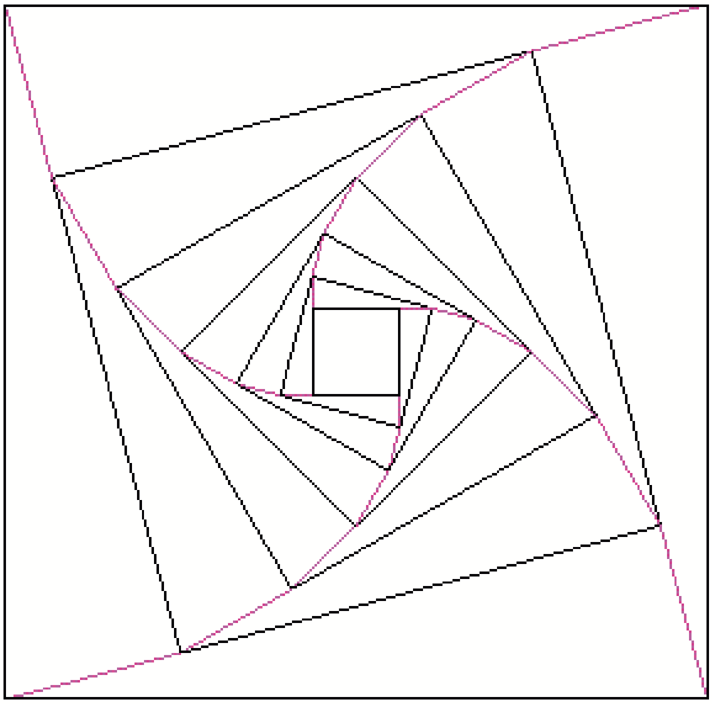
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 59
OCTUBRE DE 2001

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik y Mathematical Reviews

La confección de ese número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad, que a partir de ahora queda ubicada en el despacho 305 de la Facultad de Educación (hasta ahora era el despacho 3517):

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS (Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ (Castilla-León)
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES (Castilla-La Mancha)

Vocales:
JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE (Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO (Actividades y concursos)

Secretario:
FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:
MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

Adjunta a la presidencia:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA
ENRIQUE RUBIALES CAMINO

XIX Concurso de Resolución de Problemas

Al igual que en los últimos diecinueve años se celebró en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense el Concurso anual de Resolución de Problemas convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias.

La prueba tuvo lugar el sábado 23 de Junio y esa misma tarde en la Escuela Universitaria de Biblioteconomía y Documentación, situada en el edificio Pablo Montesino se celebró la entrega de premios. Vaya, en primer lugar, nuestro agradecimiento tanto al Decanato de la Facultad de Matemáticas como a la Dirección de la Escuela Universitaria de Biblioteconomía.

La participación, de 81 estudiantes, fue algo menor que en el año anterior. Queremos creer que fue debido a que el día de su celebración ya habían terminado totalmente las actividades lectivas en los centros y posiblemente, por ser el primer día de vacaciones para los estudiantes, no fue el día más apropiado.

Como todos los años, en cada nivel se propusieron 4 problemas, en dos tandas de hora y media. Al igual que en otros concursos internacionales, la puntuación de cada problema fue de 0 a 7 puntos.

Merece la pena destacar la participación -y con éxito- de estudiantes de otras comunidades -Castilla la Mancha y Valencia- participación que se viene generalizando en los últimos años.

También es de destacar la participación de estudiantes de cursos anteriores a 3º de ESO que, por tratarse de casos excepcionales, sus profesores entendieron que podían participar y nuestra sociedad accedió a dicha participación.

Los estudiantes premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

Nivel I (3º ESO)

1. Luis Sarabia Utrilla del Colegio San Viator de Madrid.
2. Ana Armas Romero (2º ESO) del IES San Juan Bautista de Madrid.
3. Mohamed Blanca Ruiz del IES Ausías March de Manises.
4. Diego Pérez López del IES Alonso Quijano de Alcalá de Henares.
5. David Fernández Sánchez (2º ESO) del IES Jorge Guillén de Alcorcón y Ricardo Martín Brualla del Colegio Alemán de Madrid.

Nivel II (4º ESO)

1. Javier Gómez Serrano del Colegio Alemán de Madrid.
2. Luis Sierra Andrés del Colegio Beata Filipina de Madrid.

3. Esteban García Martínez del IES Antonio Machado de Alcalá de Henares.
4. David Portillo García del IES Ramiro de Maeztu de Madrid.
5. Juanjo Heras Verdejo del Colegio Beata Filipina de Madrid.

Nivel III (1º Bachillerato)

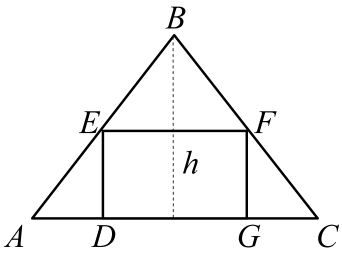
1. Carlos Moraga Ferrándiz del IES Julio Rey Pastor de Albacete.
2. David García Soriano del Colegio Chamberí de Madrid.
3. Cristina Mucientes de la Peña del Colegio San José de Ciudad Real.
4. Mónica Serrano Gómez del IES nº 1 de Requena.
5. Fernando Meseguer Garrido del IES Ramiro de Maeztu de Madrid.

Así como otros años hemos comentado la coincidencia de alumnos premiados varios años consecutivos –en este año se da el caso de Javier Gómez Serrano y David García Soriano– a alguien que haya seguido este u otros concursos otros años le habrá sorprendido la no presencia entre los premiados del inefable Luis Hernández Corbato. La explicación es muy sencilla: Luis, estudiante de 4º de ESO en 200-2001 pero con edad de estudiante de 3º de ESO, había decidido no participar en este concurso. Como muchos de vosotros sabéis fue uno de los seis representantes españoles en la Olimpiada Matemática Internacional en Washington siendo el único español que obtuvo medalla. Enhorabuena a él, a sus padres y a sus profesores.

Problemas propuestas en el XIX Concurso

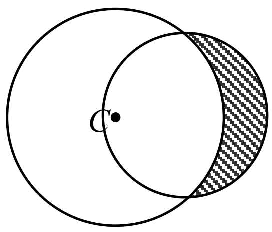
Nivel I

1. En un triángulo ABC sabemos que $AC = 54$ m y su altura $h = 46$ m. Se desea saber a qué distancia de la base AC sería preciso trazar una paralela a la misma para que el perímetro del rectángulo $DEFG$ sea igual a la suma de la base y la altura.



2. Se considera un número n de cuatro cifras, cuadrado perfecto, con todas sus cifras menores que 9. Si a cada cifra se le suma 1, el número resultante es también cuadrado perfecto. Halla n.

3. El centro C de una circunferencia de radio $\sqrt{2}$ es un punto de una circunferencia de radio 1, como se indica en la figura. Calcula el área rayada.



4. Ana, Beatriz y Celia resuelven cada una exactamente 60 problemas de una lista de 100. Cada problema fue resuelto al menos por alguna de las tres. Deciden que un problema es fácil si las tres lo han resuelto, y que es difícil si solamente una de ellas lo resolvió. Si d es la cantidad de problemas difíciles y f la cantidad de problemas fáciles, determina la diferencia $d - f$.

Nivel II

1. En una fiesta, cada invitado saludó a todos los demás. Posteriormente llegó Juan, que saludó solamente a los que conocía, que no eran todos. Una vez que saludó a sus amigos, el número de saludos había crecido un 25% de los que se habían dado antes de que él llegara. ¿A cuántas personas de la fiesta conocía Juan?

2. Se busca el menor número entero positivo que tiene dos mil una cifras y cuya suma de cifras es 2000. Después se escribe el número siguiente. Razonar que en ese siguiente solamente hay tres cifras distintas. ¿Sabrías escribirlo con todas sus cifras?

3. El área de un trapecio isósceles es 972 cm^2. Las longitudes de su base menor, lado, base mayor y diagonal son, respectivamente, el 1º, 10º, 11º y 12º términos de una progresión aritmética. Calcula la longitud del menor de los trozos en los que una diagonal divide a la otra.

4. De un papel rectangular se recortan, con un único corte, dos figuras: un triángulo y un pentágono. Las medidas de los lados de este último, en algún orden, son 33, 17, 25, 43, 28. Determina su área.

Nivel III

1. En un triángulo rectángulo la hipotenusa es igual a c y la bisectriz de uno de los ángulos agudos es igual a $c\sqrt{3}/3$. Hallar los catetos.

2. En una clase en la que hay más de 16 estudiantes, la probabilidad de que al escoger dos cualesquiera de ellos resulte que ambos han aprobado el último examen de Matemáticas es 1/2. ¿Cuántos estudiantes hay en la clase y cuántos aprobaron dicho examen?

3. Se han pintado tres líneas paralelas de 8, 11 y 13 m. para señalizar el hall de un aeropuerto. Una vez pintadas, el arquitecto decidió que las líneas debían tener igual longitud. Si el precio por metro de prolongar las líneas es igual que el de reducirlas, ¿qué largo deben tener las líneas para economizar gastos?

4. Demostrar que si $P(x) = 6x^2 + 12x + 8$, no hay ningún número entero x, distinto de 0, para el que $P(x)$ sea un número de la forma y^3. (Obsérvese que a $P(x)$ le falta sólo un término para ser el cubo de un binomio).

42 Olimpiada Internacional de Matemáticas

La 42 Olimpiada Internacional de Matemáticas ha tenido lugar en Washington DC entre los días 1 y 14 de julio de 2001. En ella han participado un total de 473 estudiantes procedentes de 83 países. El equipo español estuvo formado por:

Ignacio Cascudo Pueyo (COU, Oviedo)
Joaquim Cevallos Morales (2º de Bto., Barcelona)
Luis Hernández Corbato (4º de ESO, Madrid)
Sergio Millán López(1º de Bto., L'Hospitalet de Llobregat)
Miquel Oliu Barton (2º de Bto., Barcelona)
Martí Prats Soler (2º de Bto., Barcelona)

Les acompañaban las profesoras:

María Gaspar Alonso-Vega, Jefe de Delegación
Mercedes Sánchez Benito, Profesora tutora

El uruguayo Javier Cóppola, que fue la primera Medalla de Oro en la fase nacional de nuestra Olimpiada, en Murcia, se integró en el equipo de su país, dejando hueco para Joaquim Cevallos, que obtuvo la primera Medalla de Plata.

Durante la primera semana, el Jurado, después de considerables deliberaciones, eligió los seis problemas de la prueba, para aprobar a continuación las redacciones en los idiomas oficiales. Por último, los Jefes de Delegación hicieron la traducción a sus respectivos idiomas. Hubo más de 50 versiones idiomáticas.

Las pruebas fueron los días 8 y 9 de julio. Como de costumbre, cada día se propusieron tres problemas, a resolver en un tiempo máximo de 4 horas y media. Cada problema se califica sobre 7 puntos. Los enunciados aparecen más adelante en este mismo número del Boletín.

Los cortes para las medallas de oro, plata y bronce estuvieron en los 30, 20 y 11 puntos respectivamente. Cuatro estudiantes – dos de China y dos de Estados Unidos – obtuvieron la puntuación máxima de 42 puntos.

Entre los estudiantes españoles, Luis Hernández obtuvo medalla de bronce, y Joaquim Cevallos y Miquel Oliu tuvieron mención de honor.

El próximo año, la Olimpiada se celebrará en Glasgow (Reino Unido).

Problemas propuestos en la 42 Olimpiada Internacional de Matemáticas

celebrada en Washington D.C. el 8-9 de julio de 2001

1. Sea ABC un triángulo acutángulo, y sea O el centro de su circunferencia circunscrita. El punto P del lado BC es el pie de la altura desde A. Supongamos que ang(BCA) $\geq$ ang(ABC)+30. Demostrar que ang(CAB) + ang(COP)<90.

2. Para a, b, c reales positivos, demostrar que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

3. En un concurso de matemáticas participaron 21 mujeres y 21 hombres. Cada concursante resolvió como máximo 6 problemas. Para cada mujer y cada hombre, hay al menos un problema que fue resuelto por ambos. Demostrar que hay al menos un problema que fue resuelto por al menos tres hombres y tres mujeres.

4. Sea n un entero positivo impar mayor que 1, y sean $k_1, k_2, \ldots, k_n$ números enteros dados. Para cada una de las n! permutaciones $a=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ del conjunto {1,2,...,n} sea

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n} k_i a_i$$

demostrar que existen dos permutaciones b y c, con b distinto de c, tales que n! es divisor de S(a)-S(b)

5. En un triángulo ABC, la bisectriz del ángulo BAC corta al lado BC en P, y la bisectriz del ángulo ABC corta al lado CA en Q. Se sabe que ang(BAC)=60, y que AB+BP=AQ+QB. Determinar las posibles medidas de los ángulos del triángulo ABC.

6. Sean a,b,c y d números enteros con a>b>c>d>0. Supongamos que ac+bd=(b+d+a-c)(b+d-a+c). Demostrar que el número ab+cd no es primo.

Recensiones en ZDM y en Math Reviews

Las prestigiosas revistas Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) y Mathematical Reviews incluyen en sus volúmenes recensiones de artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 33 (3) DE 2001

#2428 (sección G40). Lugares geométricos encontrados con ayuda del Algebra y la Computación, por *Eugenio Roanes Macías*, Bol. Soc. Puig Adam 57 (Feb 2001), págs. 62-79.

#2494 (sección G90). Algunos teoremas sobre la Geometría Plana Elemental, por *Juan Bosco Romero Márquez*, Bol. Soc. Puig Adam 57 (Feb 2001), págs. 80-85.

#2542 (sección H60). Sistemas de ecuaciones lineales sobre anillos de Prüfer, por *Tomás Sánchez Giralda*, Bol. Soc. Puig Adam 57 (Feb 2001), págs. 86-94.

#2581 (sección I25). Funciones periódicas, por *Julio Fernández Biarge*, Bol. Soc. Puig Adam 57 (Feb 2001), págs. 41-51.

#2645 (sección K20). Iluminación y vigilancia en las Galerías de Arte, por *Gregorio Hernández Peñalver*, Bol. Soc. Puig Adam 57 (Feb 2001), págs. 52-61.

RECENSIONES PUBLICADAS HASTA EL PRESENTE EN MATH REVIEWS

2001a: 26002. Una aplicación de una idea arquimediana, por *Juan A. Aledo y Juan C. Cortés*, Bol. Soc. Puig Adam 54 (2000), págs. 58-68.

2001f: 11014. Algunas representaciones radicales infinitas de los números naturales, por *Juan Carlos Cortés López*, Bol. Soc. Puig Adam 54 (2000), págs. 29-38.

Bodas de oro de la Promoción 1951 de la UCM

"Lo importante no es sólo hacer cosas,
sino que tengan contenido"

El día 15 de junio de este año, la promoción de matemáticas de la Universidad Complutense, celebró sus 50 años de haber terminado su carrera. El curso estuvo formado por 41 alumnos de los que 19 pudieron estar presentes en este acontecimiento, disfrutando de la grata compañía del que fue su profesor en Ecuaciones Diferenciales, don José Carrasco.

El acto estuvo precedido de una Eucaristía celebrada en la Facultad de Ciencias por su Capellán José María Sierra, que aunque más joven, también es matemático. El Decano de la Facultad de Matemáticas, José Carrillo Menéndez, después de unas palabras de bienvenida a la promoción, manifestó que naturalmente esta era la casa de todos; el catedrático Enrique Outerelo hizo una brillante presentación curricular de la licenciatura, que comenzó formando parte de la licenciatura de Filosofía, después se independizó pasando a ser licenciatura en Ciencias Exactas y posteriormente licenciatura en Matemáticas, siendo esta promoción una de las primeras; la licenciatura en Matemáticas, de cinco años, incluyó importantes cambios para adecuarse a la matemática moderna que ha ido desarrollándose y dando lugar a los planes sucesivos que fueron presentados. Se solicitó, dado el interés de la exposición, que se hiciera una publicación de estos aspectos. Una visita a las dependencias de la Facultad completó esta parte.

De una forma sencilla, se destacó, sin otorgarse ningún protagonismo, cómo la promoción desde las distintas perspectivas había contribuido a su compromiso con la sociedad, principalmente en aspectos de la enseñanza, investigación y aplicación de conocimientos.

Posteriormente tuvo lugar una comida en la misma universidad en medio de un ambiente festivo dentro de un intercambio de experiencias, conviniendo reunirse de manera periódica, al menos una vez al año.

Angel Diaz de la Cebosa y Gonzalo Calero Rosillo

Conferencias sobre “Educación Matemática”

El pasado mes de Mayo se cerró el ciclo de conferencias-mesas redondas que sobre Educación Matemática se han dictado-celebrado los últimos viernes de cada mes a lo largo del curso académico 2000/2001.

Estas Conferencias-Mesas redondas, se enmarcan dentro de las actividades que la Facultad de CC. Matemáticas de la U.C.M. programa para la obtención del título de “Experto en Educación Matemática”.

Se concibieron como una tarea de dos horas de duración. Durante la primera hora, profesores con experiencia constatada en el tema a tratar durante la sesión expusieron sus puntos de vista (con frecuencia contrapuestos) sobre el mismo, al objeto de centrar la discusión y el debate posterior.

Los temas tratados fueron:

- Educación matemática y LOGSE
- El currículo de la E. S. O. y del Bachillerato.
- Afectividad y Educación Matemática.
- La Facultad de Matemáticas y la formación de profesores de Matemáticas.
- Educación Matemática y nuevas tecnologías.
- La evaluación en Educación Matemática.
- La Educación Matemática y la Enseñanza Universitaria.
- La Educación Matemática en la U. E.: Alemania, Francia y el Reino Unido

La segunda hora, siempre de modo flexible, se pensó como un foro en el que los profesores asistentes pudiesen intervenir aportando sus experiencias, sus puntos de vista, sus dificultades o simplemente sus acuerdos o desacuerdos con los ponentes.

A lo largo de las sesiones fueron saliendo a la luz los distintos problemas con los que se encuentran a diario los profesionales de la Educación en el tramo de Secundaria, sobre todo en la E. S. O. De este modo:

La nueva forma de entender la Educación; el miedo (¡) a que esa educación para todos se convierta en educación para nadie, al menos en los centros públicos.

La dificultad de realizar una enseñanza comprensiva. Cuando los porcentajes de objetores escolares son tan elevados, ¿cómo establecer los niveles de aula?

El peso de la diversidad, la utopía de las adaptaciones curriculares,..

¿Cómo realizar una evaluación, verdaderamente significativa, de las capacidades de los alumnos?

El engaño de la promoción de curso
…..
…..

Fueron puntos en los que los profesores asistentes reincidían mes a mes.

La afluencia de Profesores de Secundaria y de alumnos de Metodología a estas conferencias ha sido la razón por la cual dicho ciclo ha vuelto a ser programado para el presente año académico.

Los temas a debate durante el presente curso son los que aparecen en el siguiente anuncio.

Laura Molleda

Ciclo de Conferencias sobre “Educación Matemática”

“LOS AGENTES DE LA EDUCACION SECUNDARIA” (Curso 2001/02)

26 de octubre: LOS ALUMNOS. Conferenciantes: Angel Arrabal y Carlos Cabello, profesores del I.E.S. “Miguel Servet” de Madrid y autores de los libros “Adolescentes de un barrio” (1992) y “De Mafalda a los Simpson” (2001)

23 de noviembre: LOS LIBROS DE TEXTO. Conferenciante: Jose Colera, catedrático de Educación Secundaria y autor de libros de texto de Matemáticas

11 de enero: LOS PROFESORES. Debate sobre cuál debe ser la formación más adecuada para un profesor de Secundaria. Ponentes por determinar.

25 de enero: LAS ASOCIACIONES DE PADRES DE ALUMNOS. Debate sobre la incidencia que tienen en la Educación Secundaria los padres de los alumnos y las asociaciones de padres. Ponentes por determinar.

22 de febrero: LAS LEYES I: LA FORMACION PROFESIONAL

22 de marzo: LAS LEYES II: REVALIDAS / PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

26 de abril: LAS ASIGNATURAS: MATEMATICAS I y II. INICIACION A LA DEMOSTRACION MATEMATICA.

24 de mayo: LAS ASIGNATURAS: MATEMATICAS APLICADAS

Para más información sobre este ciclo o sobre el título de Experto en Educación Matemática puede consultarse la dirección: *http://www.mat.ucm.es*.

Profesoras coordinadoras del ciclo de conferencias: Raquel Mallavibarrena y Laura Molleda

Direcciones de correo electrónico: *Raquel_Mallavibarrena@mat.ucm.es* y *Laura_Molleda@mat.ucm.es*

Integración de las Nuevas Tecnologías en la clase de Matemáticas. Algunas notas sobre modas, uso y mal uso[1]

Eugenio Roanes Lozano
Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid
eroanes@eucmos.sim.ucm.es

Abstract

This article is a summary of the author's opinions about "fashions" in technology and the use and misuse of technology in our society (specially in the teaching process). Some historic notes and several remarks about interesting pieces of software and addresses in the web are given along the text.

