquisiciones sobre magnitudes a nivel de enseñanza primaria.

Las lucubraciones academicistas alrededor de los teoremas fundamentales del análisis en la segunda enseñanza. Por ejemplo, la introducción del número complejo, estilo Bourbaki, a través de las clases de congruencia, módulo x^2+1, del conjunto de los polinomios sobre el cuerpo de los números reales (¡Curso 1ª de BUP!).

b) Impreparación de profesores

Cualquier intento de reforma de la enseñanza matemática está encaminado al fracaso de no contar con profesores capaces y bien preparados. La formación que oficialmente reciben los profesores en las Escuelas Universitarias de Profesorado de EGB es, en mi opinión, claramente insuficiente. Para impartir un conocimiento adecuado, con el espíritu formativo que he recalcado antes, habría que saberlo bien a fondo y ser capaz de saborearlo y colocarlo en su perspectiva propia. Para enseñar como 15 hay que saber como 100 y guardarse 85. La pedagogía puede ayudar a comunicar, pero con el que no sabe suficiente no ejercerá milagros. La formación que reciben nuestros licenciados en las Facultades suele estar muy sesgada hacia la investigación matemática. Incluso aquellos que deciden escoger la especialización en didáctica matemática carecen oficialmente de cursos dedicados, por ejemplo, a la historia y evolución de las ideas matemáticas, a las aplicaciones didácticas de los juegos matemáticos o a los problemas clásicos de la matemática y se ven obligados en cambio a seguir cursos superespecializados que poco o nada útil les proporcionan para su futura tarea. Una ordenación más adecuada de la formación de las Escuelas Universitarias de Profesorado de EGB y de las Facultades no sería extraordinariamente difícil.

El paso por cursos de reciclaje y perfeccionamiento del profesorado debería ser, especialmente en tiempos de cambio, no ya una posibilidad fácil de practicar, sino una verdadera obligación. ¿Cómo se puede pretender de otra forma la puesta en práctica de los cambios profundos que es necesario promover?

c) Textos inadecuados

Es claro que una gran parte de los profesores de enseñanza básica y media no van a ser capaces de elaborar, ni siquiera sobre la pauta de unos programas ideales, cursos medianamente satisfactorios que los implementen. Por ello se hace clara la necesidad de los libros de texto . De los males de nuestra enseñanza actual una buena responsabilidad incumbe al espíritu predominante en la generalidad de los libros de texto existentes en la actualidad, tanto de EGB como de BUP y COU. Parecen estar escritos para responder a un cuestionario, olvidando totalmente el objetivo primordial de estas etapas de la enseñanza, la formación de la personalidad integral del alumno utilizando como medio su contacto con el mundo de la matemática. Hay en particular muchos textos de BUP y COU que han confundido su orientación totalmente y se asemejan mucho más a los textos universitarios que a los textos de orientación básica y formativa que serían adecuados para esta etapa.

d) Exámenes y controles que impiden un proceso verdaderamente formativo

Este es un problema verdaderamente difícil de resolver. Establecemos un programa y en algún punto del proceso educativo decidimos realizar un control del grado de asimilación de dicho programa por parte de los estudiantes. Muchas veces con hondas repercusiones para los estudiantes y para los centros mismos en que se forman. No tardan en hacerse notar los efectos perniciosos. Los profesores comienzan a enseñar para cubrir el programa y para nada más, olvidando su labor más propia de sabor formativo. Los estudiantes se hacen, si pueden, con un cuestionario y miden su provecho por la capacidad de responder eficientemente a él. Los Centros se consideran eficaces si una buena parte de sus estudiantes logran calificaciones satisfactorias en los controles establecidos. Y el proceso todo queda pervertido en su raíz. El objetivo fundamental se convierte en la preparación eficiente para pasar un examen, relegando a segundo término los objetivos formativos que son más difícilmente medibles.

Tal vez una buena sugerencia podría ser someter a controles directos, no a los estudiantes mismos, sino a los profesores y los centros, inspeccionando sus programas y su capacidad de desarrollarlos, y supervisando simplemente los controles de éstos sobre sus propios estudiantes.

5. ¿CUALES SON LOS CONTENIDOS ADECUADOS EN LA EDUCACION MATEMATICA HOY

Teniendo en cuenta el carácter polivalente de la matemática y los objetivos de la educación general apuntados antes, a la hora de indicar más concretamente los contenidos podemos señalar los cuatro encasillamientos siguientes:

a) *Bagaje necesario.* Los contenidos bajo este epígrafe deberían responder a los requisitos de equipamiento mínimo que un ciudadano medio de nuestra sociedad debería poseer. A través de ellos se abre ante los ojos todo el mundo de aplicaciones potentes de las matemáticas, incluso de las más elementales. No trataré de señalar pormenorizadamente cuáles deberían ser, pero no es difícil indicar con ejemplos el tipo de conocimientos que deberían estar entre ellos.

