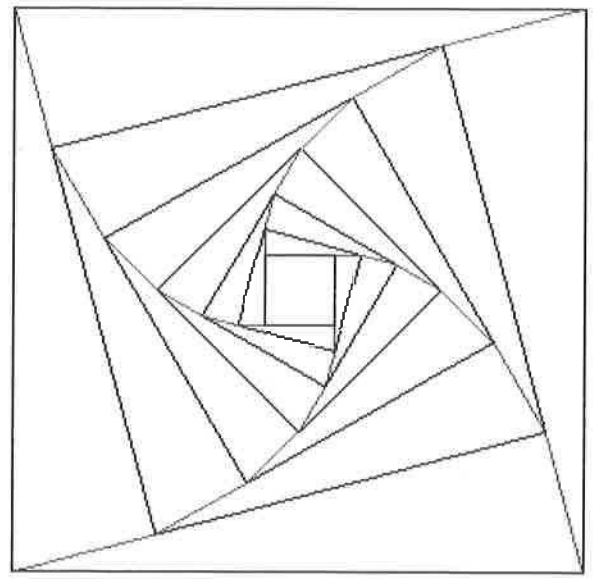
SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.° 56
OCTUBRE DE 2000

Número especial dedicado a conmemorar el Centenario
del Nacimiento de Puig Adam

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS
DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de los artículos aparecen en
Zentralblatt für Didaktik der Matematik

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis - 28917 Bº de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 - Fax: (91) 611 59 88

En la portada de este número aparece la figura que ha sido adoptada como *logotipo* de la Sociedad «Puig Adam». Se trata de la figura de portada de uno de los libros más emblemátcios de D. Pedro Puig Adam, el titulado «La matemática y su enseñanza actual», publicado en 1960 por el entonces Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

ÍNDICE

	Págs.
XVIII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas	5
Problemas propuestos en el XVIII Concurso	9
41 Olimpíada Internacional de Matemáticas	13
Participación española en anteriores Olimpíadas Internacionales	16
Año Mundial de las Matemáticas en la Universidad Politécnica de Madrid	17
Problemas propuestos en el Concurso de Problemas de la Universidad Politécnica de Madrid	19
Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik	22
II Simposio «Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1936»	23
Puig Adam, por *Julio Fernández Biarge*	27
La labor pedagógica de Puig Adam, por *Joaquín Hernández Gómez*	35
Sobre los maestros de Pedro Puig Adam, por *Javier Peralta*	41
Apología de la inutilidad, por *D Pedro Puig Adam*	55
Algunas consideraciones en torno a la Automática de Torres Quevedo, por *Francisco González Redondo*	65
Resolución de algunos problemas modelados mediante sistemas de numeración , por *Juan A. Aledo y Juan C. Cortés*	72
Sobre las tareas principales del profesor en un proceso de enseñanza y aprendizaje en la E.S.O.: asertividad y capacidad matemática, por *Juan José Prieto Martínez*	80
Reseña de libros	91
Índice de soluciones publicadas	93
Instrucciones para el envío de originales	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción	96

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

José Javier Etayo Gordejuela

Vicepresidentes:

Eugenio Roanes Macías	(Madrid)
Juan Bosco Romero Márquez	(Castilla-León)
Vicente Mendiola-Muñoz Morales	(Castilla-La Mancha)

Vocales:

Julio Fernández Biarge	(Redacción de publicaciones)
José Vicente García Sestafe	(Relaciones Institucionales)
Eugenio Roanes Lozano	(Gestión de publicaciones)
Martín Garbayo Moreno	(Actividades y concursos)

Secretario:

Francisco González Redondo

Vicesecretario:

Miguel Ángel Gallardo Ortiz

Tesorero:

Alberto Aizpún López

Bibliotecario:

Joaquín Hernández Gómez

Adjunta a la presidencia:

María Gaspar Alonso-Vega

XVIII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

El XVIII Concurso de Resolución de Problemas, convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio de Doctores y Licenciados en Filosofía y Letras y en Ciencias, se celebró durante la mañana del sábado 17 de junio del corriente año 2000.

Las pruebas se desarrollaron en las aulas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense, y la entrega de premios y diplomas, esa misma tarde, en la Escuela Universitaria de Biblioteconomía y Documentación, sita en el edificio Pablo Montesino, calle de la Santísima Trinidad, 37, que fue amablemente cedido por la Dirección del Centro para este acto.

Se presentaron al Concurso 126 aspirantes, repitiendo así la participación del pasado año, tanto de Madrid como de otras regiones. Como establece la convocatoria, fueron distribuidos en tres niveles: el primero, para alumnos hasta de 3º de ESO, el segundo para los de 4º de ESO, y el tercero, para alumnos de 3º de BUP y 1º de Bachillerato.

En cada nivel se propusieron cuatro problemas, en dos tandas de hora y media, y cada problema se calificó de 0 a 10 puntos.

Alumnos realizando la prueba en la Fac. de Matemáticas de la Univ. Complutense

La entrega de premios y diplomas se celebró en un acto muy concurrido por participantes, padres y profesores. Nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de felicitación a todos los alumnos que habían participado, con especial mención a los ganadores, y también a sus profesores y a los Centros en los que estudian. Recordó la celebración durante este año 2000 del Año Internacional de las Matemáticas, y agradeció finalmente la colaboración mostrada a lo largo de tantas ediciones por las firmas y entidades que aportaron los premios entregados a los ganadores: Texas Instruments y Editorial Euler; así como a la Universidad Complutense y a sus Centros, que cedieron los locales necesarios para el Concurso.

Entrega de Premios en el edificio Pablo Montesino de la Univ. Complutense

Los alumnos premiados han sido los siguientes, clasificados por niveles:

NIVEL I

1º **Luis Hernández Corbato**, del I.E.S. Fortuny de Madrid.
2º **Javier Gómez Serrano**, del Colegio Alemán de Madrid.
3os **Carlos Ibáñez Bautista**, del Colegio Alemán de Madrid, y
Jaime Piqueras Domingo, del I.E.S. nº 1 de Requena.
5º **Esteban Pedro García Martínez**, del I.E.S. Antonio Machado de Alcalá de Henares.

NIVEL II

1º **David García Soriano**, del Colegio Chamberí de Madrid.
2º **Alberto Castilla Rufo**, del Colegio JOYFE de Madrid.
3º **Carlos Fullea Carrera**, del Colegio Menesiano de Madrid.
4as **Mónica Serrano Gómez**, del I.E.S. nº 1 de Requena, y
Sandra Falagán Martínez, del Colegio Amor de Dios de Madrid.

NIVEL III

1º **Fernando Cruz Robledillo**, del Colegio Sta. María del Pilar de Madrid.
2º **Pablo López Mesa**, del I.E.S. Santa María de Alarcos de Ciudad Real.
3º **Miguel Angel Adán Alonso**, del Colegio Santo Tomás de Ciudad Real.
4º **David García Stranz**, del Colegio Bérriz de Madrid.
5º **Antonio González Marsal**, del Colegio El Prado de Madrid.

Se comprueba en esta lista el éxito de alumnos de muy diversos Centros, muchos de los cuales tienen un largo historial de participación en nuestro Concurso, prueba de la eficaz labor de sus profesores, a los que felicitamos desde estas páginas. Como datos significativos señalaremos que Alberto Castilla y Miguel Angel Adán fueron ya premiados en el Concurso de 1999, en los niveles respectivamente anteriores, y que Carlos Ibáñez, que ha compartido el 3er. puesto del nivel I, es un alumno de 2º de ESO, lo que le augura una larga carrera en nuestros concursos.

Alumnos premiados ante la puerta del edificio Pablo Montesino

Problemas propuestos en el XVIII Concurso

PRIMER NIVEL

Problema 1^0

He comprado varias truchas. Después de comerme las tres mayores, el peso ha disminuido en un 35%. Una vez que mi gato se ha comido las tres mas pequeñas, el peso ha disminuido de nuevo en 5/13 de lo que quedaba. ¿Cuántas truchas compré?

Problema 2^0

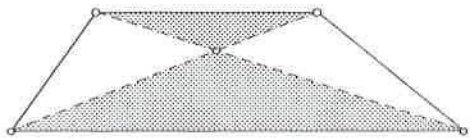
¿Hay alguna pareja de enteros positivos, n y m, tales que

$$n^2 - m^2 = 270$$

Justifica la respuesta.

Problema 3^0

Se acaba de publicar la convocatoria del Premio Planeta, que exige presentar los originales en más de 250 folios, escritos a máquina y numerados por una sola cara. Un autor va a presentar su obra en un número par de folios que tiene ya escritos. Para numerarlos toma la primera mitad, y su mujer le ayuda numerando los de la segunda mitad. Han tardado el mismo tiempo en numerarlos, aunque la mujer escribe las cifras a una velocidad que es el 125% de la de su marido. ¿Cuántos folios tiene la obra?



Problema 4^0

Las diagonales del trapecio de la figura precedente lo dividen en cuatro triángulos. Si las áreas de los triángulos sombreados son 18 y $32cm^2$, ¿cuál es el área del trapecio?

SEGUNDO NIVEL

Problema 1^0

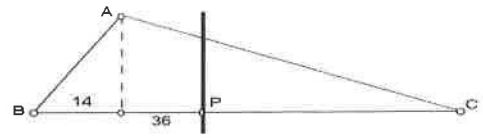
Cada uno de los números $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, con $n > 1$, puede tomar los valores 1 ó -1. Si

$$a_1a_2 + a_2a_3 + ... + a_{n-1}a_n + a_na_1 = 0,$$

demuestra que n es múltiplo de 4.

Problema 2^0

En el triángulo ABC de la figura siguiente, la altura que parte de A divide al lado opuesto, BC, en dos partes de longitudes 14 y 36. La recta que pasa por P y es perpendicular a BC, divide al triángulo en dos trozos de igual área. Calcula $\frac{BP}{PC}$.



Problema 3^0

Si $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ son términos consecutivos de una progresión aritmética de términos positivos, demostrar que

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

Problema 4^0

En el cuadrilátero $PQRS$ las diagonales PR y SQ son perpendiculares entre sí, y se cortan en el punto medio H de PR. Las medidas de los cuatro lados y de las diagonales son números enteros. Además las medidas de PH, SP y PQ son enteros consecutivos. Hallar el área del cuadrilátero.

TERCER NIVEL

Problema 1^0

1. Dos amigos, Antonio y Benito, viven en una misma calle. Habitualmente salen cada uno al encuentro del otro, a las 10 de la mañana, y se encuentran a las 10 y media, siendo la velocidad de Antonio un 25% superior a la de Benito. Un día Antonio se retrasó diez minutos en salir y para compensar aumentó su velocidad en un 20%. ¿A qué hora se encontraron ese día?

Problema 2^0

En el triángulo isósceles ABC, $AB = AC$, se verifica que $\frac{cosA}{cosB} = \frac{7}{15}$. Cálcula $\frac{senA}{senB}$

Problema 3^0

En el polinomio $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$, con A, B, C y D enteros no negativos menores que 10, demostrar que si $P(3)$ es múltiplo de 7, entonces el número cuyas cifras son $ABCD$ también es múltiplo de 7.

Problema 4^0

En el interior del cuadrado K, de lado L, se encuentra situado un segundo cuadrado, S, cuyos lados están inclinados N grados ($N < 45^0$) respecto de los lados del cuadrado de partida. Además cada lado del cuadrado S está contenido en una recta que pasa por un vértice del cuadrado K. Se pide:

a) Dibujar los cuadrados K y S, situándolos en la posición relativa indicada.

b) Razonar el cálculo del área del cuadrado S.

41 Olimpíada Internacional de Matemáticas

La Olimpíada Internacional de Matemáticas ha tenido lugar, el pasado mes de julio en la República de Corea. La ciudad sede ha sido Taejon, situada a unos 300 Km al norte de Seúl.

Los países participantes han sido 82, con 462 participantes; cifras que se mantienen más o menos estable desde 1998, cuando la Olimpíada se celebró en Argentina.

Como es habitual, cada problema se califica sobre 7 puntos. La siguiente tabla recoge las frecuencias de puntuaciones y la media de cada problema. (Los problemas propuestos aparecen en otro lugar de este mismo Boletín)

	P1	**P2**	**P3**	**P4**	**P5**	**P6**
0	118	50	335	85	257	335
1	11	213	60	78	82	5
2	44	41	29	62	16	51
3	37	13	13	49	12	15
4	22	6	6	28	14	11
5	4	18	2	29	1	9
6	5	12	1	49	11	2
7	220	108	15	81	68	33
MEDIA	4.1	2.8	0.7	3.2	1.6	1

Las puntuaciones de corte para las Medallas de Oro, Plata y Bronce estuvieron en los 30, 21 y 11 puntos respectivamente. Cuatro estudiantes (dos de China, un ruso y un bieloruso) obtuvieron 42 puntos.

En la inevitable y extraoficial clasificación por países, China obtuvo 218 puntos, y seis Medallas de Oro; excelente fue también el resultado de Rusia, con 215 puntos, cinco Medallas de Oro y una de Plata. Estados Unidos, en tercer lugar, sumó 184 puntos, con tres Oros y tres Platas.

Entre los estudiantes españoles, el mejor clasificado fue José María Cantarero López, de Ronda (Málaga), cuarto en nuestra Olimpíada Nacional, que obtuvo Mención de Honor, por sus 7 puntos en el problema 4. El equipo estaba formado además por Carlos Gómez Rodríguez, de Santiago de Compostela; Luis Emilio García Martínez, de Valencia; Alberto Suárez Real, de Salinas (Asturias); Manuel Pérez Molina, de Alicante, y Roberto Rubio Núñez, de Valencia.

El próximo año, la Olimpíada se celebrará en Washington, en la primera quincena de julio.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA 41 OLIMPÍADA

Problema 1

Dos circunferencias, Γ1 y Γ2, se cortan en M y N. Sea t la tangente común a Γ1 y Γ2 tal que M está más cerca de t que N. La recta t es tangente a Γ1 en A y a Γ2 en B. La recta paralela a t que pasa por M corta de nuevo a Γ1 en C y a Γ2 en D. Las rectas CA y DB se intersecan en E; las rectas AN y CD se intersecan en P; las rectas BN y CD se intersecan en Q. Demostrar que EP = EQ.

Problema 2

Sean a,b,c números reales positivos tales que $abc = 1$. Demostrar que

$$(a-1+\frac{1}{b})(b-1+\frac{1}{c})(c-1+\frac{1}{a}) \leq 1$$

Problema 3

Sea $n \geq 2$ un número entero positivo. Inicialmente hay n pulgas en una recta horizontal, y no todas están en el mismo punto. Para un número real positivo λ definimos un *salto* como sigue:

- Se eligen dos pulgas cualesquiera situadas en puntos A y B con A a la izquierda de B;
- Luego, la pulga situada en A salta hasta el punto C de la recta, ubicado a la derecha de B, tal que $\frac{BC}{AB} = \lambda$

Determinar todos los valores de λ tales que, para cualquier punto M de la recta y cualesquiera posiciones iniciales de las n pulgas, existe una sucesión finita de saltos que permite situar a todas las pulgas a la derecha de M.

Problema 4

Un mago tiene 100 tarjetas numeradas del 1 al 100. Las coloca en tres cajas, una roja, una blanca y una azul, de modo que cada caja contiene por lo menos una tarjeta.

Una persona del público selecciona dos de las tres cajas, elige una tarjeta de cada una, y anuncia a la audiencia la suma de los números de las dos tarjetas elegidas. Al conocer esta suma, el mago identifica la caja de la cual no se eligió ninguna tarjeta.

¿De cuántas maneras se pueden distribuir todas las tarjetas en las cajas de modo que este truco siempre funcione?

(Dos maneras de distribuir se consideran distintas, si al menos hay una tarjeta que es colocada en una caja diferente en cada distribución)

Problema 5

Determinar si existe un entero positivo n tal que

- Exactamente 2000 números primos diferentes dividen a n, y
- n divide a $2^n + 1$

Problema 6

Sean AH_1, BH_2 y CH_3 las alturas de un triángulo acutángulo ABC. La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos T_1, T_2 y T_3 respectivamente. Sea l_1 la recta simétrica a H_2H_3 con respecto a T_2T_3, l_2 la recta simétrica a H_3H_1 con respecto a T_3T_1, l_3 la recta simétrica a H_1H_2 con respecto a T_1T_2. Demostrar que l_1, l_2, l_3 determinan un triángulo cuyos vértices son puntos de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.

Participación Española en anteriores Olimpíadas Internacionales

La **XIII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas** se celebró en Santo Domingo en Septiembre de 1998, pero nuestro Boletín no recogió noticias del acontecimiento. Resumimos ahora los resultados de la participación de alumnos españoles en esa Olimpiada.

Los cuatro participantes obtuvieron medalla: de PLATA, **Ramón José Aliaga Varea** y **Mario Andrés Montes García;** de BRONCE, **Jaime Vinuesa del Río** y **María Pé Pereira.**

Tampoco recogió nuestro Boletín los resultados de la **XIV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas,** que tuvo lugar en La Habana en Septiembre de 1999. En ella participaron cuatro alumnos españoles y todos fueron galardonados con medallas: de PLATA, **Ramón José Aliaga Varea** (por segunda vez)**, Álvaro Navarro Tobar** y **Javier Múgica de la Rivera;** de BRONCE, **Nestor Sancho Bejarano.**

Las próximas sedes de Olimpiadas Iberoamericanas serán Venezuela (2000), El Salvador (2001) y Uruguay (2002). Es posible que se celebre en España en el año 2006.

La **40ª Olimpiada Internacional de Matemáticas**, de la que tampoco habíamos dado noticia en nuestro Boletín, se celebró en Bucarest (Rumanía) en Julio de 1999. En ella participaron 450 alumnos, seis de ellos españoles: **Ramón José Aliaga Varea, Javier Múgica de Rivera, Álvaro Navarro Tobar, Andrés Tallos Tanarro, Nestor Sancho Bejarano** y **Enrique Vallejo Gutiérrez.** De los 450 participantes, 38 tuvieron medalla de ORO, 70 de PLATA y 117 de BRONCE, entre ellos, **Ramón José Aliaga Varea**. Sólo 12 participantes obtuvieron MENCIÓN DE HONOR (por haber resuelto completamente bien algún problema, sin obtener medalla), y uno de ellos fue **Javier Múgica de Rivera.**

Año Mundial de las Matemáticas en la Universidad Politécnica de Madrid

Concurso de Resolución de Problemas (segundo trimestre). Concurso de fractales. Concurso de juegos de estrategia. "Recuerdos del cálculo mecánico".

El *Comité de la Universidad Politécnica de Madrid para el Año Mundial de las Matemáticas* ha promovido diversas actividades, uniéndose así a las organizadas por el *Comité Español (CEAMM2000)* para conmemorar el 2000, declarado Año Mundial de las Matemáticas por la UNESCO, a instancias de la *Unión Matemática Internacional (UMI).*

Una de ellas, como ya dijimos en el número 55 de este Boletín, es un ***Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas***, en el que pueden participar todos los alumnos matriculados en esa Universidad, en forma individual o formando equipos de dos o tres alumnos.

Como explicábamos, cada mes se proponen cuatro problemas cuyos enunciados aparecen en los tablones de anuncios y en la página *web* del Comité y los participantes envían sus soluciones al Comité, por el correo interno de la Universidad o por correo electrónico, durante el mes siguiente al de su publicación.

Acaba de reunirse el Jurado para determinar los ganadores del segundo trimestre (Abril a Junio), que recibirán los correspondientes diplomas y premios en metálico (un Primero de 100.000 pesetas y un Segundo de 50.000 y tres accésits), acompañados de algún obsequio de libros.

Los enunciados de los problemas propuestos en el segundo trimestre pueden verse en otra sección de este mismo Boletín. Las bases de este concurso, los enunciados y las soluciones seleccionadas entre las presentadas por los concursantes, pueden ser consultadas en la página *web* del Comité:

www.fi.upm.es/~upmamm

El Primer Premio correspondió a **Álvaro Navarro Tobar** (de la E.T.S.I. de Telecomunicación), que fue finalista en el primer trimestre. Como ya dijimos, este alumno fue premiado en cada uno de los niveles de los Concursos de nuestra Sociedad desde 1996 y en la fase primera de la Olimpiada Matemática Española en 1998 y en 1999 y obtuvo medalla de oro en la fase final de 1999. Participó en

las Olimpiadas Internacional e Ibero Americana y consiguió medalla de plata en esta última.

El Segundo Premio se concedió a **Javier López García** (de la E.T.S.I. de Telecomunicación) que también mereció el segundo premio en el trimestre anterior.

El primer accesit ha sido para **Javier Mugica de la Rivera** (de la E.U.I.T. Topográfica), que obtuvo medalla de oro en la Olimpiada Matemática Española de 1999, una Mención de Honor en la O. Internacional de Matemáticas celebrada en Budapest y medalla de oro en la Ibero Americana, ambas ese mismo año. El segundo accesit, para **Borja Ibarz Gabardós** y el tercero para **Andrés Tallos Tanarro** (ambos de la E.T.S.I. de Telecomunicación). Este último también obtuvo medalla de oro en la O. M. Española de 1999.

Han resultado finalistas el equipo formado por **Jerónimo Arenas García** y **Francisco J. Martínez Borreguero**, el formado por **Manuel Pardo Martín** y **Francisco de Asís de Ribera Martín, Antonio Pereira Rama, Victor López Hernández** y **Sergio Nogales Tenorio.**

El acto de entrega de diplomas y premios tuvo lugar en la Facultad de Informática en la tarde del día 3 de Octubre. En el mismo acto se resolvió el **concurso sobre fractales** y el de **juegos de estrategia**, cuya descripción se puede encontrar en la mencionada página *web*.

Otra de las actividades organizadas con motivo del *Año Mundial de las Matemáticas* ha sido la exposición de máquinas de calcular antiguas **"Recuerdos del cálculo mecánico"**, que permanecerá abierta al público en el *Centro Cultural "Puerta de Toledo"* (Gran Vía de San Francisco, 2), hasta el 27 de Octubre, de lunes a viernes, de 11 a 14 y de 17 a 20.

J. F. B.

Problemas propuestos

en el ***Concurso de Problemas*** *de la*
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
con motivo del 2000, Año Internacional de las Matemáticas

SEGUNDO TRIMESTRE

Abril, 1º:

Un pastelero decide repartir una tarta entre sus dos hijos de la siguiente manera:

* Ninguna de las partes es vacía.
* La parte del hermano menor es igual a la unión de infinitos trozos obtenidos de la siguiente manera; se divide la tarta en 8 trozos iguales y se toman k, se divide a su vez uno de los trozos restantes en 8 trozos iguales y se vuelven a tomar k, y así sucesivamente, infinitas veces.
* La parte del hermano mayor es un número racional periódico puro cuyo periodo es múltiplo de 5.

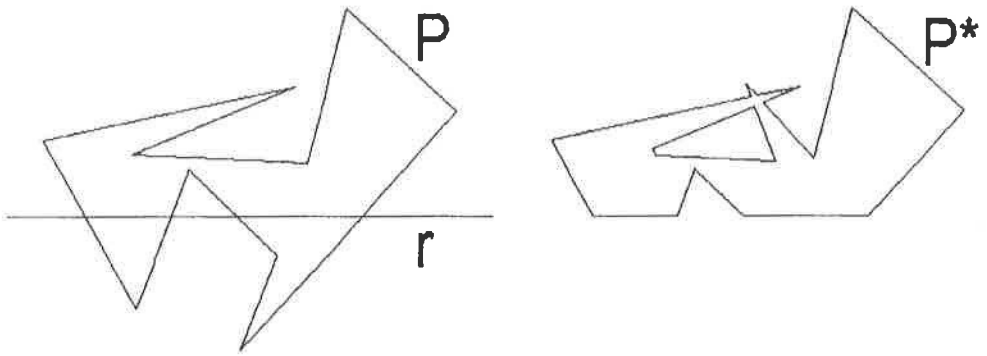
Calcula la parte que le corresponde a cada uno de los hermanos.