1 De tecnología y sociedad

Soy un enamorado del ferrocarril. Y de los ferrocarriles abandonados en particular (esta es una rama de lo que técnicamente se denomina "Arqueología Industrial"). Es un apasionante hobby que permite ejemplificar ante la novia, esposa o amigo/a como sacar de un barrizal el automóvil (no 4x4) con ayuda de piedras y ramas o de como guiarse por la posición del sol para regresar al coche. Estas demostraciones prácticas de las habilidades adquiridas permiten además intercalar alguna aventura sobre la etapa militar de la vida, gozo añadido para los oídos del acompañante al placer de la contemplación de los restos del ferrocarril abandonado en cuestión. Para el lector no advertido comentaremos que en España hay miles de kilómetros de líneas de ferrocarril abandonadas, algunas de las cuales se están

---

[1] Primera parte de la conferencia inaugural del *Encuentro-Seminario sobre el entrenamiento tecnológico: aprendizaje matemático en la red*, pronunciada en el CPR de Zafra (Badajoz) el 4 de Noviembre de 2000. Dentro del §2.4 se realizó una presentación de las posibilidades de los sistemas informáticos Maple y The Geometer's Sketchpad y de las calculadoras TI-92 y 89.

empezando ahora a recuperar parcialmente como "vías verdes"[2] (esto es, pistas o senderos para ser recorridos en bicicleta, silla de ruedas, a pie o a caballo). Es un final relativamente triste para muchas líneas, construidas con gran esfuerzo y abandonadas[3] muchas de un modo sorprendente[4], pero final[5], mejor en todo caso que el olvido y el cultivo de champiñones[6].

El *hobby* de recorrer y fotografiar estas líneas data en mi caso de hace bastantes años, para desesperación de mi mujer, que, incomprensiblemente, prefiere ver museos de pintura o campos sin ferrocarril. Como las proximidades de los que fueron estos trazados suelen estar bastante desiertos[7], mis progenitores me regalaron, cuando se hicieron más o menos asequibles[8], allá por el año 1994, un teléfono móvil. Se trataba de la primera generación "compacta", esto es, de modelos autónomos que no necesitaban de una especie de emisora-maletín auxiliar. No obstante, mis amigos lo veían un poco "raro", caro e inútil. Uno en particular, siempre me decía que "para que lo quería", que parecía un fontanero. La verdad es que nunca decía que parecía un ejecutivo. Acabo de cambiar este demodado

---

2 Véase: www.ffe.es/viasverdes/viasverdes.html

3 Algunas justo antes de ser inauguradas y con la infraestructura (explanaciones, túneles, puentes,...) parcial o totalmente acabada y en algunos casos incluso con las vías ya tendidas en grandes tramos. La razón fue una nefasta condición del Banco Mundial para conceder un préstamo a Renfe al comienzo de la dieselización, que consideraba esas líneas como deficitarias. Por Extremadura pasan dos de ellas (Calera y Chozas-Villanueva de la Serena –llegó a estar tendida la vía entre Villanueva de la Serena y Logrosán- y Jerez de los Caballeros–Villanueva del Fresno).

4 Por ejemplo para ir de Murcia a Almería hay que subir ahora hasta Alcázar de San Juan (no lejos de Toledo), cuando existía una línea directa por Baza y Guadix (véase la página de la asociación de amigos del ferrocarril de Almería: www.asafal.com). Muchos pensamos que debe existir tráfico en ese eje cuando existe una autovía que une estas capitales de provincia. La lista de ejemplos sangrantes (Canfranc, Huelva-Ayamonte, Santander-Mediterráneo,...), cada uno con sus peculiaridades, es interminable.

5 Algunas están en fase de recuperación parcial. Por ejemplo, desde el pueblo de Rio Tinto (en Huelva) se puede viajar en parte del antiguo ferrocarril minero, rehabilitado parcialmente para uso turístico. Lo mismo tratan de hacer con el cercano de Tharsis, clausurado el último día de 1999.

6 Este es el destino de muchos túneles en líneas de ferrocarril abandonadas. Considerando el precio de perforación de un metro de túnel, deben ser de los alimentos con un valor añadido más elevado.

7 Extrañamente, lo que abunda en las proximidades de los pasos elevados de carretera sobre vías abandonadas son las neveras, lavadoras y escombros.

8 Se entiende que para una familia que vive exclusivamente de sueldos de funcionario, esto es, que no nada en la abundancia.

móvil ("el ladrillo" para los amigos) por uno nuevo. Yo quiero (más aún, necesito) tener móvil para llamar brevemente cuando estoy fuera de casa o para una emergencia. De hecho me siento incómodo cuando olvido mi móvil y viajo.

Mi amigo, el citado más arriba, que por cierto ahora tiene una tienda de móviles (y esto no es ni un chiste ni una licencia literaria), me cuenta que los "quinceañeros" (creo que "teenagers" describe más precisamente la etapa a que me refiero) utilizan el móvil de otra forma. Lo moderno es que el teléfono (uno por hijo/a) lo paguen los progenitores, con el sano objetivo de tratar de tener localizado al descendiente (los padres con hijos de esa edad han desistido por lo general de controlar a la prole). El/la infante abona las tarjetas prepago, que gasta casi exclusivamente en enviar mensajes escritos. Supongo que pronto se estudiarán los problemas que supone para los pulgares el estar continuamente tecleando sobre el pequeño teclado del móvil, como ocurrió hace tres lustros con los adictos al "cubo de Rubik". Supongo que el lector iniciado sabrá que se pueden mandar gratuitamente mensajes escritos desde ciertas páginas de Internet[9], lo que evita el inconveniente del incómodo teclado, aunque implica la disponibilidad de conexión.

Hace unos años me sorprendió leer en los periódicos una noticia sobre una orden de un obispo italiano obligando a que el clero de su diócesis mantuviera apagado el móvil durante las confesiones. Ya llevo dos años incluyendo en las instrucciones de principio de curso que es obligatorio mantener apagados los móviles durante mis clases.

Llamar a la televisión "caja tonta" creo que es ahora un halago. Hay un canal americano que me apasiona (sobre documentales)[10]. Pero en las cadenas españolas, especialmente sensibles al índice de audiencia, el entretenimiento para las distintas edades es completo. Varía desde las series de dibujos animados violentas[11] [12]; largos "culebrones" con magníficos actores y mejores guiones; programas

---

9 Por ejemplo www.terra.es/sms/

10 A muchos "teenagers" les suena este canal por una canción "disco" cuyo estribillo es "let's do it like they do it on the Discovery Channel" ("hagámoslo como lo hacen en el Discovery Channel" –los animales, se entiende–). Ya se pueden suponer a lo que se refieren.

11 Hace poco se cometió un asesinato múltiple con una "katana". En la España atrasada y rural de los '50 se empleaban para las riñas objetos cortantes más tradicionales pero vulgares como navajas, hoces o escopetas de caza, no espadas de otras culturas. Debe ser uno de los efectos de la globalización.

en los que se encierra a unas personas en una casa en la que conviven las 24 horas y en los cuales se puedan seguir conversaciones profundas e interesantes; así como programas en los cuales se nos informa con todo lujo de detalles de las ejemplificantes vidas y en especial las relaciones pasionales (y parece ser que apasionantes para muchos) de los llamados "famosos". Finalmente en los concursos cada vez se sustituyen más las preguntas por "pruebas" absurdas en las que hay que demostrar una "habilidad"[13].

Además, si la programación en los distintos canales no es suficientemente buena (por ejemplo han programado una película de John Ford o algún otro "tío rollo" en aburrido blanco y negro fuera de su horario habitual, esto es, bien entrada la madrugada), siempre queda el recurso de la video-consola, en la cual se puede dedicar el usuario al edificante entretenimiento de exterminar violentamente a algunos seres vivos locales o alienígenas[14].

Hay dos sensaciones en la vida que me hacen sentirme un poco nervioso. Una la de vivir algo que parece que ya has vivido (soy escéptico para casi todo, por ejemplo para admitir la existencia de los viajes astrales[15]) y otra la de sentirte fuera de la conversación en la que estoy participando, como si fuera un espectador externo[16]. Esto me pasó hace pocos días cuando me encontré en el coche hablando a mi primo de 16 años sobre los inconvenientes del alcohol y el tabaco (disminución obvia del rendimiento físico e intelectual). Por mi experiencia como profesor creo que esto lo ven mas próximo que una enfermedad a largo plazo, aunque lo

---

12 Mientras, desde España exportamos a muchos países dos simpáticos personajes: los detectives españoles más conocidos internacionalmente (www.mortadeloyfilemon.com).

13 No estoy seguro cual es la explicación de esto. Dudo entre dos opciones. Una es que si se hace una pregunta, el espectador reconoce internamente inmediatamente si la conoce o no, lo que le molesta en caso negativo. Sin embargo, si es una prueba, como no va a reproducirla en casa, piensa que sería capaz de hacerlo al menos tan bien como el concursante. La otra es simplemente que es más divertido ver al concursante hacer el ridículo que apreciar su erudición.

14 Según algunos esto descarga la agresividad. Según otros, algunos de estos juegos, como los de "rol", pueden hacer confundir realidad y ficción a sujetos predispuestos. Y tenemos ejemplos recientes de juegos de "rol" con resultado de muerte real. Con la campaña para las presidenciales de EEUU del 2000 la violencia en los diversos medios de entretenimiento ha pasado a primer plano de la actualidad.

15 Véase por ejemplo: T. Lobsang Rampa: *El tercer ojo*, Ediciones Destino, 1965.

16 Giovanni Guareschi cita esta sensación en alguno de sus libros de la incomparable colección de Don Camilo y Peppone, en cierta ocasión en que Peppone lee un discurso.

último sea más grave. Por cierto, con "rendimiento intelectual" no me refería al escolar, sino a la brillantez verbal (dentro de lo que cabe) que se debe demostrar ante la pandilla. Y es que, aunque en ambos casos se ingiere alcohol, no es lo mismo salir "pedo"[17] del "botellón" del viernes (generalmente esto consiste en gran cantidad de cerveza seguida de varios "cubatas" y similares) que tomar un sorbete al cava.

Este año he tenido la oportunidad de viajar a Rusia. Tuve la suerte de ver una vivienda auténtica. Me sorprendieron dos cosas fundamentalmente: lo destartalado (por decir algo) de las zonas comunes (parece ser que el equivalente a la "ley de propiedad horizontal" no está muy perfeccionado) y la buena biblioteca de la casa[18], especialmente si se compara con el nivel de vida que se deducía del mobiliario y los enseres en general. Ambas cosas parecen ser comunes allí. Seguramente el intervencionismo a nivel gubernamental en ciertos aspectos (por ejemplo la subvención de la cultura: libros, obras de teatro, conciertos...) es bueno. Especialmente en tiempos de bonanza económica. Por supuesto no me refiero a otros tipos de intervencionismo que coarten la libertad individual.

¿Será esto ya la decadencia de la cultura occidental o simplemente un episodio pasajero? Ya se sabe que hay que conocer la historia para no caer en los mismos errores. Fatalmente una descripción en dos o tres líneas de nuestra sociedad actual se parece a la breve justificación que me dieron cuando cursaba segundo de BUP de la caída del Imperio Romano. Pero quizás todo sea cierto pesimismo familiar y que me estoy volviendo viejo prematuramente...

---

[17] Por si no tiene hijos o contrincantes en el tenis, futbol,... "en la edad", esta expresión, como la también malsonante "...que te cagas" es actualmente de uso habitual a ciertas edades. Complementan (y, aún peor, completan) junto con "mola", "hostia", "macho" y "tío/a", el vocabulario de muchos de lo/as jóvenes españoles/as. Culmina esta amplia retórica la frase "salir a coger un pedo", en la que sorprende fundamentalmente el objetivo último de la diversión nocturna. También es curiosa la forma de medir la diversión por lo avanzado de la hora de regreso.

[18] No sólo de clásicos rusos; también españoles, franceses, ingleses y alemanes traducidos al ruso.

2 De tecnología y educación

2.1 Un poco de historia

Hace unos años el Ministerio realizo una experiencia global con la introducción masiva del lenguaje Logo[19] en los colegios (Proyecto Atenea[20]). Sorprendente y lamentablemente, este proyecto, realmente exitoso desde mi punto de vista y el de muchos de los docentes que participaron en él, no ha tenido continuidad ni en el tiempo ni en el siguiente nivel educativo. En mi opinión hay dos factores para ello:

- se pusieron demasiadas esperanzas en el lenguaje Logo y sus "micromundos". El lenguaje Logo es excelente para enseñar a programar y para introducir ciertos conceptos geométricos. Pero no lo es tanto para enseñar Historia del Arte, Religión, Gramática o Griego.
- el Proyecto Atenea se implementó en una época en que se consideraba que todo el mundo debía aprender a programar[21]. Se trata de algo discutible, como el que aprender latín organiza la mente. Después se pasó a la fase en que se consideraba que todo el mundo debe saber simplemente ofimática[22]. Ahora estamos en la fase en que es primordial que todo el mundo "sepa Internet". Las modas mandan. No se si esto tendrá además que ver con la degeneración de los contenidos en los curricula. Siempre pensamos que se mejora la enseñanza, pero si se comparan los contenidos de los bachilleratos de los '50 con los de BUP

---

[19] Se puede obtener abundante información sobre este lenguaje en la página de la Fundación Logo en el MIT el.www.media.mit.edu/groups/logo-foundation/. Además desde ella es posible descargar versiones gratuitas y de demostración de varios dialectos de Logo. Es particularmente recomendable MSWLogo (que, pese a su nombre, no está desarrollado por la empresa del sistema operativo más difundido).

[20] Las nuevas tendencias patrocinadas ahora desde el ministerio se pueden consultar en www.pntic.mec.es/descartes/Presentación.html y en el "link" al Proyecto Prometeo.

[21] No obstante el Proyecto Atenea no se enmarcaba en esa línea de pensamiento, pues incorporaba ya también EAO, uso didáctico de paquetes y consideraba el apoyo a las necesidades educativas especiales.

[22] Por cierto, muchos desconocen que existe una versión gratuita del procesador de textos más difundido, cuyo nombre no mencionaré, creada por una importantísima marca de ordenadores (www.sun.com/products/staroffice). Tambien existen versiones gratuitas del procesador científico de textos más difundido: TeX/LaTeX (veáse por ejemplo: www.miktex.org).

y estos con los actuales, la comparación es abrumadoramente negativa[23]. Y existían menos medios de apoyo. La situación no afecta del mismo modo a todos los países. Por ejemplo en casi todos los países de nuestro entorno comunitario existen pruebas similares a las antiguas "reválidas" y en EEUU se están aumentando los contenidos matemáticos en secundaria después de muchos años de degradación del sistema.

En cualquier caso, en mi opinión, enseñar Logo en Primaria es todo un acierto.

2.2 Sobre Internet (en general)

Uno de los temas candentes cuando se escriben estas líneas es "saber Internet". El bombardeo al respecto de anuncios de academias, cursos a distancia,... así como de posibles buscadores, accesos,... es constante en los medios de comunicación. Por cierto, me pregunto que querrán decir con "saber Internet". Cuando he contado a mis alumnos lo que considero interesante de Internet para la generalidad de la población:

- saber manejar un paquete de correo electrónico
- saber instalar uno de los dos navegadores típicos
- saber navegar con destino conocido y desconocido (buscar información)
- construir una página web con una herramienta cómoda ya conocida (por ejemplo un procesador de texto)
- saber "colgar" una página web

apenas se rellenan tres clases (incluyendo la práctica). Aprender a programar por ejemplo en Java no lo considero una necesidad general.

Por otra parte, uno de los usos más frecuentes de Internet es erótico. Si no vean cualquier estadística de visitas a páginas con distintas opciones. La última que vi (ayer) sobre salvapantallas gratuitos tenía en su ranking a cierta socorrista de playa de físico exuberante como número uno. Claro que el "pan y circo" para la plebe romana no está muy alejado del "futbol y pelicula X" (la alimentación está ya asumida en nuestro entorno europeo). Pienso que, mientras el comercio electrónico no se generalice (para lo que tienen que solventarse temas de seguridad elec-

[23] Existen interesantes trabajos al respecto, como por ejemplo la tesis de la profesora María Ortiz Vallejo, leída hace pocos años en la Universidad de Valladolid (sobre este proceso en Enseñanza Primaria).

trónica y psicológicos), no parece que acceder a Internet sea una necesidad diaria para el ciudadano medio. Evidentemente Internet es una fuente de recursos impresionante, pero, ¿cuántas veces consulta al mes una enciclopedia o un diccionario un ciudadano medio?, o ¿cuántos billetes de avión o tren reserva mensualmente?[24]. Creo que una vez más no soy el usuario standard: entro varias veces al día a ver mi correo electrónico y prefiero usar programas de correo electrónico en modo texto (bajo Unix y VMS), como hacia con mi primer modem a 1200 baudios de principio de los 90. La razón es que así, al estar disponible el correo en el servidor, no en una cierta terminal, puedo consultarlo desde cualquier sitio en el mundo. Consulto páginas web para mi trabajo o simplemente busco información lúdica (vacaciones, trenes,...) bastante menos frecuentemente.

En resumen, en mi opinión, debemos formar a todos los jóvenes para que tengan acceso a todo este nuevo mundo de posibilidades, pero no debemos caer en viejos errores: no todos los jóvenes serán diseñadores profesionales de "páginas web".

2.3 Sobre Internet como herramienta educativa

La conectividad proporcionada por la red y el eficiente acceso a la información posibilita grandes cambios en el modelo educativo.

2.3.1 Nuevas formas de impartir clase, atender al alumno, ofrecer información...

Las consultas por correo electrónico posibilitan y facilitan la resolución de dudas y la cooperación entre alumnos. Además parece evidente la eficiencia de colocar información en la página web del profesor (hojas de problemas, apuntes, exámenes de años anteriores,...).

Las más sofisticadas posibilidades como la videoconferencia o la pizarra electrónica permiten mantener en tele-educación la bidireccionalidad de la relación docente-alumno[25]. Haría incluso posible además la realización excepcional de

---

[24] Por cierto, direcciones como www.iberia.es, www.renfe.es, www.halcon-viajes.es,... son sumamente útiles.

[25] i es que alguna vez tenemos accesos a velocidad razonable en este país...

"clases globales" en la aldea global. En nuestro país han sido llevadas a cabo experiencias en tele-docencia por parte de la UNED y la Universidad Abierta de Cataluña[26].

Obviamente es difícil substituir la eficiencia de la clase presencial (retroalimentación hacia el profesor, contacto personal,...), pero desde luego es un complemento excelente. Además hay casos (enfermedad del alumno, zonas con escasísima densidad de población, incompatibilidad de horarios,...) en que puede ser la única posibilidad razonable.

2.3.2 Obtención de información

Citaremos sólo alguno de los muchos lugares donde se puede obtener información.

Por ejemplo la *European Mathematical Society* ofrece el servicio *The European Mathematical Information Service (EMIS)*[27] donde se pueden encontrar publicaciones, bases de datos, noticias, información sobre congresos,... Es similar a la web de la *American Mathematical Society (AMS)*[28]. Las sociedades matemáticas españolas como la RSME o la Sociedad de Profesores de Matemáticas Puig Adam también ofrecen información al navegante[29].

La Astronomía (como la Historia de las Matemáticas) es una disciplina que, afortunadamente, está renaciendo a nivel (al menos) de complemento de la clase de matemáticas. En la red existen páginas muy atrayentes e interesantes (y asequibles para el no-profesional) como las de la NASA, el Instituto Astrofísico de Canarias y la Agrupación Astronómica de Madrid[30].

Existen revistas disponibles (completas) en la red. Por ejemplo *SAC Newsletter*[31] es una revista de Algebra Computacional que contiene información para investigadores y profesores.

---

26 www.uoc.es

27 www.emis.de

28 www.ams.org

29 Respectivamente: rsme.uned.es/index.html y: www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/

30 Respectivamente: nasa.gov , www.iac.es y: www.iac.es/AA/AAM/AAM.html

31 www.can.nl/SN3/

Para los aficionados a los problemas o para usar los mismos como recurso docente, hay páginas web que son una fuente casi inagotable. Por citar algunas, la página personal de John Scholes[32] contiene grandes colecciones de problemas. En particular una de las colecciones[33] recoge la totalidad de los problemas propuestos en las Olimpiadas Matemáticas Internacionales (IMO) e incluye soluciones. Otro página en esta línea es la de la revista Crux Mathematicorum[34]

Se puede encontrar información sobre software matemático a traves de los buscadores generales (por ejemplo Yahoo/Science/Software). Y existen páginas específicas dedicadas a ofrecer software (freeware o shareware) para descargar que incluyen apartados sobre lenguajes y sobre educación[35].

No acabaremos esta sección sin mencionar la página del CSIC[36], con abundante información bibliográfica y sobre cursos, conferencias,...

2.3.3 Otras posibilidades: actualización del profesorado

Obviamente existen muchas otras posibilidades como la actualización del profesorado a distancia. Este es un ejemplo peculiar a la vez que muy interesante, por la evidente dispersión del profesorado, que tiene que cubrir todo el territorio. El Proyecto de Nuevas Tecnologías del MEC ofrece en su página web abundante información (sobre concursos, software,...)[37].

2.4 Software para Enseñanza Secundaria y Bachillerato

Hay dos tipos de software especialmente indicados para la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria y Bachillerato: los Sistemas de Cómputo Algebraico (SCA) y los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD).

