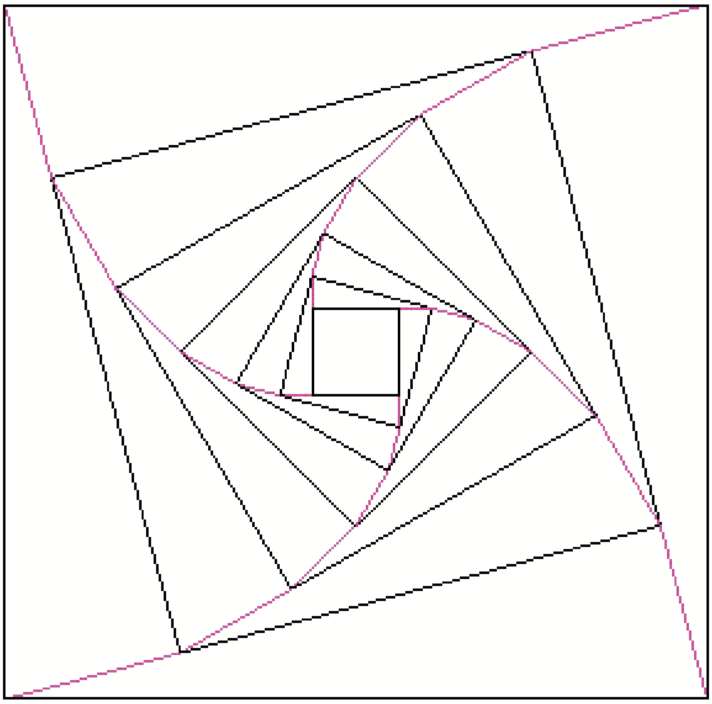
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.º 57
FEBRERO DE 2001

Número especial dedicado al Profesor P. Abellanas

ÍNDICE

Págs.

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La confección de ese número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 – Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La Matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Teléf. y fax: 91 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

JUNTA DIRECTIVA

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 2001

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2001 para el sábado *día 21 de abril del 2001*, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente:

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

XIX Concurso de Resolución de Problemas

convocado por

Sociedad “Puig Adam” de Profesores de Matemáticas y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras

BASES DEL CONCURSO

Primera: Los alumnos podrán participar en el Concurso en tres niveles:

a) *Primer nivel*: alumnos de 3º de E.S.O.
b) *Segundo nivel*: alumnos de 4º de E.S.O.
c) *Tercer nivel*: alumnos de 1º Bachillerato (2º y 3º de F.P. II)

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de Problemas de Matemáticas (los mismos para todos los concursantes de un mismo nivel) y se realizarán en la mañana del sábado *23 de junio del 2001* a partir de las 10 horas.

Tercera: A los mejores de cada nivel, se concederán diplomas y premios.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 21 de Mayo del 2001, dirigiéndose por carta al presidente de nuestra sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
28040-Madrid

En la preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 2000-2001.

Nota importante: Los dos primeros clasificados de cada nivel son invitados a participar en la Olimpiada Rioplatense de Argentina, en diciembre de 2001 (en el supuesto de que se consigan becas para pagar los billetes hasta Buenos Aires).

Número especial dedicado al profesor P. Abellanas

En el número 54 de nuestro Boletín, Julio Fernández Biarge publicó una semblanza de la vida y la obra del profesor D. Pedro Abellanas, fallecido en julio de 1999.

La Asamblea General de la Sociedad, en su sesión de 29 de abril de 2000, aprobó la publicación de un número especial monográfico dedicado a su memoria. En cumplimiento de ese acuerdo, la Junta Directiva se ha dirigido a los discípulos más allegados al profesor Abellanas, en solicitud de colaboración para ese número conmemorativo.

La respuesta ha sido, como era de esperar, generosa; hasta tal punto que los trabajos recibidos exceden la capacidad de un número de nuestro Boletín. Por ello en este número 57 publicamos diez de los artículos, y el resto aparecerá en el próximo número 58.

La Junta Directiva de la Sociedad desea agradecer muy expresivamente la cordialísima acogida que ha tenido esta iniciativa, y se honra junto con todos sus socios en el homenaje y el recuerdo al maestro.

Nota: En la página siguiente puede verse una fotografía, tomada en abril del año 1977, en la que aparece el profesor Abellanas rodeado por la mayoría de sus discípulos de aquel tiempo, celebrando la obtención de una cátedra por parte de uno de ellos.

El sitio de Zaragoza o mi encuentro con Don Pedro

José Javier Etayo

Por estos días, los días en que me pongo a escribir, se cumplen los cincuenta y cinco años. Larga cuenta la que va desde aquel primer encuentro con don Pedro Abellanas hasta el momento de redactar estas líneas en su recuerdo. Dentro de ese tiempo van sucediéndose todas las fases de una relación creciente: de anónimo alumno a examinando totalmente transparente, de estudiante dirigido por él a discípulo, ayudante y colaborador, compañero, amigo filial y deudor en suma de casi todo aquello en que ha consistido mi vida universitaria y en parte también mi vida personal. Así hasta el final, porque creo poder considerarme receptor del honor y el privilegio, triste privilegio, de que el último artículo que don Pedro publicó fue seguramente el escrito en obsequio mío con motivo de mi jubilación.

Y en este camino me ha acompañado una nutrida representación de la comunidad científica, matemática sobre todo: la de quienes han sido discípulos, directos o indirectos, o simplemente alumnos de don Pedro. A ella se incorporaron casi todos en Madrid, donde desde 1948 ejerció su docencia, y aquí acudimos también, antes o después, quienes fuimos sus alumnos en Zaragoza: es el pequeño grupo, porque allí éramos muy pocos, que nos sentimos y declaramos discípulos zaragozanos de don Pedro.

El primero fue Julio Fernández Biarge, y él mismo lo manifestaba en un precioso artículo necrológico que en este mismo Boletín escribió. Bajo su dirección hizo allí la tesis doctoral, mientras ocupaba la adjuntía de Geometría analítica, y de sus espléndidas clases de problemas fuimos beneficiarios nosotros. Se anticipó a don Pedro, lo mismo que Martínez Losada, en su traslado a Madrid, mientras que los demás, Sancho Guimerá, Viviente y yo mismo, lo hicimos siguiendo sus pasos y buscando el amparo de su magisterio. Julio fue, sí, su primer discípulo y creo que yo puedo gloriarme de ser el tercero, después de Sancho.

Tras de nosotros vienen muchos más, los que surgieron en Madrid, y algunos de ellos nos expondrán sin duda en estas páginas la visión que de su persona y de su labor tuvieron, de modo que la etapa madrileña estará bien cubierta; a más del breve recorrido que de su vida hizo Fernández Biarge en el artículo aludido y del que espero que a mí también se me publique: el que a raíz de su fallecimiento escribí para *La Gaceta* de la Real Sociedad Matemática Española. Me ha parecido por eso que el mejor modo de contribuir a un conocimiento más completo de su figura sería dejar entrever lo que fueron aquellos pocos años, sólo seis, en que desempeñó la cátedra de Zaragoza y que son seguramente los menos conocidos por ser tan reducido el número de los que allí pasamos por sus manos.

Estas van a ser sólo mis impresiones, probablemente sesgadas como ocurre siempre con los alumnos, pero que mantengo muy vívidas, y creo que a don Pedro le habría gustado que se hablase de aquellos tiempos: él era zaragozano, no sólo de nacimiento sino de corazón, y en aquella Universidad estudió la licenciatura y tuvo su primera cátedra. Sé también que él recordaba con auténtico cariño su paso por ella y solía hablar con elogio, en algunos casos inmerecido, de los que fuimos sus alumnos. Por eso he querido hoy poner aquí a don Pedro en su sitio, en Zaragoza, en aquella Zaragoza de sus ensueños y de los míos.

* * *

Era, en efecto, un día de octubre de 1945, el del comienzo de curso, cuando me dispuse a recibir la primera lección universitaria. El profesor era don Pedro Abellanas y a la asignatura la llamábamos “Geometría métrica”, aunque a él le gustaba más decir “Elementos de Geometría”. No sin razón, pues de buenas a primeras descargó sobre nuestras cabezas la axiomática de Hilbert; que poco antes había muerto, según nos informó. Y el caso es que parecía comenzar muy suavemente:

Cuando se quiere construir una casa -venía a decir- se empieza por considerar las necesidades y servicios a que debe atender y cómo distribuirlos en el edificio y planificar así cada una de sus partes; lo último que se hace, a la vista de todo ello, es calcular los cimientos sobre los que debe levantarse la casa. Pero, luego, la construcción sigue el sentido opuesto: primero se ponen los cimientos que hemos calculado para que sostengan el edificio y vamos levantando éste de modo que alcancemos, al revés de como las habíamos planteado, cada una de las respuestas a que teníamos que hacer frente. Así también hubo de conocerse detalladamente la geometría antes de sentar sus principios fundamentales, y ahora, proyectada ya y establecidos esos principios, se debe, apoyándose en ellos, construir la geometría como se construye el edificio sobre los cimientos.

Y de repente, en ese estado de beatitud a que nos había llevado, nos soltó los postulados, los cimientos, y empezó a poner sobre ellos algunos ladrillos, los tremendos lemas de ordenación, sin ir más lejos, que dejaron en mi ánimo la impresión de que me había equivocado de aula o, si no era así, que me había equivocado de carrera. Porque aquello no se parecía nada a lo que en el bachillerato entendíamos como matemáticas. Y, sin embargo, superado ese susto inicial, ¡qué magnífica construcción de la geometría pudimos contemplar! Porque aquello no fue aprender geometría sino aprender a hacer geometría y, si se me apura, aprender a hacer lo que sea, cualquier cosa que sea: aprender a hacer.

No creo que esa impresión sea sólo mía. Al saber de su fallecimiento me escribía un compañero de curso que no ha tenido después con don Pedro relación profesional: "Pese a lo que me tocó sudar con él, guardo un profundo recuerdo y agradecimiento a su magisterio. Con él pasé de creer que un geómetra era una persona con un cartabón y una escuadra perfectos y con un lápiz de una punta finísima, o sea, de un concepto de colegio y de bachiller, a enfrentarme con los postulados. ¡Lo que me hicieron sufrir y lo mucho que me han servido como rigor para estudiar!"

Pienso yo ahora que don Pedro, que entonces tenía treinta años y hacía tres que había obtenido la cátedra, desplegaba un metódico pero arrollador empuje juvenil. Había estado en Alemania trabajando con van der Waerden, cuyo libro de "Algebra moderna" -y lo recordaba también Fernández Biarge- nos lo hizo estudiar después, y no sería raro que esa perfecta edificación, además del libro mismo de Hilbert, le sirviera de algún modo de modelo para levantar la de su geometría. Mucho más tarde nos confesó la decepción que sintió cuando un compañero suyo, ya mayor, comentó despectivamente que aquello que hacía no era geometría sino álgebra. Uno de los que le oíamos saltó como un resorte: ¡Si nos lo llega a decir entonces a nosotros, salimos a la calle exhibiendo sus apuntes como si fueran la Biblia! Cuento todo esto, que hoy queda ya fuera de cuestión, para destacar lo que, frente al discurso entonces dominante, hubo en sus planteamientos de novedad, de aire fresco, y lo que supuso el rigor, la fundamentación y la consistencia que don Pedro dio a sus lecciones y nos inculcó a sus alumnos, forjándonos así como matemáticos. Lo dice también Biarge en el citado artículo, que los que tuvimos la suerte de seguir sus cursos "debemos a don Pedro la parte más importante de nuestra formación matemática que ya nunca tuvimos que reconsiderar y sobre la que edificamos cualquier construcción posterior".

* * *

¿Y cómo eran sus clases? Para empezar diré cómo empezaban: con una puntualidad absolutamente escrupulosa. Cuando tras de él se cerraba la puerta ya no podía entrar nadie, aunque llegásemos tarde por habérsenos retenido en la clase anterior. (Anecdóticamente recordaré que ni siquiera pudo hacerlo una ruidosa multitud que llegó a la Facultad procedente de otras, sobre todo de Veterinaria, voceando e intentando sacarnos de clase para manifestarnos por no recuerdo qué; lo consiguió en todas las aulas menos en la suya: don Pedro salió imperturbable a la puerta, dijo seriamente dos o tres palabras y el tumulto se deshizo como por ensalmo.) Su puntualidad era para entrar, no para salir; hasta que no agotaba la cuestión que nos explicaba no daba por terminada su lección. En el horario de aquel primer curso había un día a la semana en el que se acumulaban dos clases de su asignatura separadas por un descanso de un cuarto de hora. Vana ilusión: empezaba puntualmente la primera hora, se comía sin interrupción el cuarto de hora intermedio y terminaba la segunda hora cuando tocaba; no creo que bajásemos nunca de dos horas y media seguidas. Era, pues, lo contrario del profesor del cuento que decía que, ya que no había sido puntual al entrar, lo sería al salir; alguno de este último tipo tuvimos también por allí.

Bien, pues hemos llegado a tiempo y ya estamos dentro. Invariablemente sus primeras palabras eran: “Un señor, que haga el favor de escribir”. Ya nos había dicho el primer día que, debido a la herida que tenía en el pie y de la que cojeaba visiblemente, no podía permanecer en la pizarra y requeriría un voluntario que fuese fijando en ella los pasos, fórmulas y figuras que él iba verbalmente describiendo; al verle después en Madrid llenando pizarras y pizarras en sus clases pensé no sólo que estaba muy mejorado de su herida de guerra sino cuánto habría sufrido su paciencia al hablar allí sentado mientras uno de nosotros iba escribiendo o dibujando torpemente lo que él exponía.

Por otra parte, todo hay que decirlo, el voluntario que salía a la pizarra iba bien servido: se convertía en la diana de todas las preguntas que a lo largo de la explicación surgían y se llevaba los sofocos consiguientes si no sabía o respondía mal: no había más remedio que llevar bien estudiado todo lo anterior para salir airoso, y aun así... Algunas anécdotas y ocurrencias podría contar, pero ahora no es oportuno. No hace falta decir, pues, lo poco apetecible que era el oficio de “voluntario que sale a la pizarra”; la solución fue turnarnos, poniéndonos de acuerdo entre nosotros, y así íbamos desfilando uno cada día. A veces, por la razón que fuera, no conseguíamos convencer a nadie para que saliese y nos quedábamos todos mirando al techo cuando don Pedro pedía aquella ayuda; era sólo un instante porque, sin más, su dedo inexorable señalaba al “voluntario” que él elegía con un “¡Usted!”, giraba el dedo hacia la pizarra y allá iba el infeliz dispuesto al sacrificio. Que se aumentaba con pasar luego la tarde copiando de los demás los apuntes que habían tomado. Una vez llegó a pedirnos los apuntes que hasta entonces teníamos escritos, ¡y nos los devolvió corregidos al día siguiente! Claro que cuando nos lo anunció fue de ver el apuro de algunos que tuvieron que borrar los comentarios y exclamaciones con que habían adornado su redacción.

¡Pero aquellos apuntes...! Seguro que más de uno los hemos conservado como oro en paño. Ellos son la transcripción, tan fiel como nos era posible, de unos cursos magistrales, densos, claros, metódicos y perfectos, y constituyen el texto personal de cada uno.

* * *

Se comprenderá, con todo esto, que al final del curso don Pedro nos conocía a todos hasta por el forro, aunque nunca nos hizo exámenes parciales. Más adelante nos confió que a él, cuando era estudiante, siempre le habían fastidiado los parciales: que juzgasen de una vez si sabía o no la asignatura y que le dejasen en paz con aquella manía de aprobarla a plazos. Esa era su postura entonces y es la que hubimos de afrontar al terminar aquel primer curso. Hacía primero un examen eliminatorio de problemas a lo largo de tres sesiones, si mal no recuerdo. Nos daba tiempo suficiente, permitía consultar libros y apuntes, desde luego, y a pesar de todo era una prueba de fuego: problemas de verdad, ingeniosos, no de los llamados "de feliz idea", pero difíciles y que requerían un buen conocimiento de la asignatura. Aquel año sólo dos nos libramos de ser eliminados y pasamos al examen teórico; y eso que en aquel primer curso no éramos tan pocos, puesto que entonces lo seguían también los aspirantes o alumnos de Arquitectura; tal vez llegásemos a veinte alumnos o más.

Pasamos, pues, al examen teórico, que era siempre oral, y en él quedábamos totalmente al descubierto. Venía a durar unos tres días como mínimo, en sesiones de mañana y tarde, a no ser que alguno hubiera demostrado antes su falta de preparación y fuera despedido con un "Vaya usted con Dios". Los demás, ya lo sabían: "Vuelva usted esta tarde" o "Vuelva usted mañana"; algo cuyo final nunca veíamos llegar. Y nadie piense que el examen consistía en un atosigamiento de preguntas que buscasen acorralar al alumno, todo lo contrario: a cada uno lo situaba frente a una pizarra, le proponía un tema y le dejaba discurrir el tiempo que quisiera, incluso haciendo sus ensayos en la pizarra; cuando creía que ya tenía la respuesta a punto, se lo decía y pasaba a desarrollar lo que había pensado o escrito, sometiéndose a cuantas preguntas o aclaraciones le pedía. Si la cosa había resultado bien, nueva pregunta y se repetía la escena. De paso aprovechaba la ocasión para ir señalando los aspectos que el pobre reo debía corregir, cosa que sabía muy bien después de que durante todo el curso le había tomado el pulso cuando actuaba en sus clases, más como destinatario de sus preguntas que de amanuense: a uno le acusaba de ser un vago, a otro de intentar recordar y no discurrir, a otro de sucio y desordenado,... pero, sobre todo, les ayudaba a ajustar bien y depurar sus conocimientos.

Y, así, durante tres días o más; el que resistía, claro: no cabe la menor duda de que don Pedro acababa conociendo, mejor que el mismo examinando, hasta la última partícula de lo que sabía. Porque nosotros, la verdad, después de noches enteras estudiando sin dormir, al final ya no sabíamos ni dónde estábamos. Qué cara de desánimo y abatimiento debió de ponérsenos a los dos que en aquel primer curso habíamos recorrido el largo examen oral y creíamos haber llegado a su fin, cuando una vez más nos citó para el día siguiente y nos sacó a la pizarra; tal sería que hasta sintió piedad: "No se apuren ustedes, que están aprobados los dos. Sólo quiero ver si a alguno de los dos puedo darle notable". Fue como recuperar el alma. (Al final nos dio notable a los dos.)

A nadie extrañará que la superación de estos exámenes la consideráramos poco menos que una heroicidad y que un aprobado en ellos fuera más apreciado que un sobresaliente en otra asignatura; ni tampoco un suspenso era necesariamente un desdoro, lo cual llegó a trascender a toda la Universidad. En Zaragoza había entonces un solo Colegio Mayor masculino (había también uno femenino), que era muy solicitado y, por tanto, muy selectivo en la admisión y continuidad de sus residentes: el suspenso en una asignatura equivalía a la exclusión como colegial desde el curso siguiente. Excepto si la asignatura era de don Pedro: un suspenso suyo no contaba como motivo de no admisión; hasta ese punto era reconocida su exigencia y su rigor. Sólo eso, porque lo que no podía negársele era la firme base en que fundaba sus juicios, el exhaustivo conocimiento, a través de sus preguntas y de sus exámenes, no sólo de lo que el alumno sabía sino hasta de cómo era y de lo que podía dar de sí. Cabría tal vez haber sido más o menos indulgente o haber dulcificado las pruebas pero lo que con ellas no podría ser jamás es arbitrario.

* * *

Como es natural, tal acumulación de datos para formular el juicio más objetivo deseable sólo podía lograrse contando con muy pocos alumnos. Cuando más tarde me reencontré con don Pedro en Madrid, las cosas, como siempre que dependen del número, habían cambiado mucho: tenía cursos muy numerosos, incluso masivos, no era posible el examen oral, recurría a frecuentes exámenes parciales y era él, además, el que explicaba en la pizarra. Por otra parte, algunas de sus asignaturas eran generales para alumnos de otras procedencias o de otras licenciaturas y no sentía la obligación de formar estrictamente matemáticos. Por lo que fuera, y aunque probablemente sus alumnos madrileños le recuerden de serio y exigente proceder, y así era sin duda, no creo equivocarme si lo considero difícilmente comparable al que habíamos conocido. El también lo decía, acudiendo a la repetida escala de haber empezado por ser Sancho el Bravo, pasar por el Fuerte y convertirse finalmente en Sancho Panza: “Es que en Zaragoza estaba todavía sin desbravar”, me decía una vez, recordando nuestros viejos tiempos.

Ya se entiende que este cambio afecta sólo a los niveles de exigencia y que de ningún modo es cualitativo; porque don Pedro, afortunadamente, ha sido siempre el mismo. Lo sé muy bien puesto que junto a él he pasado prácticamente mi vida académica, desde que vine a Madrid siguiendo la estela dejada por aquellos tres años en que fue mi profesor en Zaragoza. De ellos quise hablar aquí y no he conseguido siquiera pasar del primero; y aun así se me ha ido la mano: es lo que pasa a estas alturas de la vida cuando uno se pone a hablar de sus cosas. Pero es igual: los dos años siguientes, aunque con las correspondientes variantes, no harían sino reforzar esa primera impresión que ha sido decisiva, en mí y en otros.

Este año volví allí a celebrar las Bodas de Oro de la Licenciatura con los compañeros de las distintas ramas de Ciencias, y el gozo con que he vivido esos días y los recuerdos que me han suscitado me mueven a no cesar de dar gracias a Dios por haberme puesto, durante los ya lejanos años que he evocado, en aquel lugar, la Universidad que tanto amé; y, al volver a pisar el edificio de la que fue nuestra Facultad, aquel “sitio de Zaragoza” que contribuyó a hacer de mí lo que he sido, no pude por menos que situar en muy alto lugar la figura del maestro que entonces nos abrió sus puertas. Como lo hago aquí ahora.

Y hasta pienso que no le habría disgustado ver que lo recuerdo precisamente allí y entonces, porque él conservó siempre, y nos lo legó a todos, aquel espíritu de reciedumbre y de firmeza, de lealtad sin complacencias, de rigor en el trabajo y de consistencia en las ideas, pero también de sensibilidad y de comprensión, que muy bien puede atribuirse a los hijos de Aragón de los que él, orgullosamente, se sentía siempre formando parte. Creo por eso que tal vez llegaría a disculparme si, ante la inhabilidad y el desaliño que han presidido este intento mío de trazar su retrato, me pareciera más oportuno recurrir para hacerlo al escueto marco de una jota popular, de las que a veces solía gustar y con las que allí termina siempre toda celebración. Que podía ser ésta:

Treinta partes de franqueza,
veinte de desinterés
y cincuenta de nobleza:
¡eso es un aragonés!

Recuerdo de algunas iniciativas de D. Pedro Abellanas

Joaquín Arregui

Departamento de Geometría y Topología
de la Universidad Complutense

En el título de estas breves líneas menciono la palabra “algunas” porque quiero referirme sólo a dos de las variadas iniciativas que D. Pedro realizó en pro de la matemática española a lo largo de su dilatada vida profesional. Son dos cuestiones de las que en su inicio fui testigo directo.

1. Reuniones Anuales de Matemáticos Españoles.

En 1960 se inició mi colaboración con D. Pedro Abellanas en el Instituto Jorge Juan de Matemáticas del C.S.I.C., del que entonces D. Pedro era Director. De vez en cuando teníamos en su despacho unas reuniones informales, que podríamos llamar tertulias matemáticas, a las que asistían más habitualmente, Botella, Etayo, Miguel Laplaza, Gonzalo Calero,... y, con menos frecuencia, José Martínez Salas, Pascual Ibarra, Angel Martínez Losada, y quizá algún otro.

Recuerdo que en una de estas tertulias, D. Pedro comentó que sería conveniente fomentar el trato entre los profesionales de la Matemática en España, y también facilitar a los jóvenes investigadores la oportunidad de dar a conocer el trabajo que realizaban. Sugirió que un modo de conseguir esto podría ser la organización de algún tipo de reuniones científicas en las que se pudieran exponer los temas en que estaban trabajando. La idea gustó a los asistentes.

D. Pedro trató esta cuestión con D. Sixto Ríos, Director del Instituto de Estadística del C.S.I.C., a quien la iniciativa pareció excelente. A continuación, ambos conjuntamente, convocaron a los matemáticos españoles a un encuentro científico en los locales de los dos Institutos, situados en el mismo edificio del C.S.I.C. Esta convocatoria tuvo muy buena acogida, y el encuentro se celebró en 1960, con la asistencia de numerosos profesores de las Facultades de Matemáticas que entonces había en España, las de Madrid, Barcelona, y Zaragoza, y también de profesores de las restantes Universidades.