Abril, 2º:

Carlos y Luis se turnan para elegir un número del conjunto {1,2,3,4,...,19,20} y ponerle un signo (+ o -) a su elección. Una vez que han colocado un signo a cada número, Carlos paga a Luis una cantidad de euros igual al valor absoluto de la suma de los veinte números con sus signos. Sabiendo que empieza Carlos, encontrar la mejor estrategia para cada jugador. Cual será la ganancia de Luis si ambos jugadores siguen la mejor estrategia ?

Abril, 3º:

Demostrar que si se dobla un polígono P por una línea recta r que lo atraviesa (r tiene puntos en el interior de P), el perímetro del polígono resultante P* es menor que el de P (véase figura a continuación).



Abril, 4º:

Hallar todas las funciones f: **R**-{0,1} → **R** que cumplen la relación f(x)+f(1/(1-x))=x.

Mayo, 1º:

Dos mil turistas japoneses van provistos de cámaras fotográficas. En lo que llamaremos una *sesión fotográfica*, se reparten en dos grupos, que se sitúan uno en cada orilla de un canal, y cada turista saca una fotografía de grupo a todos los que están situados en la otra orilla. Probar que, si las distribuciones en dos grupos de hacen convenientemente, son suficientes 11 sesiones fotográficas para que cada uno de los turistas tenga imágenes de todos los restantes (por supuesto que muy repetidas).

Mayo, 2º:

Dados 6 puntos en el interior de un rectángulo con lados 3 y 4, demostrar que al menos dos de ellos están situados a distancia menor o igual a $\sqrt{5}$

Mayo, 3º:

En la isla de Camelot viven 12 camaleones rojos, 15 verdes y 17 amarillos. Cuando dos de distinto color se encuentran, cambian simultáneamente al tercer color. ¿Podría darse la situación en la que todos tengan el mismo color? ¿Y si el número inicial de camaleones rojos fuese 13?

Mayo, 4º:

Sean $a_1,a_2,\ldots,a_n$ números reales positivos. Probar que

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}\geq n.$$

Junio, 1º:

En una fila se colocan 12 cartas que pueden tener las dos caras blancas, las dos caras negras o una blanca y otra negra. Inicialmente hay k con la cara negra hacia arriba.

1) Se vuelven las seis primeras cartas y quedan k con la cara negra hacia arriba.
2) A continuación se vuelven las seis cartas centrales y quedan k con la cara negra hacia arriba.
3) Finalmente se vuelven las tres primeras y las tres últimas cartas y quedan k con la cara negra hacia arriba.

Calcular todos los valores que puede tener k. Para cada uno de los posibles valores de k, estudiar si es posible conocer el número de cartas de cada clase.

Junio, 2º:

Dados cinco puntos p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 del plano con coordenadas enteras, probar que existe al menos un par (p_i,p_j) con $i\neq j$ tal que el segmento p_ip_j contiene un punto de coordenadas enteras distinto de p_i y p_j. Nota: usar el principio del palomar.

Junio, 3º:

Un agricultor quiere comprar una finca en forma de cuadrilátero cuyos lados miden 1, 4, 7 y 8 Hm (las longitudes no están dadas en orden). Si el precio en pesetas es dos millones por Hm^2, ¿cuál es el máximo valor de la finca?

Junio, 4º:

Probar que existe una sucesión infinita de enteros positivos tal que el primer término es 16, el número de divisores positivos de cada término es múltiplo de 5 y los términos forman una sucesión aritmética. De todas las que existen, hallar la de diferencia mínima.

Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

La prestigiosa revista Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Como en números anteriores de nuestro Boletín, nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS VOL. 32 (2) DE 2000

#0921 (sección D30). Compass Avoidance, por *Tomás Recio*, Bol. Soc. Puig Adam 53 (Oct 1999), págs. 59-66.

#1184 (sección G40). Búsqueda automática de lugares geométricos, *por Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano*, Bol. Soc. Puig Adam 53 (Oct 1999), págs. 67-77.

#1185 (sección G40). Sobre demostración automática de un teorema geométrico, por *Francisco Javier Blanco Silva*, Bol. Soc. Puig Adam 53 (Oct 1999), págs. 78-81.

#1252 (sección H64). Cambios curriculares en la enseñanza del Algebra, *por M. Dolores Rodríguez Soalleiro*, Bol. Soc. Puig Adam 53 (Oct 1999), págs. 32-48.

#1295 (sección I44). Diferentes opciones para la resolución de problemas con calculadoras gráficas, por *Agustín Carrillo de Albornoz Torres*, Bol. Soc. Puig Adam 53 (Oct 1999), págs. 49-58.

#1299 (sección I64). Modificaciones curriculares posibilitadas por las nuevas tecnologías: aparición de contenidos, por *Justo Cabezas Corchero y Eugenio Roanes Lozano*, Bol. Soc. Puig Adam 53 (Oct 1999), págs. 20-31.

II Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1936: Cabrera, Cajal y Torres Quevedo"

Curso de Historia de la Ciencia y de la Técnica

La *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* y la *Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas* han auspiciado la celebración del II Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1936: Cabrera, Cajal y Torres Quevedo" —concebido, también, como Curso de Historia de la Ciencia y de la Técnica, abierto a alumnos de postgrado—, que tuvo lugar en la Casa de Cultura "Benito Pérez Armas" de Yaiza (Lanzarote), durante los días 1, 2 y 3 de agosto de 2000, en el marco de los

V CURSOS UNIVERSITARIOS DE VERANO EN CANARIAS
LANZAROTE 2000

organizados por el *Centro Científico-cultural Blas Cabrera*, institución del Cabildo de Lanzarote que promovió, dirige y organiza sus actividades la asociación cultural *Amigos de la Cultura Científica*.

Este Simposio, ahora en su segunda edición, se divide en tres sesiones, dedicadas cada una de ellas a las tres personalidades que le dan nombre, con subtítulos correspondientes a los ámbitos disciplinares en los que destacaron:

Sesión 1. "Blas Cabrera Felipe: Física, Química, Matemática".
Sesión 2. "Leonardo Torres Quevedo: Ingeniería".
Sesión 3. "Santiago Ramón y Cajal: Ciencias de las Vida".

Por la naturaleza de los contenidos congresuales la presencia de la *Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas* parecía no sólo oportuna sino altamente conveniente. Esta sociedad, además de integrarse institucionalmente auspiciando el Simposio, aportó la presencia personal de su Presidente, el Profesor de la Universidad de La Rioja, D. Luis Español González, y, a título individual, la asistencia de numerosos miembros.

Esta edición de 2000, que como ha sido repetido con insistencia fue declarado por la UNESCO "Año mundial de las Matemáticas", invitaba a prestar una atención especial a estas ciencias en el seno de la Sesión 1, dedicada a Blas Cabrera y su entorno científico: Física, Química y Matemática. Sin embargo, el año

2000, en el caso particular español, es el del Centenario del nacimiento del matemático barcelonés D. Pedro Puig Adam, fruto científico indudable de ese primer tercio del siglo XX considerado por muchos pensadores como la Edad de Plata de la Cultura española.

En este sentido, también parecía especialmente oportuna la presencia institucional de la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* en este encuentro. La representación de la Sociedad correspondió a D. Julio Fernández Biarge, Profesor Emérito de la Universidad Politécnica de Madrid, discípulo y compañero —ambos como Catedráticos de Matemáticas— en el Instituto San Isidro de Madrid. Complementariamente puede apuntarse que diferentes socios asistieron al Simposio a título personal.

La índole de las ocupaciones de Puig Adam desde la elaboración de su Tesis doctoral sobre Relatividad en el Laboratorio-Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas —dirigido por Rey Pastor— hasta su fallecimiento en 1960, le permitió encontrarse en los años 50 con otra de las personalidades que dan nombre al Simposio, Leonardo Torres Quevedo. Efectivamente, tanto en el discurso de ingreso de D. Pedro en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, como en los actos conmemorativos del Centenario del nacimiento de D. Leonardo de 1952 y 1953, Puig Adam jugó un papel de especial relevancia en el estudio, valoración, reconocimiento y difusión de la labor pionera de Torres Quevedo en los ámbitos de la Automática, Informática e Inteligencia Artificial.

Este año del Centenario de Puig Adam invitaba, por tanto, a prestar atención a las relaciones entre ambas personalidades en la Sesión 2, dedicada a Torres Quevedo y la Ingeniería de su tiempo, y a recordarlos a ambos en la Sesión 3 sobre las Ciencias de la Vida, a la que da nombre Santiago Ramón y Cajal, en el contexto de las investigaciones sobre los diferentes conceptos de inteligencia, natural y artificial.

El encuentro institucional congresual de la *Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas* y la *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas* con la asociación *Amigos de la Cultura Científica* puede considerarse continuación de la colaboración que tuvo lugar en abril de 1995 con motivo de la celebración en Pozuelo de Alarcón (Madrid) del III Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra", en el que también se integraron el *Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional*, la *Sociedad de Lógica, Metodología y Filosofía de la Ciencia en España* y el *Museo del Aire*.

De la amplia relación de trabajos presentados este verano en Lanzarote pueden destacarse, por sus contenidos más próximos a los temas propios de nuestra Sociedad, los siguientes:

Conferencias públicas

Retos y progresos de la Física Matemática española de principios de siglo. De Hilbert a Cabrera, por el Excmo. Sr. D. J. Ildefonso Díaz Díaz (Catedrático de Matemática Aplicada. UCM. Académico Numerario de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid)

Automática e Informática en la obra de Torres Quevedo, por el Ilmo. Sr. D. Antonio Vaquero Sánchez (Catedrático de Sistemas Informáticos. UCM. Presidente de la Sociedad de Informática Educativa)

Presencia actual de Torres Quevedo en la Ciencia y en la Historia de la Ciencia españolas, por el Excmo. Sr. D. Francisco González de Posada (Catedrático de Física Aplicada. UPM. Académico Numerario de la Real Academia Nacional de Medicina)

Ponencias invitadas

El punto de vista de Julio Rey Pastor sobre la ciencia de su tiempo, por Luis Español González (Depto. Matemáticas y Computación. U. Rioja)

Interpretaciones heurísticas en la obra de Rey Pastor, por Alfonso Hernando González (Depto. Matemáticas y Computación. U. Burgos)

La obra científica de Pedro Puig Adam. Homenaje en su Centenario, por Julio Fernández Biarge (E.T.S. Ingenieros Navales. UPM)

Torres Quevedo, Puig Adam y los comienzos de la Cibernética, por Alfonso Hernando González (Depto. Matemáticas y Computación. U. Burgos)

Matemáticas e Ingeniería Agronómica: Mariano Fernández Cortés, por Elena Sánchez Oreja (Depto. Matemática Aplicada a la Ingeniería Agronómica. UPM)

Francisco A. González Redondo
Coordinador del II Simposio
Secretario de la Soc. "Puig Adam"

Puig Adam

por Julio Fernández Biarge

Cuando se intenta hacer un resumen histórico de la investigación científica en España durante la primera mitad del siglo XX, sorprende sobre todo el exiguo número de personas que llevaron sobre sus hombros la labor de alzar esa investigación a niveles con reconocimiento internacional, a partir prácticamente de la nada. Entre ellas encontramos figuras como las de **Blas Cabrera**, **Leonardo Torres Quevedo** y **Santiago Ramón y Cajal**, sobre las que se ha celebrado un *Simposio* el pasado Agosto en la isla de Lanzarote, dentro de los *Cursos Universitarios de Verano en Canarias.*

En ese Simposio participó nuestra *Sociedad de Profesores de Matemáticas,* presentando una ponencia sobre la figura de don **Pedro Puig Adam**, que le da nombre. Nació éste en Barcelona, el 12 de Mayo de 1900, por lo que ahora conmemoramos su centenario. La *Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, a la que perteneció desde 1950, organizó un *Acto Conmemorativo* de este evento, conjuntamente con nuestra *Sociedad* y la *E.T.S. de Ingenieros Industriales* de Madrid, el pasado 7 de Junio de 2000.

Don **Pedro** era, por tanto, 22 años más joven que **Cabrera**, y tanto **Torres Quevedo** como **Cajal** le aventajaban en casi medio siglo de edad. Es indudable la influencia que estos maestros ejercieron sobre él, sobre todo los dos primeros. Junto con **Rey Pastor**, abrió, en el campo de las Matemáticas, nuevas sendas semejantes a las abiertas por los anteriores en otros campos científicos.

Precisamente su tesis doctoral de versó sobre *"Resolución de algunos problemas elementales de Mecánica Relativista Restringida"* y fue publicada en 1923, el mismo año en el que **Blas Cabrera** sacó a la luz su libro *"Principio de Relatividad"* y poco después de que **José María Plans** diera a conocer su *"Mecánica Relativista"*. En España, en aquellos tiempos, muy pocas personas eran capaces de comprender las teorías que **Einstein** había dado a conocer algunos años antes y menos aún de poder hacer aportaciones originales acerca de ellas. El papel de **Cabrera** como introductor de las últimas adquisiciones de las ciencias en España recogió así su fruto con seguidores de tanto relieve.

A partir de su tesis doctoral, nunca abandonó su labor investigadora en Matemáticas y de ello dan fe sus numerosas publicaciones a las que nos referiremos después. Pero no convirtió nunca en profesión su tarea de creación matemática. Esta actividad fue el espontáneo ejercicio de uno de sus impulsos vocacionales

que le llevaban a buscar la verdad y la belleza. Esta es la clave que nos permite entender bien las especiales características de sus trabajos de investigación, que llenarían de sorpresa a quien los estudiase sin haber conocido al autor. Sorprende, en efecto, ver la extraordinaria profundidad y originalidad de sus hallazgos, en contraste con la brevedad que caracteriza al desarrollo de sus consecuencias. Podríamos decir que, descubierto el filón y comprobada su riqueza, lo entregaba en seguida a su explotación por los demás. Sólo con sus ideas originales, un investigador minucioso hubiese tenido para toda una vida de trabajo.

La inclinación de don **Pedro** hacia la investigación aplicada a los problemas técnicos es una consecuencia directa de su manera de concebir las Matemáticas, del mismo modo que sus estudios de Ingeniería no fueron simple concesión a consideraciones de orden económico, sino una etapa esencial en su formación.

Una de las ideas más arraigadas en el pensamiento de **Puig Adam** es precisamente que las Matemáticas. aun siendo de naturaleza abstracta, no deben desligarse nunca del juego de abstracciones y concreciones que, por una parte, las originan, y por otra les dan aplicación, so pena de perder lo más importante de su valor educativo y formativo, e incluso de hacerse estériles para su evolución posterior. Por eso buscaba en la técnica tanto una valiosa fuente de inspiración como un campo al que aplicar sus resultados. y es buen ejemplo de ello toda su obra.

Como una prueba de su habilidad para descubrir estructuras matemáticas interesantes en las actividades de la vida corriente, es decir, de llevar a cabo la operación de abstracción a que nos referíamos antes, publicó sus trabajos sobre las curvas de distribución por edades de una colectividad profesional y sobre una teoría matemática de escalafones cerrados y sus aplicaciones a problemas de Hacienda y Previsión.

En esa línea de investigación en matemática aplicada, en 1949 publica un trabajo sobre *Un teorema general de funciones compuestas* y *sus aplicaciones geométricas* y *físicas,* y más tarde, otro sobre *La transformación de Laplace en el tratamiento matemático de fenómenos físicos.* Ambos tienen un carácter que en apariencia es más metodológico que de investigación, pero que, en realidad, arroja una nueva luz sobre esas cuestiones, además de procurarles demostraciones más simples y generales que las usuales. También son notables sus estudios sobre las *catenarias de tensión mínima*, y otros sobre *comportamiento de materiales ferromagnéticos*, sobre la *estabilidad del movimiento de las palas del autogiro* y sobre la *absorción de la energía cósmica por la atmósfera.*

En el año 1951 y en los dos siguientes publica sus trabajos sobre *fracciones continuas de cocientes incompletos diferenciales*, que constituyen quizá la parte más original, más interesante y más en consonancia con las ideas científicas de su autor.

Inspirado en la consideración de un fenómeno de interés técnico (la impedancia de una línea eléctrica con autoinducción y capacidad repartidas a lo largo de ella), define una función de partición aplicando a las diferenciales de dos funciones dadas el algoritmo de las fracciones continuas y mediante un paso al límite análogo al que utiliza la definición de la integral de *Riemann*, crea un funcional de la citada pareja de funciones que, además de su posible aplicación al problema técnico que le dio origen, presenta interesantes propiedades; por supuesto, no es lineal. Comparado con la integral de *Riemann*, utiliza el algoritmo de las fracciones continuas en lugar de la suma, y así como la primera resuelve la ecuación diferencial consistente en la obtención de la función primitiva, este nuevo funcional constituye la solución natural de la ecuación de *Riccati.*

En seis artículos científicos lanza la idea, la expone magistralmente y muestra el campo de sus aplicaciones; no agota sus posibilidades. En cuanto ha hecho lo difícil, el verdadero acto creador, abandona el tema. No se esmera en encontrar condiciones suficientes de convergencia más ajustadas, no intenta generalizaciones, como podía haber sido la de *Stieltjes.*

Había aportado la idea genial y cuando muchos esperaban que seguiría el fácil camino que él se había abierto, asombra a todos con la publicación de un nuevo trabajo que pronto alcanza resonancia internacional. Su título es modesto: *Un ingenio eléctrico para la resolución de problemas de lógica formal.* En la traducción francesa, él mismo puso *"jouet"* en lugar de "ingenio". Se trata en realidad de una muestra muy ingeniosa de cómo se puede hacer sencillo lo que hasta entonces se había hecho de modo complicado, y de cómo esta sencillez de procedimiento puede arrojar nueva luz sobre el problema. Por supuesto, tampoco agotó el tema.

Don **Pedro Puig Adam** tuvo una prolongada y apasionada actividad docente. Entró en el Instituto San Isidro, como catedrático por oposición, en 1926. Era joven, de 26 años, aunque antes ya había tenido experiencia docente en la Universidad y en el I. C. A. I. Desde 1934 estuvo también al frente de la Cátedra de Cálculo de la Escuela de Ingenieros Industriales. Ese constante contacto con alumnos de todas las edades le llevó a preocuparse profundamente por la enseñanza de las Matemáticas, al observar que la mayor parte de esos alumnos parecían padecerla más que disfrutar con sus beneficios.

Esta reflexión le hizo centrar cada vez más sus actividades en torno a la Didáctica Matemática, con el fin de mejorar las enseñanzas de la aritmética, del álgebra, de la geometría y del cálculo en todos los niveles, que en aquella época necesitaban una profunda revisión. La enseñanza de las Matemáticas caía entonces en la primaria en un exceso de empirismo y en el bachillerato en un prematuro logicismo, con un vacío difícilmente salvable entre ambos.

Puig Adam tenía brillantes ideas acerca de este problema, inspiradas siempre en un sentimiento de amor a los demás, especialmente a sus alumnos y a todos los alumnos del futuro, que le llevaron a consagrar su vida a servirles con sus contribuciones a la mejora de la enseñanza.

Comenzó ejercitando sus hallazgos con los discípulos del Instituto San Isidro, con lo que consiguió, en poco tiempo, elevar considerablemente el prestigio de ese Centro, hasta el punto de que tuvo entre sus alumnos al Infante don Juan de Borbón, a nuestro actual Rey, entonces príncipe don Juan Carlos, y a su hermano el Infante don Alfonso, que falleció en Estoril.

En el Instituto, no sólo fueron discípulos suyos los alumnos de bachillerato, sino también los compañeros que compartían con él la docencia, entre los que me encontraba yo. Efectivamente, cuando, siendo un joven inexperto, entré de catedrático en el Instituto San Isidro en 1951, tuve la inmensa suerte de encontrar allí, junto a otros compañeros que me acogieron cordialmente, al insigne maestro **Puig Adam**. El me trató siempre como compañero y amigo, pero en realidad fui su discípulo durante los nueve años en los que compartimos la enseñanza de las Matemáticas en el Instituto.

Él me descubrió el apasionante panorama de la Didáctica Matemática, contribuyó a darme una visión más profunda y más bella de las Matemáticas y sobre todo, fue para mi un ejemplo de sensibilidad, de honestidad profesional, de vida entregada al servicio de los demás y de entusiasmo en la labor cotidiana que he procurado seguir desde entonces. De él aprendí que: *"Cuando se concibe la vida como servicio, el tiempo ya no es caudal propio sino ajeno"*. No sólo escribía frases tan hermosas como esa, sino que, desconociendo la hipocresía, hacía de su vida el ejercicio de lo que decía.

En su tarea docente, al igual que en la investigadora, partía de la idea de que las Matemáticas manejan un conjunto de representaciones idealizadas, que por su sencillez son aptas para el razonamiento deductivo, pero que han sido obtenidas de una realidad enormemente compleja, a través de un proceso de abstracción. Si los resultados obtenidos a través de esas representaciones han de utilizarse en la realidad compleja, es necesario un nuevo paso de concreción.

El trabajo del matemático se realiza exclusivamente sobre esas sencillas representaciones abstractas, ajeno completamente a su origen y sin atender a su futura aplicación. Pero, como nos explicó en su maravillosa conferencia *"El papel de lo concreto en la Matemática"*, en la enseñanza de las matemáticas nunca se debe ignorar el papel de esos procesos de abstracción y concreción que le dan origen y finalidad.

Hacía notar también el importante papel que la intuición desempeñaba en la labor del investigador matemático y, aunque en su producto final, abstracto y de naturaleza lógico-deductiva, no quedase rastro de esa intuición, era improcedente, e incluso fraudulento, ocultar al alumno cómo había sido obtenido. Había, por el contrario, que ayudarle a desarrollar su intuición orientada al manejo de los entes matemáticos. Había que enseñarle que la intuición no puede suplantar al razonamiento, pero casi siempre es su origen.

Esa concepción del objeto de la enseñanza de las Matemáticas, unido a un conocimiento profundo de la psicología infantil, le llevó a establecer las bases de un didáctica matemática que definió como *activa* y *eurística* (palabra ésta que él escribió siempre sin *h*). Más tarde, en 1956, recogió algunos de sus trabajos en ese sentido en un precioso libro titulado *"Didáctica matemática eurística"*.

Comprendió pronto que el ámbito del Instituto San Isidro resultaba estrecho para el desarrollo de sus ideas renovadoras y que era necesario materializarlas en una colección de libros de texto que cambiase radicalmente la marchita metodología empleada en los que eran usuales en la época, pero le asustaban la magnitud de la empresa y las dificultades editoriales que suponía.

Comentó sus sueños con **Rey Pastor**, que también estaba preocupado por la deplorable calidad de los libros de matemáticas que se utilizaban en el bachillerato; don **Julio** se percató inmediatamente de la capacidad de **Puig Adam** para hacer una obra renovadora, y mostrando una gran fe en sus posibilidades, le invitó a preparar una colección completa de nuevos textos, desarrollando las brillantes ideas que tenía sobre la enseñanza de las matemáticas. Había que vencer la timidez de don **Pedro**, pero insistió, ofreciéndole colaborar y firmar la obra conjuntamente, así como resolverle los problemas de edición y distribución.

Puig Adam se puso a la labor y el resultado fue la publicación durante los años treinta, de una colección de textos que supusieron una verdadera revolución en la didáctica de las matemáticas. Eran algo totalmente distinto de lo que se había utilizado anteriormente y produjeron un saludable efecto en la enseñanza, no sólo directamente, sino a través de las innumerables copias, verdaderos plagios a veces, que surgieron inmediatamente.

La colección de textos se fue adaptando a los distintos planes de bachillerato que se sucedieron, conservando su original concepción y mejorando cada vez su presentación. Los beneficios de la innovación didáctica que motivaron, alcanzaron a toda la población de habla española.

De todo el trabajo que supuso la redacción de esos libros, fue destacable especialmente el dedicado a renovar la forma de enseñar la geometría, por lo que pensó que merecía la pena el esfuerzo de publicar un *"Curso de Geometría Mé-*

trica" que recogiese sus originales ideas sobre la enseñanza de esa ciencia. Fue impulsado a ello, en 1944, por la Escuela de Ingenieros Industriales, que deseaba mejorar la preparación de los alumnos que concurrían a las pruebas de ingreso, pero don Pedro aborrecía el mismo concepto de "preparación" y escribió un curso que buscaba más una formación fundamental que una preparación para superar unas pruebas.