---

[32] www.kalva.demon.co.uk
[33] www.kalva.demon.co.uk/imo.html
[34] west.camel.math.ca/CMS/CRUX
[35] Hay muchas de estas. Una es: www.downloadsafari.com
[36] www.csic.es
[37] www.pntic.mec.es

Los SCA mas conocidos son posiblemente Derive[38], Maple[39] y Mathematica[40], aunque hay otros muchos (MuPad[41], Axiom, Reduce, CoCoA...). Sus dos características esenciales son

- Trabajar en aritmética exacta: no aproxima (no usa las aproximaciones típicas de coma flotante). Por ejemplo la solución de sumar $1/2+1/3$ es $5/6$ y la de multiplicar $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ es $\sqrt{6}$ (como haríamos en Matemáticas, no como con una calculadora usual).
- Manejar variables sin asignación. Por ejemplo $3\cdot x+x+x$ se simplifica a $5\cdot x$ o el $\mathrm{seno}(2\cdot\alpha)$ se expande como $2\cdot\mathrm{seno}(\alpha)\cdot\mathrm{coseno}(\alpha)$, sin que haya que especificar valores para x o α (esto es, puede manejar "fórmulas").

Estos programas tienen por supuesto muchísimas otras posibilidades; desde representar una función hasta resolver algebraicamente un sistema no lineal de ecuaciones o una ecuación diferencial.

Si simplemente se desea representar curvas y superficies, existen también excelentes programas como DPGraph[42] (que además es francamente económico).

Los SGD[43] más conocidos son Cabri Geometry[44], The Geometer's Sketchpad[45] y Cinderella[46], aunque existen otros gratuitos como Dr. Geo[47] o Wingeom[48]. Estos programas son similares a los de dibujo asistido por ordenador, pero están orientados hacia la Geometría de la regla y el compás. Los resultados son excelentes a

---

[38] Softwarehouse, la empresa creadora de Derive, ha sido recientemente adquirida por Texas Instruments. Se puede encontrar información en y "bajar" una versión "demo" de www.ti.com/calc/docs/derive5.htm

[39] Se puede encontrar información y una versión de demostración en www.maplesoft.com

[40] Home page: www.wolfram.com

[41] Similar a los anteriores y desarrollado en la Universidad de Paderborn (Alemania). Su versión "Light" es gratuita para estudiantes y profesores. Véase www.mupad.de

[42] Home page: www.dpgraph.com

[43] Se pueden encontrar información en forum.swarthmore.edu/dynamic.html

[44] Este es otro producto de Texas Instruments. Se puede "bajar" una "demo" de www.ti.com/calc/docs/downloads.htm

[45] Se puede encontrar información y "bajar" un "demo" de la página www.keypress.com/sketchpad/index.html

[46] Comercializado por Springer-Verlag, se puede "bajar" una "demo" de www.cinderella.de

[47] www.gnu.org/software/dr_geo/

[48] math.exeter.edu/rparris/

todos los niveles (interés del alumno en comparación con el método tradicional, calidad de la figura, posibilidad de realizar cambios...). En entornos "comerciales", por ejemplo en Arquitectura, los delineantes "de Rotring" han desaparecido prácticamente, al igual que las calculadoras jubilaron a los contables "clásicos" (y a las tablas de logaritmos). No obstante, los enseñantes de Matemáticas parecemos más apegados a la pizarra y al compás que los delineantes al pupitre de dibujo.

La calculadora simbólica TI-92 de Texas Instruments incluye un SCA y un SGD. En EEUU es muy frecuente el uso de calculadoras gráficas y comienza a serlo el de las simbólicas, tanto en secundaria como en "college". Ello está promovido por la mentalidad americana de que ni el centro ni el estado proporcionan todos los medios. Por ejemplo en institutos no es frecuente que haya buenas aulas informáticas y las matrículas en universidad son caras, no como en España, donde no cubren más que una pequeña parte del precio real del puesto de estudio (ello hace que los estudiantes realmente estén interesados en estudiar). El que aquí se vendan relativamente pocas calculadoras gráfica y simbólicas no es un factor de nivel económico, pues por ejemplo aquí las ventas de video-consolas si son altas.

Países como Austria o Francia se han decantado por una compra global para sus centros de enseñanza secundaria de Derive y Maple (respectivamente). Otros países de nuestro entorno, como Holanda o Portugal llevan a cabo experiencias coordinadas por los responsables estatales y bastante generales. Aparte de formar en el uso de paquetes de ofimática o en la navegación por Internet -cosas, por otra parte, bastante sencillas de aprender-, es necesario aprovechar el software matemático para la enseñanza de las Matemáticas. Mientras, en España, la experimentación se limita a experiencias localizadas y aisladas[49]. Este es un tren que, lamentablemente, creo que estamos perdiendo.

En España sí se han adoptado a nivel universitario (por ejemplo la Universidad Complutense de Madrid, Universidad Politécnica de Madrid,... tienen licencias "de campus" de Maple, esto es, para todos los ordenadores de la universidad). También los proyectores para ordenador ("cañones"), que permiten al profesor

---

[49] Véase por ejemplo: Burrel, Cabezas, Roanes y Roanes: *A Survey on the Use of Computer Algebra in Spain in Relationship to Its Secondary School System*, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 97/5, 1997 (pp. 149-154).

explicar en la pizarra y/o proyectar lo que aparece en la pantalla de su ordenador, empiezan a ser frecuentes en universidad (desafortunadamente no en secundaria).

Entiendo que en enseñanza no-universitaria, la situación ideal sería introducir, de modo general, en primaria

- manejo básico de un ordenador y un sistema operativo con ventanas.
- Logo (rudimentos de programación)
- acceso a Internet

y ofrecer a nivel de ESO y Bachillerato.

- manejo intermedio de un ordenador y un sistema operativo con ventanas.
- SCA, SGD y algún paquete de Estadística como auxiliares de la clase de Matemáticas y Física
- manejo de Procesadores de Texto, Bases de Datos y Hojas de Cálculo
- programación en Pascal o C (o alguno de sus dialectos para un entorno con ventanas)
- diseño de páginas web.

Subrayo el que se especifica en el segundo bloque "ofrecer". Entiendo que este tipo de enseñanzas no deben ser obligatorias. No considero interesante para un futuro matemático estudiar varios años de latín y griego ni para un futuro especialista en filología hebrea el conocer a fondo C++. No obstante, este tipo de asignaturas suele tener en la actualidad una aceptación masiva.

El papel de auxiliar de los SCA y SGD y los paquetes de Estadística en clase de Matemáticas y Física sí parece obligado (si se tienen que estudiar estas asignaturas). Una razón importante es que parece estar generalmente aceptado que el incluir los SCA como auxiliares es muy beneficioso para los peores alumnos (Principio del Andamio de Bernhard Kutzler[50]).

2.5 Metodología

Un problema evidente de la incorporación de las calculadoras a la vida diaria es la pérdida de agilidad en el cálculo mental. Pero nadie pensaría en prohibir el uso de

---

50 Véase por ejemplo: Kutzler: *El impacto de DERIVE en la enseñanza y evaluación de Matemáticas*, Delta (revista de la Asociación Española de Usuarios de Derive), núm .1, 1997 (pp. 11-23). La página de la asociación española de usuarios de Derive es www.upv.es/derive/

automóviles “para que no se atrofien las piernas de los conductores”. Lo que hay que hacer es educar en una cultura del deporte y para que no se utilice el coche para trayectos cortos. Análogamente, una calculadora, un SCA o un SGD no se debe usar para un problema inmediato. Se deben (y, en mi opinión, se tienen que) usar, por ejemplo, cuando la laboriosidad del problema sea grande o cuando sea necesario resolver un problema del que se desconocen los algoritmos para resolver un paso secundario[51]. No obstante, la complejidad de este punto lo hace merecedor de un análisis más exhaustivo.

2.6 El “libro electrónico”

A mi modo de ver, la Enseñanza Asistida por Ordenador (EAO) fue un fracaso. Se trataba de sustituir al profesor. Y es prácticamente imposible prever de antemano todas las posibles reacciones, fallos, dudas,... que se puede presentar o se le pueden presentar al alumno. Lo que si es fácilmente mejorable es el libro en soporte clásico (papel) con el libro electrónico. Las, en mi opinión, dos grandes ventajas son

- Los enlaces (“hyperlinks”), que permiten por ejemplo saltar a la siguiente cuestión o pedir una aclaración de un tema anterior sin pérdida de tiempo.
- La generación aleatoria de ejercicios, que posibilita el que el autor genere “clases” de ejercicios en lugar de ejercicios “fijos”. Así el alumno encuentra cada vez que arranca el tema nuevos ejercicios y, más importante aún, el alumno menos aventajado puede practicar en más ejemplos. Además el sistema es capaz de resolver el ejercicio particular si el alumno lo solicita.

Lo mejor es que las “hojas de trabajo” (“worksheets”) de algunos sistemas de cómputo algebraico (como Maple) tienen ya estas posibilidades.

3 Epílogo

No se ha restringido este escrito a contemplar cuestiones técnicas. Pero no siempre tiene uno ocasión de hablar, como aquí, incluyendo notas sobre temas genera-

[51] Un ejemplo típico sería calcular la medida de la arista de un cubo, de modo que su volumen sea $10m^3$. Actualmente prácticamente nadie conoce el algoritmo de cálculo de la raíz cúbica.

les. Muchas gracias a todos en general y, en particular a los profesores Justo Cabezas (IES Rodríguez-Moñino, Badajoz) y Andrés Nuñez (CPR de Zafra)[52].

[52] Casualmente, poco después de ser impartida esta conferencia, se publica el número de Noviembre de 2000 de la revista *Vía Libre* (editada por la Fundación de los Ferrocarriles Españoles), que recoge la posible reapertura (o reconstrucción) de las líneas Huelva-Ayamonte y Canfranc (mencionadas en la cita al pie 4).

Una deducción de la regla de Cramer de interés didáctico

Santiago Calviño Castelo

Instituto Español de Lisboa
e-mail: santic@clix.pt

Abstract

The purpose of this note is to show a simple proof of Cramer's rule.

El intento por hacer más fácil todavía algo tan sencillo de demostrar como la regla de Cramer nos condujo, al evitar el cálculo de la matriz inversa -no su concepto- y la propiedad de los determinantes que afirma que es nulo el producto de una línea por los adjuntos de una paralela, a un proceso deductivo no exento de dificultades, que hemos suplido con una modesta justificación. Vamos a hacer la demostración de la citada regla sobre un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas. En

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{array}\right\}$$

llamamos A a la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Si $\det(A) \neq 0$, llamando I_3 a la matriz identidad de orden 3, y sin necesidad de calcular A^{-1}, es obvio que podemos escribir:

$$x_1 = x_1 \det(I_3) = \det \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\det \left[A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{\det \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]}{\det(A)}$$

$$= \frac{\det \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(A)} = \frac{\det \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

Repitiendo el mismo proceso para x_2 y x_3, y omitiendo algunos pasos resulta:

$$x_2 = x_2 \det(I_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \left[A^{-1} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{\det \begin{pmatrix} a_{12} & b_1 & a_{13} \\ a_{22} & b_2 & a_{23} \\ a_{32} & b_3 & a_{33} \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

y

$$x_3 = x_3 \det(I_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\left[A^{-1}\cdot A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}\right] == \frac{\det\begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & b_1 \\ a_{22} & a_{22} & b_2 \\ a_{32} & a_{23} & b_3 \end{pmatrix}}{\det(A)}$$

En la dedución hemos empleado, entre otras, la propiedad de los determinantes que permite sumar a una columna otra multiplicada por un número, aunque éste sea una incógnita; y las igualdades:

$$\det(A^{-1}\cdot A) = \det(A^{-1})\cdot\det(A) = 1.$$

Es cierto que $\det(A^{-1}\cdot A) = \det(A^{-1})\cdot\det(A)$ se basa en la propiedad $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$ que obviamente no es fácil, pero no resulta difícil justificarla con matrices de orden 2, como habitualmente se suele hacer con las otras propiedades de los determinantes, al menos en el bachillerato actual, y encadenar las siguientes igualdades:

$$\left|\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ae & bh \\ ce & dh \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & af \\ dg & cf \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{vmatrix} =$$

$$= ef\begin{vmatrix} a & a \\ c & c \end{vmatrix} + eh\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + fg\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} + gh\begin{vmatrix} b & b \\ d & d \end{vmatrix} =$$

$$= eh\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - fg\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = eh(ad-bc) - fg(ad-bc) =$$

$$= (ad-bc)(eh-fg) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} e & f \\ g & h \end{vmatrix}$$

Al final, nos queda la sensación de haber hecho un truco barato al evitar una propiedad - la nulidad del producto de una línea por los adjuntos de una paralela - que precisamente se emplea, con un enunciado más general (regla de Laplace), en la demostración de la propiedad: $|A\cdot B| = |A|\cdot|B|$, que simplemente hemos justificado.

Reflexiones sobre la motivación en la clase de Matemáticas

Enrique Rubiales Camino

Catedrático de Bachillerato
Miembro de la Junta Directiva de la Soc. Puig Adam

Abstract

The article is about, on one hand, the motivation in the Math class, as far as the student is concerned as well as the teacher is and, on the other, about what Mathematics are to be taught in relation to that motivation.

1 Introducción

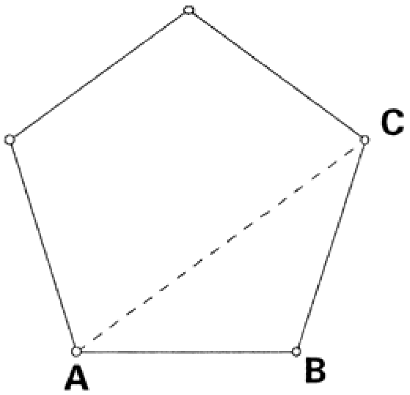
Le podría poner un subtítulo, que pondría más de manifiesto que es lo que pretendo decir con este artículo, *motivar al alumno y motivarse el profesor.*

Comenzaré diciendo que este artículo se compone de dos aspectos. Por un lado está el aspecto que se refiere a las reflexiones mías sobre la motivación en la clase de Matemáticas, y por otro lado está el aspecto de la formulación matemática que necesito para conseguir esa motivación.

Y explicaré que el motivo que me ha impulsado a escribir este artículo es la nueva lectura que hice de unos párrafos del libro *Experiencia matemática*, que se titula *La componente estética* dentro del capítulo *Aspectos internos* y que dice:

"... El placer estético que en nuestros días produce la razón áurea φ parece provenir, más bien, de la insospechada variedad de los lugares donde se presenta".

Tenemos para empezar, la geometría del pentágono regular. Si el lado AB de un pentágono regular tiene longitud unidad, cualquiera de las diagonales, como la AC, tendrá longitud $\varphi = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right) = 2\cos\pi/5 = 1,61803...$



Aparece después la razón áurea en las ecuaciones en diferencias finitas. Tomemos dos números al azar, por ejemplo, 1 y 4. Sumémoslos, obteniendo 5. Sumemos 4 y 5, y obtendremos 9. Sumemos 5 y 9, lo que da 14. Prosigamos indefinidamente de igual forma, sumando los dos últimos números obtenidos. Entonces la razón de los números consecutivos, el mayor entre el menor, tiende al límite φ. Observémoslo:

$$\begin{array}{rr} 1+4=5 & 5/4=1,250 \\ 4+5=9 & 9/5=1,800 \\ 5+9=14 & 14/9=1,555 \\ 9+14=23 & 23/14=1,634 \\ 14+23=37 & 37/23=1,608 \\ 23+37=60 & 60/37=1,622 \\ 37+60=97 & 97/60=1,617 \\ 60+97=157 & 157/97=1,618 \end{array}$$

Finalmente, en la teoría de fracciones continuas encontramos la preciosa fórmula siguiente:

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{1+...}}.$$

¿Qué diantres, se pregunta el novel, tendrán que ver entre sí todas estas situaciones tan diversas, si todas ellas nos llevan a la razón φ?. Y la estupefacción cede paso al deleite, y el deleite, al sentimiento de que el universo está unificado de formas maravillosas.

Pero el estudio y la experiencia nos hacen cosechar sentimientos de muy distinta índole. Al trabajar intensamente en la teoría de diferencias finitas, lo inesperado deja de serlo, para convertirse en intuición sólida y efectiva, y el correspondiente placer estético queda posiblemente atenuado y, sin la menor duda, transformado...."

2 Motivación para el 2^o ciclo de la ESO

Tras esta lectura, sobre todo de este último párrafo, me pregunté como puede repercutir todo esto en la enseñanza de las Matemáticas. Está claro que no hay ningún problema en el planteamiento de la motivación de los alumnos de 3^o y 4^o de la ESO, pues cogemos la Geometría y les presentamos el rectángulo mas bello, es decir los lados están en la razón áurea, φ , y también les podemos dibujar un pentágono de lado igual a 1 y por tanto la diagonal es también φ. Previamente les hemos dado una fotografía del Partenón, y allí ya les hemos hablado de la construcción de este edificio. Está claro que les estamos motivando mediante la belleza que presentan estos trabajos con la razón áurea y su belleza.

También puedo obtener el número áureo con temas de la Zoología, de la Anatomía, etc., que trataría de enseñárselo a los alumnos de ese nivel para seguirles motivando.

También tomaré la sucesión de Fibonacci, y les haré observar que el cociente de un número de esa sucesión y el anterior tiende al número de oro, φ. Si tomamos una sucesión cualquiera y la formamos con la misma ley que la de Fibonacci y calculamos también ese cociente resulta que tenemos el mismo resultado. Es más, si tomamos los dos primeros números al azar y volvemos a realizar exactamente lo mismo que lo hecho con las anteriores volvemos a tener el mismo resultado.

3 Reflexiones sobre la motivación. ¿Dónde impartir clase?

Volviendo sobre el último párrafo del apartado escrito anteriormente, y que dice: *"... Pero el estudio y la experiencia nos hacen cosechar sentimientos de muy distinta índole. Al trabajar intensamente en la teoría de diferencias finitas, lo inesperado deja de serlo, para convertirse en intuición sólida y efectiva, y el correspondiente placer estético queda posiblemente atenuado y, sin la menor duda, transformado...."*, me lleva a realizar la siguiente reflexión. Es lógico, que para el profesor de Matemáticas, lo presentado anteriormente le guste estéticamente pero le sea poco motivante, pues él pide más en cuanto a las Matemáticas, lo mismo que les puede ocurrir a los buenos alumnos, necesitan además de la belleza de lo anterior, saber el por qué aparece este número en tantos lugares y con temas tan variados. Es decir hay que entrar en otro tipo de belleza, que es el entender como aparecen todas estas cuestiones, lo que me permite enseñar nuevos temas de matemáticas.

Por esta razón yo diría que hay tres facetas o formas de trabajar con las Matemáticas. La primera, que corresponde a lo que yo llamo *lo maravilloso*, pues son aquellas personas que son capaces de crearlas, y que me figuro que sería lo que nos gustaría a todos. La segunda, la que corresponde a lo que yo llamaría *lo bonito*, y que son aquellas personas que son capaces de entenderlas, aunque no sean capaces de crearlas. Y la tercera, que corresponde a lo que yo llamo *lo deseable*, y que son aquellas personas que no son capaces de entenderlas, pero que les gustaría entenderlas, lo que a todo profesor de Matemáticas le gustaría que ocurriese.

Para estas últimas es para las que empiezo con la introducción de la belleza del número áureo. Para las segundas, es decir los alumnos que destacan en el Bachillerato empleo un nivel algo más elevado de Matemáticas, y además utilizaré un programa de cálculo simbólico que es el Derive, de forma que doy un paso más en la motivación, tanto del alumnado, como la mía. Tras explicar como se llega a esos niveles de esas Matemáticas y que manejen el Derive, paso a obtener la sucesión de Fibonacci, otra cualquiera que se obtenga de igual manera, es decir, cada término como suma de los dos anteriores y una última donde los dos primeros términos son obtenidos al azar.

Y por último, y aquí ya no sé si es para los alumnos muy buenos de

Bachillerato, o ya para los que vayan a la Facultad, pero si serían lo que me motivaran fuertemente a mí, es ver, como la razón de dos números consecutivos de esas sucesiones llevan al mismo resultado. Esto tiene otra belleza, que es la que se oculta en una ecuación de segundo grado, y aquí me permito hacer un pequeño paréntesis que tiene relación con el artículo que leí en Las Actas de las Jornadas Provinciales de Matemáticas que organizó la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid, que se titula "Matemáticas para todos: Apología informal" de F. Javier Peralta, donde dice "¿Qué belleza hay, por ejemplo, en la suma de fracciones, en la fórmula del seno de una diferencia o en la resolución de una ecuación de segundo grado a secas?". Por supuesto que no la hay, pero no debemos de olvidar que en algún momento deben resolverla, lo que parece que ahora, desde el punto de vista de la enseñanza, no se lleva. Lo mismo que memorizar y otras cuestiones, que evidentemente, no es el momento para hablar de ellas. Lo que si es seguro, es que sabiéndola resolver es posible que vean la belleza que se oculta en el término general de todas esas sucesiones, pues resulta que es el mismo. Y que para obtenerlas lo único que hay que dar son los dos primeros términos.