Finalizadas las sesiones científicas se constituyó una asamblea, abierta a todos, en la que se procedió a reorganizar la Real Sociedad Matemática Española (R.S.M.E.), que desde hacía tiempo llevaba una vida un tanto lánguida, eligiendo una Junta Directiva, con Delegaciones en los distintos Distritos Universitarios, presidida por D. Alberto Dou Mas de Xexás. En la misma asamblea, visto el buen resultado de la reunión científica celebrada y la opinión unánime a favor de repetir encuentros de este tipo, los asistentes de la Universidad de Zaragoza se ofrecieron para organizar una segunda edición en su Universidad el siguiente año 1961.

La reunión de Zaragoza fue un gran éxito, y en la Junta General de la R.S.M.E. se aprobó la propuesta de los asistentes de la Universidad de Barcelona, de tener en esta Universidad la Tercera Reunión Anual de Matemáticos Españoles (R.A.M.E) en el siguiente año 1962. La IV R.A.M.E. tuvo lugar en la Universidad de Salamanca, en diciembre de 1963. En la Junta General de la R.S.M.E. allí reunida se procedió a la renovación de la Junta Directiva de la Sociedad, eligiendo a D. Francisco Botella como Presidente. En esta misma Junta General se acordó organizar, como luego se dirá, la primera Olimpiada Matemática Española.

Se puede decir que las R.A.M.E. alcanzaron pronto su objetivo: se aprecia la amplitud de participación en los Encuentros de los Matemáticos Españoles a la vista de la organización de la X R.A.M.E. celebrada en la Universidad de La Laguna del 15 al 20 de diciembre de 1969: los trabajos presentados estaban clasificados en 6 Secciones, correspondientes a las áreas de Análisis; Geometría y Topología; Estadística y Cálculo Numérico; Algebra, Lógica y Fundamentos de la Matemática; Mecánica, Astronomía, y Física Matemática; y Metodología, Didáctica e Historia de la Matemática. En la Junta Directiva de la Reunión estaban, presidiendo la Comisión Ejecutiva, D. Joaquín Mª Cascante como Presidente; D. Pedro Abellanas, D. Enrique Vidal Abascal, y D. Nacere Hayek Calil como Vicepresidentes; y presidiendo las Secciones antes citadas, respectivamente, D. Enrique Linés, D. José Teixidor, D. Sixto Ríos, D. Germán Ancochea, el Rvdo. P. Antonio Romañá, y D. Antonio de Castro Brezezicki.

La XI R.A.M.E. tuvo lugar en la Universidad de Murcia, en diciembre de 1970. Asistió el portugués D. Hamilcar da Silva Lobo, profesor de matemáticas de Enseñanza Media en Lisboa y gran entusiasta de las R.A.M.E., en las que ya había participado en años anteriores. En la Junta de la R.S.M.E. D. Hamilcar manifestó el deseo de la Universidad de Lisboa de acoger en sus aulas la siguiente edición de las R.A.M.E. con la participación conjunta de matemáticos españoles y portugueses. Los asistentes recibieron muy bien ésta propuesta, y en abril de 1972 tuvo lugar en Lisboa la I Reunión Hispano-Lusa de Matemática. Allí se acordó continuar estas reuniones Hispano-Lusas, celebrando de modo sucesivo dos en España y una en Portugal.

Estas Reuniones Hispano-Lusas se tuvieron regularmente hasta 1990 con la excepción del año 1975: en el año 1974 se celebró en Sevilla; en el año 1975 la Reunión debía tenerse en Portugal pero los matemáticos portugueses guardaron silencio y no hubo Reunión. En 1976 se celebró en Málaga sin asistencia de portugueses; y ya en 1977, se tuvo en Jaca la IV Reunión Hispano-Lusa con asistencia de matemáticos de los dos países. Las Hispano-Lusas tuvieron su última edición en Évora el año 1990. Desde entonces los especialistas de las diversas áreas de la Matemática han organizado sus propias Reuniones o Simposios de modo independiente, hecho que parece consecuencia natural del apreciable aumento de los cultivadores de esta Ciencia y de las exigencias de la especialización.

2. Olimpíadas Matemáticas Españolas

Otro de los recuerdos que tengo de aquellas tertulias en el despacho de D. Pedro se refiere a la ocasión en que éste hizo algunas consideraciones acerca de los pocos jóvenes que entonces hacían la carrera de Matemáticas. Esta circunstancia le alentaba a hacer algo que animase a cursar los estudios universitarios de Matemáticas a aquéllos que tuvieran una relevante aptitud para este tipo de saberes. Más adelante tuve la referencia de que en una conversación con Lora Tamayo, a la sazón Ministro de Educación, éste le comentó a D. Pedro que en España hacían falta muchos más matemáticos.

D. Pedro tenía información de las Olimpiadas Matemáticas que se hacían en algunos países, especialmente del Este Europeo, y consideraba posible organizar algo semejante en España, viendo en la institución de las Olimpiadas una posible vía para fomentar las vocaciones matemáticas.

Poco después, contando con la ayuda del Ministerio de Educación, en la Junta General de la R.S.M.E. que tenía lugar en Salamanca, en diciembre de 1963 con ocasión de la IV R.A.M.E., D. Pedro expuso su proyecto sobre las Olimpiadas. La idea fue bien recibida, y en la misma Junta se acordaron las líneas generales de su organización y también la realización de la I Olimpiada en el mismo curso 1963-64.

Podían presentarse a la Olimpiada los alumnos del último curso de Enseñanza Media. La Delegación de la R.S.M.E. en cada Distrito Universitario se encargaba de organizar la Olimpiada para los alumnos de su Distrito. Los tres alumnos mejor clasificados de cada Distrito tenían opción a participar en la segunda fase de la Olimpiada, de nivel nacional, cuya organización correspondía a la R.S.M.E. A los tres ganadores de cada Distrito Universitario el Ministerio de Educación les concedía una beca del P.I.O (Patronato de Igualdad de Oportunidades) para cursar la Licenciatura en Matemáticas, con las mismas condiciones que se exigían a los demás becarios del P.I.O.; y los tres mejor clasificados en la prueba nacional recibían un premio en metálico. La R.S.M.E. era la encargada del seguimiento de los estudios de los becarios.

Las pruebas de la Olimpiada consistían en resolver algunos problemas elegidos de modo que su resolución dependiese más de la aptitud para estudiar Matemáticas que de la erudición.

Con el paso de los años fueron cambiando los detalles de la organización de las Olimpiadas y también los premios a los ganadores, pero gracias a la comprensión del significado de estas Olimpiadas por parte de los sucesivos organismos pertinentes del Ministerio de Educación: Comisión de Protección Escolar, Dirección General de Promoción Estudiantil, I.N.A.P.E., Dirección General de Promoción Educativa..., que siempre mantuvieron su colaboración, las Olimpiadas se celebraron todos los cursos (excepto en el curso 1977-78 en el que, a causa de un cambio de Plan de estudios, los alumnos de COU eran todos repetidores).

3. Olimpiadas Matemáticas Internacionales

Pocos años antes de que se iniciaran las Olimpiadas en España se había celebrado la I Olimpiada Matemática Internacional en Rumanía con la participación de seis países del Este Europeo. A este grupo inicial se fueron incorporando después Francia, Gran Bretaña, Italia,... de modo que en 1977 eran ya 23 los países participantes, la mayor parte europeos. Por esa fecha ya se considera en la R.S.M.E., siendo su Presidente D. José Javier Etayo Miqueo, la posible incorporación de España a estas Olimpiadas, pero no se consigue superar la dificultad que supone encontrar los medios económicos para llevarla a cabo. En 1982 el Instituto Nacional de Asistencia y Promoción del Estudiante (I.N-.A.P.E.) permite vencer este obstáculo al aprobar el proyecto presentado por la R.S.M.E. para incorporar a España a las Olimpiadas Matemáticas Internacionales, y en 1983 un equipo español participa en la XXIV Olimpiada que se celebra en París.

Desde entonces España participa sucesivamente en las Olimpiadas Internacionales que se celebran en Praga (1984), Helsinki (1985), Varsovia (1986), etc. En Varsovia el equipo español, formado por cuatro concursantes, consigue una medalla de plata y dos de bronce.

4. Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas

En 1985, en una reunión de Ministros de Educación de los países miembros de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (O.E.I.) se acuerda instituir las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas, y Colombia se ofrece como sede para albergar la primera de estas competiciones. Efectivamente esta Primera O.I.M. se tiene en Bogotá, en el mismo año 1985, organizada por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

Enterada la R.S.M.E. de esta iniciativa de la O.E.I., se consiguió una subvención del M.E.C. y se pudo enviar a esta Primera O.I.M. un equipo español de concursantes, que se clasificó en el primer puesto. La R.S.M.E. siguió enviando un equipo español a las sucesivas O.I.M., la segunda de las cuales se celebró en Uruguay a principios de 1987, donde el equipo español tuvo también una brillante actuación al obtener dos medallas de oro y dos de bronce.

La V Olimpiada Iberoaméricana se celebró del 22 al 29 de septiembre de 1990 en Valladolid, siendo D. José Manuel Aroca Presidente de la R.S.M.E. Cada país podía enviar hasta cuatro participantes y se presentaron a competir 59 concursantes de 16 países. Los cuatro concursantes españoles tuvieron una actuación muy digna consiguiendo una medalla de oro, una de plata y dos de bronce.

Es de interés señalar que con ocasión de estas Olimpiadas se generó una intensa relación entre los países de la O.E.I. que se concretó luego en importantes acuerdos en el área cultural y educativa.

La participación española en estas Olimpiadas Matemáticas de nivel internacional motivó que, además de la Dirección General de Promoción Educativa, que venía auspiciando las Olimpiadas Nacionales, intervinieran también la Subdirección General de Cooperación Internacional, y luego la Dirección General de Renovación Pedagógica. Como se ve la organización de las Olimpiadas se iba haciendo cada vez más compleja, al exigir más atención a los aspectos tanto de tipo técnico como económico y también administrativo. Esta situación llevó, por iniciativa del Presidente de la R.S.M.E. entonces D. Pedro Luis García Pérez, a la publicación en el B.O.E. de 9-II-1988 de la Orden Ministerial de 4-II-1988 por la que se crea la Comisión Coordinadora de la Participación Española en las Olimpiadas Matemáticas Internacionales, que determina el marco institucional de participación de Ministerio y R.S.M.E. en el que han de realizarse las Olimpiadas Matemáticas.

Es un hecho que los nombres de un número apreciable de Catedráticos, Profesores Titulares de Universidad, y de Investigadores se puede encontrar en las listas de los ganadores de las Olimpiadas Matemáticas, por lo que bien se puede decir que aquel proyecto que D. Pedro sacó adelante y al que prestó tantas horas de dedicación -con la generosa ayuda de otras personas que no es del caso citar aquí- fue coronado por el éxito.

La preocupación por la Enseñanza de las Matemáticas en la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid

María Paz Bujanda Jáuregui

Facultad de Ciencias Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

A la memoria de Don Pedro Abellanas, maestro y amigo, que tanto entusiasmo tuvo y supo transmitir por la enseñanza de las matemáticas en la Facultad de Matemáticas.

"El problema de la enseñanza no tiene solución", era una de las frases que don Pedro gustaba repetir. Quienes le conocíamos bien, sabíamos que no implicaba el derrotismo que una primera lectura puede sugerir. En absoluto; se trataba más bien de lo contrario: era una apuesta por la consideración constructiva del tema. Pretendía con la aparente provocación de la frase afirmar que el problema de la enseñanza no tenía una solución definitiva, válida para siempre. Era, es, un problema que hay que ir resolviendo cada día en el aula, en la planificación de las clases, en el trato con los alumnos, en los momentos de cambio... Un problema que debía permanecer siempre abierto, a la espera de obtener en cada ocasión las mejores aproximaciones.

El contenido de este breve artículo, quiere resumir la participación del profesor Abellanas en la solución de este problema, a través de la creación de la Especialidad de Metodología en la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

1. La Facultad de Ciencias Matemáticas y los profesionales que forma.

Es una cuestión generalmente admitida que la Universidad no alcanza a "profesionalizar" sus enseñanzas. Esto es, los estudios correspondientes a las diferentes licenciaturas no suelen preparar para el ejercicio concreto de las profesiones vinculadas a ellas. Sin embargo, sería satisfactorio que, sin mengua de la debida calidad de una sólida formación general, proporcionara a los actuales estudiantes algunos elementos que les permitieran incorporarse, sin un excesivo esfuerzo, a las distintas profesiones mediante concreciones y proyecciones adecuadas.

En el caso de la Facultad de Ciencias Matemáticas, podemos considerar que las profesiones más vinculadas a los estudios que se imparten en ella, serían los siguientes:

a) Investigadores

Aun cuando existen centros especializados exclusivamente en la investigación, pensemos en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas, muchos de los investigadores ejercen su trabajo dentro del marco de la enseñanza en la Universidad. Con mucha frecuencia, la figura del investigador va unida a la del profesor de Universidad. La figura de Don Pedro Abellanas, es un claro ejemplo de una dedicación plena a la enseñanza en la Facultad y de un intenso trabajo en investigación, que mantuvo hasta su muerte.

b) Profesores que imparten la enseñanza en niveles preuniveristarios

Constituyen con enorme diferencia el porcentaje más elevado de las salidas profesionales de la licenciatura.

c) Profesionales vinculados con el mundo empresarial

Se va ampliando cada vez más el número de licenciados que se insertan en diferentes tipos de empresas. Si se considera el estilo de la enseñanza de nuestra Facultad, cabría formularse estas preguntas: *¿Está nuestra enseñanza abierta a problemas de aplicación de las matemáticas? ¿Somos conscientes sus profesores de que no debiéramos limitarnos a formar casi exclusivamente a futuros investigadores?* Salvo las excepciones que confirman la regla, pero no la invalidan, creo que la comunidad matemática en cuanto tal tiene una fuerte tendencia a cerrarse en sus propios problemas. Las aplicaciones de las matemáticas a la práctica raramente se dan entre los matemáticos. Es frecuente que un físico, un economista, un biólogo ó un sociólogo utilicen los resultados de las matemáticas para sus ciencias. Pero pudiéramos decir que esto se hace casi a pesar de los matemáticos. Este aspecto, si es tal y como lo entendemos, sería grave. No estamos ciertamente en el Renacimiento, donde el saber no estaba aun tan delimitado como lo está ahora por las distintas especializaciones y el hombre con preocupaciones intelectuales podía aspirar a conocer y tener intereses en distintos campos del conocimiento. Tampoco estamos en la situación de hace cincuenta años cuando los matemáticos constituían una reducida minoría, cuando era normal que terminaran la licenciatura cinco alumnos. Por ello debiera ser mayor la responsabilidad de los matemáticos frente a la sociedad.

La Comisión Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas (I.C.M.I.) elaboró en 1987 un interesantísimo documento sobre las Matemáticas como disciplina de servicio[1]. En esta línea consideramos de interés la siguiente cita de J.P. Kahane: *Los profesores de matemáticas han aprendido las matemáticas que se enseñan a los matemáticos, en las que el acento recae sobre el encadenamiento de teorías, las demostraciones, las definiciones rigurosas y los conceptos abstractos. Pero la mitad de los servicios de enseñanza de las matemáticas en la enseñanza superior es absolutamente otra cosa: la enseñanza a los no matemáticos..... La enseñanza para los no matemáticos no es una subenseñanza ó una enseñanza empobrecida*[2].

2. Pasado y nacimiento de la especialidad de Metodología.

Preocupación por la enseñanza de las matemáticas en la comunidad matemática.

A lo largo de la historia, ha habido un buen número de grandes matemáticos, que a su interés por la investigación matemática, han unido la preocupación por su enseñanza. Podríamos citar entre los matemáticos del siglo XX a Klein, Hadamard, Poincaré, Polya, Dieudonné, Freudhental, René Thom.....

Sin embargo, salvo algunos casos excepcionales, se ha tratado más bien de incursiones esporádicas, como una conferencia de clausura de un congreso, una toma de posición frente a un proyecto de reforma de la enseñanza, una transferencia de su propio modo de hacer matemáticas...

Las aportaciones han sido todo lo valiosas que cabía esperar, procediendo de personas intelectualmente brillantes y con profundo dominio de las matemáticas y sus posibilidades.

En cuanto a intervenciones con carácter de continuidad, con proyecciones a los problemas concretos de la enseñanza, con aportación a la formación inicial y permanente de profesores, las aportaciones ya son más escasas, si bien en la actualidad ya se dan buenos logros que hacen justificable la esperanza en un futuro mejor. Dentro de esta línea, cabe situar los esfuerzos por crear dentro de nuestro Facultad de Matemáticas una especialidad dedicada a los problemas de su ense-

---

1 ICMI *Mathematics as a service subjet.* 1987. Cambridge University Press.

2 KAHANE, J.P. 1985. *Les Mathématiques comme discipline de service*. Bulletin de l´A.P.M.E.P.

ñanza. Consideramos brevemente, las figuras de dos grandes matemáticos destacados en este empeño.

El profesor don Pedro Puig Adam

Tuvo, tanto a nivel nacional como internacional y quizás en vida más en el ambiente internacional, una importancia decisiva en sus aportaciones al problema de la enseñanza de las matemáticas. Fue uno de los miembros fundadores de la "Comisión Internacional para la mejora de la enseñanza de las matemáticas", juntamente con Gattegno, Fehr y Fletcher, entre otros. Walusinski en una lúcida y entrañable reflexión sobre las preocupaciones y los logros de la Comisión cita con gran reconocimiento la labor de nuestro profesor Puig Adam[3]. En la Facultad de Ciencias Matemáticas ocupó durante algunos años la cátedra de Didáctica de las matemáticas y supo entusiasmar a muchos profesores con sus teorías heurísticas, original aportación suya y que hoy podemos considerar en plena sintonía con la obra de Polya sobre el papel fundamental de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.

El profesor don Pedro Abellanas, fundador de la Especialidad.

No sería posible hablar de la especialidad de Metodología y Didáctica de las matemáticas sin detenerse a considerar, siquiera brevemente, la personalidad de su fundador, el profesor don Pedro Abellanas Cebollero.

El profesor Abellanas, el maestro de muchos profesores actuales de distintas universidades, entre los que tengo el honor de encontrarme, tuvo una influencia decisiva en la fundación y puesta en marcha de la especialidad, no solamente por su interés en los problemas de la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles, sino también por su capacidad de atraer a otros profesores y llegar a una ampliación de programas que fuera abriendo camino a la creación de la especialidad de Metodología y Didáctica de las matemáticas.

Como matemático, fue uno de los pioneros en el desarrollo de una investigación vinculada a los grandes problemas de la matemática internacional, así como la integración de esas primeras investigaciones en los cauces usuales de difusión de la investigación matemática mundial. No cabría pensar en la situación actual sin unos primeros trabajos y contactos como los que realizó el profesor Abellanas.

[3] WALUSINSKI, G. 1985. L´instructive histoire d´un échec: les mathématiques modernes. Bulletin de l´ A.P.M.E.P.

Breve historia de los orígenes de la Especialidad.

Hace casi cuarenta años y en torno a D. Pedro Abellanas, comenzó a tomar cuerpo la idea de introducir en la entonces Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias algunas asignaturas como la Metodología y la Historia de las Matemáticas, el estudio de algunos problemas clásicos, etc. orientados a conseguir una formación más específica de los futuros profesores de Enseñanza Media.

Los datos que exponemos a continuación proceden de la Guía de la Universidad de Madrid y los debemos a una gentileza del Profesor Etayo Miqueo, que, como veremos, fue un colaborador entusiasta en el desarrollo de los que en pocos años acabaría convirtiéndose en la "Especialidad de Metodología y Didáctica de las Matemáticas". Enumeramos las asignaturas que estudiaban los alumnos en los distintos años, desde los inicios hasta la creación de la especialidad. Subrayamos las materias relacionadas con el empeño de introducir la preocupación por la enseñanza de las matemáticas.

Cursos 1963 -1966 (Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias).

Cuarto curso de licenciatura:
- Análisis Matemático 4º.
- Geometría 4ª.
- Mecánica.

Los alumnos deberán elegir una de las siguientes asignaturas:
- Álgebra moderna.
- Metodología (a cargo del Profesor Dr. Don José Royo López).
- Estadística matemática.
- Métodos estadísticos.
- Astronomía teórica.

Quinto curso de licenciatura:
- Análisis Matemático 5º.
- Geometría 5ª.
- Geometría algebraica.

Los alumnos deberán elegir una de las siguientes asignaturas:
- Topología.
- Historia de las matemáticas (Catedrático: Don Alberto Dou).
- Problemas clásicos de las matemáticas (Catedrático: D. Francisco Botella).
- Métodos estadísticos.
- Aplicaciones de la Estadística.
- Geodesia y Topografía.

Como puede observarse, en estos años no hay especialidades, sino solamente algunas materias optativas en las que ya se aprecia el interés por una formación más dirigida a la enseñanza de las matemáticas.

Nótese que ya, desde sus comienzos, se cuenta con la colaboración, que se mantiene en la actualidad, con Catedráticos de Instituto; en los años a los que nos estamos refiriendo, con la de Don José Royo López, Director durante muchos años del Instituto Ramiro de Maeztu.

*Curso 1966-67***.**

Dentro aún de la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias, se empieza ya a hablar de tres ramas: "Metodología y Didáctica", "Matemática Pura" y "Matemática Aplicada". Las tres ramas, tienen sus materias específicas a partir de tercer curso.

Tercer curso(rama de metodología y didáctica):

Análisis Matemático 2º.
Geometría 2ª.
Cálculo de Probabilidades y Estadística Matemática.
Física Teórica 2º.
Metodología y Didáctica (Catedrático: Don Pedro Abellanas).
Astronomía General.

Curso 1967-68.

Siguen existiendo las tres ramas, pero ya se delimita un tronco común y unas asignaturas propias de cada una de ellas.

Tercer curso. Materias comunes:

Análisis Matemático 2º.
Geometría 2º.
Cálculo de Probabilidades y Estadística Matemática.
Física teórica.

Tercer curso. Especialidad de Metodología:

Metodología y Didáctica (Profesor: Don Gonzalo Calero).
Astronomía general.

Cuarto curso. Materias comunes:

Análisis Matemático 3º.
Topología 1º.
Cuarto curso. Especialidad de Metodología:
Análisis Matemático 3º.
Álgebra y Topología 2º.
Matemática Elemental 1º.

Metodología y Didáctica (Catedrático Don J.J. Etayo Miqueo).
Teoría de Muestras y Diseño de Experimentos.

Quinto curso. Materias comunes:

Análisis Matemático 4º.

Quinto curso. Especialidad de Metodología:

Matemática Elemental 2º. (Catedrático: Don Pedro Abellanas).
Metodología y Didáctica. (Catedrático: Don J.J. Etayo Miqueo).
Prácticas de enseñanza (Profesor: Don Gonzalo Calero).

En el curso 1970-71, las materias son las mismas, pero ya se habla de "Especialidad" en lugar de "Rama". En el curso 1975-76, las distintas secciones de la Facultad de Ciencias pasan a convertirse en Facultades independientes. A partir de entonces, tenemos ya la Facultad de Ciencias Matemáticas.

Hasta la instauración del plan de estudios de 1995, actualmente en vigor, se varía muy poco la línea propuesta, aun cuando los contenidos son cada vez más definidos.

A puros efectos organizativos, en Tercer curso los alumnos que proyectan estudiar la especialidad de Didáctica estudian en grupos separados de los de otras especialidades. Sin embargo, la realidad es que siguen los mismos programas y que esa primera tendencia no es condicionante para la elección definitiva que se hace en Cuarto curso. Por tanto, la Especialidad se hace solamente en los dos últimos cursos de la licenciatura. Cabe subrayar los siguientes aspectos:

1) Existen dos materias específicas, Metodología I en 4º curso, con seis horas semanales y Metodología II, en 5º curso, con tres horas semanales. Estas materias las imparten Catedráticos de Instituto, en los últimos años con la configuración administrativa de Profesores Asociados. Entre ellos, han figurado Gonzalo Calero Rosillo, Ángel Martínez Losada, Adela Salvador, Javier Peralta y Laura Molleda. Estos profesores han contribuido de una manera muy eficaz a la formación pedagógica de los alumnos y a la necesaria relación con el mundo de la enseñanza media.

2) La Historia de la Matemáticas, que ya figuraba en los albores de la especialidad, se estudia en quinto curso, como parte de la Asignatura denominada "Seminario de matemáticas".

3) Sigue manteniéndose una vinculación al mundo real de la enseñanza a través de las " Prácticas de Enseñanza" que se llevan a cabo en quinto curso, en diferentes centros y bajo la coordinación del profesor de Metodología II.

4) Hay materias de fundamentación, como la Teoría de Conjuntos y la Lógica matemática.

5) La Geometría Axiomática, impartida en 4º curso, corresponde a la evolución natural de la antigua "Matemática Elemental I". en la que tomado el título de la conocida obra de Klein, se pretendía estudiar la geometría elemental desde el punto de vista superior.

6) También se imparten materias " puramente" matemáticas, como Análisis de Variable Compleja, Teoría de la medida ó Grupos clásicos.