Su propósito, ampliamente cumplido, en esa obra, publicada en 1947, fue *"despertar el respeto al rigor sin ahogar la intuición"*. Su redacción, aparte de su valiosas aportaciones didácticas, comprendía construcciones de gran originalidad, que dieron lugar a publicaciones científicas en la *Revista Matemática Hispano-Americana.* La primera innovación fue la de elegir como punto de partida los axiomas del movimiento en sustitución de los de congruencia, habitualmente utilizados por los autores anteriores. **Puig Adam** explica brillantemente por qué prefiere hacerlo así, siguiendo las ideas de **Klein**: *«Los axiomas de la congruencia* —dice— *conducen invariablemente a la* "triangulación" *de la Geometría, al rígido reticulado euclídeo cuyas mallas triangulares aprisionan las figuras dictando leyes de igualdad y de proporción. Más educativo parece caracterizar desde un principio los movimientos y ligar a cada figura aquellas transformaciones que ponen de manifiesto sus propiedades».*

Todo el libro es fiel a esta idea, tan certeramente expuesta, y a pesar de que casi todos sus capítulos versan sobre temas clásicos de Geometría, la unidad que preside su construcción y la originalidad de su desarrollo, lo convierten en una preparación excelente para una iniciación posterior a los aspectos más modernos de la Geometría.

Poco después, en 1950, publicó un libro en dos tomos, como auxilio a sus alumnos de la Escuela de Ingenieros Industriales: *"Cálculo Integral"* y *"Ecuaciones Diferenciales"*, ambos como *"Cursos aplicados a la Física y la Técnica"*. Sin ser tan innovadores como el de Geometría, están escritos con tanta habilidad didáctica que aun hoy día, medio siglo después, nuestros alumnos de ingeniería siguen encontrando en ellos un apoyo útil y grato para su formación.

Debido a la labor de unos esforzados pioneros, algunos de los cuales han sido objeto del Simposio citado, las matemáticas españolas, a mediados de siglo, se habían hecho ya un sitio en los medios científicos mundiales, con un plantel de jóvenes, tan esforzados como escasos en número. A retaguardia quedaba, no obstante, el punto débil de los problemas didácticos, cuyo olvido no era ajeno a esa escasez de peones. A cubrir ese frente acudió **Puig Adam**, que se dio cuenta de que donde su labor era más necesaria y podía ser más fecunda, era en el campo de la Didáctica Matemática. A esta disciplina dedicó sus mejores esfuerzos en los últimos años de su vida. Era consciente de que entre los caminos que se le ofrecían, era ése el más espinoso, en el que había de encontrar mayor incomprensión y menos ocasiones de recoger éxitos fáciles.

En los años cincuenta, la experiencia docente directa de don **Pedro** en el Instituto San Isidro, aun siendo ejemplar, le resultaba un tanto penosa, con clases de más de 100 alumnos, falta de medios, rígida reglamentación y necesidad de "preparar" las diversas reválidas y exámenes de estado, cuya estructura no estaba en sus manos. El declive de la enseñanza oficial en aquellos años le ocasionó grandes amarguras que trató de compensar presentado sus ideas en diversas publicaciones internacionales y en algunas maravillosas conferencias. Su labor no fue reconocida como merecía, ni por la Administración ni por el profesorado español de matemáticas en general, con algunas excepciones.

Llegaron, en cambio, noticias de sus hallazgos a las grandes figuras de la Didáctica Matemática en el mundo y pronto comenzó a intercambiar sus experiencias con el profesor belga **W. Servais**, con la italiana **Emma Castelnuovo**, con la francesa **Lucienne Félix**, el alemán **F. Drenkhan** y con tantos otros.

Especialmente inició una gran amistad con el profesor **Caleb Gateño**, que visitó España en 1955 para dar a conocer sus famosas *"regletas de color"* (o *material de Cuisenaire*). Venía de la Universidad de Londres, pero hablaba un perfecto español, aprendido en su infancia, como judío sefardita, con lejanos antepasados procedentes de Zaragoza. Era entonces secretario de la *"Comisión Internacional para el Estudio y la Mejora de la Enseñanza Matemática"*, creada cinco años antes por iniciativa suya, y pronto reconoció el gran valor de los trabajos de **Puig Adam**, por lo que apoyó calurosamente su propuesta de que la *11ª Reunión de esa Comisión* se celebrase en Madrid.

En 1957 tuvo lugar efectivamente esa Reunión bajo el título de *"El Material de la Enseñanza Matemática"*, coincidiendo con una brillante *"exposición de modelos y material didáctico matemático"*. Ambos acontecimientos, de gran repercusión internacional, tuvieron su sede en el Instituto San Isidro y a ellos asistieron, no sólo las grandes figuras citadas antes, sino otros muchos investigadores de gran renombre. La descripción del material expuesto allí, en gran parte creado por don **Pedro**, la recogió en un libro que, con el título de *"El Material Didáctico Matemático Actual"*, fue publicado, con algún retraso, por la Revista *"Enseñanza Media"* del Ministerio de Educación Nacional.

En España, estos dos acontecimientos de rango internacional fueron acogidos, salvo algunas excepciones, con lamentable indiferencia, de la que don Pedro se quejaba amargamente, por lo que suponía de menosprecio para la Didáctica Matemática, y para la Enseñanza Media en general. A falta de otros que lo hicieran, tuvo don **Pedro** que redactar él mismo las crónicas de la Reunión, con gran temor de aparecer como inmodesto, cuando objetivamente había que reconocer su

casi exclusivo mérito tanto en la organización como en muchas de las aportaciones a la misma. En contraste con esa situación, a partir de esos acontecimientos, **Puig Adam** fue considerado en toda Europa como una de las principales figuras mundiales de la Didáctica Matemática.

Poco después don Pedro reunió sus principales aportaciones a la citada Reunión y la Exposición aneja, con algunas de sus conferencias y trabajos anteriores, dando lugar a un maravilloso libro que con el título de *"La Matemática y su Enseñanza Actual"* se publicó en 1960, es decir, en el año de su fallecimiento, por lo que tan sólo llegó a ver sus pruebas de imprenta. Tampoco llegó a ver publicado su innovador libro de *"Matemáticas para el Curso Preuniversitario"* que apareció ese año.

En *"La Matemática y su Enseñanza Actual"* podemos encontrar piezas tan valiosas como su conferencia sobre *"La Matemática y la Belleza"*, la titulada *"Sobre la enseñanza eurística de la Matemática"* o la genial *"Lo concreto en la Enseñanza Matemática"*. Y también, sirviendo casi de testamento, su *"Decálogo de la Didáctica Matemática Media"*, que deberíamos tener presente siempre en nuestras clases.

La obra de don **Pedro Puig Adam** ha trascendido a toda la docencia española y rebasado nuestras fronteras. En España, los que nos hemos iniciado en las Matemáticas en los últimos años, debemos expresar nuestra gratitud por lo que su obra ha allanado el camino de nuestra formación.

La labor pedagógica de Puig Adam

por Joaquín Hernández Gómez

(Discurso pronunciado en el Acto conmemorativo del Centenario del nacimiento de Don Pedro Puig Adam, celebrado en la Academia de Ciencias el 7 de junio de 2000)

Señores Académicos, señoras y señores:

Aunque el sentimiento que predomina en mí en estos momentos es el de cierto aturdimiento, el qué pinta un profesor de Instituto hablándole desde una tribuna a renombrados científicos, no debo dejar de mostrar mi agradecimiento, en primer lugar a la Academia de Ciencias que presta este marco incomparable para este acto y, en segundo lugar a los conferenciantes que esta tarde han pasado y van a pasar por esta tribuna que han permitido dejarme a mí el punto de la labor pedagógica de Puig Adam, conscientes todos, ellos y yo, que cualquiera de ellos iba a aportar más, y sobre todo mucho mejor que yo en este aspecto. Sea como fuere, en cualquier caso, intentaré que la figura de mi abuelo político sea mejor conocida a partir de este año 2000, centenario de su nacimiento.

Hace poco más de quince años, en esta casa y posiblemente en este mismo lugar, un eminente científico, hoy desgraciadamente desaparecido, el profesor Mariano Yela, catedrático de Psicología y miembro de la Academia de Ciencias Morales y Políticas pronunciaba un discurso del que, por su belleza y emoción, me gustaría extraer el siguiente párrafo:

"Estamos en 1940. En un aula fría y destartalada del Instituto San Isidro, unos cien muchachos de sexto curso esperamos nuestra primera clase de Matemáticas. Entra Don Pedro [...] y se ve, tras sus gafas, la mirada chispeante, ingeniosa, acogedora, ingenua, casi infantil.

Se inicia la clase. Primera sorpresa: Don Pedro no explica, no escribe ninguna fórmula en la pizarra. Habla con nosotros como un amigo mayor. Pregunta a varios qué es la Matemática. Pide a algunos que recojan y resuman las contestaciones. Los demás las revisan y discuten. Poco a poco, la clase se anima; todos intervenimos. Nos olvidamos de que estamos en clase, nos ponemos gozosamente a pensar. De pronto, Don Pedro lanza una pregunta sorprendente: ¿Creéis que hay dos españoles con el mismo número de pelos en la cabeza? Todos queremos ha-

hablar. Nos parece que no; algunos creen que podría darse el caso, pero que sería mucha casualidad. Entonces, Don Pedro nos va ayudando a reinventar la matemática, a percatarnos de lo que es y para qué sirve. Despacio al principio, vertiginosamente después, se van proponiendo ideas... Se acaba la clase. ¿Serán todas así? Con mil variantes, sí lo fueron".

La mirada chispeante, ingeniosa... Con toda probabilidad, esa mirada ingeniosa tenía que, de vez en cuando, quedar reflejada muy directamente: un día, en clase en el San Isidro, contaba hace poco Joaquín Crespo, ingeniero industrial ya jubilado y alumno de Don Pedro desde el San Isidro a la Escuela de Ingenieros Industriales, va Don Pedro y dibuja, en la pizarra, una circunferencia perfecta. El "oh" de admiración que se le escapa a algún estudiante así lo refleja.

— ¿Cómo se llama este hueso, le pregunta Don Pedro señalándose el antebrazo?

— Radio, contesta un tanto aturdido el chico.

— Bueno, hombre, pues no te debería extrañar que con una herramienta como esa, salga una circunferencia como ésta.

El ingenio del que hablaba el profesor Yela, se reflejaba, a veces, de otra manera: en una conferencia a profesores se entusiasmaría con su método heurístico, y uno de los asistentes, en el turno de preguntas, comentaba Santiago Gutiérrez antiguo alumno suyo, probablemente poco amigo de dicho método, le espeta: O sea, que sus estudiantes, en clase, hacen lo que quieren, a lo que Don Pedro le responde: no, quieren lo que hacen.

Pero Puig Adam, además del ingenio, debió haber tenido un carácter tremendamente jovial —mirada casi infantil, decía el profesor Yela— lo que ayudaba, sin duda, a que sus estudiantes, en clase, "quisieran lo que hacían".

Escuchemos una de sus clases, a niños de 10 a 11 años. Está hablando de la descomposición en factores primos, m.c.d y m.c.m. Después de proponer diversos ejercicios de descomposición les dice:

"Disponemos, como veis, de una clave nueva para describir de otro modo los números. Esta clave la ignora el enemigo. Desde mi puesto de mando, el encerado, yo os transmitiré órdenes y datos numéricos en la nueva clave y vosotros, desde vuestros aviones, las mesas, me contestareis asimismo en clave.

Tripulantes A: Multiplicad todos $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ por $2^3 \cdot 3$ y dad el resultado en clave al tripulante B de vuestro avión.

Tripulantes B: Transmitid en clave el resultado obtenido.

Uno de ellos quiso darme el resultado numérico del producto pero le interrumpí, siguiendo el juego, advirtiéndole: "En clave, en clave, que se entera el enemigo".

Pero todo este ingenio, todo este carácter jovial, se quedarían en simple anécdota si no fueran unidos a una impresionante capacidad de transmitir ideas; y esa capacidad la desarrolla utilizando estrategias de lo más diversas: "Deseaba conservar intacta esta operación en la pizarra —les dice un día a sus estudiantes, mostrándoles los restos de una operación de multiplicación de polinomios— pero ha venido el bedel y la ha borrado casi toda; solo he llegado a tiempo de que no borre el multiplicando y el producto. A ver, si entre todos, reconstruimos esta operación". Los chicos, casi sin darse cuenta, están aprendiendo, por sí solos, el algoritmo de la división de polinomios.

Otra vez inventa un puzzle para hablar de la irracionalidad de $\sqrt{2}$.

Pero no solo tenía extraordinaria capacidad para transmitir ideas matemáticas: Un día, cuenta Fernando Arce, antiguo alumno suyo, en su clase del San Isidro, se retrasó algo en la entrada a clase, con lo que los chicos de quince-dieciséis años estaban campando a sus anchas sin profesor —hoy, a veces, campan a sus anchas con profesor pero bueno, eso no viene a cuento— con la mala suerte, o buena, como veremos luego, que coincidió la entrada de Don Pedro con alguna palabrota, ya claramente fuera de tono, que habría pronunciado alguno. Apareció Don Pedro y la clase quedó, como era de esperar, en el más absoluto de los silencios. Don Pedro no hizo ninguna alusión a lo que acababa de oír y, unos minutos antes de acabar la clase, les dice:

— Esperad un momento que vuelvo en seguida (sale del aula, hace una rápida gestión por teléfono, vuelve al instante y les dice:)

— Mañana, a la hora de clase, en lugar de esperarme aquí, nos vemos en la boca de Metro de Alonso Martínez. Los chicos quedan perplejos, llegó el día siguiente, fueron a la boca de Metro y Don Pedro, sin decirles adonde les llevaba, se dirigió con ellos al Colegio de Sordomudos, calle San Mateo. Una vez en el Colegio les lleva por las diversas dependencias, reinando en todas ellas el más escalofriante de los silencios. Al final, en el hall, les comenta: espero que hayáis entendido el verdadero valor del lenguaje y, de aquí en adelante, sepáis utilizarlo cuando sea conveniente. El ya citado Fernando Arce recuerda esta lección sesenta años más tarde.

Pero toda esta capacidad para enseñar va unida a una percepción muy clara de la dificultad del aprendizaje; en lugar de pensar como tantos profesores pensamos a veces, —Pero ¿cómo no pueden entender los chicos esto con lo fácil que es?—, cuenta el ya citado Santiago Gutiérrez, cuando él ya era profesor, que le pregunta un día:

— Y usted, además de dar clase ¿qué hace?

— Pues preparo mis clases, salgo con mis amigos, voy al cine de vez en cuando...

— No, si me refiero a ¿qué estudia?, ¿qué está aprendiendo ahora?

— Pues...

— Un profesor tiene que estar siempre aprendiendo, le dice, y no tanto por no quedarse atrás en conocimientos como porque sienta, día a día, lo difícil que es esto de aprender, y así valorará más su trabajo pero, sobre todo, comprenderá mucho mejor las dificultades de sus alumnos.

Don Pedro no era un sabio distraído. Y eso, aunque, a veces, cuenta su hija Emilia, estuviera en casa comiendo y, observando su familia que estaba con la cabeza en otro sitio, le preguntan al final: a ver, papá, ¿qué has comido de primer plato? Y él no sabía responder.

Pero en su clase, cuenta Consuelo de Costa, antigua alumna suya, con ¡100 alumnos! tenía la clase dibujada en un cuadrante, con la posición y el nombre de cada uno, y controlaba absolutamente el trabajo de cada uno de sus estudiantes.

Puig Adam fue un adelantado de su época. Una persona que, en 1921, en su tesis doctoral, trata problemas de Mecánica Relativa Restringida, cuando las teorías de Einstein, aun no bien comprendidas en muchos medios científicos, eran conocidas por muy pocos en España. Una persona que en su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias, en 1952, cita a Norbert Wiener y da las primeras aplicaciones de las máquinas que después llamaremos ordenadores.

Pero donde de verdad se ve que era un hombre de otra época es en su concepción de la enseñanza. Toda su teoría didáctica chocaba con la pomposidad y el conservadurismo de la práctica docente de sus compañeros.

En 1951, en un artículo en "Atenas. Revista de información y orientación pedagógica" decía:

— "Tengamos también siempre presente que el niño no es un saco vacío que hay que llenar de ciencia, sino un potencial deseoso de convertirse en acción. Hagamos que sienta la alegría de descubrir, de crear, de inventar; que una verdad hallada por su propio esfuerzo, tendrá más valor para su cultura y para su moral que cien verdades recopiladas".

Esta falta de sincronía y alguna otra razón, como veremos, le hacía no sentirse muy feliz entre algunos compañeros. Escuchémosle en 1953, en la Conferencia Inaugural de la sección de Matemáticas del Congreso luso-español para el progreso de las Ciencias, celebrado en Oviedo.

Tras la lectura de las recomendaciones que la UNESCO acordó llevar a los Ministerios de Instrucción Publica en julio de 1950, lectura que hace en dicha conferencia, "comprobé —dice— con alegría, que la enseñanza oficial española no está atrasada en lo que a didáctica matemática se refiere. El espíritu que las

informa es el mismo que nos guió hace más de 25 años al escribir en colaboración con mi querido maestro Don Julio Rey Pastor los libritos destinados a tal didáctica, de cuya posterior influencia en cuestionarios y textos de aquí y de Hispano América no he de ser yo el fiel contraste, ni mucho menos el pregonero. Pero sí quisiera decir que a la hora de rendir cuentas del empleo de mi vida, estimaré como el más señalado servicio que haya podido rendir a mi Patria, el haber colaborado en aquella tarea de renovación que, acogida en un principio con indiferencia y escepticismo por la rutina ofendida, después... después ha sido envuelta en silencios mucho más elocuentes todavía. En réplica a ellos digo lo que digo, cometiendo grave pecado de inmodestia. Pero no me refiero tanto al silencio despectivo como al silencio delictivo, al que acentúa un desprecio como al que disimula un plagio; que si el primero duele, el segundo irrita, que es peor".

Dejemos estos momentos de enfado y escuchémosle, en 1957, lo que parece que son palabras de los pedagogos más avanzados del siglo XXI. Y eran pronunciadas hace más de 40 años.

"Se ha tardado no poco en tener conciencia clara de que el acto de aprender es mucho más complicado de lo que supone la recepción pasiva de conocimientos transmitidos; que no hay aprendizaje donde no hay acción, y, que, en definitiva, enseñar bien ya no es transmitir bien, sino saber guiar al alumno en su acción de aprendizaje. Esta acción del alumno ha terminado así primando sobre la acción del maestro, condicionándolo totalmente y subvirtiendo así la primacía inicial de su papel. El centro de la enseñanza ya no es el maestro, sino el alumno. Rotunda verdad que, de puro sencilla, muchos maestros no han asimilado todavía".

No quiero extenderme más, tanto por consideración a ustedes, que ya me han oído demasiado como por deferencia a mis compañeros que ya les he arrebatado tiempo suficiente y por eso, aunque ni voy a citar casi su Decálogo de la Didáctica Matemática Media, publicado en 1955 por ser ya muy conocido, sí me gustaría terminar diciendo que todo el polifacetismo de Puig Adam —componía música, pintaba, escribía versos— obedecía —según su hija Emilia— a una forma de encarar la vida. En una charla a sus alumnos de 7º curso del Instituto San Isidro, cuando ya abandonaba la enseñanza media, les decía: "Tended a ser un poco aprendices de todo, para vuestro bien, y maestros en algo, para bien de los demás".

Muchas gracias, nuevamente, por haberme dado la oportunidad de colaborar en un mejor conocimiento de la figura de Puig Adam en nuestro país. Muchas gracias.

Sobre los maestros de Pedro Puig Adam

Javier Peralta

E. U. de Formación del Profesorado
Universidad Autónoma de Madrid

Abstract

As a little contribution to the commemoration of the centenary of Puig Adam's birth, this article reflects briefly on who his main teachers were.

Puig Adam, como dice Fletcher, fue uno de los más originales profesores de su tiempo. En su desbordante personalidad se conjugan aspectos muy diversos, como los de matemático e ingeniero, pedagogo y artista; y así, tan pronto se ocupa de ecuaciones diferenciales o geometría métrica, como de catenarias o cibernética; de igual modo escribe sobre matemáticas y belleza o teoría de la relatividad, que compone una poesía o una apología sobre la intimidad.

Sin embargo, su faceta de investigador matemático, tanto puro como aplicado, es sin duda superada por sus aportaciones a la pedagogía matemática, en donde propicia una auténtica renovación de los métodos de enseñanza. Podría decirse que quizás no haya existido otro didacta de la matemática como él en la historia española, y que acaso también se halle entre los mejores de los demás países.

Su estrecha relación, entre otros, con el Prof. C. Gattegno, secretario de la Comisión Internacional para el estudio y mejora de la Enseñanza Matemática, quien en repetidas ocasiones expresó su reconocimiento a la figura de Puig, y la existencia de numerosos testimonios de ilustres personalidades en ese campo realizados a la muerte de éste, no hacen sino confirmar, en efecto, su talla como educador matemático. He aquí, por ejemplo, las manifestaciones al respecto de W. Servais: "Es una inmensa pérdida para todos, una pérdida verdaderamente irreparable. Pienso con profunda tristeza en toda la bienhechora influencia que nuestro amigo tenía, y tendría, sobre la enseñanza de vuestra España. El interés de vuestro país exige que la misión que él asumió sea protegida"; de E. Castelnuovo: "Hemos perdido el mejor miembro de nuestra Comisión, pero debemos seguir

trabajando porque éste es el mejor medio de honrar su memoria"; o de T.J. Fletcher: "Su muerte es una pérdida irreparable para la enseñanza de las matemáticas en España; lo es también para el mundo entero, porque entre los profesores del mundo es uno de los más originales y mejor dotados".

Puig no fue tan sólo un *profesor*, como afirma Mariano Yela, quien se considera uno de sus discípulos. Profesor es quien confiesa su saber, el que sabe decirlo y transmitirlo; sin embargo, él lo es de una manera entregada y completa —más que transmitir el saber, incita a su descubrimiento—, es, por tanto, un *pedagogo*. Y como profesor competente y pedagogo innovador es, sobre todo, un *maestro*, pues no anhela únicamente aprender y enseñar, sino enseñar amando; o sea, educar.

Hay numerosas muestras de su maestría en la enseñanza de las matemáticas, entre las que quizás merezca la pena reseñar el testimonio del citado Yela Granizo comentando cómo Puig es capaz de "introducir" a su clase de sexto curso, de unos cien alumnos, en el mundo de las matemáticas: "D. Pedro no explica, no escribe ninguna fórmula en la pizarra. Habla con nosotros, como un amigo mayor ... De pronto ... lanza una pregunta sorprendente: ¿creéis que hay dos españoles con el mismo número de pelos en la cabeza? ... D. Pedro nos va ayudando a reinventar la matemática ... Despacio, al principio, vertiginosamente, después, se van proponiendo ideas: se llega pronto a la solución ... La clase continúa. Las contestaciones se precisan cada vez más. ¿Qué hemos hecho?, pregunta D. Pedro. Intentamos expresarlo. D. Pedro, al final, repite lo que hemos dicho, lo resume, lo aclara, lo ordena. Conclusión, eso es la matemática ... Procesos de percepción y de acción, de esquematización y abstracción, de operación con esquemas mentales más o menos abstractos, de concreción y vuelta a la realidad".

Pero, como se ha dicho, Puig va incluso más allá; no se limita a utilizar una metodología, entonces —y posiblemente ahora— revolucionaria para el mejor aprendizaje de sus alumnos, sino que le preocupa la formación completa e individualizada de cada uno de ellos, e incluso sus situaciones personales. Así, Yela manifiesta su asombro al ver cómo su profesor acude a su casa en los barrios bajos de Madrid, habla con sus padres —una familia humilde— y le invita a ir a su domicilio a comer y a charlar de innumerables temas.

