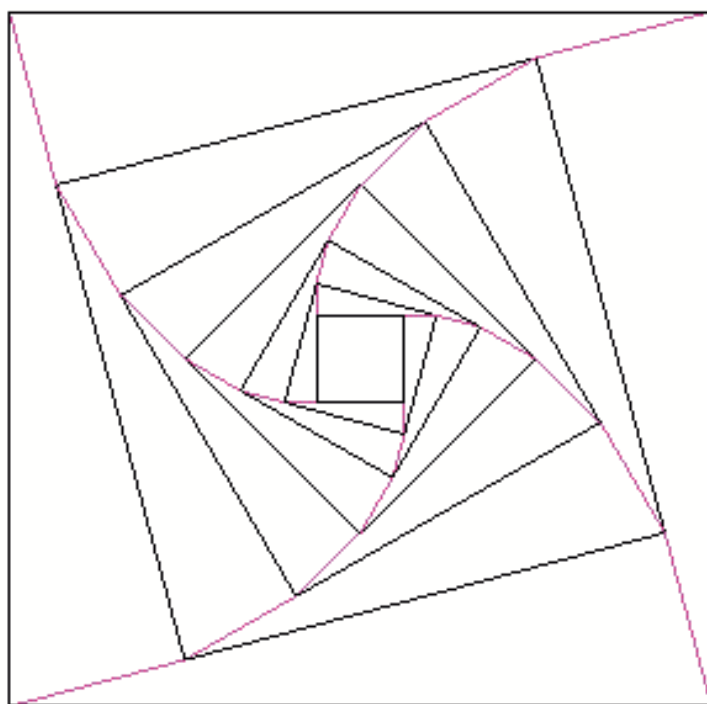


# **SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS**



**BOLETÍN N.º 58  
JUNIO DE 2001**

**Número especial dedicado al Profesor P. Abellanas**

## ÍNDICE

|                                                                                                                                                                                      | <i>Págs.</i> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| Acta de la Asamblea General .....                                                                                                                                                    | 5            |
| XXXVII Olimpiada Matemática Española: Primera Fase - Madrid .....                                                                                                                    | 8            |
| Problemas Propuestos en la Primera fase de la XXXVII O.M.E. en el<br>Distrito de Madrid .....                                                                                        | 10           |
| XXXVII Olimpiada Matemática Española: Segunda Fase .....                                                                                                                             | 12           |
| Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas convocado por<br>la Universidad Politécnica de Madrid con motivo del Año Mundial<br>de las Matemáticas – Tercer Trimestre .....   | 14           |
| Problemas Propuestos en el Concurso de Resolución de Problemas de<br>Matemáticas convocado por la U.P.M. con motivo del Año Mun-<br>dial de las Matemáticas – Tercer Trimestre ..... | 16           |
| Recensiones en “Zentralblatt für Didaktik der Mathematik” .....                                                                                                                      | 18           |
| Título Propio de “Experto en Educación Matemática” .....                                                                                                                             | 20           |
| Numero especial dedicado al profesor P. Abellanas .....                                                                                                                              | 23           |
| Presentación del Profesor <i>Peter Schofield</i> .....                                                                                                                               | 23           |
| Drawing Network Graphs and Digraphs with DERIVE 5,<br>por <i>Peter Schofield</i> .....                                                                                               | 24           |
| Mis recuerdos de Don Pedro,<br>por <i>Gonzalo Calero Rosillo</i> .....                                                                                                               | 41           |
| El mejor estudiante,<br>por <i>Ignacio Sols Lucía</i> .....                                                                                                                          | 43           |
| Geometría: Espacio, Forma, Posición,<br>por <i>J. M. Aroca Hernández-Ros</i> .....                                                                                                   | 48           |
| Sobre la Ley de Hardy-Weinberg,<br>por <i>Alberto Pérez de Vargas Luque</i> .....                                                                                                    | 71           |
| D. Pedro Abellanas y la falsa moneda,<br>por <i>Tomás Recio y Luis Miguel Pardo</i> .....                                                                                            | 78           |
| Instrucciones para el envío de originales .....                                                                                                                                      | 94           |
| Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín .....                                                                                                                            | 95           |
| Boletín de inscripción .....                                                                                                                                                         | 96           |

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

**Recensiones de los artículos aparecen en  
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik**

La confección de ese número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

GRÁFICAS LOUREIRO, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).  
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS  
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)  
C/ Rector Royo Villanova, s/n  
Ciudad Universitaria  
28040 - Madrid  
Teléf. y fax: 91 394 6248

Información a través de Internet:  
[http://www.cita.es/Sociedad\\_Puig\\_Adam/index.htm](http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm)

## **JUNTA DIRECTIVA**

### **Presidente:**

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

### **Vicepresidentes:**

|                                |                      |
|--------------------------------|----------------------|
| EUGENIO ROANES MACÍAS          | (Madrid)             |
| JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ      | (Castilla-León)      |
| VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES | (Castilla-La Mancha) |

### **Vocales:**

|                             |                              |
|-----------------------------|------------------------------|
| JULIO FERNÁNDEZ BIARGE      | (Redacción de publicaciones) |
| JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE | (Relaciones Institucionales) |
| EUGENIO ROANES LOZANO       | (Gestión de publicaciones)   |
| MARTÍN GARBAYO MORENO       | (Actividades y concursos)    |

### **Secretario:**

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

### **Vicesecretario:**

MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

### **Tesorero:**

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

### **Bibliotecario:**

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

### **Adjunta a la presidencia:**

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA  
ENRIQUE RUBIALES CAMINO

# Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2001 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 21 de abril de 2001, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil uno. Se desarrolló con arreglo al siguiente:

## ORDEN DEL DÍA

### **1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.**

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

### **2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.**

El Presidente informa sobre las actividades realizadas y por realizar:

*a)* Se informa que el sábado 17 de junio de 2000 se celebró, con el éxito ya tradicional, el XVIII Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados. Como en años anteriores, los ejercicios tuvieron lugar en la Facultad de Matemáticas y la entrega de premios en la E.U. de Biblioteconomía. Los ganadores no pudieron asistir a la Olimpiada Rioplatense por la premura de tiempo con que llegó la confirmación de la ayuda para el viaje de la Consejería de Educación de la CAM.

*b)* Se anuncia que el XIX Concurso de Resolución de problemas se celebrará, con la misma estructura, el sábado 23 de junio de 2001. En esta ocasión se cuenta con el patrocinio de 100.000 ptas para premios de Texas Instruments, y la confianza en que la ayuda de la Consejería para el Viaje a la Olimpiada Rioplatense se confirme con suficiente antelación.

c) Se informa de que, como en años anteriores, la Sociedad colaboró con la Real Sociedad Matemática Española en la organización de la Olimpiada Matemática, habiendo obtenido nuestros nueve representantes seis medallas.

d) También se comunica que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 55, 56 y 57 del *Boletín*, de los cuales el último se dedicó monográficamente, como estaba previsto, al Profesor Abellanas. Ante el elevado número de trabajos enviados por colaboradores y discípulos, el número 58 del *Boletín* también estará dedicado a recordar a D. Pedro.

e) Se constata que el *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* ha continuado recensionando positivamente los artículos publicados. Se apunta, además, que aunque aún no ha aparecido ninguna recensión en *Mathematical Reviews*, desde esta institución sí nos han solicitado algunos números que no les habían llegado, por lo que cabe suponer que se publicarán en breve.

f) Se informa del éxito de las tres reuniones científicas en las que ha participado la Sociedad durante el año 2000: la Sesión conmemorativa del Centenario del nacimiento de D. Pedro Puig Adam, organizada el 7 de junio en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, el AISC'2000 Fifth International Conference "Artificial Intelligence and Symbolic Computation", que tuvo lugar en Madrid del 17 al 19 de julio, y el II Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1945: Cabrera, Cajal, Torres Quevedo", celebrado en Yaiza (Lanzarote) durante los días 1, 2 y 3 de agosto.

g) Se anuncia que la Sociedad participará en el III Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1945: Cabrera, Cajal, Torres Quevedo", que tendrá lugar en Lanzarote durante los días 10, 11 y 12 de julio de 2001, junto con la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas y la Real Sociedad Matemática Española.

### **3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.**

El Tesorero, D. Alberto Aizpún, reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería, explicando detalladamente los ingresos apuntados y los gastos efectuados, quedando aprobadas las cuentas por unanimidad.

Complementariamente, D. Eugenio Roanes Macías informa de que las cuentas del AISC'2000 arrojarán al cierre superávit (explicitando con agradecimiento la subvención de 100.000 ptas recibida de Texas Instruments).

#### **4. Elección de nuevos cargos directivos.**

Aunque no ha lugar, por no producirse ningún cese, el Presidente somete a la Asamblea la conveniencia de nombrar Adjunto a la Presidencia a quien años atrás fue nuestro Secretario, D. Enrique Rubiales Camino, lo que se aprueba por unanimidad.

#### **5. Asuntos de Trámite.**

Se acuerda no conservar por más tiempo, por innecesario, las copias de los recibos emitidos hace cinco o más años y que custodiaba D. Alberto Aizpún.

#### **6. Ruegos y Preguntas.**

D. Eugenio Roanes Macías plantea la oportunidad de solicitar a la UCM una cuenta de correo electrónico para la Sociedad, así como para su página web. Se le ruega realice las gestiones oportunas en este sentido.

De nuevo, D. Eugenio Roanes pregunta acerca de la conveniencia de que comience a operar el Comité Editorial para el *Boletín*. Se concluye que, momentáneamente y ante los numerosos artículos actualmente pendientes de publicación, la selección y revisión de artículos se siga realizando como hasta el presente.

Llegados a este punto, el Presidente levanta la sesión a las doce horas, cuarenta y cinco minutos del día de la fecha arriba indicada.

*V.º B.º El Presidente*

*El Secretario*

# XXXVII Olimpiada Matemática Española

## Primera Fase - Madrid

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la "XXXVII Olimpiada Matemática Española" correspondientes al curso 2000-2001 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 19 y 20 de Enero de 2001.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio* y se desarrolla en dos fases: la Primera tiene lugar en distintos distritos; este año, tres de ellos corresponden a la Comunidad de Madrid, que cuenta con cinco Universidades estatales, además de las privadas.

Los tres ganadores de cada distrito reciben un Diploma acreditativo de la Real Sociedad Matemática Española y son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio para la concesión de un premio en metálico que este año es de 60.000, 45.000 y 35.000 pesetas para los ganadores de cada Distrito, algo más que en años anteriores.

Los alumnos premiados son invitados a participar en la Segunda Fase, que este año tendrá lugar en **Murcia**, del 22 al 25 de Marzo. En ella se entregarán 6 Medallas de Oro, 12 de Plata y 18 de Bronce. Las medallas de oro llevarán anejas premios en metálico de 100.000 pesetas.

Con los mejores clasificados en esa segunda fase, se formará el equipo que representará a España en la 42<sup>o</sup> *Olimpiada Matemática Internacional* que se celebrará en **Washington** del 1 al 14 de Julio de 2001 y en la *XVI Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas* que tendrá lugar en **El Salvador**, en Septiembre.

Las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de tres horas y media de duración cada una, en las que se propusieron seis problemas, cuyos enunciados damos en este mismo número de nuestro Boletín. Las pruebas de los tres distritos que corresponden este año a todas las Universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurrieron 72 alumnos: un número bajo en comparación con los de años anteriores.

Cada problema se calificó con un máximo de **7 puntos**, como en la mayor parte de las competiciones internacionales y como ya se hizo el curso anterior. De este modo, había una posibilidad teórica de obtener **42 puntos**.

Damos a continuación los nombres de los alumnos premiados en los distritos de Madrid **A**, **B** y **C**, ordenados por puntuaciones decrecientes:



|             |                                                                                                     |                  |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| <b>1º A</b> | <b>D. Fernando CRUZ ROBLEDILLO,</b><br>de C.O.U. del I.E.S. “Cervantes” de Madrid .....             | <b>38 puntos</b> |
| <b>1º B</b> | <b>D. José CAPILLA OSORIO,</b><br>de 2º de Bach. del I.E.S. “San Juan de la Cruz” de Madrid .....   | <b>33 puntos</b> |
| <b>1º C</b> | <b>D. Ignacio CRUZ CARIDAD,</b><br>de C.O.U. del Liceo Francés de Madrid .....                      | <b>32 puntos</b> |
| <b>2º A</b> | <b>D. Javier COPPOLA RODRÍGUEZ,</b><br>de 1º de Bach. del Colº “Santa Mª del Yermo” de Madrid ..... | <b>31 puntos</b> |
| <b>2º B</b> | <b>D. Luis HERNÁNDEZ CORBATO,</b><br>de 4º de E.S.O. en el I.E.S. “Fortuny” de Madrid. ....         | <b>31 puntos</b> |
| <b>2º C</b> | <b>D. David GARCÍA STRANZ,</b><br>de 2º de Bach. del Colegio “Bérriz” de Madrid .....               | <b>26 puntos</b> |
| <b>3º A</b> | <b>D. Fernando ATANASIO NEGRETE,</b><br>del C.O.U. del Colegio “Joyfe” de Madrid .....              | <b>25 puntos</b> |
| <b>3º B</b> | <b>D. Carlos FADÓN PERLINES,</b><br>de C.O.U. del I.E.S. “Cervantes” de Madrid .....                | <b>25 puntos</b> |
| <b>3º C</b> | <b>D. Carlos BARRAGÁN DEL REY,</b><br>de 1º de Bach. del Colegio “Jesús María” de Madrid .....      | <b>24 puntos</b> |

Haremos notar que **D. Fernando Cruz Robledillo** (1ºA) ya participó en la XXXVI Olimpiada Matemática, siendo alumno de 3º de B.U.P. y se clasificó en segundo lugar de Madrid B, obteniendo Medalla de Plata en la fase final celebrada en Palma de Mallorca. También ocupó el primer puesto en el Nivel I de nuestro XVI Concurso de Resolución de Problemas de 1998, el primer puesto en el Nivel III del XVIII de 2000 y participó en la VII O. M. Rioplatense. **D. David García Stranz** (2º C) se clasificó en cuarto lugar del Nivel III en nuestro XVIII Concurso de 2000.

Como todos los años, puede comprobarse que los Centros de procedencia de los alumnos premiados son, en su mayoría, los mismos que en otros anteriores, lo que prueba que en ellos se realiza una encomiable labor de estímulo y preparación. Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

En este mismo Boletín, damos los enunciados de esos problemas y, junto con cada uno, las puntuaciones medias alcanzadas en él, por todos los participantes y por los nueve premiados, así como el número de soluciones calificadas con 6 o con 7, que consideramos aceptables.

*J.F.B.*

# Problemas Propuestos en la Primera Fase de la XXXVII O.M.E. en los Distritos de Madrid

## Problema 1º:

Halla el número natural  $n$  que es el producto de los primos  $p$ ,  $q$  y  $r$ , sabiendo que

$$rq + p^2 = 676 \text{ y } r - q = 2p.$$

*Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 3,5*

*Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 5,6*

*Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 72): 27*

## Problema 2º:

Un cristalero dispone de una pieza de vidrio de forma triangular. Usando sus conocimientos de geometría, sabe que podría cortar de ella un círculo de radio  $r$ . Demuestra que, para cualquier número natural  $n$ , de la pieza triangular puede obtener  $n^2$  círculos de radio  $r/n$  (suponiendo que se puedan hacer siempre los cortes perfectos).

*Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,0*

*Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 5,4*

*Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 72): 8*

## Problema 3º:

Nueve personas han celebrado cuatro reuniones diferentes sentados alrededor de una mesa circular. ¿Han podido hacerlo sin que existan dos de esas personas que se hayan sentado una junto a otra en más de una reunión? Razona la respuesta.

*Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,4*

*Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 1,8*

*Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 72): 13*

**Problema 4º:**

Consideramos el conjunto  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  de los números naturales y la aplicación  $f: N \rightarrow N$  que cumple las dos siguientes condiciones:

a)  $f(f(n)) = n$ , para todo  $n \in N$

b)  $f(f(n)+1) = n-1$ , si  $n$  es par ;  $f(f(n)+1) = n+3$ , si  $n$  es impar

Determina el valor de  $f(n)$  para cada  $n \in N$  observando previamente que  $f$  es biyectiva y que, al no ser nunca  $f(f(n)+1) = 2$ , tiene que ser  $f(1) = 2$ .

*Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,9*

*Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 5,7*

*Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 72): 11*

**Problema 5º:**

Consideremos los siguientes 27 puntos de un cubo: el centro (1), los centros de las caras (6), los vértices (8) y los centros de las aristas (12). Coloreamos cada uno de esos puntos de azul o de rojo. ¿Puede hacerse de modo que no haya tres puntos del mismo color alineados? Demuéstralo.

*Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,3*

*Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 3,8*

*Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 72): 4*

**Problema 6º:**

Un condenado queda en libertad cuando alcance el final de una escalera de 100 escalones. Pero no puede avanzar a su antojo, puesto que está obligado a subir un solo escalón cada día de los meses impares y a bajar un escalón cada día de los meses pares. Comienza el 1 de enero de 2001. ¿Qué día quedará en libertad? ¿Qué día quedaría en libertad si la escalera tuviera 99 escalones?

*Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 2,8*

*Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 6,2*

*Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 72): 17*

# XXXVII Olimpiada Matemática Española

## Segunda Fase

La fase nacional de la XXXVII Olimpiada Matemática Española se ha celebrado en esta ocasión en la Región de Murcia. En la organización, han colaborado la Universidad de Murcia y la Politécnica de Cartagena, donde tuvo lugar el acto de entrega de premios.

Las sesiones de problemas se desarrollaron el viernes 23 de marzo, en Murcia, y en la mañana del sábado 24 en el Centro de Alto Rendimiento Infanta Cristina, en Los Narejos, lugar en que se alojaban los participantes. Se propusieron los siguientes problemas:

### Problema 1

Probar que la gráfica del polinomio  $P(x)$  es simétrica respecto del punto  $A(a,b)$  si y sólo si existe un polinomio  $Q(x)$  tal que:  $P(x) = b + (x-a)Q((x-a)^2)$

Media: 0,39 Desviación: 1,039

### Problema 2

Sea  $P$  un punto interior del triángulo  $ABC$ , de modo que el triángulo  $ABP$  verifica:  $AP=BP$ . Sobre cada uno de los otros dos lados de  $ABC$  se construyen exteriormente triángulos  $BQC$  y  $CRA$ , ambos semejantes al triángulo  $ABP$  cumpliendo:  $BQ=QC$  y  $CR=RA$ . Probar que los puntos  $P$ ,  $Q$ ,  $C$  y  $R$  o están alineados o son los vértices de un paralelogramo.

Media: 2,33 Desviación: 1,819

### Problema 3

Se tienen cinco segmentos de longitudes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  y  $a_5$  tales que con tres cualesquiera de ellos es posible construir un triángulo. Demostrar que al menos uno de esos triángulos tiene todos sus ángulos agudos.

Media: 1,3 Desviación: 2,267

### Problema 4

Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla  $3 \times 3$ . Después, se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas de izquierda a derecha y los tres que se leen en columnas de arriba abajo. ¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?

Media: 2,58 Desviación: 2,362

### Problema 5

ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia de radio 1 de modo que AB es un diámetro y el cuadrilátero admite circunferencia inscrita. Probar que  $CD \leq 2\sqrt{5} - 4$

Media: 0,29 Desviación: 1,145

### Problema 6

Determinar la función  $f : N \rightarrow N$  (siendo  $N = \{1,2,3,\dots\}$  el conjunto de los números naturales) que cumpla, para cualesquiera  $s, n$  pertenecientes a  $N$ , las siguientes condiciones:

$$f(1) = f(2^s) = 1 \text{ y si } n < 2^s \text{ entonces } f(2^s + n) = f(n) + 1$$

Calcula el valor máximo de  $f(n)$  cuando  $n \leq 2001$ . Hallar el menor número natural  $n$  tal que  $f(n)=2001$ .

Media: 1,34 Desviación: 2,085

### Alumnos premiados

Recibieron Medalla de Oro los alumnos:

**Javier Cópola Rodríguez**, de 1º de Bachillerato (Madrid)

**Martí Prats Soler**, de 2º de Bachillerato (Cataluña)

**Luis Hernández Corbato**, de 4º de E.S.O (Madrid)

**Sergio Milán López**, de 1º de Bachillerato (Cataluña)

**Ignacio Cascudo Pueyo**, de COU (Asturias)

**Miquel Oliu Bartón**, de 2º de Bachillerato (Cataluña)

El primer Medalla de Oro, **Javier Cópola Rodríguez**, que fue en la fase local segundo premio por Madrid, tiene nacionalidad uruguaya, y participará en la próxima Olimpiada Internacional representando a su país. Por eso, el equipo español en la 42 Olimpiada Internacional, que se celebrará en Washington en la primera quincena de julio próximo, se completa con **Joaquín Cevallos Morales**, de Cataluña, que obtuvo la primera Medalla de Plata.

Entre los doce alumnos merecedores de Medalla de Plata figuraban los madrileños **Ignacio Cruz Caridad**, **Carlos Barragán del Rey** y **Fernando Cruz Robledillo**. Además, recibieron Medalla de Bronce José Capilla Osorio y Carlos Fadón Perlins

*María Gaspar*

# Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas convocado por la Universidad Politécnica de Madrid con motivo del Año Mundial de las Matemáticas

## TERCER TRIMESTRE

Como ya hemos informado en números anteriores, el *Comité de la Universidad Politécnica de Madrid para el Año Mundial de las Matemáticas* ha venido celebrando a lo largo del año 2000 un *Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas*, en el que podían participar todos los alumnos matriculados en esa Universidad, en forma individual o en equipos.

Cada mes se han propuesto cuatro problemas, cuyos enunciados aparecían en los tablones de anuncios y en la página *web* del Comité y los participantes le enviaban sus soluciones, por el correo interno de la Universidad o por el electrónico, durante el mes siguiente al de su publicación.

El Jurado nombrado por el Comité ha calificado y seleccionado las soluciones recibidas en el último trimestre del año, proponiendo, como en los anteriores, la concesión de un Primer Premio de 100.000 pesetas, de un Segundo Premio de 50.000 y de tres accésits, acompañados de algún obsequio de libros.

Los enunciados de los problemas propuestos en el tercer trimestre pueden verse en otra sección de este mismo Boletín.

El día 25 de Enero ha tenido lugar la entrega de los premios correspondientes al tercer trimestre. Presidió el acto, con el que se clausuraban las actividades del *Año Mundial de las Matemáticas* organizadas por la U.P.M., su vicerrector, Ilmo. señor don Adolfo de Francisco, quien pronunció unas palabras, así como don Julio Fernández Biarge, presidente del jurado, y don José Luis Montañés García, director de la E.T.S.I. Aeronáuticos, en cuyos locales se celebró el acto.

El Primer Premio correspondió a **Javier Música de la Rivera** (de la E.U.I.T. Topográfica). El Segundo Premio, a **Alvaro Navarro Tovar** (de la E.T.S.I de Telecomunicación). Los tres accésits fueron para **Andrés Tallos Tanarro**, **Miguel Faldón Perlines** y **Miguel Lobo López**.

Fueron finalistas: **Javier López García**, **José Ángel Avila Rodríguez** con **Ángel Núñez Mencías**, **Andrés Hierro García Esteban**, **Antonio Hernando Esteban**, **Manuel Carranza García** y **Manuel Pardo Martín** con **Francisco de Asís Ribera Martín**.

El Jurado acordó otorgar también premios a los alumnos que con mayor constancia han enviado soluciones correctas a lo largo de todo el Concurso. Para estos premios, resultaron prácticamente igualados, pero muy destacados del resto de los participantes, **Javier López García** (de la E.T.S.I. de Telecomunicación), **Alvaro Navarro Tovar** (también de la E.T.S.I de Telecomunicación) y **Javier Múgica de la Rivera** (de la E.U.I.T. Topográfica).

# Problemas Propuestos en el Concurso de Problemas de la Universidad Politécnica de Madrid con motivo del “2000, Año Mundial de las Matemáticas”

## TERCER TRIMESTRE

### Octubre, 1º:

Demostrar que los números de la serie 16, 1156, 111556, 11115556, ... que se van obteniendo intercalando 15 entre las cifras centrales, son siempre cuadrados perfectos.

### Octubre, 2º:

En el concurso de resolución de problemas de matemáticas convocado por la UPM todos los problemas han sido resueltos por algún estudiante, pero ninguno los ha resuelto todos. Probar que existen dos estudiantes  $E_1$  y  $E_2$  y dos problemas  $P_1$  y  $P_2$  tales que  $E_1$  ha resuelto  $P_1$  pero no ha resuelto  $P_2$  mientras que  $E_2$  ha resuelto  $P_2$  y no ha resuelto  $P_1$  (la solución ha de ser válida para cualquier número,  $n$ , de problemas  $n \geq 2$ ).