1. Técnicas operativas manuales.
2. Manejo de los instrumentos de cálculo. Calculadoras.
3. Ideas sobre ordenadores. Introducción a la informática básica.

4. Ideas geometrícas fundamentales. Curvas. Construcción e interpretación de planos y mapas. Tratamiento del espacio adecuado.
5. Funciones. Tratamiento matemático de la dependencia.
6. Gráficas y su interpretación matemática.
7. Probabilidad. Significado. Estadísticas. Aplicaciones.

b) *Matemática como ciencia.* Los contenidos de este apartado responden a la intención de abrir el camino a los estudiantes hacia una visión profunda de la matemática, haciéndoles explorar someramente sobre el campo matemático la posibilidad de construcción racional de la ciencia. Se trata de introducirles a la actividad intelectual abierta a su propia superación. *No se debería tratar aquí de enseñarles muchos conocimientos. Se trata más bien de ponerles en situación de dominar unos pocos con los que verdaderamente puedan ejercitar su propia actividad intelectual creativa.* Entre los más adecuados, a mi parecer, deben figurar:

1. Introducción a la teoría elemental de números.
2. Una introducción adecuada a la construcción racional de la geometría. (Huyendo de abstracciones y rigorismos excesivos, con fuerte apoyo en la intuición espacil y con adecuado énfasis en la construcción racional).
3. Ideas fundamentales de combinatoria. Aplicaciones.
4. Manejo de funciones sencillas. Aproximación. Polinomios.

c) *Matemática como arte y juego.* Los contenidos de este sabor están destinados a ejercitar la contemplación y creación de la belleza característica de las matemáticas y el espí ritu y actividad lúdica alrededor de ellas. Existe una gran porción del saber matemático que ha sido motivado en su origen por el juego y el placer estético y, ciertamente, la dedicación intensa a su ciencia de una buena parte de los matemáticos de todos los tiempos ha estado y está apoyada fuertemente en esta componente artística y lúdica de la matemática.

No es difícil escoger resultados bien asequibles de teoría elemental de números (por ejemplo, la demostración de la existencia de infinitos números primos), de la geometría elemental (por ejemplo, concurrencia de las alturas de un triángulo, círculo de los nueve puntos), de la topología elemental (los 7 puentes de Königsberg, las tres granjas y los tres pozos), donde este aspecto estético y lúdico se puede hacer bien patente. El valor formativo y estético de la dominación racional de la intuición espacial se podría lograr mediante la selección adecuada de unos cuatos de estos resultados.

d) *Matemática como actividad humana.* Los contenidos aquí enmarcados deberían estar destinados a hacer sentir el carácter profundamente humano de la actividad matemática. Por medio de su historia, la biografía de sus hombres, los impactos sobre el pensamiento general, filosófico, sobre la historia de la sociedad.

No es necesario esperar a acumular muchos conocimientos matemáticos para poder hacer estos aspectos bien patentes. La receptividad a este tipo de conocimiento por parte de los jóvenes es enorme por las implicaciones humanas que su espíritu desea vivamente conocer. Representa un fuerte estímulo para muchos este contacto vital con la historia y las personalidades tan ricas del mundo matemático.

Es fácil ver cómo con un poco de esfuerzo y con textos adecuados se puede realizar esta labor:

1. Génesis de las ideas matemáticas barajadas en la enseñanza elemental. Historia de las ideas elementales de la matemática.
2. Biografía de matemáticos importantes.
3. Poder de las ideas matemáticas. Impactos sobre la filosofía, la sociedad, la historia.

Al distribuir estos contenidos en las cuatro secciones indicadas no quisiera ser mal interpretado. No se trata de compartimientos estancos. Un mismo conocimiento matemático puede prestarse muy bien a estos cuatro tipos de actividad intelectual en torno a él. La educación procede unitariamente, no por acumulación de saberes y técnicas. Es el educador quien debe ser capaz de vibrar con cada una de las facetas de la actividad matemática y señalarlas explícitamente en el momento oportuno.

6. EL ESTILO ADECUADO DE LA ACTIVIDAD MATEMATICA

La matemática es esencialmente actividad, puesto que es muy fundamentalmente método de pensamiento para resolver situaciones-problema reales y mentales. La actividad matemática se ejercita mediante el enfrentamiento con problemas adecuados al estadio del desarrollo del individuo que la practica.

Lo más importante es, por tanto, *hacer* y hacer de tal modo que el individuo quede capacitado para hacer de modo autónomo e incluso para ir más allá. Será necesario, por lo tanto, *entender*, pero sin exageraciones. *Un deseo de rigor prematuro, una meticulosidad excesiva, a destiempo, un encorsetamiento rígido de la intuición pueden paralizar la actividad.*

El método de enseñanza más adecuado será, por consiguiente, el que mejor estimule la actividad intelectual del individuo y este es el *basado fundamentalmente en problemas y aplicaciones* entroncadas en situaciones de interés para él.