Y cerrando ya el pequeño paréntesis, aparece ahora, otra de las preguntas que desde hace algunos años me estoy haciendo, *¿quién motiva al motivador?*. Es decir, realizar la carrera de Matemáticas, para ser matemático, pues es lo que a uno le gusta ser, pero que se reduzca a ser únicamente motivador de la belleza externa de las Matemáticas y no de la interna, me parece que es muy poca cosa, y por tanto aquí y ahora es donde me hago otra pregunta, *¿dónde me ubico?*. Ya sé que a mis años esta decidido y es en la jubilación, pero no quita que otros se la puedan hacer.

Creo que hay un tipo de profesor, cuyo lugar es el Bachillerato, o el primer ciclo de la Facultad, y no lo es, o no se considera preparado para impartir el 2^o ciclo de la ESO, y tampoco lo está para dar el segundo ciclo de la Facultad. Ahora bien con un Bachillerato tan devaluado, de dos cursos, con un alumnado que sabe tan poco, y además tan mal educado, no queda mas remedio, si es que uno puede hacerlo, que irse.

Después de lo dicho anteriormente, vuelvo a preguntarme, ¿dónde se sitúa un profesor como yo? ¿En el Bachillerato o en el primer ciclo de la Facultad?. Es evidente que uno diría que en los dos, pero, ¿cómo? Ahora bien aquí conviene hacer constar que debería ser con un horario que no fuese mayor que el horario que ahora tengo en el Instituto de Enseñanza Secundaria en el que estoy. Porque lo que no me parece lógico es que tuviese el horario que tuve cuando estuve de Profesor Asociado en la Facultad, es decir tres horas más de clase, más otra tres de tutoría, que el actual. Como este tema creo que ahora se está discutiendo y a mí ya no me afecta, pues mi opción, como ya dije, está tomada, y por tanto es que me jubilo. Así que en mi opinión yo debería de haber estado en el Bachillerato o en la Facultad o en ambos, pero con el horario de un solo lugar, pues siempre vas apurado de un lugar a otro, y realmente no rindes como debes hacerlo.

Y volviendo al número de oro, diré que todo esto lo explicaría para los alumnos que muestren interés por saberlo, en Seminarios o en esas famosas clases que han desaparecido y que, al menos en ciertos casos, dependían de que te faltasen horas, para completar el horario, las clases de profundización, es decir, siempre en el horario de clase.

Voy a dedicarme exclusivamente a las ecuaciones en diferencias finitas homogéneas de coeficientes constantes. Se supone que ya he introducido lo que son las ecuaciones en diferencias finitas, y por tanto sólo voy a explicar lo que me lleva al término general de las sucesiones.

4 Motivación para el Bachillerato o un primer curso de primer ciclo

Sea la ecuación: $y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_2 y_k = 0$. La escribo en forma de sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas añadiendo la siguiente identidad: $y_{k+1} = y_{k+1}$. Así queda:

$$\left\{ \begin{array}{r} y_{k+2} = -a_1 y_{k+1} - a_2 y_k \\ y_{k+1} = y_{k+1} \end{array} \right.$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_{k+2} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Así obtengo la siguiente ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} -a_1-\lambda & -a_2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$$

cuyas soluciones son:

$$\lambda = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

y el discrimante es:

$$D = a_1^2 - 4a_2.$$

Con arreglo al signo del discriminante, tengo el tipo del término general de la sucesión que estoy considerando, y que me lleva a tener que explicar algunas cuestiones de como obtengo la solución de la ecuación en diferencias finitas, y puedo ayudarme del Algebra Lineal o no hacerlo. Sin ayuda del Algebra Lineal tendría:

Si $D > 0$. Tiene dos valores propios reales y distintos, que llamamos r_1 y r_2, y la solución de la ecuación en diferencias es:

$$a_k = c_1u_k + c_2v_k, \quad \text{donde} \quad u_k = r_1^k \quad y \quad v_k = r_2^k.$$

Los ejemplos para este caso los pondré más adelante, pues son los que nos van a hacer ver que las soluciones de las sucesiones de Fibonacci y las que se obtienen de igual forma, tienen el mismo término n-ésimo, y sólo se diferencian en los dos primeros términos.

Si $D = 0$. Tiene un valor propio real doble, que llamamos r, y la solución de la ecuación en diferencias es:

$$a_k = c_1u_k + c_2v_k, \quad \text{donde} \quad u_k = r^k \quad y \quad v_k = kr^k.$$

Aquí vamos a ver un ejemplo, que ya tiene que ser familiar a los alumnos, pues se trata de encontrar el término n-ésimo de una progresión aritmética de diferencia 3, y cuyos dos primeros términos son 5 y 8.

Tenemos: $y_{k+1} - y_k = 3$. Como la vamos a poner como una ecuación en diferencias de orden dos, ponemos: $y_{k+2} - y_{k+1} = 3$. A esta diferencia le quitamos la anterior con lo que nos queda: $y_{k+2} - y_{k+1} - (y_{k+1} - y_k) = 0$,

$y_{k+2}-2y_{k+1}+y_k=0$. Ahora preparamos la ecuación para escribirla en forma matricial y para ello nos valemos de añadirle una nueva ecuación que es una identidad. Así tenemos:

$$\left\{\begin{array}{c} y_{k+2}=2y_{k+1}-y_k \\ y_{k+1}=y_{k+1} \end{array}\right. .$$

lo que podemos escribir de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} y_{k+2} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}$$

dando lugar a la siguiente ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = 0,\ r^2-2r+1=0,\ r=1.$$

cuya solución es: $u_k=1$ y $v_k=k$, lo que permite escribir $a_k=c_1+c_2k$.

Se trata de hallar ahora los valores de c_1 y c_2. Como $a_1=5$ y $a_2=8$, se tiene $c_1+c_2=5$ y $c_1+2c_2=8$, resultando $c_2=3$ y $c_1=2$. Ello permite escribir el término n-ésimo, en la forma usual: $a_n=2+3n$.

Si $D<0$. Tiene dos raices complejas conjugadas, que llamamos $r_1=R(cos\ \alpha+i\ sen\ \alpha)$ y $r_2=R(cos\ \alpha-i\ sen\ \alpha)$, y la solución es:

$$a_k=c_1u_k+c_2v_k,\text{ donde } u_k=R^k sen\ k\alpha \text{ y } v_k=R^k\cos\ k\alpha.$$

Para este caso no vamos a considerar ningún ejemplo.

Antes de entrar en el primer caso, vamos a utilizar el sistema de cálculo simbólico Derive, para obtener las tres sucesiones (es decir, la sucesión de Fibonacci y las otras dos sucesiones consideradas), así como una aproximación al número áureo. Para ello, ordenamos lo siguiente:

ITERATES([ELEMENT(u,2),ELEMENT(u,2)+ELEMENT(u,1)],u, [1,1],14)

Alojando el resultado obtenido en la variable a, tratemos de obtener los términos 1 al 15 de la sucesión de Fibonacci ordenando:

VECTOR(ELEMENT(a,j,1),j,1,15)

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ 377,\ 610$$

Y ahora para obtener una aproximación al número áureo, ordenamos:

VECTOR(ELEMENT((a,j+1,1)/ELEMENT(a,j,1),j,1,14)

observando que, desde el término número 12 al 14, ya se obtiene $\varphi \approx 1.618$.

Consideremos ahora la sucesión que comienza con los números 4 y 5, definiéndola exactamente igual que la de Fibonacci, para lo que ordenamos:

ITERATES([ELEMENT(u,2),ELEMENT(u,2)+ELEMENT(u,1)],u, [4,5],14)

Alojando el resultado obtenido en la variable b, tratemos de obtener los términos 1 al 15 de esa sucesión:

VECTOR(ELEMENT(b,j,1),j,1,15)

$$4,\ 5,\ 9, 14,\ 23,\ 37,\ 60,\ 97,\ 157,\ 254,\ 411,\ 665,\ 1076,\ 1741,\ 2817$$

Y ahora para obtener una nueva aproximación al número áureo, ordenamos:

VECTOR(ELEMENT((b,j+1,1)/ELEMENT(b,j,1),j,1,14)

observando que, desde el término número 10 al 14, ya se obtiene $\varphi \approx 1.618$.

Finalmente, tomamos una sucesión cuyos dos primeros términos son obtenidos aplicando la función aleatoria *Random(n)* de Derive, que devuelve un número aleatorio entero positivo del intervalo $[0, n]$.

Volviendo a realizar lo mismo que se hizo con las dos anteriores sucesiones, se tiene:

*ITERATES([ELEMENT(u,2),ELEMENT(u,2)+ELEMENT(u,1)],u,
[RANDOM(9)+1,RANDOM(9)+1],15)*

Alojando el resultado obtenido en la variable c, tratemos de obtener los términos 1 al 14 de esa sucesión:

VECTOR(ELEMENT(c,j,1),j,1,14)

$$3,\ 5,\ 8, 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, 144,\ 233,\ 377,\ 610,\ 987,\ 1597,\ 2584$$

Y ahora para obtener una aproximación al número áureo, ordenamos nuevamente:

VECTOR(ELEMENT((c,j+1,1)/ELEMENT(c,j,1),j,1,14)

observando que, desde el término número 9 al 14, ya se obtiene $\varphi \approx 1.618$.

Para que el alumno vea que hay otras formas de obtener el número áureo, puedo utilizar la siguiente expresión:

ITERATES$(\sqrt{1+x}, x, 0, 14)$

observando que a partir del término número 11 ya tenemos $\varphi \approx 1.618$. Así ve la utilización de otra función que lleva incorporado el sistema de cálculo simbólico Derive.

Ahora nos vamos a detener en el primer caso, $D > 0$. Lo único que se necesita para determinar las constantes c_1 y c_2, es aplicar técnicas de Algebra Lineal, como es la diagonalización de matrices, usando distinto vector inicial para cada caso.

La primera sucesión es ya conocida, la sucesión de Fibonacci: $1, 1, 2, 3, 5, ..$

Como cada término es suma de los dos precedentes, por tanto $y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$. Mediante un procedimiento que ya he utilizado anteriormente, se va a obtener una ecuación en diferencias de segundo orden homogénea con coeficientes constantes introduciendo la identidad $y_{k+1} = y_{k+1}$. Se tiene así el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} y_{k+2} = y_{k+1} + y_k \\ y_{k+1} = y_{k+1} \end{array} \right.$$

que escrito en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_{k+2} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}$$

lleva a la siguiente ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = 0,\ r^2 - r - 1 = 0.$$

cuyas soluciones son:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Para efectuar ahora la diagonalización debería enseñar a los alumnos en lo que consisten las matrices semejantes y elevar una matriz a una potencia de modo que ya podría explicarles porqué tenemos las siguientes igualdades:

$$A = PDP^{-1}. \quad A^k = PD^kP^{-1}.$$

$$\begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix} = PD^kP^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

y de aquí ya se obtiene el término k-ésimo.

Ahora ya justifico que esas tres sucesiones tienen la misma ecuación característica para la ecuación en diferencias finitas y todo esto también lo voy a realizar con el programa Derive. Ya sabemos, por lo dicho anteriormente, que la ley de recurrencia es:

$$y_{k+2} = y_{k+1} + y_k$$

que podemos expresar como sistema:

$$\begin{cases} y_{k+2} = y_{k+1} + y_k \\ y_{k+1} = y_{k+1} \end{cases}$$

o de modo matricial:

$$\begin{pmatrix} y_{k+2} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{k+1} \\ y_k \end{pmatrix}.$$

Su ecuación característica:

$$\begin{vmatrix} 1-r & 1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = 0, \quad r^2 - r - 1 = 0.$$

tiene por soluciones:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad , \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Usando Derive podemos encontrar los vectores columna de la matriz P, resolviendo una ecuación:

$$SOLVE([(1-(1+\sqrt{5})/2)x + y = 0, x - (1+\sqrt{5})/2)y = 0], [x, y])$$

se obtienen las soluciones:

$$[x = @1, y = @1(\tfrac{\sqrt{5}}{2} - \tfrac{1}{2})]$$

De modo análogo, resolviendo otra ecuación:

$$SOLVE([(1-(1-\sqrt{5})/2)x + y = 0, x - (1-\sqrt{5})/2)y = 0], [x, y])$$

se obtienen las soluciones:

$$[x = @2, y = @2(\tfrac{\sqrt{5}}{2} + \tfrac{1}{2})]$$

Por tanto, tomando $@1 = 1$ y $@2 = 1$, queda:

$$P := [[1, 1], [(\sqrt{5}/2 - 1/2), -(\sqrt{5}/2 + 1/2)]]$$

En consecuencia, escribiendo en Derive:

$$m := vPDP^{-1}$$

siendo D la matriz:

$$D := [[((1+\sqrt{5})/2)^k, 0], [0, ((1-\sqrt{5})/2)^k]].$$

y siendo v:

$v := [[1,1]]$, para la sucesión (1)
$v := [[5,4]]$, para la sucesión (2)
$v := [[5,3]]$, para la sucesión (3).

Entonces, para obtener cada una de esas sucesiones, tendríamos que ordenar en Derive:

l:=ELEMENT(m,2)

y para obtener 20 términos bastaría escribir:

VECTOR(l,k,0,19)

Bibliografía

[1] Braun, M. (1990), *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Grupo Editorial Iberoamérica. México.

[2] Davis, P. J. y R. Hersh. (1988), *Experiencia matemática.* MEC y Labor. Barcelona.

[3] Henrici, P. (1972), *Elementos de análisis numérico.* Trillas. México.

[4] Markushevich, A. I. (1974), *Sucesiones recurrentes.* Lecciones populares de matemáticas. Mir. Moscú.

[5] Peralta, J. (2001), "Matemáticas para todos: Apología informal", págs. 43-59. Actas de las Jornadas Provinciales de Matemáticas. Comunidad de Madrid.

[6] Scheid, F. y R.E. DiCostanzo. (1991), *Métodos numéricos.* Mc Graw-Hill. México.

[7] Torregrosa, J. R. y C. Jordán. (1991), *Álgebra Lineal y sus aplicaciones.* Mc Graw-Hill. Madrid.

Reflexiones sobre geometría métrica en el espacio
Un enfoque distinto para tres problemas clásicos

Juan Carlos Cortés López
I.E.S. Bonifacio Sotos de Casas Ibáñez (Albacete)

Gema Calbo Sanjuán
I.E.S. Fernando de los Ríos de Quintanar del Rey (Cuenca)

Abstract

We propose a different approach to standard way in order to study several selected aspects of metric geometry in three dimensions, which are developed in the course 2º B.C.N.S. We think that the study we propose is richer than standard approach because it gets to relation every studied aspect in that educational level which are usually presented in an unconnected way, such as it happens with Analysis and Geometric parts.

1 Cálculo del punto simétrico respecto de un plano y respecto de una recta

Dos de las actividades estándar en 2º B.C.N.S. dentro del bloque temático de Geometría, más concretamente en el estudio métrico de rectas y planos en el espacio, son el cálculo del punto simétrico respecto de un plano y el cálculo del punto simétrico respecto de una recta (véase pág. 172 de [1]).

Lo que sigue de este apartado propone un método distinto al usual para resolver estos problemas, y pensamos que su riqueza estriba en que estimula un aspecto (creemos muy interesante y poco explotado en la práctica) relativo al significado geométrico del parámetro que involucra cualquier ecuación de tipo vectorial o paramétrica, tanto de la recta como del plano. Más aún, el método propuesto economiza los cálculos a realizar respecto del método estándar.

Brevemente, dado un plano $\pi: A_1x + A_2y + A_3z + A_4 = 0$ y un punto $P(p_1,p_2,p_3)$ exterior a π, para calcular el punto simétrico Q de P respecto de π, se procede de forma usual como sigue (para la idea geométrica ver la figura 1 y cualquier texto de Matemáticas de C.O.U. ó 2º Bachillerato Logse de las opciones científica-tecnológica. Véase por ejemplo, pág. 172 de [1]):

<u>Paso 1</u>.- Se calcula la recta r perpendicular al plano π y que pasa por el punto P:

$$r: \begin{cases} x = p_1 + \lambda A_1 \\ y = p_2 + \lambda A_2 \\ z = p_3 + \lambda A_3 \end{cases} \quad (1)$$

donde se ha usado que el vector director de r, $\vec{r}$, es el normal o perpendicular al plano π, $\vec{n}(A_1, A_2, A_3)$, es decir, $\vec{r}(A_1, A_2, A_3)$.

<u>Paso 2</u>.- Se calcula el punto de corte $M(m_1,m_2,m_3)$ entre la recta r y el plano π. Para ello se resuelve el sistema de ecuaciones lineales (S.E.L.) formado por las ecuaciones de la recta y la ecuación del plano, obteniendo:

$$A_1(p_1 + \lambda A_1) + A_2(p_2 + \lambda A_2) + A_3(p_3 + \lambda A_3) + A_4 = 0$$

y a partir de esta última ecuación calculamos el λ adecuado:

$$\lambda_M = -(A_1p_1+A_2p_2+A_3p_3+A_4)/(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) \quad (2)$$

que sustituido en la ecuación de la recta r nos determina el punto M de intersección:

$$m_i = p_i+\lambda_M A_i, \ (1 \le i \le 3)$$

<u>Paso 3</u>.- Ahora usando que $M(m_1,m_2,m_3)$ es el punto medio entre P y Q (por ser Q el simétrico del punto P respecto del plano π), se plantea el S.E.L. cuyas incógnitas son q_1,q_2,q_3:

$$(p_i+q_i)/2 = m_i , \ (1 \le i \le 3) \quad (3)$$

Sin embargo, observemos que podemos abreviar el proceso, evitando resolver el último S.E.L. (3). Para ello notemos que por simetría si M se obtiene poniendo:

$$\lambda_M = -(A_1p_1+A_2p_2+A_3p_3+A_4)/(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)$$

en la ecuación (1) de la recta r, entonces Q se obtendrá doblando este valor del parámetro λ_M, es decir, $2\lambda_M$ (ver figura 1).

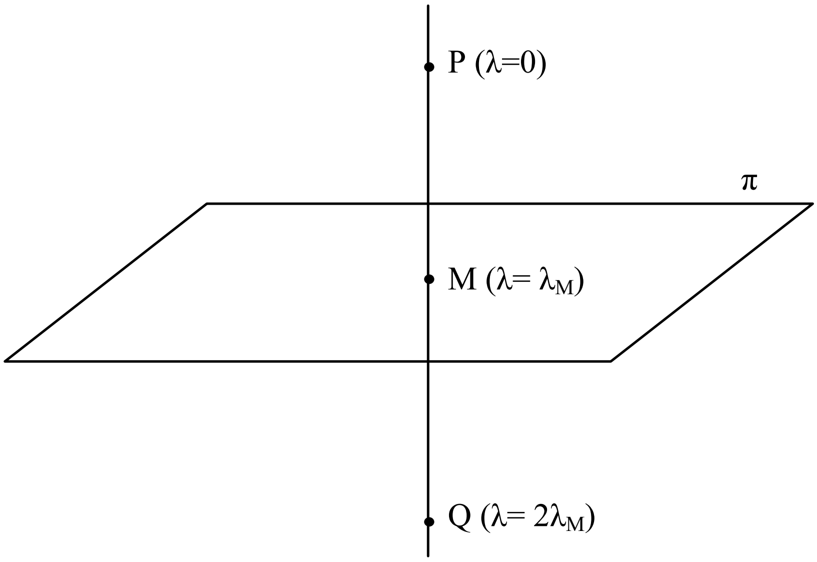


Figura 1.- *Sobre el cálculo del punto simétrico respecto de un plano.*

Esta técnica subraya y concentra la atención del alumno en el significado geométrico de la variación del parámetro λ: al variar λ en todos los números reales vamos recorriendo toda la recta r. A partir de la ecuación (1), tomamos $P(p_1,p_2,p_3)$ como punto de referencia de este movimiento (λ=0) y al variar λ en los reales, según sea $\lambda>0$ ó $\lambda<0$, nos desplazaremos sobre la recta hacia un lado u otro del punto P.

Ejemplo 1 (véase pág. 172 de [1], para contrastar la técnica utilizada)

Calculemos el punto simétrico Q del punto P(1,0,1) respecto del plano $\pi : x - y + z = 1$.Calculamos la recta r que pasa por P y es perpendicular a π:

$$r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

Calculamos el valor de λ que determina el punto M de corte entre r y π:

$$(1+\lambda)-(-\lambda)+(1+\lambda) = 1 \Rightarrow \lambda = -1/3$$

luego el punto simétrico Q buscado, corresponderá al valor duplicado del λ anterior, esto es, $\lambda = -2/3$, así:

$$Q(1+(-2/3),-(-2/3),1+(-2/3)) = (1/3,2/3,1/3)$$

La resolución del problema del cálculo del punto simétrico respecto de una recta admite un tratamiento análogo por esta técnica. Proponemos al lector interesado que la implemente con el siguiente ejercicio, contrastando el proceso con el usual:

Ejemplo 2

Calcular el punto simétrico Q del punto P(-3,1,-7) respecto de la recta $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$. Solución: Q(-3,3,-3). (Extraido de la pág. 172 de [1]).

2 Uso de funciones derivables y sus propiedades en el análisis de fórmulas geométricas

El estudio de la Geometría Métrica en general, y de la propia de cualquier programación didáctica de 2º B.C.N.S. en particular, exige, el uso de numerosas fórmulas, tras un proceso previo dedicado a la deducción de las mismas. Ciertamente cuando el alumno se sumerge en la aplicación sistemática de las fórmulas suelen presentarse preguntas del tipo:

P.1.- ¿La fórmula del área de un triángulo de lados a,b,c y ángulos A,B,C es $S = \frac{1}{2} a \sin C$?.