### Octubre, 3º:

Un ortoedro de madera se corta con una sierra y la sección plana resultante es un hexágono regular. Probar que el ortoedro necesariamente era un cubo.

### Octubre, 4º:

En el plano se considera un pentágono convexo cuyos vértices tienen coordenadas enteras. Probar que si las longitudes de los lados son números enteros, entonces el perímetro del polígono es un número par. Nota: la propiedad es cierta para cualquier polígono convexo que cumpla las hipótesis.

### Noviembre, 1º:

Dada la sucesión 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, ... hallar una expresión explícita para el término  $a_n$  en función de  $n$ . Nota: se valorará la elegancia de la fórmula encontrada.



**Noviembre, 2º:**

Sea un conjunto  $S$  de puntos en el plano tales que el triángulo formado por 3 puntos cualquiera de  $S$  tiene área  $\leq 1$ . Probar que existe un triángulo de área  $\leq 4$  que contiene a todos los puntos de  $S$ .

**Noviembre, 3º:** □

Un tablero  $7 \times 7$  se cubre con 16 piezas rectangulares  $3 \times 1$  y una pieza cuadrada  $1 \times 1$ . ¿Dónde puede estar colocada la pieza cuadrada?

**Noviembre, 4º:**

Un rectángulo  $6 \times 6$  se embaldosa con 18 piezas rectangulares  $2 \times 1$ . Probar que existe una recta que corta al rectángulo grande sin cortar ninguna de las piezas del embaldosado.

**Diciembre, 1º:**

Sea  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} - \{0\}$  una función que satisface las siguientes propiedades:

- $f(1) \neq 1$
- $f(x+y) f(x-y) = (f(x) f(y))^2$ .

Probar para todo número entero  $x$  que  $\log_{f(1)} f(x)$  es un cuadrado perfecto.

**Diciembre, 2º:**

Se considera un cubo de lado 1. Determinar si tiene secciones cuadradas de lado mayor que 1.

**Diciembre, 3º:**

Se llama partición ordenada de un número natural  $n \neq 0$  a toda  $s$ -tupla ordenada de números naturales distintos de cero  $(a_1, a_2, \dots, a_s)$  tal que  $n = a_1 + a_2 + \dots + a_s$ , siendo  $s$  cualquier número natural mayor que 0. Dados dos números naturales  $n$  y  $k$  ( $0 < k \leq n$ ), se considera el conjunto  $P$  de particiones ordenadas de  $n$  que contienen al menos una vez a  $k$ . Calcular el número total de apariciones de  $k$  en las particiones del conjunto  $P$ .

**Diciembre, 4º:**

Describir un método para obtener todos los números naturales  $n$  que cumplen:

- $n$  es un número de 10 cifras (decimales) y todas ellas son distintas
- $2n$  también es un número de 10 cifras y todas ellas son distintas.

# Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La prestigiosa revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

## RECENSIONES PUBLICADAS EN EL VOL. 32 (6) DE 2000

- #4369 (sección G30). Una aplicación de una idea arquimediana, por *Juan A. Aledo y Juan C. Cortés*, Bol. Soc. Puig Adam 54 (Feb 2000), págs. 58-68.
- #4503 (sección H45). Identidades de la trigonometría circular e hiperbólica a partir del álgebra matricial, por *Juan C. Cortés y Gema Calbo Sanjuán*, Bol. Soc. Puig Adam 54 (Feb 2000), págs. 59-66.
- #4539 (sección I30). Algunas representaciones radicales infinitas de los números naturales, por *Juan C. Cortés López*, Bol. Soc. Puig Adam 54 (Feb 2000), págs. 29-38.
- #4573 (sección I74). Differential equations as a teaching topic in school?, por *Karl\_Heinz Keunecke*, Bol. Soc. Puig Adam 54 (Feb 2000), págs. 18-28.
- #4581 (sección I90). Iterando  $4x(1-x)$  de forma exacta, por *Nicolás Rosillo Fernández*, Bol. Soc. Puig Adam 54 (Feb 2000), págs. 39-45.
- #4637 (sección K54). Sobre las ideas y conceptos del cálculo de probabilidades en los adolescentes, por *Juan José Prieto Martínez*, Bol. Soc. Puig Adam 54 (Feb 2000), págs. 46-57.
- #4689 (sección M50). El teorema  $\Pi$  de Buckingham: núcleo del Análisis Dimensional, por *Francisco A. González Redondo*, Bol. Soc. Puig Adam 55 (Jun. 2000), págs. 67-75.

- #4725 (sección M60). Dynamic Mathematical Modeling as a student activity, por *L. Carl Leinbach*, Bol. Soc. Puig Adam 55 (Jun. 2000), págs. 43-57.
- #4751 (sección M80). Consideraciones áureas en una figura geométrica, por *José Aldeguer Carrillo*, Bol. Soc. Puig Adam 55 (Jun. 2000), págs. 77-84.

#### **RECENSIONES PUBLICADAS EN EL VOL. 33 (1) DE 2001**

- #0013 (sección A30). Sobre los maestros de Puig Adam, por *Javier Peralta*, Bol. Soc. Puig Adam 56 (Oct. 2000), págs. 41-54.
- #0014 (sección A30). Algunas consideraciones en torno a la Automática de Torres Quevedo, por *Francisco González Redondo*, Bol. Soc. Puig Adam 56 (Oct. 2000), págs. 65-71
- #0181 (sección C43). Sobre las tareas principales del profesor en un proceso de enseñanza y aprendizaje en la E.S.O.: asertividad y capacidad matemática, por *Juan José Prieto Martínez*, Bol. Soc. Puig Adam 56 (Oct. 2000), págs. 80-90.

# Título Propio de “Experto en Educación Matemática”

La Facultad de Matemáticas de la Univ. Complutense de Madrid (UCM) continúa ofreciendo el Título Propio de “Experto en Educación Matemática”.

**Objetivo del curso:** actualización científica y formación en aspectos didácticos en diferentes campos de la Matemática. La Facultad pretende con ello establecer un marco que dé cauce al interés creciente en estos temas mostrado por profesionales de diversa procedencia y contribuir a un debate permanente sobre orientaciones y reformas de la enseñanza de la matemática en todos sus niveles. La titulación exigida para acceder al curso es la de Licenciado en Ciencias o Ingeniero Superior.

**Horario:** tardes, de lunes a viernes, durante el año académico 2001/2002.

**Matrícula:** El coste de matriculación de cada crédito es de 2000 pesetas. Es posible matricularse de cualquier número de materias del programa. El plazo de matrícula se limita a una semana del mes de septiembre, que se anunciará más adelante. (Información en la oficina de la Facultad de Ciencias Matemáticas, tel. 91 394 4616, y en Internet en la siguiente dirección: <http://www.mat.ucm.es>)

Este Título Propio consta de dos tipos de asignaturas o cursos:

- a) *cursos de actualización didáctica*, en aspectos directamente relacionados con la enseñanza de la matemática (cursos 1 al 9 del listado siguiente), y
- b) *cursos de actualización científica* (para licenciados no especialistas) en diferentes campos de la matemática que sean de particular interés por sus posibles implicaciones y usos en la enseñanza (cursos 10 al 23).

## PROGRAMA DEL CURSO

### a) ACTUALIZACION DIDÁCTICA

1. MATEMÁTICAS POR ORDENADOR: APLICACIONES EDUCATIVAS, por Eugenio Roanes Macías (UCM) y Eugenio Roanes Lozano (UCM). 40 horas, 4 créditos.

2. LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS, por María Paz Bujanda Jáuregui (UCM). 20 horas; 2 créditos.
3. LA UTILIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA NO UNIVERSITARIA DE ALGUNOS RESULTADOS NO ELEMENTALES, por Joaquín Hernández Gómez (UCM). 30 horas; 3 créditos.
4. COMPRENDER, PENSAR Y TRABAJAR EN MATEMÁTICAS, por Inés M. Gómez Chacón (Departamento de Didáctica de las Matemáticas del Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas, Madrid). 30 horas; 3 créditos.
5. LAS CALCULADORA GRÁFICA EN SECUNDARIA, por Lola Rodríguez. (C.P.R. de Móstoles). 30 horas; 3 créditos.
6. TALLER DE ASTRONOMÍA, por Ana Inés Gómez de Castro (UCM). 10 horas; 1 crédito.
7. CICLO DE CONFERENCIAS Y MESAS REDONDAS SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA, coordinado por Raquel Mallavibarrena Martínez de Castro y Laura Molleda Sánchez.(UCM). 15 horas; 1.5 créditos.
8. LAS MATEMÁTICAS EN INTERNET, por Angel Sánchez Catalán (C.P.R. de San Martín de Valdeiglesias). 10 horas; 1 crédito.
9. MATEMÁTICAS CON MATLAB, por Roberto Rodríguez del Río (UCM). 15 horas; 1.5 créditos.

*b) ACTUALIZACIÓN CIENTÍFICA*

10. LA MATEMÁTICA GRIEGA, por Alicia Delibes Liniers (UCM). 10 horas; 1 crédito.
11. GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO CON HERRAMIENTAS ACTUALES, por Miguel de Guzmán Ozámiz (UCM). 20 horas; 2 créditos.
12. HISTORIA DE LA MATEMATICA DEL ISLAM, por Mariano Martínez Pérez (UCM). 15 horas; 1.5 créditos.
13. BREVE RECORRIDO POR LA FILOSOFÍA DE LA CIENCIA, por José Mendoza Casas (UCM). 15 horas; 1.5 créditos.
14. ARITMÉTICA, por Juan Ramón Delgado Pérez (UCM). 15 horas; 1.5 créditos.

15. TRATAMIENTO DEL AZAR.:PROBABILIDAD, por Javier Montero, Luis Sanz y Juan Tejada (UCM); 30 horas; 3 créditos.
16. ESTADÍSTICA, por Javier Montero, Luis Sanz y Juan Tejada (UCM). 30 horas; 3 créditos.
17. ORÍGENES Y NACIMIENTO DE LA GEOMETRÍA PROYECTIVA, por Raquel Mallavibarrena Martinez de Castro (UCM). 20 horas; 2 créditos.
18. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD, por Eduardo Aguirre Dabán (UCM). 15 horas; 1.5 créditos.
19. ALGORITMOS: EL CORAZÓN DE LA INFORMÁTICA, por David de Frutos Escrig (UCM). 15 hhoras; 1.5 créditos.
20. SISTEMAS DINÁMICOS, por José Manuel Vegas Montaner y Carlos Fernández Pérez (UCM). 20 horas; 2 créditos.
21. INTRODUCCIÓN A LA MODELIZACIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA, por Juan Francisco Padial Molina (UPM.). 15 horas; 1.5 créditos.
22. SIMETRÍAS Y GRUPOS, por Carlos Andradas Herranz (UCM). 15 horas; 1.5 créditos.
23. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL, por Javier Lafuente López (UCM). 15 horas; 1.5 créditos.

Para obtener el título de Experto es necesario haber cursado 25 créditos del programa, de los cuales habrá al menos ocho pertenecientes al bloque de actualización didáctica y ocho al menos pertenecientes al bloque de actualización científica. También se podrán obtener *acreditaciones* de aptitud y/o asistencia en materias sueltas del programa, cuando ello proceda, según las normas establecidas por los correspondientes profesores..

**Raquel Mallavibarrena**  
*Directora del Curso*

## Número especial dedicado al profesor P. Abellanas

El anterior número 57 de este Boletín se dedicó como estaba previsto al profesor D. Pedro Abellanas. En él indicábamos que la acogida había sido tan generosa que la publicación de trabajos recibidos, dedicados al profesor Abellanas, continuaría en el siguiente número.

Se recogen pues en este número 58 los restantes trabajos en homenaje al profesor Abellanas, completando lo aprobado por la Sociedad en su Asamblea General del año 2000.

Pero, como ya viene siendo usual en nuestro Boletín, comenzamos los artículos de este número con el de un autor invitado, el Profesor Peter Schofield.

### Presentación del Profesor Peter Schofield

En el congreso *Fourth International Derive-TI-89/92 Conference*, celebrado el pasado verano en Liverpool, se anunciaba una presentación sobre dibujo de grafos con *Derive*. Asistí pensando sería una sencilla implementación de los casos más sencillos y me vi gratamente sorprendido e impresionado por la potencia del paquete exhibido. No sólo puede realizar cálculos relativos al grafo, sino que también puede realizar representaciones hasta de los grafos (orientados o no) más complejos, como podremos ver en las páginas siguientes. De hecho, este paquete viene incluido con la última versión de *Derive* (v. 5). Contacté allí mismo con su autor, Peter Schofield, quien accedió amablemente a escribir una presentación del mismo para nuestro Boletín.

Peter Schofield es el director del departamento de Matemáticas del “college” *Trinity and All Saints* de la Universidad de Leeds, donde ha enseñado Matemáticas durante los últimos 30 años. Los estudiantes de este “college” estudian carreras de Educación o Gestión y Administración de Empresas combinadas con Matemáticas. Durante los últimos nueve años el Dr. Schofield ha hecho un uso intensivo del sistema de cómputo algebraico *Derive* con estos alumnos.

**E. Roanes Lozano**

# Drawing Network Graphs and Digraphs with DERIVE 5

**Peter Schofield**

*Trinity and All Saints (University of Leeds)  
Horsforth, Leeds (UK) LS18 5HD  
p\_schofield@tasc.ac.uk*

## **Abstract**

*The Users Folder of DERIVE 5.03 contains a Utility/Demonstration File NGRAPH5.DFW which provides utilities and demonstrations for drawing network graphs and digraphs with DERIVE. Graphs can be drawn in the 2D-plot window from algebraic DRAW instructions using a specification for the coordinates of their vertices together with an edge set (or an adjacency matrix or an adjacency list). By combining basic concepts of a network graphs with DERIVE's powerful algebraic and 2D-plotting facilities a surprisingly powerful set of network graph drawing tools can be produced. This paper describes some activities that I have used with College degree course students for them to acquire the skills and techniques for constructing network graph drawings with DERIVE.*

## **1. Introduction**

I have been developing techniques for drawing graphs and digraphs in DERIVE for over two years. Amongst other things, they have provided a means of drawing a network graph that requires the student to think carefully about its detailed construction (rather than just making a rough sketch). They have also provided a common specification for graphs, etc. which helps in the communication of ideas and the assessment of students' work.

I first presented these graph drawing techniques in a workshop at the 4<sup>th</sup> International Derive & TI-89/92 Conference held at Liverpool John Moores University, England (July 2000). To get some idea of the many types of graphs that can be drawn with DERIVE, I suggest the reader works through some of the examples of my workshop notes to be found in the Proceedings of the Conference [3].



The launch of DERIVE 5 has considerably improved many of DERIVE's algebraic and graph plotting facilities and, since the Conference, I have collected the network graph drawing instructions into a .dfw file entitled NGRAPH5.DFW. This file contains a list of utilities and many demonstrations of drawing network graphs. It has been included in the Users Folder of DERIVE 5.03 (which DERIVE 5 users can download (free) from the DERIVE website [2]). In this paper, I shall also explain some new features of NGRAPH5.

The basic specification for drawing network graphs with NGRAPH5 arises simply from the following definition of a network graph.

**Definition 1.** A **network (di)graph** is a pair  $(V, E)$  where  $V$  is a non-empty set of **vertices** and  $E$  is a set of **edges**. Each edge  $e \in E$  joins a pair ' $v_1, v_2$ ' of vertices, which can be directed (ordered) or undirected. Vertices joined by an edge are called **adjacent**.

### 1.1. Viewing a Simple Graph

**Example 1:** Load NGRAPH5.DFW, select the 2D-plot settings suggested in the file, use the right-hand scroll-bar to set up the following Algebra Window display and plot #3 to draw the following graph in DERIVE's 2D-plot window. See Figure 1.

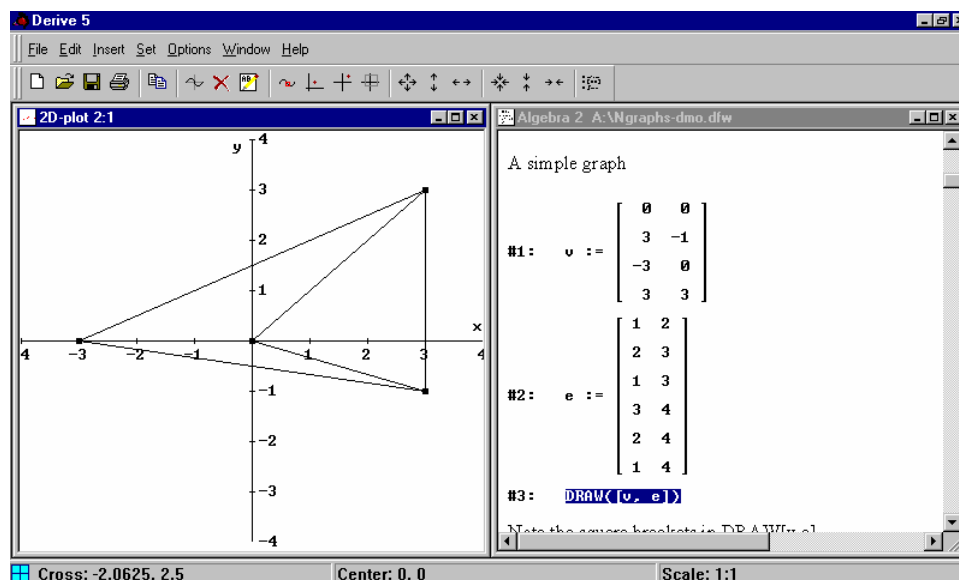


Figure 1: A simple graph.

For this graph the coordinates of the vertices are stored in sequence as:

$[[0,0], [3,-1], [-3,0], [3,3]]$ . To construct the edge vector, the position of each vertex in the sequence is taken as the label for each vertex. For example,  $[1,2]$  means join the vertex at  $[0,0]$  to the vertex at  $[3,-1]$ . In #3, notice the graph is stored as  $[v,e]$ . NGRAPH5 will not draw the graph properly until it is instructed to do so using a  $DRAW[v,e]$  instruction. (Plotting just  $[v,e]$  usually yields inconclusive results.)

**Remark 1:** This is one form of raw data that NGRAPH5 uses for drawing graphs. It is not the usual form that a human operator would use but, in the last analysis, it could be presented to NGRAPH5 in this manner.

**Remark 2:** Drawing a graph by hand would normally involve a selection of walks, trails, tours, paths, cycles, circuits or complete graphs. It will also be useful to have user-defined instructions for positioning vertices in the 2D-plot Window.

**Remark 3:** NGRAPH5 contains a list of utilities for positioning vertices as well as instructions for generating edge sets (vectors) from sequences of vertex numbers specifying walks, etc. In NGRAPH5, these are carefully documented and demonstrated by examples.

**Remark 4:** A selection of ‘standard graphs’ has also been defined in NGRAPH5. For example: Null, Circuit and Complete graphs; Star and Wheel graphs; Complete Bipartite graphs; Platonic graphs; the Hypercube Graph  $q_4$ ; the Petersen graph. See Figure 2 for examples.

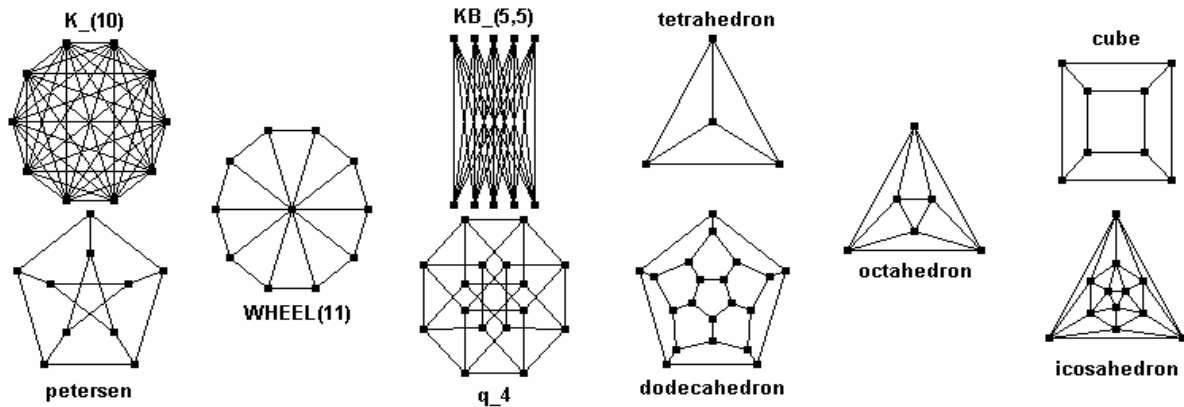
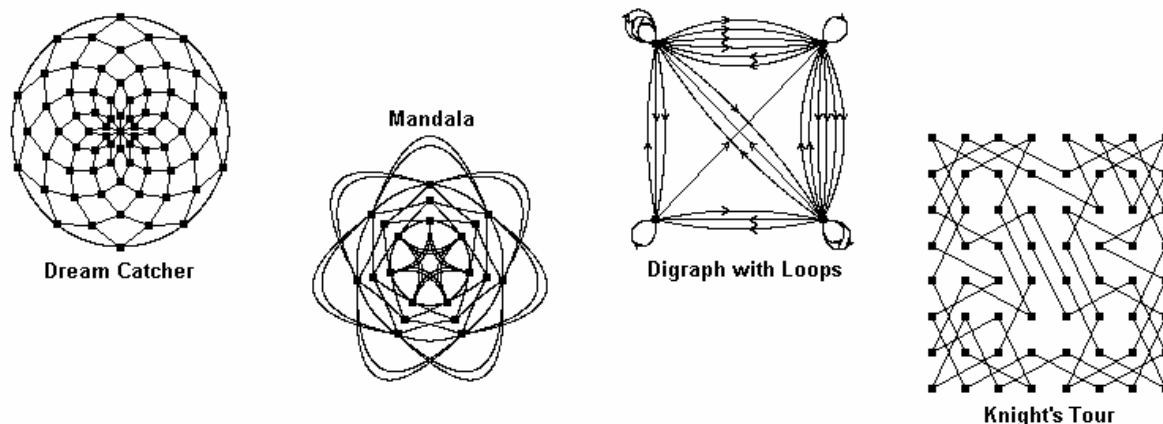


Figure 2: Examples of ‘standard graphs’.

**Remark 5:** NGRAPH5 also has demonstrations of more advanced graph drawings. See Figure 3.



*Figure 3: Some examples of advanced graph drawings.*

**Remark 6:** There are also instructions in NGRAPH5 for transforming (di)graph drawings in the 2D-plot Window including: displacements, enlargements, and general transformations specified by  $2 \times 2$  matrices. In fact, this part of the package of instructions could be adapted for use in an introductory course in 2D-transformations. See my workshop notes [3] for details.

**Remark 7:** It should be noted that all of the graph drawing in this paper have first been drawn in DERIVE's 2D-plot Window using NGRAPH5, and then copied and pasted into this document via the clipboard.

**Remark 8:** There are three basic methods of processing the vertex/edge structure of a graph or digraph in NGRAPH5:

- (i) an edge vector,
- (ii) an adjacency matrix, or
- (iii) an adjacency list.

NGRAPH5 contains instructions to convert between these forms. For example, assigning `ec:=complete[1,2,3,4]` and then simplifying `[ec,amatec,alistmatamatec]` yields Figure 4.

$$\left[ \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \\ 1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ 3 & 5 \\ 4 & 5 \end{array} \right] , \left[ \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] , \left[ \begin{array}{ccccc} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right] \end{array} \right]$$

Figure 4: Different forms of the edge/vertex properties of a graph.  
Similar conversions can also be carried out for directed graphs.

## 2. Drawing Network Graphs and Digraphs

### 2.1. Stages for drawing a graph using NGRAPH5

Stage 1: make a rough sketch of the graph; label vertices using positive integers.

Stage 2: analyze good vertex positions and edges vector sequences and convert these into DERIVE instructions for v and e.

Stage 3: 2D-plot your graph using draw[v, e] .

**Example 2:** (One of my favourite examples!) Draw a graph representing the Atomium Building, Brussels. See Figure 5.

The Atomium (in Brussels) is a remarkable building. It is a cube structure of 8 large spherical rooms, linked by tubular staircase corridors. In addition, it has a central spherical room linked by corridors/lifts to the other 8 rooms at the corners of the cube. For more information about the Atomium consult [1].