La enseñanza de las matemáticas en el plan de estudios de 1995.

El plan de estudios actual, entró en vigor en 1995. El plan gira en torno a la consideración de "materias troncales" (que deben estudiar todos los alumnos), "obligatorias" (elegidas dentro de las señaladas como tales), "optativas" (el alumno puede elegirlas dentro de las que se señalan como tales) y de "libre elección", que pueden cursarse incluso en Facultades de la Universidad distintas de la de Matemáticas. La duración propuesta para cada asignatura viene dada en términos de créditos: 1 crédito equivale a 10 horas de clase. El primer Ciclo (formado por los tres primeros cursos), con sus posibilidades de opción es general. El alumno debe completar 124.5 créditos, de acuerdo con la siguiente distribución:

Asignaturas troncales: 36 (21 teóricos + 15 prácticos).
Asignaturas obligatorias: 48 (30 teóricos + 18 prácticos).
Asignaturas optativas: 30.
Libre elección: 10.5.

En el segundo Ciclo (correspondiente a los cursos cuarto y quinto) no hay materias obligatorias. El concepto de especialidad, pasa al de "perfil". Se contemplan la existencia de los siguientes perfiles:

1. Astronomía y Geodesia.
2. Estadística e Investigación Operativa.
3. Matemática Aplicada.
4. Matemática Computacional.
6. Matemática Fundamental.
7. Metodología.

Se ofrece la posibilidad de elegir algunas materias dentro de los perfiles señalados. Las materias correspondientes al perfil de Metodología son las siguientes

Metodología matemática (7.5 créditos).
Prácticas de enseñanza (15 créditos).
Astronomía fundamental.
Estructuras de datos y algoritmos.
Historia de las matemáticas II.
Inferencia Estadística.

Mecánica Clásica.
Teoría de conjuntos.
Teoría de la medida.
Topología algebraica.

Las materias señaladas para cada perfil tienen la condición de optativas. La distribución de los créditos es la siguiente:

Asignaturas Troncales: 46.5 (21 teóricos + 15 prácticos).
Asignaturas Optativas: 73.5.
Libre elección: 14.

Como puede apreciarse, hay un gran margen de libertad en la elección de asignaturas, de modo que es muy frecuente que alumnos que no hayan elegido el perfil de metodología cursen las asignaturas de Metodología matemática y Prácticas de enseñanza. Tampoco en raro el caso de alumnos que terminan la licenciatura sin haber dado preferencia a ningún perfil.

No queremos terminar este breve recorrido a través del interés por la enseñanza de las matemáticas desde nuestra Facultad sin señalar que existe desde hace años, el "Título de Experto en Educación y Actualización matemáticas", que constituye un tipo de estudios para postgraduados, al que acuden con interés muchos profesores en ejercicio, con lo que se favorece la consideración de la enseñanza de las matemáticas como algo propio de la Facultad y, a su vez, los profesores, muchas veces con nostalgia de sus estudios universitarios, encuentran una buena acogida y proporcionan el necesario contacto con el mundo de la enseñanza preuniversitaria de las matemáticas.

El recuerdo de D. Pedro Abellanas

Laura Molleda Sánchez

Departamento de Álgebra de la Universidad Complutense

Conocí a D. Pedro cuando, terminada mi carrera de Matemáticas en la Universidad de Santiago, me trasladé a Madrid para ocupar una plaza de ayudante en el Departamento de Álgebra de la U. Complutense. Mi trabajo consistía en dar clases prácticas en Físicas y en Farmacia de las que D. Pedro era profesor. En esa época, D. Pedro exigía que sus ayudantes le acompañasen a sus clases teóricas para poder poner los ejercicios de acuerdo con sus explicaciones.

Entonces yo le veía como a un *maestro*. Recién terminada mi carrera, esas clases fueron para mí, no solo el afianzamiento de los conocimientos que necesitaba para desarrollar las clases prácticas, sino también ejemplo de cómo enseñar matemáticas clara y ordenadamente. D Pedro llenaba aquellas pizarras del Aula Magna de Físicas con definiciones, ejemplos, proposiciones, teoremas y corolarios que constituían perfectas secuencias de instrucción.

Fue cuando, caminando o en coche, nos dirigíamos desde Físicas a Farmacia, me acerqué más personalmente a D. Pedro. Durante esos trayectos la conversación podía transcurrir desde la última anécdota vivida en la Facultad (y en aquellos años eran variadas), o la maravilla de los colores del Otoño madrileño, a su preocupación por la enseñanza de las Matemáticas en todos sus grados, y en particular por la enseñanza no universitaria. A D. Pedro se le debe la creación de la rama de Metodología en la Facultad de CC. Matemáticas y fue D. Pedro quien me animó para asumir el esfuerzo diario de dar clase en un centro de Enseñanza Secundaria.

Y creo que el interés por la enseñanza de las Matemáticas, el empeño en mejorar constantemente y las ganas de crecer en el conocimiento que aprendí de D. Pedro, me han acompañado y siguen acompañándome en mi labor profesional como profesora de Instituto y como profesora de Metodología en la Facultad de CC. Matemáticas.

Las ciencias matemático-astronómicas en la Edad Media

Concepción Romo Santos

Departamento de Álgebra de la Universidad Complutense

Es para mí un honor colaborar en este entrañable homenaje organizado "in memoriam" de mi maestro D. Pedro Abellanas Cebollero. Todos los amigos dejan huella, pero mucho más todavía si se han comportado como padres. Entonces el recuerdo es permanente y el agradecimiento profundo. Este es mi caso, he tenido la suerte de compartir con él a lo largo de la vida muchos momentos de entusiasmo y emoción en un trabajo común.

D. Pedro dedicó su vida al bien de la enseñanza de las matemáticas. Hombre infatigable, tenaz, supo crear un equipo de estudio al que logró contagiar su ánimo de trabajo y desarrollar una amplia labor.

Recuerdo la última vez que fui a visitarle, en compañía de Mª Paz Bujanda. Fue unos meses antes de su muerte. Estaba muy preocupado por la salud de su mujer, su compañera de siempre y a la que quería con locura. Sin embargo nos dijo que él se encontraba divinamente. ¡Estoy hecho un macizo¡, fueron sus palabras. Pasamos un rato muy agradable hablando de nuestras clases, de los alumnos, de la Facultad. D. Pedro siempre nos contagiaba su ánimo de trabajo y su entusiasmo por las matemáticas.

Fue un hombre que pasó por la vida estudiando, enseñando, investigando y ayudando a todo aquel que tuviese ganas de saber, siempre de forma generosa y sin límites. Descanse en paz.

Haremos un breve resumen de su curriculum vitae.

D. Pedro Abellanas Cebollero (20 noviembre 1914 - 29 julio 1999)

Licenciado en Ciencias Exactas. Premio extraordinario en la Licenciatura por la Universidad de Zaragoza (Junio 1934).

Catedrático de Matemáticas de Instituto de Enseñanza Media (1940).

Doctor en Ciencias Exactas por la Universidad Central de Madrid. Premio extraordinario del doctorado (1941).

Catedrático Numerario de Geometría Analítica de la Universidad de Zaragoza (1942).

Catedrático Numerario de Geometría Proyectiva de la Universidad de Madrid (1949).
Miembro Numerario de la Academia de Ciencias de Zaragoza.
Director del Instituto Jorge Juan del C.S.I.C. hasta su jubilación.
Director del Departamento de Álgebra y Fundamentos de la Universidad Complutense desde su creación hasta la jubilación.
Cruz de Alfonso X el Sabio.
Medalla al mérito docente de Alfonso X el Sabio.
Consejero del Patronato Alfonso X del C.S.I.C.
Académico de la Academia de Ciencias de Lisboa.
Ha organizado y asistido a muchos congresos matemáticos.
Ha publicado numerosos libros, artículos y memorias científicas.

Para intervenir en este homenaje he elegido un tema de "Historia de las Matemáticas", materia con la que me he entusiasmado gracias a D. Pedro.

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio de la actividad matemático-astronómica de los hispano-judíos en las naciones cristianas durante la Edad Media.

Distinguiremos dos periodos: Alta y Baja Edad Media. La separación entre estos periodos la fijaremos hacia 1250.

1. La Alta Edad Media

La temática científica parece concentrarse en el dominio matemático, si se quiere matemático-astronómico: aritmética, geometría, astronomía y astrología. Los principales científicos de esta época fueron los siguientes

Moisés Sefardí

Fue médico y astrónomo. Fue médico de Alfonso I de Aragón. Escribió un opúsculo en latín para determinar los eclipses y, probablemente, una traducción latina de las tablas de Aljuarismi, que algunos manuscritos le atribuyen; esas tablas fueron utilizadas por Abelardo de Bath.

Abraham bar Hiyá

El nasí Abraham bar Hiyá se firma Hasefaradí (“el hispano“), y suele llamarse Habargeloní, o sea “el barcelonés“, porque efectivamente su actividad está documentada en Barcelona en los años 1134-1145, es decir, en tiempos del conde Ramón Berenguer IV, pero hay que pensar que era originario de Al-Andalus por su producción científica en árabe y por su sobrenombre de “Savosorda”.

Destacó por su labor científica; en este campo nos ha dejado las siguientes obras: “Tratado de la geometría y la medición”, “Libro de la intercalación del calendario”, “La forma de la Tierra”, “Cálculo de las órbitas de los astros”, “Tablas astronómicas”. Todas estas obras están escritas en hebreo y en ellas se destaca el esfuerzo de Bar Hiyá por elevar el hebreo a la categoría de lengua científica.

Fue uno de los iniciadores de la corriente de traducciones al latín a través de un intermediario oral romance. Su colaborador cristiano fue Platón de Tívoli. Entre los dos tradujeron al menos once obras, todas científicas, la más notable fue la del “Ibur” que él mismo había escrito o compendiado.

Esta versión resumida tuvo gran importancia y se ha dicho que “por medio de ella la Europa cristiana aprendió geometría y trigonometría”.

Abraham ibn Ezrá

Fue un científico que cultivó sobre todo el campo matemático, en especial el astronómico. Su obra principal son las obras astronómicas conocidas como “Tabulae pisanae”.

Avedant israelita

Es calificado como “el intelectual más importante de la primera mitad del siglo XII”. Se le atribuyen un montón de traducciones de los grandes autores árabes (Albatani, Alfargani, Abenragel, Albumasar, Aljuarismi, y con esta última obra fue el introductor de la aritmética árabe en Occidente e incluso de la palabra algoritmo).

2. La Baja Edad Media (1250 – 1492)

En la Baja Edad Media la situación difiere bastante de la Alta Edad Media. Terminadas ya las épocas de asimilación y de transmisión, precisamente entonces se produce la gran labor creadora, que se manifiesta primordialmente en el campo de la astronomía.

Las ciencias matemático-astronómicas

En este campo es casi absoluto el predominio de la ciencia astronómica; se piensa en los astrónomos (de biblioteca y de observación) activos en Toledo bajo la protección de Alfonso X de Castilla, en concreto de Isaac ben Sayid y Yehudá ben Moisés. Y también hay que señalar lo realizado en la Corona de Aragón, en la corte de Pedro IV el Ceremonioso.

Es preciso señalar la labor de los judíos fabricantes de instrumentos de cálculo (astrolabios), así como de relojes similares.

Citaremos también la crítica de Hasday Cresques (Barcelona 1340- Zaragoza 1411) a la física aristotélica, que abrió nuevos horizontes científicos: es conocida su influencia en Pico della Mirandola y en Spinoza.

En 1310 Isaac Israelí compuso en Toledo el Yesod'olam ("Fundamento del mundo"), un compendio astronómico redactado en hebreo.

Finalmente hay que decir que ya en los días de la expulsión de los judíos el astrónomo Abraham Zacuto redactó obras en hebreo y en castellano.

Los científicos judíos de la corte de Alfonso X. Isaac ben Sayid y Yehudá ben Moisés

Contra la idea generalizada de la intervención personal de Alfonso X (rey de 1252 a 1284) en las obras científicas preparadas bajo su mecenazgo, el examen de treinta obras astronómico-astrológicas en castellano pone de manifiesto la gran participación de intelectuales judíos, que intervinieron en el 74% de esas obras, y eso sin entrar a valorar la importancia de las mismas. Esas obras pueden clasificarse en tres grupos: traducciones del árabe, tratados más o menos originales seguramente basados en fuentes árabes, y tablas astronómicas. El examen revela la parte destacadísima de Yehudá ben Moisés y de Isaac ben Sayid, que colaboraron en el 58% de las obras, entre las cuales figuran las célebres tablas astronómicas que la posteridad conoció con el nombre de tablas alfonsíes.

Los demás colaboradores judíos fueron don Abraham, don Mossé y Samuel Haleví.

La historia recuerda bien las tablas alfonsíes, compuestas para el meridiano de Toledo y el año radix 1252. Con esta denominación se conservan dos obras esencialmente distintas: 1) unos cánones, y 2) unas tablas numéricas, aplicables (gracias a un sencillo expediente matemático) sea al calendario cristiano, sea al calendario musulmán. Fueron adaptadas para fechas posteriores, y citadas y quizás utilizadas por astrónomos como Tycho Brahe, Galileo y Kepler, hasta que este último las superó con sus tablas rudolfinas en 1627, es decir, después de casi cuatro siglos de vigencia.

Los científicos judíos de la época de Pedro IV el Ceremonioso

Aunque Pedro el Ceremonioso de Aragón quisiera emular a Alfonso X y pese a sus cincuenta años de reinado (1336-1387), la verdad es que ni los resultados conseguidos ni el aprecio de la posteridad acompañaron sus deseos; pero contó con colaboradores científicos judíos. Estos colaboradores fueron activos en tres de las grandes ciudades de sus dominios: Barcelona, Mallorca y Perpiñán.

En la labor de fabricar instrumentos de cálculo (relojes, astrolabios, cuadrantes, compases) destacaron varios judíos mallorquines, entre ellos Isaac Nafuci, así como los hermanos Belshom y Vidal Efraim. También en Mallorca vivieron judíos dibujantes de brújulas, cartas de navegar y mapamundis, como Cresques Abraham y su hijo Jafadá Cresques.

Otros judíos eran activos en Perpiñán. Allí consta que Isaac del Barrio construía relojes y astrolabios y Jacob ben David compuso unas tablas astronómicas.

Pero como era de esperar, el mayor número de colaboradores judíos desarrolló su actividad en Barcelona: allí se hallaba la rica biblioteca real (con traducciones hechas por científicos judíos) y allí estaban los instrumentos astronómicos, de gran tamaño, utilizados para las observaciones que conducirán a la composición de las tablas astronómicas a veces llamadas de Barcelona (calculadas para el meridiano de dicha ciudad y a partir del año radix 1320). Empezadas por dos cristianos, las concluyó el judío castellano Jacob Corsino.

Abraham Zacuto

En los últimos años del siglo XV destaca la personalidad de Abraham Zacuto, un emigrado cuya obra científica se realiza mayormente en la Península Ibérica pero también en el exilio. Su principal obra es el “Almanach perpetuum”.

3. Principales obras astronómicas hispano-judías

Libro de las formas e imágenes que están en los cielos

Toledo, 1276-1279. Manuscrito sobre pergamino; iluminado. Encuadernación escurialense. Biblioteca Laurentina, San Lorenzo de El Escorial (Madrid). Ms, h-I-16 (procede de la capilla Real de Granada).

Producido en el Escritorio Real, se cree concebido a modo de prólogo o índice del Lapidario o de una serie de tratados astrológicos que Alfonso X pensaba mandar o ya había mandado escribir. Lleva iniciales moradas y azules, calderones rojos y azules y epígrafes rojos; la primera capital en oro y colores representa una figura de cuerpo entero sentada y con corona, mostrando un libro a otros cinco que están de rodillas; otras miniaturas con los signo del zodiaco.

Lapidario

Toledo, 1250 (texto), y 1276-1279 (iluminación). Manuscrito sobre pergamino; iluminado. Biblioteca Laurentina. San Lorenzo de El Escorial. Ms, h-I-15. Encuadernación Escurialense (perteneció a Diego Hurtado de Mendoza). Primera obra astrológica que mandó traducir Alfonso X el Sabio, es un tratado acerca de las propiedades de 360 piedras y de su relación con los signos astrológicos, así como un manual de ciencia aplicada a modo de vademecum medieval de farmacopea o libro de remedios. Lo tradujeron del árabe Yehudá ben Moisés, Hacobén ibn Mosca y Garci Pérez entre 1243 y 1250, es decir, antes del advenimiento de Alfonso X al trono.

La obra está dividida en cuatro partes de las que sólo se terminaron de iluminar las dos primeras. La decoración, realizada en el Escritorio Real, presenta numerosas miniaturas de asunto mitológico y astrológico, con abundancia de tipos de la época –cristianos, moros y judíos– así como seres fantásticos. Las más interesantes del Primer Lapidario son las que narran la búsqueda y hallazgo de cada piedra, así como las grandes ruedas a toda página con organización radial y presididas por un signo del zodiaco, que figuran al final de cada uno de los doce capítulos en que se divide el texto.

Libros del saber de Astronomía

Toledo, 1255-1279. Manuscrito sobre vitela; iluminado. Biblioteca de la Universidad Complutense, Madrid. Villa-Amil n.156

Contiene once tratados astrológicos, unos originales y otros adaptados de obras anteriores, elaborados por judíos que desarrollaron su actividad científica colaborando en la importantísima tarea de trasvase cultural impulsada por Alfonso X el Sabio. Entre los originales hay diez libros de Isaac ibn Sid (Sayid) de Toledo, sobre los astrolabios, cuadrantes y relojes, y otro de Samuel el Leví de Toledo, “Del relogio de la candela”.

Libros del Saber de Astronomía

Toledo, 1255-1279; copia del siglo XVI. Manuscrito sobre papel; iluminado. Encuadernado en tabla forrada de vaqueta roja con estampaciones doradas y el escudo de Felipe II en las tapas. Biblioteca Laurentina. San Lorenzo de El Escorial (Madrid). Ms, h-I-1

Copia del códice complutense descrito anteriomente, con ciento sesenta y tres dibujos en color hechos por el arquitecto Juan de Herrera. La copia fue encargada por Felipe II en 1562 para el príncipe D. Carlos a instancias de su preceptor, Honorato Juan, "*por ser el más principal y más necesario libro que en esta sciencia se halla*"; la llevó a cabo Diego de Valencia, natural de Nájera.

Entre los traducidos figuran: los adaptados por el afaquín del rey Yehudá Hacohén ibn Mosca y el clérigo Guillén Arremón Daspá; a saber, los cuatro libros de las estrellas y el libro de la esfera (1259 y 1277); y el libro de la azafeha de Azarquiel (1029-1100), traducido primeramente (1255-1256) por Fernando de Toledo y luego (Burgos, 1277) por Bernardo el Arábigo y "don Abrahem alfaquín del rey". Se tiene a éste códice por el princeps que saliera del Escritorio Real y conserva parte de su espléndida iluminación, mereciendo destacarse las que ilustran los libros de las estrellas y los de relojes.

Astrolabio

España, 1229. Bronce, 13,5 cm diámetro. Staat Sbibliothek Preussischer Kulturbesitz, Orienttabteilung, Berlín (Alemania) Ms Sprenger 2050.

El astrolabio es el principal instrumento de cálculo usado por los astrónomos medievales; de hecho era la calculadora analógica de entonces. La mayoría de los conservados son árabes, pero algunos llevan inscritas palabras en hebreo. El presente lo fabricó Muhamad ibn Alsafar; lleva alrededor una inscripción en árabe, en cuya parte superior puede leerse la palabra hebrea quéset, "arco", y encima de la pieza base aparece también en hebreo la palabra Córdoba.

De Rationibus Tabularum de Abraham ibn Ezrá

Sur de Francia, 1154; copia del siglo XIII. Manuscrito sobre pergamino, 157 fols. Encuadernado en piel gofrada sobre tabla y con dos broches. Biblioteca Nacional. Madrid. Ms 100053.

Códice astronómico misceláneo con numerosas tablas y figuras geométricas; conserva la recensión latina del "De rationibus Tabularum" de Abraham ibn Ezrá; en donde pasa revista a los diferentes sistemas astronómicos.

Abraham ibn Ezrá nació en Tudela en 1089 y murió en Calahorra en 1167. Fue científico: cultivó sobre todo el campo matemático, en especial el astronómico. Su obra principal son las obras astronómicas conocidas como "Tabulae Pisanae", redactadas en 1145 para el meridiano de Pisa y que no se han conservado;

pero él mismo las adaptó para los meridianos de Angers (1154) y de Winchester (1164), aunque sólo han subsistido los cánones, de los que hay una recensión muy amplia escrita en 1154 en Dreux en latín y conocida como "De Rationibus Tabularum". En hebreo escribió (1146) un tratado sobre el astrolabio.

Otro aspecto a tener en cuenta es la labor de Ibn Ezrá como traductor del árabe al hebreo. En este sentido su aportación más conocida es la que hizo en 1160 al verter el comentario de Ibn Almutana a las tablas astronómicas de Aljuarismi.

El Tratado de la esfera, de Johannes de Sacrobosco

Siglo XIII; traducción de ca. 1470–1480. Manuscrito sobre papel Bibliotheque Nationale, París. Section Orientale des cabinet des Manuscrits, Ms. Heb. 1105.

Nacido en Halifax, a principios del siglo XIII, Juan de Holywood, más conocido por Juan de Sacrobosco, ejerció la docencia en París. Con su "Arte numerandi" contribuye a la difusión en Occidente del sistema de numeración árabe.

Esta obra contiene primero el tratado "Sphaera mundi" de Juan de Sacrobosco, traducido del latín al español y escrito en aljamiado castellano. Le sigue una recopilación de opúsculos astrológicos sobre las natividades, los días y las horas favorables para determinadas empresas, etc. Y se remata con una especie de almanaque también aljamiado, donde se indica la naturaleza del año según la temperatura y otras características atmosféricas, y según el día de la semana en que cae el primero de enero. La biblioteca prestadora fecha la copia en el último cuarto del siglo XV, mientras en el catálogo de Zotemberg se le data en el siglo XVI.

Sea como fuere, tiene el especial interés de su grafia aljamiada, siendo esta obra un ejemplo más que añadir a los escasísimos testimonios que nos han llegado de tiempos preexílicos o una de las tampoco muy numerosas obras aljamiadas sefardíes que se nos han conservado del siglo XVI.

La "Sphera mundi" de Sacrobosco, puede considerarse como un compendio de "Almagestum", cuya concepción astronómica es la dominante durante el siglo XVI. Constituye uno de los manuales correspondientes a las lecturas que versan sobre la "sfera" impartidas por la cátedra de Astronomía que se funda en Salamanca en 1467.

La "Sphera mundi" de Juan de Sacrobosco ha sido comentada por diversos autores del siglo XVI, entre los que se encuentran Sanchez Ciruelo y Pedro Espinosa y traducida al castellano en 1552 por Jerónimo de Chaves.

Almanach Perpetuum, de Abraham Zacuto

Salamanca, 1473–1478; Leiria (Abraham d'Ortas), 1469. Impreso en papel, 172 fols. Letra gótica. Encuadernación antigua en piel restaurada con cantos dorados. Biblioteca Nacional. Madrid. Inc. 1077.

El judío Abraham Zacuto (1452–1522) se educa en la aljama de Salamanca y, como estudiante, pasa por las aulas de esta Universidad. El decreto de expulsión de los judíos dado en 1492 le obliga a abandonar España. Se cree que murió en Damasco en 1522.

Su principal obra astronómica lleva por título "Hahibur hagadol" ("Composición magna"), redactada en hebreo y escrita a instancias de su protector, el obispo de Salamanca Gonzalez de Vivero. Esta importantísima obra contiene unos cánones y unas tablas astronómicas, calculadas para el meridiano de Salamanca y el año radix 1473. Traducida al castellano por el catedrático de la Universidad de Salamanca Juan de Salaya, se utilizará como texto en la Facultad de Astrología de dicha Universidad.

Más tarde un discípulo de Zacuto, llamado Yosef Vizinho hizo una versión resumida al latín con el título "Almanach perpetuum", que consta de una parte, a la que preceden unos cánones, de los que también existe una versión castellana (diferente de la de Salaya), según algunos con notas de Cristobal Colón.

Años más tarde, ya en Oriente, Zacuto compuso unas tablas para el año radix 1513 y el meridiano de Jerusalén, usando el calendario judío.

Funciones periódicas

Julio Fernández Biarge

Universidad Politécnica de Madrid

Abstract:

The periodic functions are usually studied, only in the environment in what they are used. In this article we outline their study with wider bases, we classify them and we establish some of their general properties.