ó

P.2.- Cuando aplicamos la fórmula que nos da la distancia d(r,s) entre dos rectas r y s que se cruzan, (véase pág. 203 de [6]):

$$d(r,s) = \left| \det\left(\overrightarrow{A_rB_s}, \vec{r}, \vec{s}\right) \right| / \|\vec{r} \times \vec{s}\| \quad (4)$$

siendo A_r y B_s puntos de paso de las rectas r y s respectivamente, y $\vec{r}$ y $\vec{s}$ vectores directores de r y s respectivamente, ¿da lo mismo los puntos A_r y B_s que tomemos?.

Respecto a la primera pregunta comprendemos que la infinidad de fórmulas existentes para determinar el área de un triángulo provoque confusión al recordarlas, pero el error que se comete es grave, desde el punto de vista, que implícitamente, conlleva una falta de atención y de congruencia muy importante respecto de la dimensionalidad de la fórmula, ya que, *(1/2)a sin C* es una medida unidimensional, por lo que no puede representar nunca la medida de un área. Creemos que, enfatizar en el estudio de la dimensionalidad de las fórmulas es importante, al menos, para auto-reconocer errores graves de este tipo, tanto en la asignatura de Matemáticas, como en otras áreas donde se trabaja de modo específico, las unidades de medida, como Física. Pero, concentremos nuestra atención en la segunda cuestión, que es, en este trabajo la que más nos interesa. En primer lugar, señalemos que se trata de una duda aceptable, por lo menos, si el alumno la plantea tras haber interpretado geométricamente la fórmula. Más concretamente, si fijamos los datos A_r, $\vec{r}$ y $\vec{s}$, entonces (véase figura 2) la intuición gráfica nos puede inducir a pensar que el resultado de d(r,s) depende del punto B_s ó B'_s que tomemos, ya que, los vectores $\overrightarrow{A_rB_s}$ y $\overrightarrow{A_rB'_s}$ son distintos, mientras que el resto de los elementos de la expresión (4) permanecen iguales.

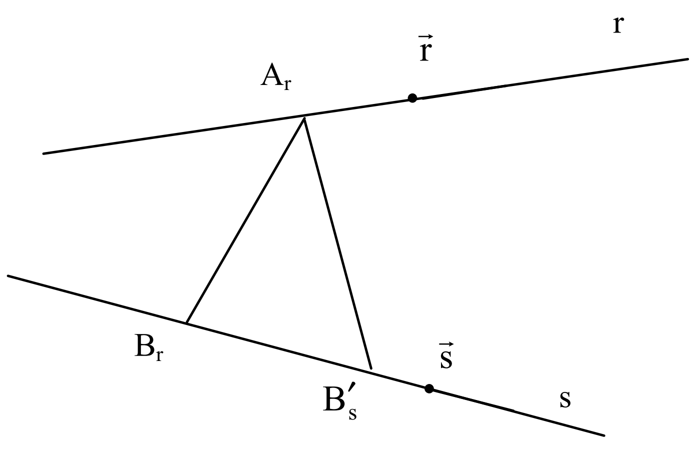


Figura 2.- *Sobre la distancia de dos rectas que se cruzan*

Ante esta pregunta podemos justificar de varias formas que en realidad d(r,s) es independiente del punto B_s ó B'_s de s que tomemos: repasando la propia demostración de la fórmula (4) o sustituyendo en la expresión (4) la representación de cualquier punto de la recta s a partir de su expresión paramétrica y luego aplicando las propiedades de los determinantes. Proponemos aquí un camino ciertamente más largo, pero mucho más rico para que el alumno justifique la respuesta a esta interesante pregunta.

Para ello empecemos señalando a los alumnos que el concepto de determinante que ellos conocen como un número asociado a una matriz para caracterizar su invertibilidad, puede generalizarse y extenderse tomando por entradas en lugar de números, funciones:

$$E(x)=\begin{vmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) \end{vmatrix} \qquad G(x)=\begin{vmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{vmatrix}$$

y que si se suponen, por ejemplo, $g_{ij}(x)$ $1\le i,j\le 3$ funciones derivables en un intervalo común $]a,b[$, G(x) será derivable en $]a,b[$, ya que, en realidad si se desarrolla el determinante que define G(x), se trata de productos y sumas de las funciones $g_{ij}(x)$ derivables. Más aún, es sencillo que lleguen :

$$E'(x)=\begin{vmatrix} c'_{11}(x) & c'_{12}(x) \\ c_{21}(x) & c_{22}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11}(x) & c_{12}(x) \\ c'_{21}(x) & c'_{22}(x) \end{vmatrix}$$

$$G'(x)=\begin{vmatrix} g'_{11}(x) & g'_{12}(x) & g'_{13}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g'_{21}(x) & g'_{22}(x) & g'_{23}(x) \\ g_{31}(x) & g_{32}(x) & g_{33}(x) \end{vmatrix}+ \\ +\begin{vmatrix} g_{11}(x) & g_{12}(x) & g_{13}(x) \\ g_{21}(x) & g_{22}(x) & g_{23}(x) \\ g'_{31}(x) & g'_{32}(x) & g'_{33}(x) \end{vmatrix} \quad (5)$$

En el contexto de la segunda cuestión geométrica, fijemos los datos $A_r(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{r}(r_1,r_2,r_3)$, $\vec{s}(s_1,s_2,s_3)$ y sea $C_s=C_s(\lambda)$ un punto cualquiera de la recta s cuya ecuación paramétrica es:

$$s:\begin{cases} x = b_1 + \lambda s_1 \\ y = b_2 + \lambda s_2 \\ z = b_3 + \lambda s_3 \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

a partir de ella definamos la función auxiliar:

$$g(\lambda) = \left(\|\vec{r}\times\vec{s}\|\right)^{-1} \det\left(\overrightarrow{A_rB_s}, \vec{r}, \vec{s}\right)$$

como $\overrightarrow{A_rB_s}$ = C_s-A_r = ($b_1+\lambda s_1-a_1$, $b_2+\lambda s_2-a_2$, $b_3+\lambda s_3-a_3$) se tiene:

$$g(\lambda) = \left(\|\vec{r}\times\vec{s}\|\right)^{-1} \begin{vmatrix} b_1+\lambda s_1-a_1 & b_2+\lambda s_2-a_2 & b_3+\lambda s_3-a_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

hagamos observar por comparación con (4) que $|g(\lambda)|$ es la "distancia entre r y s tomando C_s como un punto <u>arbitrario</u> de s". Obviamente $g(\lambda)$ es una función derivable respecto de λ. Vamos a probar que su valor es independiente del valor de λ, esto es, que es una función constante (notar que si esto es efectivamente así, se habrá respondido a la segunda pregunta, al poder tomar C_s como un punto <u>cualquiera</u> de la recta s). Para ello veamos que $g'(\lambda) = 0$.

En efecto, usando (5) en (6) obtenemos:

$$g'(\lambda) = \left(\|\vec{r}\times\vec{s}\|\right)^{-1}\left[\begin{vmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}\right] = 0$$

siendo $\sigma_i = b_i + \lambda s_i - a_i,\ 1 \le i \le 3$ y donde hemos utilizado las propiedades de los determinantes.

Observemos, que aunque -como ya mencionamos antes- este camino es más largo, a cambio arrastra una gran riqueza matemática, ya que, involucra conceptos propios de todos los bloques temáticos que se desarrollan en 2º B.C.N.S. : se trabaja con los conceptos específicos de este problema geométrico (bloque de Geometría), se utilizan los determinantes y sus propiedades (bloque de Álgebra Lineal) y se generalizan los determinates tomando por entradas funciones, considerando el determinante como una función real de variable real. Asimismo, se calcula la derivada de una función definida a través de un determinante y se utilizan propiedades de funciones derivables (bloque de Análisis).

El tratamiento de funciones definidas a través de determinantes puede ser también aprovechado en este nivel educativo para generalizar los teoremas clásicos del cálculo diferencial: teorema de Lagrange y el teorema de Cauchy, a partir del teorema de Peano, así como establecer algunas consecuencias interesantes (véase pág. 59-65 de [3]). Esto refuerza nuestra propuesta para este nivel educativo, ya que da continuidad a una línea de trabajo novedosa y rica para el alumno: el uso de determinantes funcionales.

Para finalizar señalemos que esta misma técnica, esto es, la de definir funciones auxiliares derivables para analizar fórmulas geométricas, puede también usarse para responder a preguntas similares a la ya respondida, también propias de la programación de 2º B.C.N.S. como por ejemplo:

P3.- Cuando se calcula la distancia d(P,π) de un punto P a un plano π, cuyo vector normal es $\overrightarrow{n_\pi}$, ¿da igual el punto A_π del plano que elijamos al aplicar la conocida fórmula:

$$d(P,\pi) = \left| \left(\overrightarrow{A_\pi P}\right)\overrightarrow{n_\pi} \right| / \left\| \overrightarrow{n_\pi} \right\| \;?$$

ó

P4.- Cuando se evalúa la distancia de un punto a una recta , cuyo vector director es **r**, ¿da lo mismo el punto de la recta que tomemos al aplicar la fórmula:

$$d(P,r) = \left\| \vec{r} \right\|^{-1} \left\| \left(\overrightarrow{A_r P}\right) \times \vec{r} \right\| \;?$$

3 Cálculo de la distancia de un punto a un plano mediante la esfera tangente

Aunque en el Real Decreto 1179/1992 del 2 de octubre (B.O.E. nº 253 del 21 de octubre de 1992) viene estipulado que se desarrollen en las programaciones didácticas de 2º B.C.N.S. la unidad “Lugares geométricos. Cónicas. La esfera” donde en particular se debe estudiar la esfera, lo cierto es que son numerosos los distritos universitarios donde, admitiendo la dificultad real de abarcar todos los contenidos de la programación, se opta por eliminar como objetivo mínimo para la P.A.U. (Prueba de Acceso a la Universidad) el estudio de la esfera.

Por otra parte el estudio de la distancia de un punto a un plano suele realizarse de dos formas: a través de un razonamiento geométrico que involucra el producto escalar para imponer una condición adecuada de perpendicularidad o a través del volumen de un paralelepípedo. Proponemos aquí un enfoque alternativo que nos regala la posibilidad de trabajar al mismo tiempo aspectos fundamentales de la esfera.

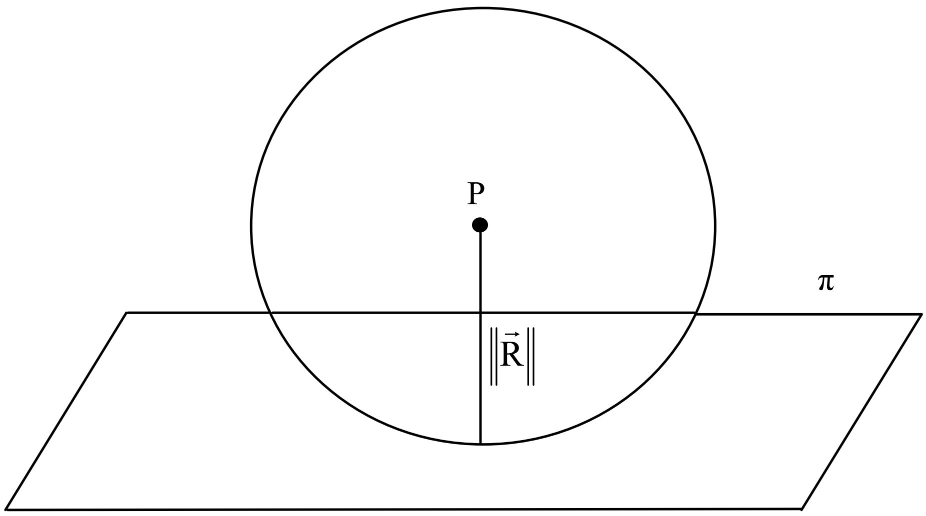


Figura 3.- *Sobre la distancia de un punto a un plano*.

Más concretamente, (ver figura 3), si deseamos calcular la distancia d(P,π) de un punto P a un plano π, consideraremos la esfera de centro P. Seguidamente impondremos que el sistema de ecuaciones no lineales (S.E.N.L.) formado por la ecuación de la esfera y la ecuación del plano tenga solución única, lo cual significará que la esfera y el plano se cortan en un único punto, esto es, que son tangentes, y como el vector radio $\vec{R}$ de la esfera es perpendicular al plano tangente, el radio $R = \|\vec{R}\|$ de la esfera será precisamente la distancia d(P,π) buscada. Para calcular R impondremos que la ecuación de segundo grado que se deriva de resolver el mencionado S.E.N.L. por el método de sustitución tenga solución única, esto es, que su discriminante sea nulo.

Veamos un ejemplo para mayor claridad.

Ejemplo 3 (véase pág. 199 de [6], para contrastar la técnica utilizada).

Determinemos la distancia del punto P(1,2,5) al plano $\pi = 2x + 2y - z = 5$. Consideramos la esfera de centro el punto P(1,2,5) y radio $R : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = R^2$ y calculamos su intersección con el plano π, resolviendo el S.E.N.L.:

$$\left.\begin{array}{rcl} (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 & = & R^2 \\ 2x + 2y - z & = & 5 \end{array}\right\}$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (2x + 2y - 10)^2 = R^2$$

$$\left(x^2 - 2x + 1\right) + \left(y^2 - 4y + 4\right) + \left(4x^2 + 4y^2 + 8xy + 100 - 40x - 40y\right) = R^2$$

$$5x^2 + (8y - 42)x + \left(5y^2 - 44y + 105 - R^2\right) = 0$$

Fijada la variable y, la ecuación anterior puede considerarse como una ecuación de 2º grado en x, como el S.E.N.L. debe tener solución única, el discriminante Δ_x debe ser nulo:

$$\Delta_x = (8y - 42)^2 - 20\left(5y^2 - 44y + 105 - R^2\right) = 0$$

$$-36y^2 + 208y - 336 + 20R^2 = 0$$

De nuevo considerando esta ecuación de segundo grado en y, como el S.E.N.L. debe tener solución única, exigimos que $\Delta_y = 0$:

$$\Delta_y = 208^2 - 4(-36)\left(-336 + 20R^2\right) = 0$$

que nos da una ecuación en R, de donde:

$$R = d(P, \pi) = \sqrt{\frac{5120}{2880}} = \frac{4}{3}$$

Demostremos ahora la validez general de esta técnica. Para ello debemos probar que, si P(l,n,q) es un punto exterior a un plano $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$, entonces el valor de R deducido a partir de la resolución del S.E.N.L.:

$$\left.\begin{array}{rcl} (x-l)^2 + (y-n)^2 + (z-q)^2 & = & R^2 \\ Ax + By + Cz + D & = & 0 \end{array}\right\}$$

coincide con la conocida fórmula:

$$d(p, \pi) = |Al + Bn + Cq + D| / \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Es sencillo observar que la pretendida justificación, si se realiza "a mano" no sólo es tediosa y aparatosa, sino lo que es más importante: no aporta nada interesante para el alumno (ni para el profesor). Proponemos entonces, introducir en el aula de un modo natural el uso de un asistente matemático para aliviar los cálculos. Como en otras experiencias (véase [4]) hemos elegido DERIVE por el poco hardware que requiere y por su más que razonable potencia en cálculo simbólico.

Antes de abordar el problema, y para ahorrar coste computacional, es conveniente hacer observar a los alumnos que como la terna $\{a, b, c\}$ es la que determina la existencia del plano π, podemos suponer sin pérdida de generalidad que al menos uno de estos coeficientes es distinto de cero, supongamos por ejemplo C, en tal caso dividiendo la ecuación del plano por C y renombrando los coeficientes mudos A/C, B/C, D/C, podemos suponer que la ecuación del plano tiene la forma $\pi : Ax + By + z + D = 0$. Debemos pues, probar:

$$\left.\begin{array}{rcl}(x-l)^2+(y-n)^2+(z-q)^2 & = & R^2 \\ Ax+By+z+D & = & 0\end{array}\right\} \Rightarrow R = d(P,\pi) = |Al + Bn + q + D| / \sqrt{A^2+B^2+1}$$

A continuación, describimos un sencillo algoritmo a seguir si se usa la versión 2.56 de DERIVE XM para estudiar el problema (denotamos entre los símbolos < > los comandos específicos del programa) no obstante, y debido al tamaño de las expresiones parciales que el programa va generando sólo especificamos los pasos clave:

1.- <Author> $f(x) := (x-l)^2 + (y-n)^2 + (Ax + By + D + q)^2 - R^2$

(la elección poco habitual de la notación P(l,n,q) para las coordenadas de un punto, en lugar de la escritura con subíndices: $P(p_1,p_2,p_3)$, está justificada cuando se desea implementar este algoritmo en el asistente matemático DERIVE, el cual no reconoce subíndices)

2.- <Simplify>, esta opción nos da por defecto del software aplicado una ordenación polinómica de f(x) en términos de x.

3.- Cargamos el fichero de utilidades MISC.MTH tecleando consecutivamente las opciones: <Transfer> <Load> <Utility> y escribiendo a continuación: MISC.MTH. De esta suerte podremos usar próximamente el comando Poly_Coeff

4.- Definimos el discriminante de la ecuación en x, f(x) = 0. Para ello ponemos:

$$T(x) := (\text{Poly\_Coeff}(f(x),x,1))^2 - 4\text{Poly\_Coeff}(f(x),x,2)\text{Poly\_Coeff}(f(x),x,0)$$

5.- Con <Simplify> nos queda la expresión anterior como una ecuación de segundo grado en la varibley . Definimos esta expresión a través del operador := (“definición diferida”), como g(x):=

6.- De nuevo definimos el discriminante de la ecuación en y, g(y) = 0. Para ello ponemos como en el paso 5:

$$Z(y) := (\text{Poly\_Coeff}(g(x), x, 1))^2 - 4\text{Poly\_Coeff}(g(x), x, 2)\text{Poly\_Coeff}(g(x), x, 0)$$

7.- Finalmente usando la orden <soLve> resolvemos la última ecuación en la variable R , Z(y) = 0.

8.- DERIVE nos responde:

$$R = \pm(Al + Bn + q + D)/\sqrt{A^2 + B^2 + 1}$$

4 Conclusiones

Este artículo está enmarcado dentro de una línea de trabajo del autor cuyo principal objetivo es estudiar nuevos enfoques de aspectos clásicos dentro de la docencia de la Matemática a cualquier nivel educativo (véase [5]), dando especial prioridad al enfoque que aporta y conlleva implícitamente un trabajo interdisciplinar y que enlaza y conecta todos los bloques temáticos principales de la Matemática: Análisis, Álgebra, Geometría,... Al mismo tiempo, siempre que se considera oportuno se introduce en esta labor el ordenador, ya sea a través de la programación en lenguajes de alto nivel (véase [2]), ya sea utilzando un asistente matemático para analizar el problema objeto de estudio (véase [4]).

Nos interesa que el presente artículo sirva a otros colegas, no sólo como una serie de enfoques concretos y distintos para explicar aspectos tradicionales en su enseñanza cotidiana, sino como el título del trabajo apunta, para que día a día todos nos replanteemos la enseñanza que impartimos en el aula, e investiguemos otros caminos para desarrollar los conceptos que enseñamos a nuestros alumnos.

Bibliografía

[1] COLERA J., OLIVEIRA Mª. J., FERNÁNDEZ S., (1997*), Matemáticas II Bachillerato Logse*, Ed. Anaya, Madrid.

[2] CORTÉS LÓPEZ, J.C. y BEDMAR SÁNCHEZ, A., (1996), "Sobre un problema diofántico de triángulos", *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, nº 8, pág: 125-134.

[3] CORTÉS LÓPEZ, J.C., (1998), "Algunas aplicaciones de un teorema de Peano", *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, nº 48, pág: 59-65.

[4] CORTÉS LÓPEZ, J.C., (1998), "Estudio matemático del trazado general de polígonos regulares", *Epsilon*, nº 39, vol 13 (3), pág: 149-158.

[5] CORTÉS LÓPEZ, J.C., (1998), "Reflexiones sobre sistemas de ecuaciones lineales parametrizados", *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO*, nº 18, pág: 113-122.

[6] VIZMANOS J.R., ANZOLA M., (1997), *Matemáticas 2 Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud-Tecnología*, Ed. SM, Madrid.

Área, proporcionalidad y semejanza de triángulos

José Alberto García Suárez
IES Eduardo Pondal
Dpto.de Métodos Cuantitativos
Universidad de Santiago de Compostela

Abstract

In this note, the Fundamental Theorem of Similarity of Triangles is proved with the only aid of the arithmetic properties of area and with no reference to ratios between magnitudes of any type.

Introducción

En mi nota "El teorema de Pitágoras en la semejanza de triángulos"(1999), se simplificaba una demostración anteriormente publicada por R. Moreno Castillo (1997) sobre la proporcionalidad entre los lados de dos triángulos semejantes , al reducirla – en la misma línea de su planteamiento – a una aplicación elemental del teorema de Pitágoras. Se indicaba además que la proporcionalidad entre los catetos de triángulos rectángulos semejantes (caso al que se reduce el general por descomposición mediante las alturas) podía deducirse expresando el área del mayor de los triángulos como suma de la del menor, "encajado" en aquel, y la del trapecio complementario; sin embargo no se hacía referencia a la posibilidad de obtener por análogo procedimiento la proporcionalidad entre las hipotenusas, dando a entender por omisión que se deducía aplicando las propiedades de las proporciones, a partir de la de los catetos.