#### **Solution:**

Stage 1: Make a rough sketch of the graph of the Atomium. To prevent some of the edges joining the central vertex from overlapping, it is better to offset the squares on opposite sides of the cube at different angles to the x-axis. Number the vertices as shown in Figure 5.

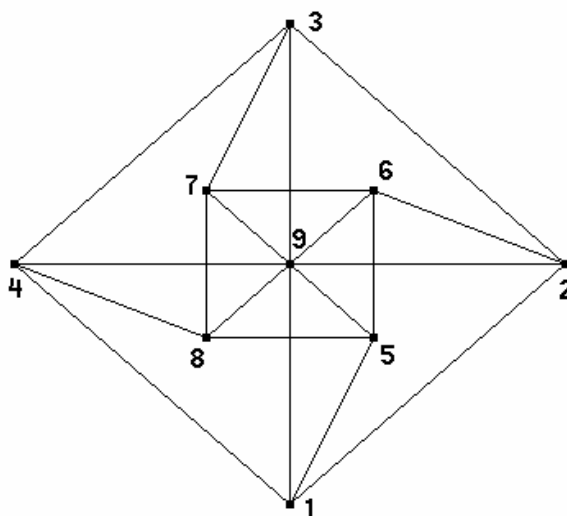


Figure 5: Graph representing the Atomium Building.

### Stage 2: (Load NGRAPH5)

(i) To position the vertices in DERIVE's 2D-plot Window, think of three rings of vertices: the first ring is of radius 3.5, with 4 vertices and with the first vertex offset at  $-\pi/2$  to the x-axis; the second ring is of radius 1.5, with 4 vertices (the first vertex offset at  $-\pi/4$ ); the third ring is of radius 0, with 1 vertex (offset at 0). To specify this within NGRAPH5 you can use the assignment instruction:

`atv:=rings[3.5,4,- $\pi/2$ ;1.5,4,- $\pi/4$ ;0,1,0]` .

(ii) Since all of the vertices of the Atomium graph are of even degree (by a well-known result) it follows that this graph has an Eulerian tour. That is, a trail that starts and finishes on the same vertex and traverses each edge of the graph exactly once. Such a tour can obviously be used to draw the graph. Therefore, specify this by: `ate:=tour[1,2,3,4,1,5,6,7,8,5,9,2,6,9,3,7,9,4,8,9]`

(or, `ate:=trail[1,2,3,4,1,5,6,7,8,5,9,2,6,9,3,7,9,4,8,9,1]` ) .

### Stage 3: Customize DERIVE5 as follows: Select:

- 2D-plot Window (and then Window>Tile Vertically)
- Options> Simplify Before Plotting (On)
- Options> Change Plot Colors (Off)
- Options> Display > Points : Connect (Yes), Large
- Options> Display > Grids (Off)
- Options> Display > Cross (Off)

(You can also to turn off the 2D-Axes, Labels and Legends).

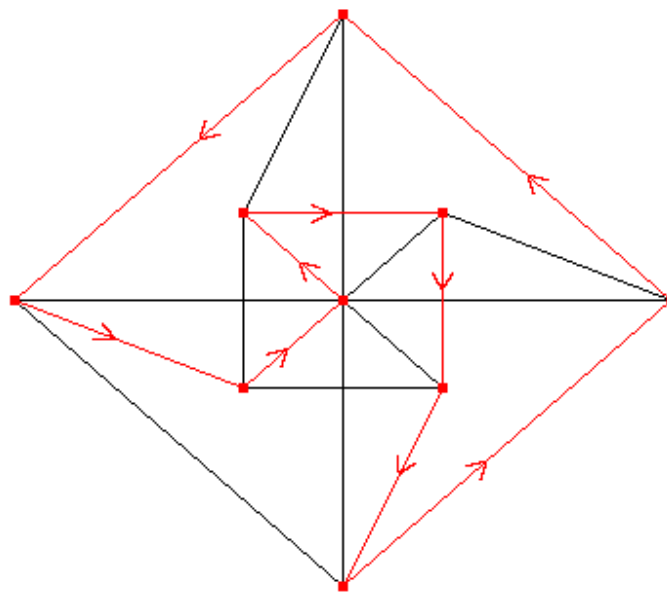
Then 2D-plotting: `draw[atv,ate]` will draw Figure 5 in DERIVE's 2D-plot window. (The vertex numbers in Figure 5 have been added using the annotation button in DERIVE's 2D-plot Window.)

**Example 2a:** The Atomium graph also has Hamiltonian cycles. Superimpose a directed Hamiltonian cycle on the basic Atomium graph of Figure 5.

**Solution:** A Hamiltonian cycle is a closed path that passes through every vertex of the graph (once). The Atomium graph has many such cycles, and we can draw one of these as a directed cycle, indicating the direction of traversing each edge.

For example, assign: `atham:=cycle[1,2,3,4,8,9,7,6,5]`, then select a new plot colour using `Options>Plot Color` etc., and 2D-plot `drawdi[atv,atham]` on top of the Atomium graph of Figure 5 to generate Figure 6.

(Because the arrows drawn on the digraph are parametric plots DERIVE will open the Parametric Plot Window with default parameter settings  $-\pi \leq t \leq \pi$ . It is important that you retain these default settings and also that you click the mouse on the box beside 'Apply parameters to the rest of the plot list' so that this box contains a tick.)



*Figure 6: The Atomium graph with a superimposed directed Hamiltonian cycle.*

**Example 3:** (Drawing Graphs and Digraphs with Multiple Edges and Loops.)  
 Draw the graph of Figure 7 with multiple edges and loops.

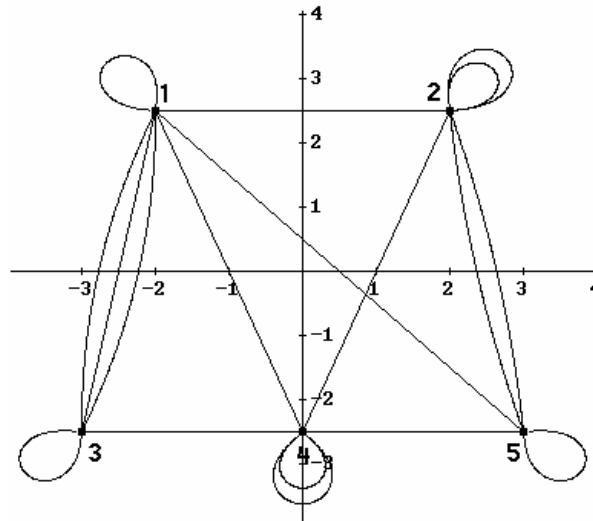


Figure 7: An example of a graph with multiple edges and loops.

**Solution:**

Stage 1: First make a rough sketch of the graph and number the vertices as shown in Figure 7. (In Figure 7 the 2D-plot axes and labels have been left on to help with the positioning of vertices.)

Stage 2:

(i) To position the vertices, think of two rows of vertices, the first row has two vertices at  $(-2, 2.5)$  and  $(2, 2.5)$  and the second row has three vertices with the first and last vertices at  $(-3, -2.5)$  and  $(3, -2.5)$ , respectively. This can be specified within NGRAPH5 using the assignment:

```
biv:=v_rows[[-2,2.5;2,2.5],2;[-3,-2.5;3,-2.5],3]
```

(ii) To draw a graph with multiple edges and loops using NGRAPH5, make up an adjacency matrix for the graph. Note that, for a graph, the adjacency matrix has to be symmetric and all entries on the main diagonal even. With the vertices numbered as in Figure 7 the adjacency matrix can be entered as follows:

```
bia:= [2,1,3,1,1;1,4,0,1,2;3,0,2,1,0;1,1,1,4,1;1,2,0,1,2] .
```

Once this matrix is entered into DERIVE's Algebra Window it becomes clear that it is of the correct form for a graph. See Figure 8.

$$\mathbf{bia} := \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Figure 8: The adjacency matrix for the graph of Figure 7.

Stage 3: Customize DERIVE5 as before and 2D-plot: draw[biv,bia] (make sure the 'Apply parameters to the rest of the plot list' box contains a tick). DERIVE will draw Figure 9.

The adjacency matrix can also be used to draw a digraph (directed graph). In this case each undirected edge will correspond to two oppositely directed diedges, and each undirected loop will correspond to two oppositely directed loops. To draw the digraph, clear the 2D-plot Window, and 2D-plot: drawdi[biv,bia] (again, make sure the 'Apply parameters to the rest of the plot list' box contains a tick). DERIVE will draw Figure 10.

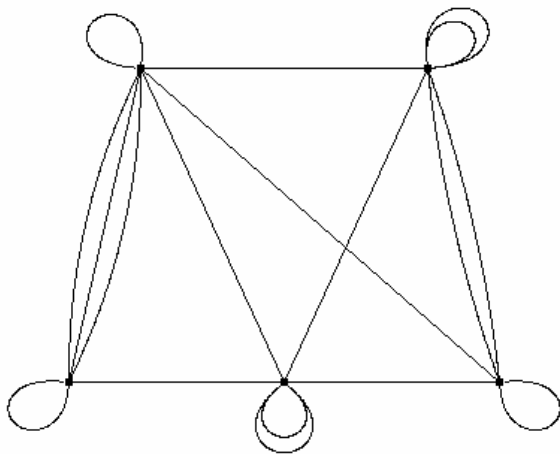


Figure 9: Graph drawing of Figure 7 using its adjacency matrix.

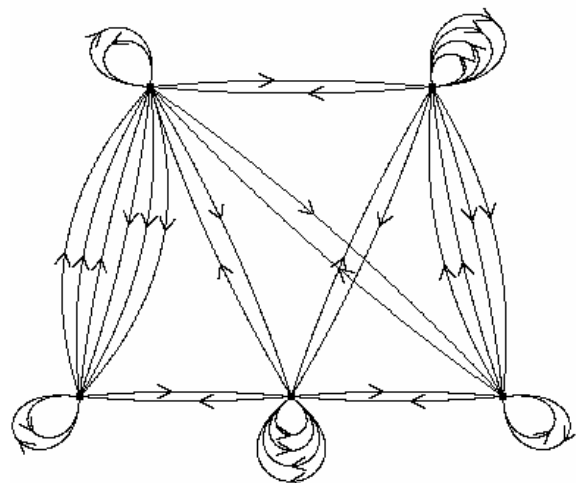


Figure 10: Digraph drawing using the same adjacency matrix.



**Remark 9:** In NGRAPH5, there are other types of drawing instructions for network graphs. For example, these will allow the operator to

- (i) select a bow factor to bend the edges of a graph or digraph (DRAWB, DRAWDIB) and also select an orientation for the axes of loops (DRAWBL, DRAWDIBL),
- (ii) control the size of the arrows in a digraph drawing (DRAWDIBA),
- (iii) draw bi-directional edges in a simple digraph using a single edge with two opposing arrows (DRAWDDI), or
- (iv) draw a graph or digraph using an adjacency list (DRAWLIST, DRAWLISTDI).

If you would like to work through some examples of drawing graphs and digraphs with these instructions consult [3].

**Remark 10:** In the rest of this paper I should like to discuss some of the most recent developments of NGRAPH5. That is, developments since last year's 4<sup>th</sup> International DERIVE TI-89/92 Conference.

### 3. Using NGRAPH5 to investigate some further properties of Graphs

NGRAPH5 now includes instructions for investigating two further properties associated with network graphs:

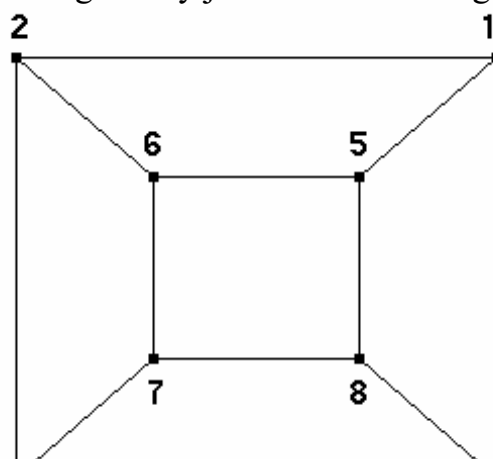
- (i) isomorphism of (di)graphs, and
- (ii) the family of (di)graphs on a given finite set of vertices.

#### 3.1. Isomorphism of Graphs and Digraphs

Graphs  $G_1$  and  $G_2$  are called **isomorphic** if there is a structure preserving 1-1 correspondence (bijection) between their vertices. (Similarly for digraphs.)

The structure of a network graph is its vertex/edge relationship, which can be specified by an adjacency matrix. Obviously, finite isomorphic graphs must necessarily have the same number of vertices. The question we shall consider is: "Given a graph  $G$ , how can we use NGRAPH5 to construct a graph isomorphic to  $G$ ?"

**Example 4:** Use an isomorphic mapping to demonstrate that the cube graph  $C$  in Figure 11 is a bipartite graph. (That is, a graph whose vertex set can be partitioned into two subsets such that edges only join vertices belonging to opposite subsets.)



*Figure 11: Graph drawing of cube C.*

**Solution:** Firstly, suppose we investigate how C has been drawn using NGRAPHS5. Take a vertex set  $cv:=rings[3.5,4,\pi/4;1.5,4,\pi/4]$  and an edge set  $ce:=paths[1,2,6,5;2,3,7,6;3,4,8,7;4,1,5,8]$  then 2D-plot  $draw[cv,ce]$ . However, for this investigation we shall need to standardize the vertex/edge relationship using the adjacency matrix of C. In NGRAPHS5, this can be specified by  $ca:=amatce$ . Simplifying ca yields Figure 12.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

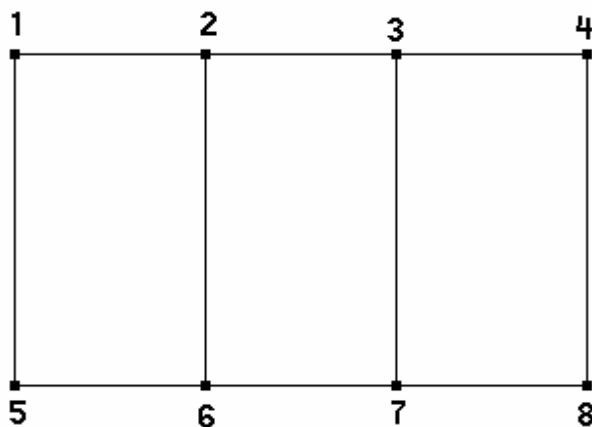
*Figure 12: The adjacency matrix of C.*

(Note: Figure 11 can equally well be drawn by 2D-plotting  $draw[cv,ca]$ ).

A straightforward way of demonstrating that  $C$  is a bipartite graph is to line the vertices up into two rows of four and show that the edges only join vertices in opposite rows. Define a new arrangement of vertices by:

`rcv:=v_rows[[-3,2;3,2],4;[-3,-2;3,-2],4]`.

Then 2D-plotting `draw[rcv,ca]` (and adding the vertex numbers using 2D-plot annotations) yields Figure 13.



*Figure 13: A first attempt at drawing  $C$  on two rows of vertices.*

Figure 13 is not at all satisfactory, since it does not demonstrate the bipartite nature of  $C$  and some of the edges are overlapping. Take fresh look at Figure 11. To represent  $C$  as a bipartite graph vertices 1,3,6,8 need to be in one subset and 2,4,5,7 need to be in the other. Therefore, to obtain this on the arrangement of vertices of Figure 13 we need to map 1,3,6,8,2,4,5,7 onto 1,2,3,4,5,6,7,8 (for example). This can be specified in DERIVE using a simple vector assignment: `cp:=[1,5,2,6,7,3,8,4]` (Note: this represents the permutation  $i \rightarrow cp_i$ , for  $i = 1, \dots, 8$ ). The mapping `cp` can be applied to the vertices of Figure 13 using the instruction `PERM_V(rcv,cp)`.

Therefore, 2D-plotting `draw[perm_v(rcv,cp),ca]` will draw the cube as a bipartite graph drawing. See Figure 14.

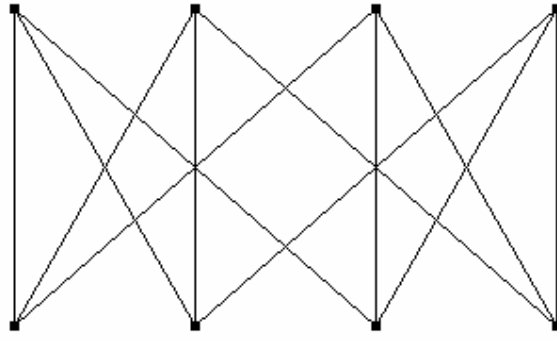


Figure 14: A bipartite graph drawing of  $C$ .

The same result can also be obtained by leaving vertices  $rev$  in their original order and simultaneously applying the inverse of  $cp$  to the rows and columns of the adjacency matrix  $ca$ . For example, assign  $incp := [1, 3, 6, 8, 2, 4, 5, 7]$ , and then `2D-plot draw[rcv, perm_amat(ca, incp)]` to redraw Figure 14.

**Exercise 1:**  $cp$  is not the only permutation that will map  $C$  onto a bipartite graph drawing with vertices arranged according to  $rcv$ . Can you think of another? How many different mappings with this property are there?

### 3.2. Families of subgraphs and subdigraphs on a fixed finite set of vertices

To operate this facility of NGRAPH5 the operator first has to specify the vertex set and assign this to the special variable  $U\_$ , which has been set-aside for this purpose. For example assign:  $U\_ := 3.5ring(8, 0)$  to set up the vertex set of Figure 15.

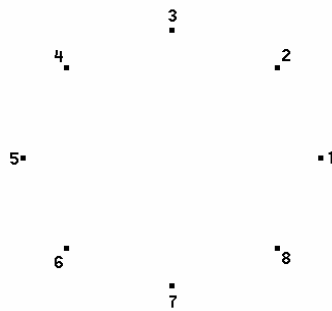


Figure 15: The vertex positions of  $U\_$ .

(Figure 15 can be displayed in DERIVE's 2D-plot Window by first plotting `draw[U_, []]` and adding numbers using 2D-plot annotations. It can then be embedded in the Algebra Window and saved as a .dfw file for future use!)

It is now possible to work with the family of subgraphs (or subdigraphs) on  $U_$  using union, intersection and difference. Each subgraph is specified by a selection of indices indicating a subset of  $U_$ , together with a specification for edges on the selected subset.

The corresponding instructions to draw subgraphs and subdigraphs are `DSUB` and `DSUBDI`. For example, with  $U_$  set up as above, see Figure 16 for the respective 2D-plots of

`dsub[[1, 2, 3, 4, 5, 7], paths[1, 2, 3, 4; 2, 5, 7, 1; 3, 5, 7, 2]]` and  
`dsubdi[[2, 4, 6, 8], [1, 1, 1, 1; 0, 0, 2, 3; 1, 2, 3, 0; 1, 2, 3, 1]]`  
 (note the concise form of the adjacency matrix for the subdigraph).

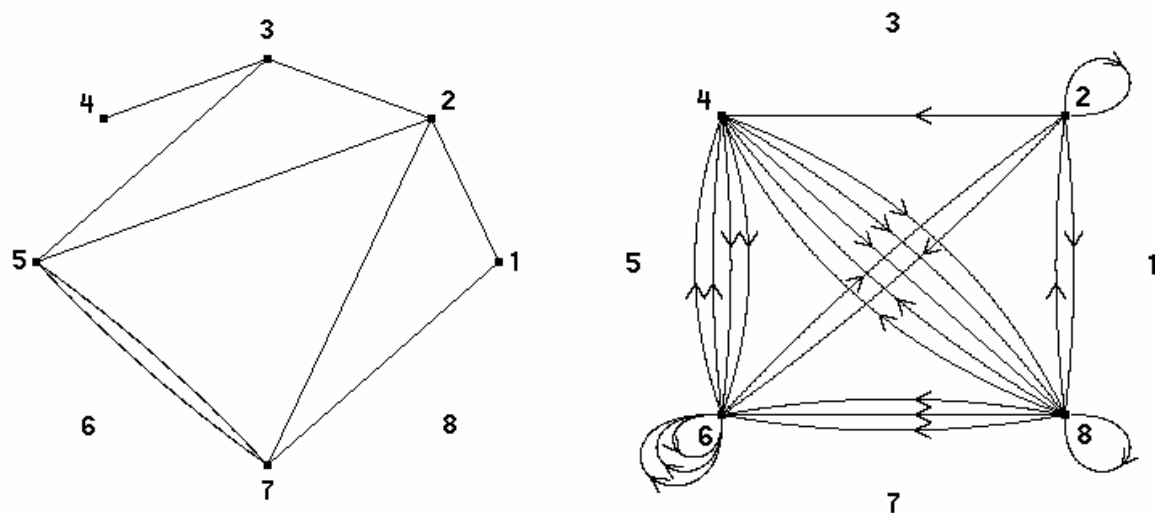


Figure 16: Subgraphs and subdigraphs on  $U_$   
 (vertices left out of the vertex index specifications are not plotted).

There is also a 'shorthand' specification for specific subgraphs. For example, `CYSUB[2, 4, 6, 8]` is shorthand for `[[2, 4, 6, 8], CYCLE[2, 4, 6, 8]]`.

**Example 5:** Provide an example to show that the intersection of two complete subgraphs on  $U_$  is also a complete subgraph on  $U_$ .

**Solution:** Two complete subsets can be specified by, for example,  $c1 := \text{ksub}[1, 2, 4, 5, 8]$  and  $c2 := \text{ksub}[1, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ , which, when plotted on  $U_-$  using `dsubc1` and `dsubc2` yield, respectively, the subgraph drawings of Figure 17.

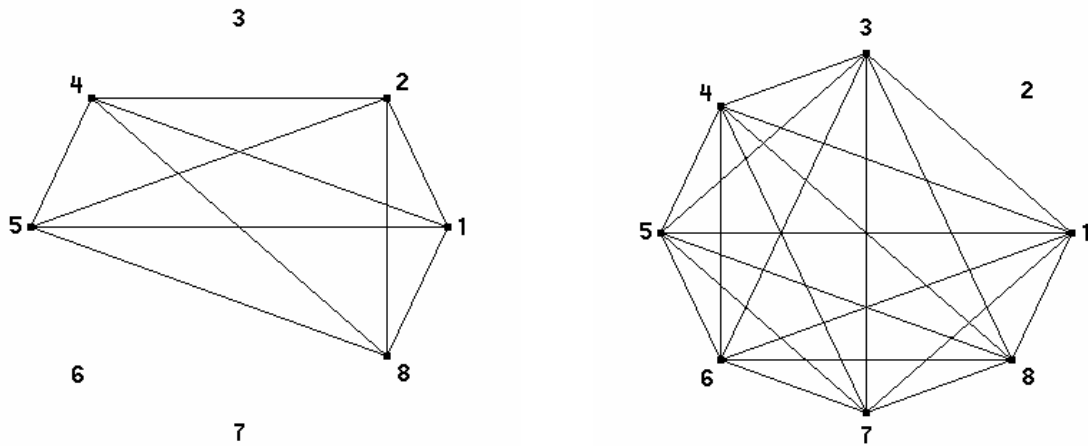


Figure 17: Examples of complete subgraphs on  $U_-$ .

Now, if you 2D-plot `dsubintsub(c1, c2)` the result is Figure 18, which is obviously the same as the `dsub` drawing of  $\text{ksub}[1, 4, 5, 8]$ .

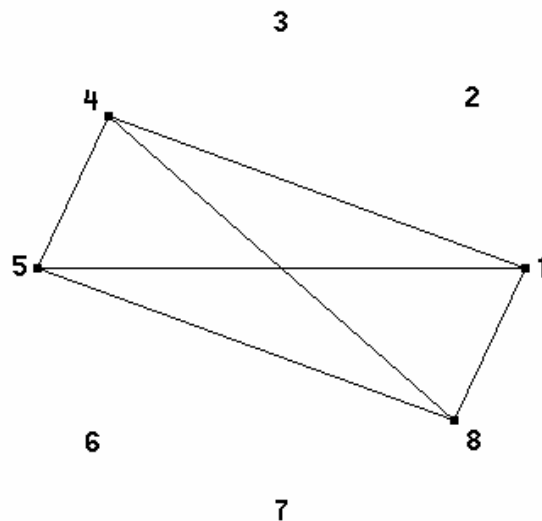


Figure 18: Graph drawing of the intersection of  $c1$  and  $c2$ .

**Remark 11:** Although this is a fairly simple result, I feel there are more opportunities to explore this new facility of NGRAPH5.