1. Generalidades

En la mayor parte de los tratados, las funciones periódicas se estudian referidas tan sólo al ámbito en que ocasionalmente se van a utilizar. Trataremos ahora de establecer unas bases generales para el estudio de estas funciones. Concretamente nos referiremos a aplicaciones $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{V}$, de un espacio vectorial $\boldsymbol{E}$ sobre $\mathbb{R}$, con valores en un conjunto $\boldsymbol{V}$. En los casos de interés, $\boldsymbol{E}$ será el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, el de los complejos $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, o alguno de sus subespacios vectoriales. El conjunto $\boldsymbol{V}$ será frecuentemente $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, o uno de estos ampliado con el elemento ϕ (lo que nos permitirá escribir $\boldsymbol{f}(x) = \phi$ para indicar que $\boldsymbol{f}$ *no está definida en* x).

Definición 1: Diremos que una función $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{V}$ es *periódica* si existe un elemento $a \in \boldsymbol{E}$, distinto del cero de $\boldsymbol{E}$, tal que

$$\forall x \in \boldsymbol{E} \quad , \quad \boldsymbol{f}(a + x) = \boldsymbol{f}(x) \qquad (1)$$

Las funciones constantes son siempre periódicas, cumpliendo (1) para cualquier $a \in \boldsymbol{E}$, pero pertenecen a la clase de las *trivialmente periódicas* que definiremos más adelante, excluyéndolas del estudio en muchas ocasiones.

Definición 2: Si $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{V}$ es periódica, diremos que el elemento $a \in \boldsymbol{E}$, es un *periodo* de $\boldsymbol{f}$ si se cumple (1).

Nótese que aunque para que f sea periódica se ha exigido que exista un a distinto de cero que cumpla (1), si f lo es, el cero de E es también uno de sus periodos, según esta definición.

Definición 3: Si $f: E \to V$ es periódica, designaremos con $P[f]$ al conjunto de todos los periodos de f. Designaremos con $\Pi[f]$ al subespacio vectorial sobre R engendrado por los vectores de $P[f]$. Si a es un periodo de f y para todo $w \in \mathbb{R}$ el elemento wa es también periodo de f, diremos que a es un *periodo axil* de f. Designaremos con $K[f]$ al conjunto de todos los periodos axiles de f.

Es evidente que si f es periódica, $0 \in P[f]$, pero $\{0\}$ es subconjunto propio de $P[f]$. En el caso de ser E de dimensión 1, $\Pi[f]$ coincide con E y $K[f]$ se reduce a $\{0\}$, excepto en el caso de ser f constante.

Proposición 1: Si f es periódica, $P[f]$ es un subgrupo aditivo de E (o si se prefiere decirlo así, un $\mathbb{Z}$ -módulo). Si f no es constante, $P[f]$ no coincide con E. Si $x \in P[f]$, es $f(x) = f(0)$. Si x pertenece a una de las clases adjuntas $u + P[f]$, es $f(x) = f(u)$. El conjunto $K[f]$ es un subespacio vectorial de $\Pi[f]$ (que en muchos casos se reduce a $\{0\}$) y por tanto, subespacio vectorial de E. Si $K[f]$ no se reduce a $\{0\}$, la restricción de f a $K[f]$ es constante.

En efecto, para lo primero, si $a, b \in P[f]$, bastará probar que $a - b \in P[f]$. Pero por la definición, $\forall x \in E$, $f(a + x) = f(x)$ y $f(b + x) = f(x)$, con lo que poniendo $y = b + x$, será $\forall y \in E$, $f(y) = f(y - b) = f(a + y - b)$, de donde resulta que $a - b \in P[f]$. El resto se desprende casi directamente de las definiciones.

Definición 4: Si $P[f]$ es un grupo cíclico, se dice que f es *simplemente periódica*. En tal caso, un elemento generador del grupo cíclico se dice que es *periodo principal* de f. Si el grupo $P[f]$ tiene un conjunto de generadores que, a su vez, constituyen una base del espacio vectorial E, diremos que f es *totalmente periódica*.

Nótese que si a es periodo principal de f, también lo es $-a$. En el caso de ser E de dimensión 1, o sea isomorfo a $\mathbb{R}$, las funciones simplemente periódicas son totalmente periódicas.

Definición 5: En el caso de que $K[f]$ coincida con $\Pi[f]$ y, por tanto, con $P[f]$ (es decir, cuando todos los periodos de f son periodos axiles) diremos que f es *trivialmente periódica***.** En el caso de que **K[*f*]** no coincida con **Π[*f*]** pero tampoco se reduzca a {0} , diremos que ***f*** es *espuriamente periódica***.** Por último, en el caso de que sea **K[*f*]** = {0}, o sea de que no haya periodos axiles (salvo el cero), diremos que ***f*** es *genuinamente periódica***.**

Nota: Las denominaciones *axil, trivial, espuria* y *genuina* han sido adoptadas en este artículo, a falta de otras mejores, pero no han sido consagradas por los textos clásicos sobre funciones periódicas.

Las funciones constantes son siempre trivialmente periódicas. Una función simplemente periódica lo es siempre genuinamente. En el caso de ser ***E*** de dimensión 1, sólo las constantes son trivialmente periódicas y las restantes funciones periódicas lo son genuinamente.

Una función $f: E \to V$, sobre todo en el caso de ser ***E*** de un número finito *n* de dimensiones, se define normalmente haciendo uso de las coordenadas de los elementos de ***E*** que resultan de adoptar una base en el espacio, lo que equivale a manejar $\mathbb{R}^n$ en lugar de ***E***, al que es isomorfo. No debe olvidarse que esta representación mediante coordenadas es, en cierto modo, auxiliar, y debe cambiarse adecuadamente si se efectúa un cambio de base, que conduce a otro isomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y ***E***. La gráfica en $\mathbb{R}^n$ del conjunto ***P*[*f*]** la llamaremos *mapa de periodos* de ***f***.

Siendo ***E*** de *n* dimensiones, la elección de una de sus bases, introduce en él una valoración (valores absolutos o módulos) de sus elementos y una métrica (mediante la asunción de que esa base es ortonormal). Tal métrica es, por supuesto, dependiente de la elección de la base, pero las propiedades topológicas definidas por su medio ya no dependen de esa elección, debido a la equivalencia topológica de esas métricas.

El comportamiento de los conceptos anteriores frente a las traslaciones, simetrías, cambios de base y restricciones, se resume en la siguiente:

Proposición 2: Siendo $f: E \to V$ y t un elemento de ***E***, designamos con f_t y con f_- a las funciones definidas mediante $\forall x \in E$, $f_t(x) = f(x - t)$, $f_-(x) = f(-x)$. Entonces, si f es periódica, f_t y f_- también lo son y además $P[f_t] = P[f_-] = P[f]$ (tienen los mismos periodos). Las propiedades de ser periódica, o de serlo de alguno de los tipos considerados, no dependen de la elección de la base empleada para expresar la función y por tanto, no cambian cuando se lleva a cabo un cambio de base. Si ***E'*** es un subespacio vectorial de ***E*** , f es periódica en ***E*** y $P[f] \cap E'$ no se reduce a $\{0\}$, la restricción de f a E' es periódica (eventualmente constante, aunque no lo fuese f).

La demostración resulta inmediatamente de la aplicación de las definiciones.

2. Ejemplos de funciones periódicas.

Antes de seguir adelante, convendrá ilustrar estos conceptos con algunos ejemplos bien conocidos. Varios de ellos están artificiosamente construidos con la única finalidad de ilustrar los conceptos estudiados:

<u>Para E de dimensión 1</u>

Ej. 1: La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\phi\}$ definida por $x \to \operatorname{tg} x$, es simplemente periódica. $P[\operatorname{tg}]$ es el grupo cíclico engendrado por el número π. Ese número es el periodo principal. Lo mismo le ocurre a la función $x \to \sqrt{\operatorname{sen}(2x)}$

Ej. 2: La función de Dirichlet definida en $\mathbb{R}$ por $\{D(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$, $D(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}\}$, es genuinamente periódica, pero no tiene periodo principal. En ella, $P[D]=\mathbb{Q}$, es decir, todos los números racionales son periodos.

Ej. 3: La función f definida en $\mathbb{R}$ por $\{ f(x) = 1$ si x es de la forma $m + m'\pi$, con m y m' enteros, $f(x) = 0$ en caso contrario$\}$, es genuinamente periódica sin periodo principal. Para ella, $P[f]$ es el grupo aditivo generado por los números 1 y π.

<u>Para E de dimensión 2</u>

Ej. 4: La función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x - y$ es periódica, pero lo es trivialmente. El grupo aditivo $P[f]$ está constituido por todos los vectores (u,u) con $u \in \mathbb{R}$ y no es cíclico. En este caso, $P[f] = \Pi[f] = K[f]$ es un rayo. El mapa de periodos de f es la recta de ecuación $x=y$. Lo mismo le ocurre a la $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \cup \{\phi\}$ definida por $f(x,y)=1/(x - y)$. En ella, la restricción a $K[f]$ es la constante ϕ (no definida).

Ej. 5: La función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $(x,y) \to \operatorname{sen}(x + y)$ es periódica, pero no simplemente. El grupo aditivo $P[f]$ es el engendrado por los vectores (π,π) y todos los $(u,-u)$ con $u \in \mathbb{R}$. Su mapa de periodos está constituido por las infinitas rectas paralelas de ecuaciones $x + y = 2m\pi$, con m entero. **Π[*f*]** coincide con $\mathbb{R}^2$, pero **K[*f*]** es el rayo engendrado por (1,-1). La función es, por tanto, espuriamente periódica.

Ej. 6: La función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(x,y) = y$ sen(x) es simplemente periódica (genuinamente, por tanto). El grupo ***P*[*f*]** está engendrado por el vector (2π,0), que es el periodo principal. **K[*f*]** se reduce a {0}. Nótese que la restricción al rayo $\boldsymbol{L}_{(1,0)}$ es constante (nula) pero (1,0) no es periodo axil (ni periodo siquiera) de $\boldsymbol{f}$.

Ej. 7: La función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(x,y)$ = sen x - sen y es totalmente periódica. El grupo ***P*[*f*]** está engendrado por los vectores (0,2π) y (2π,0) que constituyen una base de $\mathbb{R}^2$, que coincide con **Π[*f*]**. Su mapa de periodos es la retícula de puntos de intersección de las paralelas $x=2m\pi$ con las paralelas $y=2m'\pi$, siendo m y m' enteros. **K[*f*]** se reduce a {0}. Obsérvese que la restricción a la recta x = y es constante (nula) a pesar de que los vectores (u,u) no son axiles.

Ej. 8: Es fácil construir funciones $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \boldsymbol{V}$ que tengan dos periodos dados a y b (pertenecientes a $\mathbb{R}^2$, de distinta dirección). Si $\boldsymbol{\Phi} : [-1,1]^2 \to \boldsymbol{V}$ es una función arbitraria que hace corresponder a cada elemento (x,y) de $[-1,1]^2$ un elemento $\Phi(x,y) \in \boldsymbol{V}$, se pueden construir los vectores a' y b' respectivamente perpendiculares a a y b y normalizados con la condición de que los productos escalares $(a'b)$ y $(b'a)$ valgan 1. La función $\boldsymbol{f}$ definida poniendo $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{\Phi}$ (sen(2π(xb')),sen(2π(xa'))) tiene los periodos a y b.

Ej. 9: La función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(x,y)=1$ en todos los puntos de la forma $(m+n\sqrt{2},k+n\sqrt{3})$, con m,n,k enteros y $f(x,y)=0$ en los restantes es genuinamente periódica. ***P*[*f*]** está engendrado por los vectores (0,1), (1,0) y (√2, √3) y coincide con el original de 1. **Π[*f*]** coincide con $\mathbb{R}^2$ y **K[*f*]** se reduce a {0}. Es un ejemplo de función genuinamente periódica en $\mathbb{R}^2$ con tres periodos, uno de los cuales no puede expresarse como combinación lineal de los otros con coeficientes racionales.

Ej. 10: La función $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\boldsymbol{f}(x,y)=1$ en todos los puntos de la forma $(m+n/6,k+n/8)$, con m,n,k enteros y $\boldsymbol{f}(x,y)=0$ en los restantes es genuinamente periódica. ***P*[*f*]** es el grupo aditivo *G(* (0,1), (1,0), (1/6,1/8) *)* y coincide con el original de 1. **Π[*f*]** coincide con $\mathbb{R}^2$ y **K[*f*]** se reduce a {0}. Es otro ejemplo de función genuinamente periódica en $\mathbb{R}^2$, pero puede probarse que (1/6,1/8) y (1,1) pertenecen a ***P*[*f*]**, y éste coincide con *G(* (1/6,1/8), (1,1) *)*. La función es totalmente periódica.

Ej. 11: La función $\boldsymbol{f}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $z \to exp(z)$ es simplemente periódica (genuinamente) con periodo principal $2\pi i$. ***P*[*f*]** es el conjunto $\{ 2m\pi i \}$ y **Π[*f*]** es el rayo eje imaginario. **K[*f*]** es $\{0\}$.

Ej. 12: También para $\boldsymbol{f}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, las *funciones elípticas* ofrecen bellos ejemplos de funciones analíticas uniformes totalmente periódicas (doblemente periódicas) (ver [1]).

<u>Para ***E*** de infinitas dimensiones</u>

Ej. 13: Si ***E*** es el espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de los polinomios con una indeterminada, la función **D** : ***E*** → ***E*** que hace corresponder a cada polinomio su derivado, es periódica pero trivialmente; sus periodos son todos los polinomios constantes (incluido el nulo). Estos polinomios constituyen ***P*[D]** y el subespacio **Π[D]** = **K[D]** es el rayo engendrado por 1.

3. Funciones periódicas en un espacio de dimensión 1.

Estudiaremos ahora algunas propiedades de las funciones periódicas en el caso de que ***E*** sea de dimensión 1, con lo que (escogido un "vector unidad") podemos asimilarlo a $\mathbb{R}$. En particular, podremos hablar del cociente *a/b* de dos elementos no nulos de ***E*** como el cociente de los números reales que los representan; este cociente es invariante frente a los cambios de base (de unidad). También podemos atribuir a ***E*** la estructura topológica de $\mathbb{R}$, que, como sabemos, tampoco viene afectada por los cambios de base. Podemos atribuir a ***E*** la métrica y la valoración de $\mathbb{R}$ (pero teniendo en cuenta que las distancias y valores absolutos si cambian en un cambio de base, aunque no sus cocientes). En lo que sigue, designaremos con $G(a,b,...)$ al subgrupo aditivo de $\mathbb{R}$ generado por los números *a,b,...*

Proposición 3: Siendo ***E*** de dimensión 1 , si la función $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{V}$ es periódica y si a y b son dos periodos no nulos de $\boldsymbol{f}$, siendo $a/b \in \mathbb{Q}$, existe un $c \in \boldsymbol{E}$

que también es periodo de f y tal que $a = mc$ y $b = m'c$, con m y m' enteros, con lo que $G(a,b) = G(c)$.

En virtud de la Proposición 1, si nos conviene, podemos sustituir el elemento a por su opuesto $-a$, de modo que el número a/b sea positivo. Entonces, si p/q es la expresión irreducible de a/b, es decir $a/b=p/q$, siendo m.c.d.$(p,q)=1$, es sabido (por el algoritmo de Euclides) que existen dos enteros, p' y q' tales que $p'p - q'q=1$ (de hecho, $|p'|/|q'|$ es la penúltima reducida del desarrollo en fracción continua de p/q (ver [2]). Definamos c como el elemento de $\boldsymbol{E}$, $c = a/p = b/q$. Será entonces $a/c=p$, $b/c=q$, $p'(a/c) - q'(b/c)=1$, o sea $p'a - q'b=c$, por lo que c pertenece a $G(a,b)$ y es periodo de f. Pero es $a=pc$ y $b=qc$, con lo que $G(a,b) = G(a)$.

Proposición 4: Siendo $\boldsymbol{E}$ de dimensión 1, si a y b son dos periodos no nulos de la función no constante $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{V}$, siendo $a/b \notin \mathbb{Q}$, el subgrupo $G(a,b)$ de $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{f}]$ es denso en $\boldsymbol{E}$, es decir, todos los números reales son puntos de acumulación del conjunto $G(a,b)$ y, por tanto, de $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{f}]$. Todos los números reales son también puntos de acumulación de cualquiera de las clases adjuntas de $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{f}]$.

En efecto, veamos que el cero de $\boldsymbol{E}$ es punto de acumulación de $G(a,b)$. Como antes, podemos suponer que a/b es positivo. El conjunto $G(a,b)$ posee todos los números de la forma $pa + qb$, con p y q enteros. Es sabido (ver [2]) que si p_n/q_n es la n-ésima reducida del desarrollo en fracción continua indefinida de a/b, se cumple $|a/b - p_n/q_n| < 1/q_n^2$ y, en consecuencia, es $|bq_n - ap_n| < |a|/q_n$. Como haciendo n suficientemente grande, q_n se hace tan grande como se desee, la distancia del 0 de $\boldsymbol{E}$ al elemento $bq_n - ap_n \in G(a,b) \subseteq \boldsymbol{P}[\boldsymbol{f}]$ será tan pequeña como queramos, con lo que el 0 es punto de acumulación de $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{f}]$. Probado que dado un ε positivo, existe en $G(a,b)$ un elemento d con $|d| < \varepsilon$, resulta claro (por la propiedad arquimedeana) que, cualquiera que sea $r \in \boldsymbol{E}$, entre los números md , con m entero, (que pertenecen a $G(a,b)$) hay alguno que dista de r menos de ε . Por tanto, r es punto de acumulación de $G(a,b)$ y por tanto de $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{f}]$.

4. Propiedades relativas a la continuidad.

En lo que sigue, en $\boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \boldsymbol{V}$, pondremos $\boldsymbol{W}$ en lugar de $\boldsymbol{V}$ para indicar que ese conjunto de valores posee la estructura necesaria (topología separada) para que tenga sentido hablar de la continuidad o discontinuidad de $\boldsymbol{f}$.

Proposición 5: Siendo $\boldsymbol{E}$ de dimensión 1 *,* si la función no constante $\boldsymbol{f: E \rightarrow W}$ tiene dos periodos no nulos a y b siendo $a/b \notin \mathbb{Q}$ *,* la función $\boldsymbol{f}$ no es continua en ninguno de los puntos en que está definida.

En efecto, al no ser constante, hay algún punto $r \in \boldsymbol{E}$ en el que $\boldsymbol{f(r) \neq f(0)}$. Pero si x es arbitrario en $\boldsymbol{E}$, en cualquier bola de centro en x hay puntos de $\boldsymbol{P[f]}$ en los que la función toma el valor $\boldsymbol{f(0)}$ y puntos de la clase adjunta $r + \boldsymbol{P[f]}$, en los que toma el valor $\boldsymbol{f(r)}$, lo que es contrario a la continuidad de $\boldsymbol{f}$ en x . En consecuencia:

Proposición 6: Siendo $\boldsymbol{E}$ de dimensión 1*,* si la función no constante $\boldsymbol{f: E \rightarrow W}$ es periódica y es continua en algún punto de $\boldsymbol{E}$, es simplemente periódica.

5. Funciones periódicas en un espacio de *n* dimensiones.

Consideraremos ahora el caso más general de que $\boldsymbol{E}$ sea un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de n dimensiones (isomorfo, por tanto, a $\mathbb{R}^n$). Como en los ejemplos anteriores, llamaremos *rayos* a sus subespacios lineales de una dimensión: al rayo engendrado por el vector a lo llamaremos L_a . Si la restricción de $\boldsymbol{f}$ a un rayo es constante, diremos que se trata de un *rayo constante*. Si a es un periodo axil, el rayo L_a es constante, pero los rayos constantes pueden no contener periodos o contener periodos no axiles.

Proposición 7: Si $\boldsymbol{f: E \rightarrow V}$ es periódica, a y b son dos de sus periodos (no nulos) y $c = ua + vb$, con u y v racionales, la restricción de $\boldsymbol{f}$ al rayo L_c es periódica (eventualmente constante).

En efecto, si llamamos m al mínimo común múltiplo de los denominadores de las expresiones fraccionarias de u y v, el vector mc pertenece a $G(a,b)$ y es, en consecuencia, periodo de $\boldsymbol{f}$ y de su restricción a L_c . Si alguno de los números u y v fuese irracional, la restricción de $\boldsymbol{f}$ a L_c no tiene por qué ser periódica (aunque podría serlo).

Proposición 8: Si la función $\boldsymbol{f: E \rightarrow V}$ es espuriamente periódica, la restricción de $\boldsymbol{f}$ a $\mathbf{K}[\boldsymbol{f}]$ es constante. La equivalencia entre los elementos de $\boldsymbol{E}$ que difieren en un elemento de $\mathbf{K}[\boldsymbol{f}]$, permite definir el espacio cociente $\boldsymbol{E} / \mathbf{K}[\boldsymbol{f}]$ y queda definida la función $\boldsymbol{f^*: E / \mathbf{K}[f] \rightarrow V}$, en la que a cada clase de equivalencia a +

K[*f*] le corresponde el valor $f(a) \in V$ (que no depende de la elección de a dentro de su clase). $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{f}^*]$ es la imagen de $\boldsymbol{P}[\boldsymbol{f}]$ en el homomorfismo natural entre $\boldsymbol{E}$ y $\boldsymbol{E}$ / **K[*f*]**, es decir, los periodos de $\boldsymbol{f}^*$ son las clase de equivalencia a que pertenecen los periodos no axiles de $\boldsymbol{f}$. La función $\boldsymbol{f}^*$ es entonces genuinamente periódica.

Las demostraciones son casi inmediatas. Resulta así que el estudio de cualquier función periódica no trivialmente, se reduce al de una que lo es genuinamente y al de otra constante en el subespacio **K[*f*]**, si éste no se reduce a $\{0\}$.

6. Propiedades topológicas

Los textos de funciones de variable compleja demuestran la imposibilidad de existencia de funciones $\boldsymbol{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analíticas y uniformes que tengan tres periodos a, b, c en el caso de que no existan tres números enteros p, q, r para los que se cumpla que $pa + qb + rc = 0$. El teorema, debido a Jacobi, se prueba, por ejemplo en [1], demostrando en primer lugar que de existir tales funciones, tendrían periodos de módulo arbitrariamente pequeño, y viendo después que ello estaría en contradicción con la propiedad de las funciones consideradas de que todos sus ceros son aislados. La prueba utilizada para la primera parte es difícilmente generalizable para espacios de más de dos dimensiones y nosotros estamos interesados en funciones de tipos mucho más generales que el de las analíticas uniformes.

Por otra parte, sabemos que una función $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \boldsymbol{V}$ puede tener un grupo aditivo de periodos que no puede ser engendrado con sólo n vectores, lo que ocurre siempre que hay periodos axiles y en ejemplos como los 2, 3 y 9. Por otro lado, todas las funciones periódicas no genuinamente tienen periodos de módulo tan pequeño como se desee (los axiles), lo que no impide su continuidad, como se ve en los ejemplos 4 y 5. No obstante, podemos obtener alguna generalización del importante teorema citado de Jacobi.

Si los vectores a_1 , a_2 , ... , a_n son periodos de la función $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \to \boldsymbol{V}$ que constituyen una base de $\mathbb{R}^n$, entre los vectores de $\mathbb{R}^n$ queda definida una relación de equivalencia que relaciona dos vectores si su diferencia pertenece a $G(a_1,a_2,...,a_n)$. Los valores de $\boldsymbol{f}$ para vectores equivalentes son iguales. Llamando P al hiperparalelepípedo con un vértice en el origen, cuyas aristas son representantes de a_1 , a_2 , ... , a_n , el espacio $\mathbb{R}^n$ queda descompuesto en infinitos hiperparalelepípedos iguales a P, de modo que cualquier vector de $\mathbb{R}^n$ tiene un equivalente con extremo en P.

Proposición 9: Si los vectores $a_1 , a_2 , ... , a_n$ son periodos de la función $\boldsymbol{f}$**:** $\mathbb{R}^n \rightarrow \boldsymbol{V}$ que constituyen una base de $\mathbb{R}^n$ y b es también periodo no nulo de $\boldsymbol{f}$, pero no existen n+1 números enteros $m , m_1 , m_2 , ... , m_n$ tales que $mb + m_1a_1 + m_2a_2 + ... + m_na_n = 0$, los vectores b_j equivalentes respectivamente a los jb (con j entero arbitrario) que pertenecen al hiperparalelepípedo P son todos distintos. Entonces, existe en P un punto de acumulación del conjunto de los extremos de los b_j y la función $\boldsymbol{f}$ tiene periodos de módulo arbitrariamente pequeño.

Todas las conclusiones se verifican evidentemente si $\boldsymbol{f}$ es trivialmente o espuriamente periódica, al existir periodos axiles. La proposición tiene interés en el caso de las funciones genuinamente periódicas.