Puig Adam es un auténtico maestro y, como tal, ha tenido muchos alumnos. Lo fue nuestro rey D. Juan Carlos I, de cuya formación matemática se ocupa, dentro del grupo encargado de su educación, en las Jarillas; y lo son tantos y tantos discípulos y colaboradores.

Entre ellos se encuentran Mariano Fernández, maestro de la escuela preparatoria de su instituto, quien le ayuda a elaborar un interesante material para la enseñanza de las matemáticas; Julio Fernández Biarge, que coincide unos años co-

mo catedrático con Puig Adam en el Instituto San Isidro; Miguel Jerez Juan, compañero suyo en la Escuela de Ingenieros Industriales, que le va sucediendo en sus puestos académicos de auxiliar y catedrático; José Ramón Pascual Ibarra (de Valladolid) y Alfonso Guiraum (de Granada), a los que envía para el intercambio de experiencias didácticas a Italia y a Bélgica e Inglaterra, respectivamente, y con quienes viaja por diversos países como miembro de la Comisión Internacional para el estudio y mejora de la Enseñanza Matemática ...

De entre ellos, Pascual posiblemente sea su discípulo y colaborador más estrecho en el campo de la pedagogía matemática; cooperación que se hace especialmente activa y extensa cuando acometen la reforma —humanización prefería decir D. Pedro— de la enseñanza de la matemática en el bachillerato, que el Ministerio de Educación encarga a Puig en 1955. Yo tuve el honor de ser alumno de Pascual Ibarra en el ICE de la Universidad Complutense, y he de decir que difícilmente olvidaré sus magníficas clases, su categoría profesional y humana, ni la pasión con la que trataba de transmitir ideas y sugerencias para el ejercicio docente, suyas y de su maestro.

Muchos de nosotros, que hemos leído a Puig Adam o hemos recibido las enseñanzas de algunos de sus discípulos, podríamos en cierto modo considerarnos también, indirectamente, alumnos suyos, y tratar de escribir acerca de su doctrina pedagógica como un pequeño homenaje a su figura; tarea que sin embargo ya ha sido acometida en diferentes ocasiones por colegas más cualificados que yo. Por ello, me he propuesto reflexionar sobre otras cuestiones de su vida o de su obra; como por ejemplo, sobre quiénes fueron sus principales maestros, lo que probablemente sea menos conocido (en especial, por los compañeros más jóvenes).

Ese será, precisamente, el asunto al que, como una modesta contribución a la celebración del centenario de su nacimiento, dedicaré las siguientes páginas. Aunque para ello, parece necesario comenzar recordando de forma resumida algo de su etapa de estudiante, así como de su vida profesional.

Pedro Puig Adam nace en Barcelona el 12 de mayo de 1900 y fallece en Madrid el 12 de enero de 1960. Primero estudia en la Escuela Pública de la Barceloneta, para pasar después a cursar el bachillerato en el Instituto de Segunda Enseñanza de Barcelona (entonces único), que finaliza con Premio extraordinario.

Ingresa luego en la Escuela de Ingenieros Industriales de esa ciudad, en donde realiza sus dos primeros cursos, simultáneamente con los tres primeros de la Facultad de Ciencias Exactas; lo que puede llevar a cabo al estar ubicados ambos centros en el mismo edificio. Abandona entonces la carrera de ingeniero, pues se siente más atraído por las matemáticas, a las que puede dedicar "un estudio desinteresado, sin más finalidad que la alegría del conocimiento en sí mismo, ¡sin prisas!, con todo el plazo necesario para la penetración que le resultaba veda-

da en un plan de estudios, que, en pocos años, pretendía poner a su alcance toda la técnica industrial".

Termina la licenciatura con Premio extraordinario y se traslada a Madrid para cursar el doctorado (su universidad es entonces la única que tiene capacidad legal para conceder ese grado), que realiza nuevamente con igual galardón. Continúa sus estudios de ingeniería en la capital, aunque por poco tiempo, y a los veinticinco años obtiene por oposición una de las dos cátedras de matemáticas del Instituto San Isidro de Madrid, en reñida disputa con veinte contrincantes, en su mayoría catedráticos. Finaliza luego la carrera de ingeniería industrial, con lo que reúne, a la vez, una formación científica y técnica, que le permite adquirir una doble visión de la matemática: pura y aplicada.

Poco después de licenciarse también da clases de Geometría descriptiva, Geometría superior y —años después— Metodología matemática en la Facultad de Ciencias de Madrid; de Análisis matemático y Cálculo infinitesimal en el ICAI, y de Cálculo en la Escuela Superior Aeronáutica. Es asimismo profesor de la Escuela de Ingenieros Industriales: primero, auxiliar (1932), y catedrático de Extensión de Cálculo más tarde (1946).

En 1952 ingresa en la Real Academia de Ciencias. Cuenta además en su haber con distintas distinciones: Gran Cruz de Alfonso X el Sabio, Comendador de la Orden del Mérito Civil ...

* * *

Para hablar de los profesores que tuvieron una mayor trascendencia sobre Puig Adam, acaso sea procedente empezar incluyendo, precisamente, a su maestro de escuela: José Grà, quien ya se percató de la categoría intelectual del pequeño Pedro. Éste, más tarde, entre los diferentes diplomas enmarcados de títulos y premios que exhibe en su casa, coloca el que le fue otorgado a los siete años, lo que —según parece— puede entenderse como un reconocimiento explícito a aquellos primeros tiempos de su formación escolar.

Aunque su primer auténtico maestro (en el sentido que aquí interesa) es Antonio Torroja Miret (1884-1954), uno de los tres hijos del eminente geómetra Eduardo Torroja y Caballé.

Antonio, natural de Tarragona, es doctor en Ciencias Exactas, ingeniero de Minas e ingeniero geógrafo; catedrático de Geometría descriptiva y Geometría de la posición de la Universidad de Barcelona (anteriormente lo fue de la de Zaragoza); miembro de la Academia de Ciencias; etc. Es considerado por Puig como su "iniciador en la matemática rigurosa, en la disciplina de pensamiento y expresión", y tiene su primer contacto con él cuando cursa, en los primeros años de la licenciatura, la asignatura de Geometría proyectiva en Barcelona, que imparte Torroja.

Este último le instruye en algunas ramas de la geometría, que es entonces, y desde el último tercio del siglo XIX, la parte de la matemática posiblemente de mayor atención en España. Ahora bien, su influencia sobre Puig Adam, de quien vuelve a ser profesor en cursos posteriores, va sin embargo más allá de la enseñanza de la geometría, pues Torroja persigue siempre, además, la formación matemática general de sus alumnos. Para ello, corrige inexorablemente cualquier error, falta de precisión en los conceptos o de rigor en los razonamientos, e incluso incorrecciones del lenguaje; lo que resulta viable en aquellos tiempos en los que el número de estudiantes es escaso, especialmente en los años finales de la licenciatura (Puig estaría algún tiempo a solas en el aula con su profesor).

De este modo llega a conocer bien a su discípulo, en el que aprecia "una inteligencia clarísima, una laboriosidad constante y una simpática modestia"; juicio que sería cumplidamente confirmado con el transcurso del tiempo. Acaso merezca reseñarse el siguiente hecho, acontecido el primer año en que da clase a Puig, que, junto a otras consideraciones sobre su alumno, resalta Torroja en la contestación a su discurso de recepción en la Academia de Ciencias: "Era un alumno sobresaliente a no dudar. Imaginad, pues, mi sorpresa cuando allá por el mes de abril recibí la visita de su padre, que veía a su hijo estudiar con el ardor con que siempre lo había hecho; pero nervioso, preocupado y expresando a cada paso temor de no dominar debidamente aquella disciplina. Y deseaba, como buen padre, conocer mi juicio, para aconsejar a su hijo, en caso necesario, que renunciara a examinarse y volviera a estudiar aquella materia en el curso siguiente. Tal era el concepto que de sí tenía aquel alumno brillante ... No necesito deciros cuál fue mi respuesta. Lo que sí quiero añadir, en honor del padre, es que el hijo no supo de aquella gestión ni de su resultado alentador hasta muchos años después".

Como puede desprenderse de las líneas anteriores, Torroja se siente muy orgulloso de haber contribuido a la formación de Puig, "discípulo brillante y muy querido". Pero no es su único maestro en el campo de la geometría; hay otros que también influyen de manera importante en su educación en ese terreno, como Miguel Vegas, de quien hablaremos enseguida. Aunque para comprender mejor cuál fue su contribución a la geometría española, parece obligado empezar más atrás ...

El introductor en España de algunos aspectos de la geometría moderna es Echegaray, quien hacia 1865 nos da a conocer teorías de esta disciplina aquí ignoradas, aunque ya maduras en Europa, como la debida a Chasles. Años después coexisten en el continente diversas orientaciones, incluso teñidas de tintes nacionalistas (se llega a afirmar, por ejemplo, que la geometría métrica es más cercana al espíritu francés, mientras que la proyectiva es más próxima a la personalidad alemana), que influyen también en España. Así, hacia 1885, la geometría de Chasles empieza a ser reemplazada en nuestro país por la de von Saudt, traída por

Eduardo Torroja y Caballé, que comienza a enseñarla en la Universidad Central. El debate europeo entre geometría métrica y geometría proyectiva y, en otro sentido, entre métodos sintéticos y métodos analíticos, continúa no obstante dentro de nuestras fronteras durante los primeros años del siglo XX.

Torroja no es dogmático sin embargo en sus planteamientos, pues si bien apuesta claramente por la perspectiva de la geometría de la posición de Staudt, no tiene inconveniente en intercalar propiedades métricas para hacerla más comprensible; sacrifica en parte, pues, su presentación estrictamente deductiva y prefiere sustituirla por una exposición más asequible desde el punto de vista metodológico. Y esa misma posición adoptan sus discípulos, como Vegas, posiblemente el más allegado.

En ese marco hay que encuadrar el *Tratado de Geometría Analítica* (1894) de Vegas, en el que hace un considerable esfuerzo por organizar la geometría analítica sobre bases proyectivas. Su segunda edición (1906), en la que incorpora nuevas mejoras, es la obra de referencia para muchas promociones de científicos e ingenieros, y tiene una amplia difusión en el extranjero (recibió comentarios elogiosos incluso del propio Einstein).

El importante papel jugado por Vegas —y aún más por su maestro— en la evolución de la geometría española, queda asimismo en evidencia con motivo del Congreso Internacional de matemáticos de Cambridge (1912). En efecto, la comunidad matemática española decidió presentar en él una recopilación de las vertientes que, en aquel momento, se consideraron de mayor interés para expresar el desarrollo alcanzado por esta ciencia en nuestro país; y no hubo duda en encargar a Vegas la elaboración de una de las memorias que se realizaron para ese fin: concretamente la que tituló *Torroja y la evolución de la Geometría en España*.

Miguel Vegas Puebla-Collado (1865-1943) nace en Madrid. A los 22 años ya es catedrático de Análisis matemático de la Universidad de Zaragoza, a los 26 de Geometría analítica de la Universidad Central y, a la jubilación de su maestro, asume la docencia en el curso de doctorado que él impartía (con ello, bloquea el acceso, posiblemente deseado, de Rey Pastor a ese destino, lo que quizás determinara el fin del interés de este último por la geometría). Hombre, por otra parte, de carácter modesto y retraído, no quiso aceptar ningún tipo de cargos, salvo en una etapa en la que fue consejero de Instrucción Pública (rehusó, por ejemplo, ser presidente de la Academia de Ciencias a que su antigüedad podría hacerle acreedor, si bien no tuvo más remedio que aceptar la vicepresidencia).

Aunque parece ser que no hay muchas referencias sobre la ascendencia de Vegas en la vida de Puig Adam, es indudable que sí existió. El primer contacto entre ambos tuvo lugar en los cursos de doctorado que el segundo viene a realizar a la Universidad de Madrid, donde tiene como profesores a Álvarez Ude, José

María Plans y Vegas. También vuelve a encontrarse con este último cuando Puig se presenta a las oposiciones para cubrir una cátedra de matemáticas del Instituto San Isidro en las que Vegas, presidente del tribunal, es capaz de superar las intrigas y presiones de otros candidatos y sabe ver la valía de Puig, a quien finalmente se le concede la plaza.

En su discurso de ingreso en la Academia, en 1952, reconocería este hecho que cambió su vida, y se refiere a su maestro como "inolvidable defensor suyo en reñida competición que le llevó a tierras de enseñanza". Años antes, en el Prólogo de la primera edición de su *Geometría Métrica* (1947), también muestra claramente su reconocimiento hacia él: "... D. Miguel Vegas, cuyas enseñanzas y afecto fueron para mí inapreciables".

Así como en los primeros años del siglo XX en la sección de Exactas de la Facultad de Ciencias de Madrid sobresale la figura de Eduardo Torroja y Caballé (seguido por su discípulo Miguel Vegas), enseguida comienzan a llegar diversos profesores, la mayoría de ellos procedentes de Zaragoza, como Álvarez Ude, Octavio de Toledo, Jiménez Rueda ... El primero de ellos ejercería además una notable influencia en la formación geométrica de Puig Adam.

José Gabriel Álvarez Ude (1876-1958) nace en Madrid (es de lamentar que por un involuntario error no haya sido incluido, sin embargo, en el libro *Matemáticos Madrileños* que aparece en las Referencias). Es profesor —junto a García de Galdeano— de Rey Pastor en la Universidad de Zaragoza y luego catedrático de la Universidad Central: primero de Geometría de la posición y de Cálculo infinitesimal y, posteriormente, de Geometría descriptiva; actuario; vocal del Consejo Superior de Estadística; académico de Ciencias; director de la Revista Matemática Hispano-Americana y del Laboratorio-Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios cuando Rey Pastor marcha a Argentina; etc. La producción científica de Álvarez, a quien Rey considera "gran amigo y gran maestro ... la mejor cabeza matemática que en mi larga vida he conocido", es no obstante muy escasa, debido al horror a la publicidad y a sus impresionantes rigor matemático y sentido autocrítico, que le hacen infravalorar la originalidad y profundidad de sus ideas.

Sin embargo, no tiene reparos en exteriorizar en algunas ocasiones su pensamiento fuera de España. Así sucede cuando impugna la solución al problema de Brocard dada por el francés Barisien, que es apoyada incluso por aquél (Álvarez Ude sostiene que se trata de una curva de segundo grado y no de cuarto, como dice el matemático galo). A pesar de ello, nuestro colega siguió sosteniendo su tesis y, finalmente, Barisien y Brocard aconsejados por el italiano Retali, no tuvieron más remedio que aceptar el resultado del matemático español.

Como ya se ha dicho, fue profesor de doctorado de Puig Adam, quien siempre se consideró discípulo suyo. Así, en diferentes momentos se refiere a él como "uno de mis más esclarecidos profesores" o "bueno y paternal amigo ... a quien he conceptuado siempre maestro virtual mío" ... También le reconoce como "maestro efectivo al revisar con su característica agudeza crítica los orígenes de este libro" (se refiere a su *Curso de Geometría Métrica*), y continúa diciendo en su prólogo: "A sus atinadas observaciones se debe que pueda salir corregido de muchos de sus defectos. No sé cómo expresarle mi agradecimiento por su espontánea y para mí tan preciada colaboración".

Es sabido que también Rey Pastor influye de manera notoria sobre Puig Adam; pero no solamente en el área de geometría, como se verá enseguida.

Julio Rey Pastor (1888-1962) nace en Logroño. Catedrático de la Universidad de Oviedo con 23 años y de la Central con 24, miembro de las Reales Academias de Ciencias y de la Lengua, creador del Laboratorio-Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios, organizador de la Real Sociedad Matemática Española y de la Sociedad Matemática Argentina, y un largo etcétera, es el auténtico líder y director de orquesta de las matemáticas en nuestro país durante medio siglo.

Sus iniciales trabajos en geometría, materia que constituye su primer campo de investigación, son de gran calidad y contribuyen a la formación de Puig en ese terreno. Los *Fundamentos de la Geometría proyectiva* (1914) de Rey, en concreto, ayudaron en buena manera a aclarar las cosas en la polémica entre geometría métrica y geometría proyectiva y tuvieron una valoración muy positiva, incluso fuera de España; así escribe en relación con la doctrina de dicho libro el geómetra italiano F. Amodeo: "... un primer paso para alcanzar un tratamiento puro para la Geometría fue hecho por Steiner, Staudt, Chasles, Cremona, de Jonquières; un segundo paso es el dado por Paolis y Köter y el tercero es debido a Rey Pastor".

Más tarde su investigación se deriva fundamentalmente hacia el análisis, aunque su inmensa producción científica, que supera las trescientas publicaciones, "abarca todos los campos de la matemática: aritmética elemental, teoría de números, álgebra clásica y moderna, teoría de series e integrales, cálculo de diferencias, representación conforme, conjuntos, geometría elemental, proyectiva, no euclídea, curvas planas, topología, probabilidad, espacios abstractos, física matemática, filosofía e historia". Y la magnitud de su obra influye de forma importante en Puig Adam, que se refiere a él en estos términos: "mi querido y venerado maestro", y "maestro amigo y entrañable".

Pero asimismo repara Rey en la calidad didáctica de Puig, motivo por el que le propone realizar conjuntamente una colección de textos para todo el bachillerato, que constituyeron una auténtica revolución en la metodología de la enseñanza

matemática. También tienen lugar otras colaboraciones en ese terreno, fruto de las cuales ven la luz los siguientes libros de ambos autores: *Elementos de Geometría intuitiva* (obrita escrita para niños en la que se introduce, mediante una metodología adecuada a la infancia, la enseñanza de la geometría elemental), *Elementos de Aritmética intuitiva*, *Elementos de Geometría racional*, *Elementos de Aritmética racional* ...; cooperación que en cambio echa de menos Puig Adam en la elaboración de su *Curso de Geometría Métrica*, al que varias veces me he referido.

Sobre su discípulo se pronuncia Rey Pastor de esta manera en el año siguiente a su fallecimiento: "Mi entrañable amigo y colaborador Pedro Puig Adam nos abandonó inesperadamente en plena madurez, cuando abordaba problemas de Cibernética y de Cálculo numérico en los múltiples caminos de esta novísima disciplina de la Matemática aplicada que le apasionaban, varios de los cuales analizó con originalidad, contemplándolos bajo el doble ángulo de la ingeniería y de la matemática abstracta. Por encima del valor de sus aportaciones científicas hay que colocar el muy alto de la persona, todo espíritu, a la que es aplicable el verso de Lope de Vega: *un hombre que todo es alma, está cautivo en su cuerpo*. Su innata vocación pedagógica orientó su fructífera vida hacia el sacerdocio de la enseñanza, que ejerció con arte y con amor, captando el cariño filial de sus discípulos. Homenaje póstumo emocionante fue el que éstos le rindieron poniendo en evidencia sus excelsas cualidades ... que elevan al llorado colega a jerarquía desacostumbrada, con nimbo renacentista". Más adelante le califica de "inspirado escritor", que usa "lenguaje poético" e "imágenes plásticas excesivas para dar metafórico relieve a sus ideas", resalta su "vena de poeta que yacía oculta en su intimidad" y ensalza también su sello de pintor, con lo que "había quedado integrada la polifacética personalidad artística de este egregio español que hemos perdido". Palabras conmovedoras de su maestro, nada propenso a adulaciones ...

Sin menoscabo de la influencia que Antonio Torroja, Miguel Vegas, Álvarez Ude y Rey Pastor ejercieron en la vida de Puig, no parece que haya duda de que quienes tuvieron mayor ascendencia sobre él fueron José María Plans y Esteban Terradas.

José María Plans y Freire (1878-1934) nace, como Puig Adam, en Barcelona, y estudia, también como él, Ciencias exactas e Ingeniería industrial. Ocupa las cátedras de Física y Química del Instituto de Castellón; de Mecánica racional, Cosmografía y Física del globo y Electricidad y Magnetismo de la Universidad de Zaragoza; y de Mecánica celeste de los estudios de doctorado de Exactas, Metodología y Crítica matemática y Matemáticas especiales para Químicos, de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid.

Trabaja en la teoría de la relatividad —recién importada a España por Blas Cabrera y Esteban Terradas— y cálculo diferencial absoluto, y se convierte en el

principal difusor de las teorías de Einstein en nuestro país, quien destaca en él "un arte peregrino de expresar con luminosidad y relieve las deducciones más abstrusas". Precisamente sobre este tema dirige la tesis de Puig Adam, titulada *Resolución de algunos problemas elementales en Mecánica relativista restringida*, que reconoce haber realizado "por indicación de nuestro querido catedrático doctor don José María Plans, y que hemos continuado bajo su tutela, siguiendo sus indicaciones ...".

Plans realiza una cierta tarea de "crear escuela", que desarrolla especialmente en la sede del Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios, que llega a dirigir en colaboración con Álvarez Ude (a quienes después se une Terradas), y es sobre todo en él donde guía la investigación de sus discípulos y colaboradores: Lorente de No, Martínez Sancho, Romañá, Puig Adam ... Este último, por cierto, posiblemente haya sido el más distinguido de todos ellos, a pesar de que después de su tesis no volviera a ocuparse más de la relatividad (aunque sí de otras cuestiones de Física matemática).

De la gran veneración que Puig sintió por su maestro, del que se sentía "hijo espiritual", dan buena muestra el hecho de tener, según afirma Pascual Ibarra, un retrato suyo en el despacho; como asimismo el tono de sus manifestaciones —algunas de las cuales veremos enseguida— con ocasión del fallecimiento de Plans.

La prematura muerte de éste también deja hondamente impresionada a toda la comunidad científica española, que le tributa varios homenajes. En la conmemoración del primer aniversario de su desaparición se celebra un acto muy sentido en el que pronuncian discursos José Barinaga —en nombre del Laboratorio Matemático y de la Sociedad Matemática Española—, Blas Cabrera —como presidente de la Academia de Ciencias y en representación de la Universidad de Madrid y de la Sociedad Española de Física y Química— y Pedro Puig —en nombre del Colegio de Doctores y Licenciados—. En la emotiva intervención de Puig Adam, se percibe por cierto algún asombro ante la visible huella de dolor que el óbito le produjo a Rey Pastor; concretamente dice: "... con la muerte de Plans descubrí en Rey una vida afectiva y una intensidad emotiva que, confieso, eran antes desconocidas para mí".

Posiblemente entre las palabras más conmovedoras que Puig escribiera sobre José María Plans se encuentran las siguientes: "Era un santo, era un sabio y era un maestro ... su constante recelo fue el de no ofender, de no molestar a nadie ... fue un enorme maestro y un gran patriota ...". E igualmente recurre a la poesía para expresar mejor sus sentimientos de pesar ante su desaparición y de afecto hacia su persona:

"Inmóvil, sin ruido, mansamente,
como una tenue luz que se apagara

borrosa la sonrisa de su cara,
cerró los ojos y abatió la frente.
Así se fue, tan dulce y suavemente,
que más que anochecer amaneciera,
como tras dura y fatigosa espera
a través de este mundo y de esta gente.
Su llama de bondad dejó encendida,
semilla de saber dejó sembrada.
Si corta fue su vida,
no por ello su ejemplo quedó en nada.
La lección que nos dio no está acabada.
¡Y el corazón no olvida!"

Amigo inseparable de Plans es el también barcelonés Esteban Terradas e Illa (1883-1950), científico de talla impresionante y asimismo maestro de Puig Adam.

Fue matemático, físico, ingeniero industrial e ingeniero de caminos, académico de las Reales Academias de Ciencias y de la Lengua; ocupó las cátedras de Mecánica racional, Acústica y Óptica, Ecuaciones diferenciales, Estadística matemática y Física matemática en las Universidades de Zaragoza, Barcelona y Madrid; dirigió junto a Plans y Álvarez Ude, como ya se ha dicho, el Laboratorio y Seminario Matemático de la Junta para Ampliación de Estudios; en 1932 fue nombrado vocal de la Unión Matemática Internacional ... Según afirma Sixto Ríos, que fue alumno suyo, es "una de las más preclaras figuras de la Ciencia, la Técnica y la Cultura que ha tenido España en este siglo".