**Remark 12:** In order to work on the subgraphs of a universal graph you will first have to specify this by, for example,  $UG\_ := ksub[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]$ . It is now possible to define the complement of a subgraph  $x$  in  $UG\_$  as  $COMSUB(x) := difsub(UG_, x)$ . For example, Figure 19 shows the 2D-plots of  $dsubc2$  and  $dsubcomsubc2$  with respect to  $UG\_$ .

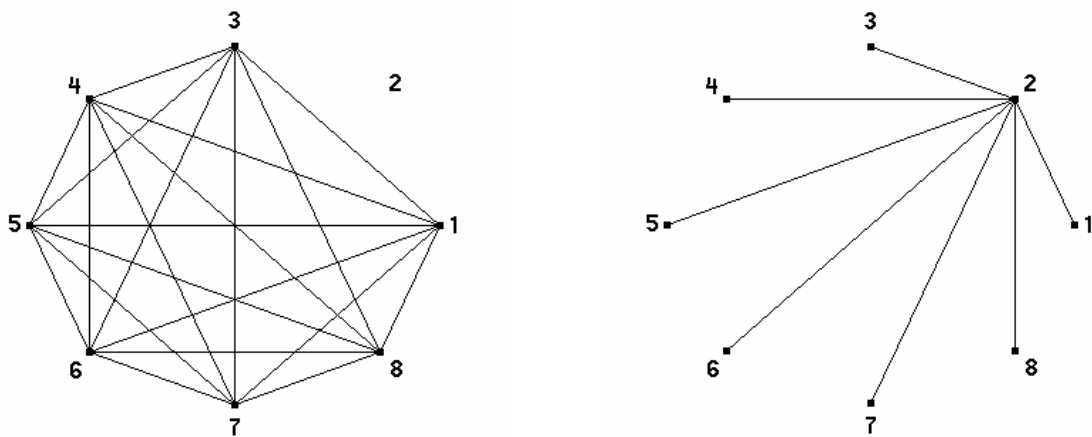


Figure 19: Graph drawings of  $c2$  and its complement with respect to  $UG\_$ .

**Remark 13:** Similar activities can also be carried out with subdigraphs on  $U\_$ . See the Utilities section of NGRAPH5 for details of the relevant user-defined instructions.

## 4. Conclusion

The basic methods of specifying graphs and digraphs are simple, yet combined with the powerful algebraic and 2D-plotting facilities of DERIVE 5 the outcomes are very productive. The potential of these techniques appears to be unlimited. I am of the opinion that many of the algorithmic methods used in network graphs can be executed in DERIVE. See [4] for an example of how DERIVE can be used to model an algorithmic method for finding Hamiltonian cycles in digraphs and graphs.

At present, I am working on new version of NGRAPH5, which I intend to email to the co-authors of DERIVE, Albert Rich and Theresa Selby, to replace the current one in the Users Folder of the next issue (DERIVE 5.04). This contains all of the facilities of NGRAPH5 together with some additional user-defined instructions (as well as speeding up some of the background calculations and trapping one or two obscure bugs).

An unusual feature of NGRAPH5 has been the spin-off into other aspects of my teaching. I have, for example, used it to construct a .dfw file for drawing cobweb diagrams for fixed-point and Newton-Raphson iterations. My thanks go out to several cohorts of College students who have acted as guinea-pigs for trying out the facilities of NGRAPH5 as well as the co-authors of DERIVE for kindly including the file in the Users Folder of their program.

## 5. References

- [1] Atomium Web Site: <http://www.atomium.be>
- [2] DERIVE Web Site: <http://www.derive.com>
- [3] Schofield Peter, Drawing Network Graphs with DERIVE 5 (Workshop), in: *Proceedings of the 4<sup>th</sup> Int. DERIVE & TI-89/92 Conference*, bk teachware Series, 2001 (CD-ROM).
- [4] Schofield Peter, Using DERIVE to Interpret an Algorithmic Method for Finding Hamiltonian Circuits (and Rooted Paths) in Network Graphs (Lecture), in: *Proceedings of the 4<sup>th</sup> Int. DERIVE & TI-89/92 Conference*, bk teachware Series, 2001 (CD-ROM).



# Mis Recuerdos de D. Pedro

**Gonzalo Calero Rosillo**

Creo y espero que otros compañeros contarán más, y con más conocimiento que yo pueda hacerlo, sobre su obra científica y pedagógica. A pesar de que yo no tengo gran facilidad para escribir, me ha parecido que no podía dejar de expresar mi reconocimiento, mi agradecimiento, mi admiración, por D. Pedro.

Yo no tuve a D. Pedro como profesor de Geometría III (en aquellos tiempos conocida como Geometría Proyectiva), pues cursé dicha asignatura el mismo año que él hizo las oposiciones para dicha cátedra en la Universidad de Madrid donde mi esposa (q. e. p. d.) y yo estudiábamos.

El estaba entonces de catedrático en Zaragoza, y recuerdo que nos llegaban noticias de su seriedad en las clases y de su excelente competencia profesional. Como alumnos que éramos, tuvimos miedo, según creo corría el curso 1948-49.

Conocí a D. Pedro como presidente del tribunal de las oposiciones que hice para el cuerpo de Profesores Numerarios de Escuelas Normales. En mi opinión la actuación del tribunal fue ejemplar, en especial la de su presidente. Desde entonces comencé a tener trato frecuente con D. Pedro con el deseo de dedicarme más seriamente a la Geometría.

Cuando años después vine a Madrid, mi relación con D. Pedro se hizo más asidua al comenzar a trabajar en el Instituto “Jorge Juan” de Matemáticas del C.S.I.C.

La vida de D. Pedro en su despacho del citado centro era admirable. Pasaba toda la tarde trabajando en lo suyo y dirigiendo a todos los que intentábamos obtener algún resultado que pudiera llevarse a las Reuniones Anuales de Matemáticos que se celebraban por turno en las Universidades españolas (y que según creo él tuvo que ver en su creación). También trabajó intensamente en dirigir tesis doctorales (una de ellas la mía). La mayoría de las veces había que “coger turno” para poder ver a D. Pedro.

Cuando entraba alguien en su despacho, dejaba lo que estuviera haciendo para atenderle como si fuera algo suyo personal. Si algún resultado le parecía poco acertado, solía decir: “vamos a buscar un contraejemplo”. De esta forma analizaba en un caso concreto si se mantenía o no el resultado obtenido.

Un hecho anecdótico: hubo temporadas en que hubo restricciones eléctricas, en esos casos utilizaba velas para no interrumpir el trabajo y poder continuar.

Los viajes en el 600: alguna vez me llevó a mi casa desde el “Jorge Juan”; primero pasábamos a recoger a alguna de sus hijas, y después me dejaba en las inmediaciones de mi casa. Con motivo de los cursos de formación del profesorado que dimos bajo su dirección en la Universidad de Navarra, me recogía en Riaza (donde yo residía entonces) cuando pasaba camino de Pamplona. Estos viajes con él eran encantadores. En estos viajes también solía venir D. Jacinto Martínez S.M.

En uno de dichos viajes paramos para comer en Burgo de Osma, quiso saber cómo asaban el cordero, y nos invitaron a pasar a la cocina. Al terminar la comida vino una de las hijas del dueño con sus padres, para saludarle y decirle que había sido alumna suya en Madrid.

Algunas veces fui con mi esposa a verle a Camorritos donde él pasaba el verano con su familia. La acogida de D. Pedro y Dña. Carmen era afectuosísima, y era obligado merendar como si estuviéramos en nuestra casa. Una de las veces, tuve que dejar que su hijo Pedro nos llevara a nuestra casa en Alpedrete.

Algunos cursos ordené adecuadamente mi trabajo para poder ir a sus clases. Fui con él a los cursos de primero y tercero que daba en la Facultad. Era un auténtico maestro en los contenidos y en la forma de exponer las ideas. Haber podido asistir fue un auténtico gozo para mí, lo que fue otro motivo más de agradecimiento. Otros profesores también asistieron a dichos cursos.

D. Pedro no era partidario de recibir homenajes. Nos quedamos con las ganas de darle un homenaje con motivo de su jubilación. Se negó rotundamente, de manera que fue imposible.

Asistí bastantes años a sus cursos de doctorado. Eran muy interesantes y siempre aprovechaba para ponernos en contacto con las ideas más avanzadas, de las que podíamos sacar temas de trabajo.

Fue un auténtico gozo trabajar y tratar con D. Pedro. Que descanse en la paz del Señor.

# El Mejor Estudiante

**Ignacio Sols Lucia**

*Dpto. de Álgebra, Univ. Complutense de Madrid*

*e-mail: sols@mat.ucm.es*

Hijo de un albañil de Nocito (Huesca), nació Pedro Abellanas en Zaragoza, en 1914, de una familia numerosa. Estudiando la carrera de Arquitectura se entusiasmó con las matemáticas, y en Julio de 1936 acababa la carrera de Ciencias Exactas. Recién terminada la guerra civil, D. Pedro descubrió la obra de Van der Waerden, y en dos años devoró los dos volúmenes de su “Álgebra”, y sus dieciocho memorias de Geometría Algebraica. Viajó becado a Alemania en 1942 para contactar con Van der Waerden. Tan sólo permaneció allí un verano, pues pronto hubo de volver a causa de un infortunio familiar. Los pocos meses que permaneció en Alemania fueron decisivos para su orientación en Geometría. D. Pedro solía comentar a sus discípulos, comunicándoles la filosofía encerrada en la anécdota, que al decir a Van der Waerden que había leído todas sus obras de geometría algebraica, éste tuvo la humildad y perspectiva de futuro suficientes para aconsejarle: “Olvide Ud. todo eso, y aplíquese a estudiar las memorias de Zariski”.

Detengámonos un momento en esta actitud de Van der Waerden. Rey Pastor se quejaba amargamente de haber contactado en Alemania con la prolongación de lo que él había estudiado en España, las ideas de Von Staudt, sin caer en la cuenta de que eso no era ya el presente sino el pasado, y de no haber aprovechado, pues, la posibilidad que allí se le ofrecía de incorporarse a la moderna geometría algebraica. Esto es precisamente lo que no le ocurrió a D. Pedro, gracias a la correcta actitud de Van der Waerden. De él aprendió D. Pedro estas dos lecciones: primero, que las ideas de Zariski eran las ideas del momento; segundo, que hay que estar enterados, a lo largo de la propia carrera profesional, de cuáles son las ideas del momento, y encaminar hacia ellas a los alumnos sobresalientes, aquellos que podrán luego formar escuela, más bien que mantenerlos a su vera, trabajando en las técnicas que uno domina pero que ya no son el futuro.

Esta filosofía explica la enorme versatilidad de los intereses de D. Pedro, tanto en su trabajo personal como en la formación de futuros investigadores, de los jóvenes a quienes alentó a cultivar las diferentes técnicas que, generación tras generación, iban surgiendo en la comunidad científica: Zariski, cuando Zariski; Serre y Grothendieck, cuando Serre y Grothendieck; Hironaka, cuando Hironaka; Milnor, cuando Milnor; Hartshorne, cuando Hartshorne. Y la geometría enumerativa (que fue el tema de las dos últimas tesis que dirigió, ya a punto de retirarse), cuando ya en los ochenta la comunidad internacional volvía hacia la geometría clásica con toda la potencia de las décadas de formalización que quedaban atrás.

Cuando, ya jubilado, iba yo a visitarle a su casa, en la segunda mitad de los ochenta, aún me llamaba la atención sobre las nuevas ideas de Donaldson. (Fuera por ésta u otras razones, el hecho es que terminé enviando a Oxford un alumno para que hiciera su tesis con Donaldson, con la intención de que incorporara a España esas nuevas técnicas).

Vemos así que aunque son muchos los discípulos de D. Pedro Abellanas dispersos en España, y varias las escuelas que ellos han formado, guardan bastante diversidad entre ellas: la escuela de Salamanca, la escuela de categorías, la escuela de singularidades, la de geometría real, la de geometría clásica. Tienen todas ellas su origen en la diversidad de intereses de D. Pedro.

Desde sus primeros años de catedrático en Zaragoza comenzó a dirigir tesis de geometría algebraica a alumnos que evolucionaron luego hacia otros campos, como es el caso de Julio Fernandez Biarge, a quien dirigió una tesis con aplicación a la teoría de singularidades y que luego evolucionó hacia el Cálculo Automático en Matemática Aplicada, o el caso de D. Juan Sancho Sanromán, fundador de la escuela española de teoría de grupos, o el de quienes evolucionaron hacia la geometría diferencial, D. Javier Etayo y D. José Luis Viviente, quien escribió una segunda “Thèse d'etat” bajo la dirección de Chevalley, durante su estancia de seis años en Francia.

Ya he mencionado el entusiasmo de D. Pedro por las nuevas ideas venidas de Francia, siempre interesado en los nuevos caminos de la geometría. Pero a quien realmente alcanzaron estas ideas con juventud suficiente para su asimilación, y lo que es más importante, habiéndose adelantado en su trabajo y enseñanza personal a lo más relevante del núcleo de ellas (al menos en lo que se refiere a Serre) fue al discípulo que D. Pedro ha tenido siempre como el mejor, y que bien puede considerarse como la mente más privilegiada que se ha dedicado a las matemáticas en Es-

paña: D. Juan Sancho Guimerá, nuestro Grothendieck español –tardíamente aprovechado–, quien se adelantó a Serre y a Grothendieck en algunas de las concepciones seminales de la actual geometría algebraica, pero no gozó del ambiente que rodeó a Grothendieck hasta sólo tiempo mas tarde, tomando su origen en él la actual escuela de geómetras algebraicos de Salamanca, y hasta cierto punto también la escuela de Barcelona. D. Juan Sancho bien merece una cuidadosa investigación histórica que sacara a la luz nuestra gran ocasión desaprovechada.

Volviendo a su maestro, D. Pedro Abellanas, hagamos hincapié en lo que ya hemos resaltado como lo más característico de su labor de formación, la variedad de los temas de tesis que dirigía. D. Juan Sancho escribió su tesis sobre las variedades abelianas. D. José Luis Viviente la escribió en geometría enumerativa, sobre el invariante de Zeuthen-Segre. D. Eduardo García Rodeja dedicó su tesis a la teoría de correspondencias algebraicas, el campo que principalmente había cultivado D. Pedro en su investigación personal, generalizando el trabajo de Zariski sobre correspondencias birracionales. A D. José Javier Etayo le encargaría en su tesis la generalización a dimensión superior de las técnicas introducidas en el principal trabajo de D. Pedro para el estudio de las superficies algebraicas. El modo en que Abellanas veía los divisores en superficies y por generalización en variedades singulares de dimensión superior, le permitió trabajar con ellos en los años cincuenta hasta obtener la desigualdad de Riemann-Roch, en ausencia de una desingularización de la que no se disponía en esos años, aunque esa desingularización llegaría poco más tarde, como es bien sabido.

No se desanimó D. Pedro con que este hallazgo dejara su obra tempranamente desfasada, sino que, ya en los años sesenta, se interesó precisamente por la teoría que la había desfasado, y así dirige la tesis doctoral a José Luis Vicente Córdoba sobre la estructura arbórea de las singularidades. La técnica de Zariski, recogida en la obra de Zariski-Samuel, prologada en varios volúmenes de los EGA de Dieudonné y Grothendieck, estaba ya bien asimilada por estos jóvenes españoles que, terminada su tesis, salían a Harvard ya sin el menor complejo de inferioridad. Superados los años cincuenta en que nuestros jóvenes geómetras no salieron de España, y los años sesenta, en que sólo marcha José Luis Viviente a París, los españoles de la generación de los setenta volvían a salir al extranjero para ampliar estudios, pero ahora no iban ya como Rey Pastor, o Abellanas, o Gaeta, o Mallol, u otros de los años cuarenta o principios de los cincuenta, quienes lo hicieron partiendo de cero o de una cultura matemática desfasada. Ellos partían de una cultura matemática al día, y así a poco de llegar a Harvard con la tesis recién leída, dos

alumnos de D. Pedro, José Manuel Aroca y José Luis Vicente, pudieron ponerse enseguida a investigar con Heisuke Hironaka. Los resultados de esos años de trabajo están recogidos en una extensa memoria de Aroca, Hironaka y Vicente sobre “teoría del contacto maximal”. Y están recogidos en la extensión de la geometría algebraica en activos grupos de investigación en Valladolid, Madrid y Sevilla que son la prolongación actual, por tanto, de la labor investigadora y formadora de D. Pedro.

También por estos años, el espíritu formador de Don Pedro le llevó a dirigir a algunos jóvenes hacia la reforma de la enseñanza de las matemáticas en España. Fueron jóvenes a los que había dirigido la tesis en temas de geometría algebraica, concretamente en el tema de correspondencias algebraicas que generaliza la memoria de Oscar Zariski sobre correspondencias birracionales que siempre deslumbró a D. Pedro, y en el que ya había dirigido la tesis doctoral de Gonzalo Calero. En los finales de los años sesenta y principios de los setenta, cuando D. Pedro se ocupaba como investigador de ese tema, urgía actualizar la enseñanza de las matemáticas en España para no perder un tren que estaba arrancando en Estados Unidos y en Europa. Animó D. Pedro a Eugenio Roanes y M. Paz Bujanda a compartir esa investigación con el trabajo en educación matemática, ayudándole en el vasto programa de puesta a punto de la matemática española también a nivel de enseñanza secundaria, y aun primaria, introduciendo en ella la revolución bourbakista que estaba alcanzando a otros países, y que a esos niveles se llamó “matemática moderna”. Más tarde se desencantó de algunos de sus abusos, de los que se resentiría a veces con comentarios que me recordaban aquel “no era esto, no era esto” de D. José Ortega y Gasset. Pero no hay duda de que en aquel momento hizo D. Pedro lo que tenía que hacer. Hubiera sido un retraso imperdonable apear a España de aquella reforma.

A finales de los años setenta, y aun en los años ochenta, D. Pedro dirige aún tesis doctorales, esta vez la de Tomás Recio que, entroncando con un antiguo trabajo de D. Pedro en geometría real, situaba a su alumno en esa área en el preciso momento en que empezaba a tomar forma como disciplina propia, y de la cual arranca la actual escuela de investigación en geometría algebraica real. Sus últimas tesis dirigidas son la de Gregorio Hernández y la de su propio hijo Manuel Abellanas en geometría enumerativa, al ponerse ésta de nuevo en el candilero en los años ochenta, derivando ellos luego hacia la geometría computacional donde han formado un grupo activo de jóvenes investigadores.

En estos años, hacia finales de los setenta, yo mismo pude tener una experiencia de primera mano de la actitud de Abellanas hacia sus discípulos. Al llegar a Madrid para trabajar con él, D. Pedro Abellanas, que estaba al tanto de los aires de vuelta a la geometría clásica, y de que en París iba a impartir Arnaud Beauville un curso sobre la clasificación de Enriques de las superficies algebraicas, me pidió que fuera allí “como espía” porque había que importar esas técnicas. Al joven espíritu de aquel anciano le debo, pues, el principio de una trayectoria que luego ha conformado mi orientación en geometría, y la de algunos estudiantes míos.

D. Pedro Abellanas se jubiló en 1984. Cercano ya a la jubilación, le oía decir con frecuencia: “después de tantos años, no me otorgo aún el título de matemático, pero sí el título de estudiante de matemáticas”. Entonces me dolía, me parecía injusto. Ahora, algo más maduro, he comprendido.

Honor, pues, al buen estudiante.

# Geometría: Espacio, Forma, Posición

J. M. Aroca Hernández-Ros

Instituto de Estudios de Iberoamérica y Portugal.  
Universidad de Valladolid.  
e-mail: aroca@agt.uva.es

## Resumen

This paper is a survey about some recent development in Geometry and the change of the concept of Geometry in the last years.

*...Solo los cuentos fantásticos explican esa combinación de lo atractivo y lo extraño que es el sabor primordial de la existencia*

*(G.K. Chesterton. Ortodoxia)*

Con estas líneas quiero rendir un homenaje a mi Maestro D. Pedro Abellanas, escribiendo, como diría Azorín, “al margen” de su lección de apertura del curso 1979-80 en la Universidad Complutense [2].

Pese a su título general, la lección de D. Pedro está dedicada a exponer su punto de vista sobre la Geometría, partiendo del hecho de que la Geometría, como toda entidad dotada de vida propia, tiene un código genético y una historia, y su porvenir es consecuencia de ambos. Los genes de la Geometría son los *Elementos* de Euclides y su historia es una espiral que retorna periódicamente a ellos.

En cuanto a la filosofía de la Geometría, D. Pedro se alinea claramente con Hilbert y Poincaré, y escribe:



*La nueva fundamentación de la matemática se apoya en un principio bien simple que se puede enunciar así: para poder demostrar con rigor las proposiciones es necesario vaciar de contenido a los conceptos primitivos, limitándonos a establecer el mecanismo lógico permitido y las relaciones fundamentales entre dichos conceptos.*

Y mi afirmación acerca de que Hilbert comparte esta idea no es gratuita, porque aunque en sus *Gründlagen* [9], se refiere a los axiomas como *hechos fundamentales de nuestra intuición*, posteriormente en respuesta a una carta de Frege en la que dice que los axiomas proceden de una fuente que no es lógica y a la que llama *intuición del espacio* (*Raumanschauung*), Hilbert afirma:

*Desde que empecé a pensar, a escribir y a dar cursos sobre estas materias, digo siempre lo contrario: si axiomas arbitrariamente propuestos no se contradicen ni lo hacen tampoco sus consecuencias, son ciertos, y las cosas definidas por ellos existen. Estos son para mí los criterios de verdad y existencia.*

Por su parte en [16] Poincaré dice: *Los axiomas no son ni juicios sintéticos a priori ni hechos experimentales, son convenios. Nuestra elección entre todos los convenios posibles se hace en base a hechos experimentales; pero es libre y está limitada solamente por la necesidad de evitar contradicciones. De este modo los postulados pueden resultar rigurosamente ciertos aunque las leyes experimentales que hayan sugerido su adopción sean solo aproximadas. En otros términos, los axiomas de la geometría son solo definiciones enmascaradas. La cuestión de la veracidad de la geometría no tiene sentido.*

También se sitúa en el mas puro espíritu de Hilbert un libro delicioso publicado en 1923 y del cual he tomado el título de este trabajo. Su autor un geómetra olvidado, el Vizconde de Güell, se expresa de modo mas apasionado:

*El espacio del geómetra no existe, no tiene realidad física, ni necesita para nada someterse a las condiciones que dimanen de los objetos reales en movimiento o en reposo. Es un espacio íntegramente ideal, espacio pensado, espacio inventado, espacio construido por el entendimiento abstracto y a cuyas propiedades no atañen nada las exigencias que puedan derivarse de la realidad. Nadie puede negarle al intelecto humano el perfecto derecho a construir esa noción, a precisarla y a determinarla idealmente según las leyes rigurosas del pensamiento lógico.*

En lo que sigue nos atendremos a esta forma de entender la Geometría (los lectores interesados en la filosofía, y en las distintas concepciones de espacio, pueden consultar los textos [15],[19]), pero no renunciaremos a hablar de conexiones entre la Geometría y nuestra percepción del mundo, ya que, como dice P. Griffiths:

*Uno de los misterios profundos de la vida es la forma en la cual la mejor matemática pura interesante por sí misma, inexplicablemente e impredeciblemente resulta ser útil.*

Y en el caso de la Geometría, esta utilidad no es privativa de la Geometría construida con un sistema de axiomas proveniente de nuestra *intuición del espacio*, también ramas tan alejadas de la intuición como las Geometrías finitas, han resultado tener interesantes aplicaciones a problemas prácticos como es el de codificación.

En su conferencia, D.Pedro revisa con detalle los tres modelos clásicos de definir la Geometría:

- El modelo axiomático, el mas antiguo, cuyo exponente son los *Elementos* revisados y formalizados por Hilbert (ver el magnífico libro de Hartshorne [8])
- El modelo analítico, basado en el Algebra lineal, que es el más popular en la actualidad
- El modelo de Klein en el cual, la Geometría es un par compuesto por un conjunto y un grupo que actúa sobre él y las propiedades geométricas son aquellas invariantes por la acción del grupo [11]. Este es el modelo mas próximo a la Física.

Yaglom [22] recoge un texto de Galileo que refleja la razón de ser del modelo de Klein. En ese texto, demasiado largo para ser incluido aquí, Galileo nos sitúa en un barco con moscas, mariposas, un pez en una pecera, una botella que gotea en un plato etc., y nos hace observar el movimiento de los animales, la caída de la gota etc., con el barco quieto y luego con el barco desplazándose con un movimiento uniforme. No hay diferencia en la apreciación de los movimientos en ambos casos, es decir: los fenómenos observados son independientes de cambios de una referencia a otra que se desplace respecto a ella con movimiento uniforme y rectilíneo (transformaciones de Galileo).