El método basado en problemas interesantes estimula fuertemente al individuo para hacerse capaz de crear combinaciones nuevas con las ideas e instrumentos que ya posee. Esta es la base del progreso.

La actividad matemática debe ir acompañada con cierto énfasis, por parte del educador, en el poder, la belleza, el sentido humano y profundo de las ideas que se manejan, aprovechando para ello todas las ocasiones que la misma materia proporciona.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

DE GUZMAN, M., 1983, Sobre la educación matemática, Revista de Occidente, vol. 26, pp. 37-48.

WHITEHEAD, A.N., 1961, The Aims of Education and Other Essays, en Alfred North Whitehead. An Anthology Selected by F.S.C. Northrop and M.W. Gross (Mac Millan: N.Y.).

LAS MATEMATICAS EN EL BACHILLERATO SUIZO

Por Anastasio González del Mazo
Catedrático del I. de B. de MOTA DEL CUERVO (Cuenca)

Es prácticamente imposible describir un Plan de Estudios de la Confederación Helvética; los planes son diferentes según los cantones e incluso según los "liceos" en el mismo cantón. No obstante, el que comentaré, que corresponde a un Instituto de ZURICH, puede considerarse como bastante representativo dentro de la llamada Suiza Alemana. Se trata de la "Kantonsschule Limmattal Urdorf".

Hay un examen de entrada a la Kantonsschule, generalmente a los 13 años. Una vez dentro, pueden cursarse las siguientes secciones:

A, de letras, con griego, latín y francés.

B, de letras, con latín, francés, inglés o italiano.

C, de ciencias.

D, de lenguas modernas.

E, de economía.

A pesar de esas secciones de entrada, ello no implica el abandono de otras materias (como veremos después), simplemente, se hace especial hincapié en ciertas asignaturas sin relegar por ello a las demás.

Por el número de horas veremos que las Matemáticas son una de las asignaturas "reinas", sólo comparables a la Lengua Alemana.

Número de horas semanales de Matemáticas (por cursos y secciones).

Cursos Edad (años)	1ª 13	2ª 14	3ª 15	4ª 16	5ª 17	6ª 18	7ª 19
Tipos A, B y D	5	4	4	4	4	$4\frac{1}{2}$	5
Tipo C	5	6	6	5	5	5	5

El tipo E no existe en esta Escuela; $4\frac{1}{2}$ significa que se dan 4 horas durante medio curso y 5 en el resto.

Además, en el tipo C se da otra asignatura, Geometría Proyectiva, con 2 horas semanales, desde 4ª en adelante.

Como puede observarse, es muy elevada la cantidad de horas semanales dedicadas, en todas las opciones, a Matemáticas. Además, a la hora de las calificaciones, asignaturas como Lengua y Matemáticas cuentan doble.

Breve apunte sobre los contenidos.

Llama la atención la gran cantidad de programa destinado a la Geometría, sobre todo a la Métrica. Los dos tomos de nuestro admirado D. Pedro se dan prácticamente enteros en la sección C y gran parte de ellos en las otras. A los 16 años se introducen, en las secciones C y D, temas de cálculo numérico e investigación operativa, estimaciones de errores, calculadoras electrónicas, etc.

Es curioso que en cuanto a enunciados de los programas, salvando la Geometría, no se da más que en España, pero debido al número de horas semanales y a que son tres años más, la profundidad y madurez que aquellos alcanzan en mucho mayor.

A continuación doy una traducción del programa completo de Matemáticas de la Kantonsschule citada.

Plan de Matemáticas en la Kantonsschule "Limmattal Urdorf" de Zurich.

OBJETIVO:

Desarrollo del pensamiento, de la formación de conceptos, de la capacidad de abstracción, de la intuición y de la expresión precisa. Elaboración de la formación matemática básica, necesaria para el trabajo científico.

PROGRAMA DE ENSEÑANZA

1ª// A, B, C, D (13 años)

- Cálculos: Las cuatro operaciones fundamentales en el conjunto N. Concepto de número y signo. Números primos, mcm, mcd. Transición a los racionales positivos.
- Proporcionalidad directa e inversa.
- Geometría: Estudio de figuras y cuerpos sencillos, desarrollo intuitivo de los conceptos geométricos fundamentales. Conjuntos de puntos (también con coordenadas).

2ª// A, B, C, D (14 años)

- Algebra: Las cuatro operaciones fundamentales en el conjunto Z y expresiones algebraicas (sin fracciones). Ecuaciones e inecuaciones lineales con una incógnita.
- Geometría: Relaciones de congruencia, construcciones, triángulos, paralelogramos, trapecios, círculos. Cálculos del área de figuras limitadas por rectas.

3ª// A, B (15 años)

. Algebra: Las cuatro operaciones con fracciones. Transición a R. Trabajo con raíces.

. Funciones, representación gráfica. Sistemas de ecuaciones.