Un análisis más detenido de los conceptos de área y proporcionalidad, permite concluir que las propiedades aritméticas elementales e "intuitivas" que la matemática griega asocia al área como idea primitiva que no precisa ser definida, incluyen implícitamente la proporcionalidad entre los lados de triángulos rectángulos semejantes, sin que para llegar a ella y a su posterior extensión al caso general, sea preciso recurrir al concepto de razón entre magnitudes.

1 El área y la proporcionalidad en la matemática griega y en Hilbert

Es conocida la inseguridad que con el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables provocaban en la matemática griega las razones entre segmentos; de ahí que, como señala Boyer [1986, p.112] su álgebra geométrica eludiera la referencia explícita a ellas interpretando la proporción como una igualdad entre áreas de rectángulos expresadas como producto entre sus lados. También Hilbert (1991) define la proporcionalidad entre segmentos como una igualdad entre productos de dos de ellos, que en este caso son a su vez segmentos construidos mediante el cálculo geométrico que desarrolla para reproducir entre los segmentos de la recta (apoyado en el teorema de Pascal y sin recurrir al axioma de continuidad ni por tanto a la idea de límite) las propiedades algebraicas de los números reales, que le permiten convertir en un trámite aritmético la obtención de la proporcionalidad de los lados de triángulos semejantes.

Euclides (1991) por su parte, dedica el libro V a introducir las razones entre magnitudes y a desarrollar la teoría - general – de las proporciones, para aplicarla en el VI al estudio de la semejanza con la utilización de razones tanto entre áreas como entre segmentos. Para Euclides el área no precisa de definición, y apoya en ella la deducción de la proporcionalidad entre lados de triángulos semejantes, mientras Hilbert es de este último hecho del que parte para deducir la independencia del producto base por altura en un triángulo, y definir así su área, que considera positiva o negativa según cada uno de los dos sentidos de recorrido definidos, al objeto de demostrar la independencia del área de un polígono de su partición en triángulos, y por tanto la consistencia formal de su *Teoría del contenido superficial*, en la que las propiedades "intuitivas" del área son ya consecuencia aritmética de su definición.

El enfoque formalista hilbertiano elude tanto la compleja teoría de las proporciones utilizada por Euclides como el alternativo proceso de paso al límite con el que se extiende el caso de segmentos conmensurables al de inconmensurables (o la equivalente doble reducción al absurdo arquimediana), pero es obvio que no tiene cabida en una introducción elemental a la geometría. En este marco didáctico, el área tiene, como es natural, el mismo sentido que en Euclides, quien en el libro I desarrolla sus propiedades elementales para triángulos y paralelogramos e incluye una demostración del teorema de Pitágoras basada exclusivamente en ellas. Veamos cómo de esas mismas propiedades del área se deduce directamente el teorema fundamental de la semejanza de triángulos, sin necesidad de utilizar las proporciones entre razones de áreas y de segmentos establecidas en la demostración de los “Elementos”.

2 Área y semejanza de triángulos

La proposición I.43 de los “Elementos”, establece que “*En todo paralelogramo, los complementos de los paralelogramos situados en torno a la diagonal son iguales entre sí”* (en referencia a sus áreas), y la demostración se basa en la congruencia de los triángulos en que la diagonal divide a un paralelogramo, y en la “evidencia” de que el área de la unión de figuras no solapadas es la suma de las áreas de cada una (Figura 1).

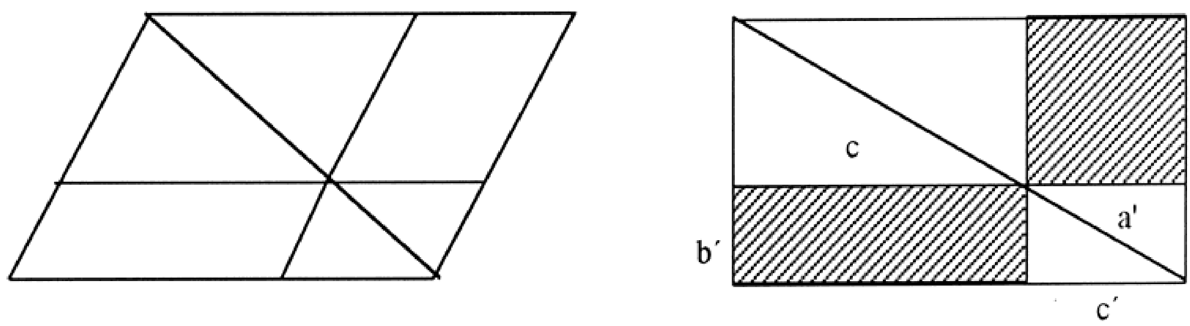


Figura 1

Aplicada al caso rectangular, esta igualdad de áreas, interpretadas estas al modo del álgebra geométrica como productos de los lados, toma la forma

$$b.c' = b'.c$$

que refleja asimismo la proporcionalidad entre catetos de los triángulos rectángulos semejantes de lados *a,b,c,* y *a',b',c'* respectivamente.

La extensión de la proporcionalidad a las hipotenusas, sin recurrir al uso de razones entre magnitudes, se deduce de la igualdad entre los productos “ base por altura” de un triángulo (interpretada, obviamente, como igualdad entre las áreas de los rectángulos formados por cada una de estas parejas de segmentos), consecuencia inmediata de la análoga propiedad en un paralelogramo, que demostraremos siguiendo el razonamiento de Euclides:

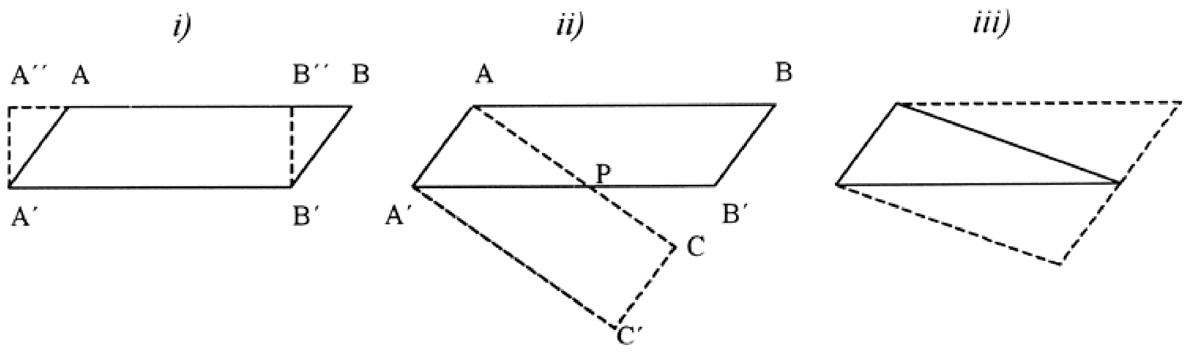


Figura 2

De la congruencia de los triángulos AA´A´´ y BB´B´´ de la figura 2,i) se sigue la igualdad entre las áreas del paralelogramo ABB´A´ y del rectángulo A´B´B´´A´´; y de la congruencia de los triángulos ABC y A´B´C´ de la figura 2,ii), solapados en el triángulo PB´C, primero la igualdad entre las áreas de los trapecios ABB´P y A´PCC´, que mediante la unión a cada uno de ellos del triángulo APA´ se extiende a la igualdad entre las áreas del paralelogramo ABB´A´ y del rectángulo ACC´A´. La verificación de la propiedad para el triángulo, se obtiene mediante su "duplicación" en dos paralelogramos, según se indica en la figura 2,iii).

Situando ahora los dos triángulos rectángulos semejantes como en la figura 3, de las expresiones del área del triángulo BCB´ tomando respectivamente como bases a y a', se obtiene

$$a.c'=a'.c\,,$$

que refleja la extensión de la proporcionalidad entre catetos a las hipotenusas.

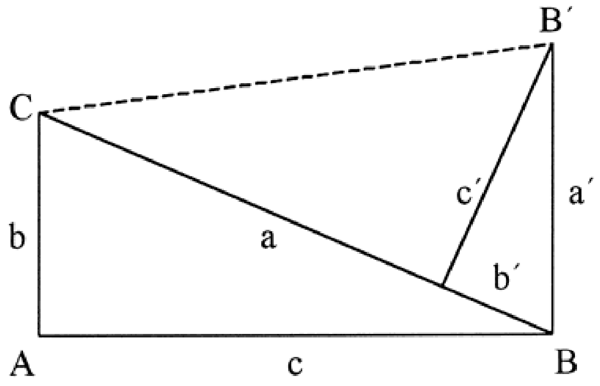


Figura 3

El caso de dos triángulos arbitrarios es consecuencia de su descomposición en triángulos rectángulos, como se indica en la figura 4:

Denotando por *a, b, c* los lados del triángulo ABC, por *a´, b´, c´,* los del AB´C´, y por *h, h´* las respectivas alturas, de la igualdad entre las áreas de cada pareja de rectángulos rayada se deduce que

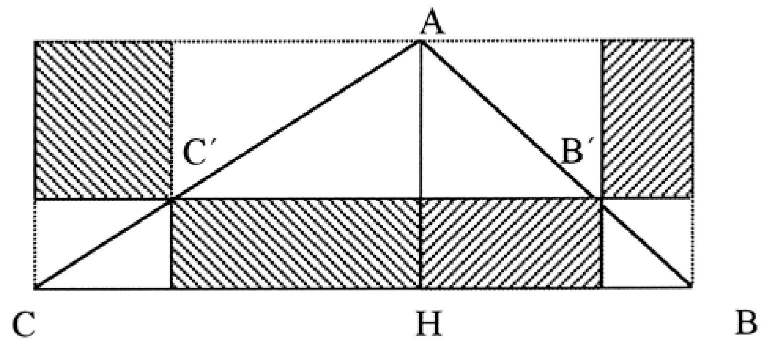


Figura 4

$$a.h' = a'.h\ ,$$

igualdad que junto a las ya conocidas para cada pareja de triángulos rectángulos semejantes determinada por las alturas

$$b.h' = b'.h \qquad\qquad c.h' = c'.h$$

completa la demostración.

Referencias bibliográficas

BOYER, C. (1986). “Historia de la matemática”. Alianza Universidad Textos, 94. Madrid, Alianza Editorial. Traducción de la 1ª ed. en inglés, 1968.

EUCLIDES. (1991). “Elementos”. Biblioteca Clásica Gredos. Barcelona, Editorial Gredos, 3 vol.

GARCÍA SUÁREZ, J.A. (1999). “El teorema de Pitágoras en la semejanza de triángulos”. Boletín de la Sociedad “Puig Adam” de profesores de matemáticas, (52).

HILBERT, D. (1991). “Fundamentos de la Geometría”. Colección Textos Universitarios, 5. Madrid, Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Traducción de la 7ª ed. en alemán, 1930.

MORENO CASTILLO, R. (1997). “Una demostración del teorema de Tales”. Boletín de la Sociedad “Puig Adam”, (45).

Sobre el wronskiano e independencia lineal. Un ejemplo de abstracción en álgebra lineal.

Julio Benítez López
Universidad Politécnica de Valencia.
jbenitez@mat.upv.es

Resumen

The criterion of the wronskian for the linear independende of functions is generalizated progressively. Moreover, the explanation of this abstraction is detailed and also several simple applications are shown.

1 Introducción

Es bien conocida la siguiente condición suficiente (pero no necesaria) para la independencia lineal de funciones, llamada *criterio del wronskiano*:

Teorema 1.1 *Sean* $f_1, f_2, \cdots, f_n \in \mathcal{C}^{(n-1)}(]a,b[)$ *y* $t_0 \in]a,b[$. *Si*

$$\det \begin{pmatrix} f_1(t_0) & f_2(t_0) & \cdots & f_n(t_0) \\ f_1'(t_0) & f_2'(t_0) & \cdots & f_n'(t_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_1^{(n-1)}(t_0) & f_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & f_n^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *son linealmente independientes.*

El determinante que aparece en este teorema se llama *wronskiano* de $f_1, \cdots, f_n$ y se denota $W(f_1, \cdots, f_n)(t_0)$. Pero el recíproco del teorema 1.1 es falso. Un ejemplo sencillo es el siguiente:

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0, \\ x^2 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Para demostrar el teorema 1.1 tomamos la combinación lineal $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n = 0$ y a esta igualdad le aplicamos la derivada i-ésima $(i = 0, \cdots, n-1)$ evaluada en t_0. Así obtenemos un sistema homogéneo $n \times n$ cuya matriz, por hipótesis, es invertible, luego $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. La demostración detallada puede encontrarse, por ejemplo en ([1], Teorema 8, Capítulo I.1).

Sin embargo, ¿por qué el teorema directo es verdadero y el recíproco es falso? Cuando se estudian ecuaciones diferenciales lineales hay una especie de recíproco ([1], Teorema 5, Capítulo III.1):

Teorema 1.2 *Sean $f_1, \cdots, f_n$ soluciones linealmente independientes de*

$$a_n(t)y^{(n)} + \cdots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0,$$

donde $a_k(t)$ son funciones continuas en $[a,b]$, $k = 0, \cdots, n$. Entonces existe $t_0 \in]a,b[$ de modo que $W(f_1, \cdots, f_n)(t_0) \neq 0$ (De hecho el wronskiano no se anula para todo $t \in]a,b[$).

¿Por qué ahora, bajo esta condición añadida, el recíproco es cierto? La respuesta podría ser la trivial: *porque es así*. Sin embargo, como veremos, hay una explicación que aporta algo de claridad a esta pregunta.

En este artículo se explica la relación entre el wronskiano y la independencia lineal de funciones. Esta explicación sigue un proceso de abstracción de una situación concreta hacia una más general. Por tanto, además se pretende mostrar cómo la abstracción puede ayudar a los alumnos comprender ideas matemáticas abstractas. Esta relación permite, además, probar algunos otros teoremas clásicos del álgebra lineal.

2 Una generalización.

Si nos fijamos en la demostración del teorema 1.1 partimos de una combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, donde los v_i pertenecen a cierto espacio vectorial y le aplicamos a esta igualdad n funcionales lineales. Denotaremos X^* el dual algebraico[1] del espacio vectorial X. Sin más que repetir la prueba del teorema 1.1 podemos enunciar el siguiente teorema:

[1]Recordemos que el dual algebraico de un espacio vectorial X es el conjunto de aplicaciones lineales de X sobre $\mathbb{R}$. Sus elementos se suelen llamar funcionales lineales.

Teorema 2.1 *Sea X un espacio vectorial, $x_1, \cdots, x_n \in X$, $x_1^*, \cdots, x_n^* \in X^*$. Si*

$$J(x_1, \cdots, x_n; x_1^*, \cdots, x_n^*) := \det \begin{pmatrix} x_1^*(x_1) & \cdots & x_1^*(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^*(x_1) & \cdots & x_n^*(x_n) \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces los vectores $x_1, \cdots, x_n$ son linealmente independientes.

La particularización se consigue sin más que tomar $X = \mathcal{C}^{n-1}(]a, b[)$, $x_i^*(f) = f^{(i-1)}(t_0)$, $i = 1, \cdots, n$.

Sabemos que el recíproco de este teorema debe ser falso (debido al el contraejemplo del teorema 1.1). Sin embargo intentaremos establecer una especie de recíproco: Supongamos que $J(x_1, \cdots, x_n; x_1^*, \cdots, x_n^*) = 0$. Entonces existe $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \neq \vec{0}$ de modo que

$$\begin{pmatrix} x_1^*(x_1) & \cdots & x_1^*(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^*(x_1) & \cdots & x_n^*(x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n \in \cap_{i=1}^n \ker x_i^*$. Si forzamos que $x_1, \cdots, x_n$ sean linealmente independientes y que $\text{lin}\{x_1, \cdots x_n\} \cap (\cap_{i=1}^n \ker x_i^*) = \{\vec{0}\}$, entonces $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Es decir, una contradicción. Acabamos de probar el siguiente teorema:

Teorema 2.2 *Sean X un espacio vectorial, $x_1, \cdots, x_n$ vectores de X linealmente independientes, $x_1^*, \cdots, x_n^* \in X^*$. Si además*

$$\text{lin}\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (\cap_{i=1}^n \ker x_i^*) = \{\vec{0}\},$$

entonces

$$J(x_1, \cdots, x_n; x_1^*, \cdots x_n^*) = \det \begin{pmatrix} x_1^*(x_1) & \cdots & x_1^*(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^*(x_1) & \cdots & x_n^*(x_n) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Al particularizar este teorema para el criterio del wronskiano, obtenemos

$$\cap_{i=1}^n \ker x_i^* = \{f \in \mathcal{C}^{n-1}(]a, b[) : f(t_0) = \cdots = f^{(n-1)}(t_0) = 0\}.$$

Una manera drástica de conseguir $\mathrm{lin}\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (\cap_{i=1}^n \ker x_i^*) = \{\vec{0}\}$ es asegurar que $\cap_{i=1}^n \ker x_i^* = \{\vec{0}\}$. Lo cual se consige afirmando que si una función y sus $n-1$ primeras derivadas se anulan en t_0, entonces esta función es idénticamente nula. Esto se logra por el teorema de existencia y unicidad de las ecuaciones diferenciales, si la función satisface una ecuación diferencial lineal de orden n. Con lo cual queda explicada la relación de las ecuaciones diferenciales y el wronskiano en el teorema 1.2.

3 Corolarios

Los teoremas 2.1 y 2.2 permiten deducir varios teoremas clásicos del álgebra lineal, aparte de los mencionados en la sección anterior.

Teorema 3.1 (La matriz de Gram) *Sean $v_1, \cdots, v_n$ vectores de un espacio euclídeo X. Sea*

$$G = \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_1, v_n \rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle v_n, v_1 \rangle & \cdots & \langle v_n, v_n \rangle \end{pmatrix}.$$

Entonces G es invertible si y sólo si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ son linealmente independientes.

Basta tomar $x_j^* \in X^*$ dado por $x_j^*(x) = \langle v_j, x \rangle$ y observar que

$$\cap_{i=1}^n \ker x_i^* = \cap_{i=1}^n (\mathrm{lin}\{v_i\})^\perp = (\mathrm{lin}\{v_1, \cdots, v_n\})^\perp.$$

Los teoremas 2.1 y 2.2 hacen el resto.

Teorema 3.2 *Sean $v_1, \cdots, v_n$ vectores ortogonales no nulos de un espacio euclídeo. Entonces son linealmente independientes.*

Basta observar que en el teorema 3.1 la matriz de Gram es diagonal con los elementos de la diagonal principal no nulos.

En [2], pág. 145, se demuestra el siguiente teorema, llamada la *condición de Haar*.

Teorema 3.3 *Sea $\{p_n(x)\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios ortogonales y sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales distintos dos a dos. Entonces la matriz definida por*

$$P(a_1, \cdots, a_n) = \begin{pmatrix} p_0(a_1) & \cdots & p_0(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n-1}(a_1) & \cdots & p_{n-1}(a_n) \end{pmatrix}$$

es una matriz invertible para todo $n \geq 1$.

Si tomamos el espacio vectorial $X = \mathcal{P}_{n-1}$ (los polinomios de grado menor o igual que $n-1$) y las aplicaciones lineales $x_i^* : \mathcal{P}_{n-1} \to \mathbb{R}$ dadas por $x_i^*(p) = p(a_i)$, entonces un polinomio que está en $\cap_{i=1}^n \ker x_i^*$ se anula en $a_1, \cdots, a_n$, si al mismo tiempo es de grado menor o igual que $n-1$, por el teorema fundamental del álgebra, este polinomio es nulo. Por tanto podemos utilizar el teorema 2.2 para rebajar la hipótesis de ortogonalidad en el teorema 3.3:

Teorema 3.4 *Sea $\{p_n\}_{n\geq 0}$ una sucesión de polinomios de modo que $\{p_k\}_{k=0}^{n-1}$ formen base de $\mathcal{P}_{n-1}$ y sea $\{a_n\}_{n\geq 1}$ una sucesión de números reales distintos dos a dos. Entonces la matriz $P(a_1, \cdots a_n)$ definida en el teorema 3.3 es una matriz invertible para todo $n \geq 1$.*

Por supuesto este teorema (y todos los de este artículo) se puede probar de muchas maneras: una alternativa es considerar $\psi : \mathcal{P}_{n-1} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\psi(p) = (p(a_1), \cdots, p(a_n))$. Entonces la matriz de ψ conserva el caracter de invertibilidad independientemente de la base considerada en $\mathcal{P}_{n-1}$. Pero la matriz de ψ en la base canónica de $\mathcal{P}_{n-1}$ es la de Vandermonde, que es invertible, y la matriz de ψ en la base $\{p_0, \cdots, p_{n-1}\}$ es $P(a_n, \cdots, a_n)$.