A ello hay que añadir la actividad desarrollada en los altos puestos de responsabilidad desempeñados en la industria, como el de director general de la Compañía Telefónica Nacional, y la importante labor científica realizada en Argentina, a donde se traslada durante nuestra guerra civil. El juicio que le merece al propio Einstein, quien le considera "uno de los seis primeros cerebros mundiales de su tiempo", resume, en fin, el significado de tan ilustre personaje.

Su investigación, de gran calidad, se dirige a temas muy diversos: el movimiento de los hilos, hidrodinámica, cálculo de Heaviside, integrales de Fourier-Stieltjes ...; que le hacen ser reconocido como "nuestro primer maestro de Física teórica", según afirma Julio Palacios. También Sánchez Ron expresa un comentario muy elogioso sobre él al comparar sus contribuciones en Física matemática con las de Echegaray: "Terradas, además de ser, plenamente, un hombre del siglo XX, ofrecía en todas sus intervenciones rigor; Echegaray, por el contrario, era demasiado superficial".

Su influencia sobre Puig Adam es notoria: en física matemática, donde éste trabaja algún tiempo, y en cibernética, área de conocimiento entonces incipiente. Precisamente cuando Puig ingresa en la Real Academia lo hace sucediendo a Terradas, y en su discurso de recepción manifiesta que fue quien le dirigió "en estos últimos tiempos la brújula un tanto veleidosa de mis escarceos científicos". Y continúa con unas emotivas palabras en recuerdo de las tardes domingueras de invierno en que iba a visitarle a su casa y "se hablaba, mejor dicho, hablaba él, de las últimas novedades ... Eran [problemas] generalmente técnicos y lucía en ellos aquella erudición suya, asombrosa por lo extensa y por lo profunda. Consultábale, por mi parte, mis dificultades y problemillas. Me animaba en mis tareas; siempre tan afable, tan estimulante con su contenido tan rico en alientos y tan jugosos de consejos y orientaciones, que no hallo con quién ni cómo sustituirlos y sigo añorándolos desde su inesperada muerte".

En ese discurso evoca especialmente la tarde en que Terradas, con ocasión de la lectura de la crítica de un libro de actualidad en el que aparecían los conceptos fundamentales sobre comunicación e información, le dice: "Oiga, oiga esto ... Estamos en una era nueva, amigo Puig, ¡en una era nueva!"; reflexión que reconoce haber excitado su curiosidad. A su muerte, este pensamiento vuelve a su mente casi como un mandato —así lo confiesa—, y le anima al estudio de estos temas (servomecanismos, comunicación y cibernética); razón por la que decide presentar como discurso de ingreso en la Academia el trabajo *Matemáticas y Cibernética*, elaborado con las ideas que va construyendo en relación con esas cuestiones, y que ofrenda "a quien tan indignamente sustituyo y en ocasión de dicha sustitución".

No parece necesario ahondar más en la vida de ambas personalidades para poner de manifiesto la ascendencia sobre Puig Adam del "entrañable consejero timonel perdido" —así lo describe—, cuya sustitución "le abruma y sobrecoge". Finalizaré con las sentidas palabras que pronuncia el mismo día del fallecimiento de su maestro: "En él se extinguió un cerebro prodigioso, el de más extenso y universal alcance, que en materia mixta de ciencia pura y aplicada jamás naciera en tierras de España. Una sed insaciable de saber, unida a una rapidez vertiginosa de asimilación y a una voluntad de superación capaz de vencer toda fatiga, concentraron en esa prodigiosa vida una suma de conocimientos y de actividades que rebasan los límites de toda explicación humana".

Agradecimientos.

Quisiera dejar constancia de mi gratitud al Prof. José Javier Etayo Miqueo, por haber revisado el original de este artículo.

Referencias

[1] ANUARIO DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS (1953). "Don José Gabriel Álvarez Ude", 177-178 y 315-324. Madrid.

[2] ETAYO, J. J. (1992). "El reinado de la Geometría Proyectiva", en *Historia de la Matemática en el siglo XIX* (1ª parte). Madrid: Real Academia de Ciencias, 115-138.

[3] FERNÁNDEZ BIARGE, J. (1960). "Puig Adam: su obra científica". *Gaceta Matemática*, 1ª serie, nº 12, 5-8.

[4] FERNÁNDEZ BIARGE, J. (2000). "Pedro Puig Adam en el Instituto San Isidro" (Discurso pronunciado en la Real Academia de Ciencias el 7 de Junio de 2000 en el Acto celebrado para conmemorar el Centenario del nacimiento de Don Pedro Puig Adam).

[5] HORMIGÓN, M. (1988). "Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX", en J. M. SÁNCHEZ RON (Ed.), *Ciencia y Sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil*. Madrid: C.S.I.C. Ed. El Arquero, 253-282.

[6] JEREZ, M. (2000). "Pedro Puig Adam en la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid" (Discurso pronunciado en la Real Academia de Ciencias el 7 de Junio de 2000 en el Acto celebrado para conmemorar el Centenario del nacimiento de Don Pedro Puig Adam).

[7] LÓPEZ PIÑEIRO *et al.* (1983). *Diccionario histórico de la Ciencia Moderna en España*, Vol. II. Barcelona: Península.

[8] MILLÁN, A. (1991). "La enseñanza de la geometría en España (1875-1920)", en *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias*, Tomo II. Murcia, 1294-1306.

[9] PASCUAL, J. R. (1960). "Puig Adam: su obra didáctica". *Gaceta Matemática*, 1ª serie, nº 12, 9-14.

[10] PASCUAL, J. R. (1985). "Apunte biográfico de Don Pedro Puig Adam". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, nº 12, 21-36.

[11] PERALTA, J. (1999). *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Madrid: Nivola.

[12] PERALTA, J. (2000). "La Matemática madrileña en el panorama español de 1800 a 1936", en *Matemáticos Madrileños*. Madrid: Anaya, 183-230.

[13] PUIG ADAM, P. (1934). "D. José María Plans y Freyre". *Revista Matemática Hispano-Americana*, 2ª serie, tomo 9, 81-87.

[14] PUIG ADAM, P. (1935). "Crónica: En memoria de D. José María Plans". *Revista Matemática Hispano-Americana*, 2ª serie, tomo 10, 85-87.

[15] PUIG ADAM, P. (1947). *Curso de Geometría Métrica*, tomos I y II. Madrid: Nuevas Gráficas.

[16] PUIG ADAM, P. (1952). *Matemática y Cibernética* (Discurso de recepción). Madrid: Real Academia de Ciencias.

[17] PUIG ADAM, P. (1960). *La Matemática y su enseñanza actual*. Madrid: Ministerio de Educación Nacional.

[18] RÍOS, S. (1984). "Rasgos humanos de don Esteban Terradas". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, nº 3, 19-30.

[19] RÍOS, S. (1988). "Julio Rey Pastor (1888-1962)". *Gaceta Matemática*, 2ª serie, Vol. 1, nº 2, 129-135.

[20] SÁNCHEZ RON, J. M. (1991). "La Física-Matemática en España: de Echegaray a Rey Pastor", en *Actas del V Congreso de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias*, Tomo II. Murcia, 2-54.

[21] TORROJA, A. (1952). Contestación al Discurso de recepción: *Matemáticas y Cibernética*, de Pedro Puig Adam en la Real Academia de Ciencias. Madrid.

[22] TORROJA, J. M. (1943). "D. Miguel Vegas". *Revista Matemática Hispano-Americana*, 4ª serie, III, 291-294.

[23] VEGAS, J. M. (2000). "Miguel Vegas, la pasión por la geometría", en *Matemáticos Madrileños*. Madrid: Anaya, 231-255.

[24] VV. AA. (1988). *Selecta. Julio Rey Pastor*. Madrid: Fundación Banco Exterior.

[25] YELA, M. (1985). "Pedro Puig Adam, maestro". *Boletín de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas*, nº 5, 37-49.

Apología de la inutilidad

Pedro Puig Adam

(Discurso leido en la solemne entrega por S. E. el señor ministro de Educación Nacional de los títulos académicos a los Ingenieros industriales de la promoción de 1944-1945)

Excmo. señor, señores:

Tengo que empezar confesando paladinamente que el presente discurso está hecho en colaboración. Mi colaborador es un inseparable y pegajoso amigo, cuya vida guarde Dios muchos años, quien se ha empeñado en no dejarme punto de reposo en cuanto haga: Su crítica y su ironía me acompañan a todas horas; tampoco podían faltarme, pues, en la hora presente.

Por más que quiero, no puedo llegar a desprenderme de su pertinaz escepticismo, y, contagiado, termino con frecuencia por hacerle caso. Hago constar, pues, que fue él, y nadie más que él, quien me sugirió el tema "Apología de la inutilidad", tema, por sí solo, peligroso y atrevido para ser desarrollado en un templo donde se rinde culto a la diosa utilidad. Pues consideren encima el compromiso que supone, para un humilde sacerdote de este templo, engalanarse con la vestidura sacerdotal en holocausto de la diosa rival. La tentación era, sin embargo, tan poderosa para un profesor de Matemáticas, de esas "inútiles Matemáticas", y los arrumacos de mi inseparable humorista eran tan insistentes, que al fin cedí, y aquí me tienen ustedes pidiéndoles de antemano perdón.

A lo que no accedo, en manera alguna, es a empezar como él quería que empezara. Juzguen ustedes, para vergüenza del amigo, el párrafo con el que iniciaba su guión al saber que iba a apoyar mi empresa en observaciones de prólogos y de discursos anteriores:

«Los más sesudos psicólogos de masas —me dictaba socarrón— todavía no se han puesto de acuerdo sobre cuál es el medio más eficaz de guardar un secreto. Opinan algunos que este medio no es otro que el de verter el secreto en el prólogo de un libro; otros creen mucho más seguro todavía enunciarlo en un discurso académico. Fúndanse, claro es, los primeros en que no hay quien lea los prólogos de los libros, y los segundos, en que nadie, absolutamente, escucha los discursos académicos».

No te alarmes —me decía— que al hablar así no andarás muy lejos de la verdad. Pero, si quieres suavizar la cosa, añade que no te atreves tú a sentar tan categóricas afirmaciones; añade que estás dispuesto a dar la menor resonancia posible a tus palabras, y que a tal fin has creído que podrías obtener los más lisonjeros resultados, apoyándote en ambas escuelas, y espigando aquí y allá, para tu charla, palabras de prólogos y de discursos que juzgas dignos del mayor secreto…

¿Qué les parece a ustedes? ¿Se puede empezar, hablando así, con tan alegre desenfado a un auditorio selecto y amigo? De ningún modo. ¡Ni lo soñara! Por muy ingeniosa que fuera la pirueta, esto no iba yo a decirlo, y ya ven ustedes como he cumplido mi palabra.

Enfadóse el amigo; me abandonó a mi tarea, y aproveché entonces la gozosa calma en que dejó mi espíritu para poner manos a la obra.

Concebí rápidamente el plan. Una vez más era preciso afear a los espíritus llamados prácticos su desdén por los entusiasmos y desvelos de los teóricos, dejando para otro ambiente y ocasión propicia afear también a éstos, en apología simétrica de la utilidad, su desdén hacia las aplicaciones.

Teoría y práctica, pensamiento y acción, son como la gallina y el huevo de la paradoja; y es necesario demostrar a los «puros» ya los «utilitarios» lo infundado de su recíproco desprecio y de su orgullo.

Aquella vieja mujer de la anécdota, increpando a Thales de Mileto por su falta de visión de las cosas de la Tierra, la noche en que éste cayó a un foso mientras caminaba absorto en la contemplación del firmamento, podía tener disculpa hace veintiséis siglos. Hoy, al reconocer que los éxtasis contemplativos como los de Thales dieron origen a la ciencia astronómica, y que ésta, tan aparentemente inútil, hizo posible la navegación que nos descubrió nuevos continentes y fuentes de riqueza, nos parece aquel alegato tan burdo como injusto.

No remedemos, pues, a la vieja del cuento, menospreciando afanes dignos por atribuirles una supuesta esterilidad, porque nadie es capaz de vaticinar sobre la fecundidad de una idea ni de prever los insospechados continentes y riquezas a que nos puede conducir. Toda la historia de la Ciencia es la de una constante y monumental simbiosis entre la Matemática y la Técnica, y tan improcedente resulta que aquélla reniegue de su origen empírico, como que ésta pretenda ignorar todo lo que debe a la primera.

Sabemos todos el papel que la Matemática desempeña en el estudio de los fenómenos naturales. El hombre, impotente ante la enorme complejidad de los mismos, trata, en su afán especulador, de sustituir esta complejidad por la esquemática sencillez de unos entes de razón sobre los cuales pueda discurrir, cómodamente, el razonamiento puro. Obtenidos los frutos de este razonamiento, proyéctanse nuevamente en el campo de la realidad; y así resulta que los conceptos

puestos en juego por la matemática aplicada son sólo conceptos matemáticos «per accidens» a través de un doble proceso de abstracción y de concreción en el que la matemática ocupa una posición central de mecanismo intermediario. Pero una vez elaborados estos entes de razón (más o menos ajustados a los que la realidad nos presentara), adquieren pronto carta de ciudadanía en nuestra mente, se enseñorean de ella, y conviértense en conceptos matemáticos puros, en conceptos matemáticos «per se».

La Matemática teórica recibe, pues, de la Ciencia natural los impulsos y excitaciones iniciales, como el arroyo recibe de la tierra el primer chorro cristalino; pero una vez abierto el nuevo cauce, se precipitan por él, en impetuosa corriente, las investigaciones teóricas, las aguas puras de afluentes secundarios, nieves fundidas de altas cumbres, que vienen a enriquecer su caudal, hasta quedar sumido en imponente río aquel primer hilillo que brotó de la madre tierra. Muchas de estas aguas piérdense en el mar del olvido, pero otras, las fecundas, quedan como remansadas en lagos, cuyas silentes capas desarrollarán todo su potencial el día en que los hombres de otras generaciones lleguen a darse cuenta de que con ellas pueden hacer germinar terrenos nuevos o mover nuevos ingenios.

No otro ha sido el proceso de génesis y proliferación de tantas y tan bellas teorías abstractas. La Geometría, que, según evoca su nombre, tuvo origen en un problema tan material como es el deslinde y medición de tierras, terminó siendo el edificio racional más bello y perfecto que ha construido el pensamiento humano. Y ¿quién había de decir a Apolonio que sus desinteresadas elucubraciones sobre las cónicas habían de servir, diecinueve siglos más tarde, a Kep!er para descubrir las leyes que rigen el movimiento de los planetas ? y ¿ quién había de decir a Kepler que sus investigaciones constituían la base en la que Newton había de apoyar su deducción de la ley de la gravitación universal ? Y ¿ quién podía sospechar entonces que aquel cálculo de fluxiones que Newton ideara para el estudio de algunas cuestiones mecánicas, era nada menos que el primer hilillo de agua del impetuoso caudal que fecundó toda la técnica y toda la filosofía determinista de los siglos XVIII y XIX?

¿Quién pudo predecir, asimismo, que unas curiosas e "inútiles" investigaciones de los maestros Bernouilli y Laplace sobre problemas de juegos de azar, habían de convertirse, a su vez, andando el tiempo, en el instrumento matemático apto para expresar el indeterminismo de la Física moderna?

No quiero enojaros con más ejemplos; basten los indicados para ilustrar el fenómeno de simbiosis, es decir, de mutua ayuda biológica. a que antes aludí, entre la ciencia pura y la aplicada, y quede aquí comprobado cómo va desplazándose, al ritmo del progreso, el umbral que pretende separarlas; quede, por fin,

demostrada la imposibilidad de establecer una división tajante entre una y otra. La ciencia pura de cada época se convierte en ciencia aplicada de otra posterior.

Se me objetará, acaso, que hay dos matemáticas, la que mira al futuro y la que mira al pasado; la que es a un tiempo brote y puntal del progreso técnico, y la que se desentiende de este progreso para extasiarse en autocontemplaciones retrospectivas, con el simple afán depurador de conceptos y elaborador de síntesis y de abstracciones.

Ejemplos clásicos de una y otra serían, respectivamente, la matemática oriental y la griega. Ejemplos modernos de la primera, la teoría de ecuaciones diferenciales con sus filiales, el cálculo de variaciones, las ecuaciones en diferencias finitas, ecuaciones integrales, íntegro-diferenciales, funcionales, etc., cuyo origen radica invariablemente en algún problema físico; y ejemplos recientes de la segunda lo constituirían: la teoría de conjuntos, la de grupos, la axiomática, los espacios abstractos, la topología, el álgebra moderna, la metamatemática, etc.

Pues bien, aún admitiendo este doble sentido en el crecimiento del edificio matemático, ya hemos visto cuán torpe y contradictorio sería dar patente de utilidad a la matemática primera y negarla a la segunda, pues ambas constituyen un cuerpo único e indivisible.

La Matemática necesita, para la seguridad de sus construcciones, revisar periódicamente la firmeza de sus bases. A mayor nivel de edificación, mayor profundidad de cimientos. La misma ecuatorial, que no pretende altura, busca asiento seguro para su pie en la profunda roca, tan sólo porque ha de escrutar panoramas muy lejanos.

En el árbol de la ciencia, como en los árboles reales, a mayor exuberancia de follaje corresponde mayor calado de raíces, y no es tarea tan liviana como parece, buscar aquéllas de donde procede la savia común que alimenta varias ramas.

Sabido es que la Matemática rigurosa es fruto de una corriente revisionista iniciada en la segunda mitad del siglo pasado por los matemáticos más puros de la época. Pues ved aquí lo que Rey Pastor dice sobre el problema del rigor en el prólogo de su Cálculo infinitesimal para ingenieros:

«No falta quien opina que el rigor, es decir, la precisión y la claridad, son exigencias del matemático puro, y que la mente del ingeniero puede llenarse con vagos juegos de palabras, de sabor metafísico, que disimulen la oscuridad del pensamiento.»

«Repase el lector las antiguas definiciones de curva, de tangente, de infinitésimo, de diferencial, etcétera, y después de larga cavilación sobre los puntos consecutivos de una curva, sobre la diferencial que ni es cero ni tiene valor ninguno, sobre los infinitésimos que se desprecian sin alterar la exactitud del resultado, deberá descansar en la fe y aceptarlo todo como dogma.»

«Al cabo del tiempo se pusieron en claro todos estos conceptos; la Matemática dejó de ser Metafísica para hacerse Aritmética, es decir, clara, sencilla, limpia de nebulosidades y libre de discusiones. Pues bien, nadie como el técnico, que ha de manejar realidades, debe ser exigente en claridad y precisión; nada más lejano de la Metafísica que el hierro y el hormigón.»

... ¡y es un matemático de los más geniales y más puros quien lo dice!

Pero veamos también cómo, no sólo para apagar la sed de claridad de nuestro pensamiento, pueden ser útiles, el rigor y la abstracción. Fue sin duda un afán puramente crítico y sistematizador el que indujo a intentar inútilmente durante tantos siglos, la demostración del postulado de Euclides. Cuando esta demostración se encauzó por vías de reducción al absurdo, partiendo del supuesto de su negación se empezó a edificar una "quimera" : la geometría no euclídea. Pero un buen día esta geometría, nacida así, como escoria residual de un vano empeño, se mostró ser riquísimo producto intelectual: nada menos que el esquema adecuado para plasmar la relatividad restringida, cuyo principio tuvo la virtud de unificar la explicación de ciertos fenómenos ópticos y mecánicos que se mostraban contradictorios en el marco de la cinemática clásica, y de predecir otros que la realidad confirmaba.

¡ Sabe Dios qué sorpresas guarda todavía la Providencia para esta generación y las futuras en orden a la fecundidad práctica de ciertas teorías que hoy parecen a muchos como inconcebibles nubes de vapor en la estratosfera ! Para terminar la parte documental de mi discurso, vaya un ejemplo, sin salir de España: El curso desarrollado en la Academia de Ciencias, hace dos años, por nuestro estimado y admirado colega D. Ricardo San Juan, sobre magnitudes, homogeneidad y semejanza en la Física y sus aplicaciones; curso en vías de publicación, en el que, para dar fundamento riguroso a las operaciones simbólicas que encierran las ecuaciones dimensionales y aún para definir cierta clase de magnitudes físicas, se vale de los instrumentos que se han mostrado naturales para ello, a saber: el álgebra moderna y los espacios abstractos, productos ambos de la más pura matemática contemporánea, donde el símbolo deja de tener significado numérico exclusivo, para poder ser aplicado a todo conjunto de entes ligados por determinadas relaciones.

Resumiendo: Ningún conocimiento puede ser condenado a inutilidad perpetua. Los únicos conocimientos que jamás se aplican son los que no se tienen. Cuantos más conocimientos se adquieran, mayor riqueza de útiles hallaremos en nuestro taller intelectual, mayores posibilidades tendremos de simplificar y abreviar nuestra tarea echando mano del útil adecuado en cada caso.

Es absurdo, pues, presentar la teoría en antagonismo con la práctica. Los párrafos que hemos leído de uno de nuestros más profundos teóricos, podrían ser

suscritos por los más conspicuos ingenieros prácticos. No se es poco práctico por tener una buena base teórica, no; sino, en todo caso, por hacer mal uso de ella. Tan poco práctica resultaría una balanza de precisión en una cartería, como un pesacartas en un laboratorio; y las teorías, como los instrumentos, tienen una virtud pragmática que no es sólo valor intrínseco sino también función de la oportunidad al aplicarlas.

El sentido práctico radica precisamente en esto: en adecuar en todo momento los medios de que se dispone al fin que se persigue. Y esto, naturalmente, ya no lo enseña la teoría; es un sentido con el que se nace o que se cultiva con la educación.

Pero esto nos llevaría ahora al problema pedagógico de la educación del ingeniero, saliéndome así del tema propuesto; que creo haber desarrollado ya cumplidamente.

* * *

Al poner así punto final al borrador de mi discurso, aspiré satisfecho el aire de la Sierra; me hallaba recostado bajo unos pinos, en la ladera de los montes de El Escorial, y contemplaba la inmensa llanura castellana sedienta y reseca bajo un sol que cruzaba ya el equinoccio, conservando todavía la implacable fuerza estival. No hacía muchos días, alguien a quien debo respeto y gratitud, y por quien siento gran admiración y afecto profundo, me había hecho el honroso encargo de hablar en este Acto, y sentía la satisfacción íntima de haber puesto término a una tarea comprometida y de haber complacido unos deseos que eran como órdenes para mí.

Pero me duró poco la calma y la satisfacción...; la irónica voz de mi inseparable escéptico sonaba nuevamente en mis oídos diciéndome por lo bajo:

— Crees haber terminado tu discurso y no lo has empezado todavía.

— ¡Cómo! ¿Acaso no he demostrado palpablemente la fecundidad de la ciencia llamada inútil?

— Desde luego, pero con ello no has hecho la apología de la inutilidad, sino que has ponderado la *utilidad* de lo aparentemente inútil. Mira, pues, por dónde sigues rindiendo culto a la diosa de vuestro templo, y lo único que has demostrado es no haber alcanzado, ni por asomo, el sentido de mi intención. De todo tu flamante discurso sólo se salva eI justo homenaje que rindes a maestros y amigos; todo lo demás, al cesto; es aburrido como un prospecto de específicos. A tal enfermedad tal tratamiento, a tal problema tal teoría... Con esto vas a aburrir a tus oyentes... Es preferible que les cuentes una película... Las hay también muy instructivas. ¿Te acuerdas de aquélla que vimos juntos hace años?

Era una isla olvidada y feliz de Oceanía. Con sus pequeñas pasiones y sus grandes luchas contra los elementos naturales; ¡ pero era feliz ! Las perlas, que en ella abundaban, eran piedrecillas redondas que se tiraban al suelo como inútil residuo, y sólo servían acaso como entretenimiento y diversión de la chiquillería.

El humo de una nave manchó un día el horizonte. Era la civilización blanca que llegaba; con su oro, con su alcohol, con sus vicios, sus espejos y su reluciente quincalla. Y brotó en las nativas una vanidad antes desconocida, y en ellos la codicia; y aquellas piedrecillas de desecho adquirieron de pronto tan insospechado valor, que los hombres peleaban y se desvivían por adquirirlas, destrozándose el pecho en inmersiones tan prolongadas que terminaron con la vida de aquel mozo fuerte y robusto de antaño. Saliva y sangre espumaba la boca del negro moribundo; espumarajos de hiel y de desesperación brotaban del rostro contraído del padre, mientras unos trompetazos apocalípticos daban fondo musical al cuadro desolador.