Así la mecánica clásica es una geometría para el grupo de transformaciones de Galileo.

También está en la Física la razón por la cual, a pesar de su admitida independencia del *mundo real*, la geometría se interesa en espacios de dimensión mayor que tres e incluso de dimensión infinita. Si lanzamos una barra al aire y tratamos de describir su movimiento, basta describir el movimiento de sus extremos, llamémosles  $A$  y  $B$ . Uno, por ejemplo  $A$ , se mueve libremente es decir sus posiciones quedan parametrizadas por los puntos de  $\mathbb{R}^3$  y para cada una de sus posiciones,  $B$  está situado en una esfera de centro  $A$  y radio la longitud de la barra. Por tanto las posiciones de la barra están en correspondencia con los puntos de un espacio de dimensión 5. El movimiento de la barra es una curva en ese espacio y las magnitudes físicas asociadas al movimiento se pueden definir en términos geométricos sobre ese espacio. Si en vez de una barra tratamos con un sistema de  $n$  partículas, el espacio que parametriza sus posiciones (espacio de estados) sería  $\mathbb{R}^{3n}$ , lo que podemos observar (observables) son las funciones sobre ese espacio, funciones que forman un álgebra conmutativa; de esta forma, el par (espacio de estados, observables), es decir (espacio, anillo de funciones), describe también el sistema mecánico.

En la mecánica cuántica, los puntos materiales se substituyen por distribuciones de probabilidad, y el espacio de estados es el espacio de rayos de un espacio de Hilbert, los observables son operadores acotados en el espacio, y la estructura del conjunto de operadores acotados en un espacio de Hilbert, es la de álgebra no conmutativa (álgebra de Von Neumann); ahora la estructura geométrica es más complicada y está ligada a un tipo de estructuras completamente distintas de las correspondientes a la mecánica clásica.

Si queremos estudiar nuestro sistema físico, no sólo globalmente sino también localmente, tenemos que considerar todos los abiertos del espacio de estados y los anillos de observables en ellos; de esta forma se obtiene un concepto de Geometría que D. Pedro cita solamente de pasada quizás por la complejidad de los conceptos que intervienen en ella. Ahora, *una Geometría es un espacio topológico junto con un haz de funciones*. Abstrayendo su origen y limitándonos a las geometrías diferencial o analítica real, exigiremos condiciones más precisas. Una geometría es un par  $(X, \mathcal{F})$  donde:

- $X$  es una variedad topológica de dimensión  $n$ , es decir un espacio

topológico separado localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ , es decir tal que existen: un recubrimiento abierto  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $X$ , abiertos  $\{V_i\}_{i \in I}$  de  $\mathbb{R}^n$ , y homeomorfismos (cartas locales)  $\phi_i : U_i \simeq V_i, \forall i \in I$

- $\mathcal{F}$  es un haz de funciones en  $X$ , es decir una familia  $\{\mathcal{F}(\mathcal{U})\}_{\mathcal{U} \in \mathcal{A}}$  (donde  $\mathcal{A}$  es el conjunto de abiertos de  $X$ ), verificando las propiedades siguientes:
  1. Cada  $\mathcal{F}(\mathcal{U})$  es un subanillo del anillo de funciones continuas sobre  $U$  con valores reales
  2. La familia es cerrada por restricciones, es decir si  $U, V \in \mathcal{A}, U \subset V$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{U})$  contiene a la restricción a  $U$  de toda función de  $\mathcal{F}(\mathcal{V})$
  3. La familia es cerrada por “recolección”, es decir si  $\{U_i\}_{i \in I}$  es un recubrimiento abierto de  $U$  y todas las restricciones de una función continua  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  a los abiertos  $U_i$  están en los  $\mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ , entonces  $f \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$
  4. Las cartas locales inducen, por composición, isomorfismos locales del haz de funciones diferenciables sobre  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathcal{F}$

Aparecen por tanto dos elementos claramente diferenciados, el espacio base de la geometría y el haz de funciones. Entre las condiciones impuestas está que el espacio construido es localmente isomorfo a un “modelo”. En la geometría diferencial real es el que ya hemos indicado, en la geometría analítica compleja es  $\mathbb{C}^n$  con las funciones analíticas y en la algebraica el espectro de un álgebra generada finitamente sobre un cuerpo (esquema afín). También se pueden elegir espacios convenientes para admitir la presencia de singularidades, o se pueden añadir más condiciones, una métrica, una estructura compleja, etc.. Cada uno de los dos elementos que intervienen en la Geometría, tiene un papel propio, aunque ambos no son completamente independientes, e incluso las condiciones impuestas pueden dar lugar a Geometrías rígidas, esto es, determinadas unívocamente por la topología.

Para entender el papel del espacio base podemos recurrir a un cuento escrito en colaboración por Weeks [20] y Abbot [1]. Sus protagonistas son animales fabulosos, las *planarias*. Ellas y su mundo *planilándia* (*flatland*), son descritas así por Abbot:

*Imaginaos una amplia hoja de papel en que líneas, rectas, triángulos, cuadrados, pentágonos, hexágonos y otras figuras, en vez de permanecer fijas en sus lugares, se movieran libremente por todas partes, sobre la superficie o más precisamente dentro de la superficie, sin la capacidad ni de poder alzarse por encima ni de poder hundirse por debajo de ella, muy parecidos a sombras, sólo que consistentes y con los bordes luminosos, y poseeréis una noción bastante correcta de mi país y de mis paisanos.*

Weeks introduce la revolución en planilándia. Uno de sus habitantes, llamado CC (Cristóbal Colón, claro está), intenta convencer a sus paisanos de que habitan sobre una esfera. La noción de esfera es tan abstrusa para una planaria, como la de 3-esfera (que describiremos más adelante) para nosotros, de modo que la tarea de CC es realmente compleja. Afortunadamente tiene una idea genial, para demostrar a sus paisanos la veracidad de su teoría, saldrá de su pueblo caminando hacia el norte en línea recta y aparecerá por el sur tras dar la vuelta a su universo. Felizmente su mundo es pequeño y completa la expedición en poco tiempo. Pero a su regreso continúa chocando con la incredulidad de sus paisanos que le hacen ver amablemente, que además de estar loco tiene una pierna más corta que otra y, creyendo andar en línea recta, se ha movido en un círculo por la llanura.

CC no se desanima y recurre a un nuevo experimento. Repetir el viaje marcando el camino con una línea roja, y luego hará un nuevo viaje saliendo por el este para regresar por el oeste. Así midiendo los pasos caminados en este segundo viaje, si lo que sus paisanos dicen es cierto, la distancia desde el pueblo al punto en que encuentre la línea roja, será distinta de la distancia recorrida desde este punto hasta llegar de nuevo al pueblo. Si, por el contrario, son iguales él es quien tiene razón. Completa la primera expedición e inicia la segunda y tras mucho caminar y antes de encontrar la línea roja, ve ante sí otro pueblo. Corre sorprendido a saludar a sus desconocidos habitantes y al acercarse se da cuenta de que está de nuevo en su punto de salida. Esta vez CC decide ingresar voluntariamente en el manicomio. Por suerte, ya en la puerta, tuvo la suficiente intuición del espacio para comprender que habitaba sobre una rosquilla.

La historia de CC habría sido aun mas difícil si planilándia hubiera sido una banda de Möbius, en este caso se habrían intercambiado su izquierda y su derecha tras su primera vuelta al mundo. Esta perspectiva hace terro-

rífico un viaje de circunnavegación de uno de los tipos posibles de universo tridimensional, se pueden intercambiar el dentro y el fuera del viajero.

Esta fábula nos hace apreciar el papel de la topología del espacio base en la naturaleza global del espacio. El papel del haz de funciones es diferente, permite describir coordenadas locales, medir cuando es posible hacerlo, y sobre todo definir las transformaciones propias de la Geometría y por ende determina las propiedades geométricas. El espacio topológico base no determina el haz de funciones; el ejemplo más simple lo proporcionan las curvas elípticas, estructuras analíticas complejas no isomorfas montadas sobre el mismo espacio topológico base, el toro bidimensional. Un ejemplo más sofisticado y puramente real es el que suministró Milnor construyendo dos estructuras diferenciales no isomorfas sobre la esfera de dimensión 7. Así se puede apreciar que son muy distintos dos problemas generales: el de clasificar módulo homeomorfismos las variedades topológicas y el de clasificar diferenciable o analíticamente todas las variedades diferenciables o analíticas con espacio base prefijado.

Volviendo a las superficies, hemos visto en nuestra fábula que podemos distinguir un toro de una esfera y ello de forma puramente topológica. Cabe preguntarse ahora por la cantidad de superficies esencialmente distintas que podemos encontrar, y cuando decimos esencialmente distintas, queremos decir no isomorfas topológicamente (es decir no homeomorfas).

Normalmente se suelen describir los espacios homeomorfos como aquellos que se pueden transformar uno en otro por una deformación sin cortar ni agujerear. El inconveniente de esta descripción es que de forma insensible imaginamos nuestros espacios como subespacios de  $\mathbb{R}^3$  y así perdemos precisión; por ejemplo un aro de cuerda es homeomorfo al resultado de cortarlo, ó anudarlo, y volverlo a pegar y sin embargo, no es posible en general deshacer el nudo deformándolo en  $\mathbb{R}^3$  sin cortar la cuerda de nuevo, es decir hay que distinguir los problemas de clasificar espacios mediante las relaciones:

- Dos espacios  $X$  e  $Y$  son equivalentes si y solo si son homeomorfos
- Dos espacios  $X$  e  $Y$  sumergidos en un espacio  $Z$  son equivalentes si y sólo si existe un homeomorfismo de  $Z$  en  $Z$  que transforma  $X$  en  $Y$

Ambos son problemas muy distintos, que además admiten variantes, equivalencia homotópica, isotopía, etc, extremadamente sutiles. Si nos limitamos

a la primera clasificación y para superficies compactas y conexas, es bien sabido que el grupo de Poincaré (grupo fundamental) suministra un sistema completo de invariantes. Más precisamente:

*El abelianizado del grupo fundamental de una superficie conexa compacta  $X$  es:*

- $\mathbb{Z}^{2g}$  si  $X$  es orientable
- $\mathbb{Z}^{g-1} \times \mathbb{Z}/2$  si  $X$  es no orientable

*Dos superficies son homeomorfas si y sólo si los abelianizados de sus grupos fundamentales son isomorfos*

El número  $g$  se llama el género de la superficie; entonces dos superficies orientables son homeomorfas si y sólo si tienen el mismo género y lo mismo sucede con las no orientables. En particular, la única superficie compacta y conexa simplemente conexa (es decir con grupo fundamental trivial) es la esfera de dimensión 2 (2-esfera).

De forma optimista podríamos intentar buscar un resultado similar para dimensión tres, es decir buscar un sistema completo de invariantes para variedades topológicas tridimensionales, pero el problema es enormemente más complicado y está lejos de ser resuelto.

Para entender un poco mas el grado de complejidad del problema , tratemos de imaginar como es la 3-esfera, es decir la esfera en el espacio de dimensión cuatro. Naturalmente cabe pensar en la 3-esfera como el conjunto de los puntos  $(x, y, z, t)$  del espacio real de dimensión 4 que verifican la ecuación:  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$  , pero esto no da idea de su forma. Podemos recurrir a la proyección estereográfica, es decir la proyección de la esfera desde uno de sus puntos (polo de la proyección) sobre el hiperplano tangente en el punto diametralmente opuesto, como la aplicación es un homeomorfismo de la esfera menos el polo sobre el hiperplano; la  $n$ -esfera sería el resultado de añadir al espacio de dimensión  $n$  un punto en el que se colapsaría todo el infinito, pero así sólo se ven bien las esferas de dimensiones 1 y 2 para las que esta descripción no es tampoco necesaria.

Un método topológicamente más adecuado es comenzar por la esfera de dimensión 0, es decir los puntos  $+1$  y  $-1$  en la recta. Estos puntos limitan la bola de dimensión uno, que es el segmento de extremos  $+1$  y  $-1$ . Pegando dos bolas de dimensión uno por su borde, es decir el  $+1$  de la primera con

el de la segunda y lo mismo el  $-1$ , se obtiene topológicamente, es decir tras una pequeña deformación, una circunferencia, que limita el círculo o bola de dimensión dos. Pegando dos círculos por su borde se obtiene una esfera que encierra una bola de dimensión tres, pegando dos bolas por su borde, es decir tomando dos esferas terrestres e identificando cada punto de la primera con el punto de la segunda con su misma longitud y latitud, se obtiene la esfera tridimensional.

Entonces, la traslación a la 3-esfera de la caracterización topológica de la 2-esfera, que sería el escalón mas sencillo en la clasificación de variedades tridimensionales, es la llamada conjetura de Poincaré: la 3-esfera es conexa, compacta y simplemente conexa (es decir cualquier lazo trazado sobre ella se puede contraer hasta cerrarlo en un punto). Poincaré conjeturó que estas propiedades son características de la 3-esfera, es decir que toda variedad tridimensional conexa, compacta y simplemente conexa es homeomorfa a la 3-esfera. La conjetura de Poincaré tiene una generalización natural:

*Toda variedad topológica con los mismos invariantes (homología y grupo fundamental) de una esfera de dimensión  $n$  es homeomorfa a ella.*

Hemos visto la respuesta afirmativa a esta conjetura para  $n = 2$ , que era ya bien conocida en el siglo XIX. Para  $n$  mayor o igual que 5, la conjetura fue probada en los años 60 por Smale. En 1982 M. H. Freedman probó la conjetura para  $n = 4$ , más aun proporcionó una clasificación completa de las variedades topológicas de dimensión 4 compactas y simplemente conexas por medio de dos invariantes.

Sin embargo en su formulación inicial, es decir para la 3-esfera, la conjetura de Poincaré aun no ha sido probada. J.M. Montesinos tiene interesantes resultados en el problema general de clasificación de variedades tridimensionales así como una conjetura [14] que generaliza la de Poincaré y es más fina que otra generalización, la de Waldhausen, cuya falsedad probaron Boileau y Zieschang en 1984.

Entender las variedades diferenciales de dimensión tres, fue el trabajo de Thurston que le valió la medalla Fields en 1982 y fue la primera revolución en la geometría en baja dimensión. C.T.C. Wall en la descripción de la obra de Thurston hecha con motivo de su medalla Fields en el I.C.M. de 1983, observa que:

*La topología en dimensión 3 tenía una fuerte tradición de técnicas de*



*“manos desnudas” y relativamente poca interacción con otros temas; tras la obra de Thurston los argumentos directos continúan jugando un papel esencial, pero la topología 3-dimensional ha retornado a la corriente principal de las matemáticas.*

La idea básica del trabajo de Thurston es considerar el caso tridimensional como análogo al bidimensional, suponiendo que una clase muy amplia de variedades tridimensionales admiten una estructura hiperbólica, es decir son cocientes del espacio hiperbólico por grupos discretos de isometrías o lo que es lo mismo admiten una métrica de curvatura constante negativa. La prueba de esta conjetura para la clase de variedades de Haken le permitió dar un teorema de estructura para las variedades diferenciales compactas en dimensión 3.

Para analizar la clasificación de acuerdo con el segundo criterio, nos encontramos con el problema natural de sumergir nuestras variedades en un espacio euclídeo, es decir: dada una variedad topológica (resp. diferenciable)  $X$  de dimensión  $n$ , ¿cuándo y para qué valores de  $m$  existe una inmersión (resp. inmersión diferenciable) de  $X$  en el espacio  $\mathbb{R}^m$ ? Y el mismo problema se puede plantear en los contextos analítico complejo o algebraico sobre un cuerpo cualquiera. Vamos a analizar con mas detalle este problema, no sólo por su interés, sino también porque en puntos trascendentales del mismo aparecen nombres españoles.

En los años treinta del pasado siglo, la topología se limitaba a estudiar casi únicamente subconjuntos muy especiales de espacios euclídeos, los complejos geométricos simpliciales, aunque Frechet había introducido los espacios abstractos en 1906. El punto, el segmento, la region plana limitada por un triángulo, la porción de espacio limitada por un tetraedro y en general el cierre convexo de  $p + 1$  puntos afínmente independientes, se llaman símlices de dimensión  $0, 1, 2, 3, p$ . El borde de un símlice está compuesto por símlices de dimensión inferior que se llaman caras del símlice. Un complejo geométrico en  $\mathbb{R}^n$  es una colección finita  $\mathbf{K}$  de símlices de  $\mathbb{R}^n$ , tal que si un símlice está en  $\mathbf{K}$  todas sus caras están en  $\mathbf{K}$  y dos símlices distintos de  $\mathbf{K}$ : son disjuntos, uno de ellos es una cara del otro ó tienen una cara común. Se llama dimensión del complejo a la dimensión de uno de sus símlices de dimensión máxima.

Es claro que un complejo geométrico está determinado, salvo su posición en el espacio ambiente, por la simple enumeración de los vértices de sus

símplices (caras 0-dimensionales). Así se puede definir un complejo abstracto, como una familia de subconjuntos  $\{\mathbf{s}_p^j\}$  de un conjunto finito  $\{a_1, \dots, a_n\}$  cuyos elementos se llaman vértices del complejo. Cada uno de los  $\{\mathbf{s}_p^j\}$  se llama símplex  $p$ -dimensional, está compuesto por  $p + 1$  vértices distintos, y en el complejo abstracto:

- Figuran como símplex 0-dimensionales todos los conjuntos  $a_i$
- Todos los subconjuntos de un símplex son símplex (llamados caras del primero)

El máximo de los  $p$  se llama dimensión del complejo abstracto.

Se llama realización geométrica  $n$ -dimensional de un complejo abstracto a una aplicación inyectiva de su conjunto de vértices en  $\mathbb{R}^n$  que transforme cada símplex abstracto  $\{\mathbf{s}_p^j\}$  en el conjunto de vértices de un símplex  $p$ -dimensional  $\{\mathbf{S}_p^j\}$ , de modo que la familia de los  $\{\mathbf{S}_p^j\}$  sea un complejo geométrico.

Menger y Nöbeling demostraron en 1931 que todo complejo abstracto  $n$ -dimensional admite una realización de dimensión  $2n + 1$ . Y Menger dió un ejemplo de un complejo de dimensión uno que no admite realización bidimensional. El complejo llamado *doble configuración tetraédrica de Menger* es (Figura 1):

$$\{\{a_1\}, \{a_2\}, \{a_3\}, \{a_4\}, \{a_5\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_3\}, \{a_1, a_4\}, \{a_1, a_5\}, \\ \{a_2, a_3\}, \{a_3, a_4\}, \{a_2, a_4\}, \{a_2, a_5\}, \{a_3, a_5\}, \{a_4, a_5\}\}$$

Es decir son cinco puntos unidos dos a dos de todas las formas posibles. Es fácil ver que este complejo no admite una realización bidimensional, porque cinco puntos del plano no se pueden unir dos a dos sin que los caminos que los unen se corten. En el espacio tridimensional admite una realización aplicándolo sobre los vértices de dos tetraedros con una cara común.

Kuratowski propone otro ejemplo del mismo tipo. Dados seis puntos del plano divididos en dos grupos de tres, es imposible unir cada punto de uno de los grupos con los tres del otro sin que se corten las líneas que los unen (problema de las tres casas y las tres fuentes). Más aún, demuestra que todo complejo de dimensión uno que no admite una realización bidimensional, contiene uno de los dos ejemplos que hemos construido.

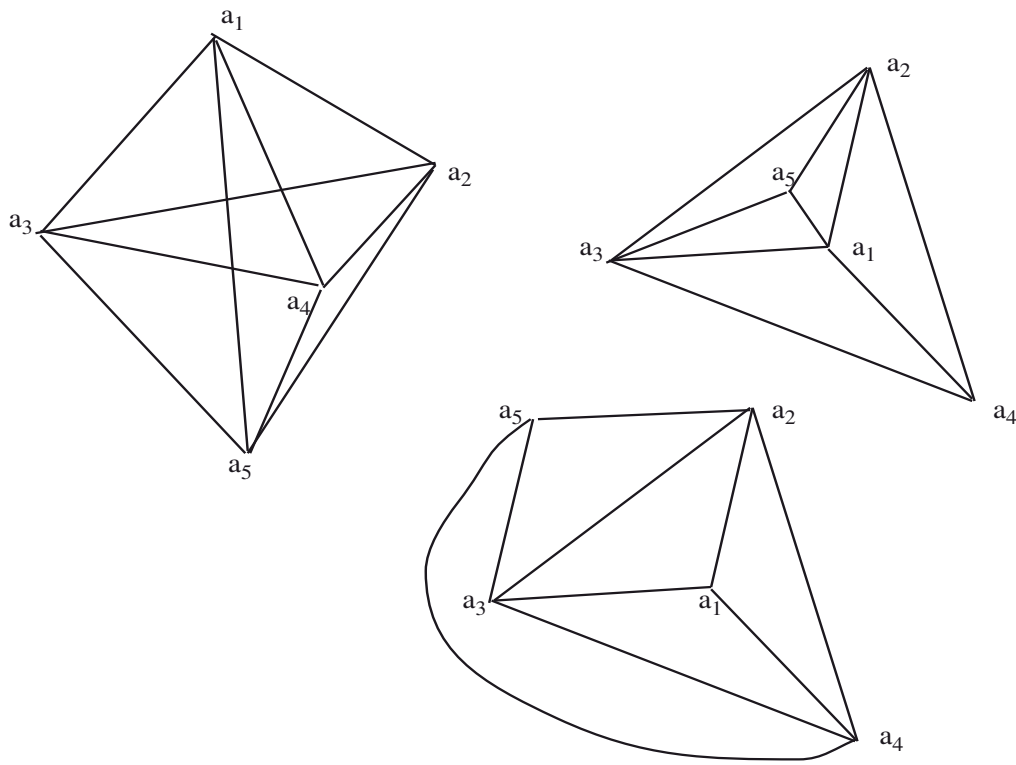


Figura 1: El doble tetraedro, a la izquierda, no admite una realización plana. Si, en el plano,  $a_1$  se coloca en el interior del triángulo  $\{a_2, a_3, a_4\}$ , esté  $a_5$  dentro o fuera de este triángulo, no se puede completar la configuración sin intersecciones, como se aprecia en las dos figuras de la derecha.

Menger y Nöbeling plantean el problema de si existe para todo  $n$ , un complejo  $n$ -dimensional que no admite realizaciones de dimension  $2n$ . La primera solución correcta del problema se debe a Flores de Lemus [5], que es capaz de dar dos familias de ejemplos en todas las dimensiones que generalizan los de Menger y Kuratowski.

Es también otro español, E. Lluís, quien, mas de 20 años después, demuestra un resultado análogo para variedades algebraicas:

*Toda variedad algebraica proyectiva de dimensión  $n$  admite una inmersión en un espacio proyectivo de dimensión  $2n + 1$  y existen variedades de dimension  $n$  no sumergibles en un espacio de dimensión  $2n$ .*

El paso del problema topológico al diferencial o al algebraico se complica

más cuanto más compleja es la estructura añadida. La existencia de particiones de la unidad es el método de prueba de Whitney, en el caso diferencial y un método de proyección es el método de Lluís.

En su demostración, válida para cuerpos de cualquier característica, Lluís hace un descubrimiento importante: Como es fácil de comprobar, si se impone a una curva diferenciable real la condición de que todas sus tangentes pasen por un punto fijo se obtiene que la curva es una recta. Este resultado es cierto para curvas algebraicas sobre cuerpos de cualquier característica salvo en el caso de característica 2. Si  $K$  es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica 2, la cónica proyectiva irreducible sobre  $K$  tiene la propiedad de que todas sus tangentes pasan por un punto y es la única curva no singular con esta propiedad.

Siempre sobre cuerpos algebraicamente cerrados de característica 2, existen otras curvas con esta propiedad, pero son singulares. A todas ellas Lluís les llama curvas extrañas, generalizando esta definición a variedades de dimensión arbitraria, Lluís obtiene una familia de variedades que han proporcionado contraejemplos para numerosas conjeturas.

El problema de la inmersión está ligado a la posibilidad de hablar de *forma de una variedad*. En la Geometría clásica, trabajando con subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , parece razonable hablar de un espacio que se curva o hablar de forma de un espacio, pero con nuestro planteamiento, no tenemos un espacio ambiente, ¿qué sentido tiene hablar de un espacio que se curva? Para comprender la solución de este problema volvamos de nuevo a nuestra fábula, y esta vez tomándonos, si cabe, mas libertades matemáticas que en la fábula anterior.