4 La generalización

Es posible reunir los Teoremas 2.1 y 2.2 en sólamente uno. Hasta ahora únicamente nos hemos preocupado de la invertibilidad de la matriz

$$M(x_1, \cdots, x_n; x_1^*, \cdots, x_n^*) = \begin{pmatrix} x_1^*(x_1) & \cdots & x_1^*(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^*(x_1) & \cdots & x_n^*(x_n) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Esta matriz es invertible si y sólo si su rango es n. ¿Por qué no hallamos su rango? El rango de M es la dimensión de la imagen de la aplicación lineal $\psi : \mathrm{lin}\{x_1, \cdots, x_n\} \to \mathbb{R}^n$ dada por $\psi(x_i) = (x_1^*(x_i), \cdots .x_n^*(x_i))$. Luego

$$\mathrm{rg}(M) = \dim \mathrm{Im}\psi = \dim \mathrm{lin}\{x_1, \cdots, x_n\} - \dim \ker \psi.$$

Pero $\ker \psi = \mathrm{lin}\{x_1, \cdots, x_n\} \cap (\cap_{i=1}^n \ker x_i^*)$. Por tanto hemos probado

Teorema 4.1 *Sean $x_1, \cdots, x_n \in X$, $x_1^*, \cdots, x_n^* \in X^*$. Sea M definida en (1). Entonces*

$$\mathrm{rg}(M) = \dim(\mathrm{lin}\{x_1, \cdots, x_n\}) - \dim(\cap_{i=1}^n \ker x_i^* \cap \mathrm{lin}\{x_1, \cdots, x_n\}).$$

Se comprende fácilmente que este teorema generaliza a 2.1 y a 2.2. Podemos también aplicar este teorema para probar un resultado utilizado en la teoría de los mínimos cuadrados ([1], proposiciones 2 y 3. Capítulo IV.2):

Teorema 4.2 *Sea A una matriz $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, entonces*

1. *El sistema de las ecuaciones normales, $A^T Ax = A^T b$ es siempre compatible.*

2. *El sistema de las ecuaciones normales es compatible determinado si y sólo si* $\mathrm{rg}(A) = n$.

El paso fundamental al demostrar 1 es probar $\mathrm{rg}(A^T A) = \mathrm{rg}(A)$. Pero esto se deduce del teorema 4.1 sin más que tomar el espacio vectorial $X = \mathrm{lin}\{A_1, \cdots, A_n\}$ (A_i son las filas de A) y los funcionales lineales $x_i^* : X \to \mathbb{R}$ dados por $x_i^*(x) = \langle A_i, x\rangle$. Ahora 2 es trivial, ya que $A^T A$ es una matriz cuadrada de orden n.

Referencias

[1] J. IZQUIERDO, J.R. TORREGROSA. (1991). *Álgebra lineal y ecuaciones diferenciales.* Universidad Politécnica de Valencia.

[2] J. STOER, R. BULRICH. (1980). *Introduction to numerical analysis.* Ed. Spriger-Verlag. New York.

Realización con calculadora simbólica de los cálculos asociados a una demostración de geometría analítica tradicional

Nicolás Rosillo Fernández
I.E.S. "Máximo Laguna"
nrosillo@olmo.pntic.mec.es

Abstract

In this article it is shown how TI-89 symbolic calculator could help students in order to proof geometric constructions.

1. Introducción

En el presente artículo se va a utilizar la calculadora TI-89 para realizar demostraciones simbólicas de construcciones geométricas. Se ejemplificará este hecho mediante la construcción, por tres métodos distintos, de las rectas tangentes a una circunferencia por un punto dado exterior a ella. No es objetivo del artículo usar toda la potencia de una máquina simbólica, sino trabajar ejemplos cuya demostración sea asequible a alumnos de Educación Secundaria.

2. Primer Método

La construcción geométrica de dichas rectas se realiza de la siguiente forma:

1. Se construye el punto medio M del segmento formado por el centro de la circunferencia C y el punto exterior A.
2. Se traza la circunferencia de centro M y radio MC.
3. Las intersecciones obtenidas (N es una de ellas) son los puntos de tangencia.

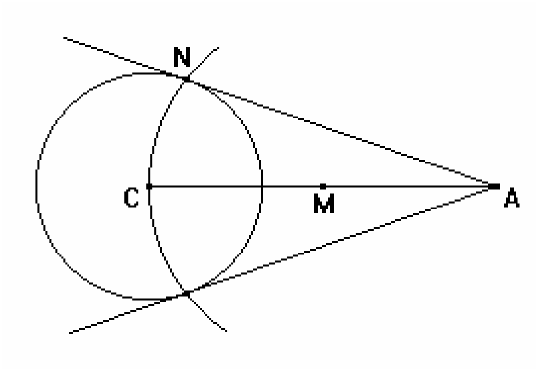


Figura 1

Demostración analítica

La distancia de una recta tangente a una circunferencia al centro de la misma debe ser igual al radio de dicha circunferencia, lo que significa que la recta y el radio correspondiente al punto de tangencia son perpendiculares. Por tanto, bastará con demostrar que los vectores *NA* y *NC* son perpendiculares. Una vez hecha una elección correcta de ejes, *M* queda en el origen de coordenadas y la circunferencia[1] de centro *C* tiene como ecuación $(x+a)^2 + y^2 = r^2$

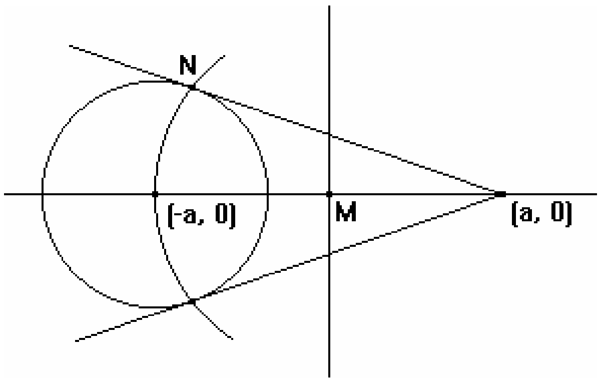


Figura 2

La segunda circunferencia trazada tiene como ecuación $x^2 + y^2 = a^2$

Desarrollando $(x+a)^2 + y^2 = r^2$ se obtiene $x^2 + a^2 + 2ax + y^2 = r^2$

[1] Circunferencia inicial de la construcción que se supondrá el resto del artículo de radio *r*.

Y puesto que el punto *N* ha de pertenecer a ambas circunferencias, también cumple $x^2 + y^2 = a^2$, igualdad que sustituida en la expresión anterior, devuelve

$$a^2 + a^2 + 2ax = r^2$$

o lo que es lo mismo $2a^2 + 2ax = r^2$

Por tanto, la abscisa de los puntos de intersección de las dos circunferencias es

$$x = \frac{r^2 - 2a^2}{2a}$$

A fin de obtener la ordenada de dichos puntos, se sustituye la expresión anterior en la ecuación de la circunferencia de centro *C*, quedando

$$\left(\frac{r^2 - 2a^2}{2a} + a\right)^2 + y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r^2 - 2a^2 + 2a^2}{2a}\right)^2 + y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \frac{r^4}{4a^2} + y^2 = r^2$$

$$\Rightarrow y^2 = r^2 - \frac{r^4}{4a^2}$$

obteniéndose por tanto $y = \pm\sqrt{r^2 - \frac{r^4}{4a^2}} = \pm\frac{r}{2a}\sqrt{4a^2 - r^2}$.

Los puntos de intersección son, entonces

$$N = \left(\frac{r^2 - 2a^2}{2a}, \frac{r}{2a}\sqrt{4a^2 - r^2}\right) \text{ y } N' = \left(\frac{r^2 - 2a^2}{2a}, -\frac{r}{2a}\sqrt{4a^2 - r^2}\right)$$

y los vectores buscados, *NC* y *NA* son, respectivamente

$$\left(-a - \left(\frac{r^2 - 2a^2}{2a}\right), \frac{-r}{2a}\sqrt{4a^2 - r^2}\right) = \left(\frac{-r^2}{2a}, \frac{-r}{2a}\sqrt{4a^2 - r^2}\right)$$

$$\text{y } \left(a - \left(\frac{r^2 - 2a^2}{2a}\right), \frac{-r}{2a}\sqrt{4a^2 - r^2}\right) = \left(\frac{4a^2 - r^2}{2a}, \frac{-r}{2a}\sqrt{4a^2 - r^2}\right)$$

Su producto escalar es por tanto $\dfrac{-4a^2r^2+r^4}{4a^2}+r^2-\dfrac{r^4}{4a^2}=0$

Con lo que la perpendicularidad y por consiguiente la tangencia quedan demostradas.

Demostración simbólica

Se muestran las sucesivas entradas introducidas en la calculadora, con las correspondientes respuestas dadas por ésta.

Obtención de los puntos de tangencia

$$\blacksquare\ (x+a)^2+y^2=r^2 \mid y^2=a^2-x^2$$
$$2\cdot a\cdot x+2\cdot a^2=r^2$$

$$\blacksquare\ \text{solve}\left(2\cdot a\cdot x+2\cdot a^2=r^2, x\right)$$
$$x=\frac{r^2}{2\cdot a}-a$$

$$\blacksquare\ \text{solve}\left((x+a)^2+y^2=r^2, y\right) \mid x=\frac{r^2}{2\cdot a}-a$$
$$y=\frac{r\cdot\sqrt{4\cdot a^2-r^2}}{2\cdot a}\ \text{and}\ \frac{r^2\cdot\left(r^2-4\cdot a^2\right)}{a^2}\le 0\ \text{or}$$
$$y=\frac{-r\cdot\sqrt{4\cdot a^2-r^2}}{2\cdot a}\ \text{and}\ \frac{r^2\cdot\left(r^2-4\cdot a^2\right)}{a^2}\le 0$$

formación de los dos vectores

$$\blacksquare\left[-a-\left(\frac{r^2}{2\cdot a}-a\right)\quad \frac{-r\cdot\sqrt{4\cdot a^2-r^2}}{2\cdot a}\right]\to v1$$
$$\left[\frac{-r^2}{2\cdot a}\quad \frac{-r\cdot\sqrt{4\cdot a^2-r^2}}{2\cdot a}\right]$$

$$\blacksquare\left[a-\left(\frac{r^2}{2\cdot a}-a\right)\quad \frac{-r\cdot\sqrt{4\cdot a^2-r^2}}{2\cdot a}\right]\to v2$$
$$\left[2\cdot a-\frac{r^2}{2\cdot a}\quad \frac{-r\cdot\sqrt{4\cdot a^2-r^2}}{2\cdot a}\right]$$

comprobación del producto escalar nulo

$$\blacksquare\ \text{dotP}(v1, v2)$$
$$\frac{r^2 \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 - r^2} \cdot \text{conj}\left(\sqrt{4 \cdot a^2 - r^2}\right)}{4 \cdot a^2} + \frac{r^2 \cdot \left(r^2 - 4 \cdot a^2\right)}{4 \cdot a^2}$$

La TI-89 trabaja directamente con valores complejos, lo que hace que la salida de la calculadora a la instrucción producto escalar no sea satisfactoria. Por ello, es necesario realizar el producto escalar elemento a elemento para obtener el resultado deseado.

$$\blacksquare\ v1[1,1] \cdot v2[1,1] + v1[1,2] \cdot v2[1,2]$$
$$0$$

Existe no obstante otra forma de evitar el inconveniente surgido, usando el siguiente razonamiento: para una sola variable, la calculadora permite obtener el resultado

$$\blacksquare\ \text{conj}\left(\sqrt{a}\right) \mid a > 0 \qquad \sqrt{a}$$

La construcción realizada para la obtención de las rectas tangentes ha de poseer dos puntos de intersección entre las dos circunferencias trazadas, y ello equivale a $4 \cdot a^2 - r^2 > 0$, por lo que $conj(\sqrt{4 \cdot a^2 - r^2}) = \sqrt{4 \cdot a^2 - r^2}$ resultando entonces

$$\blacksquare\ \frac{r^2 \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 - r^2} \cdot \sqrt{4 \cdot a^2 - r^2}}{4 \cdot a^2} + \frac{r^2 \cdot \left(r^2 - 4 \cdot a^2\right)}{4 \cdot a^2}$$
$$0$$

3. Segundo Método

Este método se basa en que un triángulo isósceles es la unión de un triángulo rectángulo y su simétrico respecto de un cateto. Se toma como base de dicho triángulo el doble del radio de la circunferencia y como lado simétrico la distancia del punto al centro. El tercer vértice es el punto donde se cortan los dos arcos, *B*, y al trazar la base *BO* se encuentra el punto de tangencia *N* donde la base corta a la circunferencia (pie de la altura)

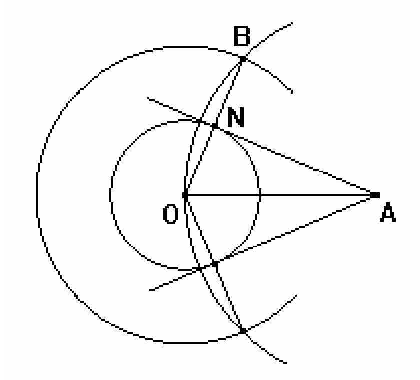


Figura 3

Realizando una adecuada elección de ejes

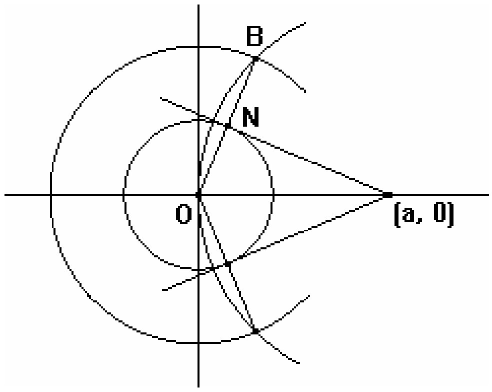


Figura 4

<u>*Demostración*</u>

$$\blacksquare\ (x - a)^2 + y^2 = a^2 \mid y^2 = 4 \cdot r^2 - x^2$$

$$4 \cdot r^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2 = a^2$$

$$\blacksquare\ \text{solve}(4\cdot r^2-2\cdot a\cdot x+a^2=a^2,x)$$
$$x=\frac{2\cdot r^2}{a}$$

$$\blacksquare\ \frac{\frac{2\cdot r^2}{a}}{2} \qquad \frac{r^2}{a}$$

$$\blacksquare\ \text{solve}(x^2+y^2=r^2,y)\,|\,x=\frac{r^2}{a}$$
$$y=\frac{-r\cdot\sqrt{a^2-r^2}}{a}\ \text{and}\ \frac{r^2\cdot(r^2-a^2)}{a^2}\le 0\ \text{or}$$
$$y=\frac{r\cdot\sqrt{a^2-r^2}}{a}\ \text{and}\ \frac{r^2\cdot(r^2-a^2)}{a^2}\le 0$$

$$\blacksquare\ \left[\frac{-r^2}{a}\quad \frac{-r\cdot\sqrt{a^2-r^2}}{a}\right]\to v1$$
$$\left[\frac{-r^2}{a}\quad \frac{-r\cdot\sqrt{a^2-r^2}}{a}\right]$$

$$\blacksquare\ \left[a-\frac{r^2}{a}\quad \frac{-r\cdot\sqrt{a^2-r^2}}{a}\right]\to v2$$
$$\left[a-\frac{r^2}{a}\quad \frac{-r\cdot\sqrt{a^2-r^2}}{a}\right]$$

$$\blacksquare\ v1[1,1]\cdot v2[1,1]+v1[1,2]\cdot v2[1,2]$$
$$0$$

4. Tercer Método

Los triángulos *AON* y *COB* son iguales ya que $AO = CO$, $BO = ON$ y el ángulo *BON* es común. Se une *A* con *O* y se traza la perpendicular por *B*. La circunferencia de radio *AO* con centro *O* nos permite hallar *C* y al unir *C* con *O* se halla el punto *N*, punto de tangencia.

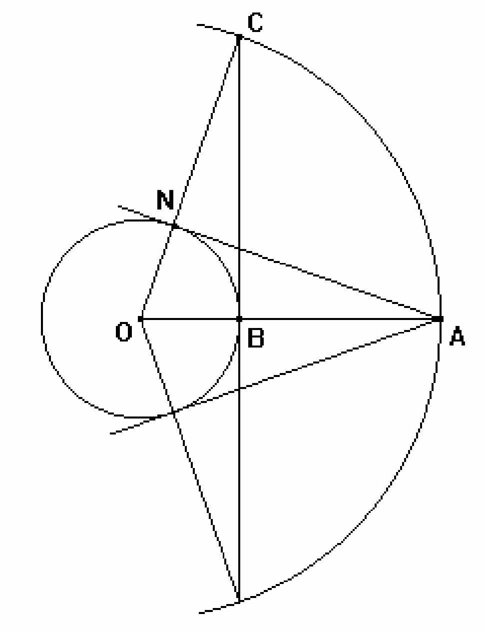


Figura 5

Realizando una adecuada elección de ejes

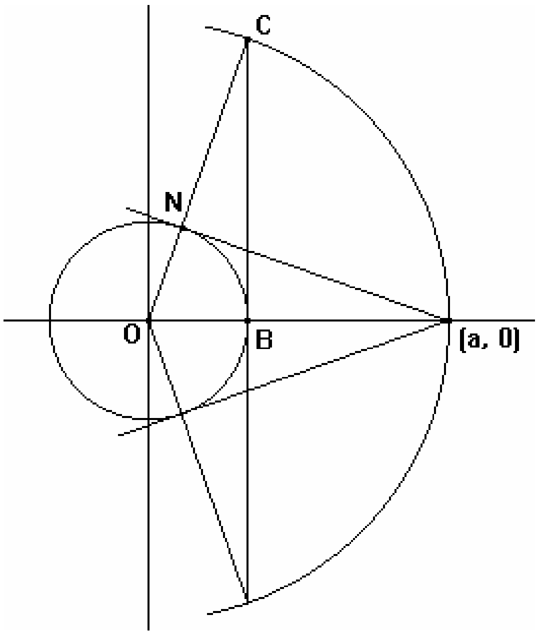


Figura 6

Demostración

$$\blacksquare\ x^2 + y^2 = a^2 \mid x = r \qquad r^2 + y^2 = a^2$$

$$\blacksquare\ \text{solve}(r^2 + y^2 = a^2, y)$$

$$y = -\sqrt{a^2 - r^2} \text{ and } r^2 - a^2 \le 0 \text{ or } y = \sqrt{a^2 - r^2} \text{ and } r^2 - a^2 \le 0$$

$$\blacksquare\ x^2 + y^2 = r^2 \mid y = \frac{x \cdot \sqrt{a^2 - r^2}}{r} \qquad \frac{a^2 \cdot x^2}{r^2} = r^2$$

$$\blacksquare\ \text{solve}\left(\frac{a^2 \cdot x^2}{r^2} = r^2, x\right)$$

$$x = \frac{-r^2}{a} \text{ or } x = \frac{r^2}{a}$$

5. Conclusiones

Como se ha podido comprobar, demostrar fácilmente teoremas o construcciones no totalmente evidentes gracias a las posibilidades de las calculadoras simbólicas es sencillo. Además, los procedimientos utilizados son asequibles para alumnos de Educación Secundaria, lo que permitiría un acercamiento de dicho alumnado a herramientas de cálculo simbólico y modos de trabajo en geometría distintos a los usuales.

Bibliografía

[1] PUIG ADAM, P. (1981): *Curso de Geometría Métrica I. Fundamentos.* Euler Editorial, Madrid.

[2] PUIG ADAM, P. (1981): *Curso de Geometría Métrica II. Complementos.* Euler Editorial, Madrid.

[3] RECIO, T. (1998): *Cálculo simbólico y geométrico.* Editorial Síntesis, Madrid.

[4] ROANES MACÍAS E. y ROANES LOZANO E. (1994): *Nuevas tecnologías en geometría.* Editorial Complutense, Madrid.

Génesis y primera formulación del Teorema Π

Francisco A. González Redondo

Departamento de Álgebra
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

Once the need for rewriting the history of the Π Theorem was advanced in a previous article, in this paper its origin and first statement by A. Vaschy is developed from J. Fourier's dimensional considerations, in the frame of the first French school of Dimensional Analysis, with significant contributions due to Bertrand, Lucas and Carvallo.

1. Introducción

En un número anterior de este *Boletín* [1] presentamos el enunciado y demostración de Edgar Buckingham del que, desde entonces: a) se conocerá como Teorema Π; b) se atribuirá a Buckingham; y c) se convertirá en el núcleo del Análisis Dimensional. La consideración de un pequeño número de 'hitos' permitía determinar las diferentes etapas en que podía dividirse la evolución histórica de esta disciplina físico-matemática: la publicación de la *Teoría analítica del Calor* de J. B. J. Fourier (1822) [2], en la que se introduce por primera vez el concepto de "dimensión" como nuevo atributo de las magnitudes físicas [3]; el propio trabajo de E. Buckingham de 1914 del Teorema Π; y la edición del *Análisis Dimensional* de P. W. Bridgman (1922) con el que nace la disciplina.

La obra de Fourier, tan relevante en Análisis Matemático, especialmente en Análisis Armónico, y en su condición de primera teoría físico-matemática, y serlo espacio-temporal de relevancia para la teoría de campos en general y para la teoría del potencial en particular, no tuvo lectores y seguidores que se interesaran durante unos cincuenta años por sus "Remarques Générales", en las que sintetizaba su novedosa aportación: concepto de exponentes dimensionales, postulado de homogeneidad dimensional, etc.

Con este marco, en el presente trabajo se presenta una primera aproximación a la evolución de los conceptos dimensionales en Francia durante el siglo XIX. Veremos que, por un lado, se capta, acepta y lamenta como idea generalizada que Fourier no había extraído las consecuencias implícitas que pueden deducirse de su 'principio de homogeneidad'. Por otro, se aplica dicho 'principio' a fenómenos concretos y a problemas específicos y no se limita a la(s) ecuación(es) fundamental(es) de una teoría física. Esta ampliación del punto de vista será determinante, y se unirá a la idea de la 'complitud' conveniente para las ecuaciones físicas.

Pero, sobre todo, el estudio de las contribuciones de diferentes científicos durante el último cuarto del siglo XIX permitirá detectar y precisar la búsqueda de un método, de una justificación matemática de carácter general, que conducirá, en Vaschy, tras diferentes ensayos previos, a la enunciación en 1892 del que veinte años más tarde alcanzaría fortuna y comenzaría a denominarse Teorema Π y sería atribuido generalizadamente a E. Buckingham.

2. El estudio de la homogeneidad de las fórmulas en Física: Bertrand

En 1822 enunciaba Fourier su principio:

Postulado de homogeneidad dimensional.

Los términos de toda ecuación física deben tener el mismo exponente de dimensión.

En Francia, un nutrido grupo de físicos e ingenieros retomaron a finales de los setenta la contribución de Fourier, desarrollando su principio de homogeneidad dimensional, analizando con mayor profundidad sus concepciones dimensionales y estudiando aspectos relacionados con éstos, tales como magnitudes y/o unidades fundamentales y derivadas, sistemas semejantes, etc.

En 1878, presenta J. Bertrand a la Academia de Ciencias de París: "Sur l'homogénéité dans les formules de Physique" [4, 5]. En él destaca la contribución de Fourier pero se sorprende y lamenta de la renuncia de éste a desarrollar toda la potencialidad de su 'principio de homogeneidad' puesto que <<lejos de utilizar la tabla de exponentes de dimensiones que da en la página 157 de su libro, para predecir la ley de ciertos fenómenos, ni siquiera se detiene para señalar la homogeneidad de las fórmulas obtenidas>>.

Es la primera idea la que considera realmente importante, ya que el hecho de que se sepa *a priori* que incluso las fórmulas inicialmente desconocidas tienen que ser homogéneas hace que pueda deducirse más de una ley física y pueda encontrarse la que considera la más sencilla y a la vez que más rigurosa de las 'demostraciones'.

A ello se dedica, estudiando, entre otros problemas, el de hallar la ley de la propagación de la electricidad en un hilo telegráfico aislado considerado indefinido:

$$T = F(V_0, V, l, R, C, E) \tag{1}$$

donde l es la distancia recorrida en el tiempo T por 'un punto' que, partiendo de un potencial V_0, alcanza en ese tiempo un potencial V, R la resistencia del hilo, C la capacidad eléctrica del hilo y E la cantidad de electricidad que para una corriente de intensidad unidad atraviesa en la unidad de tiempo una sección del hilo.

La ley debe ser homogénea, en otras palabras, debe ser una fórmula que quede inalterada por los cambios de unidades. Y llega a

$$T = \frac{l}{E}\varpi\left(\frac{V_0}{V}, lR, C\right) \tag{2}$$

de modo que esta fórmula es <<homogénea cualquiera que sea la función ϖ, pues expresa la ley más general compatible con la condición de homogeneidad>>.

Puede observarse el importante salto que representa la obtención de soluciones no monómicas y la expresión como funciones de variables que pueden ser adimensionales.

3. El Teorema de Carvallo

A partir de las ideas planteadas de forma precisa por Fourier, pero no utilizadas apenas por éste, podía desarrollarse un 'método' para obtener la ley de un fenómeno o problema físico mediante consideraciones acerca de la 'homogeneidad de las fórmulas'. Sin embargo, a principios de la década de los 90, seguía sin presentarse la formulación general de un teorema que justificase dicho método [6].

En este contexto, una comunicación verbal de 1891 de F. Lucas a la Sociedad Matemática de Francia: "Sur les équations abstraites du fonctionnement des machines" [7], animó la presentación a la Sociedad, en diciembre de ese mismo año, por parte de E. Carvallo, de otra comunicación verbal: "Demostration d'un théorème de similitude sur les fonctions des machines", publicada en la forma: "Sur une Similitude des Fonctions des Machines" [8], en la que pretendía generalizar las consideraciones de aquél desarrollando toda la potencialidad que allí había detectado.

A modo de ejemplo ilustrativo, comienza Carvallo haciendo notar cómo, durante el estudio de la ecuación que expresaba la potencia, W, de una dinamo, Lucas había dado la expresión:

$$W^2 = E^2 I^2 - \left(\frac{4\pi^2 L^2 I^4}{T^2} \right) \tag{3}$$

donde denotaba: E, fuerza electromotriz; I, intensidad de corriente; L, autoinducción; y T, período de la corriente alterna. Considerada W como función de la variable I, representa la ecuación tomando I para las abcisas y W para las ordenadas, obteniendo así una 'curva de potencia' en función de I para cada conjunto de valores de E, L y T dados.

Pero haciendo el cambio de variables

$$x = \frac{2\pi LI}{ET} \tag{4.a}$$

$$y = \frac{2\pi LW}{E^2 T} \tag{4.b}$$

que separa W e I en y y x, respectivamente, Carvallo transformó la ecuación en

$$y^2 = x^2 - x^4, \tag{5}$$

de modo que para él, esta curva es independiente de la máquina concreta y del tiempo T. Para cualquier máquina, la curva representada por (3) se deduce de (5) cambiando las escalas de las abscisas y las ordenadas de acuerdo con (4).

Este ejemplo y otros posteriores le llevan a enunciar el que puede denominarse:

Teorema de Carvallo.

Si la ecuación característica de un tipo de máquina no contiene más que tres constantes características, las curvas características de las diferentes máquinas de este tipo se deducen unas de otras mediante un simple cambio en las escalas de las abscisas y las ordenadas .

A modo de demostración introduce los siguientes desarrollos:

Sean X e Y las dos variables y A_1, A_2, ... las constantes características de la máquina. La ecuación característica es una relación que liga estas cantidades [medidas en un determinado sistema de unidades]:

$$f(X, Y, A_1, A_2, \ldots) = 0 \tag{6}$$

Para otra máquina del mismo tipo [en el mismo sistema de unidades] se tendrían nuevas constantes B_1, B_2, ..., y la nueva ecuación será

$$f(X,Y,B_1,B_2,\ldots)=0 \tag{7}$$

Para Carvallo la ecuación (7), al igual que todas las ecuaciones de la Física, es homogénea respecto a las tres magnitudes fundamentales [longitud, tiempo, masa], es decir, es independiente de la elección de las unidades que sirven para evaluarlas. Por tanto, si se eligen nuevas unidades y se representan con letras minúsculas las nuevas medidas de las cantidades representadas antes con mayúsculas, se tendrá:

$$f(x,y,b_1,b_2,\ldots)=0 \tag{8}$$

Si se supone que el número de constantes en (6) y (7) es tres, pueden elegirse tres unidades fundamentales de forma que $b_1 = A_1$, $b_2 = A_2$, y $b_3 = A_3$.

En consecuencia, efectivamente, las curvas características de las diferentes máquinas de este tipo se deducen unas de otras mediante un simple cambio en las escalas de las abscisas y las ordenadas.

En otras revistas, ya a principios de 1892, profundizó en la cuestión intentando llegar a un enunciado más claro y con una forma más general del teorema: "Sur une Similitude dans les fonctions des Machines" [9].

Estos intentos de expresar en forma de teorema matemático las consecuencias que pueden deducirse de la aceptación del principio de homogeneidad de Fourier tendrán finalmente éxito con A. Vaschy. En 1892 éste aporta la primera formulación de un enunciado general -y un esbozo de justificación matemática- del que se conocerá a partir de 1915 con el nombre de 'Teorema Π' o 'Teorema de Buckingham' [1], y que, como han considerado algunos tratadistas, debería llamarse 'Teorema de Vaschy'. Recorramos esta historia sólo parcialmente referida en alguna ocasión antes de ahora.

4. Hacia el Teorema de Vaschy

En 1890 publica A. Vaschy su *Traité d'Electricité et de Magnetisme* [11]. En el capítulo 2 "Preliminaires" da los primeros pasos hacia el enunciado de su teorema introduciendo el ejemplo siguiente.

Supone establecida una relación de cualquier forma, por ejemplo:

$$\varphi(l,u,d,g,f)=0 \tag{9}$$

en la que aparecen todas las cantidades constantes o variables, de dimensión no nula; longitud l, volumen u, densidad d intensidad de la gravedad g fuerza f.

Esta relación se puede poner en la forma general:

$$\psi\left(l, \frac{u}{l^3}, ud, \sqrt{\frac{l}{g}}, \frac{f}{udg}\right) = 0 \tag{10}$$

puesto que a cada sistema de valores de los nuevos parámetros

$$l,\ \frac{u}{l^3},\ ud,\ \sqrt{\frac{l}{g}},\ \frac{f}{udg}$$

corresponde un sistema bien determinado de valores de los parámetros primitivos l, u, d g f. Ahora bien,

$$\frac{u}{l^3} \text{ y } \frac{f}{udg}$$

tienen dimensiones nulas, mientras que:

$$l,\ ud \text{ y } \sqrt{\frac{l}{g}},$$

son, respectivamente, longitud, masa y tiempo.

Si ahora se hace variar arbitrariamente la unidad de longitud, las unidades de masa y tiempo permanecen constantes; l también variará arbitrariamente, pero las otras cuatro cantidades:

$$\frac{u}{l^3},\ ud,\ \sqrt{\frac{l}{g}},\ \frac{f}{udg}$$

permanecen constantes. Para que la ecuación $\psi = 0$ se satisfaga siempre, es preciso evidentemente que en realidad ella no contenga más que la cantidad l. Análogamente, no debe contener

$$\text{ni } ud \text{ ni } \sqrt{\frac{l}{g}},$$

y se reduce, por último, a

$$\psi_1\left(\frac{u}{l^3}, \frac{f}{udg}\right) = 0 \tag{11}$$

ecuación necesariamente homogénea, puesto que sólo contiene las magnitudes de dimensiones nulas

$$\frac{u}{l^3}, \ \frac{f}{udg}.$$

Y aunque termina afirmando que este ejemplo basta para demostrar por qué toda relación física debe ser homogénea, es decir, reducible a una ecuación que no contenga más que magnitudes de dimensiones nulas, obviamente Vaschy tiene que haberse apercibido de que no ha enunciado todavía un teorema y mucho menos lo ha demostrado, puesto que, entre otras cosas, no introduce ninguna justificación de su elección de las variables adimensionales. Sí lo ha ilustrado y ha abierto el camino para hacerlo posible, es decir, se aproxima a desarrollar en su plenitud las consecuencias que pueden deducirse de la aceptación del principio de homogeneidad de Fourier.

5. Primer enunciado y justificación del Teorema de Vaschy

En la misma revista en la que Carvallo publica su 'teorema', exactamente en el artículo que sigue a éste: "Sur les lois de Similitude en Physique" [12], escribía Vaschy:

Teorema de Vaschy (primera versión).

Sean a_1, a_2, a_3, ..., a_n cantidades físicas tales que las p primeras se expresan en términos de unidades fundamentales diferentes, y las últimas n - p cantidades se refieren a unidades derivadas a partir de las p unidades fundamentales (por ejemplo, a_1 puede ser una longitud, a_2 una masa, a_3 un tiempo, mientras que las otras (n-3) cantidades podrían ser fuerzas, velocidades, etc., en cuyo caso p=3).

Si entre estas n cantidades existe una relación

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0 \tag{12}$$

que se mantiene para cualquier elección de las unidades fundamentales, esta *relación puede transformarse en otra que solamente tenga (n-p) parámetros, v.g.*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-p}) = 0. \qquad (13)$$

Los parámetros x_1, x_2, ..., x_{n-p} son funciones monómicas de a_1, a_2, a_3, ..., a_n (por ejemplo,

$$x_1 = A a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_n^{\alpha_n}). \qquad (14)$$

Entre corchetes, a continuación, afirma que en el caso particular en el que n =5 y p=3, se estaría en el caso del 'Teorema' presentado por Carvallo.

Vaschy no dice en 1892 que los parámetros x_1, x_2, ..., x_{n-p} sean adimensionales, pero con seguridad lo da por supuesto ya que, como hemos visto, sí lo explicita en 1890 y, además, en todos los ejemplos que considera en los diferentes artículos que publica a continuación lo son: "Sur les lois de Similitude en Électricité" [13], "Sur les considérations d'homogénéité en Physique" [14], etc.

6. Enunciado general del Teorema de Vaschy

Como indiqué antes, Vaschy publica en 1896 su *Théorie de l'Électricité* [15], en la que dedica el primer capítulo a cuestiones de unidades y dimensiones. En éste (pp. 13-14) enuncia el teorema de forma más concisa y exacta en el seno de un desarrollo de sumo interés relativo a numerosas cuestiones dimensionales titulado "Sistemas absolutos de unidades".

Comienza afirmando que las fórmulas de Geometría, de Mecánica y de Física son relaciones entre números representativos de ciertas magnitudes, observando que se establecen generalmente sin fijar los tamaños intrínsecos de las unidades, y que estas relaciones deben subsistir, por tanto, cuando cambien los tamaños de las unidades fundamentales y, consecuentemente, cuando cambien los valores numéricos de las cantidades que entran en estas fórmulas. Para él, <<toda ecuación que goce de estas propiedades se denomina *homogénea* >>.

A continuación, enuncia:

Teorema de Vaschy (versión final).

Toda relación homogénea entre p cantidades a_1, a_2, a_3, ..., a_p cuyos *valores dependan de la elección de las unidades, puede reducirse a una relación que involucre (p-k) parámetros que sean combinaciones monómicas de a_1, a_2, a_3, ..., a_p y de dimensiones nulas ($L^0M^0T^0=1$) si entre las p unidades de las cantidades a_1, a_2, a_3, ..., a_p uno puede elegir k arbitrariamente, número que no puede ser mayor que el de unidades fundamentales, n .*

Para este nuevo enunciado, que fue definitivo, aporta no ya una justificación, como en 1892, sino la que considera una primera demostración. Veámosla.

Supone establecida una relación

$$\varphi\left(a_1, a_2, \ldots, a_p\right) = 0 \tag{15}$$

en la que <<los valores de las cantidades [quantités], constantes o variables, dependen de la elección de las unidades>>, por ejemplo u_1, ..., u_p.

Si se efectúa un cambio de unidades:

$$u'_1 = A_1 u_1, \ldots, \ u'_p = A_p u_p, \tag{16}$$

entonces

$$\varphi\left(\frac{a_1}{A_1}, \frac{a_2}{A_2}, \ldots, \frac{a_p}{A_p}\right) = 0 \tag{17}$$

Pero los coeficientes A_1 , ..., A_p están ligados, en general, por ciertas relaciones, y sólo un cierto número de ellos se pueden considerar como arbitrarios.

Supóngase que los p coeficientes A_1 , ..., A_p están ligados entre sí por (p-k) relaciones, de modo que se pueden considerar arbitrarios k, y expresar el resto en función de ellos:

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \ldots A_k^{\alpha_k} \\ A_{k+2} &= A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \ldots A_k^{\beta_k} \\ \ldots & \qquad \ldots\ldots. \end{aligned} \tag{18}$$

Entonces la función φ puede expresarse en la forma:

$$\psi\left(a_1,\ldots,a_k,\frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_k^{\alpha_k}},\frac{a_{k+2}}{a_1^{\beta_1}a_2^{\beta_2}\ldots a_k^{\beta_k}},\ldots\right)=0 \tag{19}$$

Esta ecuación, a partir del cambio de unidades anterior (mediante los coeficientes de transformación A_1 ..., A_p) se convierte en:

$$\psi\left(\frac{a_1}{A_1},\ldots,\frac{a_k}{A_k},\frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_k^{\alpha_k}},\ldots,\frac{a_p}{a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\ldots a_k^{\lambda_k}}\right)=0 \tag{20}$$

Y como se debe verificar, cualesquiera que sean los valores atribuidos a A_1, ..., A_k, resulta que la función ψ no debe contener coeficientes arbitrarios. Puesto que éstos sólo se dan en

$$\frac{a_1}{A_1},\ldots,\frac{a_k}{A_k}$$

la relación se reduce a:

$$\psi\left(\frac{a_{k+1}}{a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\ldots a_k^{\alpha_k}},\ldots,\frac{a_p}{a_1^{\lambda_1}a_2^{\lambda_2}\ldots a_k^{\lambda_k}}\right)=0 \tag{21}$$

donde los valores numericos de los (p -k) restantes son <<independientes de la elección del tamaño de las unidades, puesto que sus coeficientes de transformación son iguales a la unidad en virtud de (18)>>.

Por tanto, la relación homogénea entre las cantidades a_1, a_2, a_3, ..., a_p ha podido ser reducida a una relación que involucra (p-k) parámetros que son combinaciones monómicas de a_1, a_2, a_3, ..., a_p y de dimensiones nulas.

7. Consideraciones finales

A la luz de lo expuesto, pueden deducirse algunas conclusiones de valor histórico:

1) Desde 1822, en que se publica la *Teoría analítica del Calor* de Fourier, hasta la década de los setenta del siglo XIX, aparentemente al menos, el mundo científico no ha prestado interés a las breves consideraciones dimensionales de sus "Remarques Générales".

2) El Teorema de Vaschy (1892-1896) supone la primera formulación matemática de las consecuencias del Postulado de homogeneidad de Fourier.

3) En los últimos años del siglo XIX y primeros del XX se siguen publicando trabajos en los que se tratan cuestiones dimensionales y, sin embargo, el Teorema de Vaschy parece desaparecer de la escena científica hasta que lo reformule Buckingham en 1914.

4) Nuevas investigaciones históricas permitirán completar al aparente vacío entre ambos autores, cuando en un próximo trabajo analicemos las contribuciones del norteamericano J. H. Jeans y los rusos D. Riabouchinsky y A. Federmann.

Referencias

[1] González Redondo, F. A. (2000): "El Teorema Π de Buckingham: núcleo del Análisis Dimensional". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* **55** , 67-75.

[2] Fourier, J. B. J. (1822): *Theorie analytique de la chaleur* París: Firmin Didot. [Ed. cast.: *Teoría analítica del calor* . Madrid: GTAD-UPM, 1992].

[3] González de Posada, F. González Redondo, F. A. y Redondo Alvarado (1991): "El 'origen clásico' del Análisis Dimensional". *Anuario Científico 1990 del Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional* . Madrid: UPM.

[4] Bertrand, J. (1878): "Sur l'homogénéité dans les formules de Physique". *Compt. Rend. Acad. Scienc . París* **86** , 916-920.

[5] Bertrand, J. (1847): "Note sur la similitude en mécanique". *Compt. Rend. Acad. Scienc. París* **25** , 163-165.

[6] Macagno, E. (1971): "Historico-critical Review of Dimensional Analysis", en *J. Franklin Inst* .**292**, 391-402.

[7] Lucas, F. (1891): "Sur les équations abstraites du fonctionnement des machines". *Bull. Soc. Math. de France* **19** , 152-154.

[8] Carvallo, E. (1891): "Sur une Similitude des Fonctions des Machines". *La Lumiere Electrice* **42** , 506-507.

[9] Carvallo, E. (1892): "Sur une Similitude dans les Fonctions des Machines". *Annales Télégraphiques* **19** , 21-24.

[10] Esnault-Pelterie, R. (1945): *L'Analyse dimensionnelle.* Lausanne: Gauthier-Villars. (2ª ed.: París: Gauthier-Villars. 1946).

[11] Vaschy, A. (1890): *Traité d'Electricité et de Magnetisme.* París: Baudry.

[12] Vaschy, A. (1892a): "Sur les lois de Similitude en Physique". *Annales Télégraphiques* **19** , 25-28.

[13] Vaschy, A. (1892b): "Sur les Lois de Similitude en Électricité". *Annales Télégraphiques* **19** , 189-211.

[14] Vaschy, A. (1892c): "Sur les considérations d'homogénéité en Physique". *Compt. Rend. Acad. Scienc . París* **114** 1416-1419.

[15] Vaschy, A. (1896): *Théorie de L'Électricité.* París: Baudry.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc, deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo especificado a continuación.

Copias en papel

Se enviarán por duplicado, escritas con un procesador de texto en hojas de tamaño DIN A-4. El formato debe ser 17cm x 12.8cm en 11 puntos.

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LATEX (en este último caso deberá usarse estilo “article” y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Los artículos comenzarán con el título (en minúsculas grandes), nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el Boletín), e-mail si se tiene y “abstract” de unas líneas en inglés. Se terminará el artículo con la bibliografía (y nada más después de ella).

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deban ser reproducidas (Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas).

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: “Problema número (Boletín número)”, tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo el archivo del documento en el procesador de texto utilizado.

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

ADQUISICIÓN DE NÚMEROS ATRASADOS DE NUESTRO BOLETÍN

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de mil pesetas ejemplar.

Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58 y 59.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de *la "Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas"*, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)
C/ Rector Royo Villanova, s/n - Ciudad Universitaria
28040 Madrid

En la carta se incluirá:

– el número o números a adquirir,
– la dirección a donde se han de enviar,
– el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.