Las sombras de la civilización, ¡las sombras blancas!, habían hecho la isla desdichada ... ..

De nada vale la civilización si sólo afecta a la materia. La gran tragedia actual de la humanidad doliente consiste precisamente en el hecho de haber progresado demasiado en lo material y nada en lo moral; con lo que se ha visto dueña de las fuerzas naturales y las ha aplicado para satisfacer su vesanía destructora.

Fines absolutos del alma humana son la verdad, la bondad y la belleza. Rendimos culto a la verdad, a cierta clase de verdad, porque nos es útil, y olvidamos los factores de bondad y de belleza porque juzgamos a ésta inútil y a aquélla no sólo inútil sino también enojosa en muchas ocasiones que llamamos «prácticas».

¡Etica y estética! ésta es la doble y pretendida inutilidad que debías haber defendido en el templo de tus cuitas, hasta demostrar que nada hay más bello ni más práctico que el Evangelio.

¿Te acuerdas de la adoración que sentía, cuando era joven, por el mito del progreso? Todo sacrificio me parecía poco para conseguir un lugar entre los hombres que la Humanidad recuerda como sus grandes propulsores. Parecíame como si la vida no valiera la pena de ser vivida más que para sobrevivir en el recuerdo de los semejantes.

Pasados algunos años, el mito de tal gloria, de esa vana ilusión de supervivencia, se había desvanecido al comprobar que también en la paternidad de las ideas había mucho fraude; que también en la designación de elegidos jugaba en ocasiones la comedia movida por hilos de sectarismo y de pasión. El día en que noté el absoluto desinterés con que ya veía tales honores, por la consiguiente subestimación del medio social que podía conferírmelas, me di cuenta de que mi alma había envejecido, y hallé compensación a mi tristeza en los goces de la intimidad familiar. Las primeras ilusiones paternales, el encanto de una responsabi-

lidad compartida en dulce compañía, la certeza ya de una verdadera supervivencia en el recuerdo, en los sentimientos, y hasta en la semejanza física de aquellos seres a quienes arrullaba y defendía, me hacían pensar que bien empleada estaba la atención robada a los hijos del pensamiento para atender y cuidar a los hijos de la carne.

Quedaba, no obstante, todavía intacto el sentimiento de la Ciencia como deber. El progreso no podía detenerse, y si en la distribución de tareas humanas me había sido asignado un modestísimo esfuerzo intelectual, era designio inexcusable seguir trabajando, al margen de todo afán de gloria, pero en cumplimiento estricto de una consigna. Fue la época en que máximo culto rendí a la utilidad: me interesaba todo problema en el que pudiera poner mi esfuerzo al servicio de algo práctico.

Mas llegó un día en que aquellos hijos, carne de mi carne, temblaban convulsos junto a la mía, mientras el suelo trepidaba y los cristales de nuestro hogar saltaban hechos añicos. Eran también sombras blancas, con blancura de aluminio que el ingenio combinado de todos había creado para burlar la gravedad al servicio de la destrucción Y entonces me pregunté: ¿Para llegar a eso, tanto esfuerzo?…

Pocos días después cogía unos pinceles y empezaba a pintar. Ante la quiebra del último puntal que me alentaba, mi alma era ya un montón de arrugas. Se hacía preciso remozarla; y, en busca de un aliento infantil y rejuvenecedor, iniciaba mis primeros balbuceos en un arte nuevo para mí, con el que olvidaba mi amargura y me forjaba una fáustica ilusión de juventud y aprendizaje...

Aproveché la pausa de mi «alter ego» para consolarle y para animarle como buenamente pude. No era fácil encontrar palabras para rebatir su profundo y contagioso desaliento. ¡ No había que ver las cosas desde un punto de vista tan pesimista ! Si todos pensáramos lo mismo, si todos nuestros sanos impulsas creadores orientados al bien humano, hubieran de ser ahogados en flor por temor a que la misma Humanidad los aplicara para su mal, tanto valdría poner punto final al progreso y volver al trágico duelo del hombre primitivo con la selva.

La vida, al fin y al cabo, es lucha, y hay que aprestarse a ella; aunque sólo sea en legítima defensa. Quizás seamos simples muñecos de un espejismo progresista, que al pretender redimirnos de nuestra innata debilidad frente a las enormes fuerzas naturales, nos obliga a aglutinarnos en multitudes compactas, para ganar en potencia lo que perdemos en bondad; que el hombre aislado no es acaso tan malo como parece, pero no tiene fuerza; y la masa es fuerte… pero carece de moral.

¿Y por qué la Ley de Dios no ha de regir también para las masas ? —me replicó con exaltación creciente— ¿Por qué lo que no sería capaz de hacer un individuo como tal, lo realiza sin escrúpulos en nombre de una colectividad a la que pertenece? ¿Por qué los sabios incapaces de utilizar para su peculiar provecho un

invento destructor, lo entregan sin temblar a la Humanidad irreflexiva para que se destroce? ¿Qué diríamos de un padre poniendo en manos de su hijo inconsciente un puntiagudo puñal? ¡No, mil veces no! Hay que hacer hombres buenos, no fieras sabias. La ciencia ha dejado ya de tener el impulso desinteresado de otros tiempos; hoy es ciencia macabra al servicio del mal. Se ha desprendido del sentido deportivo que tuvo en Grecia, que tuvo en el Renacimiento, ¡venturosos siglos de la ciencia inútil! Hoy escupimos al Cielo el humo de nuestras fábricas y el humo de nuestra soberbia. Llegó la era de la desintegración total, la desintegración del arte, de la familia, hasta del átomo…

— ¡Calla!

— … y es inútil que se intente guardar el secreto. Lo que unos hombres han realizado, pueden realizarlo otros con la ventaja que confiere la seguridad en la existencia del resultado. Y el día en que cada país tenga secretamente guardadas posibilidades inconcebibles de destrucción ¿qué porvenir espera a la Humanidad?

— ¡¡Calla!!

Calló al fin, y callé yo también, espeluznado. Balanceábanse las copas de los pinos sobre mi cabeza atormentada. Los erizados plumerillos de sus hojas, parecían limpiar de polvo la superficie azul del cielo. Ni un estruendo en todo el horizonte, ni un zumbido de motor; sólo el plácido tañido de las campanas del Monasterio, solemnes e indiferentes al paso de los siglos, parecían recordarnos la venturosa paz de que gozábamos. Y mis labios musitaron una oración en súplica ferviente y otra en acción de gracias a la Providencia y al hombre que supo interpretarla.

Y aquí me tenéis, con dos discursos: el ingenuo y el escéptico. Hombres prácticos de hoy y de mañana, elegid el que queráis; mejor diría, tomad de ambos lo que os parezca menos desmoralizador y más estimulante. Pero cualquiera que sea la opinión que de uno y otro hayáis formado, tened por seguro que en los momentos de desfallecimiento a que pueda conduciros la dureza de vuestra lucha, volveréis a encontrar siempre, bajo los tres techos de esta casa, aquella reserva de aliento y de fe en vuestro destino que habéis ido atesorando en medio de sus aulas.

Volved, pues, a ellas, volved a vuestra casa solariega con frecuencia, para recibir de nuevo el impulso vigorizador de aquellas primeras ilusiones estudiantiles que en estas paredes quedaron prendidas. Ellas os devolverán también el eco nostálgico y lejano de voces que desaparecieron para siempre y que van unidas en vuestro recuerdo al carro triunfal de entusiasmo que guiaba vuestra juventud.

Permitidme para terminar, recoger hoy aquí el eco de las voces recientemente extinguidas y que aún vibran en nuestra evocación.

La voz tenue y aterciopelada de D. Benjamín Monfort, el decano de los profesores auxiliares de la casa, y de los ingenieros de Hacienda, compañero sencillo y cordial de gratísimo trato.

La voz de grave y rica sonoridad levantina de D. Cayetano Cornet —*cor net,* corazón limpio—, bondadosa sonrisa, afable campechanía, profesor titular de Dibujo en la Escuela de Barcelona, maestro como Monfort de toda una generación de Ingenieros, a la que me honro en pertenecer, ya que de él recibí afecto y enseñanza en los comienzos de mi carrera.

Y, por fin, aquella voz inolvidable que durante cuarenta años, sin interrupción en el tránsito de alumno a profesor, llenó de cálidos y nobles acentos estas aulas; la que nunca desmayó, si bien en los últimos tiempos se entrecortaba por fatigosa respiración, la de mi entrañable compañero y amigo, aquel espejo de caballero que se llamó D. Alfonso Torán.

Cada día al entrar en cátedra me estimula y conmueve su recuerdo. Cada vez que trato de personificar en alguien las virtudes de fe y entusiasmo por nuestra Escuela acude a mi memoria su figura. Al hablaros antes del poder alentador de estas paredes pensaba también en él. Me confesó en varias ocasiones que la única hora romántica de su jornada de trabajo, aquélla en que gozaba su espíritu con los goces de una esperanza renovada, era la hora que dedicaba a la Escuela. Por esto no había medio de sujetarle en sus convalecencias. En cuanto sus fuerzas eran tan sólo capaces de sostenerle, D. Alfonso burlaba el cuidado de los suyos y venía gozoso a ocupar su puesto. Su ilusión por la carrera y por la Escuela le acompañó hasta el fin de su vida. Aún recuerdo la penosa impresión que me causara su imponente palidez en la fiesta del año pasado. Grave como estaba, no quiso faltar a ella; no podía faltar; y quién sabe si ello precipitó su fin. Hoy sigue con nosotros en espíritu y desde la región que Dios destine a los que mueren en Su Gracia, contemplará gozoso la que no llegó a ver en vida: la entrega del Título, por él tan estimado, en manos de su primogénito.

Pues bien; en nombre de su memoria, de la de aquel santo varón para quien la Escuela antes que de Ingeniería lo era de nobleza y de caballerosidad, yo pido a todos los que vais a recibir el codiciado diploma que os faculta para ejercitar vuestro ingenio en el arte de la creación industrial, que tengáis presente su ejemplo, y que el uso que en la práctica hagáis de vuestro título esté siempre tamizado por el más exquisito buen gusto y por la más rígida y austera moral.

Algunas consideraciones en torno a la *Automática* de Torres Quevedo

Francisco A. González Redondo

Departamento de Álgebra. Universidad Complutense de Madrid

Lourdes de Vicente Laseca

Profesora Numeraria de Matemáticas de Enseñanza Secundaria. Madrid

Abstract

The most relevant contribution of Leonardo Torres Quevedo to the History of Science is the definition, theoretical statement and practical exemplification of a new scientic discipline with technological extensions: Automatics. In this paper, the 'automatic chess player' is studied in the context of this newly created science.

1. Introducción. De los *Ensayos sobre Automática* al 'aritmómetro'

En enero de 1914 aparece publicado en el nº 7 del Tomo XII de la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* de Madrid la que, probablemente, pueda considerarse obra cumbre del pensamiento científico español, la memoria *Ensayos sobre Automática*, de Leonardo Torres Quevedo, con un subtítulo que precisa y resume unos ambiciosos contenidos, clara y sintéticamente expuestos: *Su definición. Extensión teórica de sus aplicaciones*.[1]

Efectivamente, en este trabajo caracterizaba una nueva ciencia agregando a la teoría de las máquinas una sección especial,

<<la *Automática*, que examinara los procedimientos que pueden aplicarse a la

[1] Este trabajo se publicó en francés en vida del inventor, Torres Quevedo, L. (1915): "Essais sur l'automatique. Sa definition. Etendu théorique de ses aplications", en *Revue générale des sciences*, 15 de noviembre de 1915. Brian Randell editó la versión inglesa en 1973, *The Origin of Digital Computers*. Berlín: Springer-Verlag. Existe una versión trilingüe (español-francés-inglés), edición limitada de INTEMAC, con presentación de F. González de Posada.

construcción de autómatas dotados de una *vida de relación* más o menos complicada>>.

Además de tener *sentidos, miembros, energía* suficiente, etc,

<<se necesita, y éste es el principal objeto de la Automática- que los autómatas tengan *discernimiento*, que puedan en cada momento, *teniendo en cuenta las impresiones que reciben, y también , a veces, las que han recibido anteriormente*, ordenar la operación deseada. *Es necesario que los autómatas imiten a los seres vivos, ejecutando sus actos con arreglo a las impresiones que reciban y adaptando su conducta a las circunstancias*>>.

En nota de pie de página anunciaba:

<<El estudio teórico y experimental de estos procedimientos es el fin principal del *Laboratorio de Automática*, de cuyos trabajos me propongo dar cuenta en notas sucesivas que formarán la continuación de estos ensayos>>.

El 26 de junio de 1920 presenta el inventor en París, acompañándolo de una memoria explicativa, su "Arithmométre électromécanique" [2], en el marco de la celebración del Centenario del aritmómetro de Thomas de Colmar. En ella, después de destacar, de nuevo, que en los *Ensayos* había demostrado teóricamente la posibilidad de la construcción aludida de autómatas, escribe: <<Y fue para demostrar experimentalmente esta posibilidad para lo que he construido el aritmómetro, como había construido anteriormente el jugador de ajedrez, que pudo verse en el Laboratorio de Mecánica de la Sorbona en 1914>>.

Desde hace tiempo había sorprendido que entre un trabajo y otro (1914-1920), Torres Quevedo no hubiese dedicado una sola línea a su 'primer ajedrecista'. Escribía González de Posada [3]:

<<El primer ajedrecista se construye alrededor de 1912 con fines de demostración. Llama la atención la inexistencia de referencias al ajedrecista en los *Ensayos sobre Automática*, donde sí se citan el telekino y las máquinas analíticas>>.

Este autómata lo había presentado, como él mismo afirma, en París en 1914, dictando las correspondientes lecciones explicativas, que fueron recogidas por H.

[2] Comunicación presentada en l'Academie des Scienes de París y publicada en el volumen *Les Machines á Calculer*.

[3] González de Posada, F. (1992): *Leonardo Torres Quevedo*. Madrid: Fundación Banco Exterior. Además de contener un estudio en profundidad del conjunto de su obra, en este libro se reproducen facsímiles de las obras escritas más importantes del inventor iguñés.

Vigneron en un artículo publicado en *La Nature* titulado "Les automates. Le joueur d'échecs automatique de M. Torrés y Quevedo".

Parecía que D. Leonardo, perezoso para escribir, como tantas veces reconoció, hizo suyo este artículo, ahorrándose un esfuerzo que para él debía ser considerable, y a aquél debía dirigirse, como único recurso, quien quisiera conocer o estudiar los dispositivos y el funcionamiento de la máquina. [4]

Más aún, en 1920 presenta también su 'segundo ajedrecista', evolucionado del primero en fiabilidad, apariencia y terminación, construido en colaboración con su hijo, auxiliar en aquellos años del *Laboratorio de Automática,* Gonzalo Torres-Quevedo Polanco, y tampoco publica memoria explicativa alguna.

2. Descripciones detalladas del 'ajedrecista' [5]

Sin embargo, el artículo de Vigneron no fue el único trabajo sobre este autómata. En las páginas de *Scientific American Supplement* nº 2079, del 6 de noviembre de 1915, también se publica una descripción del aparato a partir de las explicaciones del propio inventor, ilustrada con numerosas fotografías y esquemas:

<<Torres piensa que de ninguna manera se han alcanzado los límites en cuanto a lo que las máquinas automáticas pueden realizar, y para sostener sus opiniones presenta su máquina automática para jugar al ajedrez>>.

Además, estudios posteriores han ido sacando a la luz publicaciones sobre el jugador de ajedrez desconocidas u olvidadas en el ámbito torresquevediano.

1. El 21 de octubre de 1915 impartió el sabio iguñés una conferencia sobre el ajedrecista en el Ateneo de Valladolid, en el marco del Congreso que en aquella ciudad celebró la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias, y en el que se exhibían algunas de las máquinas inventadas por D. Leonardo.

   Como en las referencias anteriores, tuvo que ser otra persona, en este caso el Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos D. Fermín Casares Bescansa, quien reprodujera <<según notas tomadas al oído [...] Para que el público en general, aun los más extraños a esta clase de problemas, se penetrase de la utilidad de esta clase de estudios, concibió el Sr. Torres Quevedo el ajedrecista, autómata que parece

[4] Este trabajo lo cita y utiliza García Santesmases, J. (1980): *Obra e inventos de Torres Quevedo*. Madrid: Instituto de España.

[5] Las referencias que se mencionan en este parágrafo se hicieron públicas en González de Posada, F. y González Redondo, F. A. (1999): "La Bibliografía científica de Leonardo Torres Quevedo. Actualización", en *Actas del III Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra"*. (pp. 289-296). Madrid: Amigos de la Cultura Científica.

obedecer a una acción inteligente>>. En suma, una nueva descripción y nuevos esquemas. [6]

2. Por otro lado, del 6 al 11 de mayo de 1917 se celebró en Sevilla el siguiente Congreso de la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Como en ocasiones anteriores, las sesiones iban acompañadas por una exposición de material científico. En el Catálogo, que comienza con el Laboratorio de Automática, se describen los diferentes aparatos presentados. El primero es el

   <<Ajedrecista Torres Quevedo. Modelo de ensayo y demostración [...] Tóscamente construido, como se ve, y es además muy complicado; por eso se descompone con facilidad; pero juega bien con frecuencia, y esto basta para la demostración que se busca>>. [7]

3. Dos artículos de Torres Quevedo sobre el 'ajedrecista'

Las referencias mencionadas en el parágrafo anterior, aunque podría considerarse que refutan parcialmente la opinión acerca de que no existían escritos sobre el ajedrecista, seguían pareciendo poco. Faltaban todavía las palabras de D. Leonardo. Tenían que existir escritos del propio inventor que, por alguna razón, se habían olvidado, habían pasado desapercibidos a sus biógrafos y no habían sido redescubiertos por aquellos investigadores que han analizado las creaciones torresquevedianas desde la actualidad. [8]

En efecto, después de estudiar diferentes revistas científicas, hemos detectado dos artículos firmados por el propio Torres Quevedo que hasta este momento no se conocían:

1. Con motivo de la presentación de sus aparatos en París en 1914, publica nuestro

[6] Puede compararse con la exposición de material científico aneja al Congreso de Madrid de esta Asociación del año 1913.

[7] Este catálogo se menciona en Ortiz, E. L. (1993): "Leonardo Torres Quevedo y Julio Rey Pastor: el cálculo geométrico y el cálculo mecánico en la Escuela Matemática Española", en González de Posada, F. *et al.* (eds.) *Actas del II Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra"*. (pp. 55-81). Madrid: Amigos de la Cultura Científica.

[8] Aunque en la Universidad Politécnica de Madrid se leyó la Tesis Doctoral de Hernando González, A. (1996): *Leonardo Torres Quevedo, precursor de la Informática. Valoración pormenorizada y contextualizada de la singularidad histórica de su obra como creador de la Automática* -dirigida por F. González de Posada-, las consideraciones que hacemos a partir de este parágrafo son novedosas y están ausentes de la Tesis del Prof. Hernando, a la que aportan matices complementarios.

inventor un breve artículo en el periódico *Le Matin*, que aparece traducido en la *Gaceta del Norte*, y que se reproduce en *Madrid Científico* [9], con el título "El ajedrecista automático de Torres Quevedo". Tras hacer una breve descripción del funcionamiento del "jugador de ajedrez", pasa a otro ejemplo habitual en sus explicaciones: el del torpedo automóvil, en el que

<<la máquina deduce la maniobra de los indicadores por medios puramente mecánicos. Como en las máquinas de calcular, el trabajo *cerebral* del hombre es el que la máquina hace>>.

A continuación, y tras reconocer que ya nadie negaba que los autómatas pudieran tener órganos sensibles que les permitan conocer las circunstancias que determinan sus maniobras, comenta que

<<no se quiere admitir que puedan poseer algo análogo a un cerebro y deducir, en cada caso de las respectivas circunstancias, las operaciones que hay que realizar>>.

Y termina, tras recordar que había demostrado teóricamente en los *Ensayos* la posibilidad de construir autómatas con una vida de relación tan completa como se quisiera, escribiendo:

<<A esta tesis le faltaba una demostración, y la he hallado en la realización del jugador de ajedrez>>.

2. En 1915 escribe D. Leonardo otro artículo, titulado "Máquinas y autómatas", en la revista *Nuevo Mundo* que poco tiempo después se reproduce [10] en *Madrid Científico*. Comienza tratando la <<utilidad de las máquinas industriales>> que <<son fuertes [...] son hábiles [...] son sensibles [...] son inteligentes [...]>>.
   Finaliza el artículo diciendo:

   <<Este método electro-mecánico [...] es, a mi juicio, susceptible de aplicaciones prácticas, y por eso creí útil ilustrar y comprobar mis explicaciones, mostrar experimentalmente su eficacia, aplicándolo desde luego a un problema de Automática algo complicado. A este objeto responde exclusivamente la construcción del ajedrecista. Nunca se obtendría directamente de él ningún resultado práctico; pero quizá señale un camino que nos lleve a obtenerle>>.

[9] En el volumen 21 (1914), pp. 312-313.

[10] En el volumen 22 (1915), pp. 394-395. Se integrará en Torres Quevedo, L. (1917): *Mis Inventos y otras páginas de vulgarización*. Madrid: Hesperia.

4. Documentación torresquevediana inédita

Más aún, hemos encontrado en el Archivo familiar deTorres Quevedo [11] una nota mecanografiada inédita titulada "Trabajos del Centro de Ensayos de Aeronáutica y del Laboratorio de Automática" <<facilitada por el Sr. Torres Quevedo a la Comisión>> nombrada por el Ministro de Fomento para informar sobre las actividades de ambos centros.

El informe está firmado el 27 de mayo de 1913, aunque debió escribirse entre marzo y abril de ese año. En la nota pueden leerse nuevas consideraciones del inventor sobre la disciplina que caracterizará en los *Ensayos*, antes de que éstos se publiquen, y sin que a lo largo de la Nota se haga mención de su existencia.

Transcribimos solamente algunos párrafos, aquellos que ilustran suficientemente el tema que tratamos sin que debamos añadir nada:

> <<La R.O. de 22 de Febrero de 1907 dispuso la creación de un Laboratorio de Mecánica Aplicada anejo al Centro de Ensayos de Aeronáutica [...]
>
> Autorizado por esta R.O. me preparé ante todo a continuar mis trabajos sobre las máquinas algébricas, trabajos conocidos en España desde 1895 por un informe de la Real Academia de Ciencias; y emprendí nuevos estudios encaminados a establecer una teoría (la Automática) que estudie sistemáticamente los procedimientos que se aplican o pudieran aplicarse para automatizar las diferentes operaciones que realizan las máquinas industriales y los aparatos científicos, y muy especialmente, como caso particular de importancia capital, la aplicación de estos procedimientos de automática a la construcción de máquinas analíticas [...]
>
> Con objeto de estudiar experimentalmente un método general electro-mecánico de Automatización se han construido en este Centro una máquina de multiplicar y un autómata jugador de ajedrez [...] Ambos aparatos son puramente de estudio y demostración y están toscamente construidos, por lo cual no marchan con toda seguridad, pero funcionan bien de ordinario y esto basta para llenar su objeto.
>
> Se estudia en el Centro actualmente un aritmómetro electro-mecánico.
>
> Está ya terminado un esquema muy detallado en el cual se ha estudiado la disposición general del aparato y se han indicado en principio soluciones para las principales dificultades prácticas. Se trata, claro está, de una máquina muy complicada y su construcción, aun cuando no se encuentren dificultades insuperables, llevará seguramente varios años>>.

[11] Sobre los contenidos de este Archivo puede verse el trabajo del Ingeniero de Caminos y nieto del inventor, Torres-Quevedo, L. (1994): "El archivo de la familia Torres Quevedo", en González Redondo, F. A. y González Redondo, A. (eds.): *Actas del I Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra"*. (pp. 209-238). Madrid: Amigos de la Cultura Científica.