En tal caso, si fuese $b_i = b_j$ siendo $i \neq j$, sería $(j-i)b = k_1a_1 + k_2a_2 + ... + k_na_n$, contra lo supuesto. El subconjunto de los b_j es, por tanto, infinito y como P es compacto, existe el punto de acumulación citado. Como b es periodo, también lo serán los jb y sus equivalentes b_j . También serán periodos las diferencias entre ellos y al tener sus extremos un punto de acumulación, para cualquier ε real positivo, habrá alguna de esas diferencias con módulo menor que ε. Si d es un periodo, la función $\boldsymbol{f}$ toma el mismo valor en x que en $x+d$. En consecuencia, siendo el módulo de d tan pequeño como queramos, el original de $\boldsymbol{f}(x)$ no puede tener puntos aislados.

Como antes, en $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \boldsymbol{V}$, pondremos $\boldsymbol{W}$ en lugar de $\boldsymbol{V}$ para indicar que ese conjunto posee la estructura necesaria para tenga sentido hablar de la continuidad o discontinuidad de $\boldsymbol{f}$.

Proposición 10: Si $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \boldsymbol{W}$ es una función genuinamente periódica y los vectores $a_1 , a_2 , ... , a_n$ son periodos suyos que constituyen una base de $\mathbb{R}^n$ y b es también periodo no nulo, pero no existen n+1 números enteros $m , m_1 , m_2 , ... , m_n$ (no todos nulos) tales que $mb + m_1a_1 + m_2a_2 + ... + m_na_n = 0$, la función $\boldsymbol{f}$ presenta infinitos puntos de discontinuidad en el hiperparalelepípedo P .

En efecto, siendo $\boldsymbol{f}$ genuinamente periódica, podemos suponer que no existen rayos constantes; si hubiese alguno L_c , podríamos sustituir $\boldsymbol{f}$ por $\boldsymbol{f}_t$ (definida por $\boldsymbol{f}_t(x) = \boldsymbol{f}(x - t)$, como en la Proposición 2) con t convenientemente elegido; si

L_c siguiese siendo constante para todo t, c sería axil, contra lo supuesto. Lo demostrado para $\boldsymbol{f_t}$ valdría también para $\boldsymbol{f}$. Entonces, dado un ε real positivo, existirán periodos de $\boldsymbol{f}$ de módulo inferior a ε; estos periodos engendrarán un subespacio vectorial, H, de $\mathbb{R}^n$. Si cualquiera que sea ε, H tiene n dimensiones, el propio hiperparalelepípedo P puede sustituirse por otro P' con aristas de longitud inferior a ε, en el que $\boldsymbol{f}$, que no es constante, tomará todos sus valores. Esto va contra la continuidad de $\boldsymbol{f}$ en 0 y en consecuencia, en los infinitos puntos de $\boldsymbol{P[f]}$ pertenecientes a P. Si, por el contrario, H tiene m dimensiones, con $1 \leq m < n$, consideraremos la restricción de $\boldsymbol{f}$ a H; al no existir rayos constantes, esta restricción será genuinamente periódica y se le podrá aplicar el razonamiento anterior con la misma conclusión (salvo que no puede asegurarse la discontinuidad en todos los puntos de $\boldsymbol{P[f]} \cap P$ sino en los de $\boldsymbol{P[f]} \cap H \cap P$).

Referencias

[1] E. GOURSAT**,** *Cours d'analyse Mathématique.* Tome II. 1929.

[2] J. REY PASTOR, *Elementos de Análisis Algebraico.* 1941.

Iluminación y vigilancia en las Galerías de Arte

Gregorio Hernández Peñalver

Facultad de Informática, Universidad Politécnica de Madrid
e-mail: gregorio@fi.upm.es

Abstract:

In this paper we present some results about Art Galleries Problems

1. Introducción

Hoy en día las salas de los nuevos museos no tienen, en general, formas regulares en sus plantas, lo que da lugar a interesantes problemas de iluminación. Si la planta fuera un polígono convexo, una única fuente de iluminación bastaría para iluminar toda la sala, pero la irregularidad impide esta solución económica. Así se plantea el problema de minimizar el nº de luces que son necesarias para iluminar la sala.

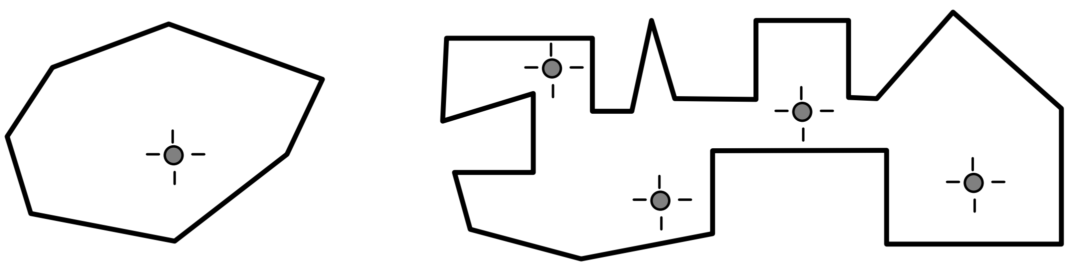


Figura 1. Iluminando distintas salas

Los problemas de iluminación han atraído la mirada de los matemáticos desde hace tiempo. Mencionemos aquí dos de ellos:

Problema de Hadwiger

¿Cuántos reflectores se necesitan para iluminar el contorno exterior de una figura plana, compacta, convexa y de borde liso? Boltyanski probó en 1960 que tres reflectores son siempre suficientes.

Problema de Strauss

Pensemos en una sala de planta poligonal cuyas paredes son espejos. ¿Es cierto que basta colocar una fuente luminosa en cualquier punto de la sala para iluminarla completamente? ¿Habrá siempre un punto con esa propiedad?

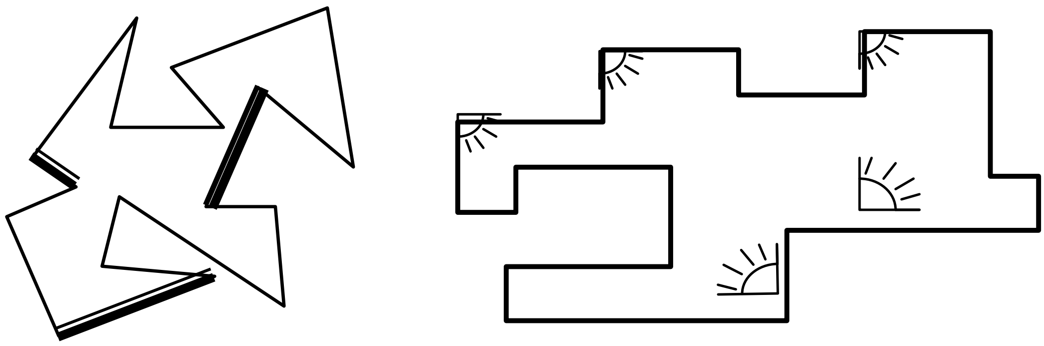
Recientemente Tokarsky [To] ha probado que la respuesta a la primera pregunta es negativa. Pero la segunda parte de la conjetura permanece abierta.

Volvamos al problema de iluminación de una sala en un museo. La cuestión fue planteada por V. Klee en 1973 en estos términos: *Determinar el mínimo número de puntos de un polígono suficientes para ver a todos los restantes*. Se puede interpretar también en términos de vigilancia de una sala poligonal: ¿Cuántos guardias (o cámaras de vigilancia que cubran 360º) son suficientes para vigilar el interior de un polígono de n lados?

La respuesta a este problema fue obtenida por Chvátal [Ch] en 1975, quien demostró que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias siempre son suficientes. En 1978, Fisk dio una demostración concisa y elegante que ampliaremos más adelante: *Triangúlese el polígono, coloréese con 3 colores el grafo de la triangulación y pónganse los guardias en los vértices coloreados con el color que menos veces aparezca.*

El problema así resuelto es de naturaleza combinatoria pues responde a la generalidad de los polígonos de n lados. Sin embargo no todos los polígonos de n lados requieren ese nº de guardias (por ejemplo, cualquier convexo de n lados sólo requiere un guardia). Por ello tiene sentido plantear el siguiente problema algorítmico: *Dado un polígono P, calcular el mínimo nº de guardias que lo vigilan*. Desgraciadamente no existe ningún algoritmo eficiente que lo resuelva, pues Lee y Lin [LL] han probado que es un problema de complejidad NP. (Informalmente hablando esto significa que no se conoce ningún algoritmo para resolverlo en que el número de operaciones efectuadas sea un polinomio en el nº de datos de entrada)

Tras conocer la respuesta al problema planteado por Klee surgen de modo inmediato multitud de nuevas preguntas: ¿Qué sucede si el objeto a vigilar es un tipo especial de polígono, o si se quiere iluminar el exterior del polígono o, más general, de una configuración de objetos? Estas preguntas corresponden a variantes del Problema en las que cambia el objeto a vigilar. Pero también podemos modificar las características de los guardias o de los focos de luz. En el problema original los guardias son estáticos, vigilan en todas las direcciones y su vigilancia tiene alcance ilimitado. Permitiendo, por ejemplo, que los guardias patrullen por segmentos o limitando la amplitud de los focos luminosos tendremos distintas variantes del Problema de las Galerías de Arte.



Guardias-lado Reflectores de amplitud $\pi/2$

Figura 2. Diferentes formas de vigilar o iluminar

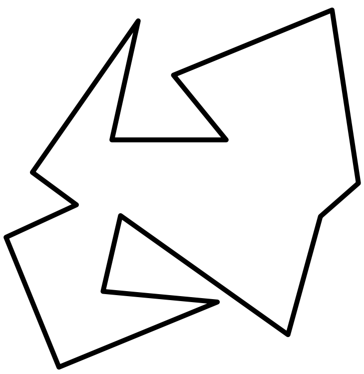
En este artículo comenzaremos con la demostración de Fisk del denominado Teorema de las Galerías de Arte y presentaremos después algunas de las variantes mencionadas.

2. Teorema de las Galerías de Arte

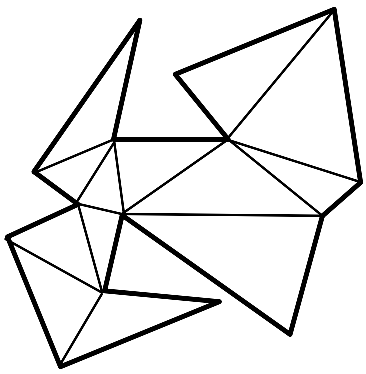
Para vigilar una galería de arte poligonal con n vértices, $\lfloor n/3 \rfloor$ *guardias son siempre suficientes. Existen salas que necesitan ese nº de guardias.*

Demostración. (Fisk [Fi])

Consideremos un polígono simple P de n vértices y observemos gráficamente los siguientes pasos, anticipados en la introducción:



Polígono P



Triangulación T

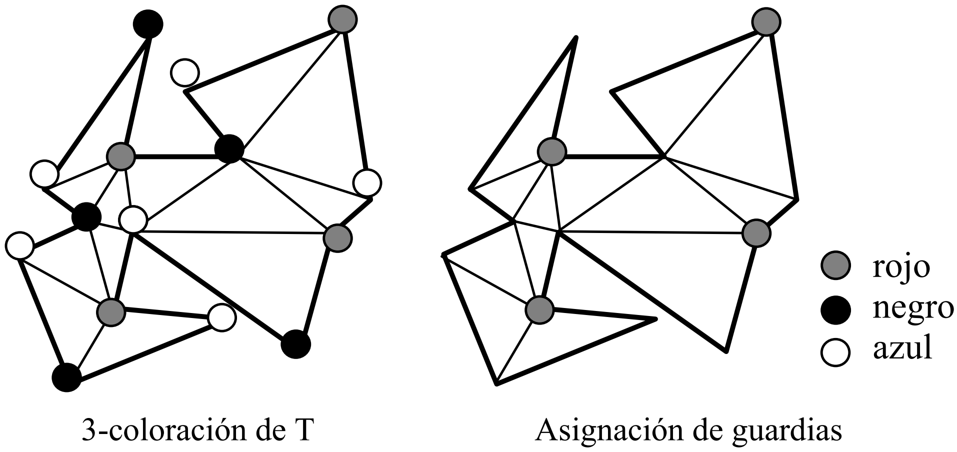


Figura 3. La demostración en imágenes

Y ahora pasemos a la explicación.

Primer paso. (Triangulación)

Triangulamos P, es decir, descomponemos P en triángulos cuya unión es P, con interiores disjuntos y cuyos vértices son vértices de P. Observamos que un guardia situado en cualquier vértice de un triángulo vigila completamente dicho triángulo.

Segundo paso. (Coloración)

La triangulación anterior es un grafo plano. El Teorema de los cuatro colores, probado en 1976 por Appel y Haken, asegura que todo grafo plano puede colorearse utilizando sólo cuatro colores. Pero podemos colorear los vértices de una triangulación T de un polígono utilizando tan sólo tres colores. (Una coloración de un grafo es una asignación de colores a los vértices del grafo de modo que dos vértices adyacentes reciben diferente color)

En esta 3-coloración de T cada triángulo tiene un vértice de cada color.

Tercer paso. (Colocación de guardias)

Cada triángulo de T tiene un vértice rojo. Si colocamos un guardia en cada vértice rojo, vigilarán todos los triángulos y, por tanto, todo el polígono. Lo mismo sucederá si colocamos guardias en todos los vértices negros o si los colocamos en todos los vértices azules.

El polígono tiene n vértices y disponemos de 3 colores. Por tanto, alguno de los tres colores, rojo, negro o azul se utiliza en, a lo más, $\lfloor n/3 \rfloor$ vértices. (Esto es una aplicación inmediata del Principio del palomar o de Dirichlet: Si cada color se utilizara en más de $\lfloor n/3 \rfloor$ vértices, sumando los vértices de cada color tendríamos más de n vértices). Basta pues, colocar los guardias en los vértices con el color menos utilizado para garantizar que $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono de n vértices.

Cuarto paso (Necesidad de los $\lfloor n/3 \rfloor$ guardias)

Para comprobar que este número de guardias es a veces necesario, basta considerar el polígono "peineta" con **n=3k** vértices de la Figura 4. Es fácil observar que para vigilar este polígono se necesitan al menos k guardias, uno por cada púa de la peineta.

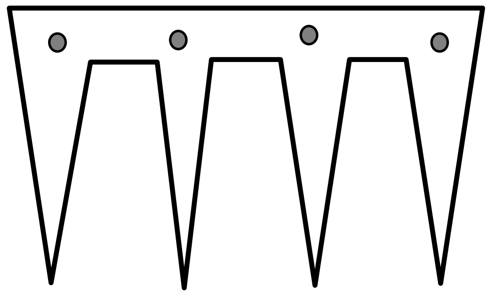


Fig. 4. Polígono "peineta"

¿Hemos terminado la demostración? En el primer paso comenzamos triangulando el polígono pero, ¿todo polígono admite una triangulación? En el segundo paso decimos que el grafo de la triangulación es 3-coloreable. Justifiquemos ambas afirmaciones.

3. Triangulación de un polígono

Propiedad 1. *Todo polígono se puede triangular.*

Demostración.

Por inducción sobre n, nº de vértices del polígono.

Si n=3, el polígono ya es un triángulo.

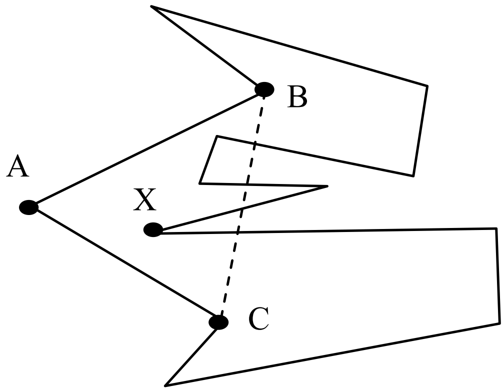
Si n≥4, se traza una diagonal cualquiera que descompone el polígono P en otros dos con menor nº de vértices. Por hipótesis de inducción cada uno de estos polígonos admite una triangulación lo que proporciona una triangulación de todo P.

Analicemos la frase: "se traza una diagonal .....". ¿Esto se puede hacer siempre? ¿Existe siempre una diagonal? La respuesta es afirmativa pero se han publicado varias pruebas incorrectas a lo largo de los años.

Lema

Todo polígono de n vértices, n≥4, admite una diagonal interna.

Demostración.



En primer lugar observamos que todo polígono tiene algún vértice convexo (por ejemplo, el situado más a la izquierda). Llamemos A a dicho vértice y B y C a sus adyacentes. Si el segmento BC está contenido en el polígono P será la diagonal buscada. Si no es así, en el triángulo ABC habrá vértices de P. Tomamos el más alejado X de la recta BC. Así AX está contenido en P y es la diagonal buscada

(Una de las demostraciones incorrectas pero publicadas toma como diagonal válida el segmento AZ donde Z es el vértice más próximo al punto A. El lector puede construir un polígono en el que AZ no es una diagonal válida)

Propiedad 2

Cualquier triangulación de un polígono es un grafo plano 3-coloreable.

Demostración.

Sea P un polígono y T(P) una triangulación de P. Demostraremos el resultado por inducción sobre n, número de vértices del polígono P.

Si n=3, la triangulación coincide con P y la 3-coloración es obvia.

Si n>3 se toma una diagonal uv que parte T(P) en dos polígonos triangulados T(P’) y T(P’’) cuyo nº de vértices es menor que n. Por inducción podemos colorear las triangulaciones de P’ y P’’ asignando en ambas el color 1 al vértice u y el color 2 a v. Así tenemos una 3-coloración de T(P). □

Para concluir este apartado sobre triangulación indiquemos que la generalización a dimensión tres es falsa: existen poliedros que no se pueden descomponer en tetraedros sin añadir vértices adicionales.

4. Rutas de vigilancia

La vigilancia de las salas de un museo sigue cuando sus puertas se cierran al público. ¿Qué ruta debe seguir un vigilante en su ronda nocturna? El problema puede plantearse así: Dado un polígono P hallar el camino cerrado C de longitud mínima tal que cada punto de P sea visible desde algún punto de C. Este camino mínimo recibe el nombre de *Ruta del vigilante*.

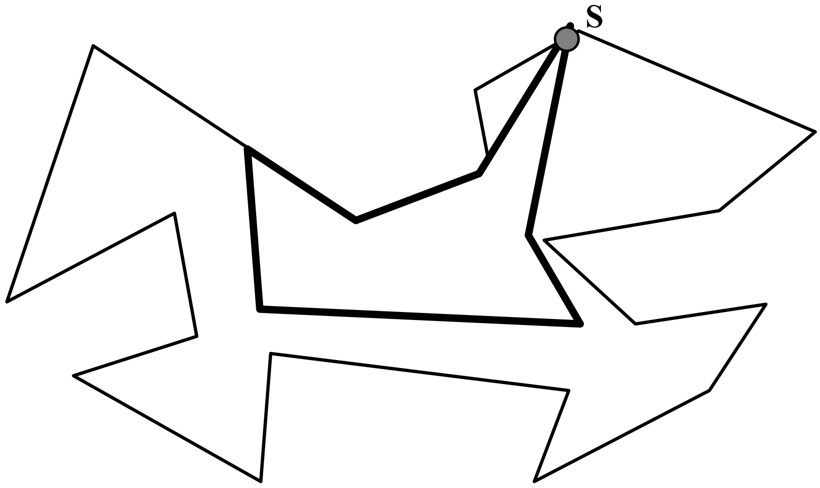


Figura 5. Ruta del vigilante con origen en el punto s

Si se especifica cuál debe ser el punto de partida (y llegada) del vigilante, Chin y Ntafos [CN] han diseñado algoritmos eficientes para resolver el problema, pero éste permanece abierto si no se conoce el punto de partida.

Chin y Ntafos han planteado, y resuelto parcialmente, otros problemas sobre rutas de vigilancia que denominan con los sugerentes nombres de *Ruta del Guardián del Zoo* y *Ruta del Safari*. En estos problemas el objetivo es caminar en el interior de un polígono P visitando k polígonos contenidos en él. En el Problema de la *Ruta del Safari* se permite entrar en los polígonos, como si fueran los pabellones de una exposición. En el Problema de la *Ruta del Guardián del Zoo*, está prohibida la entrada, pues el guardián del zoo no entra en las jaulas para alimentar a los animales.

5. Vigilancia vigilada

Si los ladrones neutralizan uno de los guardias que vigilan una sala, podrán "trabajar" tranquilamente en la zona controlada exclusivamente por ese guardia. Es interesante, por tanto, pedir que cada guardia sea vigilado al menos por otro guardia. Así llegamos a los denominados guardias vigilados (o *w-guardias*), introducidos en [H1] y [H2].

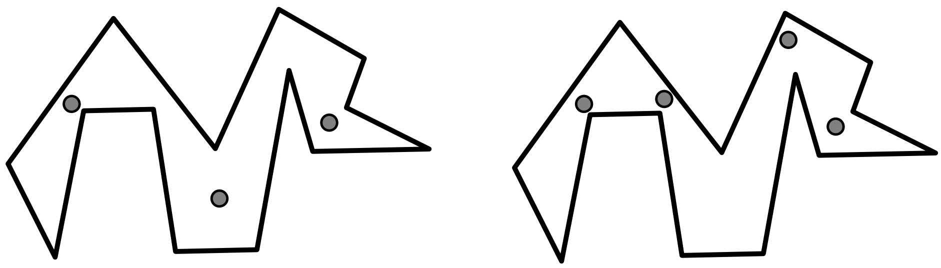


Figura 6. Un polígono con 3 guardias y 4 *w-guardias*

En [H1] se demuestra que $\lfloor 2n/5 \rfloor$ *w-guardias* son siempre suficientes, y a veces necesarios, para vigilar un polígono de n lados. En la demostración se trabaja sobre la triangulación del polígono, de modo análogo a la prueba del Teorema de las Galerías de Arte, probándose realmente un resultado más fuerte: que $\lfloor 2n/5 \rfloor$ *w-guardias* vigilan cada uno de los triángulos y, por tanto, a todo el polígono. La demostración es por inducción sobre el nº de lados del polígono P. En primer lugar se prueba el resultado para polígonos con hasta 11 lados. Para polígonos con más de 11 lados se toma una triangulación T y se prueba la existencia de una diagonal que corta P en dos polígonos, P' y P'', uno de los cuales, por ejemplo P', contiene entre 6 y 10 lados del polígono P. Se analiza la w-vigilancia de P' en cada uno de los casos y se combina con la w-vigilancia de P'' para obtener la cota deseada en la vigilancia de todo P.

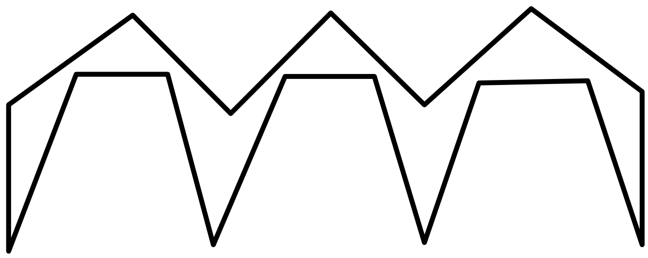
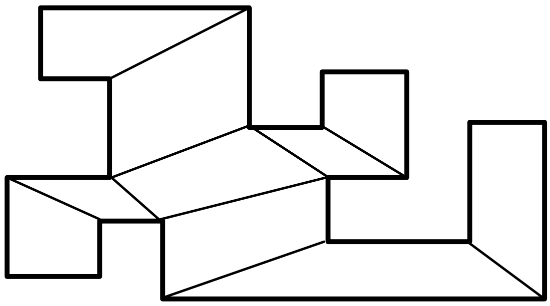
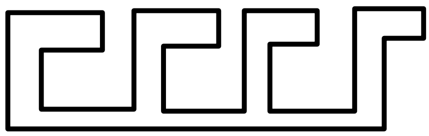


Figura 7. Un polígono que requiere $\lfloor 2n/5 \rfloor$ *w-guardias*

En [H2] se estudia el problema para polígonos isotéticos u ortogonales (de lados paralelos a dos direcciones ortogonales), demostrando que el nº de w-guardias es $\lfloor n/3 \rfloor$ en este caso. La herramienta fundamental para trabajar sobre polígonos ortogonales no es la triangulación, sino la cuadrangulación o descomposición en cuadriláteros convexos.



Cuadrangulación de un polígono ortogonal



Polígono con $\lfloor n/3 \rfloor$ *w-guardias*

Figura 6. Vigilancia vigilada en polígonos ortogonales

6. Un problema abierto

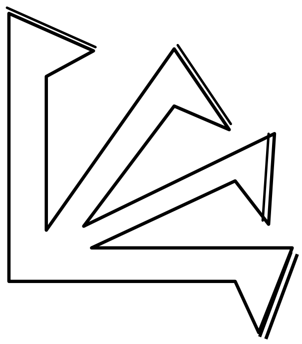
La pregunta inicial de Klee en 1973 originó desde su formulación un importante número de trabajos. En 1987, O'Rourke [O'R] publicó *Art Gallery: Theorems and Algorithms* recogiendo todos los resultados obtenidos hasta ese momento en el campo de la iluminación de polígonos. Los avances y nuevas líneas abiertas desde entonces pueden consultarse en los trabajos recopilatorios de Shermer [Sh] y Urrutia [Ur].