C

. Igual que en A, B, pero se añade la divisibilidad, se introduce el cálculo literal en diferentes bases numéricas.

D

. Se amplía un poco lo del curso anterior en Algebra y se añade la descomposición de polinomios.

Geometría en 3ª

A,B: Teorema de Pitágoras, semejanzas y cálculos con el círculo.

D : Teoréma de Pitágoras, inversión céntrica, teoremas de proporcionalidad, semejanzas.

C : La proporcionalidad con representación gráfica, repetición de los conceptos fundamentales de planimetría, congruencias en el plano incluida la composición con aplicaciones. Construcciones fundamentales en el triángulo en el cuadrilátero y en el círculo. Concepto de lugar geométrico, áreas, grupo de teoremas de Pitágoras. Teoremas de proporcionalidad, inversiones y semejanzas.

4ª (16 años)

A,B:

. Algebra: Potenciación, ecuaciones cuadráticas y cúbicas, funciones. Complejos.

. Geometría: Funciones trigonométricas, cálculos en el triángulo: Teoremas del seno y del coseno, teoremas de adición y ecuaciones goniométricas.

D

. Algebra: Radicación y cuadraturas en ecuaciones. Ecuaciones y funciones cuadráticas. Logaritmos y ecuaciones exponenciales.

. Geometría: Cálculos en el círculo, trigonometría: las funciones trigonométricas, cálculos en los triángulos rectángulos y oblicuángulos. Ecuaciones goniométricas.

Operaciones con calculadora.

C

. Algebra: Estimación de errores. Utilización formal de la regla de cálculo. Ecuaciones cuadráticas con una incógnita. La función cuadrática. Sistemas de ecuaciones de 1ª y 2ª grado con varias incógnitas. Ecuaciones con constantes. Inecuaciones. La función exponencial.

. Calculadoras electrónicas.

. Geometría: Todo lo de sección D, además: la oscilación del seno y coseno. Cálculos de superficies y volúmenes para prismas, pirámides, pirámides truncadas, prismatoides, cilindros, conos, esferas,...

5ª (17 años)

A,B:

. Análisis: Progresiones y series aritméticas y geométricas; límites, cálculo diferencial. Combinatoria y probabilidad.

. Geometría: Relación de posición en el espacio. Cálculo de áreas y volúmenes de sólidos.

D : Igual que A, B pero se omite el cálculo diferencial y se añaden los complejos.

C : Análisis como en D sin complejos, funciones exponenciales y logarítmicas. Principio de inducción, teoría de la regla de cálculo; combinatoria y probabilidad. Continuación de los cálculos de superficies y volúmenes.

6ª y 7ª (18/19 años)

A,B:

Análisis: Diferenciación e integración, función logarítmica; aplicaciones. Geometría analítica; cálculo vectorial.

D : Idem. (con diferente profundidad).

C : Los números complejos, ecuaciones de mayor grado, funciones.

Análisis: Como A, B pero mucho más detallado.

Geometría: Lo mismo, añadiendo los diferentes tipos de coordenadas, cambios de coordenadas, ecuaciones paramétricas, etc.

Geometría Proyectiva

Comienza en 4ª curso y es sólo para los alumnos que tienen la opción C.

4ª curso

Introducción a los elementos del espacio y a sus interrelaciones. Construcciones intuitivas en perspectiva paralela.

5ª curso

Proyección ortogonal; construcciones básicas, afinidades; representación del círculo y la esfera.

Proyección normal acotada, geometría proyectiva de la esfera.

6ª curso

Inversión de la proyección, poliedros, cilindros y conos. Colineación y geometría proyectiva en el plano. Investigación de las secciones cónicas.

7ª curso

Penetración, construcción de sombras

Además de los años de geometría proyectiva, existe, para el grupo C, una asignatura de dibujo técnico en 3ª y 4ª.

* * * * *
* * * *

- VARIA -

CUANDO LAS BARBAS DE TU VECINO...

Transcribimos literalmente el artículo aparecido en "Le Figaro Magazine" de enero de 1985, pp 19-25, que ha tenido, en su país y en el nuestro, una gran difusión y originado los más diversos comentarios.

LE PROBLÈME

La réforme sur l'enseignement est loin de faire l'unanimité. Un groupe de'enseignants de très haute niveau s'est penché sur une question qui préocupe la majorité des futurs instituteurs: l'évolution d'un problème mathématique. Cette comparaison vous aidera certainement à vous y retrouver.

Enseignement 1960

Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 100 F. Ses frais de production s'élèvent au 4/5 du prix de vente. Quel est son bénéfice?

Enseignement traditionnel 1970

Un paysan vend un sac de pommes de terre pour 100 F. Ses frais de production s'élèvent au 4/5 prix de vente, c'est à dire 80 F. Quel est son bénéfice?

Enseignement moderne 1970

Un paysan échange un ensemble P de pommes de terre contre un ensemble M de pièces de monnaie. Le cardinal de l'ensemble M es égal à 100 et chaque élément $p \in M$ vaut 1 F. Dessine 100 gros points représentant les éléments de l'ensemble M.

L'ensemble F des frais de production comprend 20 gros points de moins que l'ensemble M. Représente l'ensemble F comme un sous-ensemble de l'ensemble M et donne la réponse à la question suivante:

Quel est le cardinal de l'ensemble B des bénéfices ? (à dessiner en rouge).

Enseignement rénové 1980

Un agriculteur vend un sac de pommes de terre pour 100 F. Les frais de production s'élèvent à 80 F et le bénéfice est de 20 F. Devoir: souligne les mots "pommes de terre" et discutes en avec ton voisin.

Enseignement réformé 1990

Un peizan kapitalist privilégié sanrichi injustement de 20 F sur un sac de patat, analiz le tekst et recherche les fote de contenu de gramère, d'ortographe, de ponctuassion et ensuite di se que tu pense de set maniaire de s'enrichir.

Un grupe de normaliens de Grenoble.

Moraleja.- A través del humor del articulista nos parece advertir una seria preocupación por la evolución de la reforma de la enseñanza de la matemática en el país vecino iniciada en la década de los sesenta. En ocasiones -si no siempre- una buena caricatura vale por un largo ensayo, y, en la evidente exageración de los rasgos, puede revelarse con más claridad que en un fiel retrato la realidad de un personaje o de una situación. En lo que a nosotros concierne -tan influídos habitualmente por las corrientes culturales de nuestros vecinos- la lectura del artículo tal vez sea motivo de advertencia e inquietud. Al menos nos sugiere la siguiente pregunta : ¿podría llevarnos la actuación desmesurada de ciertos "modernistas" a la pedanteria y extraviada pedagogía que el articulista ridiculiza?

RESEÑA DE LIBROS

"MICROORDENADORES EN LA ESCUELA (una introducción didáctica a los lenguajes BASIC Y LOGO)", por J. Díaz Godino y M.C. Batanero Bernabeu. Jaén, 1985. (Distribuye RA-MA Microinformática, Madrid). 278 págs.

Actualmente se está tratando de introducir la enseñanza de la Informática en todos los niveles educativos, pero en ninguno parece tan urgente como en las Escuelas Universitarias de Profesorado de E.G.B. Los escolares de la Educación General Básica viven en un mundo en el que la Informática se va haciendo presente en todas las actividades humanas. Los maestros que han de educarlos deben tener una clara comprensión de este fenómeno característico de nuestra sociedad post-industrial, de sus orígenes, de sus fundamentos técnicos y de lo que cabe esperar de él.

El libro que comentamos está orientado a facilitar la iniciación en el mundo de la Informática, tanto al profesorado en formación como al que ya está en ejercicio, atendiendo preferentemente a sus aspectos didácticos. Pensado, sin duda, para el profesorad de E.G.B., resulta adecuado también para el de Bachillerato, e incluso puede ser utilizado directamente por los alumnos.

Está dividido en cuatro capítulos y unos apéndices. El primero, sobre Ordenadores y Educación, proporciona una visión panorámica muy lúcida del papel de la informática en nuestra cultura y de sus repercusiones en la Educación, para entrar después en el análisis de las distintas maneras de utilizar el ordenador en la Escuela. Hace especial hincapié en las enseñanzas de Seymour Papert, del M.I.T. que desarrolló el len guaje LOGO con especial propósito didáctico, muy en la línea de la enseñanza heurística marcada en España por Puig Adam.

Los dos capítulos siguientes están dedicados concretamente a la Programación de Microordenadores en la Escuela; en el segundo, mediante el lenguaje BASIC, y en el tercero, a través del LOGO. Aunque incluyen una introducción a la programación en estos lenguajes, no constituyen simplemente un manual del usuario, sino que estudian sus posibilidades didácticas, sugiriendo actividades concretas, que pueden ser llevadas a cabo por los alumnos.

El capítulo 4ª se titula "El Microordenador como recurso didáctico para un aprendizaje activo de la Matemática", y en él se hace una clara exposición de la renovación didáctica que la creciente informatización de la sociedad exige y que la utilización de microordenadores en las aulas hace posible.

En este capítulo se dan interesantes sugerencias didácticas en torno a los temas de sistemas numéricos, geometría, probabilidad y estadística, y funciones. También debe destacarse un estudio comparativo de los programas escritos en BASIC y LOGO para la resolución de los mismos problemas, que no es una mera confrontación para ver cual es más eficaz o más simple, sino que arroja mucha luz sobre el papel de los lenguajes en la descripción de algoritmos, y la razón de ser de los elementos de que constan.

Esperamos que este libro contribuya a la inaplazable tarea de formación de un profesorado sensible a los últimos cambios sociales, en los que la Informática está jugando un papel tan importante.

J.F.B.

"BASIC BASICO. CURSO DE PROGRAMACION" (1982). "BASIC BASICO. PROGRAMAS COMENTADOS" (1983). "BASIC JUNIOR" (1985). "BASIC JUNIOR. PROGRAMAS EXPLICADOS" (1985, en prensa), por R. Aguado Muñoz, A. Blanco, J. Zabala, R. Zamarreño y (salvo el primero) E. Rubiales. Editados por los autores.

Los autores de estos libros han sido pioneros en la introducción experimental de los micro-ordenadores en el Bachillerato. Alentados por el entusiasmo que ha despertado sus experiencias docentes (comenzadas en el Instituto "Cardenal Herrera Oria") en gran número de sus alumnos, han acometido la tarea de escribir estos libros, para contribuir a la incorporación de la Informática a las Enseñanzas Medias. Eligieron con ese fin el lenguaje BASIC por ser el más generalizado en los micro-ordenadores disponibles en los centros y el único que admiten muchos de ellos.

Estos libros se presentan en forma amena y atractiva para los alumnos, con inspiradas ilustraciones, debidas a Saltés, y proporcionan ricas sugerencias para provocar actividades de gran valor formativo.

El primero de ellos contiene una descripción clara y concisa del funcionamiento de los ordenadores e introduce al lector progresivamente en la utilización del lenguaje BASIC para comunicarse con ellos, sin caer en la presentación prematura de reglas cuyo significado no aparece con claridad hasta mucho después, como suele ocurrir cuando se enseña un lenguaje a través de un manual de consulta.

El libro incluye numerosos ejericios cuidadosamente secuenciados, de modo que el alumno, a la vez que aprende las reglas del BASIC, se familiarice con los recursos habituales de la programación, diseñando algoritmos, utilizando ciclos, decisiones lógicas, rutinas, etc. No es un simple manual de BASIC, sino un curso de programación que se vale del BASIC para la expresión de los programas estudiados.

El segundo libro contiene una colección de programas que además de servir para que el lector se ejercite en las técnicas de programación aprendidas con el primero, le ofrecen un amplio repertorio de nuevos recursos y fecundas ideas. La elaboración de esos programas se sigue con facilidad gracias a los acertados comentarios que los acompañan.

El "Basic Junior", recientemente aparecido, tiene por objeto permitir una agradable introducción a la programación y al lenguaje BASIC a alumnos de menor edad que aquellos a los que iba dirigido el "Basic Básico". Se supone un logro pedagógico sólo posible tras largo tiempo de experimentación por los autores.

Próximo a aparecer está el libro de Programas Explicados que completa el anterior.

J.F.B.

"EL BASIC DEL SPECTRUM. DEL TECLADO AL MICRODRIVE", por A. Blanco y B. Compostela. (Distribuye Grupo Distribuidor Editorial S.A.). 263 págs.

Hace poco ha aparecido este nuevo libro, el más joven de la familia del BASIC Básico, que a diferencia de los anteriores, de uso general, está escrito para un ordenador concreto. Esta característica ha permitido a los autores ser muy precisos en sus instrucciones al lector, de manera que pueda obtener el máximo provecho de su aparato, aunque sea muy joven o totalmente novel en este campo.

Para romper las barreras mentales con que algunas personas se enfrentan a los ordenadores, el libro está escrito con un estilo llano, claro y preciso. El material está distribuido en capítulos muy cortos, alternando los temas referentes al uso

del aparato propiamente dicho (teclado, almacenamiento y recuperación de programas y datos, etc.), con los que explican instrucciones o funciones propias del lenguaje BASIC, o los referentes a teoría de la programación (análisis y resolución de problemas, algoritmos, diagramas de flujo, programación estructurada, etc.).

Tanto los temas de BASIC como los de teoría de la programación aparecen ilustrados sobre casos concretos, referentes a materias tan variadas como son los dibujos infantiles en colores, la música, representación de gráficas en coordenadas explícitas y polares, inteligencia artificial, aritmética, gestión comercial, lengua castellana, criptografía o representación de mapas. El azar, por ejemplo, se usa tanto para simulaciones numéricas como para crear paisajes aleatorios, frases, etc.

Desde el punto de vista didáctico, el BASIC del Spectrum es apropiado para el que aprende, por los factores antes mencionados, y para el que enseña porque, aunque emplee otro aparato, tanto los muchos y variados ejercicios de este libro como el enfoque con que se abordan y los análisis que en ellos se hacen, son para el profesor una fuente de inspiración y de trabajo que puede trasladar al aula de manera inmediata.

J.G.T.

* * * * * * * * *

- PROBLEMAS -

PROBLEMAS PROPUESTOS

Animamos a nuestros socios para que nos envíen sus soluciones a los problemas propuestos en nuestro Boletín anterior, y asimismo a los que damos a continuación, propuestos en Olimpiadas Internacionales.

PROBLEMA 1ª

La función f(x,y) satisface, para todos los enteros no negativos x,y, a las condiciones:

1) $f(0,y) = y+1$
2) $f(x+1, 0) = f(x,1)$
3) $f(x+1, y+1) = f(x, f(x+1,y))$

Determinar f(4, 1981).

(Propuesto por Finlandia en 1981).

PROBLEMA 2ª

Encontrar todos los números reales a para los que existan números reales no negativos x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, que satisfagan las relaciones

$$\sum_{k=1}^{5} k\, x_k = a\,, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^3\, x_k = a^2\,, \qquad \sum_{k=1}^{5} k^5\, x_k = a^3$$

(Propuesto por Israel en 1979).

PROBLEMA 3ª

Sean $P_1, \ldots, P_n$ $(n \geq 2)$ puntos del plano. Probar que se verifica:

$$\underset{1\leq i<j\leq n}{\text{Máx}}\ \overline{P_iP_j} > \frac{3}{2}(\sqrt{n}-1)\ \underset{1\leq i<j\leq n}{\text{Min}}\ \overline{P_iP_j}$$

donde $\overline{P_iP_j}$ es la distancia euclídea entre P_i y P_j.

(Sugerido por Rep. Democrática Alemana en 1983).

PROBLEMAS RESUELTOS

SOLUCIONES RECIBIDAS A LOS PROBLEMAS 3ª Y 5ª DE LA XXV OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS QUE FUERON PROPUESTOS EN NUESTRO BOLETIN Nª 4

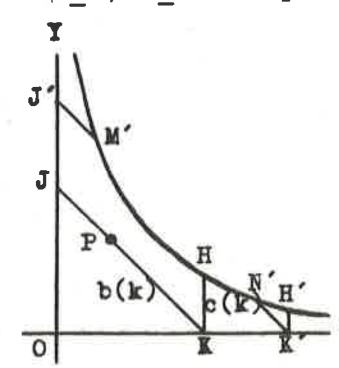
PROBLEMA 3ª

O, A son puntos dados en el plano. Para cada punto $X \neq 0$, del plano, $W(X)$ es la medida radial, en sentido antihorario, del ángulo $\widehat{AOX}$, $(0 \leq W(X) \leq 2\pi)$, $C(X)$ representa la circunferencia de centro O y radio $\overline{OX} + \frac{W(X)}{\overline{OX}}$. Se dispone de un número finito de colores y cada punto del plano se colorea con uno de ellos. Demostrar que existe un punto Y del plano, con $W(Y) > 0$ y cuyo color aparece sobre la circunferencia $C(Y)$.

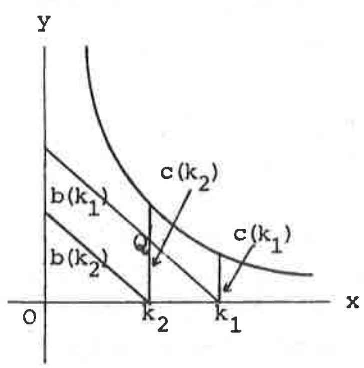
- ■ - ■ - ■ -

Solución

Aunque no es imprescindible, el problema se hace de más fácil interpretación si se transforma mediante una aplicación α del plano dado, P_1 (excluido O) en otro P_2, definida por las ecuaciones $x = \rho$, $y = \frac{\theta}{\rho}$, donde (ρ,θ) son coordenadas polares en P_1 (con polo O y rayo origen OA, siendo $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$) y (x,y) cartesianas en P_2. La imagen de $P_1 - \{0\}$ en α es la figura F de P_2 definida por $x > 0$, $y \geq 0$, $xy < 2\pi$ (ver figura). Se supone que α conserva los colores. Las circunferencias $\rho = k$ de P_1 se convierten en segmentos KH (paralelos a OY, con abscisa k) y a cada punto $P(x,y)$ de F le corresponderá el segmento KH con $k = x+y$. El original de un segmento tal como el KH, correspondien-



te a la abscisa k es la intersección con F de la recta $x+y=k$ que es un segmento JK si $k<2\sqrt{2\pi}$ o dos segmentos J'M' y N'K' en caso contrario (como K'H'). Designaremos con $c(k)$ al segmento KH de abscisa k (excluidos ambos extremos) y $b(k)$ a su original (JK o los dos segmentos citados, excluidos los extremos). Sea n el número de colores total. Si hay algún color de un punto de $c(k)$ coincidente con el de algún punto de $b(k)$, diremos que k es un valor "bueno", y si no, que es "malo". El problema ha quedado reducido a probar que efectivamente existen valores buenos. Vamos a demostrar que hay valores buenos en el intervalo $]0,\sqrt{2\pi}[$ (lo que asegura que $b(k)$ es un sólo segmento). En efecto, si k_1 es un valor malo de este intervalo, $c(k_1)$ poseerá puntos con m colores y sólo con ellos, siendo $m<n$, y $b(k_1)$ no tendrá puntos con cualquiera de esos m colores. Ya no puede haber otro k_2 menor que k_1 que también sea malo y tal que $c(k_2)$ tenga los mismos colores que $c(k_1)$, pues habría contradicción acerca del color del punto Q de intersección de $b(k_1)$ con $c(k_2)$. En consecuencia el número de valores de k malos en $]0,\sqrt{2\pi}[$ será finito (a lo más 2^n-2). Habrá, en consecuencia, infinitos valores buenos en $]0,\sqrt{2\pi}[$, c.d.d.



Argearge

PROBLEMA 5ª

Un n-ágono ($n>3$) plano y convexo, tiene de perímetro p y la suma de las longitudes de sus diagonales es d. Demostrar,

$$n-3<\frac{2d}{p}<\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]-2$$

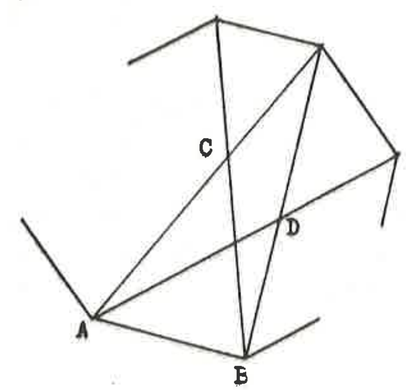
($[x]$ = parte entera de x).

- ■ - ■ - ■ -

Solución

a) $n-3<\dfrac{2d}{p}$.

Sobre un lado del polígono (por ejemplo, AB) edificamos los n-3 triángulos posibles con los pares de diagonales que salen de sus vértices y van hasta otros dos vértices consecutivos (por ejemplo ACB, ADB, etc.).



Hacemos lo mismo con todos los lados; la suma β de las bases de estos triángulos es menor que la suma δ de las longitudes de sus "gorros", es decir, $\beta<\delta$. Pero evidentemente, $\beta=(n-3)p$; por otro lado, los lados de los "gorros" serán, en total, $2(n-3)n$ y como cada dos lados, conveniente elegidos, componen una diagonal, y hay $\frac{1}{2}n(n-3)$ diagonales, la suma δ de esos lados será 2d. En definitiva, $\beta<\delta$ da lugar a $p(n-3)<2d$, c.d.d.

b) $\dfrac{2d}{p}<\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\dfrac{n}{2}\right]-2$.

Sean $V_1,\dots,V_n$ los vértices, $l_{i,i+1}=\overline{V_iV_{i+1}}$, $d_{ij}=\overline{V_iV_j}$. Usaremos como única idea esencial que $d_{ij}<l_{i,i+1}+\dots+l_{j-1,j}$ cuando el número de vértices que hay entre V_i y

V_j (sentido horario) es $\leq \frac{n-2}{2}$, y $d_{ij} < l_{j,j+1} + \ldots + l_{i-1,i}$ en otro caso. $2d = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j \geq i+2}} d_{ij} <$ suma de los $l_{k,k+1}$ correspondientes en cada caso. Averigüemos el número m de veces que aparece cada lado en esa suma (todos el mismo número) y será $2d < mp$. Así basta ver que:

<u>LEMA</u>: $m = \left[\frac{n+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{2}\right] - 2.$

Fijémonos en un vértice V y tracemos diagonales en sentido horario hasta llegar a la diagonal $\left[\frac{n-2}{2}\right]$ - ésima. En ese trazado aparecerán 2 lados por la primera, 3 por la segunda, ... En total $\frac{1}{2}\left[\frac{n-2}{2}\right](3 + \left[\frac{n-2}{2}\right])$. Empecemos a contar después en sentido contrario; 2 lados para la 1ª,..., hasta la última, que es la $(n-3 - \left[\frac{n-2}{2}\right])$ - ésima: $2 + 3 + \ldots + (n-3 - \left[\frac{n-2}{2}\right] + 1) = \frac{1}{2}(n - \left[\frac{n-2}{2}\right]) \cdot (n-3 - \left[\frac{n-2}{2}\right])$. Usemos ahora que $n - \left[\frac{n-2}{2}\right] = \left[\frac{n+3}{2}\right]$; así el número total de lados que aparecen para las diagonales de V es,

$$\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n-2}{2}\right]\left(\left[\frac{n-2}{2}\right] + 3\right) + \left[\frac{n+3}{2}\right]\left(\left[\frac{n+3}{2}\right] - 3\right)\right)$$

pero esta expresión vale exactamente $\left[\frac{n+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{n}{2}\right] - 2$, como se comprueba fácilmente por separado en los casos en que n es par o impar. El número m obtenido es el número total de lados para las diagonales desde V. En total habría mn lados, y el número de veces que aparecería cada lado sería $\frac{mn}{n} = m$. Del lema y de $2d < mp$, se obtiene el resultado deseado.

Anastasio González del Mazo
Mota del Cuervo.

* * * * *
* * * *