5. Consideraciones finales

Los *Ensayos sobre Automática* se publican con el 'ajedrecista' (excelente autómata de demostración de algunas de las ideas más importantes que en ellos se exponen) ya construido, y con el 'aritmómetro' concebido teóricamente y diseñada su realización práctica.

Adelantado de su tiempo en varias décadas, ni la comunidad científica estaba capacitada en aquellos años para valorar las aportaciones teóricas y las realizaciones prácticas de Torres Quevedo, ni el propio inventor supo o quiso desarrollar en toda su extensión el enorme potencial de sus concepciones.

Fallecido en 1936, los 'grandes' de la Informática, la Cibernética y la Inteligencia Artificial de después de la II Guerra Mundial desconocerán la obra del sabio español, quien no empezará a integrarse -y no generalizadamente- en la Historia de estas disciplinas hasta el último cuarto del siglo XX.

Resolución de algunos problemas modelados mediante sistemas de numeración

Juan A. Aledo [1] y Juan C. Cortés

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha, 02071 Albacete

Departamento de Matemáticas, I.E.S. Bonifacio Sotos, 02200 Casas Ibáñez, Albacete

Resumen

In this paper we study an interesting application of the numerical systems, in order to model and solve two attractive problems whose statement don't allow us to sign, in a first moment, any relation with this mathematic tool.

1 Introducción

¿Qué entendemos por un sistema de numeración? Básicamente, una herramienta para contar.

Los sistemas de numeración que manejamos actualmente combinan potencias de un entero positivo b, que llamamos *base*, mediante los coeficientes $0, 1, \ldots, b-1$. Ya quedó en el baúl de los recuerdos el complicado sistema romano y su lista de reglas.

Nuestro sistema de numeración habitual es el *decimal* o en base 10, pero éste no siempre es el más adecuado para abordar determinados problemas y, aunque en contadas ocasiones, hemos de echar mano de *otros* sistemas. Por ejemplo para los ordenadores, que trabajan con información digital, lo ideal es manejar dos cifras, el 0 y el 1, que corresponden a un valor determinado de tensión en una línea y a la no existencia de tensión respectivamente. Dado que sólo se manejan dos cifras, se trabaja en un sistema de numeración en base dos conocido como *binario*. Este, aunque adecuado para el ordenador, es poco manejable para las personas por la gran longitud que alcanzan rápidamente los números. Esto motiva el uso otros sistemas de numeración

[1] Tel: 967-599200, Ext:2417; fax: 967-599224; e-mail: jaledo@pol-ab.uclm.es

alternativos cuya base es una potencia de 2: el *octal*, en base 8, y el *hexadecimal*, que combina potencias de 16 con los coeficientes $0, 1, \ldots, 9, A(10), B(11), \ldots, F(15)$.

Pero al margen de estos sistemas utilizados en las máquinas, nuestro costumbrista uso del sistema decimal siquiera nos hace plantearnos recurrir a algún otro. En el presente trabajo tan sólo pretendemos llamar la atención sobre cómo estos sistemas *olvidados* nos permiten en ocasiones modelar y resolver ciertos problemas, aunque en principio, como es el caso de los dos problemas que abordaremos, no sea evidente la relación entre el enunciado del problema y el uso de los sistemas de numeración como herramienta matemática válida para su resolución.

2 El problema del viajero y la cadena

Un viajero tenía que pernoctar 15 noches en una posada, y sólo podia ofrecer como pago una cadena de oro de 15 eslabones. Así pues, propuso al posadero pagarle un eslabón por noche, trato que aceptó a condición que el pago fuese diario, esto es, que por ejemplo, el séptimo día el posadero tuviese exactamente 7 eslabones, el octavo día exactamente 8 eslabones y así sucesivamente. El viajero pretendía recuperar su cadena cuando su situación económica mejorase, y por tanto le interesaba limar el menor número de eslabones posible para hacer los pagos. ¿Cómo pudo hacerlo?

El viajero dividió la cadena en cuatro trozos T_1, T_2, T_3 y T_4 de 1,2,4 y 8 eslabones respectivamente, realizando los pagos según la Tabla 1, donde para cada día se marcan los trozos de cadena que deben estar en posesión del posadero.

Llegados a este punto, podemos conformarnos con la respuesta anterior basada en una manipulación hábil de las posibles particiones de la cadena o bien profundizar en el razonamiento que subyace en dicha resolución.

Obsérvese que en la tabla estamos dando implícitamente una representación en base binaria de cada uno de los números $1, 2, \ldots, 15$, de modo que los símbolos ✓ indican qué coeficientes son 1, mientras que las casillas vacías se corresponden con los coeficientes 0. La siguiente tabla ilustra esta idea para algunos casos particulares

De esta manera resulta sencillo determinar qué trozos de la cadena han de tener cada día tanto el posadero como el viajante. En efecto, basta hallar la expresión binaria del día en cuestión e interpretarla del siguiente modo: Si $c_i \in \{0, 1\}$ es el coeficiente de 2^i en dicha representación, entonces:

- Si $c_i = 0$, el trozo de cadena T_i ha de tenerlo el viajero.

DIA	T_1	T_2	T_3	T_4
1	✓			
2		✓		
3	✓	✓		
4			✓	
5	✓		✓	
6		✓	✓	
7	✓	✓	✓	
8				✓
9	✓			✓
10		✓		✓
11	✓	✓		✓
12			✓	✓
13	✓		✓	✓
14		✓	✓	✓
15	✓	✓	✓	✓

Tabla 1: Problema del viajante para 15 noches.

- Si $c_i = 1$, el trozo de cadena T_i ha de tenerlo el posadero.

Esto justifica la forma en que hemos dividido la cadena: El hecho de que cada una de las subcadenas deba estar en posesión o no del posadero, lo que se corresponde según hemos visto con los coeficientes 1 y 0 respectivamente, nos invita a pensar que el sistema de numeración binario puede modelar satisfactoriamente nuestro problema. Por esta razón dividimos la cadena en trozos cuyas longitudes son precisamente potencias de 2.

Aprovecharemos este enfoque para generalizar el problema del viajero, es decir, plantear el problema para un número de noches N y por tanto una cadena de N eslabones.

Supongamos que dividimos la cadena en k trozos $T_1, T_2, \ldots, T_k$ de longitudes $n_1, n_2, \ldots, n_k$ de modo que

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = N.$$

Fijado entonces un entero r, $1 \leq r \leq N$, se trata de encontrar coeficientes $c_i \in \{0, 1\}$

DIA	T_4	T_3	T_2	T_1	EXPRESIÓN BINARIA
4		✓			0 1 0 0
6		✓	✓		0 1 1 0
11	✓		✓	✓	1 0 1 1
15	✓	✓	✓	✓	1 1 1 1

Tabla 2: Problema del viajante para 15 noches. Modelización binaria.

verificando que

$$\sum_{i=1}^{k} c_i n_i = r.$$

Nótese que en principio no puede garantizarse la existencia de los coeficientes c_i. Por eso nos ubicamos en el sistema binario que sí nos asegura una representación de este tipo, y por ello tomaremos los trozos de cadena T_i de longitudes potencias de 2. Más concretamente, si t es el menor entero tal que

$$\sum_{i=1}^{t} 2^{i-1} \geq N,$$

entonces:

i) Si $\sum_{i=1}^{t} 2^{i-1} = N$, tomamos $k = t$ y dividimos la cadena en k trozos $T_1, T_2, \ldots, T_k$ de longitudes $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-1}$, de modo que fijado r, $1 \leq r \leq N$, los coeficientes c_i son los que aparecen en la expresión binaria de r

$$r = \sum_{i=1}^{k} c_i 2^{i-1}.$$

ii) Si $\sum_{i=1}^{t} 2^{i-1} > N$, tomamos de nuevo $k = t$ y dividimos la cadena según el siguiente esquema

$$\begin{array}{lcl} T_1 & \longrightarrow & 1 = 2^0 \text{ eslabón} \\ T_2 & \longrightarrow & 2 = 2^1 \text{ eslabones} \\ T_3 & \longrightarrow & 4 = 2^2 \text{ eslabones} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{k-1} & \longrightarrow & 2^{k-2} \text{ eslabones} \\ T_k & \longrightarrow & \delta = N - \sum_{i=0}^{k-2} 2^i \text{ eslabones} \end{array}$$

El problema se reduce ahora a encontrar para cada r, $1 \leq r \leq N$, coeficientes $c_i \in \{0,1\}$, $1 \leq i \leq k$, verificando que

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i 2^{i-1} + c_k \delta = r.$$

Obsérvese que no estamos hallando la expresión binaria de r en el sentido usual, pues δ no es en principio una potencia de 2. Para encontrar los coeficientes c_i basta aplicar el algoritmo:

1) Si $r \leq \sum_{i=0}^{k-2} 2^i$, entonces $c_k = 0$ y el resto de los coeficientes c_i resulta de expresar r como combinación de las potencias $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-2}$.

2) Si $\sum_{i=0}^{k-2} 2^i < r \leq N$, entonces $c_k = 1$ y el resto de los coeficientes c_i resulta de expresar $r - \delta$ como combinación de las potencias $2^0, 2^1, \ldots, 2^{k-2}$.

Finalmente, el posadero habrá de tener en su poder el día r los trozos T_i cuyo coeficiente c_i en la expresión binaria de r sean 1, mientras que el resto de trozos deberán quedar en posesión del viajero.

3 El problema de las pesas y la balanza

Queremos pesar, valiéndonos de una balanza tradicional de dos platos y un juego de pesas, cantidades enteras entre 1 *y* 13 *kilogramos (kg). ¿De qué modo debemos escoger dicho juego para que el número de pesas sea el menor posible?*

Este problema, para pesar cantidades enteras entre 1 y 40 kg, fue formulado y resuelto por el matemático francés Claude Gaspar Bachet de Méziriac (1581-1638) en su libro "Problèmes plaisans et délectables".

Colocado el objeto cuyo peso P pretendemos determinar en el plato de la derecha, queremos equilibrar la balanza poniendo pesas en uno y otro plato, de modo que P será precisamente la diferencia entre la suma de las pesas colocadas en el plato de la izquierda y la suma de las pesas colocadas junto al objeto en el plato derecho.

De este modo, valiéndonos de un juego compuesto con tres pesas P_1, P_2 y P_3 de 1, 3 y 9 kg respectivamente, podemos determinar pesos entre 1 y 13 kg, disponiéndolos en los platos derecho (D) e izquierdo (I) según se indica en la Tabla 3.

Es decir, para cada peso P, $1 \leq P \leq 13$, estamos dando una expresión

$$P = c_1 P_1 + c_2 P_2 + c_3 P_3$$

PESO	P_1	P_2	P_3
1	I		
2	D	I	
3		I	
4	I	I	
5	D	D	I
6		D	I
7	I	D	I
8	D		I
9			I
10	I		I
11	D	I	I
12		I	I
13	I	I	I

Tabla 3: Problema de la balanza hasta 13 kg.

donde

- $c_i = -1$ si hemos colocado la pesa P_i en el plato de la derecha.
- $c_i = 0$ si no hemos colocado la pesa P_i en ningún plato.
- $c_i = 1$ si hemos colocado la pesa P_i en el plato de la izquierda.

El hecho de estar restringidos a trabajar con tres coeficientes (nótese que esto es independiente de la elección que hemos realizado de los P_i) nos invita a situarnos en un sistema de numeración ternario y justifica nuestra elección de los pesos P_i. También parece natural intentar relacionar el problema de colocar correctamente las pesas en la balanza con la expresión en base tres de P. Sin embargo aquí estamos trabajando con coeficientes -1, 0 y 1, en vez de con 0,1 y 2 que son los utilizados para expresar un entero positivo en base tres. Surgen entonces las siguientes preguntas:

i) Dado un entero positivo P cualquiera, ¿es posible encontrar una expresión de la forma

$$P = \sum_{i=1}^{t} c_i 3^{i-1} \tag{1}$$

con $c_i \in \{-1, 0, 1\}$?

ii) En caso afirmativo, ¿está relacionada de algún modo la expresión anterior con la representación en base tres de P?

Para dar respuesta a estas cuestiones tomaremos

$$P = \sum_{i=1}^{t'} c_i' 3^{i-1}$$

la representación en base tres de P, donde los coeficientes $c_i' \in \{0, 1, 2\}$. El siguiente algoritmo (al que nos referiremos por (3)) nos permite obtener a partir de esta representación una expresión del tipo (1), lo que nos proporciona una respuesta afirmativa a las dos preguntas anteriores:

1) - Si $c_1' \in \{0, 1\}$, entonces $c_1 = c_1'$.
   - Si $c_1' = 2$, entonces $c_1 = -1$ y hacemos $c_2' = c_2' + 1$.
   Obsérvese que después de este paso $c_2' \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2) - Si $c_2' \in \{0, 1\}$, entonces $c_2 = c_2'$.
   - Si $c_2' = 2$, entonces $c_2 = -1$ y hacemos $c_3' = c_3' + 1$.
   - Si $c_2' = 3$, entonces $c_2 = 0$ y hacemos $c_3' = c_3' + 1$.

3) En general, una vez calculado c_i, $2 \leq i \leq t' - 2$ (lo que quizás habrá supuesto un cambio en el valor de c_{i+1}'):
   - Si $c_{i+1}' \in \{0, 1\}$, entonces $c_{i+1} = c_{i+1}'$.
   - Si $c_{i+1}' = 2$, entonces $c_{i+1} = -1$ y hacemos $c_{i+2}' = c_{i+2}' + 1$.
   - Si $c_{i+1}' = 3$, entonces $c_{i+1} = 0$ y hacemos $c_{i+2}' = c_{i+2}' + 1$.

4) - Si $c_{t'}' = 1$, entonces $c_{t'} = 1$ $(t = t')$.
   - Si $c_{t'}' = 2$, entonces $c_{t'} = -1$ y $c_{t'+1} = 1$ $(t = t' + 1)$.
   - Si $c_t' = 3$, entonces $c_{t'} = 0$ y $c_{t'+1} = 1$ $(t = t' + 1)$.

Por ejemplo,

$$208 = 2 \cdot 3^4 + 1 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0$$

es la representación ternaria de 208, y a partir del algoritmo (3) obtenemos la siguiente expresión con coeficientes $\{-1, 0, 1\}$

$$208 = 1 \cdot 3^5 + 0 \cdot 3^4 + (-1) \cdot 3^3 + (-1) \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0.$$

Conviene señalar que mientras que con las potencias $3^0, 3^1, \ldots, 3^{t-1}$ podemos representar en base 3 números comprendidos entre 0 y $2 \cdot \sum_{i=1}^{t} 3^{i-1}$, con nuestro sistema ternario *modificado* tan sólo podemos llegar hasta $\sum_{i=1}^{t} 3^{i-1}$ (siempre refiriéndonos a enteros no negativos).

Con todo este desarrollo estamos en condiciones de resolver el problema de la balanza enunciado de un modo general, esto es, para pesar cantidades enteras entre 1 y N kg, siendo N un entero positivo arbitrario.

En efecto, si t es el menor entero verificando que

$$\sum_{i=1}^{t} 3^{i-1} \geq N,$$

podemos medir, mediante un juego de t pesas $P_1, P_2 \ldots, P_t$ de $3^0, 3^1, \ldots, 3^{t-1}$ kg respectivamente, cualquier cantidad entera P entre 1 y N kg siguiendo los siguientes pasos:

1- Obtener las representación en base tres de P, y a partir de ésta su expresión de la forma

$$P = \sum_{i=1}^{t} c_i 3^{i-1},$$

donde los coeficientes $c_i \in \{-1, 0, 1\}$, según describíamos en el algoritmo (3).

2- Colocar las pesas en los platos de la balanza del siguiente modo:

- Si $c_i = -1$ colocamos la pesa P_i en el plato de la derecha.
- Si $c_i = 0$ no colocamos la pesa P_i en ningún plato.
- Si $c_i = 1$ colocamos la pesa P_i en el plato de la izquierda.

Sobre las tareas principales del profesor en un proceso de enseñanza y aprendizaje en la E.S.O.:asertividad y capacidad matemática.

Juan José Prieto Martínez
I.E.S. Antonio de Nebrija, Madrid.
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa.
Fac. de C.C. Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.
e-mail: jjprieto@eucmos.sim.ucm.es

Abstract

This article shows a reflection about the main tack teachers must do to educate the students in the learning process. Teaching theoretical concepts through elaborated strategies is mandatory but the teacher can not forget that their job is not only that, it should be complemented with moral and behavioural concepts. It is of great importance teaching social abilities in the classroom.
A research through a test has been performed with a sample of 836 student from 10 secondary schools located in the centre of Madrid. The research give the teacher an idea about of state of the assertiveness and mathematical ability the students have.

1. Introducción

La experiencia parece enseñarnos que la convivencia entre personas no es fácil. En el colegio, en concreto, hay problemas entre los alumnos y entre los profesores y en la relación de los alumnos con sus profesores. Hay alumnos agresivos que usan la violencia o la amenaza para resolver sus problemas. Hay alumnos pasivos, inhibidos, que no saben o no se atreven a enfrentarse con sus problemas. Hay profesores tan centrados en sí mismos, que son incapaces de ponerse nunca, en el lugar de otro.
No son sólo las normas antiguas de urbanidad las que a veces desaparecen de la vida escolar de muchos países desarrollados: es algo más hondo. Lo que está pasando es que no se sabe resolver problemas interpersonales. Faltan a todos, pero especialmente a los alumnos, las habilidades sociales necesarias para vivir en paz y de manera creativa. No se sabe presentar una queja con serenidad sin faltar el respeto al otro; cuesta aceptar una crítica aunque sea objetiva y razonable; nos humilla tener que pedir excusas; no se sabe elogiar a otro sin que él o nosotros nos

sintamos molestos; muchas veces no se sabe cómo enfrentarse a la vergüenza o al miedo.
El mundo debe aprender conductas verbales y no verbales que facilitan el intercambio social. Es decir, conductas habituales, no esporádicas, que hacen más fácil entendernos, ayudarnos, corregirnos mutuamente, defender nuestros derechos y respetar al mismo tiempo los derechos de los demás. Las denominamos conductas verbales porque es hábil socialmente el que sabe decir las palabras acertadas en el momento oportuno. Palabras serenas, pero sin cobardía; valientes, pero sin agresividad. Y conductas no verbales, porque también nos comunicamos con los ojos serios o alegres, con los gestos , con una sonrisa.
En nuestro país, los objetivos generales de etapa en la Educación Secundaria Obligatoria puede resumirse en:

- Los alumnos deben conocer cuáles son los elementos básicos de la cultura;
- Los alumnos tienen que estar formados para que sepan cuáles son sus derechos y asuman cuáles son sus deberes;
- El alumnado debe estar preparado para la vida cotidiana.

Se pretende garantizar una formación suficiente y flexible, contribuir a la igualdad y extender la educación a todos. Tiene por finalidad que los estudiantes tengan una educación social y ética. Deben tener una educación no discriminante con igualdad de oportunidades. Se pretende que los profesores tengan una relación del entorno social, económico y cultural para comprender mejor al alumnado. ¿Podríamos decir entonces que los contenidos de área pasan a un segundo nivel y que verdaderamente lo importante es que los alumnos sepan convivir en sociedad?.

Aunque estamos a punto de comenzar el nuevo milenio, el mundo no es ni mucho menos, según las noticias de los medios de comunicación, todo lo gratificante que se puede esperar. Cuando estamos en un aula de secundaria, los contenidos de área son de gran importancia pero los contenidos sociales no hay que dejarlos al margen. Las estrategias didácticas que los profesores deben utilizar tienen que estar en conexión con los valores sociales que se quieran transmitir, siendo consciente que el propio educador no es neutral en la transmisión de valores. El alumno debe haber conseguido, fundamentalmente, unos valores sociales, morales y éticos que lo forme como persona para la vida en sociedad.

2. Retos iniciales del profesor en un proceso de aprendizaje

El método que el profesor imparte en el aula para el desarrollo de los valores sociales a partir de los contenidos de área debe ser comprendido totalmente por el alumno para que éste pueda ser reflexivo y crítico a posteriori con la sociedad y las

culturas en que vive y le rodea. El principal objetivo es que pueda transformar y mejorar sus acciones para una buena convivencia. De una discusión con respeto sobre un tema específico entre el profesor y los alumnos se obtienen acciones críticas, pensamientos, incluso ideologías, es decir, una estrategia didáctica que puede incorporarse al desarrollo de la persona dentro de un colectivo.

Los profesores deben ser claros en los contenidos de área a desarrollar y que el alumno debe saber. El alumno debe confiar plenamente en la estrategia de enseñanza que imparten desde el comienzo del curso escolar. Para ello el profesor debe transmitir confianza desde el comienzo indicando cuál es el temario, donde hay que profundizar más, y cuáles son los puntos clave para la evaluación. No deben existir "puntos negros" donde el alumno observe en sus primeras evaluaciones del primer trimestre que el profesor no ha sido claro y explícito en indicar verdaderamente cuáles son los objetivos. El alumno debe conocer qué es lo imprescindible para empezar el nuevo curso académico y hasta donde debe llegar como mínimo. Es importante que el alumno observe que el profesor va al mismo ritmo de aprendizaje que deben ir sus alumnos. "Nunca es bueno las prisas y menos en un proceso de enseñanza-aprendizaje". Que el alumno vea claramente que el profesor está comprometido con el grupo, y el grupo con su profesor. El grupo debe captar que el profesor tiene como reto que sus alumnos aprenden los contenidos mínimos del curso académico. Esto debe ser una mejora del entendimiento entre las personas que conviven en un escenario escolar. Este pequeño principio vendría a ocupar un primer plano en las acciones docentes para la consecución de determinadas habilidades y conceptos en los alumnos y puede hacerse de manera similar en otros entornos sociales.

La enseñanza de los contenidos estará sujeta a que el aprendizaje de los mismos tiene que constituirse en un marco de convivencia social entre todas las partes para el desarrollo del conocimiento que es fundamental ahora y después en la sociedad o contexto en el que viven. Profesor y alumnos deben adquirir el compromiso a lo largo del proceso de enseñanza-aprendizaje de como ir reconstruyendo y mejorando el entendimiento entre los participantes; comprobar si la evolución de los contenidos es de pendiente positiva o negativa, y en caso de ser negativa, extender el entendimiento entre los diferentes miembros del porqué de la situación. El alumno puede y debe presentar sus quejas con respeto desarrollando habilidades sociales.
Las estrategias de enseñanza del profesor deben ir encaminadas a investigar y descubrir las características de la cultura que puede estar generando en el aula. Se debe establecer procedimientos tanto de contenidos como de tareas-estrategias de enseñanza que contribuyan a transformar la situación en caso de ser negativo. "Posiblemente los alumnos quieran reducir el temario en algunos capítulos antes de finalizar el curso para realizar un repaso general y asentar mejor los conocimientos de cara al examen final". Nunca el profesor debe mantener una relación jerárquica

impidiendo y obstaculizando la discusión y la crítica. Tal situación convierte la enseñanza en una actividad meramente comunicativa y para nada favorecedora de la discusión y la negociación entre las personas. La divergencia de opiniones, la discusión, la negociación y la búsqueda de consensos como procesos de aprendizaje hacen un camino duro, muchas veces para el profesor, en cuanto supone una crítica permanente de las acciones propias. ¿Por qué el aula no puede ser sitio de aprendizaje en la discusión, crítica, diálogo y aprendizaje para la vida?. El aula tiene que convertirse por parte de los alumnos en un sitio donde sea posible la reflexión en voz alta del propio proceso de aprendizaje.

3. Qué enseñar principalmente en el aula

Un proceso de investigación sobre la práctica de la enseñanza en el aula no ha sido todavía dado de una manera científica, debido a que principalmente esto lleva implícito una investigación sobre las relaciones entre profesor y alumno y cuáles son los valores morales que son presentados en el aula. No hay que perder de vista que en la vida humana los valores están siempre presentes. El objetivo es describirlos en el aula y mejorarlos. El "qué" enseñar conlleva restricciones al existir un marco legislativo al respecto (un curriculum prescrito por la administración educativa) que condiciona las negociaciones entre el profesor y los alumnos.