Terminaremos esta pequeña muestra de los problemas en Galerías de Arte mencionando uno de los problemas abiertos más antiguo en el área:

Si permitimos que cada guardia pueda patrullar por una de las paredes del museo, de forma que vigile todos los puntos que son visibles desde algún punto de esa pared, ¿cuántos guardias se necesitan para vigilar?

En 1983, G. Toussaint conjeturó que, excepto para unos pocos polígonos, $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado son siempre suficientes para vigilar cualquier polígono de n lados. (Se invita al lector a buscar un polígono de 7 lados que requiera 2 guardias-lado).

En este problema no es útil la técnica de triangulación, pues existen ejemplos en los que necesitan $\lfloor 3n/10 \rfloor$ guardias-lado para vigilar todos los triángulos de la triangulación.



Polígono que requiere $\lfloor n/4 \rfloor$ guardias-lado

Agradecimiento: A la memoria de D. Pedro Abellanas, quien me inició en los caminos de la Geometría.

Referencias:

[Ch] CHVÁTAL, V.: "A Combinatorial Theorem in Plane Geometry", *Journal of Combinatorial Theory*, serie B, 18, pág. 39-41, (1975)

[CN] CHIN, W. P., NTAFOS, S.: "Shortest watchman routes", *Discrete and Comp. Geometry*, 6, pág. 9-31, (1991)

[Fi] FISK, F.: "A Short Proof of Chvátal Watchman Theorem", *Journal of Combinatorial Theory*, serie B, 24, pág. 374, (1978)

[H1] HERNÁNDEZ, G.: "Controlling Guards", *Proc. of the sixth Canadian Conference on Computational Geometry,* pág. 387-392, (1994)

[H2] HERNÁNDEZ, G.: "Vigilancia vigilada en polígonos ortogonales", *Actas de los VI Encuentros de Geometría Computacional,* pág. 198-205, (1995)

[LL] LEE, D., LIN, A.: "Computational Complexity of Art Gallery Problems", *IEEE Trans. On Information Theory,* 32, pág. 276-282, (1986)

[O'R] O'ROURKE, J.: "Art Gallery: Theorems and Algorithms", Oxford Univ. Press, 1987.

[Sh] SHERMER, T.: "Recent Results in Art Galleries", *Proceedings of the IEEE,* vol. 80, 9, pág. 1384-1399, (1992)

[To] TOKARSKY, G. W.: "Polygonal Rooms Not Illuminable from Every Point". *Amer. Math. Monthly*, vol. 102, pág. 867-879, (1995)

[Ur] URRUTIA, J.: "Art Gallery and Illumination Problems", en "Handbook on Computational Geometry", Elsevier (J.R. Sack and J. Urrutia eds.) 1999.

Lugares geométricos encontrados con ayuda del Algebra y la Computación

Eugenio Roanes Macías

Facultad de Educación de la Univ. Complutense
Sección Departamental de Algebra
roanes@eucmos.sim.ucm.es

Abstract

The autor has recently developed (in collaboration) a method for determining automatically geometric loci based in Wu's algorithm. A "light" version of the method is described in this article. Only elementary algebraic tools are used (a variant of polinomial division called pseudodivision). The method can be used to find loci, when they can not be found using classical techniques of synthetic geometry, and also to detect loci in an n-dimensional euclidean space, for a given $n > 2$, fixed in advance.

Introducción

Este artículo, mezcla de Geometría, Algebra y Computación, está dedicado al Prof. D. Pedro Abellanas, mi director de tesis, de quien aprendí el uso de herramientas algebraicas en la resolución de problemas geométricos.

Recientes avances algorítmicos, así como de la tecnología computacional permiten ejecutar rápidamente cálculos algebraicos sencillos pero laboriosísimos, útiles para resolver ciertos problemas geométricos con técnicas estándar.

Los trabajos de Recio [5] y Recio-Vélez [6] nos sugirieron la idea de aplicar estas técnicas a determinar lugares geométricos, consistiendo nuestro primer trabajo es esta línea en el desarrollo una demostración "ad hoc", presentada al IMACS-ACA'99 y publicada en nuestro Boletín [10].

Posteriormente, conociendo los trabajos de Kapur-Mundy [3] y de Kapur [4], hemos generalizado el método de determinación de lugares, presentándolo como comunicación al AISC'2000 [12], y lo hemos aplicado a extender a dimensión 3 ciertos lugares geométricos del plano [11].

El propósito del presente trabajo es el de divulgar estos modernos métodos de investigación en Geometría, presentándolos desprovistos de formalismo, de modo que sean aprovechables por potenciales usuarios no especializados en estas técnicas. Por razones didácticas y de espacio, este trabajo se limita a considerar lugares del plano euclídeo real. El único requisito exigido es saber dividir polinomios multivariables.

1 Algoritmo de Wu (versión elemental)

Este algoritmo, desarrollado hacia 1978 por el matemático chino Wu Wentsün, para su aplicación a la demostración automática de teoremas, está basado en la seudodivisión (variante de la división polinómica).

1.1 Seudodivisión de polinomios

Al dividir el polinomio $y^3 + 1$ entre $xy + 2$ respecto de la variable y (considerando a x como constante), se obtiene como resto la expresión racional $1 - \frac{8}{x^3}$, en la que aparece x en un denominador.

En general, en la division usual de polinomios multivariables (de varias variables) con coeficientes enteros, el cociente y el resto obtenidos son expresiones racionales, que pueden no ser enteras (es decir, algunas variables o enteros pueden aparecer en los denominadores). Estas expresiones racionales no polinómicas son mucho más incómodas de manipular que los polinomios. Para evitar este inconveniente, la división se sustituye por la seudodivisión.

Definición 1.1. Siendo f y d polinomios multivariables con coeficientes enteros, la *pseudodivisión* de f entre d respecto a la variable V consiste en la division usual (considerando a las demás variables como constantes), sin mas que sustituir f por su producto por el *multiplicador*

$$m = coef\_lider(d, V)^{1+grado(f,V)-grado(d,V)} \tag{1}$$

donde $coef\_lider(d,V)$ es el coeficiente líder del polinomio d con respecto de la variable V (es decir, su término de mayor grado en V). El cociente y el resto así obtenidos, se denominan *seudocociente* y *seudoresto*. Al seudoresto lo denotaremos por $sresto(f,d,V)$ y al multiplicador (1) por $mult(f,d,V)$.

Para el caso del ejemplo anterior, el coeficiente líder del divisor es x, luego el multiplicador es $m = x^{(1+3-1)}$, así que la seudodivisión de $f = y^3 + 1$ entre $d = xy + 2$ respecto de y, consiste en la division usual de $m \cdot f = x^2 \cdot (y^3 + 1)$ entre d, obteniéndose como seudoresto la expresión entera $x^3 - 8$.

En general, se prueba que el seudocociente (q) y el seudoresto (r) son expresiones enteras (ni variables, ni enteros aparecen en denominadores) y, como en la división usual, verifican:

$$r = m \cdot f - d \cdot q \quad ; \quad grado(r,V) < grado(d,V) \tag{2}$$

En consecuencia, si $grado(d,V) = 1$, entonces V no aparece en r.

1.2 Triangulación respecto de un subconjunto de variables

A continuación, la seudodivisión va a ser aplicada a *triangular* un sistema de polinomios. Se trata de obtener, a partir de él, otro sistema de polinomios, mediante un proceso similar al de la eliminación gaussiana, pero substituyendo operaciones lineales por seudodivisiones.

Definición 1.2. Partiendo de un sistema de polinomios con coeficientes enteros en las indeterminadas o variables $V_1, ..., V_s; V_{s+1}, ..., V_n$, es decir, del anillo de polinomios $\mathbb{A} = \mathbb{Z}[V_1, ..., V_s; V_{s+1}, ..., V_n]$):

$$h_i(V_1, ..., V_s; V_{s+1}, ..., V_n) \ ; \ i = 1, ..., s \tag{3}$$

y de un subconjunto ordenado de dichas variables, $V_1 \prec ... \prec V_s$, se denomina *triangulación* al proceso de obtención de otro sistema de polinomios:

$$\begin{array}{l} g_1(V_1, V_2, V_3, ..., V_s; V_{s+1}, ..., V_n) \\ \quad g_2(V_2, V_3, ..., V_s; V_{s+1}, ..., V_n) \\ \qquad g_3(V_3, ..., V_s; V_{s+1}, ..., V_n) \\ \qquad \quad .... \\ \qquad \qquad g_s(V_s; V_{s+1}, ..., V_n) \end{array}$$

que llamaremos *triangulado* de aquel, cuyos polinomios verifican:

- son combinación lineal, con coeficientes en $\boldsymbol{A}$, de los del sistema inicial (lo que, en lenguaje algebraico, se expresa diciendo que los polinomios g_i pertenezcan al ideal $< h_1, ..., h_s >$ del anillo $\boldsymbol{A}$), es decir:

$$g_i = \sum_{j=1}^{s} u_j h_j \ ; \ i = 1, ..., s \ ; \ u_j \in \boldsymbol{A} \ ; \ j = 1, ..., s \qquad (4)$$

- la variable V_i aparece en el polinomio g_i, pero no en los siguientes:

$$grado(g_i, V_i) > 0 \ ; \ grado(g_j, V_i) = 0 \ ; \ j > i \ ; \ i = 1, ..., s \qquad (5)$$

Para establecer cómodamente un orden en los polinomios (3), en las variables respecto de las cuales se triangula y en los polinomios triangulados, consideraremos listas de ellos, denotadas respectivamente **V**, **H** y **G**:

$$\mathbf{V} = [V_1, V_2, ..., V_s] \ ; \ \mathbf{H} = [h_1, h_2, ..., h_s] \ ; \ \mathbf{G} = [g_1, g_2, ..., g_s]$$

A continuación se muestra un algoritmo de triangulación, expresándolo de modo sencillo, aunque un poco informal.

Algoritmo de triangulación *trian_*:

Entrada: $\mathbf{H} := [h_1, h_2, ..., h_s]$, $\mathbf{V} := [V_1, V_2, ..., V_s]$

0. $\mathbf{G} := [\ ]$ (lista vacía)
1. v:=primer elemento de **V**
2. g:=el primer polinomio de **H**, tal que $grado(g, v)$ sea mínimo, tomado de entre los que tal grado sea positivo
3. si $grado(g, v) > 1$ y hay en **H** otros elementos de grado> 0 en v, entonces sustituir a esos otros por su seudoresto entre g respecto de v y volver a **2**
4. agregar g a la lista **G** como último elemento
5. suprimir en **H** dicho elemento g
6. suprimir en **V** su primer elemento
7. si la lista **V** no es vacía, entonces volver a **1**

Salida: $\mathbf{G} = [g_1, g_2, ..., g_s]$

(Una descripción mas detallada de este algoritmo, con ligeras variantes, puede encontrarse en el capítulo 5 de [7], o bien en [1, 2]).

Aplicando el algoritmo *trian_* a las listas **H** de polinomios y **V** de variables, se obtiene la lista **G** de polinomios triangulados, que verifican (4) y (5):

$$trian\_([h_1, h_2, ..., h_s], [V_1, V_2, ..., V_s]) = [g_1, g_2, ..., g_s] \tag{6}$$

1.3 Seudoresto final y sucesión de multiplicadores

Definición 1.3. A partir de otro polinomio, $t_h \in \boldsymbol{A}$, y de la lista **G**, de polinomios triangulados respecto de **V**, se calcula la *sucesión de seudorestos*:

$$r_1 = sresto(t_h, g_1, V_1)\ ,\ r_i = sresto(r_{i-1}, g_i, V_i)\ ;\ i = 2, ..., s \tag{7}$$

El último seudoresto obtenido así obtenido, r_s, se denomina *seudoresto final* y el proceso para calcularlo se denotará *sresto_final*:

$$sresto\_final(t_h, [g_1, ..., g_s], [V_1, ..., V_s]) = r_s$$

Observemos que si $grado(g_i, V_i) = 1; i = 1, ..., s$, entonces, de acuerdo con la desigualdad de (2), en r_i ya no aparecerán $V_1, ..., V_i$, y, en consecuencia, en r_s se habrá conseguido eliminar las variables $V_1, ..., V_s$. En todo caso, aunque sea $grado(g_i, V_i) > 1$, para algún $i \in \{1, ..., s\}$, el algoritmo *trian_* sólo será útil cuando t_h sea tal que en r_s sólo aparezcan variables de $\{V_{s+1}, ..., V_n\}$, como se verá más adelante.

Definición 1.4. La sucesión de multiplicadores de las seudodivisiones (7):

$$m_1 = mult(t_h, g_1, V_1), m_2 = mult(r_1, g_2, V_2), ..., m_s = mult(r_{s-1}, g_s, V_s)$$

se concatenarán en una lista, denotándose *suc_mult* al proceso para calcularla:

$$suc\_mult(t_h, [g_1, ..., g_s], [V_1, ..., V_s]) = [m_1, m_2, ..., m_s]$$

(Se omiten los listados de los algoritmos *sresto_final* y *suc_mult*, por triviales).

1.4 Implementación

Los cálculos mencionados anteriormente, al ser muy laboriosos, han de ser automatizados, inplementándolos en un sistema computacional de cálculo matemático que contenga un comando que permita calcular seudorestos.

Tal es el caso del comando *prem* del sistema Maple, en el cual hemos implementado *trian_*, *sresto_final* y *suc_mult* con técnicas descritas en [9].

Aunque Derive no contiene un comando que permita calcular seudorestos, existe un programa para calcularlos [8] y en su versión 5, con su programación procedural, es muy cómoda la implementación de estos algoritmos.

1.5 Aplicación usual del algoritmo de Wu

Su aplicación a la demostración automática se basa en el siguiente:

Lema 1.5. *De acuerdo con la notación precedente, el seudoresto final puede expresarse en la forma:*

$$r_s = m_s \cdot m_{s-1} \cdot ... \cdot m_1 \cdot t_h + \sum_{i=1}^{s} w_i h_i \quad ; \quad w_i \in \boldsymbol{A} \tag{8}$$

Proof. De acuerdo con la igualdad (2), los s seudorestos (7) pueden escribirse:

$$r_1 = m_1 t_h - g_1 q_1 \ , \ r_2 = m_2 r_1 - g_2 q_2 \ , \ ..... \ , \ r_s = m_s r_{s-1} - g_s q_s$$

donde $q_1, ..., q_s$ son los seudococientes de (7). Sustituyendo el valor de cada seudoresto en la siguiente igualdad, resulta:

$$r_s = m_s \cdot m_{s-1} \cdot ... \cdot m_1 \cdot t_h + \sum_{j=1}^{s} f_j g_j \ ; \ f_j \in \boldsymbol{A}$$

bastando ahora tener en cuenta (4), para obtener (8). □

En la aplicación usual del lema anterior, se espera que el seudoresto final, r_s, sea nulo. En tal caso, si $(v_1, ..., v_s; v_{s+1}, ..., v_n)$ es una n-tupla de elementos de cierto cuerpo, para los que se anulan los polinomios (3), entonces, de acuerdo con el Lema 1.5, dicha n-tupla también anula al polinomio t_h, supuesto que sea $m_s \cdot m_{s-1} \cdot ... \cdot m_1$ no se anule en esa n-tupla. De este modo se obtiene la demostración automática de la implicación:

$$h_1 = 0 \wedge h_2 = 0 \wedge ..... \wedge h_s = 0 \implies t_h = 0 \tag{9}$$

siempre que los s seudorestos m_i sean no nulos, con lo cual $m_1 = 0, ..., m_s = 0$ conducen a condiciones de degeneración del teorema. Esta es en esencia la justificación de la versión elemental del método de Wu de demostración automática de teoremas.

En el método de determinación automática de lugares geométricos que se expone a continuación se usan los mismos algoritmos que en el método de Wu, pero de distinto modo y para alcanzar un objetivo diferente.

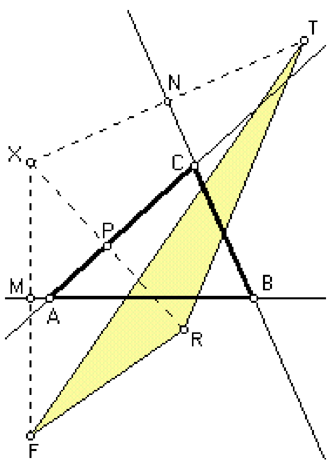
Por razones didácticas, comenzaremos planteando la cuestión a la luz de un problema concreto de lugar geométrico.

2 Planteamiento de un problema de lugar

Problema

En el plano euclídeo real, se consideran un triángulo ABC, un punto X y sus imágenes F, T, R en las reflexiones de ejes las rectas-lados AB, BC, CA. Suponiendo que X se mueve de tal manera que el área del triángulo FTR no cambia (es una constante, a), *¿cuál es el lugar de tales puntos X?*.

A fin de plantear el problema de modo sencillo, interesa considerar las proyecciones ortogonales, M, N, P, de X sobre las rectas-lados AB, BC, CA.



Sistema de coordenadas

Por sencillez de cálculos posteriores, elegimos un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares con origen en el vértice A del triángulo y eje de abscisas pasando por el vértice B. Con respecto a él, las coordenadas de los puntos mencionados pueden expresarse:

$$A(0,0), B(b,0), C(c,e), X(x,y), M(m,0),$$
$$N(n,u), P(p,q), F(f,g), R(r,s), T(t,z)$$

y las condiciones de hipótesis y de tesis pueden escribirse como sigue.

Condiciones de hipótesis

1) $m - x = 0$ $(XM \perp AB)$
2) $(n-b)e - (c-b)u = 0$ $(N \in BC)$
3) $(n-x)(c-b) + (u-y)e = 0$ $(XN \perp BC)$
4) $pe - qc = 0$ $(P \in CA)$
5) $(p-x)c + (q-y)e = 0$ $(XP \perp CA)$
6) $f - m = 0$ (F es la imagen de X en la reflexión de eje AB)
7) $g + y = 0$ (F es la imagen de X en la reflexión de eje AB)
8) $x + r - 2 \cdot p = 0$ (R es la imagen de X en la reflexión de eje BC)
9) $y + s - 2 \cdot q = 0$ (R es la imagen de X en la reflexión de eje BC)
10) $x + t - 2 \cdot n = 0$ (T es la imagen de X en la reflexión de eje CA)
11) $y + z - 2 \cdot u = 0$ (T es la imagen de X en la reflexión de eje CA)

Condición de tesis

$$a = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} f & g & 1 \\ r & s & 1 \\ t & z & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(fs + gt + rz - ts - zf - rg) \qquad (\text{area}(FTR) = a)$$

Parámetros y coordenadas

Observemos que el área a y las coordenadas b, c, e, de los vértices de ABC, pueden ser arbitrariamente elegidos, por lo que serán considerados como *parámetros*. Obviamente, para evitar que el triángulo ABC degenere (en un segmento o un punto), deben verificarse las dos siguientes *condiciones de los parámetros*:

$$b \neq 0 \ ; \ e \neq 0 \tag{10}$$

Como el punto X define el lugar, a sus coordenadas, x, y, las llamaremos *coordenadas del lugar*. Los restantes puntos considerados, M, N, P, F, T, R, quedan determinados por los anteriores, por lo que a sus coordenadas, m, n, u, p, q, f, g, r, s, t, z, las denominaremos *coordenadas dependientes*.

3 Condiciones que determinan un lugar

Con objeto de obtener condiciones de determinación válidas para cualquier lugar geométrico del plano euclídeo real, se ha de generalizar lo expuesto para el caso concreto del ejemplo considerado en la sección 2.

3.1 Concepto de lugar geométrico

Comencemos precisando el concepto de lugar geométrico, adaptándolo a nuestro propósito de desarrollar un método estándar para su determinación automática.

Definition 3.1. En el plano euclídeo real, $I\!R^2$, se consideran los siguientes objetos geométricos:

- un subconjunto finito de puntos, denominados *puntos libres* (como A, B, C en el problema de la sección 2), líbremente elegidos, excluyendo situaciones excepcionales (tales como la no alineación de A, B, C)
- un punto indeterminado, X, denominado *punto del lugar*
- un subconjunto finito de puntos, llamados *puntos dependientes* (como M, N, P, F, T, R en el problema de la sección 2), determinados a partir de los puntos libres y del lugar por ciertas condiciones geométricas, denominadas *condiciones de hipótesis*
- otra condición, llamada *condición de tesis*, relacionando a algunos de los puntos libres, del lugar y dependientes.

Entonces, el subconjunto de puntos $X \in I\!R^2$, que satisfacen la condición de tesis, bajo las condiciones de hipótesis y las condiciones que excluyen situaciones excepcionales de los puntos libres, se denomina un *lugar geométrico* o, abreviadamente, un *lugar*.

3.2 Planteamiento en coordenadas

El planteamiento propuesto para el problema de la sección 2, va a ser generalizado para hacerlo aplicable a un lugar geométrico cualquiera.

Condiciones de hipótesis y de tesis

Las condiciones de hipótesis han de poder expresarse mediante ecuaciones polinomiales (en otro caso el método descrito a continuación no es aplicable):

$$h_i(a_1, a_2, ...; v_1, v_2, ..., v_s; x, y) = 0 \ ; \ i = 1, 2, ..., s \tag{11}$$

donde $a_1, a_2, ...$ son las coordenadas de los puntos libres (concatenadas las de todos ellos), $v_1, ..., v_s$ las de los puntos dependientes (concatenadas las de todos ellos) y x, y las del punto del lugar. Y lo mismo ha de ocurrir para la condición de tesis, en que podría aparecer una nueva constante, a_0 (el área a en el caso del problema de la sección 2):

$$t_h(a_0; a_1, a_2, ...; v_1, v_2, ..., v_s; x, y) = 0 \tag{12}$$

Parámetros y coordenadas

Las coordenadas de los puntos libres y la constante a_0 serán consideradas como *parámetros.* Las condiciones que excluyen las situaciones relativas entre puntos libres, denominadas *condiciones de los parámetros*, son usualmente desigualdades de una de las dos formas:

$$a_i \neq 0 \quad ; \quad a_i < a_j \tag{13}$$

Las coordenadas del punto del lugar se denominan *coordenadas del lugar* y las de los puntos dependientes *coordenadas dependientes.*

3.3 Planteamiento como problema polinomial

A partir del primer miembro de cada una de las igualdades (escritas con segundo miembro cero) que expresan las condiciones de hipótesis (11) y tesis (12), se considera un polinomio, traduciendo las coordenadas (dependientes y del lugar) en variables independientes

$$v_1, v_2, ..., v_s; x, y \quad \rightarrow \quad V_1, V_2, ..., V_s; X, Y$$

y conservando los parámetros, obteniendo así los *polinomios de hipótesis*:

$$h_i(V_1, ..., V_s; X, Y) \; ; \; i = 1, 2, ..., s \tag{14}$$

y el *polinomio de tesis*:

$$t_h(V_1, ..., V_s; X, Y) \tag{15}$$

como elementos del anillo $\mathbb{A}' = \mathbb{Z}[a_0; a_1, a_2, ...][V_1, ..., V_s; X, Y]$. Se han utilizado mayúsculas para enfatizar el carácter de variables independientes y, por brevedad, se han omitido en (14) y (15) los parámetros $a_0, a_1, a_2, ...$.

Se trata de determinar los posibles puntos X, tales que la condición de tesis se deduzca de las s condiciones de hipótesis. Para conseguir este objetivo, vamos a tratar de obtener una relación lineal entre los polinomios de hipótesis y de tesis, con coeficientes polinómicos del mismo anillo $\mathbb{A}'$.

3.4 Condición necesaria de pertenencia al lugar

Para obtener tal relación lineal, se utilizan los algoritmos de la sección 1.

Triangulación de los polinomios de hipótesis

Elegido un orden en las variables $V_1, ..., V_s$, procedentes de coordenadas dependientes, y en los polinomios (14), mediante la definición de sendas listas:

$$\mathbf{V} = [V_1, ..., V_s] \; ; \; \mathbf{H} = [h_1, ..., h_s]$$

puede aplicarse el algoritmo *trian_* de 1.2, para *triangular* el sistema (14):

$$trian\_(\mathbf{H}, \mathbf{V}) = \mathbf{G} \; ; \; \mathbf{G} = [g_1, g_2, ..., g_s]$$

Cálculo del seudoresto final

Aplicando el algoritmo *sresto_final* de 1.3, a partir de t_h, $\mathbf{G}$ y $\mathbf{V}$, se obtiene:

$$sresto\_final(t_h, \mathbf{G}, \mathbf{V}) = r_s$$

En el seudoresto final r_s no deben aparecer las variables $V_1, ..., V_s$:

$$r_s = r_s(X, Y) \tag{16}$$

En otro caso, este método no es operativo (posiblemente por no estar bien definidos los polinomios de hipótesis o de tesis).

Teorema 3.1. *Suponiendo que el polinomio (16) resulte ser de grado cero respecto de cada una de las variables $V_1, ..., V_s$, si el punto (x, y) pertenece al lugar, entonces es nulo el resultado de sustituir en (16) las variables X, Y por las respectivas coordenadas del punto, es decir, se verifica:*

$$r_s(x, y) = 0 \tag{17}$$

Demostración. De acuerdo con el lema 1.5, el seudoresto final debe verificar:

$$r_s(X, Y) = t_h(V_1, ..., V_s; X, Y) \cdot \prod_{i=1}^{s} m_i(V_1, ..., V_s; X, Y) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{s} w_i(V_1, ..., V_s; X, Y) h_i(V_1, ..., V_s; X, Y) \quad ; \quad w_i \in \boldsymbol{A}'$$

Sustituyendo aquí las variables X, Y por las coordenadas del punto, (x, y), y las variables $V_1, ..., V_s$ por las coordenadas dependientes, $v_1, ..., v_s$, y teniendo en cuenta que (x, y) es un punto del lugar, entonces de las condiciones (11) y (12) se sigue (17). □

El resultado anterior proporciona una condición necesaria de pertenencia al lugar. Pero ahora surge la cuestión recíproca: ¿pertenecen al lugar todos los puntos que verifican (17)?

3.5 Condición suficiente de inclusión en el lugar

Al ser $\mathbb{Z}[a_0, a_1, a_2, ...][X, Y]$ un dominio de factorización única, r_s admite una descomposición como producto de factores irreducibles, pudiendo expresarse en la forma:

$$r_s(X, Y) = \rho \cdot \prod_{j}^{N} \phi_j(X, Y) \ ; \ \rho \in \mathbb{Z}[a_0, a_1, a_2, ...]$$

donde ρ es el producto de los factores que no contienen variables procedentes de coordenadas de lugar y los ϕ_j son los factores que si las contienen.

En consecuencia, los polinomios $\phi_j(X, Y)$ son los candidatos a definir curvas irreducibles de $\mathbb{R}^2$ contenidas en el lugar, por lo que nos referiremos a ellos como *factores polinomiales del lugar.*

Se trata ahora de averiguar si todos los puntos de la curva de $I\!R^2$ definida por ϕ_j pertenecen al lugar. Para analizarlo, la nueva condición de hipótesis $\phi_j(a_0; a_1, a_2, ...; x, y) = 0$ va a ser añadida a las anteriores condiciones (11), manteniendo la misma condición de tesis (12).

Triangulación de los nuevos polinomios de hipótesis

En consecuencia, $\phi_j(X, Y)$ va a ser añadido a los s polinomios de hipótesis anteriormente considerados, con lo cual una de las coordenadas de lugar, x ó y, no puede seguir siendo elegida líbremente, debiendo pues ser considerada como nueva coordenada dependiente. Conviene elegirla de modo que el grado de ϕ_j respecto de ella sea positivo y lo menor posible. Si, por ejemplo, tal variable fuera la Y, entonces las nuevas listas de $s+1$ variables y $s+1$ polinomios de hipótesis serían:

$$\mathbf{V}^* = [V_1, ..., V_s, Y] \ ; \ \mathbf{H}^* = [h_1, ..., h_s, \phi_j]$$

Para *triangular* el nuevo sistema $\mathbf{H}^*$, se aplica ahora el algoritmo *trian_*:

$$trian\_(\mathbf{H}^*, \mathbf{V}^*) = \mathbf{G}^* \ ; \ \mathbf{G}^* = [g_1^*, ..., g_s^*, g_{s+1}^*]$$

Cálculo del nuevo seudoresto final

Aplicando el algoritmo *sresto_final* de 1.3, a partir de t_h, $\mathbf{G}^*$ y $\mathbf{V}^*$, se obtiene:

$$sresto\_final(t_h, \mathbf{G}^*, \mathbf{V}^*) = r_{s+1}^*$$

debiendo resultar $r_{s+1}^* = 0$, para que el proceso de tenga éxito, según se verá.

Cálculo de los nuevos multiplicadores

La sucesión de multiplicadores involucrados en el cálculo de estos $s+1$ seudorestos se obtiene aplicando el algoritmo *suc_mult* de 1.3

$$suc\_mult(t_h, \mathbf{G}^*, \mathbf{V}^*) = [m_1^*, ..., m_s^*, m_{s+1}^*]$$

Para que el proceso tenga éxito, estos $s+1$ multiplicadores deben ser no nulos (después de substituir las variables por las correspondientes coordenadas y considerar las condiciones (13) de los parámetros), como precisa el siguiente resultado, enunciado de acuerdo con la notation precedente.

Teorema 3.2. *Suponiendo que $\rho \neq 0$ bajo las condiciones de los parámetros, si para el factor polinomial del lugar $\phi_j(X,Y)$ se verifican las condiciones:*

1) $r^*_{s+1} = 0$ (el nuevo seudoresto final es nulo)

2) $m^*_1 \neq 0, ..., m^*_s \neq 0, m^*_{s+1} \neq 0$ (bajo las condiciones de los parámetros)

entonces la curva de ecuación $\phi_j(X,Y) = 0$ está contenida en el lugar.

Demostración. Suponiendo que el punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es de esa curva, es decir, satisface la ecuación

$$\phi_j(x,y) = 0 \tag{18}$$

se trata de probar que entonces ese punto es del lugar. En efecto, aplicando el lema 1.5 al nuevo sistema de polinomios de hipótesis, se tiene la igualdad polinomial:

$$r^*_{s+1} = m^*_{s+1} \cdot m^*_s \cdot m^*_{s-1} \cdot ... \cdot m^*_1 \cdot t_h + \sum_{i=1}^{s} w^*_i h_i + w^* \phi_j \ ; \ w^*_i, w^* \in \boldsymbol{A'}$$

siendo nulo el primer miembro de la igualdad, como consecuencia de la condición *1* de la hipótesis del teorema. Sustituyendo ahora variables por las respectivas coordenadas, el útimo término es nulo, como consecuencia de (18). Para probar que (x,y) es punto del lugar, supongamos que ese punto verifica las condiciones de hipótesis (11), con lo cual queda:

$$0 = m^*_{s+1} \cdot m^*_s \cdot m^*_{s-1} \cdot ... \cdot m^*_1 \cdot t_h$$

Finalmente, como los multiplicadores son no nulos (condición *2* de la hipótesis del teorema), resulta $t_h = 0$, es decir, para ese punto se verifica la condición de tesis, y en consecuencia ese punto es del lugar. □

Repitiendo el mismo proceso para todos los factores polinomiales del lugar, $\phi_j; j = 1, ..., N$, se llega al siguiente:

Corolario 3.3. *Si para cada factor polinomial del lugar, $\phi_1, ..., \phi_N$, se verifican las condiciones 1 y 2 del teorema 3.2, entonces el lugar es la unión de las curvas de $\mathbb{R}^2$ de ecuaciones $\phi_j(X,Y) = 0; j = 1, ..., N$.*

Demostración. Sigue de los teoremas 3.1 y 3.2. □

4 Aplicación a un problema de lugar

Estos resultados van a ser aplicados al problema concreto de la sección 2.

Polinomios de hipótesis y de tesis:

Se definen a partir del primer miembro de las igualdades (escritas con segundo miembro cero), que expresan las condiciones de hipótesis y tesis en la sección 2, evitando coeficientes fraccionarios (se mantienen minúsculas para las variables, por comodidad):

Polinomios de hipótesis:

$h_1 = m - x$
$h_2 = (n - b)e - (c - b)u$
$h_3 = (n - x)(c - b) + (u - y)e$
$h_4 = pe - qc$
$h_5 = (p - x)c + (q - y)e$
$h_6 = f - m$
$h_7 = g + y$
$h_8 = x + r - 2p$
$h_9 = y + s - 2q$
$h_{10} = x + t - 2n$
$h_{11} = y + z - 2u$

Polinomio de tesis:

$t_h = (fs + gt + rz - ts - zf - rg) - 2a$

Triangulación de los polinomios de hipótesis

Se facilita eligiendo un orden apropiado de variables y polinomios:

$$\mathbf{H} = [h_6, h_7, h_8, h_9, h_{10}, h_{11}, h_5, h_4, h_3, h_2, h_1]$$

$$\mathbf{V} = [f, g, r, s, t, z, q, p, u, n, m]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G} = trian\_(\mathbf{H}, \mathbf{V}) = [&f - m, g + y, -2p + r + x, -2q + s + y, -2n + t + x,\\ &-2u + y + z, cp - cx + eq - ey, c^2p - c^2x - cey + e^2p,\\ &-bn + bx + cn - cx + eu - ey, b^2n - b^2x - 2bcn\\ &+2bcx - be^2 + bey + c^2n - c^2x - cey + e^2n, m - x]\end{aligned}$$

(Para el desarrollo del proceso no es preciso conocer los elementos de $\mathbf{G}$).

Cálculo del seudoresto final

Después de factorizar y sacar factor común a, resulta:

$$r_{11} = srest\_final(t_h, \mathbf{G}, \mathbf{V}) = 2e^2(2be^3x^2 - 2b^2e^3x + 2be^3y^2+ \\ +2be^2y(bc - c^2 - e^2) - a(b^2 - 2bc + c^2 + e^2)(c^2 + e^2))$$

Denotando por ρ al producto de los factores constantes de r_{11} y por ϕ al único factor que contiene variables procedentes de coordenadas de lugar, es decir, al único *factor polinomial del lugar*, se tiene:

$$\rho = 2e^2 \quad ; \quad \phi(x, y) = r_{11}/\rho$$

Al ser $\rho \neq 0$ bajo las condiciones (10), de acuerdo con el Teorema 3.1, los puntos (x, y) del lugar han de verificar $\phi(x, y) = 0$.

Ahora surge la cuestión recíproca: ¿pertenecen al lugar todos los puntos de $\phi(x, y) = 0$? Para responder, a esta pregunta, la nueva condición de hipótesis $\phi(x, y) = 0$ va a ser añadida a las consideradas en la sección 2, manteniendo la misma condición de tesis allí citada.

Triangulación de los nuevos polinomios de hipótesis

En consecuencia, $\phi(x, y)$ va a ser añadido a los 11 polinomios de hipótesis anteriormente considerados, con lo cual una de las coordenadas de lugar, x, y, no puede seguir siendo elegida líbremente, debiendo pues ser considerada como nueva coordenada dependiente (la y, por ejemplo):

$\mathbf{V}^* = [f, g, r, s, t, z, q, p, u, n, m, y]$

$\mathbf{H}^* := [h6, h7, h8, h9, h10, h11, h5, h4, h3, h2, h1, \phi]$

$\mathbf{G}^* = trian\_(\mathbf{H}^*, \mathbf{V}^*)$ (por brevedad, se omiten los elementos de $\mathbf{G}^*$).

Cálculo del nuevo seudoresto final

$r_{12}^* = sresto\_final(t_h, \mathbf{G}^*, \mathbf{V}^*) = 0$

Cálculo de los nuevos multiplicadores

$suc\_mult(t_h, \mathbf{G}^*, \mathbf{V}^*) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, e, c^2 + e^2, e, b^2 - 2bc + c^2 + e^2, 1, 2be^3]$

Como $r_{12}^* = 0$ y los multiplicadores son todos no nulos (bajo las condiciones (10) de los parámetros), de acuerdo con el Corolario 3.3, el lugar es la curva de ecuación $\phi(x, y) = 0$.

Para $a = 0$ (es decir, para F, T, R colineales), esta ecuación queda

$$ex^2 + ey^2 - bex + (bc - c^2 - e^2)y = 0$$

y corresponde a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Para a arbitrario, $\phi(x, y) = 0$ es una circunferencia concéntrica con aquella y cuyo radio depende de los parámetros a, b, c, e.

Nota 4.1. En el lugar que se acaba de estudiar, existe un único factor polinomial del lugar. En caso de existir más de uno, se irían añadiendo sucesivamente como nuevo polinomio de hipótesis. Tal ocurre, por ejemplo, para el lugar de puntos del plano equidistantes de dos rectas secantes, cuya solución consiste en sus dos rectas-bisectrices (siendo aconsejable elegir un sistema de coordenadas apropiado, a fin de evitar que las ecuaciones de las bisectrices solución resulten incómodas).

5 Conclusiones

Con estos métodos de determinación automática no se pretende jubilar de los métodos clásicos de determinación de lugares, que usan técnicas de geometría sintética. Ahora bien, frecuentemente no es fácil encontrar la *idea feliz* que resuelve el problema con técnicas clásicas y entonces puede ser útil el método estándar mostrado aquí.

Dicho método puede ser aplicado a determinar lugares geométricos en espacios n-dimensionales (n fijo) sobre un cuerpo de característica 0, no necesariamente algebraicamente cerrado. Naturalmente, para dimensión mayor que 2, los resultados de la sección 3 sólo serían aplicables a hipersuperficies contenidas en el lugar, debiendo ser completadas con otros relativos a subvariedades de dimensión menor del lugar. De hecho, ya ha sido aplicado a extender a dimensión 3 los clásicos teoremas de Simson-Wallace-Steiner [11].

La aplicación del método descrito aquí está limitado en la práctica por la capacidad del sistema computacional. En caso de haber varios polinomios de hipótesis de grado mayor que 1 en alguna variable, los cálculos no se ejecutan en tiempo razonable (la complejidad del algoritmo de Wu es exponencial).

References

[1] Cox, Little, O'Shea: *Ideals, Varieties, and Algorithms.* Springer, 1991.

[2] S. C. Chou: *Mechanical Geometry Theorem Proving.* Reidel, 1988.

[3] Kapur, Mundy: *Wu's method and its application to perspective viewing.* In: Geometric Reasoning. MIT Press, 1989.

[4] D. Kapur: *Automated Geometric Reasoning.* In: D. Wang (ed.): Proceedings International Workshop on Automated Deduction in Geometry. Springer-Verlag, LNAI 1360.

[5] T. Recio: *Cálculo simbólico y geométrico.* Editorial Síntesis, 1998.

[6] Recio, Vélez: *Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry.* Journal of Automated Reasoning, 23, 1999 (págs. 63-82).

[7] Roanes M., Roanes L.: *Nuevas tecnologías en Geometría.* Editorial Complutense, 1995.

[8] Roanes M., Roanes L.: *Automatic Theorem Proving in Elementary Geometry with Derive.* En: International Derive Journal, Vol. 3, No. 2, págs. 67-82, 1996.

[9] Roanes M., Roanes L.: *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple.* Editorial Rubiños, 1999.

[10] Roanes M., Roanes L.: *Búsqueda automática de lugares geométricos.* En: Bol. de la Soc. Puig Adam, 53, 1999 (págs. 67-77).

[11] Roanes M., Roanes L.: *Extensión a* $\mathbb{R}^3$ *con seudodivisiones de los teoremas de Simson-Steiner-Guzmán.* En: Actas EACA'2000 (págs. 331-340).

[12] Roanes M., Roanes L.: *Automatic determination of geometric loci. 3D-extension of Simson-Steiner's Theorem.* In: Proceedings of AISC'2000. Springer-Verlag, LNCS 1930 (por aparecer).

[13] W. T. Wu: *Mechanical Theorem Proving in Geometries.* Text and Monographs in Symbolic Computation. Springer-Verlag, 1994.

Algunos teoremas sobre la Geometría Plana Elemental

Juan-Bosco Romero Márquez

Departamento de Álgebra, Geometría y Topología.
Universidad de Valladolid.

Abstract

We presents in this article some linear characterizations of the triangles.

1. Introducción.

En todo lo que sigue suponemos conocido todo lo referente a la geometría elemental del triángulo, a saber: la clasificación de los triángulos según los lados y según los ángulos; los teoremas elementales sobre la existencia de triángulo; los puntos notables de un triángulo, las rectas y los círculos asociados a esos puntos con respecto al triángulo; las fórmulas de la trigonometría plana elemental.

En el caso en que algunos o la totalidad de los conceptos y resultados anteriores no fueran conocidos por los alumnos, ahora es momento de hacérselos conocer utilizando las cuatro claves para la enseñanza de calidad metodológico–didáctica de la geometría elemental, como son: *intuición, demostración, construcción y computación*.

2. Resultados.

En esta sección exponemos los resultados fundamentales de nuestro trabajo con relación a la geometría elemental de un triángulo. Un teorema preliminar es el siguiente.

Teorema 1.- Sea ABC un triángulo rectángulo en A, de lados $a \geq b \geq c.$ Si r, R son el radio del círculo inscrito y circunscrito al triángulo, entonces

$$\frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1,$$

la igualdad se obtiene si y solo si b = c.

Demostración.- Probemos primero que para todo triángulo rectángulo se verifica:

$$b+c \leq \sqrt{2}\ \mathrm{a},$$

la igualdad se obtiene si y sólo si b = c. En efecto ya que el triángulo es rectángulo, esto es, $a^2 = b^2 + c^2$. Podemos escribir:

$$(\sqrt{2}a)^2 - (b+c)^2 = 2\,a^2 - (b^2 + c^2 + 2\,b\,c) = (b - c)^2 \geq 0$$

la igualdad se obtiene si y solo si b = c. De otra parte, los radios de la circunferencia inscrita y circunscrita al triángulo, respectivamente (ver [5]), vienen dados por:

$$R = \frac{a}{2}, \qquad \text{y} \qquad r = \frac{b+c-a}{2}, \quad (\ \mathrm{A} = 90,\ \ \mathrm{tg}\frac{A}{2} = 1).$$

Observación.- Existen muchas demostraciones de este teorema tan interesante que van desde el punto de vista geométrico como algebraico e incluso como un problema de extremos. Además, este resultado es muy utilizado para demostrar otros de la geometría elemental.

Comenzamos con el siguiente teorema que da una caracterización lineal de la clase de triángulo que se trate, según los ángulos en función de los lados y el radio inscrito.

Teorema 2.- Sea ABC un triángulo rectángulo en el vértice A, de lados $a > b \geq c$. Si w y h son la bisectriz y la altura de la hipotenusa, respectivamente, y r el radio del círculo inscrito al triángulo, entonces se tiene:

i) $(1+\sqrt{2})\,r \leq w$. ; ii) $(\sqrt{2} - 1)\,r \leq h < 0.5$.

Demostración. i) A partir de las expresiones anteriores y de la desigualdad $b+c \leq \sqrt{2}a$, y multiplicando numerador y denominador de la expresión que a continuación se sigue por 2p= a+b+c (donde p es el semiperímetro del triangulo rectángulo), resulta:

$$\frac{w}{r} = \frac{2bc}{b+c} Cos\ 45 \Big/ \frac{b+c-a}{2} = \frac{\sqrt{2}}{b+c}(a+b+c) \geq \sqrt{2}+1.$$

ii) De otra parte, escribiendo las expresiones de r, y de h conveniente, después de operar obtenemos :

$$\sqrt{2}\text{ -1}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\frac{a}{a+a\sqrt{2}}\leq\frac{r}{h}=\frac{b+c-a}{2}/\frac{bc}{a}=\frac{a}{a+b+c}<\frac{a}{2a}<\frac{1}{2}.$$

Observación. Como el área de un triángulo podemos escribirla en las formas:

$$\text{S} = \text{p r} = \frac{ah}{2}=\frac{bc}{a},$$

se simplifican algunos de los cálculos anteriores.

Teorema 3.- Sea ABC un triángulo de lados $a \geq b \geq c.$ Si r, es radio del círculo inscrito al triángulo, entonces se tiene, respectivamente:

$$(A \geq 90 \Leftrightarrow b+c-a \leq 2r) \;\wedge\; (A<90 \Leftrightarrow 2r < b+c-a).$$

Demostración. Construimos el círculo inscrito al triángulo. Sean M, N y P, los puntos de tangencia de este círculo con los lados, a = BC, b = CA y c = AB respectivamente. Definimos x = BM, y = CN, z = AP, de tal manera que, a = x+y, b = y+z, c = z+x, ya que las dos tangentes desde un punto exterior a una circunferencia tienen la misma longitud . De aquí deducimos que,

$$z=\frac{b+c-a}{2}, \quad \wedge \quad \text{tg}\,\frac{A}{2}=\frac{r}{z}=\frac{2r}{b+c-a}. \qquad (1)$$

Desde (1) obtenemos las equivalencias:

$$\text{tg}\,\frac{A}{2}\geq 1 \Leftrightarrow \frac{2r}{b+c-a}\geq 1 \Leftrightarrow 2r \geq b+c-a \Leftrightarrow A \geq 90.$$
$$\text{tg}\,\frac{A}{2}<1 \Leftrightarrow \frac{2r}{b+c-a}< 1 \Leftrightarrow 2r < b+c-a \Leftrightarrow A < 90.$$

Teorema.4.- Sea ABC un triángulo con lados $a \geq b \geq c$, y con radio inscrito r, y con radio circunscrito, R. Entonces se verifican repectivamente:

$$(A \geq 90 \Leftrightarrow R+r \geq \frac{b+c}{2}) \;\wedge\; (\text{A}<90 \Leftrightarrow R+r < \frac{b+c}{2}),$$

Demostración.- Utilizamos para nuestra demostración los siguientes resultados. Siendo α, β, γ ángulos cualesquiera y A,B,C los ángulos de un triángulo:

$$Sen\alpha - Sen\beta, = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}Sen\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$Cos\alpha - Cos\beta = 2Sen\frac{\alpha+\beta}{2}Sen\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$Sen\ \alpha\ Cos\ \beta = \frac{1}{2}\left[Cos(\alpha-\beta) - Cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$Cos\alpha - Sen\alpha = \sqrt{2}Sen(45-\alpha),$$

$$Cos\alpha + Sen\alpha = \sqrt{2}\ Cos(45-\alpha),$$

$$Sen\ \alpha\ \ Sen\ \beta\ \ Sen\ \gamma =$$

$$=\frac{1}{4}(Sen(\beta+\gamma-\alpha) + Sen(\alpha+\gamma-\beta) + Sen(\alpha+\beta-\gamma) - Sen(\alpha+\beta+\gamma)),$$

A partir de las relaciones anteriores y de r $= 4RSen\frac{A}{2}Sen\frac{B}{2}\ Sen\frac{C}{2}$, teniendo en cuenta el teorema de los senos, se obtiene (ver [1], [2] y [10]):

$$d = R + r - \frac{b+c}{2} = R + 4RSen\frac{A}{2}Sen\frac{B}{2}Sen\frac{C}{2} - R(SenB + SenC) =$$

$$= RSen(45-\alpha)(Cos\frac{A}{2} + Sen\frac{A}{2} - 2Cos\frac{B-C}{2}) =$$

$$=\sqrt{2}\ R\ Sen(45-\frac{A}{2})\left[(Cos\frac{A}{2} - Cos\frac{B-C}{2}) + (Sen\frac{A}{2} - Cos\frac{B-C}{2})\right] \text{ (2).}$$

Ahora bien

$$Cos\frac{A}{2} - Cos\frac{B-C}{2} = -2Sen\frac{90-B}{2}Sen\frac{90-C}{2} \quad (3)$$

$$Sen\frac{A}{2} - Cos\frac{B-C}{2} = Cos\frac{180-A}{2} - Cos\frac{B-C}{2} = -2Sen\frac{B}{2}Sen\frac{C}{2} \text{ (4).}$$

Por sustitución de las relaciones (3) y (4) , en la expresión (2), obtenemos después de operar:

$$d=-2\sqrt{2}RSen(45-\frac{A}{2})(Sen\frac{90-B}{2}Cos\frac{90-C}{2}+Sen\frac{B}{2}Sen\frac{C}{2}).$$

Como el segundo paréntesis que interviene en el producto de d, es siempre positivo, se tiene:

$$d\geq 0 \quad \Leftrightarrow \text{Sen}(45-\frac{A}{2}) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \frac{A}{2}-45\geq 0 \Leftrightarrow A\geq 90,$$

y, análogamente, se obtiene ($d<0 \ \Leftrightarrow$ A < 90), que es lo que queríamos demostrar.

Observación.- Este teorema admite como caso particular el demostrado en mi problema 10713 (ver [6] para los detalles).

3. Conclusiones y Comentarios.

Hemos dado distintos resultados elementales que caracterizan de una forma lineal la clase de triángulos según los ángulos, en función de los lados y de los radios inscrito y circunscrito de un triángulo como una experiencia educativa en el aula con los alumnos, utilizando para ello la trigonometría plana.

De otra parte, nos podemos proponer el encontrar otros resultados no necesariamente lineales, a través de las medias entre los lados de un triángulo (caso de la bisectriz), con los radios inscrito y circunscrito al triángulo.

Por ejemplo: probar que si ABC es un triángulo rectángulo, con A = 90, y de lados $a>b\geq c$, y si w es la bisectriz del ángulo recto, y si r es el radio del círculo inscrito, entonces se tiene :

$$(1+\sqrt{2})r\leq w.$$

Conjetura: ¿Es cierta siempre la desigualdad anterior para cualquier clase de triángulo?

Bibliografía.

[1] I. BRONSHTEIN, K. SEMENDIAEV: Manual de Matemáticas, Ed. Mir, Moscú, 1973.

[2] Denis-PAPIN, Matemáticas Generales, Montaner y Simón, Barcelona, 1969.

[3] D.S. MITRINOVIC, J.E. PECARIC and V. VOLONEC.: Recent Advances in Geometric Inequalities, Kluwer, Dordrecht, 1989.

[4] I. SHARIGUIN.: Problemas de Geometría, Mir, Moscu, 1989.

[5] V. GUSEV, V. LITVINENKO, A. MORDKOVICH.: Solving Problems in Geometry, Mir Publishers, Moscow,1988.

[6] Juan-Bosco ROMERO MÁRQUEZ.: Problema 10713 , Monthly, V. 107, N .5 May, p 464,Washington 2000.

[7] H.S.M. COXETER, S. GREITZER.: Geometry Revisited, MAA, Washington, 1967.

[8] Edited by H. FUKAGAWA, and Dan PEDOE.: Japanese Temple Geometry Problems, Winnipeg, 1989.

[9] D.C. KAY.: College Geometry, A Discovery Approach , Harper Collins College Publishers, New York,1994.

[10] E. HUMBERT.: Problémes de Trigonométrie, Vuibert, Paris,1921.

[11] C. HERBERT CLEMENS, Michael A. CLEMENS.: Geometry for the classroom, and Exercices and Solutions, Springer, New York, 1991.

[12] Stanley R. CLEMENS, Phares G. O´DAFFER, Thomas J. COONEY.: Geometría con Aplicaciones y Soluciones de Problemas, Addison-Wesley Iberoamericana, México, 1989.

[13] H. EVES.: Estudios de las Geometrías, I,II, Uteha, México, 1976.

[14] J. POTTAGE.: Geometrical investigations: Illustrating The Art of Discovery in the Mathematical Field, Addison-Wesley, London, 1983.

[15] M. BERGER.: Geometry,I,II, Springer, New York, 1987.

[16] G. POLYA.: Matemáticas y Razonamiento Plausible, Tecnos, Madrid, 1966.

[17] A.S. POSAMENTIER, CH.T. SALKIND.: Problems in Geometry, Dale Seymour, Palo Alto, 1988.

[18] Yvonne y Rene SORTAIS.: Géométrie du el triangle,Hermann, Paris, 1987.

[19] R. HONSBERGER.: Episodes in nineteenth and Twenty Century Euclidean

[20] A. ENGEL.: Problem Solving Strategies, Springer, New York, 1999.

[21] L.C. LARSON.: Problem Solving Through Problems, Springer, New York, 1987.

[22] Donald J. NEWMAN.: A Problem Seminar, Springer, New York, 1996.

[23] R. BIX.: Topics in Geometry, Academic Press, New York, 1993.

Sistemas de ecuaciones lineales sobre anillos de Prüfer

Tomás Sánchez Giralda

Departamento de Álgebra y Geometría y Topología
Universidad de Valladolid
tsg@agt.uva.es

A la Memoria del Profesor Pedro Abellanas

Abstract:

The purpose of this paper is to survey some results in the problem of compatibility of systems of linear equations over Prüfer rings.

Todos los anillos considerados se suponen conmutativos y con uno. Así mismo, si *p* es un ideal primo de un anillo R, la localización de R respecto del ideal se denota por R_p. Un sistema finito de ecuaciones lineales sobre el anillo R se escribirá en forma simplificada por

$$(S): A\,\underline{x} = \underline{b},$$

donde $A = (a_{ij})$ es una matriz m x n de elementos del anillo R, $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots x_n)^t$ son las incógnitas y $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_m)^t$, $b_i \in R$. Cuando M sea un R-módulo y $b_i \in M$, $1 \leq i \leq m$, se dirá que (S) es un sistema sobre M.

Es bien conocido, que si R es un cuerpo la compatibilidad del sistema (S) sobre R (i.e. la existencia de al menos una solución para (S)) se puede expresar mediante la igualdad:

$$\text{Rango } (A) = \text{Rango } (A \,|\, \underline{b}),$$

donde $A \,|\, \underline{b}$ es la matriz ampliada del sistema (S). Si se consideran tipos particulares de anillos, como por ejemplo dominios de integridad, es posible utilizar el concepto de rango de una matriz como extensión natural del caso de cuerpos.

De hecho, la condición de ser R un cuerpo queda caracterizada porque para todo sistema sobre R, (S): A $\underline{x} = \underline{b}$ es compatible si y sólo si rango (A) = rango $(A \mid \underline{b})$.

Según lo anterior, resulta necesario refinar el concepto de rango para abordar, en general, la compatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales sobre anillos. Así, si $A = (a_{ij})$ es una matriz m x n de elementos de R, para cada entero i, $i \geq 0$ se define U_i (A) como el ideal de R generado por los i x i menores de la matriz A. Escribiremos por convenio U_o (A) = R y U_i (A) = (0) si es i > min (m,n). Los ideales U_i (A), así definidos, reciben el nombre de ideales determinantales de la matriz y, concretamente, diremos que U_i (A) es el i-ésimo ideal determinantal de A.

<u>Nota</u>.- En [12] se pueden encontrar propiedades relacionadas con los ideales determinantales de una matriz, como por ejemplo su buen comportamiento por cambio de base, la relación de los ideales determinantales de una matriz y los correspondientes a los productos exteriores de dicha matriz, etc.

Si (S): A $\underline{x} = \underline{b}$ es un sistema de ecuaciones lineales (s.e.l. en lo que sigue) sobre un dominio de ideales principales, es un resultado clásico que la compatibilidad de (S) equivale a que se tengan las condiciones:

1) rango (A) = rango $(A \mid \underline{b})$ = p.

2) Un máximo común divisor de los menores de orden p de la matriz A es igual a un máximo común divisor de los menores de orden p de $(A \mid \underline{b})$.

Donde se considera el rango de la matriz A como el mayor entero r tal que el r -ésimo ideal determinantal de la matriz A es no nulo. La estructura de los dominios de ideales principales permite afirmar, a la vista de lo anterior, que en tales tipos de anillos la compatibilidad de un sistema (S) equivale a la condición siguiente:

$$(*) \qquad U_i\,(A) = U_i\,(A/\underline{b}). \qquad ,i \geq 0.$$

Así, una primera cuestión que se puede abordar se plantea en los términos siguientes:

<u>Problema 1</u>.- ¿Cuál es la clase de anillos para los cuales la compatibilidad de un s.e.l. es equivalente a la condición (∗)?

En orden a dar una respuesta a la cuestión planteada es necesario resaltar algunos hechos. En primer lugar, hagamos notar que la compatibilidad o no de un s.e.l. es un problema local. Concretamente, para todo ideal primo p de un anillo R y asociado a un s.e.l. (S): A $\underline{x} = \underline{b}$ sobre R se considera

$$(S_p): A_p \underline{x} = \underline{b}_p$$

(donde $A_p = (a_{ij}/1)$, $\underline{b}_p = (b_1/1, ..., b_m/1)^t$, entonces se prueba que son condiciones equivalentes (c.f. [6]. Prop. 1).

i) (S) tiene solución en R
ii) (S_p) tiene solución en R_p, para todo ideal primo p de R.
iii) (S_m) tiene solución en R_m, para todo ideal maximal m de R

En segundo lugar y a partir de un s.e.l. (S): A $\underline{x} = \underline{b}$ sobre el anillo R, se puede considerar, siendo $U_r(A) \neq (0)$, $U_{r+1}(A) = (0)$, que es no nulo el determinante λ de la submatriz A' de A cuyos elementos vienen dados por las primeras r filas y columnas de A. Así, se puede considerar el subsistema (S'): A' $\underline{x} = \underline{b}$' de (S) donde es ahora $\underline{b}' = (b_1, b_2, ..., b_r)$. Entonces, a partir de (S') y multiplicando a la izquierda por la matriz de cofactores de A' se obtienen igualdades de la forma:

$$\lambda X_i + \sum \alpha_{ti} X_{r+t} = \beta_i \qquad 1 \leq i \leq r,$$

donde $\alpha_{ti} \in U_r(A)$, $\beta_i \in U_r(A|\underline{b})$. En estas condiciones, si es λ un no divisor de cero en R y además $\lambda R = U_r(A) = U_r(A|\underline{b})$, de las expresiones anteriores se concluirá que (S') tiene solución en R y, además, se prueba que también (S) tiene solución en el R.

En conclusión, suponiendo que R es local y que para el sistema (S) se verifican las condiciones:

1.- $U_i(A) = U_i(A|\underline{b})$, $i \geq 0$.
2.- $U_i(A) = (0)$ ó $U_i(A)$ está generado por un no divisor de cero,

entonces (S) es un sistema compatible.

En base a lo anterior, resulta que para un s. e. l. (S): A $\underline{x} = \underline{b}$ sobre un anillo R, tal que los ideales determinantales de la matriz del sistema coincidan con los ideales determinantales de la matriz ampliada, la estructura de estos ideales da condiciones suficientes para la existencia de soluciones del sistema. En este sentido, se tiene el siguiente:

Teorema.- (cf. [6]) Sea (S): A $\underline{x}$ = $\underline{b}$ un s.e.l. sobre el anillo R. Entonces, el sistema (S) posee solución en R si se cumplen las condiciones siguientes:

i) $U_i(A) = U_i(A \mid \underline{b})$, $i \geq 0$.
ii) $U_i(A)$ es ideal plano de R , $i \geq 0$.

Nota.- El resultado anterior y el hecho de que en ciertos anillos como los absolutamente planos, o los de Bezout, la condición (ii) del enunciado del Teorema es siempre cierta, permiten afirmar que la compatibilidad de un s.e.l. (S): A $\underline{x}$ = $\underline{b}$ sobre tales anillos es equivalente a la igualdad de los ideales determinantales de A y $A \mid \underline{b}$.

Definición.- Un anillo R se llama de Prüfer si todo ideal finitamente generado es plano.

Un hecho a resaltar, es que no sólo en un anillo de Prüfer la compatibilidad de un s.e.l. está asegurada con la igualdad de los ideales determinantales de la matriz del sistema y los de la matriz ampliada sino que, de hecho, tales anillos permiten dar solución al Problema planteado. Más concretamente, se verifica el siguiente:

Teorema.-(c.f. [6]) Sea R un anillo conmutativo y con unidad. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

i) R es un anillo de Prüfer
ii) Un s.e.l. (S): A $\underline{x}$ = $\underline{b}$ sobre R tiene solución en R si y sólo si

$$U_i(A) = U_i(A \mid \underline{b}) \qquad i \geq 0.$$

Nota.- En el caso particular que R sea un dominio de Prüfer, el teorema anterior se encuentra en [3]. Las técnicas utilizadas son sensiblemente diferentes de las utilizadas en [6]. Por otra parte, en [5] se incluyen caracterizaciones de los anillos de Prüfer. Así, por ejemplo, siendo tales anillos globalización de los dominios de valoración o equivalentemente de los anillos con dimensión de torsión menor o igual a uno, se prueba que siendo R un anillo de Prüfer se verifican las afirmaciones siguientes (cf. [5] Prop. 1.6):

i) Para toda parte multiplicativamente cerrada S de R, S^{-1} R es de Prüfer.

ii) Si R es producto de los anillos R_i, $1 \leq i \leq h$, cada R_i es de Prüfer y todo producto finito de anillos de Prüfer es de Prüfer.

iii) Si a es un ideal de R, entonces $R/\sqrt{a}$ es un anillo de Prüfer.

Así, el anillo de los enteros Z es de Prüfer y también lo es Z / nZ, siendo n un entero libre de cuadrados. Asimismo, si se considera N con la topología discreta y βN es la compactificación de Stone-Cech de N, se puede considerar el anillo C(X) de las aplicaciones continuas de X = βN \ N en el cuerpo real. Este anillo es de Prüfer y no es semi-hereditario (cf. [2], Ex. 2.2)

Resuelta la cuestión antes planteada de existencia de soluciones para un s.e.l. (S): A $\underline{x}$ = $\underline{b}$, a partir de una tal solución, si existe, las restantes soluciones se pueden fijar por el estudio del s.e.l. homogéneo (S_h): A $\underline{x}$ = $\underline{0}$ asociado a S. De hecho, un resultado relativo a sistemas homogéneos sobre un R-módulo M y debido a McCoy (cf. [11]) es el siguiente:

Teorema.- Sea R un anillo y M un R-módulo. Si se considera (S): A $\underline{x}$ = $\underline{0}$, donde A = (a_{ij}) es una matriz m x n de elementos de R y $\underline{0}$ es el vector nulo. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

i) El sistema (S) sólo posee en M la solución nula (i.e. $X_i = 0$, $1 \leq i \leq n$).

ii) No existe ningún elemento no nulo de M que anule a los menores de orden n de la matriz A.

Nota.- Si se considera un s.e.l. homogéneo (S): A $\underline{x}$ = $\underline{0}$ sobre el R-módulo M, entonces se tiene asociado a (S) la transformación R lineal Φ de M^n en M^m definida por la matriz A de (S). Entonces, si Φ_A es la transformación de R^n en R^m asociada a A es $\Phi = \Phi_A \otimes 1_M$. En estas condiciones el resultado de McCoy asegura que la inyectividad de Φ es equivalente a la inyectividad de la transformación $(\Lambda^n\Phi_A) \otimes 1_M$, y en particular es $n \leq m$. Por otra parte, a partir de la matriz A y del R-módulo M se puede considerar el rango reducido de A relativo a M, $rg.red_R(A,M)$, como el máximo de los enteros ν tales que es

$$0:_M U_\nu(A) = 0$$

donde $0:_M I = \{ m \in M \ / \ m I = 0\}$, para I ideal de R. Así, la condición ii) del teorema de McCoy puede escribirse por la igualdad rg.red $_R$(A,M) = n.

Si se quieren discutir cuestiones relativas a la compatibilidad de un s.e.l. sobre un R-módulo M desde la óptica de los ideales determinantales es imprescindible introducir qué se entienden como tales en este caso. Así, si (S): $A\ \underline{x} = \underline{m}$ es un tal sistema donde ahora es $A = (a_{ij})$ una matriz (n x m) de elementos de R y $\underline{m} = (m_1, m_2 ...., m_n)$ es un vector con $m_i \in M$, $1 \leq i \leq n$, se puede considerar en R x M la estructura natural aditiva y el producto dado por (r, m) (r', m') = (r r', r m' + r' m). Así, R x M adquiere estructura de anillo conmutativo y con uno. Si $C = (a_{ij} \mid \underline{m})$ es una matriz h x h, donde $a_{ij} \in R$, $1 \leq i \leq h$, $1 \leq j \leq h\text{-}1$ y $\underline{m} = (m_1, m_2, ..., m_h)$, se define el determinante de C, det(C), como el elemento de M obtenido como determinante de la matriz de elementos de R x M obtenida de forma natural de la matriz de partida C. El ν -ésimo submódulo determinantal de M asociado al s.e.l. (S): $A\ \underline{x} = \underline{m}$, que se denota por $U_\nu{}^*(A \mid \underline{m})$ para $0 \leq \nu \leq \min(n, m)$, al submódulo generado por los determinantes de las submatrices de $A \mid \underline{m}$ de orden $\nu x \nu$ y en las que aparecen, parcialmente, la columna $\underline{m}$

Así, al sistema (S) sobre el R-módulo M se le pueden asociar para cada entero ν comprendido entre 0 y el mínimo de n y m los submódulos $U_\nu(A).M$ y $U_\nu{}^*(A \mid \underline{m})$, donde si es $\nu > \min(n,m)$ se define $U_\nu{}^*(A \mid \underline{m}) = M$. Si es M = R se tiene $U_\nu(A \mid \underline{b}) = U_\nu(A) + U_\nu{}^*(A \mid \underline{b})$, de donde la condición $U_\nu(A) = U_\nu(A \mid \underline{b})$ es equivalente a $U_\nu{}^*(A \mid \underline{b}) \subseteq U_\nu(A)$, $\nu \geq 0$.

Las consideraciones anteriores hacen natural plantear el siguiente:

<u>Problema 2.</u>- Siendo (S): $A\ \underline{x} = \underline{m}$ un s.e.l. sobre el R-módulo M. ¿Es posible dar condiciones sobre R que permitan fijar la compatibilidad de (S) en función de los submódulos $U_\nu(A)$ M y $U_\nu{}^*(A \mid \underline{m})$?

En condiciones generales se puede asegurar que si (S) es compatible entonces se tiene el contenido

$$U_\nu{}^*(A \mid \underline{m}) \subseteq U_\nu(A)\ M.$$

sin que se pueda afirmar que tal relación de contenidos implica la compatibilidad de (S). Si R es un dominio de integridad, se demuestran en [7] los resultados siguientes:

Teorema.- Sea R un dominio de integridad. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

i) R es un dominio de Prüfer

ii) Para todo R-módulo M libre de torsión y para todo s.e.l. (S): A $\underline{x} = \underline{m}$ sobre M, el sistema (S) tiene solución en M si y sólo si $\mathcal{U}_\nu{}^*(A \mid \underline{m}) \subseteq \mathcal{U}_\nu(A)\, M$. $\nu \geq 0$

Teorema.- Sea R un dominio de integridad. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:

i) R es un dominio de Prüfer.

ii) Para todo ideal finitamente generado a de R y para todo s.e.l. (S): A $\underline{x} = \underline{b}$ sobre M = R/a el sistema tiene solución en M si y sólo si

$$\mathcal{U}\nu^*(A \mid \underline{b}) \subseteq a^{\nu} + a^{\nu-1}\, \mathcal{U}_1(A) + \ldots + \mathcal{U}_\nu(A)\ ,\ \nu \geq 0.$$

Nota.- Los dominios de Prüfer han sido caracterizados por I. Kaplansky en [13] como aquellos dominios de integridad para los cuales todo R-módulo de tipo finito M se escinde (i.e. el submódulo de torsión de todo R-módulo de tipo finito M es un sumando directo de M). Posteriormente, R.B. Warfield en [15] caracteriza a tales dominios como aquellos para los que todo módulo de presentación finita es factor directo de una suma directa finita de módulos cíclicos. En [7] se demuestra de forma constructiva cómo siendo M un módulo de presentación finita sobre un dominio prüferiano R, y si F_i (M), i $\geq$0 son los ideales de Fitting de M (c.f.[4]), entonces M es factor directo de una suma directa finita de M* consigo mismo, siendo:

$$M^* = R^t \oplus (\oplus_{i \geq t}\ R/(F_i(M) : F_{i+1}(M)),$$

donde se supone F_{t-1} (M) = (0). La construcción de un tal M* viene aconsejada porque para todo dominio de valoración V y todo módulo de presentación finita y de torsión N, salvo isomorfismo, se puede escribir N como una suma directa de V-módulos cíclicamente presentados. Así, si t es el rango de la parte libre de M, resulta que los R-módulos M y M* son localmente isomorfos, lo cual permite fijar M como factor directo de una suma directa de copias de M*. Si es R un dominio de Dedekind, entonces globalmente M es de la forma M = M' ⊕ t M donde M' es libre de torsión y donde t M es la torsión de M e isomorfo a la suma directa de los residuos de R por el cociente de ideales de Fitting consecutivos.

En estas condiciones, los resultados de los teoremas anteriores caracterizando a los dominios de Prüfer R en función de los s.e.l. sobre R-módulos cíclicos, así como la estructura antes indicada de los R-módulos de presentación finita, permiten fijar condiciones necesarias y suficientes para la compatibilidad de un s.e.l. sobre un tal R- módulo de presentación finita en términos de los submódulos determinantales de la matriz del sistema y de la matriz ampliada del sistema.

Nota.- D.W. Sharpe en [13] prueba que si se tiene la igualdad a n del rango de la matriz del sistema como de la matriz ampliada y el grado verdadero del ideal determinantal de orden máximo de la matriz del sistema es mayor o igual a dos, entonces tal s.e.l. tiene solución, necesariamente única. Este resultado, cuando el número de ecuaciones es mayor o igual al de incógnitas, es particularización del obtenido por J.A. Hermida-Alonso en [8] en condiciones generales. Este autor en [9] realiza un tratamiento de la compatibilidad de s.e.l. sobre anillos conmutativos utilizando, de forma sistemática, la teoría de resoluciones libres finitas.

Bibliografía

[1] N. BOURBAKI, "Elements of Mathematics. Commutative Algebra".Hermann. Addison-Wesley. Reading, Mass, 1972.

[2] N. BOURBAKI, "Algèbre homologique". Masson. Paris, 1980.

[3] P. CAMION, L.S. LEVY and H.B. MANN, Linear equations over commutative rings. *J. Algebra* **19** (1972), 423-446.

[4] H. FITTING, Die determinantenideale Moduln, *Jahresber. Deutsch. Math-Verein* **46** (1936), 195-228.

[5] J.A. HERMIDA-ALONSO and T. SÁNCHEZ-GIRALDA, Sur les anneaux de Prüfer. Travaux en Cours **22**. Hermann. Paris (1986), 117-123.

[6] J.A. HERMIDA-ALONSO and T. SÁNCHEZ-GIRALDA, Linear equations over commutative rings and determinantal ideals. *J. Algebra.* **99** (1986), 72-79.

[7] J.A. HERMIDA-ALONSO and T. SÁNCHEZ-GIRALDA, Some criteria for solvability of system of linear equations over modules. Ring Theory. L.N.Math. **1328** Springer Verlag.(1988), 122-134.

[8] J.A. HERMIDA-ALONSO, Linear equations over commutative rings and grade theory. *J. Algebra*. **148** (1992), 497-503.

[9] J.A. HERMIDA-ALONSO, Linear equations over commutative rings and finite free resolutions. *J. Algebra*. **164** (1994), 452-467.

[10] I. KAPLANSKY, A characterization of Prüfer rings. *J. Indian Math. Soc*. **24**. (1960), 279-281.

[11] N.H. MCCOY, “Rings and ideals” Carus Math. Monog. **8**. Math. Assoc. Am. 1948.

[12] D.G. NORTHCOTT, “Finite free resolutions”. Cambridge University Press (1976).

[13] D.W. SHARPE, Grade and the theory of linear equations. *Linear Algebra and its Applications*, **19** (1977), 25-32.

[14] W.V. VASCONCELOS, Annihilators of modules with a finite free resolutions. *Proc. Amer. Math. Soc*, **29** (1971), 442-444.

[15] R.B. WARDFIELD, Descomposability of finitely presented modules. *Proc. Amer. Math. Soc.* **25** (1970), 167-172.

[16] O. ZARISKI and P. SAMUEL, “Commutative Algebra” vol. I, II, Van Nostrand Comp (1958, 1962).

Aviso de Congresos

FIFTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON TECHNOLOGY IN MATEMATICS TEACHING (ICTMT5)

Se celebrará en Klagenfurt, Austria del 6 al 10 de Agosto de 2001.

Las conferencias ICTMT se iniciaron en 1993 en Birmingham (Gran Bretaña), teniendo lugar las siguientes en: Edinburgo (Gran Bretaña), 1995; Koblenz (Alemania), 1997 y Plymouth (Gran Bretaña), 1999. Son análogas a las que se llevan celebrando en USA desde hace ya bastantes años, siendo allí anuales. Desde hace pocos años también se están celebrando este tipo de conferencias en Asia.

El profesor Eugenio Roanes Lozano, miembro de nuestra Sociedad, impartirá en dicho congreso la conferencia plenaria titulada: *Co-operation Between Dynamic Geometry Systems and Computer Algebra Systems (Investigating, Guessing, Checking and Proving with the computer).*

Otro miembro de nuestra sociedad, el profesor José Ramón Vizmanos, forma parte del Comité Científico Internacional.

La fecha límite para presentar comunicaciones es el 31 de Enero de 2001 y la fecha límite para registrarse es el 30 de Junio de 2001.

Para todos aquellos que estén interesados, pueden visitar la página web, donde pueden realizar la inscripción on-line:

http://www2.ifi.uni-klu.ac.at/ictmt5/a_info/

IX ENCUENTROS DE GEOMETRIA COMPUTACIONAL 9EGC

Universitat de Girona, 2-4 Julio 2001

9egc@iiia.udg.es

URL: http://iiia.udg.es/9egc

SEPTIMO ENCUENTRO DE ALGEBRA COMPUTACIONAL Y APLICACIONES EACA-2001

Ezcaray, La Rioja, 12-14 Septiembre 2001

eaca2001@unirioja.es

http://www.unirioja.es/dptos/dmc/eaca2001

DIDACTICA DE LA MATEMATICA COMO DISCIPLINA CIENTIFICA

Huesca, 30 marzo-1 abril 2001

http://www.ugr.es/local/jgodino/si-idm/boletin12.htm