Imaginemos ahora una sola planaria llamada  $S$  situada en el centro de un círculo de cien pasos de diámetro.  $S$  avanza un paso hacia el borde, es decir en cualquier dirección, y aunque ella no aprecia nada, nosotros observamos que su tamaño disminuye y lo hace en la cantidad precisa para que le sigan quedando 100 pasos hasta el borde, y así pasa cada vez, cuanto más se acerca al borde se hace más y más pequeña, y aunque para nosotros se aproxima a salir del círculo, a ella le queda siempre la misma cantidad de camino. Su Universo, acotado desde nuestro punto de vista, es para ella infinito.

Es fácil construir este universo, o más precisamente uno un poco más complejo pero con la misma propiedad. Basta definir una distancia en el círculo en la forma siguiente:

Si  $A$  y  $B$  están en el interior del círculo, la recta  $AB$  corta a su borde en dos puntos  $C$  y  $D$ , se llama entonces distancia de  $A$  a  $B$  al logaritmo neperiano del valor absoluto de la razón doble  $[C, D; A, B]$ , es decir:

$$d_H(A, B) = \log|[C, D; A, B]| = \log\left|\frac{CA \cdot DB}{AB \cdot CD}\right|$$

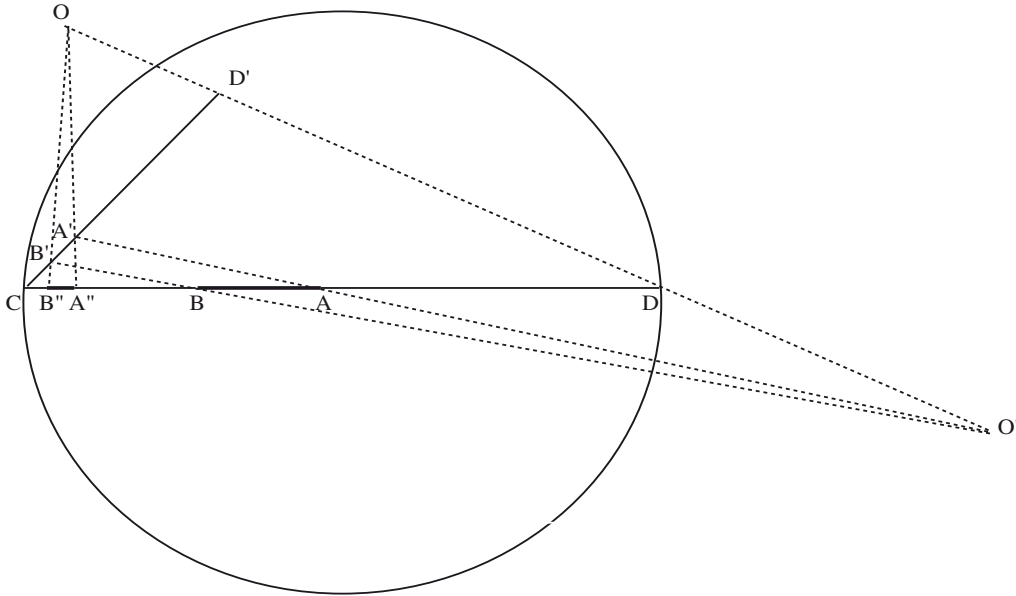


Figura 2: Por proyección desde  $O'$ ,  $[C, D; A, B] = [C', D'; A', B']$  y por proyección desde  $O$ ,  $[C', D'; A', B'] = [C'', D''; A'', B'']$ , luego la distancia de  $A$  a  $B$  coincide con la distancia de  $A''$  a  $B''$ .

Con esta distancia, el interior del círculo tiene estructura de espacio métrico. Espacio muy interesante además porque de hecho es el modelo de Beltrami del plano hiperbólico. Las líneas de mínima distancia (rectas) son los segmentos de recta intersecados por el círculo, y la geometría del círculo tiene las propiedades de la euclídea, salvo las derivadas del célebre “quinto postulado” (por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela a ella), que obviamente no es válido en el mundo de S. Como la razón doble es invariante por proyección, es fácil convencerse de que puntos

próximos al borde aparentemente más cercanos entre sí que puntos próximos al centro, están sin embargo a la misma distancia con nuestra métrica, y que la distancia de cualquier punto del interior del círculo al borde es infinita.

¿Pero qué tiene que ver esta métrica con la forma? Podemos repetir de nuevo nuestra fábula. Imaginemos dos rectas paralelas en el plano situadas a igual distancia a uno y otro lado de una recta  $r$  y tracemos una curva asintótica a ambas rectas y simétrica respecto a  $r$ , a continuación giremos la figura en torno a  $r$  construyendo así un cilindro de revolución con una superficie en su interior asintótica al cilindro. Supongamos que la superficie es transparente y iluminémosla con un foco en el infinito para que se proyecte en una pantalla ortogonal al cilindro. Coloquemos ahora a  $S$  en el vértice de la superficie. En la pantalla veremos un círculo con  $S$  en su centro, si ahora  $S$  se mueve en la superficie, su sombra se desplazará por el círculo, pero nunca llegará al borde, porque ahora  $S$  deberá recorrer una distancia verdaderamente infinita para que esto sucediera. El habitat de  $S$  tiene ahora nuestra métrica, pero tiene forma y el efecto es el mismo. Es decir la forma no es sino una métrica distinta, y cabe hablar de curvatura de la métrica en lugar de curvatura del espacio.

De un modo formal podemos definir una métrica de Riemann en una variedad diferenciable, como una familia de métricas en los espacios tangentes que varían diferenciablemente con el punto. La longitud de un arco de curva diferenciable se calcula integrando la medida de su vector tangente, y la distancia, se obtiene como solución de un problema variacional de mínimo de las longitudes de arcos que unen dos puntos. En particular, la métrica estándar de  $\mathbb{R}^n$  induce una métrica de Riemann en sus subvariedades.

Schlafi conjeturó que dada una variedad diferenciable de dimensión 2 con una métrica de Riemann, la variedad se puede sumergir localmente en  $\mathbb{R}^3$ , de modo que la inmersión sea una isometría, si se dota su imagen de la métrica inducida por la del espacio ambiente. La superficie imagen está curvada y la forma de medir en ella es la usual; así se puede considerar que hablar de métrica es una manera de hablar de forma. La conjetura de Schlafi fue demostrada por Janet y Cartan, pero subsiste el problema de la existencia de una inmersión isométrica global, que salvo en casos muy particulares está abierto.

Una vez analizada la posibilidad de existencia de inmersiones, podemos

volver a nuestro segundo planteamiento del problema, la clasificación de variedades sumergidas en un espacio ambiente y hablaremos de ella sólo en un caso particular.

Todos tenemos una idea intuitiva de los objetos geométricos llamados formalmente nudos y trenzas, basta tomar una cuerda, anudarla de la forma que se desee y pegar después sus extremos, así tenemos una figura homeomorfa a una circunferencia pero que, a menos que hayamos hecho los nudos de una forma muy especial, no puede transformarse en una circunferencia sin cortarla, desanudarla y volverla a pegar. Dos nudos que pueden transformarse uno en otro sin cortar la cuerda, se llaman equivalentes. Formalmente se consideran los nudos sumergidos en la esfera y orientados, y se llaman isótopos si existe un homeomorfismo lineal a trozos de la esfera en sí misma que conserva la orientación y transforma uno en otro. Una propiedad compartida por un nudo y los equivalentes a él se llama un invariante

La primera propuesta de clasificación sistemática de nudos se debe a un físico, P. Tait. Tait se interesó por la clasificación de los nudos porque en 1867 Lord Kelvin conjeturó que los átomos eran tubos anudados de éter. Así el intento de Tait de clasificar los nudos y las coligaciones (una coligación -link- es una colección de nudos entrelazados) por los puntos de cruzamiento de sus proyecciones planas, abrió la puerta a una fundamentación de la clasificación de los elementos químicos.

Cuando una veintena de años después, el modelo de Kelvin desapareció, ya estaba lanzado a los matemáticos el desafío de la clasificación de nudos. El polinomio invariante de Alexander, descubierto en 1927, resultó ser una herramienta mejor que las empleadas por Tait y los resultados de Brauner y Burau, encaminados a describir localmente y desde el punto de vista real las curvas analíticas irreducibles complejas, que veremos a continuación, dieron nuevo interés a la teoría de nudos, esta vez dentro exclusivamente de las matemáticas.

Una curva analítica plana es el conjunto de ceros de una función analítica compleja de dos variables. El plano complejo se puede identificar al espacio real de dimensión cuatro, y, como la anulación de una función compleja equivale a la anulación de sus partes real e imaginaria, una curva analítica compleja se puede visualizar como una superficie real en  $\mathbb{R}^4$  con una singularidad aislada en el origen. Esta superficie es transversal a una tres esfera

centrada en el origen y de radio suficientemente pequeño, de modo que la intersección de ambas es una curva esférica cerrada y no singular. La proyección estereográfica de esta curva es un nudo en  $\mathbb{R}^3$ , nudo que no depende de la esfera (si el radio de ésta es lo suficientemente pequeño).

La forma del nudo es muy curiosa. Un toro hueco se obtiene pegando una superficie cilíndrica por sus extremos, cuidando de no anudarla. Tiene por tanto dos agujeros, el central y el envuelto por la superficie cilíndrica. Si consideramos un toro y arrollamos sobre él una cuerda que antes de cerrarse da  $m_1$  vueltas en torno al agujero central y  $n_1$  en torno al otro, tenemos un nudo tórico de género 1. Si ahora inflamamos la cuerda para convertirla en un toro anudado y repetimos el proceso tenemos un nudo tórico de género 2 y así sucesivamente. Brauner y Burau probaron que las curvas analíticas daban lugar a nudos tóricos de género finito y que los exponentes característicos del nudo  $(m_1, n_1), \dots, (m_g, n_g)$ , que son un sistema completo de invariantes del mismo, se podían calcular directamente a partir de las series de potencias de exponentes fraccionarios que Puiseux había demostrado eran las soluciones de la ecuación (ecuaciones de las ramas). Este resultado sirvió a Zariski como base de la llamada teoría de la equisingularidad, una de las ramas más estudiadas de la geometría algebraica en los años 70.

A finales de los 80, Cameron, Gordon y Luecke probaron que los complementos de dos nudos son homeomorfos si y sólo si los nudos son isótopos, resultado que no es válido para las coligaciones. De este modo el estudio de los nudos es de enorme interés para la clasificación topológica de las tres variedades, al menos de aquellas que son complementos de nudos. Salvo para un tipo muy particular de nudos las variedades complementarias de los nudos admiten una estructura hiperbólica (precisamente las variedades estudiadas por Thurston).

Al mismo tiempo, V. Jones hizo otro descubrimiento sorprendente, esta vez relacionado con una estructura muy próxima a los nudos, las trenzas. Una trenza (braid) no es más que una colección de cuerdas que unen puntos situados en planos paralelos y se han entrelazado entre sí sin anudar unas con otras. Dos trenzas del mismo número de cuerdas se pueden componer sin más que unir los extremos de una con los orígenes de la otra; así se puede dotar el conjunto de clases de trenzas, de un número de cuerdas dado, de una estructura algebraica de grupo. Artin en 1923 dió una descripción de estos



grupos en términos de generadores y relaciones. Claramente una trenza da lugar a una coligación si se pegan los extremos de las cuerdas que la forman. Alexander probó en 1928 que todas las coligaciones se pueden obtener de esta forma.

V. Jones en 1984 descubrió una relación entre las álgebras de von Neumann de las que hemos hablado en conexión con la mecánica cuántica y los grupos de trenzas: los conjuntos de generadores y relaciones de las álgebras de Von Neumann coinciden con los de los grupos de trenzas; así los grupos de trenzas y las coligaciones tienen una vía natural de conexión con la mecánica cuántica.

Usando esta analogía Jones descubrió en 1987 un nuevo polinomio invariante de los nudos y abrió un camino para la búsqueda de polinomios invariantes (en poco tiempo aparecieron media docena más de ellos, uno de los cuales el HOMFLY fue descubierto simultáneamente por seis matemáticos cuyas iniciales dan nombre al polinomio) y también abrió la puerta a los trabajos de E. Witten, que extendió estos invariantes a tres variedades generales (es decir no necesariamente complementarias de nudos). Otro de los resultados esenciales de Witten ha sido la interpretación de los invariantes de Jones como integrales de Feynman de una teoría gauge tridimensional; esta interpretación permite extender la teoría de Jones de nudos en la esfera tridimensional a nudos en variedades arbitrarias de dimensión tres.

Claramente quedan justificadas las palabras de M. Atiyah referidas a Witten:

*En este amplio y excitante campo, en el que trabajan muchos de los físicos y matemáticos mas importantes del mundo, Edward Witten se presenta como la figura más influyente e importante, aunque es definitivamente un físico y así lo demuestra claramente su lista de publicaciones, pocos matemáticos rivalizan con él en el dominio de las matemáticas, y su habilidad para interpretar ideas físicas en forma matemática es única. Una y otra vez ha sorprendido a la comunidad matemática por sus brillantes aplicaciones del punto de vista físico para obtener nuevos y profundos teorema matemáticos.*

Otra forma de entender las álgebras de Von Neumann se obtiene usando una construcción clásica de la geometría algebraica y de la teoría de Galois: en el caso clásico, es decir con las álgebras conmutativas, un espacio está determinado esencialmente por su álgebra de funciones; al extender esta idea

al caso no conmutativo, podemos dualizar las álgebras y asociarles los objetos conocidos por grupos cuánticos. Trabajos muy recientes de Umemura muestran que la teoría de Galois de ecuaciones diferenciales no lineales, desarrollada por Jules Drach a principios del pasado siglo, ya utiliza, si bien implícitamente, los grupos cuánticos como grupos de Galois de este tipo de ecuaciones.

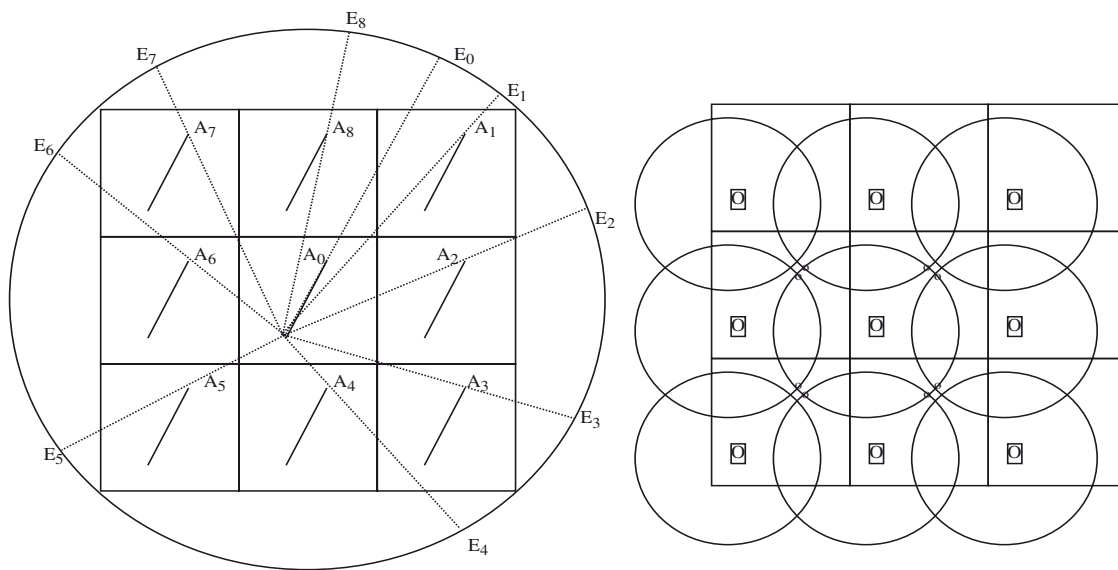
Aunque desde un principio hemos admitido la desconexión entre la geometría y nuestro espacio ambiente, algo podemos decir sobre la geometría posible de nuestro espacio. Durante mucho tiempo los cosmólogos pensaron que la teoría de la relatividad general suministra suficiente información para conocer la geometría del espacio-tiempo, pero las ecuaciones de Einstein que relacionan la curvatura con la materia son de naturaleza puramente local y para conocer la estructura global de nuestro espacio necesitamos no sólo conocer la curvatura sino también información sobre la topología del universo. En un artículo reciente, Cornish y Weeks [3] establecen de modo claro la situación actual de nuestro conocimiento del problema, aceptando como es habitual las hipótesis de homogeneidad e isotropía del universo.

Esta aceptación no es gratuita. En 1965 Penzias y Wilson descubrieron un resto de la *gran explosión* que dió origen a nuestro universo, una radiación de microondas a aproximadamente tres grados Kelvin a la que se denomina por sus siglas CMB. La isotropía de esta radiación permite suponer, a gran escala, que el universo admite secciones espaciales tridimensionales de curvatura constante, es decir que el continuo espacio-temporal es  $\mathbb{R} \times \mathcal{M}$ , donde  $\mathcal{M}$  es una tres variedad de curvatura constante. La métrica en la sección  $\mathcal{M}_t$  correspondiente a un instante  $t$  es producto de un factor de escala por la métrica estándar de curvatura constante.

Debemos pues describir las variedades de dimensión tres de curvatura constante, 0 (modelo euclídeo), 1 (modelo elíptico) y -1 (modelo hiperbólico). Con estas hipótesis, en los casos elíptico e hiperbólico la topología determina completamente la geometría, es decir al suponerse la curvatura constante, dos variedades elípticas o hiperbólicas homeomorfas son isométricas, lo que no sucede con las elípticas.

Volvamos por última vez al mundo plano, pero ahora a uno más parecido al nuestro, un universo bidimensional con un mundo circular en cuya superficie, la circunferencia, vive una planaria. El mundo está iluminado por un sol y el

universo es un toro, por ejemplo es el cociente del plano euclídeo por el grupo de traslaciones generado por las traslaciones de vectores  $(1,0)$  y  $(0,1)$ . Si el universo es lo suficientemente pequeño la planaria vería su cielo tachonado de estrellas, todas ellas imágenes ilusorias de su sol, resultado de dar la luz vueltas alrededor del universo. La diferencia de las distancias aparentes a las estrellas produciría variaciones en su brillo que haría creer a la planaria que se trataba realmente de estrellas distintas (Claro está que un espectrómetro la podría sacar de su error)



**Figura 3:** En un Universo bidimensional toroidal con una sola estrella, el observador vería estrellas en todas direcciones, más débiles en brillo cuando corresponden a dominios más distantes. En la figura de la derecha se aprecia cómo las esferas de última emisión se cortan en círculos. Actualmente se intenta detectar esos círculos, que de encontrarse determinarían la topología del universo

Nuestro Universo podría ser similar con una dimension más, por ejemplo en el caso de curvatura cero, podría ser un toro espacial resultado de identificar caras opuestas en un paralelepípedo. En un caso así y al igual que le pasaba a la planaria, cabría la posibilidad de que alguna de las galaxias

que observamos fuera la nuestra, pero eso es difícil de averiguar. Hay un experimento mas fácil y que está ya en marcha basado en la CMB.

En cierto sentido la CMB contiene registros de la gran explosión, los fotones de la CMB se originan, según el modelo cosmológico que usamos, aproximadamente a los 300.000 años de la explosión, en un momento en que el universo completo está lleno de plasma que se condensa a gas. Así esos fotones se originan en todos los puntos del universo y viajan isotrópicamente en todas direcciones, de este modo los que llegan a nosotros en cada momento se han originado en una esfera que nos tiene por centro: la esfera de última emisión. Y lo mismo sucede para cualquier otro observador del universo.

Desde nuestro punto de vista el mapa de la CMB presenta ligeras variaciones de temperatura de microondas, el mapa de la CMB correspondiente a otro punto del Universo sería diferente, pero a lo largo de la circunferencia intersección de las esferas de última emisión, ambos mapas serían iguales. Ahora bien si el universo es finito, nosotros lo vemos como si ocupásemos distintas posiciones a la vez, sólo que los fotones que nos alcanzan corresponden a esferas de emisión de distintas épocas, eso motivaría la aparición de circunferencias en la CMB que serían identificables y nos darían una idea de la forma real de nuestro universo.

## Referencias

- [1] Abbot E.A.: *Planilandia*. Guadarrama, Madrid 1976 (Traducción de un original de 1884).
- [2] Abellanas P.: *Unas reflexiones sobre la biografía de la Matemática* (Discurso apertura curso 1979-80). Univ. Complutense Madrid 1979.
- [3] Cornish N.J., Weeks J.R.: *Measuring the shape of the Universe*. Notices of the A.M.S., vol 45, num. 11, 1998.
- [4] Donaldson S.K., Kronheimer P.B.: *The Geometry of four manifolds*. Clarendon Press, Oxford 1990.
- [5] Flores de Lemus A.I.: *Über die Existenz  $n$ -dimensionaler Komplexe, die nicht in den  $\mathbb{R}^{2n}$  einbettbar sind*. Erg. Math. Kolloq. 6, 1933 (Traducido al español en Theoria vol VII, 1993).

- [6] Gray J.: *Ideas of Space*. Oxford Univ. Press, Oxford 1979.
- [7] Güell, Vizconde de: *Espacio, relación, posición*. Espasa Calpe, Madrid 1924.
- [8] Hartshorne R.: *Geometry: Euclid and beyond*. Springer Verlag, New York 2000.
- [9] Hilbert D.: *Gründlagen der Geometrie*. Teubner, Leipzig 1968 (Reedición de un original de 1899).
- [10] Hugget S.A., Mason L.J., Tod K.P., Tsou S.T., Woodhouse N.M.J. Editores: *The Geometric Universe (Science, Geometry and the Work of Roger Penrose)*. Oxford University Press, Oxford 1998.
- [11] Klein F.: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Math. Ann. 43, 1893 (Reedición corregida del “Programa de Erlangen” de 1872).
- [12] Laugwitz D.: *Differential and Riemannian Geometry*. Academic Press, New York 1965.
- [13] Lluís E.: *Sur l’immersion des variétés algébriques*. Ann. of Math. 62 (1955).
- [14] Montesinos J.M.: *Números, combinatoria y nudos: de lo discreto a lo continuo* (Discurso inaugural del curso 1996-97). Real Acad.de Ciencias, Madrid 1996.
- [15] Parrini P.: *Física e Geometría dall’ottocento a oggi*. Loescher Ed. Torino 1979.
- [16] Poincaré H.: *La Science et l’Hypothèse*. Flammarion, Paris 1968 (Reedición de un original de 1902).
- [17] Raymond Lickorish W.B.: *An Introduction to Knot Theory*. Springer, New York 1997.

- [18] Stillwell J.: *Sources of Hyperbolic Geometry*. History of Math. vol 10, A.M.S. Providence 1996 (contiene traducciones comentadas de los artículos fundacionales de Beltrami (1868), Klein (1871) y Poincaré (1881, 1882)).
- [19] Torreti R.: *Philosophy of Geometry from Riemann to Poincaré*. D.Reidel Pub. Comp., Dordrecht 1984.
- [20] Weeks J.: *The shape of space*. Marcel Decker, New York 1980.
- [21] Wen - tsün W.: *A theory of imbedding, immersion and isotopy of polytopes in an euclidean space*. Science Press, Peking 1965.
- [22] Yaglom I.M.: *A simple Non-Euclidean Geometry and its Physical basis*. Springer Verlag, New York 1969.

# Sobre la Ley de Hardy–Weinberg

**Alberto Pérez de Vargas Luque**

*Departamento de Biomatemática  
Universidad Complutense de Madrid*

## **Abstract**

*This paper, dedicated to the memory of Prof. P. Abellanas, deals with an interesting Biomathematic law and it is addressed to Mathematic Teachers non-specialist in these subjects.*

Probablemente un día después, quizá dos, de aquel en el que fuera fechada, el 22 de noviembre de 1985, recibí en mi despacho una carta manuscrita de don Pedro Abellanas. Era la primera vez que una cosa así me sucedía y nunca antes habría podido imaginarme receptor de una carta escrita y remitida desde su casa por quien era para mí un maestro, un personaje cuya dimensión siempre me pareció lejos, muy lejos, de mis posibilidades de alcance. Ciertamente que para entonces ya existía una larga relación y podían contarse muchos encuentros con aquel hombre singular al que los estudiantes de mi tiempo mirábamos con una mezcla de miedo, de veneración y de respeto. Alumno, primero, ayudante suyo después, discípulo, visitador frecuente de su despacho, en la Facultad o en el Consejo, y, a veces, de su propia casa, no podía entonces imaginarme destino de una carta personal de don Pedro. Pero, aún menos pensaba en que de una personalidad como la suya pudiese surgir un escrito tan bello, con tal sentido de la amistad y de la grandeza del quehacer universitario. La carta, que guardo como algo íntimo y querido, empezaba, empieza, de este modo: “Mi querido amigo y colega: El paso de los años proporciona la adquisición de la Sabiduría, que fundamentalmente consiste en el conocimiento de las personas con mayor nitidez; esto, generalmente, es triste porque manifiesta el equívoco, la cobardía y la envidia, pero en algún caso también muestra la nobleza, la valentía y la amistad”.

Durante muchos años visité a don Pedro en su casa de la sierra madrileña, alguna vez con mi familia pero generalmente solo. Conversaciones sin prisa, con apenas alusiones a la Matemática o a la Universidad, me permitieron llegar más

allá de lo que jamás podría haber esperado. Yo sabía, supongo que todos lo que le han conocido de cerca también, cuándo había llegado el momento de terminar, de levantarse y de despedirse, y por ello podía escucharle sin distraerme pensando en cómo finalizar la entrevista. Afortunadamente, recuerdo con sensación de presente, muchas de las innumerables entrevistas que mantuve con él, desde los primeros años sesenta, cuando era un estudiante muy joven, hasta pocos meses antes de su fallecimiento. Se da la circunstancia de que entre sus numerosos discípulos seguramente seré de los que tuvieron con él una menor vinculación académica. Muy tempranamente obtuve la cátedra de Instituto y luego permanecí bastantes años fuera de España, al regreso gané enseguida la cátedra de Universidad y todo ello limitó considerablemente el tiempo que estuve ligado a su Departamento universitario. En cambio, debo ser uno de los que más veces y en más ocasiones ha mantenido con don Pedro una conversación variada no necesariamente relacionada con las circunstancias que me habían situado en su entorno.

He pensado que a don Pedro le gustaría que escribiese sobre algo que ajeno a la Matemática pudiese ser un ejemplo sencillo en el que poner de manifiesto con naturalidad su universalidad y su elegancia, sirviendo a quien explica para ser entendido y a quien entiende que nuestra disciplina tiene un valor instrumental extraordinario que debe ser mostrado tanto a los que deciden dedicarse a su cultivo y a dar noticia de su método, como a los que debieran aprender sus modos y sus formas para mejor penetrar en la inmensidad integrada de la Naturaleza.

## La herencia biológica

Como es sabido, un monje del monasterio de Brunn, en Moravia, Gregor Johann Mendel, que vivió entre los años 1822 y 1884, realizó unos experimentos que le condujeron al enunciado de las leyes que regulan la herencia biológica, las llamadas leyes de Mendel. Cultivó 34 variedades de un guisante, *Pisum sativum*, y escogió las 22 que a lo largo de dos años previos y en los sucesivos, se habían mostrado constantes en la permanencia de determinados caracteres tales como semilla lisa o rugosa, vaina lisa o estrangulada, longitud del tallo, normal o enano, y así hasta siete alternativas. Cruzando plantas diferenciadas por un carácter, observó que éste era idéntico en la primera generación filial ( $F_1$ ) a una de las plantas progenitoras, llamó entonces *dominante* al carácter repetido y *recesivo* al otro. Siendo el resultado uniforme en  $F_1$ , no era tal el caso en  $F_2$ , segunda generación



obtenida por autofecundación a partir de  $F_1$ , sino que la proporción entre caracteres dominantes y recesivos era, aproximadamente, de 3:1. En  $F_3$ , las que procedían de plantas de  $F_2$  con carácter recesivo eran idénticas a sus progenitoras y en las que procedían de plantas de  $F_2$  con carácter dominante se presentaban dos tipos, en uno de ellos, del que formaban parte aproximadamente los 2/3 del total se repetía el carácter dominante y en el otro, nuevamente, aparecían los caracteres en la proporción 3:1. De modo que, en definitiva, la segunda generación filial estaba formada por tres clases de plantas en la proporción 1:2:1, la primera constituida por las que mostraban el carácter dominante, la segunda por las que repetían la situación de la primera generación filial y la tercera por las que mostraban el carácter recesivo [1].

En Biología, los caracteres hereditarios están básicamente gobernados por unas partículas o unidades de información llamadas *genes* que por lo general se transmiten de una generación a la siguiente y de ordinario se agrupan por pares de *alelos* o formas alternativas del gen, alojados en un mismo *locus cromosómico*. Una de estas formas es *dominante* y la otra *recesiva*; es decir, una repite el carácter en la generación filial cuando su pareja es dominante o recesiva y la segunda sólo puede hacerlo cuando su pareja es también recesiva. Esquemáticamente, si designamos con  $A$  al alelo dominante y  $a$  al recesivo, el par  $Aa$  se manifestará como el  $AA$ . Por consiguiente, en la reproducción sexual de los individuos *diploides*; es decir, aquellos formados por pares de cromosomas en una doble colección, la mitad procedente del padre y la otra de la madre, respecto de un cierto locus o genes alelomorfos; los hijos serán  $AA$ ,  $Aa$  y  $aa$  en proporciones 1:2:1 siendo los  $AA$  idénticos a los  $Aa$ . Respecto del locus considerado, los individuos de *genotipo*  $AA$  o  $aa$  se llaman *homocigóticos* y los  $Aa$  *heterocigóticos*. Salvo en las células reproductoras o sexuales, llamadas *gametos*, los genes se encuentran por pares en todas las células de un organismo. La reunión de la célula reproductora paterna y de la materna aporta al *cigoto* la doble colección de información que determinará el genotipo del individuo filial; es la *primera ley* de Mendel. Un ancestro macho  $AA$  y otro hembra  $aa$  diseñarán una primera generación filial donde todos los individuos, respecto de ese gen, serán idénticos:  $Aa$ . Los apareamientos aleatorios dentro de esta primera generación filial, producirán individuos  $AA$ ,  $Aa$  y  $aa$  en la proporción 1:2:1, pues uno los dos progéneres aportará alelos  $A$  y  $a$  y, consecuentemente, hay doble viabilidad para el genotipo  $Aa$  que para los otros dos posibles. Obsérvese que, conforme al experimento de Mendel, el genotipo  $aa$  inexistente en  $F_1$  reaparece en  $F_2$ . La *segunda ley* de Mendel dice que los pares de genes son

transmitidos independientemente los unos de los otros; es decir, si consideramos dos pares de genes  $A, a, B$  y  $b$  y se produce el apareamiento de un genotipo  $AA BB$  con un genotipo  $aa bb$ , los individuos de la primera generación filial serán todos  $Aa Bb$  y, por consiguiente, producirán cuatro tipos de gametos:  $AB, Ab, aB$  y  $ab$  que generarán cigotos de nueve genotipos:  $AA BB, AA Bb, Aa BB, Aa Bb, AA bb, Aa bb, aa BB, aa Bb$  y  $aa bb$ . Con independencia de las mutaciones y de otros fenómenos excepcionales que alterarían la situación descrita, a la segunda ley de Mendel se le presentan de hecho algunas excepciones debidas al fenómeno del sobrecruzamiento cromosómico que por rompimiento de las *cromátidas* o componentes longitudinales del cromosoma, ligaría de modo imprevisto los alelomorfos de un locus con los del otro (figura 1) generando combinaciones inesperadas y eliminando posibilidades de elemental viabilidad.

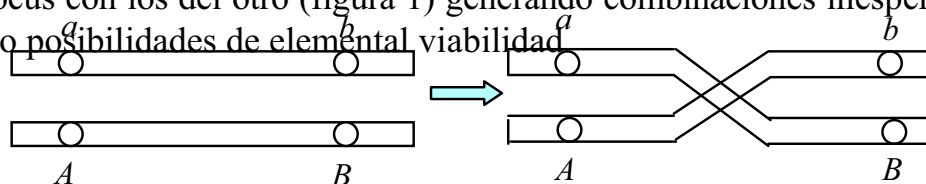


Figura 1

## La ley de Hardy–Weinberg

Consideremos una población infinita o suficientemente extensa referida a un locus con los genes alelomorfos  $R$  y  $r$ . La población estará entonces constituida por los genotipos  $RR, Rr, rr$  con probabilidades asociadas, respectivamente:  $a, 2b, c$ , donde  $a+2b+c=1$ . De modo que la probabilidad de  $R$  será  $a+b$  y la de  $r$  será  $b+c$ . La generación filial se entiende como consecuencia de apareamientos aleatorios entre los ancestros, sin fracasos y con el supuesto de que el número de descendientes es el mismo o, al menos, las diferencias son despreciables. La tabla de asignación de probabilidades a los apareamientos es la siguiente:

| $RR \times RR$ | $RR \times Rr$ | $RR \times rr$ | $Rr \times Rr$ | $Rr \times rr$ | $rr \times rr$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $a^2$          | $4ab$          | $2ac$          | $4b^2$         | $4bc$          | $c^2$          |

que provocaran los tres genotipos posibles en la generación filial con las probabilidades asociadas que se describen en la tabla siguiente:

|       | RR    | Rr     | rr    |
|-------|-------|--------|-------|
| RR×RR | $a^2$ | 0      | 0     |
| RR×Rr | 2ab   | 2ab    | 0     |
| RR×rr | 0     | 2ac    | 0     |
| Rr×Rr | $b^2$ | $2b^2$ | $b^2$ |
| Rr×rr | 0     | 2bc    | 2bc   |
| rr×rr | 0     | 0      | $c^2$ |

Sumando por columnas se obtienen las probabilidades asociadas a los genotipos  $RR$ ,  $Rr$ ,  $rr$ , en la generación filial. Son, respectivamente:  $(a+b)^2$ ,  $2(a+b)(b+c)$ ,  $(b+c)^2$ . Es decir, la probabilidad asociada a  $R$  es  $(a+b)^2+(a+b)(b+c)=(a+b)[(a+b)+(b+c)]=(a+b)$  e igualmente, la de  $r$  es  $(a+b)(b+c)+(b+c)^2=(b+c)$ . Lo que supone que la probabilidad asociada a cada gen es la misma de generación en generación y lo mismo sucede con las probabilidades asociadas a los genotipos. Este resultado observado experimentalmente en Biología, se conoce como *ley de equilibrio* o, simplemente, *ley de Hardy-Weinberg*. La demostración por inducción se plantea, elementalmente, del mismo modo. Por otra parte, llamando, como se hace habitualmente,  $p=a+b$  y  $q=b+c$  ( $q=1-p$ ), la función en  $p$ :  $f(p)=p(1-p)$ , tiene un máximo para  $p=1/2$ , lo que supone que, cualquiera que sea  $p$ ;  $0 < p < 1$ ;  $p(1-p) \leq 1/4$ . O bien:  $2pq \leq 1/2$ ; es decir, a lo sumo la mitad de los individuos son heterocigóticos. Con esta notación:

$$p(R) = p, p(r) = q = 1 - p$$

$$p(RR) = p^2, p(Rr) = 2pq, p(rr) = q^2$$

### Geometría del equilibrio

Si llamamos  $x=p(RR)$ ,  $y=p(rr)$ ,  $z=p(Rr)$ , es evidente que:  $x + y + z = 1$ . Además,  $z^2 = 4xy$ . Por consiguiente [2] las proporciones de los genotipos en

una población en equilibrio de H–W están, en su calidad de variables ligadas, sobre la cuádrica  $z^2 = 4xy$  y sobre el plano  $x + y + z = 1$  y, por lo tanto, sobre la parábola determinada por la intersección (figura 2).

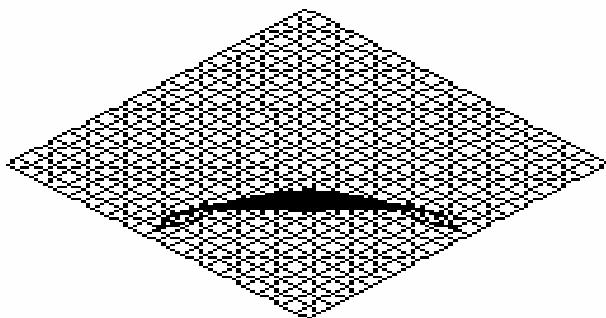


Figura 2

El plano corta a los ejes en los puntos  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ , que forman un triángulo equilátero cuyo lado mide  $\sqrt{2}$ . Y la parábola pasa por los dos primeros. Si se diera la situación extrema de que una de las proporciones fuera 1, las otras dos serían 0, por lo tanto los puntos están situados sobre el arco de parábola entre esos dos vértices, inscrito en el triángulo (figura 3).

Las infinitas proporciones que, dependiendo del valor de  $p$ , equilibrarían la distribución de genotipos en una población de cigotos describen un triángulo equilátero.

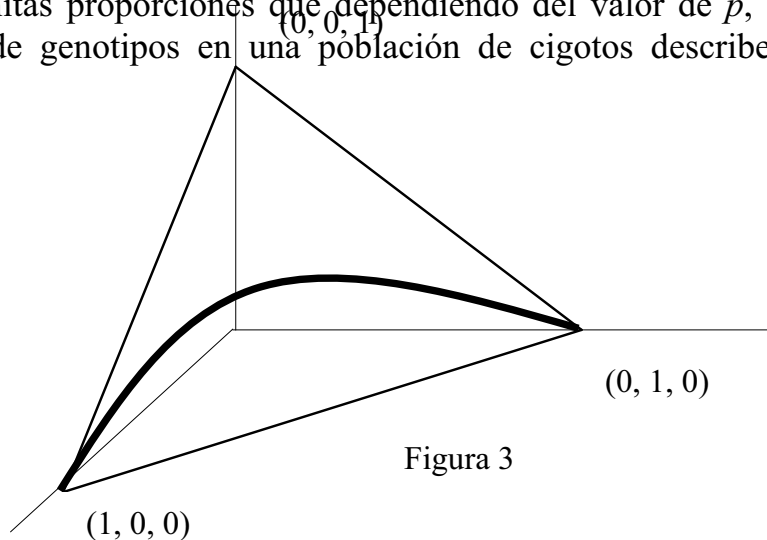


Figura 3

## Referencias

- [1] SÁNCHEZ–MONJE, E. y JOUVE, N.: *Genética*. Ed. Omega. Barcelona 1982
- [2] PÉREZ DE VARGAS, A. y MARTÍNEZ CALVO, M<sup>a</sup>. C.: *Estadística Biométrica*. Ed. Síntesis. Madrid 2000

# D. Pedro Abellanas y la falsa moneda

Tomás Recio y Luis Miguel Pardo

Universidad de Cantabria  
{recio, pardo}@matesco.unican.es

## Abstract

This paper, dedicated to the memory of prof. Abellanas, deals with a classical problem in recreative mathematics (how to identify a false coin with a small number of weight comparisons). We develop a less common point of view on this problem, namely, its connection with lower complexity bounds in theoretical computer science. A natural technique appearing here is that of semialgebraic geometry, a subject that was introduced in Spain by prof. Abellanas. A short survey of results and some open problems are discussed in the paper, addressed to the non-specialist in the subject.

*...que de mano en mano va  
y ninguno se la queda...*

## 1 Introducción

El profesor Pedro Abellanas, al que están dedicados los artículos de este volumen, fue, sin duda, una personalidad controvertida en la vida matemática de la segunda mitad del siglo XX en nuestro país. Su vida –y aún su memoria– concita adhesiones inquebrantables y críticas exacerbadas. Pero tal vez todos podamos estar de acuerdo en que fue una personalidad influyente, cuyo análisis detallado (que, por falta de preparación de los autores, no puede tener cabida aquí y ahora, en estas páginas) podría arrojar luz sobre algunos aspectos del presente de las matemáticas en España.

El título, deliberadamente provocativo, de este breve artículo podría tener la virtud de admitir una doble lectura. Por un lado, plantea la necesidad de sopesar (como se hace en los algoritmos de búsqueda de la falsa moneda) sin apasionamiento los datos biográficos de Abellanas, para descartar los muchos bulos e imprecisiones que rodean su figura, bulos y leyendas que van de boca en boca, sin que nadie se atribuya su paternidad.

Por otro lado describe con cierta precisión el objeto del artículo: mostrar al lector la relación existente entre algunas de las ideas matemáticas que introdujo en nuestro país el profesor Abellanas y un viejo problema de matemática recreativa que ha sido, recientemente, tratado en una revista de amplia difusión entre los profesores de matemáticas de enseñanza secundaria en España: el problema de la "falsa moneda" (ver [LOSADA LISTA, 2000] y las referencias que allí aparecen). Es un problema que ha sido tratado, entre otros, por el maestro Martin Gardner, lo que avala su interés y dificultad.

## 2 El problema de la falsa moneda

En su variante más conocida se supone que disponemos de una colección de monedas, todas del mismo peso excepto, a lo más, una; y que tenemos una balanza romana, con dos platillos y sin escala. Se trata de saber, mediante cierto número de pesadas, si alguna de las monedas es de peso distinto (mayor o menor, esto se desconoce) al de las demás (esto es, si es "falsa") y, en su caso, identificarla. Naturalmente, esto es fácil de lograr (si tenemos más de dos monedas: en este caso concreto sólo podríamos señalar si hay o no una moneda falsa, pero no podríamos identificarla), a través de una inspección exhaustiva de pares de monedas. La "miga" del problema consiste en resolverlo con un número bajo de pesadas: por ejemplo, buscar la forma de identificar la falsa moneda, si existe, en una colección de 9 monedas, con a lo más tres pesadas.

Una forma de proceder sería la siguiente: dividiríamos las nueve monedas en tres grupos de tres monedas cada uno y compararíamos (pesaríamos) los grupos uno y dos. Si pesan lo mismo, la falsa moneda (si existe) estaría entre las del grupo tres. Cogeríamos entonces el tercer grupo y lo pesaríamos contra uno de los otros dos. Si sigue equilibrándose la balanza, es evidente que no hay falsa moneda. En otro caso observaríamos que el tercer grupo pesa más

o menos que el grupo 1 y sabríamos que hay una moneda falsa en el grupo 3 (y que esta pesa más o menos, según lo observado). El problema se reduce, entonces, a descubrir una moneda falsa (cuya existencia está ya asegurada) en un grupo de tres monedas, sabiendo de antemano que la moneda falsa pesa más o menos que las otras dos. Se pesan, entonces, dos monedas al azar del grupo de tres. Si pesan igual, la falsa es la tercera. Si no pesan igual, la que pese más (o menos) será la falsa.

Pero podría ocurrir que los grupos 1 y 2 no pesen lo mismo, por ejemplo, que el grupo 1 pese menos que el 2. Pesamos entonces los grupos 2 y 3: si hay equilibrio, ya sabemos que la falsa moneda estará en el grupo 1 y que esta pesa menos... y el problema se resuelve como antes, con una pesada más. Si no hay equilibrio entre los grupos 2 y 3, sabremos que la falsa moneda esta en el grupo 2 y que es más pesada que las restantes, y acabaremos como antes. Hemos utilizado, en total, tres pesadas en el caso peor.

### 3 La Complejidad Algebraica y el prof. Abellanas

Esta es la forma habitual de abordar el problema de la falsa moneda. Argumentos de este tipo pueden generalizarse a más monedas y pueden estructurarse matemáticamente, requiriendo una cierta dosis de ingenio (ver la referencia arriba citada). Pero nosotros estamos interesados en plantear aquí otra perspectiva sobre el mismo problema: la de las “cotas inferiores” asintóticas. Es decir, supongamos que tenemos  $n$  monedas y un procedimiento (similar al descrito antes u otra variante que se nos ocurra) para detectar la falsa moneda en, digamos,  $f(n)$  pesadas. ¿Cómo probar que el problema no puede ser resuelto con  $g(n) < f(n)$  menos pesadas?

En concreto, dado que el problema se plantea con esta generalidad, estamos interesados en probar que  $f(n)$  no puede ser mejorada *sustancialmente*, esto es, con un ahorro considerable de operaciones cuando el número de monedas es realmente grande. Esto se traduce matemáticamente considerando como “parecidas” dos funciones cuyo cociente tenga como límite una constante positiva, cuando  $n$  tiende a infinito; buscamos, por tanto, probar que el número  $f(n)$  de operaciones de nuestro procedimiento es tal que esa función “u otra parecida” es la menor posible para todo  $n$  suficientemente grande. En el ejemplo descrito (y en su generalización) es fácil ver que  $\log(n)$  es una



función parecida a la que resulta de aplicar el método que hemos señalado. ¿Habrá una forma de resolver el problema en menos de  $\log(n)$  pesadas?

Este tipo de problemas pertenecen a un ámbito de las Matemáticas y de las Ciencias de la Computación denominado “Teoría de la Complejidad Algebraica”. *Complejidad*, porque se trata de medir lo complicado que es, intrínsecamente, un problema, lo complicado que es resolverlo de la mejor manera posible. *Algebraica*, porque el tipo de operaciones consideradas para resolverlo es de naturaleza algebraica: por ejemplo, comparaciones (mayor o menor peso, etc...) en nuestro problema de la falsa moneda.

Aquí hay que aclarar que el profesor Abellanas, que sepamos nosotros, jamás se interesó por la Complejidad Algebraica. Ahora bien, como veremos más adelante, una de las formas habituales para abordar las cotas inferiores de complejidad de un problema consiste en

- Traducir el problema a un problema geométrico de figuras denominadas “semialgebraicas” (como los poliedros).
- Estudiar lo complicada que resulte esa figura geométrica (número de vértices, por ejemplo)
- Concluir, rigurosamente, que una figura tan complicada no podrá nunca “describirse” con menos de ... tantas operaciones, porque cada operación sólo puede aportar una complicación geométrica limitada.

El profesor Abellanas fue, precisamente, el introductor en nuestro país de los conjuntos semialgebraicos, a principios de los años 70 (ver [ABELLANAS, 74A, 74B]), como una extensión natural de la geometría algebraica (que estudia las figuras definidas en el espacio complejo por medio de igualdades de polinomios) en la que él trabajó siempre, al caso de figuras definidas en el espacio real mediante desigualdades. En aquel momento la geometría semialgebraica y la geometría algebraica real (inseparables desde un punto de vista técnico) estaban apenas comenzando a “hacerse” en media docena de universidades de todo el mundo y no se podía barruntar la importancia que ha ido adquiriendo hasta nuestros días (entre otras razones, por sus aplicaciones al diseño asistido por ordenador, a la robótica, o a las ciencias de la computación), con un índice propio en la clasificación de las ciencias matemáticas

de la American Mathematical Society. Hay que reconocer, por tanto, la intuición y la capacidad para estar al día que demostró el prof. Abellanas al iniciar esa línea de investigación hace más de veinticinco años, línea que ha sido continuada con éxito por muchos de sus discípulos directos o indirectos.

## 4 En busca de la Falsa Moneda.

Para ilustrar (a un nivel un poco más técnico) algunas de las afirmaciones anteriores introduciremos algunos sencillos ejemplos de problemas con monedas, modelados en el contexto de la Complejidad Algebraica Real. Fijaremos, para aclararnos, un “tipo de cambio” por el cual a cada moneda se le asigna un valor. Este tipo de cambio puede estar basado en el peso de la moneda o en su valor con respecto a una moneda de referencia que, en cuanto sigue, podría ser el titubeante euro. Los problemas vendrán ordenados de menor a mayor dificultad o, en términos más técnicos, de menor a mayor complejidad.

El primer bloque de problemas, que podríamos titular como relativos a “La Falsa Moneda”, hace referencia a problemas que se resuelven con una simple balanza. La dificultad (complejidad) del problema consiste en minimizar el número de veces que hay que utilizar la balanza para responder la pregunta.

**Problema 1 (La Falsa Moneda Segura)** *Dadas  $n$  monedas de igual aspecto, sabiendo que sólo una es falsa, encontrarla.*

**Problema 2 (La Falsa Moneda)** *Dadas  $n$  monedas de igual aspecto, sabiendo que, a lo sumo, hay una falsa, detectarla.*

**Problema 3 (La Más Falsa de Todas)** *Dadas  $n$  monedas de igual aspecto, detectar la más pesada.*

**Problema 4 (El discriminante y la Falsa Moneda)** *Dadas  $n$  monedas, decidir si hay dos iguales.*

**Problema 5 (Muchas monedas iguales)** *Dadas  $n$  monedas, decidir si  $k$  de ellas son iguales.*

Por el contrario, el problema siguiente es sólo el indicio de una frustración, un ejemplo de problema, aparentemente tan simple como los anteriores y que, sin embargo, nadie en el mundo sabe resolver de modo eficaz.

### Problema 6 (Las Monedas Auténticas que no consigo cambiar) <sup>1</sup>

*Sebastián Salgado ha pasado su vida recogiendo paisajes humanos con el ojo de su Leica por lugares de todo el globo. En su cuarto oscuro se amontonan piezas de monedas, de éstas que nunca nos cambian en los aeropuertos, de aspectos y valores muy diversos. Desde mediocres dimes a estrellitas de Hong-Kong, algún pfenning que otro junto a pesos y centavos de la más recóndita estrechez... millones de dinares yugoslavos se amontonan junto a escuetos yenes en un desorden imposible. Decidido a deshacerse de tal maraña, contacta telefónicamente con un tal Cohen, cambista de Brooklyn, que está más que dispuesto a cambiarle las monedas por billetes verdes, cinco mil dólares en billetes. Sebastián, por su parte, no está dispuesto a pagar un extra por exceso de equipaje en su vuelo a Nueva York, así que se decide a seleccionar, de entre sus monedas, unas pocas cuyo valor sea exactamente igual a los cinco mil dólares que le ofreció Cohen. Después de varios intentos infructuosos, prolongados durante varios años, Sebastián reconoce que no puede encontrar esas monedas. Pide ayuda a sus amigos, que también fracasan, éstos a sus conocidos y así hasta dar con un matemático. A la sazón Cohen ya no está interesado en las monedas de Sebastián y a éste sólo le queda la curiosidad de entender el porqué de tantos fracasos para una tarea aparentemente tan sencilla.*

## 5 Los semialgebraicos asociados a los problemas.

El primero de los problemas anteriores es reconocido como un problema sencillo. Una fácil estrategia de “Divide y Vencerás” (“Divide and Conquer” en el argot informático: dividir el problemas en dos subproblemas de -aproximadamente- tamaño mitad, y así sucesivamente...) nos permitirá detectar la falsa moneda mediante una cantidad de pruebas que define una función de crecimiento logarítmico (esto es, el número de pruebas es del orden  $O(\log_2 n)$ ).

No es difícil generar un argumento de cotas inferiores que demuestra que dicho procedimiento no se puede mejorar en lo esencial. Para ello introduzcamos un primer conjunto semialgebraico. Sea  $S_i \subseteq \mathbb{R}^n$  el conjunto definido

---

<sup>1</sup>también conocido como La Mochila

por la identidad siguiente :

$$S_i := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_{i-1} = x_{i+1} = \dots = x_n, x_i \neq x_1\}.$$

Definamos el conjunto  $S \subseteq \mathbb{R}^n$  dado mediante :

$$S = \bigcup_{i=1}^n S_i.$$

Con estas notaciones, el Problema de la Falsa Moneda Segura (Problema 1) se reinterpreta del modo siguiente :

*Dado un punto en el espacio afín real  $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , sabiendo que  $x \in S$ , hallar  $i$  tal que  $x \in S_i$ .*

El modelo de cálculo asociado a un proceso de pesadas con balanza es un árbol algebraico de computación. Se trata de un árbol binario cuyo nodo de fuente (o nodo de entrada) tiene la etiqueta  $x \in S$  y cuyas hojas (nodos de salida) tienen una etiqueta perteneciente al conjunto de índices  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Un proceso de sucesivas pesadas con la balanza sigue un camino a lo largo del árbol desde el nodo fuente hasta alguna de las hojas. La etiqueta de las hojas es justamente la respuesta a nuestro Problema. Obviamente, debe haber al menos una hoja por cada índice y el número de pesadas es exactamente el número de nodos del árbol por los que pasamos. Existe (y es bien conocida) una fórmula que relaciona el número de hojas de un árbol binario con la longitud del camino más largo. Esta fórmula se expresa diciendo :

$$\# \text{ hojas en el árbol } \leq 2^{\text{longitud del camino más largo}}.$$

En particular, concluiremos

$$n \leq 2^{\text{Número de pesadas}},$$

lo que, tomando logaritmos, nos lleva a la cota inferior

$$\log_2 n \leq \text{Número de pesadas}.$$

El segundo de los problemas propuestos (La Falsa Moneda) tiene un análisis análogo al problema anterior. En el caso en que  $n$  es un número

par, bastará con hacer una pesada inicial poniendo en cada plato de la balanza una mitad de las monedas. Si no hubiera diferencia entre ambos pesos, no habría moneda falsa. Si hubiera alguna diferencia, hemos detectado que hay exactamente una moneda falsa y nos quedamos en la mitad correspondiente para proseguir con el mismo algoritmo que resuelve el Problema 1. Si  $n$  es impar (pongamos  $n = 2k + 1$ ), dividimos nuestro conjunto de monedas en dos conjuntos de cardinal  $k$  y los ponemos en la balanza. Si no hay diferencia entre los pesos de ambos conjuntos, bastará con elegir al azar una moneda en uno de los platillos y reemplazarla por la moneda excluida. Una nueva pesada nos permitirá concluir si hay moneda falsa o no del modo obvio y si la hubiere, la tendremos, además, ubicada en un conjunto de cardinal  $k$  con lo que proseguiremos con el algoritmo que resuelve el Problema 1. Si, por el contrario, en la primera pesada hubiere ya una diferencia, tendríamos directamente seleccionado un conjunto de monedas de cardinal  $k$  en el que existe (seguro) una moneda falsa. El número de veces que se usa la balanza es, de nuevo, una función del mismo orden que  $O(\log_2 n)$ , mientras que demostrar que al menos  $\log_2 n$  pesadas son necesarias se sigue de un argumento similar al usado en el análisis del Problema 1.

El siguiente problema (Problema 3) es ligeramente más difícil que los anteriores. Es claro que con  $O(n)$  comparaciones entre los pesos de las monedas uno puede siempre hallar el máximo. Sin embargo, un argumento como el utilizado en los Problemas 1 y 2 produciría solamente una cota inferior del tipo  $\log_2 n$ , lo que no nos diría mucho sobre la optimalidad de dicho procedimiento.

Para realizar un análisis de dicho problema se procede mediante una “reducción” del mismo. Una reducción es una simplificación del problema inicial en otro más fácil de resolver para el cual (por razones diversas) uno dispone de herramientas para mostrar una cota inferior. Por ejemplo, tomemos el problema

**Problema 7 (MAXi)** *Dados  $n$  números reales  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , decidir si el  $i$ -ésimo  $x_i$  es el máximo de todos ellos.*

Claramente, si disponemos de un método que calcule el máximo entre  $x_1, \dots, x_n$ , también disponemos de un método que resuelve el problema MAXi. Bastará, por tanto, con que analicemos el número de veces que habría que utilizar

la balanza para resolver  $MAXi$ . Para analizarlo definamos el siguiente conjunto semialgebraico que, en particular, es un convexo :

$$M_i := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall j, j \neq i, x_i - x_j \geq 0\}.$$

Es claro que  $n - 1$  usos de la balanza servirán para decidir si  $x_i$  es el máximo de  $\{x_1, \dots, x_n\}$ .

De otro lado, el conjunto  $M_i$  tiene unas cualidades topo-geométricas muy especiales (como fue observado en [MONTAÑA-PARDO-RECIO, 94]). Una forma aún más simple del semialgebraico  $M_i$  (salvo un cambio lineal de coordenadas) es la del  $n$ -ésimo octante.

$$O_{n,i} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_i \geq 0\}.$$

El conjunto  $O_{n,i}$  tiene una propiedad de “rigidez” (llamada anchura de Rabin por ser M.O. Rabin quien la introdujo en [RABIN, 72]) que se puede expresar en los términos siguientes.

**Teorema 1** [MONTAÑA-PARDO-RECIO, 94] *La rigidez local de  $O_{n,i}$  (incluso salvo difeomorfismo o salvo un conjunto de medida nula) es  $i$ . Esto es, no existen polinomios  $f_{r,s} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$  (ni funciones analíticas), con  $1 \leq s \leq i - 1$  y  $r$  en un conjunto finito  $I$  de tal modo que la diferencia simétrica*

$$O_{n,i} \triangle \left( \bigcup_{r \in I} \{x \in \mathbb{R}^n : f_{r,1}(x) \geq 0, \dots, f_{r,i-1}(x) \geq 0\} \right)$$

*sea un conjunto de medida nula.*

En particular, si existiera un procedimiento que resolviera  $MAXi$  con menos de  $n - 1$  pesadas, tendríamos una descripción de  $M_{n-1}$  usando menos de  $n - 1$  desigualdades polinomiales lo que chocaría con la rigidez de  $M_{n-1}$  y  $O_{n,n-1}$ , cuyo valor es  $n - 1$ . Luego  $n - 1$  utilizaciones de la balanza son necesarias para resolver el Problema de la Moneda Más Falsa expuesto en la Sección anterior.

El siguiente Problema (Problema 4), es una versión simplificada del problema siguiente :

**Problema 8 (Discriminante)** *Dado un polinomio univariado de grado  $n$  por sus raíces, decidir si su discriminante es no nulo.*

El problema fue analizado por M. Ben-Or en [BEN-OR, 83] bajo la forma siguiente :

**Problema 9 (Elementos Diferentes)** *Dados  $n$  números reales,  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , decidir si existen dos iguales entre ellos, es decir, decidir si existen  $i, j$ ,  $i \neq j$ , tales que  $x_i = x_j$ .*

Es claro que el problema se resuelve fácilmente por un algoritmo eficiente de ordenación, usando a lo sumo  $O(n \log_2 n)$  comparaciones. La pregunta que restaría es la optimalidad de esa cota de tiempo.

El análisis del problema se resistió duramente a las estrategias conocidas. Por ello, Ben-Or, a la sazón discípulo de Rabin, introdujo técnicas más sofisticadas de la Geometría Algebraica Real. Estas técnicas ya habían sido consideradas por Dobkin y Lipton en [DOBKIN-LIPTON, 76]. Se trata de las técnicas basadas en las cotas superiores para la suma de números de Betti de conjuntos algebraicos reales introducidas simultánea e independientemente por J. Milnor ([MILNOR, 64]), R. Thom ([THOM, 65]), O. Oleinik y I.B. Petrovsky ([OLEINIK-PETROVSKY, 49]). El argumento de base es la carencia de una desigualdad de Bézout y de una noción de grado geométrico adecuada al contexto de la Geometría Algebraica Real. Dicha carencia fue reemplazada por el número de componentes conexas de un semialgebraico. Así M. Ben-Or pudo demostrar el siguiente enunciado :

**Teorema 2** [BEN-OR, 83] *Dado  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  un semialgebraico y dado cualquier algoritmo que lo resuelva, el número de operaciones aritméticas y tests de signo que debe realizar dicho algoritmo para resolver  $W$  es, al menos*

$$c \cdot \log_2 \beta_0(W) - n,$$

*donde  $c > 0$  es una constante y  $\beta_0(W)$  es el número de componentes conexas de  $W$ .*

El término  $-n$  fue suprimido en [CUCKER-MONTAÑA-PARDO, 92].

Para resolver la cota inferior para Elementos Diferentes, obsérvese que todo algoritmo que resuelva dicho problema también resuelve el semialgebraico

$$U_n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) \neq 0\}.$$

Es fácil observar que el número de componentes conexas de  $U_n$  es, al menos,  $(n!)^2$ . Por tanto, obtendremos

$$c \cdot 2n \cdot \log_2 n \leq c \cdot \log_2 \beta_0(W) \leq \text{número de pesadas para Prob. 4.}$$

Esta estimación conduce a concluir la optimalidad en  $n \log_2 n$  pesadas para los Problemas Elementos Diferentes y Discriminante.

Una generalización del problema 9 es el llamado Problema de  $k$ –Iguales.

**Problema 10 (Problema de  $k$ –Iguales)** *Dado un conjunto de  $n$  números reales  $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ , decidir si  $k$  de entre ellos son iguales.*

El Problema de  $k$ –Iguales puede establecerse del modo siguiente. Definamos el conjunto semialgebraico  $E_k \subseteq \mathbb{R}^n$  en los términos siguientes. Para cada subconjunto de índices  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  tal que  $\sharp(I) = k$ , definamos

$$E_I := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j, \forall i, j \in I\}.$$

Finalmente, definamos

$$E_k := \bigcup_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, \sharp(I)=k} E_I.$$

Todo algoritmo que resuelve el Problema de  $k$ –Iguales resuelve el Problema definido por  $E_k$ . Un buen algoritmo tomaría todos los subconjuntos de cardinal  $k$  de  $\{1, \dots, n\}$  (hay  $\binom{n}{k}$ ) y miraría con  $k$  comparaciones adicionales si el dato  $x \in \mathbb{R}^n$  está efectivamente en  $E_I$ . El número de comparaciones usadas en tal algoritmo es dado por

$$\binom{n}{k} k.$$

Desgraciadamente ni las técnicas elementales, ni la rigidez, ni el número de componentes conexas ( $E_k$  es conexo) sirven para demostrar la optimalidad de tal estrategia. Para resolver esta dificultad es necesario resolver previamente la Conjetura de Ben–Or.



**Problema 11 (Ben–Or, 83)** *¿Es posible usar los grupos de homología de orden superior como cota inferior de complejidad?*

La Conjetura permaneció abierta durante una decena de años y fue resuelta simultánea e independientemente en [YAO, 97] y [MONTAÑA–MORAIS–PARDO, 96].

**Teorema 3** *Dado  $W \subseteq \mathbb{R}^n$  un semialgebraico y dado cualquier algoritmo que lo resuelva, el número de operaciones aritméticas y tests de signo que debe realizar dicho algoritmo para resolver  $W$  es, al menos*

$$\log_2 \left( \sum_{i=0}^n \beta_i(W) \right),$$

donde  $\beta_i(W)$  es el  $i$ -ésimo número de Betti para la homología de Borel–Moore de  $W$ .

Curiosamente, ambos trabajos siguieron caminos dispares para la resolución de la Conjetura de Ben–Or. A. Yao (Princeton) desarrolló un modelo de homología relativa en varias colaboraciones con A. Björner y L. Lovasz (véase, por ejemplo, [BJÖRNER–LOVÁSZ–YAO, 94] con la introducción de una característica de Euler relativa para  $W$  y los árboles con tests lineales). En cambio, [MONTAÑA–MORAIS–PARDO, 96] atacó directamente el problema desde la homología de Borel–Moore de semialgebraicos. Tras largos carteos y cruces de discusiones escritas, llegamos a la conclusión de que ambos habíamos demostrado el mismo resultado.

En lo que concierne al Problema de  $k$ –Iguales se puede demostrar la siguiente desigualdad :

$$\sum \beta_i(E_k) \geq \frac{(n/k)^n}{(n/k)!} \cong \left( \frac{n}{k} \right)^{n(1-1/k)}.$$

Por lo tanto, una cota inferior para el número de pesadas necesarias para resolver el Problema de  $k$  Iguales es del orden

$$(n/k) \log_2(n/k) - cn,$$

donde  $c > 0$  es una constante proveniente de la fórmula de Stirling.

Claramente en este caso el algoritmo propuesto está lejos de la cota inferior obtenida y, en particular, está lejos de saberse si es óptimo o no. Pero este fenómeno no es extraño en los análisis de complejidad. El último de los problemas propuestos en la Sección 4 (Problema 6) es uno de los problemas más interesantes y más difíciles de analizar de cuantos hemos expuesto hasta aquí. Es, de modo natural, un problema **NP**-completo (véase, por ejemplo, el excelente libro [BALCAZAR-DÍAZ-GABARRÓ, 88]). De este problema diremos, como ya dijeron M.R. Garey y D.S. Johnson ([GAREY-JOHNSON, 79]), que pertenece a una clase especial de problemas de informática, definida por S. Cook y R. Karp a principios de los años setenta. Dicha clase se describe con la siguiente anécdota:

Supongamos que usted trabaja para una empresa y se le pide desarrollar un programa que resuelva un problema  $P$ . Le pueden ocurrir dos cosas inicialmente:

- Usted encuentra rápidamente un algoritmo que funciona en la práctica y resuelve el problema  $P$ .
- Usted no encuentra tal algoritmo y, después de mucho reflexionar, encuentra un argumento que le permite decir a su empresa que tal algoritmo no existe.

En ambos casos su empleo estará asegurado. Pero puede ocurrir, y de hecho ocurre muy a menudo, que ninguna de estas dos opciones se da. Ocurre, y mucho más a menudo de lo que se piensa fuera del contexto informático, que usted es incapaz de encontrar un algoritmo que funcione en la práctica y que es también incapaz de demostrar que tal algoritmo no existe. En tal caso, debe buscar alguna justificación para salvar su empleo. La justificación propuesta por Cook y Karp se expresa en los términos siguientes:

– *Verá, jefe, no puedo encontrar lo que me pidió y no sé demostrar que tal cosa no existe; pero puedo demostrarle que no encontrará a nadie en el mundo que le realice la tarea que me pidió.*

Esta sencilla idea para salvar el empleo fue formalizada por Cook y Karp a comienzos de los setenta y dio lugar a la teoría de la **NP**-completitud. Un problema es **NP**-completo si nadie en el mundo lo sabe resolver de modo eficaz y el Problema de Sebastián es uno de ellos. Digamos que el Instituto

Clay, dirigido por A. Wiles y algunos otros medallas Fields han designado el problema de hallar un algoritmo eficaz para la Mochila como uno de los 7 problemas centrales que condicionarán la matemática del siglo que viene. Debe señalarse también que el premio estimado por lograr tal cosa es de 1 millón de dólares (véase el artículo de El País del verano del año pasado).

El problema de la Mochila se puede también entender del modo siguiente : supongamos que disponemos de un ordenador (aún inexistente, pero próximo a aparecer en los próximos meses o años) capaz de ejecutar  $10^6$  Mips (  $10^6$  millones de operaciones bit por segundo) y supongamos que se disponen de 200 monedas en la colección de Sebastião Salgado. Un algoritmo de los actualmente conocidos que resuelva la Mochila requeriría

$$\frac{2^{200}}{2^{40}} = 2^{160}$$

segundos para concluir su tarea. Con una estimación bastante grosera y generosa para la estimación de tiempo ( $4.000 (2^{12})$  segundos = 1 hora,  $32 (2^5)$  horas = 1 día,  $512 (2^9)$  días = 1 año) obtendremos que el tiempo esperable para que ese ordenador resuelva nuestro problema es de

$$2^{160-(12+5+9)} = 2^{134} \text{ años.}$$

Se trata de un tiempo de, aproximadamente  $2^{114}$  millones de años o, equivalentemente  $2^{94}$  billones de años o, por dar una idea global y nítida, ese superordenador tardaría  $2^{74}$  trillones de años en responder al problema de la Mochila. En términos astronómicos, haría ya muchos trillones de años que el Universo habría colapsado. La función del tiempo conocida para la Mochila es del tipo  $2^n$  (exponencial).

El estudio de la Mochila ha tenido muy diversos tratamientos y análisis. Retornando a la Geometría Algebraica Real, digamos que [DONKIN & LIPTON, 76] obtuvieron una humilde cota inferior del tipo  $n^2$ , usando la estrategia de Ben-Or (o también de Milnor-Thom-Oleinik-Petrovsky). En [MONTAÑA-PARDO, 93] se demostró que incluso asumiendo la hipótesis del paralelismo, (esto es, usando un número indeterminado de balanzas y un número ingente de personas que trabajan independientemente en paralelo) sería imposible rebajar una cota inferior de tiempo paralelo del orden  $n^2$ . Finalmente, digamos

que Meyer auf der Heide (cf. [MEYER AUF DER HEIDE, 89]) demostró la existencia de una estrategia no uniforme que, con árboles de altura  $O(n^4 \log_2 n)$  resolverían la Mochila (si uno fuera capaz de encontrarlos “a priori”).

## Bibliografía

- P. ABELLANAS “R-Algebras analíticas valoradas”, *Estudios de Matemática em homenagem ao Prof. Almeida Costa*, Lisboa, (1974).
- P. ABELLANAS “Conjuntos preanalíticos” *Rend. Sem. Mat. e Fis. Di Milano*, Vol **XLIV**, (1974), 119–129.
- J.L. BALCAZAR, J.L. DÍAZ & J. GABARRÓ. “*Structural Complexity I*”, EATCS Mon. on Theor. Comp. Sci. **11**, Springer (1988).
- M. BEN-OR. “Lower bounds for algebraic computation trees”. *A.C.M. 15<sup>th</sup> Symp. on Theory of Computing* (1983) 80–86.
- A. BJÖRNER, L. LOVÁSZ & A. YAO. “Linear Decision Trees, subspace arrangements and Möbius functions”. *J. Math. Soc.* **7** (1994) 677–706.
- F. CUCKER, J.L. MONTAÑA & LUIS M. PARDO. “Time Bounded Computations over the Reals. *Int. Journal of ALGEBRA AND COMPUTATION*, Vol. **2**, No. 4, (1992) 395–408.
- J. DIEUDONNÉ *A history of Algebraic and Differential Topology 1900-1960*. Birkhäuser, Boston, 1989.
- D.P. DOBKIN & R.J. LIPTON. “A lower bound of  $\frac{1}{2}n^2$  on linear search programs for solving the Knapsack problem”. *J. Comput. System Sci.*, **18** (1976) 86–91.
- M.R. GAREY & D.S. JOHNSON. “*Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*”. W.H. Freeman (1979).
- R. LOSADA LISTE. “Nada...¡vale tanto!”. *SUMA* **33**, (2000) 83–90.
- F. MEYER AUF DER HEIDE. “On genuinely time bounded computations”. *Symp. Theor. Aspects of Comp.*, LNCS **349**, Springer Verlag, (1989) 1–16.

- J. MILNOR. “On the Betti numbers of real algebraic varieties”. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **15** (1964) 275–280.
- J.L. MONTAÑA, J.E. MORAIS & L.M. PARDO. “Lower Bounds for Arithmetic Networks II: Sum of Betti numbers”. *Applicable Algebra in Engineering, Communications and Computing*, vol. **7**, No. 1 (1996) 41–52.
- J.L. MONTAÑA & L.M. PARDO. “Lower Bounds for Arithmetic Networks”. *Applicable Algebra in Engineering Communications and Computing* Vol. **4**, No.1 (1993) 1–24
- J.L. MONTAÑA, L.M. PARDO & T. RECIO. “A Note on Rabin’s Width of a Complete Proof”. *Computational Complexity* vol. **4**, No. 1 (1994) 12–36.
- O.A. OLEINIK & I.B. PETROVSKY. “On the topology of real algebraic surfaces”. *Izv. Akad. Nauk SSSR* **13** (1949) 389–402 (en ruso). Traducción al inglés en *Translations of the Amer. Math. Soc.* (1) **7** (1962) 399–417).
- M. O. RABIN. “Proving simultaneous positivity of linear forms” *J. of Comp. and Syst. Sc.*, **6**, (1972) 639–650.
- R. THOM. “Sur l’homologie des variétés algébriques réelles”. En *Differential and Algebraic Topology* (S.S. Cairns, ed.), Princeton Univ. Press (1965).
- A. C.C. YAO. “Decision Tree Complexity and Betti Numbers”. *J. of Comput. and System Sci.* **55** (1997) 36–43.

## **INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN**

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc, deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo especificado a continuación.

### **Copias en papel**

Se enviarán por duplicado, escritas con un procesador de texto en hojas de tamaño DIN A-4. El formato debe ser 17cm x 12.8cm en 11 puntos.

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LATEX (en este último caso deberá usarse estilo “article” y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Los artículos comenzarán con el título (en minúsculas grandes), nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el Boletín), e-mail si se tiene y “abstract” de unas líneas en inglés. Se terminará el artículo con la bibliografía (y nada más después de ella).

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deban ser reproducidas (Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas).

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: “Problema número (Boletín número)”, tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

### **Copia en disquete**

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo el archivo del documento en el procesador de texto utilizado.

### **Envío**

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

## **Selección de originales**

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

## **ADQUISICIÓN DE NÚMEROS ATRASADOS DE NUESTRO BOLETÍN**

Los números atrasados del Boletín, de los cuales existan ejemplares sobrantes, podrán ser adquiridos al precio de coste de mil pesetas ejemplar.

Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57 y 58.

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de la “*Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*”, o mediante transferencia a la cuenta corriente número 3025-0006-24-1400002948, al mismo nombre de la Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS  
c/. Carranza, 5 - 28004 Madrid

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad:

SOCIEDAD “PUIG ADAM” DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS  
Facultad de Educación (Dpto. de Álgebra)  
C/ Rector Royo Villanova, s/n - Ciudad Universitaria  
28040 Madrid

En la carta se incluirá:

- el número o números a adquirir,
- la dirección a donde se han de enviar,
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.