Sin embargo, es necesario que los profesores ofrezcan una justificación a los alumnos del porqué de los contenidos. Las estrategias utilizadas por el profesor pueden ser a veces provocadores de discusiones. El profesor estará atento a no utilizar la autoridad de que goza para promover su propio punto de vista entre los alumnos. Es posible que en materias donde existe la controversia en las estrategias adoptadas por un determinado profesor será favorecedora de discusión. Posiblemente, el profesor aprenda mucho de cómo dar un contenido para que sus alumnos aprendan lo que parecía inalcanzable. De esta manera "aprende el que enseña". En este sentido, es necesario que el profesor tenga en cuenta que sus estrategias de enseñanza contribuyan a un acercamiento y diálogo entre posiciones encontradas y no tanto, a agudizar y hacer más profundas las posibles divergencias. Por consiguiente, si la responsabilidad del aprendizaje recae no solo en el profesor sino también en los alumnos por convenio adoptado sobre las estrategias a utilizar, es necesario de que éstos asuman tal responsabilidad. Los contenidos propuestos podrán ser alcanzados con mayor probabilidad; y casi seguro se habrá conseguido el desarrollo de los valores morales en los alumnos. Nótese que las estrategias didácticas que el profesor se compromete a realizar durante un curso están encaminados no sólo con el aprendizaje de los alumnos, sino también a la construcción de un proceso de investigación sobre el aprendizaje del que aprende. Los alumnos tendrán igualmente un papel directo fundamental de querer aprender y,

posteriormente, evaluadores directos de la práctica docente consensuada por ambas partes.

Para que los alumnos obtengan una buena evaluación en contenidos y valores morales, es necesario indicar que ellos tienen diariamente que realizar unas tareas escolares fundamentales como son:

- Reconocimiento o reproducción de la información adquirida en clase a través de la memoria.
- Aplicar algoritmos, realizar esquemas (ver Prieto [4]) y realizar actividades que llevan a determinadas respuestas.
- Que el alumno realice ejercicios de comprensión, explicando su versión y pueda resolver nuevas situaciones.

Con las tareas escolares se cubren aspectos principales de los objetivos mínimos a alcanzar y ayudan analizar los esquemas teóricos explicados. Las prácticas escolares expresan modelos de comportamiento y conocimiento intelectual, actitudes hacia el saber, valores sociales y morales para modelar el comportamiento del alumno en intercambios personales en los trabajos de grupo. Hacer una revisión minuciosa de las tareas realizadas diariamente enseña en la E.S.O. más, muchas veces, que diez clases magistrales.
Las tareas escolares concretadas en tareas académicas expresan modelos de comportamiento y conocimiento intelectual, actitudes hacia el saber, valores sociales y morales para modelar el comportamiento del alumno y, en consecuencia, el profesor ha de reflexionar sobre su propia práctica para evitar que sus esquemas teóricos se separe de las prácticas reales que se ejercitan en el aula. Este análisis como autocrítica junto al análisis de los propios compañeros en posible discusiones departamentales, no solo constituye un recurso importante para el perfeccionamiento profesional como docente, sino que además permite esclarecer y discutir las prácticas reales dominantes que se ejercen o se van a implantar con la finalidad de cambiarlas y mejorarlas.

"Una actividad es más gratificante que otra si exige a los estudiantes que indaguen sobre ideas, aplicaciones de procesos o problemas cotidianos sociales o personales; si exige que los estudiantes examinen, dentro de un nuevo contexto, una idea, una implicación de un proceso intelectual; si estimula a los estudiantes a ocuparse de la aplicación y del dominio de reglas". (Ver Stenhouse [5], 130-131).

Hay unanimidad entre el profesorado en señalar la importancia de que los alumnos realicen los ejercicios y problemas para desarrollar habilidades de razonamiento. También los alumnos disfrutan haciendo sus problemas propuestos que les resultan motivadores y que sería deseable que fueran el eje principal del curriculum pero que

no lo es, debido a que esto supone trabajo extra de preparación para el profesor. Sería de gran interés si se diera por bueno que una buena parte del tiempo de enseñanza en el aula se dedicara a los problemas, no como simple aplicación de conceptos recién presentados. Nótese que la manera clásica de proceder hoy en día resulta un verdadero problema pedagógico ya que el alumno no muestra interés, no tiene ganas de aplicar operaciones que apenas conoce, no tiene ganas de leer un texto con poco significado para él, al que se enfrenta él solo sin discutir ni comentar nada con los compañeros y que, en la mayoría de las veces, el profesor responde con una calificación negativa o un comentario poco motivador.
La resolución de problemas y ejercicios (principales tareas de los alumnos) debe considerarse como un eje principal alrededor de los cuales se desarrollan los contenidos de comprensión y de desarrollo de capacidades y de estrategias. La diversidad en el tipo de problemas ayudaría abordar la diversidad en el aula, mediante el desarrollo de aquellos aspectos que se presentan como novedades en los currículos actuales, así como permitiría trabajarlos desde los distintos niveles de aprendizaje existentes en el aula. Una idea interesante es que la resolución de las tareas pueda constituirse en elemento metodológico en sí mismo, capacitando al alumno para afrontar situaciones novedosas de la vida cotidiana.
La visión de los problemas como proceso de aprendizaje, el ver la actividad docente como un proceso de modelización de situaciones que se tiene que controlar, ver que los adolescentes pueden aportar soluciones razonadas y procedimientos no estándares para resolver estas situaciones y el ver que los procedimientos formales son el final de un camino, son visiones que algunos profesionales de este nivel educativo tienen pero se está lejos de que sea la visión de la mayoría.

4. Evaluación de habilidades sociales

La agresividad puede presentarse de forma verbal o física, intentando imponerse sin respeto a los derechos de los demás. La inhibición es cobardía y/o pereza al mismo tiempo. Nótese que la inhibición no resuelve los problemas porque no se enfrenta a ellos y la agresividad tampoco porque no conduce a un acuerdo sino a un enfrentamiento. A una persona inhibida se le acumulan los problemas sin resolver y a una persona agresiva le surgen continuamente nuevos problemas por haberse enfrentado negativamente con los que tenía.

Enseñar habilidades sociales es enseñar asertividad. Debe quedar muy claro en los alumnos que no queremos violentos ni cobardes, queremos que aprendan asertividad, que es la forma más difícil de valentía. Queremos personas que digan lo que piensan sin perder el respeto a los que piensan de otra manera. Queremos personas que no se hagan fuerte con los débiles sino que se mantengan siempre fuertes y serenos ante la incoherencia, la inmadurez y el egoísmo de otros.

Para diagnosticar el grado de autoestima y asertividad de un grupo de alumnos con el que se pretende medir una serie de habilidades sociales se cuenta con varias escalas de medida. Ver, por ejemplo, Michelson [3], Mayor y Labrador [2] y Goldstein [1]. Una buena opción es la evaluación directa. Se eligen por intuición y sentido común unas cinco o seis habilidades sociales que se sospecha que son las más necesarias para la convivencia y que pueden ser también las más deficitarias. A continuación por la observación directa y, si es posible, con la ayuda de algún compañero (profesor o tutor) son entrevistados los alumnos, atribuyendo a cada uno de ellos una puntuación del 1 al 5 en su autoestima y en cada habilidad social; 1 significa que el alumno no manifiesta nunca esa habilidad social; 2 que en muy raras ocasiones; 3 que de vez en cuando; 4 que con mucha frecuencia; 5 que siempre. Los resultados de un estudio de investigación por encuesta realizado en institutos de educación secundaria de Madrid centro es presentado a continuación. Las habilidades sociales elegidas vienen dadas en la tabla 1. Por otra parte, se ha considerado la calificación final obtenida en la asignatura de matemáticas en el curso académico 1999/2000. El objetivo es comprobar si existe alguna relación entre las variables capacidad matemática y el promedio de las habilidades sociales elegidas. La ficha técnica estadística es la siguiente:

Ficha Técnica.

Realizado por: Grupo de alumnos de la Licenciatura de Documentación de la Universidad Complutense de Madrid dirigido por el profesor Juan José Prieto Martínez.

Objetivo: Conocer la autoestima y la asertividad de los alumnos de Madrid. Comprobar si existe relación entre las habilidades sociales y la capacidad en el área de matemáticas.

Fecha de aplicación del sondeo: Del 1 al 4 de febrero de 2000.

Tipo de muestreo: Muestreo aleatorio entre los Institutos de Madrid-Centro y muestreo estratificado por sexo de los encuestados.

Tamaño de la muestra: 836 alumnos de 4º E.S.O. de los que 389 son varones y 447 son hembras.

Aplicación de la encuesta: El cuestionario fue cumplimentado por los alumnos en presencia de su tutor correspondiente en la hora de tutoría en un riguroso silencio y en disciplina de examen. Posteriormente cada cuestionario es revisado por el tutor. En caso de observar anomalías y contradicciones en el test, éste es eliminado y sustituido por el realizado de un alumno del mismo grupo y centro educativo.

Nivel de confianza: 95%.

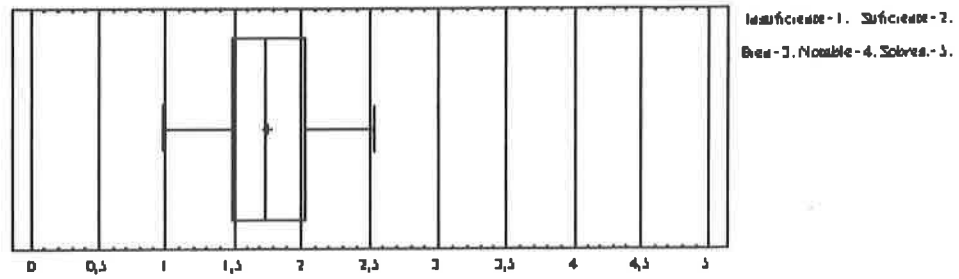
Tabla 1. Evaluación previa de la asertividad y capacidad en matemáticas.

	Alumno 1	*Alumno 2*	.....	*Alumno 836*
1. Elogios a compañeros.				
2. Quejarse con respeto.				
3. Asumir tanto defectos como virtudes.				
4. Saber disculparse ante compañeros y profesores.				
5. Compañerismo.				
6. Defenderse de burlas.				
7. Nota final en matemáticas en el curso pasado.				

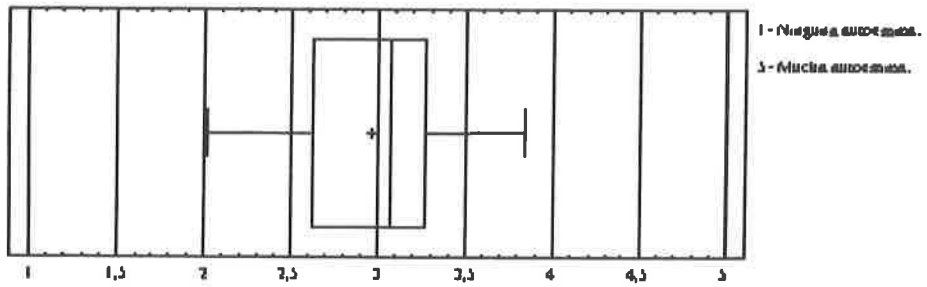
Los tres primeros apartados de la figura 1 presentada a continuación refleja las medidas de posición central (la media con el signo "+", y la mediana el segmento que divide a la caja en dos partes iguales) de las calificaciones en matemáticas, de la autoestestima y del promedio de las cinco habilidades sociales consideradas por cada alumno.

El apartado a) nos informa que el 75% de los alumnos encuestados han obtenido una nota menor o igual al suficiente poniendo de manifiesto que las matemáticas siguen siendo la asignatura pendiente en el aprendizaje de nuestros alumnos. En el apartado b) indica que solamente un 25% de los alumnos tienen una autoestima superior a 3,3. Del apartado c) sobre habilidades sociales se deduce una calificación normal, es decir, no están desarrolladas por el alumno todo lo que verdaderamente se desea por parte de un educador. El último apartado d) de la figura 1 indica que no existe relación entre el promedio de las habilidades sociales elegidas y la capacidad matemática de cada alumno encuestado.

Figura 1. Diagramas sobre calificaciones, autoestima y habilidades sociales.

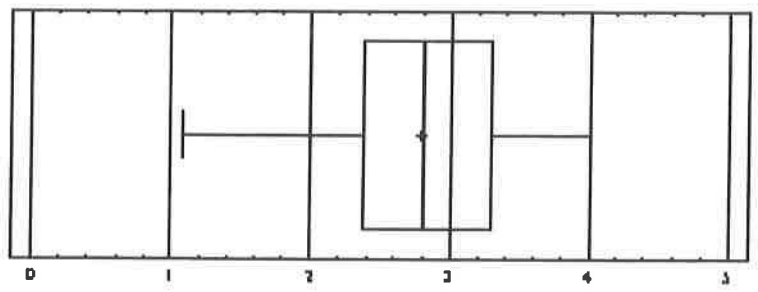


a) Notas de matemáticas.

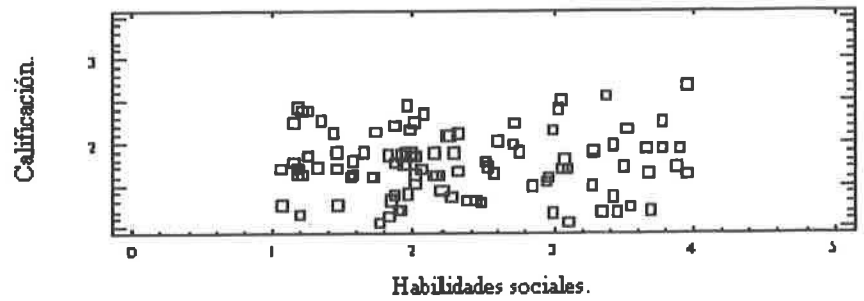


b) Autoestima.

Esto hacer pensar que el profesor (también el perteneciente al área de matemáticas) debe hacer hincapié en conseguir, al menos, valores sociales y morales para formar al alumno como persona para vivir en sociedad. Si el profesor de matemáticas tiene como reto que sus alumnos aprendan los contenidos mínimos programados de área y que también sepan desarrollar habilidades sociales como las marcadas en la tabla 1, puede garantizarse que está en el camino correcto de ser un gran educador. Posiblemente no sea muy importante que todos nuestros alumnos de secundaria sepan muchas matemáticas pero sí que es fundamental que sean educados y formados como personas para que sepan convivir libres en sociedad. No se estará solamente consiguiendo que el alumno desarrolle capacidades y aptitudes sino, que la autoestima tanto del alumno en primer lugar como la del profesor en segundo sea lo suficiente para poder conseguir lentamente nuevas metas.



c) Habilidades sociales.



d) Relación entre Habilidades sociales y calificaciones.

Referencias

[1] Goldstein, A.P. Habilidades sociales y autocontrol en la adolescencia. Martínez Roca, Barcelona, 1983.
[2] Mayor, J. Y Labrador, F. Manual de modificación de conducta. Alambra, Madrid, 1984.
[3] Michelson J. Las habilidades sociales en la infancia. Martínez Roca, Barcelona, 1987.
[4] Prieto Martínez, J.J. Una reflexión sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos en los adolescentes. Bol. Soc. "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, Nº 52, 74-78. 1999.
[5] Stenhouse, L. Investigación y desarrollo del curriculum. Morata, Madrid, 1984.

Reseña de libros

MARÍA DEL CARMEN ESCRIBANO RÓDENAS et al: *Matemáticos madrileños.* Anaya Educación, Madrid 2000, 255 páginas.

Este libro surge oportunamente en el ámbito de las actividades conmemorativas del *Comité Madrid 2000*, celebradas con motivo del *Año Mundial de las Matemáticas*. Entre sus varios autores figuran tres de nuestros consocios, María del Carmen Escribano, Javier Peralta y D. José Javier Etayo Miqueo, que lo prologa.

Comienza el libro con un extenso prólogo a cargo de D. Javier Etayo titulado *Matemáticos a la madrileña (prólogo algo subversivo)* en que, con su habitual ingenio y elegancia, describe los estudios de Matemáticas en la Universidad Madrileña a través de sus profesores en el último siglo y medio.

El primer capítulo, titulado *El matemático y astronómo andalusí Maslama "el Madrileño"*, corre a cargo de la coordinadora del libro, María del Carmen Escribano, Doctora en CC. Matemáticas (Análisis Matemático), Profesora de la Universidad San Pablo-CEU y Catedrática de Matemáticas de Educación Secundaria. Tras la descripción del entorno geográfico-histórico y científico-cultural de la Matemática Hispano-Musulmana, se centra en el legado científico del matemático andalusí Maslama, madrileño del siglo X, considerado como uno de los representantes más destacados de la escuela astronómica y aritmética árabe medieval. Termina con una detallada enumeración de las fuentes historiográficas.

El segundo capítulo, titulado *Matemáticas y Academias en el Madrid de los Austrias*, corre a cargo de Mariano Esteban Piñeiro, Profesor de Matemática Aplicada en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Valladolid y Director del Instituto de Historia de la Ciencia y la Técnica de esa misma Universidad. En el se describe la labor de las academias matemáticas de la corte madrileña de los siglos XVI y XVII, y en especial La Academia Real de Matemáticas de Felipe II y Juan de Herrera.

El capítulo tercero, titulado *Caramuel y la revolución en las Matemáticas del siglo XVII*, corre a cargo de Santiago Carma Pons, Catedrático de Matemáticas del Departamento de Economía Financiera I de la Universidad Complutense. Tras la descripción de la vida científica en la España del siglo XVII se analiza la obra del clárigo, humanista, ingeniero y matemático Juan Caramuel Lobkowitz.

El capítulo cuarto, titulado *El final de las Matemáticas del siglo XIX: Echegaray*, corre a cargo del mismo autor que el anterior. En él se ocupa de las refor-

mas del sistema educativo durante el reinado de Isabel II y en particular de la Ley de Instrucción Pública de Claudio Moyano de 1857. Luego describe la polifacética personalidad del matemático, ingeniero, dramaturgo y político José Echegaray, para terminar tratando sobre la Sociedad Matemática Española a comienzos del siglo XX.

El capítulo quinto, titulado *La Matemática Madrileña en el panorama español de 1800 a 1936*, corre a cargo de Javier Peralta, Doctor en Matemáticas (Geometría y Topología), Catedrático de Escuela Universitaria en la Universidad Autónoma de Madrid y miembro de la Comisión Pedagógica del Colegio de Doctores y Licenciados. En él se describe la evolución de la matemática madrileña en el contexto de la crisis política y científica de la España de esa época, personificada en algunos de los nombres más ilustres de la historia científica de España.

El sexto y último capítulo, titulado *Miguel Vegas, la pasión por la Geometría*, corre a cargo de su nieto, José Manuel Vegas Montaner, Doctor en CC. Matemáticas (Matemática Aplicada) por la Complutense y por la Brown University (EEUU) y Catedrático del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense. En él se describe la figura de su abuelo, el Profesor de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central D. Miguel Vegas, su labor científica, sus rasgos personales y sus obras.

El libro, escrito en lenguaje sencillo y elegante, es muy agradable de leer. La inclusión de fotografías, en que aparecen algunos de personajes tratados en su ambiente profesional, lo hacen aún más interesante. Aunque dirigido fundamentalmente a matemáticos y a profesores de matemáticas de todos los niveles, su lectura es recomendable para toda persona con interés por la Historia de la Ciencia.

E. Roanes M.

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.º	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	–	C
11	OME-f1-86/ OMI-86-Varsovia	13 26	14 20	14 12	14 21	14 –	23 –	20 –	15 –	20 –	12 –	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	–	–	–	–	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/ OI-89-Cuba	24 26	27 27	24 –	27 –	27 –	24 –	27 –	25 –	27 –	26 –	C
22	OMI-89-R.F.A./ Oposiciones	28 31	28 30	XX 29	28 –	29 –	30 –	30 –	30 –	30 –	31 –	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	–	–	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	–	–	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/ OI-90-Valladolid	XX XX	44 XX	45 –	32 –	44 –	44 –	32 –	32 –	XX –	34 –	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	–	–	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	–	–	–	–	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
30	OI-91-Argentina/ OME-f1-91	XX 33	XX 34	XX 34	33 34	38 –	46 –	XX –	33 –	33 –	33 –	
31	OME-f2-92/ OME-f1-91/PNS	36 XX	XX XX	36 47	36 35	36 34	XX –	48 –	XX –	XX –	35 –	
32	OMI-92-MOSCÚ/ OI-92-Venez./PNS	35 38	48 38	XX 38	XX 38	XX –	52 –	38 –	35 –	46 –	38 –	
33	OME-f1-92/f1-92(v) /PNS	47 47	XX XX	XX XX	XX XX	XX XX	35 –	XX –	XX –	XX –	XX –	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	–	–	–	–	
35	OMI-93-Turq./ OI-93-Méjico/PNS	XX XX	46 52	XX 39	XX 39	52 52	XX XX	52 –	XX –	47 –	39 –	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	
37	OME-f2-94/PNS	41	49	49	41	49	49	45	45	41	–	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	52	XX	–	–	–	–	
39	OI-94-Brasil/OME-f1-94/f1-94(v)	43 46	XX XX	XX XX	XX XX	XX XX	XX XX	42 –	42 –	42 –	43 –	
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	–	–	–	–	
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	
42	OI-95-Chile OME-f1-95/PNS	XX XX	XX XX	XX XX	XX XX	XX XX	XX XX	– XX	– XX	– XX	– XX	
43	OME-f-96/ PNS	XX XX	44 XX	XX XX	XX XX	XX XX	XX XX	– –	– –	– –	– –	
44	OMI-96-India/ PNS	XX XX	XX 47	49 45	XX XX	XX XX	XX XX	– –	– –	– –	– –	
45	OI-96-Costa Rica OME-96-f1	XX XX	XX 47	XX XX	XX XX	XX –	XX –	47 –	XX –	XX –	XX –	
46	OMR-96	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
47	OMI-97-Argentina	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
48	OI-97-México	XX	XX	XX	50	XX	XX	–	–	–	–	
	OMEf1-98	– 49	– XX	– 49	– XX	– –	– –	XX –	XX –	XX –	XX –	
	OMR-97	– 51	– XX	– 51	– XX	XX 51	XX 52	XX	50	XX	XX	
50	OMI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
51	OI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
54	OI-99/OIMU-99	XX XX	XX XX	XX XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. OIMU = Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo especificado a continuación.

Copias en papel

Se enviarán por duplicado, escritas con un procesador de texto en hojas de tamaño DIN A-4. El formato debe ser 17cm x 12.8 en 11 puntos.

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LATEX (en este último caso deberá usarse estilo "article" y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usa otro procesador, deberá ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Los artículos comenzarán con el título (en minúsculas grandes), nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el Boletín), e-mail si se tiene, y abstract de unas líneas en inglés. Se terminará el artículo con la bibliografía (y nada más después de ella).

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas (además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas).

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo el archivo del documento en el procesador de texto utilizado.

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

ADQUISICIÓN DE NÚMEROS ATRASADOS DE NUESTRO BOLETÍN

A partir de ahora, los números atrasados del Boletín (de los cuales existan ejemplares sobrantes), podrán ser adquiridos al precio de coste de mil pesetas ejemplar.

Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55 y 56

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de nuestra Sociedad o mediante transferencia a la cuenta corriente de nuestra Sociedad domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
C/ Carranza, 5
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid

En la carta se incluirá:

- el número o números a adquirir,
- la dirección a donde se han de enviar,
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

D. ..... Teléf. (....) .....
Dirección .....
Ciudad ..... Cod.° Postal .....
Centro de trabajo .....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco .....
Sucursal o Agencia ..... en .....
Dirección de la misma .....
para que cargue en la cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1998-99 y siguientes.

Fecha ..... de ..... de 2000

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.500 pts. (de ellas, 3.500 pts. en concepto de cuota de la Sociedad "Puig Adam" y 2.000 pts. en concepto de cuota por la que se recibe la revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas).
Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/ Carranza, 5
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACIÓN EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha ..... BANCO: .....
Sucursal o Agencia ..... en .....
Dirección de ésta .....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... /.
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos .....
Dirección .....
Remítanse ambas partes (toda esta página) a:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
c/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid