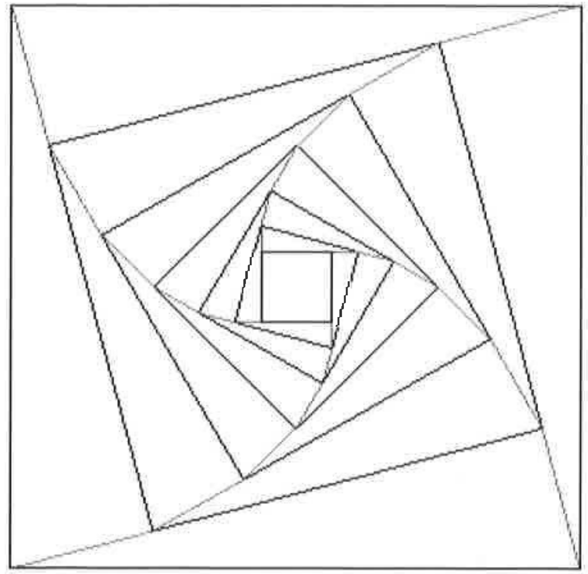
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS



BOLETÍN N.° 55
JUNIO DE 2000

Número especial dedicado a conmemorar el Centenario del Nacimiento de Puig Adam

ESTE BOLETÍN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS
DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

Recensiones de Zentralblatt für Didaktik der Matematik

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis - 28917 B° de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 - Fax: (91) 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura de portada de uno de los libros más emblemáticos de D. Pedro Puig Adam (1900-1960), titulado "La Matemática y su enseñanza actual", publicado en 1960 por el Ministerio de Educación.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

José Javier Etayo Gordejuela

Vicepresidentes:

Eugenio Roanes Macías	(Madrid)
Juan Bosco Romero Márquez	(Castilla-León)
Vicente Mendiola-Muñoz Morales	(Castilla-La Mancha)

Vocales:

Julio Fernández Biarge	(Redacción de publicaciones)
José Vicente García Sestafe	(Relaciones Institucionales)
Eugenio Roanes Lozano	(Gestión de publicaciones)
Martín Garbayo Moreno	(Actividades y concursos)

Secretario:

Francisco González Redondo

Vicesecretario:

Miguel Ángel Gallardo Ortiz

Tesorero:

Alberto Aizpún López

Bibliotecario:

Joaquín Hernández Gómez

Adjunta a la presidencia:

María Gaspar Alonso-Vega

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 2000 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 29 de abril de 2000, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria del año dos mil.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

El Presidente informa sobre las actividades realizadas y por realizar.

a) Se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 52, 53 y 54 del Boletín, cuyos artículos siguen siendo recensionados positivamente desde el Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.

b) Complementariamente, se congratula por el escrito recibido de Mathematical Reviews, anunciando su deseo de recensionar también estos trabajos, por lo que se les mandarán tanto los números nuevos como los atrasados.

c) Se recuerda que la Sociedad colaboró en la organización de la Conferencia Internacional sobre Aplicaciones de Álgebra Computacional IMACS ACA 99, habiéndose integrado la edición del Boletín n° 53 en las actividades del Congreso.

d) Se informa que el sábado 19 de junio de 1999 se celebró, con el éxito ya tradicional, el XVII Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados. Como en años anteriores, los ejercicios tuvieron lugar en la Facultad de Matemáticas y la entrega de premios en la E.U. de Biblioteconomía. En esta ocasión -por falta de financiación- nuestros ganadores no pudieron participar en la Olimpiada Rioplatense.

e) Se anuncia que el XVIII Concurso de Resolución de Problemas se celebrará, con la misma estructura, el sábado 17 de junio de 2000.

f) Se informa que, como en años anteriores, la Sociedad colaboró con la Real Sociedad Matemática Española en la organización de la fase local de la Olimpiada Matemática, obteniendo los ganadores en la fase final, celebrada en Palma de Mallorca, 3 platas (entre ellas, la primera) y tres bronces (entre ellos, el primero).

g) Tal como se propuso en la Asamblea anterior, la Sociedad, en colaboración con la Real Academia de Ciencias, celebrará una sesión conmemorativa del Centenario del nacimiento de Don Pedro Puig Adam, el día 7 de junio en el salón de actos de la Academia. Colaborará en él la E.T.S. de Ingenieros Industriales de la UPM.

h) Se anuncia que la Sociedad participa también en la organización de dos Congresos científicos, el AISC'2000 Fifth International Conference "Artificial Intelligence and Symbolic Computation", que tendrá lugar en Madrid del 17 al 19 de julio, y el II Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1936: Cabrera, Cajal y Torres Quevedo", que se celebrará en Yaiza (Lanzarote), del 1 al 3 de agosto.

i) Por último, informa de que se ha recibido una propuesta para dedicar un número especial monográfico del Boletín a Don Pedro Abellanas Cebollero.

3. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

En ausencia justificada del tesorero D. Alberto Aizpún, el presidente reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería: ingresos y gastos. A continuación explica detalladamente el número de recibos emitidos y las gestiones realizadas con los socios cuyos recibos han sido devueltos. Las cuentas quedan aprobadas por unanimidad.

Se propone subir la cuota de la Sociedad de 3000 a 3500 ptas, manteniendo la cuota federativa de 2000 ptas, y así se aprueba.

A continuación se retoma el tema de la cuota federativa duplicada para miembros de dos sociedades federadas y del convenio de reciprocidad con la Real Sociedad Matemática Española, cuestiones ambas en trámite de solución.

En este punto toma la palabra D. Eugenio Roanes Macías para detallar el estado de cuentas del Congreso IMACS ACA 99, cerrado con superávit que permitió incluso financiar la edición del Boletín n° 53.

4. Elección de nuevos cargos directivos.

Se renueva en sus cargos hasta 2004 a los miembros de la Junta Directiva elegidos en 1996: D. Joaquín Hernández Gómez (Bibliotecario) y D. Francisco A. González Redondo (Secretario).

5. Asuntos de trámite.

No hay.

6. Ruegos y preguntas.

a) D. Eugenio Roanes Macías informa de las características de las subvenciones para concursos de la compañía Texas y las gestiones realizadas, aspectos que completa D. Eugenio Roanes Lozano.

b) D. Eugenio Roanes Lozano propone que se explicite el Consejo de Redacción del Boletín de la Sociedad, incorporando nuevos socios además de los miembros de la Junta Directiva que llevan realizando esta tarea a lo largo de los años de vida del Boletín.

c) De nuevo, D. Eugenio Roanes Lozano sugiere que se precisen en el Boletín las recensiones tanto de Zentralblatt für Didaktik der Mathematik como de Mathematical Reviews. Esto último se demorará hasta nuevas comunicaciones de la Editorial.

Llegados a este punto, el Presidente levanta la sesión a las doce horas, cuarenta y cinco minutos de la fecha arriba indicada.

V.° B.° El Presidente *El Secretario*

Acto conmemorativo del Centenario del nacimiento de Don Pedro Puig Adam

Promovido conjuntamente por la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (de la que fue Miembro de Número), por la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid (de la que fue catedrático) y por la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, se ha celebrado una Sesión Conmemorativa del Centenario del Nacimiento de Don Pedro Puig Adam.

El acto, al que fueron invitados todos nuestros socios, mediante carta enviada desde la Academia, tuvo lugar en la Academia el miércoles 7 de junio, a partir de las cuatro y media de la tarde, de acuerdo con el siguiente

PROGRAMA

D. SIXTO RÍOS GARCÍA, de la Real Academia de Ciencias, sobre el tema:
"La obra matemática de Pedro Puig Adam".

D. JULIO FERNÁNDEZ BIARGE, Catedrático de la E.T.S. de Ingenieros Navales, Compañero de Cátedra de D. Pedro Puig Adam en el Instituto San Isidro, antiguo Presidente de la Sociedad "Puig Adam" y actual Miembro de su Junta Directiva, sobre el tema:
"Pedro Puig Adam en el Instituto San Isidro".

D. JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ, Catedrático del Instituto "San Juan Bautista" de Madrid, Profesor Asociado de la Facultad de Matemáticas de la Univ. Complutense, nieto político de D. Pedro Puig Adam y Miembro de la Junta Directiva de nuestra Sociedad, sobre el tema:
"La labor pedagógica de Pedro Puig Adam".

D. MIGUEL JEREZ JUAN, Catedrático de la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid, sobre el tema:
"Pedro Puig Adam en la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Madrid".

D. GREGORIO MILLÁN BARBANY, de la Real Academia de Ciencias, sobre el tema:
"Pedro Puig Adam y la Real Academia de Ciencias".

Valor formativo de las Matemáticas en la Segunda Enseñanza

(Conferencia pronunciada por D. Pedro Puig Adam en 1951, que no ha perdido actualidad, como puede comprobarse)

El título de este artículo "Valor formativo de las Matemáticas en la Segunda Enseñanza", podría inducir a error respecto de cuál es mi opinión sobre el valor formativo de las asignaturas. Porque entiendo que más que el contenido en sí de cada disciplina y aun, si me apuráis, más que los métodos propios de investigación en cada una de ellas, lo que en definitiva señala su valor formativo es el método que se siga en su enseñanza.

Es una verdad por todos comprobada que la Matemática, lo mismo que el latín y otras disciplinas, puede no dejar rastro alguno formativo o dejar huellas muy distintas según el profesor y según el método que le hayan servido de guía.

Un título más fiel a mi pensamiento, pero también más largo y pretensioso, por lo que preferí sacrificarlo a la brevedad, hubiera sido "Huella formativa que debe exigirse a la enseñanza de las Matemáticas en el Bachillerato y métodos adecuados para ello", y a este título corregido y aumentado voy a atenerme.

1. Las visiones estrechas del problema y sus consecuencias didácticas

Prescindiendo por el momento del valor utilitario, del que hablaremos al final de pasada, la más importante misión y para muchos la única misión específica, que se confiere a la Matemática desde el punto de vista educativo en la segunda enseñanza, es el cultivo y el desarrollo del espíritu lógico, del arte de bien razonar. La didáctica que en consecuencia se propugna es el racionalismo a todo pasto, con olvido de los valores de la intuición; no importa mucho la génesis de los conceptos ni de sus atributos fundamentales lo esencial es adiestrar a razonar correctamente sobre premisas bien claras y bien establecidas, sin inquietarnos de su origen.

Para otros la Matemática es, por encima de todo, la Ciencia de los problemas. La didáctica correspondiente a tal concepción es el pragmatismo cuantitativo a ultranza: Resolver muchos, muchos problemas, ahí está el quid. No habléis a tales pragmáticos de analizar qué facultades exigiría poner en uso cada uno de los problemas propuestos, ni de si estas facultades serán las mismas que el educando tendrá que ejercitar en sus funciones futuras de hombre social y culto. No os comprenderán. El automatismo del régimen corriente de pruebas en masa y contrarreloj, ¿no favorece acaso esta concepción y esta técnica didáctica? Apliquémosla, pues, y tendremos también automáticamente asegurado el "éxito" (éxito que entrecomillo dejando que cada cual interprete las comillas a su gusto).

Personas más sutiles, más enteradas o simplemente más aficionadas a contemplar las cosas desde ángulos originales (tipo frecuente entre los ensayistas, algunos de tan grata lectura) ven, sobre todo en Matemática, bien sea la expresión taquigráfica de las leyes del pensamiento (peligrosa valorización del signo sobre la idea, ante la cual toda precaución pedagógica será poca), bien sea el cultivo de hábitos de "exactitud" (exactitud que también entrecomillo con cierto escepticismo, que razonaré luego), bien sea, finalmente el ejercicio de la autocrítica, del respeto a la verdad, del culto al saber desinteresado.

Pues bien, señores, el papel de la Matemática en la educación de la juventud no consiste en el desarrollo *exclusivo* de ninguna de tales facultades, destrezas o virtudes, ni siquiera en el de todas ellas sumadas. Ha de exigirse a una buena educación matemática todavía varios valores más, cuyo olvido ha sido y creo sigue siendo la causa frecuente de su fracaso, si no ante los exámenes, ante la vida misma.

2. El "Esprit Geometrique" y el "Esprit de Finesse" de Pascal

Parafraseando a Pascal, diremos que no basta ejercitar el "esprit géomètrique" más o menos integrado por el conjunto de tendencias a las que acabamos de hacer alusión; es preciso cultivar además el "esprit de finesse", sutilísima locución pascaliana muy difícil de traducir, pero que quizá respondiera más en nuestros oídos españoles a la versión "finura de espíritu" que a la de "espíritu de fineza". Para darnos cuenta de todo el papel que debe desempeñar la Matemática en la educación, basta ver el que ha desempeñado y desempeña en el progreso y en la cultura humanas; sólo así nos daremos cuenta del grave fallo que supone la educación matemática abstracta, tal como se practicaba con exclusivismo funesto hasta comienzos de este siglo, y aún sigue practicándose entre muchos pedagogos de formación excesivamente racionalista.

3. Opiniones y críticas sobre la enseñanza matemática tradicional

Una gran autoridad en Logística, decía en el Congreso Internacional de Cambridge (1912) que la eficacia de la enseñanza matemática residía simplemente en el desarrollo del sentido lógico, y pocos años antes las instrucciones del curso prusiano dictaban: "En todos los campos de esta materia el objeto debe ser por lo tanto el de obtener una comprensión clara de los teoremas a desarrollar y de sus deducciones, así como de la práctica y habilidad de usarlos". No hace aún muchos años un pedagogo español estampaba estas palabras: "Pocas son las actividades psicológicas del niño que puedan ser utilizadas para el estudio racional de la Matemática, justificando así en cierto modo el aprendizaje rutinario que durante tantos siglos se ha hecho..." "El ideal estará, pues, en hacer de toda la enseñanza de la Matemática un campeonato continuo en que la rapidez, la exactitud, la

facilidad, la precisión y el rigor lógico, la perfección en una palabra, vayan aumentando sucesivamente de acuerdo con las características que como arte y como ciencia le hemos asignado".

El estrecho dilema y al propio tiempo el terrible salto en que se condensaba la vieja enseñanza matemática era, pues, ese: empirismo o logicismo; del primero se saltaba al segundo sin gradaciones intermedias. Mientras no pudiera obtenerse del niño frutos de razonamiento lógico no quedaba otra tarea que la de inculcarle destrezas, excitando a falta de otro interés, su espíritu de competencia y campeonato. Pero en cuanto apuntaran sus facultades de raciocinio, ¡ah!, entonces era llegada la hora de abrumarle con axiomas, teoremas, corolarios, escolios, etc. Todos los individuos de nuestra generación y de las anteriores hemos sufrido las consecuencias de este angosto dilema, cuyo resultado ha sido la aversión total y definitiva de muchos espíritus hacia la Matemática, espíritus que en otros campos han acreditado luego una gran finura. Y no es de extrañar que tal aversión cristalizara en diatribas célebres por su paternidad y por su dureza. No resisto la tentación de citar alguna.

Madame de Stáel decía (1) por ejemplo: "Las verdades demostradas con énfasis no conducen a las verdades probables y éstas son las únicas que aparecen en los negocios, en el arte, en la sociedad. Nada tiene menos aplicación en la vida que una demostración de matemáticas. Un teorema sobre números es verdadero o es falso; en todos los demás asuntos lo cierto y lo falso están mezclados en tal modo que sólo el instinto puede distinguir".

Le Bon por su parte opina que la Matemática sólo sirve para desarrollar el gusto de los razonamientos sutiles, pero que es falso que ejercite el juicio, y para justificar su aserto aduce el hecho de que los más eminentes matemáticos no saben con frecuencia conducirse en la vida y se desorientan frente a las menores dificultades. Huxley se forma este lamentable concepto: "La matemática es un estudio que no obliga a la observación, a la experiencia, a la inducción, a la casualidad".

Finalmente, Bouasse en uno de sus pintorescos prólogos asesta estos terribles mazazos: "El matemático tiene horror a lo real, abomina del caso particular; la abstracción y la generalización son los ídolos a los que sacrifica el buen sentido... cuando ya no queda nada de un fenómeno es cuando razona a sus anchas: el vacío es su elemento, la forma su dios".

Para suavizar el patetismo de tal anatema voy a terminar este muestrario con un rasgo crítico de humor que si no es inglés lo parece: Se trata de un "test" (L'Allemagne. Part. 1. Cap. 18), para averiguar si un sujeto tiene aptitudes matemáticas. Se le explica cómo se procede para confeccionar una tortilla, enunciando las premisas necesarias para ello: entre las cuales está la situación precisa de la sartén colgada de un clavo en la pared, siguen detalles acerca del desarrollo de la operación, detalles que omito (entre otras razones para no verme en un apuro). Terminada la descripción y comprobada su perfecta asimilación por parte del sujeto experimentado, se le cambian súbitamente las premisas, y el cambio consiste solamente en que la sartén en lugar de estar pendiente de la pared está ya sobre el fogón. A la pregunta ¿qué haría usted ahora para confeccionar la tortilla?, si el sujeto tiene "verdadero" espíritu matemático debe contestar rápidamente según el humorista del chiste: "Se cuelga la sartén del clavo y el problema queda reducido al caso anterior".

Como ridiculización del espíritu deductivo abstracto hay que reconocer que la humorada tiene mucho ingenio y que encierra una profunda enseñanza. Lo injusto es que se dirijan todas estas diatribas o burlas a la matemática o a los matemáticos, y no, como debiera ser, a los vicios o torpezas en su enseñanza. Y repito que para darnos cuenta de tales errores nada mejor que analizar el papel que la Matemática ha desempeñado en la historia de la cultura humana y en la misma vida del hombre.

4. Sentido lógico y sentido de aplicación

Nadie pone ya en duda el papel que la Matemática desempeña en el desarrollo del sentido lógico, diré más, diré que es la Ciencia más adecuada para ello, por la misma precisión y sencillez de sus conceptos. Tampoco intentaré minorizar la importancia que el desarrollo de tal sentido pueda tener. En un mundo en que los valores lógicos tuvieran el debido peso, no serían posibles declaraciones tan pintorescas como la de una Organización de Naciones que en defensa de la paz renegó durante varios años de aquella que mantuvo honrada y gallardamente la suya mientras el mundo estaba en guerra. Es, sin duda, en el mundo de la política donde los fallos de la lógica son más frecuentes, quizá porque los entes sociales que maneja son de tan extrema complejidad o acaso porque en ella el amor a la verdad sea tan raro y aborrecido. Pero dejando a un lado el vidrioso asunto del gobierno de los pueblos, aún para el gobierno propio no cabe duda de que los valores lógicos son en multitud de casos (no siempre) norma de la mejor y más acertada conducta. Así, por ejemplo, la simple generalización a los demás de una exigencia propia permite ver la imposibilidad de un deseo que nuestro ciego egoísmo nos imponía con imperativo apremiante. El hábito del análisis minucioso de situaciones y la vacuna adquirida contra las falacias del razonamiento nos permitirán ser más justos en nuestros juicios y más ecuánimes en nuestras determinaciones.

Pero dando por descontadas todas las excelencias del logicismo, es indudable que no bastan para la vida ni hubieran siquiera bastado para el desarrollo de la Ciencia. Desarrollar el sentido lógico, el mecanismo deductivo, sin cultivar conjuntamente otros valores intelectuales es condenar la lógica a la esterilidad. Una vez más he de repetir aquí un sonsonete que, convertido en credo pedagógico, voy ensartando en cuantas oportunidades se me ofrecen para tocar el tema de la educación matemática.

La Matemática es el filtro a través del cual el hombre estudia los fenómenos naturales; sustituye la infinita complejidad de los mismos por la esquemática sencillez de unos entes de razón sobre los cuales pueda discurrir cómodamente el razonamiento lógico; obtenidos los frutos de éste, procede la interpretación de los mismos en el campo de la realidad. Hay, pues, tres fases en el estudio matemático de los fenómenos naturales, una

primera fase de planteo o de *abstracción*, una segunda fase de razonamiento lógico, y una tercera de traducción o paso de lo abstracto a lo concreto, operación que llamaremos de *concreción*.

La enseñanza matemática clásica se ha reducido durante mucho tiempo al cultivo de la segunda fase; se han ido transmitiendo de generación en generación los conceptos matemáticos desprovistos de toda significación real, enrarecidos a fuerza de depurados, y de aquí el divorcio entre la enseñanza matemática y la realidad; de aquí el tipo de hombre de ciencia incapaz de conducirse con buen sentido en la vida, el tipo frecuente del ingeniero repleto de ciencia matemática, pero incapaz de plantear, con sentido práctico, los problemas que la técnica le ofrece.

Si se quiere conseguir, pues, una formación matemática completa que habilite al educando para utilizar en su día la Matemática como instrumento vivo, no debe descuidarse en la enseñanza matemática el sentido de aplicación en su doble aspecto de abstracción y concreción. Pero esto no se consigue limitándose a poner problemas llamados de aplicación después de una exposición teórica abstracta (problemas la mayor parte de las veces de aplicación más aparente que real). El remedio debe atacar al mal en su origen mismo, es decir, en la etapa de formación de los conceptos matemáticos. Así, antes de iniciar el método lógico ha de haberse acumulado en la mente del alumno un rico caudal concreto de observaciones, de experiencias y de intuiciones, efectuadas desde los primeros años de la escuela y que, sedimentadas en lo inconsciente del niño, sean el germen de los conceptos abstractos.

Aun cuando parezca paradójico, la facultad de abstracción no se desarrolla razonando *in abstracto*, sino empezando por lo concreto, ya que si abstraer es prescindir de algo, es preciso que empiece por existir este algo de que se puede prescindir. La deficiencia de la enseñanza de tipo clásico en este punto consiste, pues, en dar las abstracciones hechas y no enseñar a formarlas, que es lo útil y lo eficaz.

Otro tanto cabe decir de la ausencia del desarrollo de esta facultad, que hemos llamado de *concreción*, en la enseñanza de tipo clásico. Muchas veces hemos oído lamentaciones de profesores universitarios sobre la insensibilidad del alumno ante resultados claramente absurdos. ¿A qué se debe sino a falta de hábito de interpretación o representación de los mismos?

No es enseñar aritmética concreta limitarse a poner al lado de los números abstractos el aditamento de un sustantivo o de una abreviatura (metros, kilos, litros, etc.). Es necesario que estos números concretos tengan en la mente del alumno su representación clara, que éste sepa *proyectarlos* en todo momento en el campo de la realidad.

Hace algunos años hojeábamos un cuaderno de Aritmética de un niño preparado en lo que se llamaba *un buen Centro de enseñanza.* Como en todos los demás cuadernos, había en éste curiosos resultados de longitudes de calles calculadas al milímetro, de tiempos de duración de obras a la centésima de segundo, pero lo que más me llamó la atención fué un número de obreros 17,8456. Preguntado que fue el niño por qué había calculado cuatro decimales, contestó que no se le había dado tiempo para sacar más. A pesar de hacerle leer el resultado seguido de la palabra obreros, no había medio de que comprendiese el absurdo. Unicamente cuando le situé imaginativamente ante un supuesto grupo de obreros para que eligiera los que le hacían falta, se despertó en él la sonrisa del absurdo. Terminó confesando que el profesor daba siempre la mejor puntuación al que sacaba más decimales. He aquí una muestra de los resultados a que conduce el método del campeonato.

No se crea que el desarrollo de estas facultades de aplicación, que establecen el nexo de la matemática con la realidad, deban relegarse a la enseñanza de las ciencias físicas. Insisto en que los conceptos matemáticos son ricos por sí solos en significado concreto, que este significado es precisamente el que les ha dado origen, y que lejos de renegar de este origen debemos acudir a él para reproducir en el educando la misma evolución que dichos conceptos han tenido en la especie humana.

5. El papel de la intuición

Hemos dicho que no basta con saber deducir; es preciso saber, además, plantear e interpretar. Pero plantear en las complejas ciencias de la naturaleza, y no digamos en las sociales, es saber elegir las variables de influencia preponderante en el fenómeno, es adivinar -sin efectuar las experiencias, muchas veces de realización imposible-, que los efectos de la omisión de ciertas causas serán prácticamente imperceptibles mientras la omisión de tales otras acarrearían grave error. Es predecir, el comportamiento de una realidad sensible saltando por encima de ella, cerrando los ojos y *viendo* lo que ocurre (si vale la palabra) en una realidad interna nuestra imaginada. Es, en definitiva, hacer uso de la facultad que en Matemáticas llamamos *intuición* (de *in tuire* mirar dentro) y que no debe confundirse con la facultad denominada intuición por algunos psicólogos y pedagogos que apenas difiere de la simple percepción.

Fácilmente se comprende que ya no son los valores lógicos los que nos pueden guiar en esta selección previa de premisas, ya que la lógica es sólo apta para actuar sobre premisas previamente elaboradas, ni son tampoco en muchas ocasiones valores lógicos los que a la postre determinan las ideas clave de las soluciones de los problemas, sino la clarividencia previa interna de la fecundidad de una determinada asociación de ideas y de la esterilidad de las demás. Aun en la génesis y desarrollo de la propia Ciencia matemática es reconocido por todos nosotros que el verdadero faro que ilumina y descubre los nuevos senderos es la intuición; el rigor lógico viene casi siempre detrás, limitándose a cimentar sólidamente los descubrimientos de aquélla.

El fracaso de muchos matemáticos, más justo sería decir de muchos malos matemáticos, ante los complejos problemas de la vida, fracaso que motivaron las anteriores diatribas sobre ellos y sobre la Matemática en general, no son sino consecuencia de un defectuoso cultivo de esta sutilísima facultad en la que principalmente radica el *esprit de finesse* de que nos hablaba Pascal. Por otra parte, este fallo no es privativo de la mala especialización matemática, sino también de cualquier otra especialización, defectuosa por efecto de una incompleta educación. Decía Rey Pastor en cierta ocasión, con su habitual gracia para ridiculizar defectos: "El médico o el abogado que sólo hayan recibido una enseñanza rigurosamente deductiva y abstracta, apagada en ellos la llama de la intuición capaz de iluminar el fondo oscuro de lo complejo, sólo verán claro cuando se les presenten las cuestiones en la simplicísima forma silogística; y como los síntomas del paciente y las declaraciones de los testigos suelen ser de apariencia inconexa y casi siempre contradictorios, la conclusión que en buena lógica obtendrán es la inexistencia de la enfermedad o del delito".

6. El sentido de lo esencial

Se comprende ahora por qué la omisión del cultivo de la intuición en la enseñanza matemática, la desvitaminiza al punto de motivar en los educandos la falta de esa cualidad que podríamos llamar *sentido de lo esencial.* Sentido tan indispensable en la técnica como en la vida en general. Para tomar decisiones en la vida no basta saber hacer un minucioso análisis de las circunstancias que puedan influir en la situación que pretendemos superar; es preciso tener la intuición clara de aquellas de mayor peso y no pretender soluciones matemáticamente perfectas donde la naturaleza del problema no las reclama ni inhibirse por la presencia de causas de signo opuesto cuando alguna de ellas carece de importancia.

Quien en su educación matemática haya cultivado la facultad de intuir, cabe esperar que haya desarrollado el sentido de lo esencial a que estamos aludiendo y que, sabiendo discriminar con acierto lo preponderante de lo secundario, no se pierda en sutilezas de juicio inútiles, ni discuta en vano, ni actúe torpemente en sus decisiones vitales.

7. El sentido de aproximación

En relación con el uso de la facultad de concreción, debo hacer hincapié sobre el carácter de pretendida "exactitud" que el vulgo atribuye a la ciencia matemática, y que aplicado puerilmente a la educación puede producir estragos atentatorios al sentido común, como el que hemos puesto más arriba de manifiesto al comentar la "exactitud" de ciertas diezmilésimas de obrero.

Si se habituara al alumno a proyectar constantemente los datos y resultados de los problemas al campo de la realidad, se evitarían absurdos de tal naturaleza, se acostumbraría al alumno a tener presente esta verdad tan sencilla y sin embargo tan olvidada, de que todo dato que traduce una medida del mundo físico es necesariamente aproximado, y que, par lo tanto, la pretendida exactitud en los resultados no sólo es una pura quimera sino un falseamiento grotesco de la realidad. Quien pretendiendo ser "exacto" calcula cifras y más cifras sin pensar si rebasan el límite de apreciación de los aparatos de medida, o el umbral de nuestra propia sensación, demuestra tanta ignorancia como falta de este sentido de la realidad.

Desgraciadamente este sentido de la aproximación es tan descuidado en la enseñanza del Bachillerato como en la misma enseñanza técnica, donde el pecado es aún más grave por dañar doblemente al educando: en su formación y en su información. Es muy frecuente todavía en los exámenes de ingreso en nuestras Escuelas técnicas ver calcular con tablas de siete decimales, fórmulas cuyos datos experimentales se dan tan sólo con tres cifras. Alguien nos aseguraba en cierta ocasión haber determinado la distancia entre dos puntos, uno de ellos la punta de un campanario con un error menor que una centésima de milímetro, sin darse cuenta de la carencia de sentido matemático que la frase tenía por la imposibilidad material de precisar en un tal remate aquella centésima de milímetro capaz de definir precisamente la "punta".

8. El problema del método. Los periodos de su evolución.

Dando por terminada aquí la exposición crítica de la finalidad educativa que debe perseguirse en la enseñanza de la Matemática en el Bachillerato, añadamos siquiera dos breves palabras acerca de las consecuencias didácticas que de tal crítica pueden derivarse en orden a los problemas de método y modo; es decir, del camino y del cómo lograr la más eficaz consecución de dicha finalidad.

Sin dejarnos llevar por exclusivismos simplistas y apriorísticos, podemos decir que los mejores métodos y modos son aquellos que, sin olvidar las finalidades apuntadas, se adapten mejor a la psicología del escolar.

Podría caracterizarse la escuela antigua de la enseñanza de la Matemática por el desprecio, por la ignorancia de los problemas psicológicos y el consiguiente predominio sobre ellos de los problemas puramente lógicos.

Se olvidaba que la lógica y los intereses del niño no son los mismos que los del adulto. Y así veíamos exposiciones impecables de forma, pero no aptas para cultivar las apetencias analizadoras del niño ni siquiera para desarrollar prematuramente en él hábitos de síntesis, ya que no se desarrolla precisamente esta capacidad dando las síntesis hechas. El resultado era tan sólo cultivar una vez más la memoria bajo la falsa apariencia de un raciocinio de prestado.

Se olvidaba lo que llaman algunos psicólogos "el realismo intelectual del niño"; es decir, su incapacidad para la comprensión prematura de las relaciones lógicas formales o abstractas. Así veíamos usar prematuramente demostraciones por reducción al absurdo que en modo alguno podrían entender los alumnos de tierna edad, ya que se fundan en premisas no sólo desligadas de la realidad tangible (única que pueden concebir), sino por añadidura contrarias a la realidad misma.

Se olvidaba o se ignoraba además la ley *biogenética*, que si en Filosofía positivista ha tenido derivaciones excéntricas, en Pedagogía sigue expresando una analogía interesante, según la cual el desarrollo del individuo reproduce en pequeño el desarrollo de la especie. Y así se presentaba la matemática escamoteando al niño el proceso genético que en la humanidad ha tenido nuestra ciencia, prescindiendo de su etapa experimental e intuitiva y presentándola en la forma de ciencia racional por excelencia tal como la elevaron los griegos, que suponen ya una civilización adulta.

Se olvidaba, por fin, que la evolución mental del niño sigue la misma ley de continuidad que su crecimiento físico; y así se saltaba bruscamente de los procedimientos empíricos de la escuela primaria a los razonamientos euclídeos de las obras venerables de matemática clásica, sin tener en cuenta que los alumnos de Euclides no fueron precisamente niños.

¿Cuál era el resultado de todo este sistema? La inadaptación, la incomprensión y una aversión definitiva en la mayor parte de las inteligencias, que así quedaban perdidas para la matemática, ciencia para la que se creían necesarias aptitudes especialísimas.

Lo contrario, pues, de lo criticado constituye, en líneas generales, la indicación de lo que debe hacerse: 1° Cumplimiento de las finalidades educativas antes estudiadas; 2° Conocimiento psicológico del alumno y el recuerdo consiguiente de las leyes *biogenética* y de *continuidad*.

Estas simples leyes sirven, por ejemplo, para justificar la implantación de los *métodos cíclicos* que establecen la continuidad en el estudio de las materias sin fraccionarlas en cotos separados; justifican la implantación de los *métodos intuitivos* en los primeros años del bachillerato para llenar el bache que existía entre el empirismo de la enseñanza primaria y el racionalismo de la enseñanza universitaria, y la evolución progresiva de los métodos que sin discontinuidad ni saltos bruscos permitan desarrollar las actividades psicológicas del niño gradualmente desde su Primera infancia hasta la Universidad.

Los períodos de esta evolución metodológica y las facultades preponderantemente desarrolladas en cada uno de ellos podrían caracterizarse y ordenarse cronológicamente, si no con carácter exclusivista al menos con tono predominante, del siguiente modo:

Período de observación.- Análisis simple, observación de los hechos y cosas que rodean al niño. Desarrollo de los sentidos.

Período de experimentación.- Se provocan nuevos hechos para su análisis. Se *inducen* analogías. Desarrollo de la *transducción*; es decir, paso de lo particular a lo particular análogo.

Período de intuición.- Los hechos reales y provocados se sustituyen por hechos imaginados. La realidad externa sensible, por el mundo interno de la fantasía. El niño empieza a mirar dentro de sí; hace afirmaciones no ya sobre *lo que está ocurriendo*, sino también sobre *lo que ocurriría si*... Desarrollo consiguiente de la imaginación o fantasía. Desarrollo de la *inducción*.

Período lógico.- Se sustituye, la evidencia sensible por la evidencia lógica. Los hechos imaginados por las premisas abstractas y sus consecuencias necesarias. Esquematización del razonamiento mediante el simbolismo abstracto. Desarrollo de la deducción lógica y de la abstracción.

9. El problema del modo

En este problema voy a ser mucho más esquemático, limitándome tan sólo a dar unas líneas muy generales de orientación, e insistiendo en que todo exclusivismo es funesto, ya que el mejor modo es también aquél que mejor se adapta a la finalidad y al alumno.

Creo que la principal guía para orientar el modo o manera de enseñar es atender a los intereses del niño. Me refiero, naturalmente, a los intereses como apetencia volitiva del mismo.

En la escuela antigua se concebía al niño como un depósito que hay que llenar de conocimientos; hoy se le concibe ya como un potencial a convertir en actividad. Todavía no se han percatado muchos pedagogos de la profunda trascendencia que este cambio supone. Si hubiese modo de medir la cantidad de energía psíquica que nos entra por las puertas de nuestros Centros de enseñanza todos los días en las personitas de nuestros alumnos, nos quedaríamos asombrados de ella. Dar cauce a estas energías, dar que hacer a dichos alumnos, un quehacer que les interese y eduque al mismo tiempo progresivamente; ésta es nuestra principal tarea y nuestra difícil tarea de todos los días.

No olvidemos que el niño tiene constantes ganas de hacer cosas, de realizar por su cuenta descubrimientos, y sólo le interesará escucharnos en la medida en que favorezcamos, estimulemos y orientemos con nuestras explicaciones sus apetencias creadoras. No hemos, pues, de concebir la clase como una sala de conferencias, sino como un taller de trabajo, y nosotros no nos hemos de sentir, conferenciantes en ella sino maestros de ese taller.

Por ello el modo de enseñanza más acorde con dichos intereses del educando es el modo heurístico en el cual el profesor tan sólo sirve de guía para que el alumno vaya descubriendo por sí solo las verdades o por lo menos se haga la ilusión de ello. Como observa agudamente Rey Pastor, no es la *posesión* de los bienes, en este caso culturales, sino su *adquisición* lo que depara al hombre las más puras satisfacciones.

El inconveniente más grave de este modo, en el cual el único texto es el cuaderno de anotaciones del alumno, es la lentitud. Por ello se hace casi siempre necesario abreviar los procesos y la ayuda del libro como vehículo de cultura termina siendo indispensable. Pero es preciso en tal caso que la técnica del manejo del libro sea la adecuada para que no se convierta este manejo en simple calistenia memorística. La solución: libro analítico de

lectura y cuaderno de síntesis parece ser la fórmula que, sin desechar las ventajas del método de análisis heurístico, no participe del grave inconveniente de su lentitud.

10. El problema del programa o contenido

Si en los problemas de método y modo hay que atender a los fines formativos y a la psicología del alumno, en la cuestión de programa hay que atender también al valor utilitario de los conocimientos. Creo que no he de esforzarme en probar la utilidad de las Matemáticas, que van enseñoreándose de día en día de las más variadas técnicas de investigación en las ramas del saber que parecían más alejadas de ella. Recordemos como muestras recientes: el análisis factorial en psicología, las investigaciones cuantitativas sobre conducta fisiológica de nervios y tejidos, el estudio matemático sobre las evoluciones cíclicas de ciertas poblaciones de especies en presencia, alimentándose unas de otras, en la teoría biológica de la lucha por la vida, las recientes conquistas en economía, sociología, estadística, etc. En el reconocimiento de la importancia útil de la técnica matemática están de acuerdo tirios y troyanos; pero si fuéramos a precisar la cantidad y sobre todo la calidad del contenido de los programas de enseñanza, ya aquí surgirían las discrepancias propias de las distintas escuelas pedagógicas.

Ignoro por qué razón se ha pretendido presentar como opuestos los valores utilitarios y los formativos. De una parte los utilitaristas a ultranza sólo se preguntan ante una teoría: ¿Y esto para qué sirve?, y claro es que no admiten más "servicio" que el de aplicación inmediata a la vida diaria. De otra parte los que se llaman educadores "puros" desprecian olímpicamente toda utilidad. Dignos herederos de la escuela clásica griega, temen que el valor formativo de las disciplinas quede maculado con la realidad.

A los primeros habría que decirles: Que si los hombres no estudiasen más que aquellos conocimientos estrictamente indispensables para el ejercicio de su minúscula profesión, acabaríamos todos por no tener nada que decirnos por ausencia de intereses y de conocimientos comunes y hasta de común lenguaje, no podríamos comunicarnos ni entendernos espiritualmente. De aquí la necesidad del estudio de las humanidades, que es tanto como decir la esencia y la médula de la cultura de la humanidad a la que pertenecemos todos.

A los segundos, escolásticos formalistas por excelencia, habría que preguntarles si creen de verdad que reflejar la ciencia y el arte humanos de hoy es enseñar las mismas humanidades que se enseñaban en el Renacimiento.

¿Cómo conjugar pues las dos tendencias utilitaria y formativa sin recargar los programas del peso abrumador e insoportable de que hoy adolecen? Yo propongo una fórmula muy sencilla. Ya he dicho que no creo mucho en el valor formativo de los conocimientos en sí: lo formativo son los métodos que se siguen para adquirirlos. A igualdad de métodos igualmente formativos parecen, pues, apetecibles, aquellos conocimientos que además de enriquecer nuestra cultura pueden aportarnos alguna utilidad en las exigencias de la vida moderna.

Cada hora tiene su afán y toda programación requiere la debida ponderación entre lo nuevo y lo tradicional, distinguiendo entre tradición y rutina para respetar todas aquellas cuestiones y enseñanzas cuyo valor formativo radique en su propia fecundidad y desechar aquellas otras cuya reaparición en los programas sólo se justifica por un hábito heredado. Demos, en cambio, cabida sin demora a aquellas cuestiones que la vida ha impuesto ya hoy como prácticamente necesarias, previniéndonos, eso sí, contra aquellas innovaciones caprichosas y que la práctica no haya sancionado debidamente.

11. El problema del régimen de pruebas

De buena gana terminaría aquí la charla si no me asaltara el temor de su inutilidad. Pues ¿de qué pueden servir todos los alientos formativos si al fin un régimen de pruebas, que estimo inadecuado, puede dar al traste con sus consecuencias? No nos engañemos, en el régimen actual de pruebas se ha querido resolver a un tiempo dos problemas que, aun temporalmente ligados, son en su esencia distintos; uno el de la selección de capacidades para estudios superiores, otro el de la comprobación de la eficiencia de una enseñanza.

Dejando a un lado la discusión de si el Bachillerato tiene una misión autónoma o simplemente capacitadora para el acceso a la Universidad, no cabe duda de que las pruebas realizadas en masa se convierten por ley del mínimo esfuerzo en una técnica, peor aún, en un automatismo al que se adapta inmediatamente otra técnica, por no decir otro automatismo de superación de tales pruebas. Hacia éstas queda, en definitiva concentrada la atención y el esfuerzo de los estudiantes y de quienes les guían, y así resulta que el problema de la *formación* de nuestra juventud se bastardea convirtiéndose en un problema de *preparación* que poco o nada tiene de común con aquél y que suele conducir, por el contrario, a una auténtica deformación del educando.

Señalé el peligro hace varios años en una revista profesional y hoy vuelvo a referirme a él amparado en el noble consentimiento de D. José Pemartín, quien sabe que al hacer yo alusión al problema no me mueve ningún afán de crítica, sino la honda y sincera preocupación por el problema formativo, preocupación de la que no puedo en ningún momento desprenderme.

Es muy difícil ser buen educador y buen preparador a un tiempo. Admitido que el prestigio de los Centros de enseñanza esté involucrado al éxito de sus alumnos en ciertos exámenes, los profesores de los mismos tenderán fatalmente a fabricar con la materia prima de su alumnado un producto artificial adecuado a las mencionadas pruebas, sacrificando si es preciso los valores auténticamente formativos y aun la salud física y mental del alumno, quizás sin darse cuenta de ello.

Sé que el mal tiene muy difícil remedio, pero no me parece imposible la humanización del régimen de pruebas mientras no sea alcanzable el ideal de la supresión de ellas, o lo que es lo mismo, convertir en prueba única la vida entera del escolar.

12. Resumen final

Y aquí termino, resumiendo en breve revisión mis anteriores conclusiones:

Siendo la finalidad del bachillerato más formativa que informativa, la suma de conocimientos adquiridos por el alumno tiene menos importancia que los métodos empleados para suministrarlos.

La finalidad de la enseñanza matemática en el Bachillerato no es sólo el cultivo de las facultades de raciocinio. Reducir las matemáticas exclusivamente a su edificio lógico abstracto es olvidar su origen y el papel que desempeñan en el estudio de la Filosofía natural. El estudio matemático de los fenómenos naturales tiene tres fases: La primera, de planteo, esquematización, de abstracción, en una palabra; la segunda, de mecanismo lógico resolutivo; la tercera, de interpretación, de concreción.

Razonar con abstracciones ya hechas sin que sea el mismo niño quien las haga es olvidar los orígenes concretos de la Matemática, que ha progresado siempre al tratar de esquematizar un mundo físico y social de complejidad creciente, es contrariar la ley biogenética, según la cual el desarrollo intelectual del individuo debe correr parejas con el desarrollo intelectual de la especie.

Si queremos, pues, que la educación matemática se proyecte de un modo fecundo en las realizaciones vitales futuras de los educandos, cultivemos también este doble proceso de abstracción y concreción, no sólo en el planteamiento y resolución circunstancial de problemas de carácter más o menos práctico, sino como línea directriz de toda la enseñanza matemática, empezando por acumular en los grupos primarios abundancia de experiencias vividas (proceso experimental); sigamos después sustituyéndolas por experiencias imaginadas (proceso intuitivo) y dejemos que sedimenten en el subconsciente del niño las abstracciones, para conseguir que afloren con facilidad en la etapa de la enseñanza racional. Se evitará así que la matemática engendre la aversión o la utopía, como ocurre en la enseñanza clásica montada sobre dos vacíos: el del empirismo y el del logicismo.

En las cuestiones de método y modo no nos dejemos llevar demasiado por apriorismos petulantes. El niño es en último término quien señala las directrices a seguir. Sus necesidades, sus reacciones nos dirán cuándo es llegado el momento de iniciar un método o de emplear un modo especial de enseñanza, y dichos cambios efectuémoslos siempre de manera gradual y continua como gradual y continuo es su desarrollo intelectual.

Tengamos también siempre en cuenta que el niño no es un saco vacío que hay que llenar de ciencia, sino un potencial deseoso de convertirse en acción. Hagamos que sienta la alegría de descubrir, de crear, de inventar; que una verdad hallada por su propio esfuerzo tendrá más valor para su cultura y para su moral que cien verdades recopiladas.

En la cuestión de contenido o programa tengamos en cuenta la utilidad. Si la eficacia educativa de la enseñanza matemática radica principalmente en los métodos, respetando éstos tendremos libertad para seleccionar los conocimientos que presten mayor utilidad y despierten por ello mayor interés, y así los dos puntos de vista utilitario y educativo, que tantas veces se han presentado como contrapuestos sin serlo, quedarán conjugados en una sencilla fórmula armonizadora: Enseñar conocimientos útiles con métodos educativos.

XXXVI Olimpiada Matemática Española

Primera fase - Madrid

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la *"XXXVI Olimpiada Matemática Española"* correspondientes al curso 1999-2000 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 21 y 22 de Enero de 2000.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española,* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.*

Como es sabido, esta Olimpiada se desarrolla en dos fases: la Primera tiene lugar en los distintos distritos; este año, tres de ellos corresponden a la Comunidad de Madrid, que cuenta con cinco Universidades estatales, además de las privadas.

Los tres ganadores de cada distrito reciben un Diploma acreditativo de la Real Sociedad Matemática Española y son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio para la concesión de un premio en metálico que este año es de 50.000, 35.000 y 25.000 pesetas para los ganadores de cada Distrito.

Los alumnos premiados son invitados a participar en la Segunda Fase, que este año tendrá lugar en **Palma de Mallorca** .En ella se entregarán 6 Medallas de Oro, 12 de Plata y 18 de Bronce. Las medallas de oro llevarán anejas premios en metálico de 100.000 pesetas.

Con los mejores clasificados en esa segunda fase, se formará el equipo que representará a España en la *41ª Olimpiada Matemática Internacional* que se celebrará en **Taejon - Corea del Sur**, del 13 al 25 de Julio de 2000 y en la *XV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas* que tendrá lugar en **Caracas - Venezuela**, del 16 al 24 de Septiembre de 2000.

Las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de tres horas y media de duración cada una, en las que se propusieron seis problemas, cuyos enunciados damos a continuación de esta crónica. Estos problemas son los mismos que se propusieron simultáneamente en la mayor parte de los distritos españoles. Las pruebas de los tres distritos que corresponden este año a todas las Universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurrieron 130 alumnos.

Cada problema se calificó con un máximo de **7 puntos**, como en la mayor parte de las competiciones internacionales y como ya se hizo el curso anterior. De este modo, había una posibilidad teórica de obtener **42 puntos.**

Damos a continuación los nombres de los alumnos premiados en los distritos de Madrid **A, B** y **C**, ordenados por puntuaciones decrecientes:

1º A	**D. Jesús Pascual MORENO DAMAS,** del C.O.U del Colegio Los Olmos de Madrid	**41 puntos**
1º B	**D. Felipe BLANCO GÓMEZ,** del C.O.U. del Colegio Retamar de Madrid	**38 puntos**

1º C **D. Carlos E. GONZÁLEZ GUILLÉN,** del C.O.U. del I.E.S. Los Rosales de Madrid .... **38 puntos**

2º A **D. Carlos VINUESA DEL RÍO,** de 2º de Bachillerato del I.E.S. Beatriz Galindo de Madrid .... **37 puntos**

2º B **D. Fernando CRUZ ROBLEDILLO,** de 3º de B.U.P. del Colegio Santa Mª del Pilar de Madrid .... **36 puntos**

2º C **D. Germán BERNARDO SACRISTÁN,** de 2º de Bachillerato del I.E.S. Marqués de Suances de Madrid .... **35 puntos**

3º A **D. Manuel GONZALO RECUERO,** del C.O.U. del Colegio Joyfe de Madrid .... **32 puntos**

3º B **D. Rubén BAUTISTA TAPIAS,** del C.O.U. del Colegio Santa Mª del Pilar de Madrid .... **30 puntos**

3º C **D. Carlos GARCÍA FERNÁNDEZ,** del C.O.U. del Colegio Fundación Caldeiro de Madrid .... **30 puntos**

Haremos notar que D. **Jesús Pascual Moreno Damas** (1º A) ya participó en la XXXV Olimpiada Matemática, siendo alumno de 3º de B.U.P. y se clasificó para la fase final, en tercer lugar de Madrid A. También ocupó el primer puesto en el Nivel III de nuestro XVII Concurso de Resolución de Problemas de 1999. D. **Carlos E. González Guillén** (1º C) se clasificó en segundo lugar del Nivel II en nuestro XVI Concurso de 1998. **D. Fernando Cruz Robledillo** (2º B) ganó el primer puesto del Nivel I en ese mismo Concurso y participó en la VII O. M. Rioplatense. **D. Rubén Bautista Tapias,** se clasificó en tercer lugar del Nivel I en nuestro Concurso de 1997.

Como todos los años, puede comprobarse que los Centros de procedencia de los alumnos premiados son, en su mayoría, los mismos que en otros anteriores, lo que es prueba de que en ellos se realiza una encomiable labor de estímulo y preparación. Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

Este año no hubo ningún problema que presentase grandes dificultades para la totalidad de los participantes, con lo que en todos los problemas se obtuvo un amplio abanico de calificaciones.

Damos a continuación los enunciados de esos problemas y, junto con cada uno, las puntuaciones medias alcanzadas en él, por todos los participantes y por los nueve premiados, así como el número de soluciones calificadas con 6 o con 7, que consideramos aceptables.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA PRIMERA FASE DE LA XXXVI O.M.E.

Problema 1º:

Considérese la sucesión definida como $a_1=3$, y $a_{n+1}=a_n+a_n^2$.
Determínense las dos últimas cifras de a_{2000}.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 2,4
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 6,6
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 123): 30

Problema 2º:

Sea P un punto del lado BC de un triángulo ABC. La paralela por P a AB corta al lado AC en el punto Q y la paralela por P a AC corta al lado AB en el punto R. La razón entre las áreas de los triángulos RBP y QPC es k^2.
Determínese la razón entre las áreas de los triángulos ARQ y ABC.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 0,9
Puntuación media obtenida por los nueve premiados(sobre 7): 5,6
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 123): 14

Problema 3º:

¿ Cuántos números, comprendidos entre 1.000 y 9.999, verifican que la suma de sus cuatro dígitos es mayor o igual que el producto de los mismos ?
¿ Para cuántos de ellos se verifica la igualdad ?

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,7
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 4,9
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 123): 10

Problema 4º:

Se consideran las funciones reales de variable real f(x) de la forma f(x) = ax+b, siendo a y b números reales. ¿Para qué valores de a y b se verifica $f^{2000}(x)=x$ para todo número real x?

[Nota: Se define $f^2(x)=f(f(x))$, $f^3(x)=f(f(f(x)))$, y en general, $f^n(x)=f(f^{n-1}(x))=f(f(...f(x))...))$ n veces.]

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 2,1
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 6,0
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 123): 12

Problema 5º:

En la orilla de un río de 100 metros de ancho está situada una planta eléctrica y en la orilla opuesta y 500 metros río arriba, se está construyendo una fábrica. Sabiendo que el río es rectilíneo entre la planta y la fábrica, que el tendido de cables a lo largo de la orilla cuesta 9 euros cada metro y que el tendido de cables sobre el agua cuesta 15 euros cada metro, ¿cuál es la longitud del tendido más económico posible entre la planta eléctrica y la fábrica?

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,5
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 7,0
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 123): 20

Problema 6º:

Se sabe que el polinomio $p(x) = x^3 - x + k$ tiene tres raíces que son números enteros. Determínese el número k .

Puntuación media obtenida por todos los alumnos (sobre 7): 1,2
Puntuación media obtenida por los nueve premiados (sobre 7): 5,2
Número de soluciones calificadas con 6 ó 7 (de 123): 9

XXXVI Olimpíada Matemática Española

Segunda fase – Palma de Mallorca

Baleares ha sido este año la sede de la fase nacional de la XXXVI Olimpiada Matemática Española.

A los 108 seleccionados en la fase local en los distintos Distritos Universitarios se sumaron, como invitados, los seis ganadores del año pasado, así como Beatriz Sanz y María Pé, medallas de Oro hace dos años, en la XXXIV OME, que no fueron invitadas el año pasado porque acudieron a Granada como participantes.

Las pruebas se desarrollaron los días 30 y 31 de marzo, en la Escuela Superior de Hostelería y Turismo. Estos fueron los problemas propuestos:

Problema 1º:

Sean los polinomios:

$$P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 1 \ ;$$

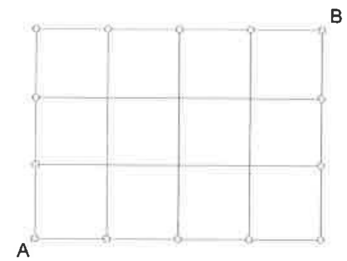
$$Q(x) = x^4 + cx^3 + bx^2 + ax + 1.$$

Halla las condiciones que deben cumplir los parámetros reales *a, b* y *c* (*a* distinto de *c*) para que P(x) y Q(x) tengan dos raíces comunes, y resuelve en ese caso las ecuaciones P(x) = 0; Q(x) = 0.

Media de todos los participantes: 2.57
Media de los oros : 5

Problema 2º:

La figura muestra un plano con calles que delimitan 12 manzanas cuadradas. Una persona P va desde A hasta B y otra Q desde B hasta A.



Ambas parten a la vez siguiendo caminos de longitud mínima con la misma velocidad constante. En cada punto con más de un camino todos los posibles caminos son igualmente probables. Halla la probabilidad de que se crucen.

Media de todos los participantes: 3.14
Media de los oros: 5.167

Problema 3º:

Dos circunferencias secantes C_1 y C_2 de radios r_1 y r_2 se cortan en los puntos A y B. Por B se traza una recta variable que corta de nuevo a C_1 y C_2 en dos puntos que llamaremos P_r y Q_r respectivamente. Demuestra la siguiente propiedad: existe un punto M, que depende sólo de C_1 y C_2, tal que la mediatriz del segmento P_rQ_r pasa por M.

Media de todos los participantes : 1.66
Media de los oros: 5

Problema 4º:

Encuentra el mayor número entero N que cumple las siguientes condiciones:

a) $E(N/3)$ tiene todas sus cifras iguales

b) $E(N/3)$ es suma de números naturales consecutivos comenzando en 1, es decir, existe un natural n tal que $E(N/3) = 1 + 2 + ... + (n-1) + n$

Nota : $E(x)$ es la parte entera de x.

Media de todos los participantes: 3.95
Media de los oros: 6.333

Problema 5º:

Tomemos cuatro puntos situados en el interior o en el borde de un cuadrado de lado 1. Demuestra que al menos dos de ellos están a distancia menor o igual que 1.

Media de todos los participantes: 1.32
Media de los oros: 3.833

Problema 6º:

Demuestra que no existe ninguna función

$$f : N \to N$$

que cumpla

$$f(f(n)) = n+1$$

Media de todos los participantes: 1.37
Media de los oros: 5.167

Los seis alumnos con mejor puntuación recibieron Medalla de Oro, además del premio en metálico de 100.000 pesetas que concede la subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio. Constituirán el equipo que representará a España en la 41ª Olimpiada Internacional de Matemáticas, que se celebrará en Taejon (Corea) entre los días 13 y 25 de julio de 2000. Sus nombres son:

Carlos Gómez Rodríguez, de Santiago de Compostela
Luis Emilio García Martínez, de Valencia
Alberto Suárez Real, de Salinas (Asturias)
José María Cantarero López, de Ronda (Málaga)
Manuel Pérez Molina, de Alicante
Roberto Rubio Núñez, de Valencia

Roberto Rubio Núñez ha resultado premiado los tres últimos años en el Concurso de Resolución de Problemas que organiza nuestra sociedad, y ha participado en dos ocasiones en la Olimpiada del Río de la Plata. También ha tomado parte en esta Olimpiada **Alberto Suárez Real**, que ha sido Medalla de Oro en la Olimpiada de Mayo tanto en el Primer Nivel (menores de 13 años) como en el Segundo Nivel (menores de 15 años)

También se concedieron doce Medallas de Plata y dieciocho Medallas de Bronce.

La representación madrileña obtuvo unos excelentes resultados. **Fernando Cruz Robledillo** (3º de BUP en el Colegio Santa María del Pilar, obtuvo la primera Medalla de Plata). Es uno de los pocos participantes que tiene todavía por delante un año de posible participación.

La tercera Medalla de Plata fue para **Carlos Eduardo González Guillén**, (COU en el IES Los Rosales), y la quinta para **Carlos García Fernández** (COU en el Colegio Fundación Caldeiro)

La primera Medalla de Bronce fue también para el madrileño **Jesús Pascual Moreno Damas** (COU en el Colegio Los Olmos). Obtuvieron también Medalla de Bronce **Carlos Vinuesa del Río** (2º de Bachillerato en el IES Beatriz Galindo), y **Rubén Bautista Tapias** (COU en el Colegio Santa María del Pilar)

También estuvieron en Palma de Mallorca **Felipe Blanco Gómez** (COU en el Colegio Retamar), **Germán Bernardo Sacristán** (2º de Bachillerato en el IES Marqués de Suanzes), y **Manuel Gonzalo Recuero** (COU en el Colegio Joyfe)

Los sábados previos a la salida hacia Palma, los nueve estudiantes de Madrid se reunieron en la Facultad de Matemáticas, para resolver problemas bajo la supervisión de nuestros "veteranos" Álvaro Navarro, Andrés Tallos, Beatriz Sanz, María Pé y Javier Múgica. A todos ellos queremos expresarles nuestro sincero agradecimiento.

Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

Convocado por la Universidad Politécnica de Madrid

El *Comité de la Universidad Politécnica de Madrid para el Año Mundial de las Matemáticas* ha organizado en este año 2000 un *Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas*, en el que pueden participar todos los alumnos matriculados en esa Universidad, en forma individual o colectiva, formando en este caso equipos de dos o tres alumnos.

Cada mes se proponen cuatro problemas cuyos enunciados aparecen en los tablones de anuncios y en la página *web* del Comité y los participantes envían sus soluciones al Comité, por el correo interno de la Universidad o por correo electrónico, durante el mes siguiente al de su publicación.

Un Jurado nombrado por el Comité califica y selecciona las soluciones recibidas y al final de cada trimestre se hace entrega de los premios acordados. A estos efectos, el concurso se desarrolla en tres trimestres: Enero a Marzo, Abril a Junio y Octubre a Diciembre.

Cada trimestre se concederá un Primer Premio de 100.000 pesetas, un Segundo Premio de 50.000 y tres accésits de 5.000 pesetas, acompañados de algún obsequio de libros.

Los enunciados de los problemas propuestos en el primer trimestre pueden verse en otra sección de este mismo Boletín. Como puede comprobarse, se trata de problemas que no requieren conocimientos matemáticos especializados ni superiores.

Entre los participantes se encuentran bastantes alumnos que han tenido experiencias previas participando en las Olimpiadas Matemáticas o en nuestros Concursos, en años anteriores, y que ahora cursan estudios de ingeniería en la U.P.M. Se inscribieron 61 equipos.

El día 17 de mayo tuvo lugar la entrega de los premios correspondientes al primer trimestre, presidiendo el Excmo. y Mgfco. Sr. Rector de la U.P.M. don Saturnino de la Plaza, que pronunció unas palabras en el Acto, así como don José Carrillo Menéndez, Presidente del Comité de la Comunidad Autónoma de Madrid, don Julio Fernández Biarge, Presidente del Jurado, y don Juan de Burgos Román que dio *"Una pequeña charla sobre las clases los exámenes"*.

El Primer Premio correspondió al equipo formado por **Jerónimo Arenas** y **Francisco Javier Martínez Borreguero** (de la E.T.S.I. de Telecomunicación).

Para el Segundo Premio se produjo empate entre **Javier López García** (de la E.T.S.I. de Telecomunicación) y el equipo formado por **Alejandro Moreno Herranz** y **Guillermo Pastor García** (de la E.T.S.I. Aeronáuticos). Se repartieron entre ellos el segundo premio y uno de los accesits.

Recibió un accesit **Juan Plans Principaux** (de la E.T.S.I. Industriales) y otro, el equipo formado por **Enrique Aristi Baquero**, **Pablo Fernández Galiano** y **Fernando Turrión López** (de la E.T.S.I. de Caminos).

Fueron finalistas Alvaro Navarro Tovar (Telecomunicación), Javier Mugica de la Rivera (Topográfica), Margarita García Rojas (Montes), Manuel Prieto Martín con Francisco de Asís Ribera Martín (Industriales) y David Pérez González (Industriales).

De entre los citados, señalaremos que el premiado **Jerónimo Arenas** fue también premiado en la Olimpiada Matemática Española y Mención Honorífica en la Internacional, en 1994, galardones que repitió en 1995, siendo además medalla de plata en la Iberoamericana de ese año, y **Álvaro Navarro Tovar** fue premiado en la fase primera de la O.M.E. de 1998 y 1999 y obtuvo Medalla de Oro en la fase final de este último año; también fue premiado en cada uno de los niveles de los Concursos de nuestra Sociedad, desde 1996. Por otra parte, también **Javier Múgica de la Rivera** fue Medalla de Oro en la OME de 1999.

Problemas propuestos

en el ***Concurso de Problemas*** *de la*
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID
con motivo del "2000, Año Internacional de las Matemáticas"

Enero, 1º:

En el siguiente juego, el tablero consiste en una fila de n casillas e inicialmente hay una ficha en cada una. En una jugada se mueven dos fichas, una avanza una casilla mientras que la otra retrocede una. ¿Para qué valores de n es posible colocar todas las fichas en una casilla del tablero?

Enero, 2º:

Hallar todos los números naturales tales que 2^n+3^n es múltiplo de 7.

Enero, 3º:

En una circunferencia hay 20 puntos rojos y 1 punto azul. Se consideran todos los polígonos convexos que se pueden construir con vértices en dichos puntos ¿Cuáles son más, los que tienen todos sus vértices rojos o los tienen un vértice azul? ¿Cuántos más hay de una clase que de otra?

Enero, 4º:

Sea ABCD un cuadrado. En el semiplano determinado por AC que contiene a B se elige un punto P tal que $\angle APC = 90°$ y $\angle PAC > 45°$. Sean Q el punto de intersección de PC con AB y H el pie de la altura correspondiente a Q en el triángulo AQC. Demostrar que los puntos P, H y D están alineados.

Febrero, 1º:

Un explorador se encuentra perdido en el interior de la selva. Conoce que en esa zona el borde de la selva es rectilíneo y que su posición dista 1000 metros de dicho borde. Encontrar un camino de longitud mínima que permita al explorador salir de la selva (el camino debe tocar el borde de la selva que no se sabe dónde está).

Febrero, 2º:

En un cuadrado de lado 1 cuyas paredes son espejos (horizontales y verticales) se lanza un rayo de luz desde el centro con pendiente 3/4 . En un momento dado, el rayo vuelve a pasar por el punto de partida. Calcular la distancia recorrida a hasta ese momento.

Febrero, 3º:

Se tienen 6 puntos en el plano entre los que no existen tres alineados ni cuatro en la misma circunferencia. Si se traza una circunferencia por tres de ellos, ¿Cuál es el máximo número de puntos de intersección entre esas circunferencias?

Febrero, 4º:

En una bolsa hay 175 monedas de las cuales 7 son falsas. Las monedas falsas son todas iguales y pesan menos que las auténticas, que también son todas iguales entre sí. Para identificarlas se dispone únicamente de una balanza de dos platos. ¿Cuál es el mínimo número de pesadas que es preciso realizar para separar 21 monedas auténticas?

Marzo, 1º:

Juan propone a su amigo Alberto el siguiente juego: Piensa un número de cuatro cifras, resta el número que se obtiene ordenando sus cifras de menor a mayor del que se obtiene ordenándolas al revés, de mayor a menor, y vuelve a repetir el proceso con el resultado, hasta que éste ya no se modifique. Cuando Alberto termina Juan le pregunta si el resultado es 0. Alberto le responde que no y Juan le dice que en ese caso sabe cual es. Probar que Juan tiene razón, es decir, se puede conocer el resultado y encontrarlo.

Marzo, 2º:

Unos turistas valencianos pasan sus vacaciones en una tranquila isla del Caribe, tan aislados del mundo que en toda la isla no hay ningún reloj. Para cocinar una paella necesitan medir 15 minutos exactos, el tiempo justo para que el arroz quede en su punto. En la única tienda de la isla tan sólo consiguen dos cuerdas, cada una de las cuales tarda una hora exacta en quemarse pero no lo hace a velocidad uniforme. ¿Cómo deben de proceder para que la paella quede en su punto?

Marzo, 3º:

En una mesa grande de madera se han clavado chinchetas, una en cada uno de los vértices de una cuadricula de 10 cm de lado. Se dispone de una cuerda con la que se pueden formar, sujetándola bien tirante con las chinchetas, figuras de perímetro 120 cm. ¿Cuántas figuras diferentes que sean polígonos simples se pueden formar? Descríbelas.

Marzo, 4º:

Descomponer el polinomio $x^{15}+1$ en producto de dos polinomios con coeficientes enteros, de grados 9 y 6 respectivamente. Como posible pista se pueden usar los siguientes resultados: $\cos(\pi/5) = (1+\sqrt{5})/4$ y $\cos(3\pi/5) = (1-\sqrt{5})/4$.

Título Propio de "Experto en Educación Matemática

La Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid continúa ofreciendo el Título Propio de "Experto en Educación Matemática". Las materias que está previsto impartir en el curso 2000-2001, en sus dos aspectos, de actualización didáctica y actualización científica, así como los profesores que las imparten, se enumeran a continuación.

A) Actualización didáctica

1. MATEMÁTICAS POR ORDENADOR: APLICACIONES EDUCATIVAS
(40 horas: 4 créditos)
Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano.

2. LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS
(20 horas: 2 créditos)
María Paz Bujanda Jáuregui.

3. LA UTILIZACIÓN EN LA ENSEÑANZA NO UNIVERSITARIA DE ALGUNOS RESULTADOS NO ELEMENTALES
(20 horas: 2 créditos)
Joaquín Hernández Gómez.

4. COMPRENDER, PENSAR Y TRABAJAR EN MATEMÁTICAS. Hacia la promoción del pensamiento matemático de los estudiantes
(30 horas: 3 créditos)
Inés María Gómez Chacón.

5. USO DIDÁCTICO DE LA CALCULADORA GRÁFICA
(15 horas: 1,5 créditos)
Lola Rodríguez.

6. MATEMÁTICAS EN EL AULA DE INFORMÁTICA: INTRODUCCIÓN A MATLAB
(15 horas: 1,5 créditos)
Roberto Rodríguez del Río.

7. CICLO DE CONFERENCIAS Y MESAS REDONDAS SOBRE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
(15 horas: 1.5 créditos)
Coordinadoras: Raquel Mallavibarrena y Laura Molleda

B) Actualización científica

8. LA MATEMÁTICA GRIEGA
(10 horas: 1 crédito)
Alicia Delibes Liniers.

9. GEOMETRÍA DEL TRIÁNGULO CON HERRAMIENTAS ACTUALES
(20 horas: 2 créditos)
Miguel de Guzmán.

10. HISTORIA DE LA MATEMÁTICA DEL ISLAM
(15 horas: 1.5 créditos)
Mariano Martínez Pérez.

11. BREVE RECORRIDO POR LA FILOSOFÍA DE LA CIENCIA
(15 horas. 1.5.créditos)
José Mendoza.

12. ARITMÉTICA
(10 horas: 1 crédito)
Juan Ramón Delgado.

13. PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
(30 horas: 3 créditos)
Eusebio Gómez Sánchez-Manzano, Javier Montero, Luis Sanz y Juan A. Tejada.

14. ORÍGENES DE LA GEOMETRÍA. QUINTO POSTULADO DE EUCLIDES. GEOMETRÍAS NO EUCLIDEAS
(20 horas: 2 créditos)
Raquel Mallavibarrena.

15. INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA GENERAL DE LA RELATIVIDAD
(15 horas: 1.5 créditos)
Eduardo Aguirre.

16. ALGORITMOS: EL CORAZÓN DE LA INFORMÁTICA
(15 horas. 1.5 créditos)
David de Frutos.

17. SISTEMAS DINÁMICOS
(20 horas: 2 créditos)
José Manuel Vegas Montaner y Carlos Fernández Pérez.

18. INTRODUCCIÓN A LA MODELIZACIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA
(15 horas: 1.5 créditos)
Juan Francisco Padial.

19. SIMETRÍAS Y GRUPOS
(15 horas: 1.5 créditos)
Carlos Andradas.

20. TOPOLOGÍA "FUZZY"
(15 horas: 1.5 créditos)
Francisco Gallego Lupiáñez.

21. INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA DIFERENCIAL
(20 horas: 2 créditos)
Javier Lafuente.

Se otorga este Título de Experto a quienes completen 25 créditos, pero es posible matricularse en asignaturas sueltas. La matrícula ha de realizarse en la semana habilitada al efecto, del 18 al 22 del mes de septiembre próximo. Para más detalle, en la oficina de información de la Facultad (tel. 394 46 16), o en la página web (www.mat.ucm.es), que en breve será actualizada.

Raquel Mallavibarrena
Directora del Curso

Presentación del Profesor Carl Leinbach

Conocí al profesor Carl Leinbach y a su encantadora esposa Pat en el congreso internacional de usuarios del lenguaje DERIVE celebrado en su universidad (Gettysburg) en 1998 (que ellos organizaron). Este fue uno de los excepcionales congresos en los cuales, además de sentir la satisfacción de aprender y comunicar cosas, uno no tiene la sensación de hallarse "fuera" e incluso diría que se tiene la de hallarse "en familia". Ello estuvo motivado en gran parte por la paternal acogida dispensada por esta extraordinaria familia. Mantengo por ejemplo un vivo recuerdo de la barbacoa en su casa al día siguiente a la terminación del congreso, con un variadísimo grupo de congresistas y las dos siguientes generaciones de Leinbachs.

Pero quizás lo que más me impresionó fue su arraigada concepción del ser humano como ser que necesariamente incorpora un lado bondadoso y positivo, independientemente de sus actos pasados o actuales. Y es que Carl (y su esposa) responden plenamente al calificativo que describía el gran Antonio Machado como: "en el buen sentido de la palabra bueno". Constituyen unos ejemplares auténticos, reales, de lo que vemos a veces en el cine americano como una familia teóricamente media (en la práctica ideal) americana.

Esta vez la presentación del invitado ha sido más personal que académica, pero creo que ha sido mucho más descriptiva. Subrayaremos al menos que Carl es catedrático de universidad y está muy interesado por los temas de educación y nuevas tecnologías, como podemos comprobar en el artículo que nos ofrece a continuación. Destaquemos para terminar la orientación dada al artículo, en el cual se muestra la importancia de las Matemáticas, no simplemente por su intrínseca belleza o su utilidad para otras ciencias o para ingeniería, como es habitual, sino en la formación integral de la persona y para su futuro desenvolvimiento en una sociedad moderna.

E. Roanes Lozano

Dynamic Mathematical Modeling as a Student Activity

L. Carl Leinbach

Liverpool John Moores University
Liverpool L3 3AF
C.Leinbach@livjm.ac.uk

on leave from

Gettysburg College
Gettysburg, PA 17325
leinbach@cs.gettysburg.edu

Abstract

In this paper we will show how modern computational tools found in CAS and some advanced calculators enable students to construct and analyse dynamic models at an early stage in their careers. In fact, they can do this type of analysis with only a background in Algebra For the most part, although not entirely, the process of solving the differential equation is a black box. The white box portion of the mathematical activity is to set up the model and to analyse the results. Based on their analysis, the students can make decisions that affect the outcome of the results. Thus, students can learn how to use their mathematical training to help them make intelligent decisions in matters related to their real life experiences. We will apply this ability to a real life conflict between ecologists and fishermen whose livelihood is threatened by an ecological disaster.

Introduction

Mathematical Modeling is a student activity that takes place throughout the students' mathematical career. We simply call the models that we construct 'applications'. These are the parts of a mathematics course that the students enjoy and are the main reason that most of the students are enrolled in the course.

However, the applications that the students do are numerical in nature and specialized to illustrate a particular technique. They are almost without an exception, static. The students are asked to set up an equation, perform certain operations and present the result. Dynamic models are not considered until the student is taking a course in Differential Equations. By this time most of audience has left the mathematics classroom to explore interests in other disciplines. The tools that exist in Computer Algebra Systems and some of the advanced graphing calculators enable us to change this situation.

Student activities during the investigation of dynamic models involve the construction of the model, the analysis of the results, and making hypotheses about how changes in the model will affect the outcome. The first part of the process requires the students to determine the relevant variables and parameters for the model as well as the effect of the parameters on the size of the variable quantities. The second part involves analyzing the results, determining what they mean, and making conjectures about how to alter the outcome by changing the model or the values of the parameters.

The tools that the students need to develop for understanding of the mathematics of the process are:

1. An understanding of the idea of "rate of change."
2. Linear approximation of functions.
3. The approximation of a function by straight line segments.
4. The ability to examine and explain a dynamic process from a "direction field."

These are skills that are certainly within the grasp of an algebra student. In fact, they can be used to enhance the student's understanding of straight lines. The third activity can be accomplished by a simple discussion of Euler's method. Once again this is an idea that can be explained and understood without the explicit use of calculus. To be completely honest, the method that will be used in the example for this paper uses Runge-Kutta approximation. This method can be explained as an advanced method of approximation and remain as a black box. The important thing is that the students see one method of approximation so that the process is not simply one of magic. The construction of a direction field is simply an extension of the third activity and the use of linear approximation at several points in the domain space. For a complete discussion of this approach see Campbell [1].

The CAS or calculator is simply used as a tool to handle the calculations that would be overwhelming and error prone if students had to do them by paper and pencil methods. The student does the real mathematical work. The CAS or calculator does the tedious and boring part of the problem. This is the level of cooperation that we seek to achieve when we give our students powerful mathematical tools.

A Typology for Mathematical Modeling

Some of the earliest mathematical concepts are taught by first using a physical model to construct a mathematical model that is then used to teach mathematical concepts. For example, subtraction and negative numbers can be explained to students by having them walk forwards a given number of steps and then backwards for another number of steps. Assuming the steps are the same size, the ideas can easily be translated to a real number line, a mathematical model.

I see mathematical models as being of three types:

1. Static Models
2. Semi Dynamic Models
3. Dynamic Models

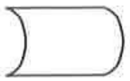
The first type dominates most of the courses that are taught at the Secondary School Level. They include geometric models and applications of algebra, trigonometry, and calculus. The general format for a geometric model is to give students a description of a geometric object and ask them to determine certain properties that the object may posses, similarities to other objects, or congruencies with like objects. In the other subjects, the applications consist of giving the students data and asking them to find other pieces of data that can be derived from the information they are given. For example, in a calculus class students are asked to find the optimum value for one of the variables after being given particular data about some of the other variables. Granted the students will take derivatives of a function, a dynamic concept, but they will find an answer to what is essentially a static problem.

The second type of modeling is related to a dynamic process, such as the growth of a savings account, the amortization of a loan, the growth of a bacteria colony, or radioactive decay. The model is constructed from dynamic information, but the end result is an equation for students to solve given certain particular information. The dynamic process is forgotten and the application reverts to a thinking process similar to that in finding a solution for a static model. Typical questions are: "How long until ...?", or "What will be the size of ...?" Students find answers to the questions, but this does little to ensure an understanding of the underlying dynamic process.

The third type of model, the dynamic model, concentrates on the process. Yes, answers that require finding a numerical value can be given, but that is not the entire goal of this type of model. The goal is for students to think in terms of the process represented by the model, how well the model describes the process, and how certain actions may affect the eventual outcome of the process. This type of model is the subject of the remainder of this paper.

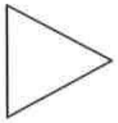
Building the Model

One of the very important activities in analyzing a process is to identify the variables that are relevant to the process and the relationships that exist among and between these variables. Since we are building a dynamic model, the relationships are expressed in terms of rates of change. We propose a simple graphical drawing procedure to construct models. We use symbols found in the Microsoft WORD® Drawing Toolbar, but any set of symbols given the same meanings will do. Here are the symbols and their meaning.



The outside world, not part of the model per se. Generally, a source or a sink.

A variable that is a part of the model



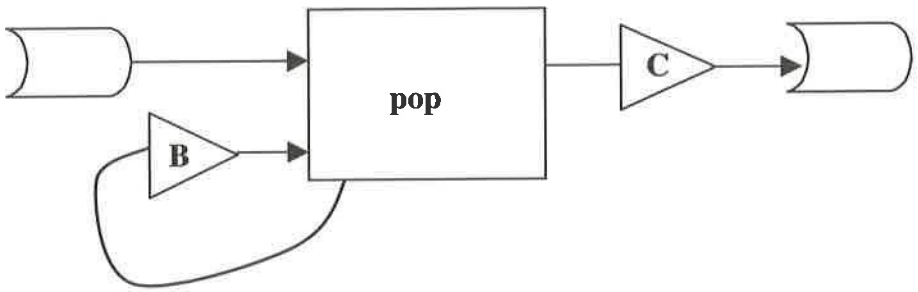
A rate of change

A direction of flow

It is quite amazing how powerful these four symbols can be for constructing models of real world perceptions. We will first construct the model and then see how we use it to analyze the process it describes.

Consider a population that is living in a situation where there are limited food resources. Examples, may be a deer herd with a restricted grazing region, or a non migrating population of fish, such as the cod fish population off the shores of New England in the USA. This model will have only one variable, the population size. At the present time we recognize only two influences on this population: the birth rate that is proportional to the population size and the death rate that is proportional to the competition for food between members of the population.

We draw the model using our four symbols.



where

B = the birth rate within the population
C = the death rate due to competition among the individuals within the population
pop = the size of the population

Having identified two rates and one variable for the model, we need to come up with a means for quantifying the changes in the population. In particular we use the common model for exponential growth to explain the birth rate.

$$\mathbf{B} = \alpha\ \mathbf{pop}$$

At this point we need to quantify the effect of competition. We make the usual assumption that competition increases at a rate proportional to the number of possible pairings in the population. (Why is this a reasonable assumption?) Thus,

$$\mathbf{C} = \beta\ (\mathbf{pop} - 1)\mathbf{pop}/2 = \beta(\mathbf{pop}^2 - \mathbf{pop})/2$$

Using the fact that the rate of change, **R**, of the of the population size is the difference of **B** and **C** and combining like terms, we see

$$\mathbf{R} = \mu\ \mathbf{pop}\ (1 - \eta\ \mathbf{pop}) \qquad (1)$$

where

$$\mu = \alpha + \beta/2$$
$$\eta = \beta/(2\mu)$$

Before continuing it is necessary that what is presented here as a finished product actually needs to be developed by the students working in small groups where they propose, criticize, and discuss the form of the model and the associated equations. The students assume the roles of policy makers and model builders. This is real problem solving!

Now the students are ready to test their model using a CAS or graphing calculator with the ability to draw direction fields given a rate of change. Our choice will be to use DERIVE for Windows®. We chose this CAS because if the package ODE_APPROX.mth, which is supplied with all versions of DERIVE®, is loaded as a utility, the rate of change can be entered without referring to the notation, y'. The use of the tools can be explained solely in terms of rates of change. On the other hand, this is a minor hurdle, and our results can just as easily be obtained with a TI/89, 92-plus, or 86 calculator.

Technology Tools for Testing the Model

We will first look at the slope field for the model that was constructed. The idea of the slope field can be explained in terms of linear interpolation, an idea that was first encountered by students when they worked with tables of values. This approach reinforces the idea that the slope of a line is the rate of change. A wise course of action may be to have the students, using paper and pencil, draw a slope field for a relatively simple rate of change such as y and $-y$ on a rather course grid, say of width .5 with $0 \leq t \leq 2$ and $0 \leq y \leq 2$. If the students have studied exponential growth these rates of change will make sense to them and they can see that the slope field corresponds to the process.

It is now natural to move to the CAS and explore that same equation. In DERIVE with ODE_APPROX.mth loaded as a utility, the command is straight forward and sensible. It is

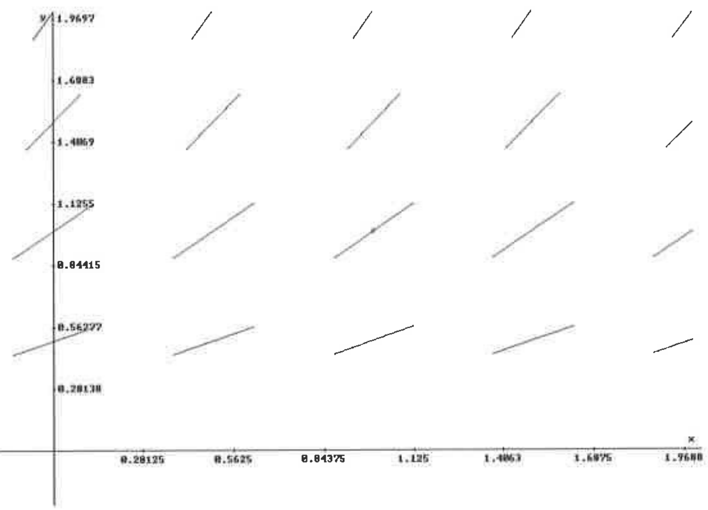
Direction_Field (r, t, t0, tm, m, y, y0, ym, n)

where

r = the rate of change of y in terms of t
t = the independent variable (we chose t for the symbol instead of x)
t0 = the intial value of t for the simulation
tm = the final value for t
m = the number of partitions on the t-axis
y = the dependent variable
y0 = the initial value for y
ym = the final value for y
n = the number of partitions on the y-axis

The last information is the same information which must be placed in the Window screen of a graphing calculator.

For the start up example the command is: Direction_Field(y,t,0,2,4,y,0,2,4). The resulting graph in DERIVE after simplifying the expression and graphing is:



This direction field should make sense to the students in terms of exponential growth. This exercise has prepared them for the analysis that will follow. Once again, the

student was only required to know about rates of change and how they can be used in the linear approximation of a function.

Analyzing the Model

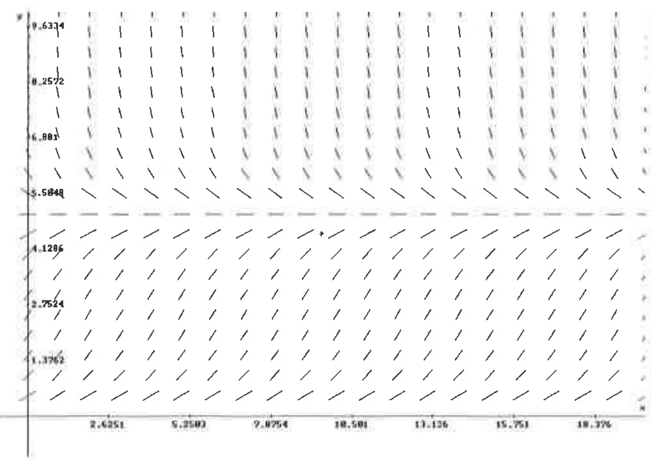
The model that we constructed of a population living under the constraint of limited resources has two main parameters associated with it namely the birth rate and removal rate for the population, α and β. After some algebraic manipulation we transformed them into other parameters, μ and η. In order to do our analysis, we must assign numerical values to this parameters. One way is to do it as a thought experiment. That is to have an open discussion during which students discuss the model and assign values they believe to be reasonable. A better way is to do some research on a population whose situation fits that of the model and use some data to make estimates of the parameters. For this paper we will do neither. We will simply assign values in an arbitrary manner. Our working model will be:

R = pop*(1 – pop/5)

The choice of μ =1 and ν = 1/5 will yield a model that is easy to construct and make the analysis clear.

After setting the variable input in DERIVE for Windows® to "Word" we enter the equation for the rate into the **Direction_Field** command (see the DERIVE Commands that follow). The graph follows the DERIVE instruction set.

1: InputMode:=word
2: R:= pop(1– pop/5)
3: DIRECTION_FIELD(R,t,–.5,20, 20,pop,0,10,20)



This picture has several interesting points for student analysis and discovery. Here are some examples of questions that could be asked: What does the horizontal line at the level pop = 5 represent? What is the flow of the population for levels of pop < 5? pop > 5? and pop = 5? This is a good time to talk about equilibria of the system, in particular, a stable equilibrium. It is right there in the picture and the concept is given a concrete foundation.

In order to do more exploration and analysis the students need to use another idea for which you have prepared them. They will draw a representation of the graph of a function using its rate of change and an initial value. DERIVE, as well as the graphing calculators with DE options, has commands for the Euler approximation and Runge-Kutta approximation. I will use the Runge-Kutta because I would like a greater accuracy for later work during the analysis.

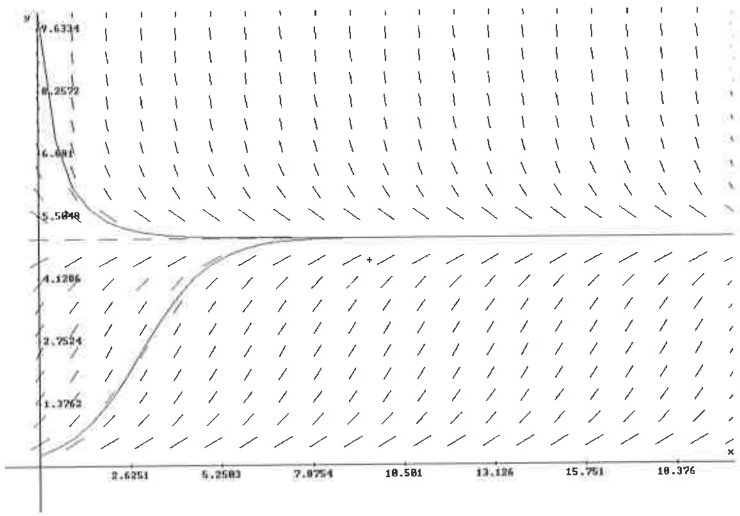
The format of the command in DERIVE is:

rk(r, v, v0, h, n)

where

- **r** = a vector of rates (Note this command can be used for a *system of equations.* We will enter [R] for our example)
- **v** = a vector containing the independent and dependent variables. We will enter [t, pop] for our example
- **v0** = the vector of initial values. We enter [0, 10] as one instance.
- **h** = the step size for the independent variable. We use .5
- **n** = the number of steps for the graph.

The function can then be graphed on top of the direction field.



In this figure we graphed the solution for two sets of initial conditions, pop(0) = 10 and pop(0) = .25. In both cases the population tended towards the equilibrium value of pop=5. This further reinforces the idea of a stable equilibrium value. The DERIVE commands for drawing these graphs on top of the direction field are:

4: RK([R], [t,pop], [0,10],.1,200)
5: RK([R], [t,pop], [0,.1],.1,200)

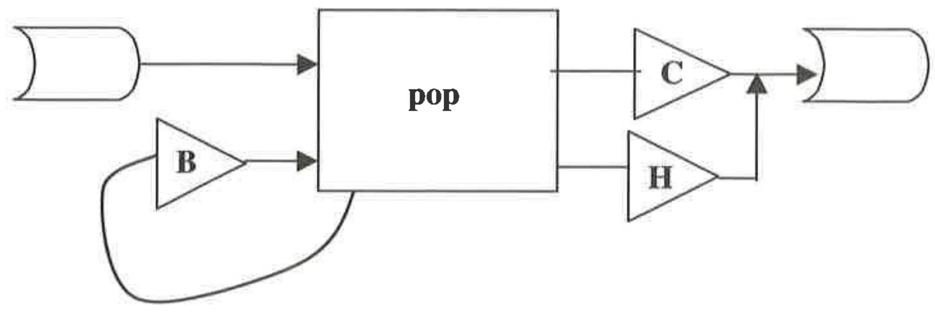
Note that the first three inputs for this command are enclosed in brackets. For the graphing calculators with a DE graphing option, it is simply a matter of either setting the initial condition before graphing the field or setting the condition manually after drawing the direction field. In either case, the commands are ones with which the students may work without being forced to learn a great deal of syntax. This means that they are free to explore the process defined by the rate of change in a constructive way without being bogged down in a lot of technical details.

Up to this point, we have done the well-known logistic model of population growth. Now we begin what is an exciting possibility for exploring the model. A new factor is introduced into the model without complicating the exploration process at all. In the end the "enhanced" model will be used to help formulate a policy decision.

Introducing Harvesting

Suppose that the population, which has been living in a situation with limited resources, is now being harvested. For example, we may be thinking of a deer population that is confined to a specific geographical area. Another possibility is that of a fish population, such as the cod located in the fishing banks off the coast of the northeastern United States, that is being harvested on a regular basis by the New England fishing boats. We will assume that the harvesting rate is constant, that is a certain, fixed, proportion of the population is harvested each year.

We modify the model as



This modification was done very simply using the visual modeling tool. What remains is to update the equation for the rate of growth for the population.

$$\mathbf{R} = \mathbf{B} - \mathbf{C} - \mathbf{H}$$

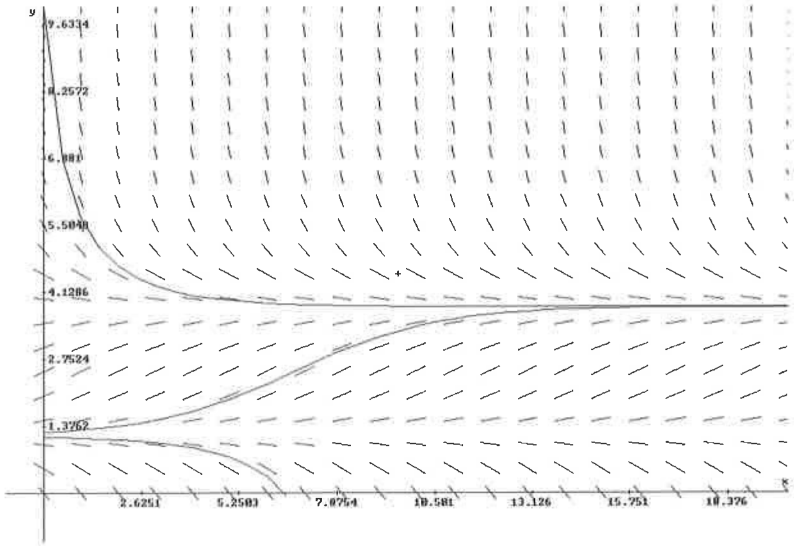
This was not a difficult task, but we are not finished. We need to come up with the equation for the rate. This also is rather easy. The formula for **B** – **C** is the one that we have previously derived and we have decided that **H** is a constant, say κ. Thus,

$$\mathbf{R} = \mu\ \mathbf{pop}\ (1 - \eta\ \mathbf{pop}) - \kappa$$

Using the previous values for μ and η, we will investigate what happens as κ takes on different values. Thus, we will be exploring the model

$$R = pop*(1 - pop/5) - \kappa$$

and explore the effect on the population as we allow κ to vary. We begin with κ = .9 and use the DERIVE tools developed in the previous section.



At first glance, the direction field looks to be the same as before. However, the students will quickly see that there is a third region in this picture, namely the one lying at below pop = 1.20. What is happening here?

The first thing the students should notice is that boundary of this new region is an *unstable* equilibrium. Any variation from this equilibrium value means that the population is repelled. If the value of the population is greater than this value it is attracted to the stable equilibrium. If the population is less than this value, it declines to 0, or becomes extinct. Already their mathematical investigation is giving them insight into the process of population growth with harvesting. It also reinforces their vague idea about ecological balance.

But what about the equilibrium values? It is of course possible to see how they are related to κ by simply solving the quadratic equation

$$pop*(1 - pop/5) - \kappa = 0$$

for the variable, pop. In particular,

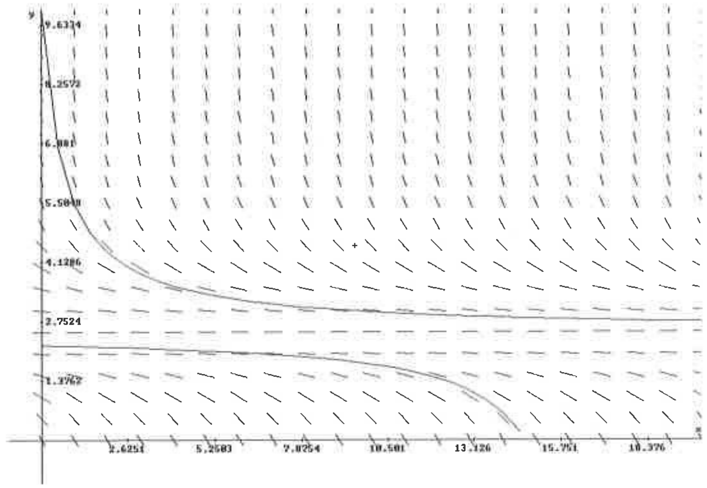
$$pop = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20\kappa}}{2}$$

Thus, if κ = .9 as in the example of the figure previously shown, the equilibrium values are approximately

$$pop = 3.823 \text{and} pop = 1.177.$$

These values are in close correspondence with the observations that were made on the graph.

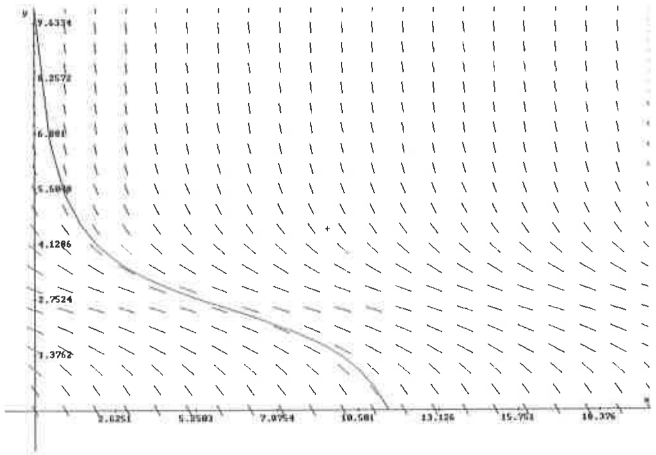
But answering one question leads to another. What happens if κ = 1.25, i.e. the discriminant of the quadratic is 0. In this case the resulting figure is



Once again we are back to a direction field with two regions. However, the graph is very different than our original and much more dangerous from an environmental standpoint.

The equilibrium value is at pop = 5/2 = 2.5 and it is the only equilibrium value for the model R = pop*(1 – pop/5) – κ with κ = 5/4 = 1.25. (Was pop = 5 the only equilibrium value for the model when $\kappa = 0$?) Furthermore, for values of pop > 2.5 it is attracting. For values of pop < 2.5, it is repelling and means extinction for the species. This is dangerous since if the population is near the equilibrium value and it in some way falls below that value, the species is doomed. This environmental insight is much less obvious without the analysis enabled by the model.

The next obvious question. What happens if $\kappa > 1.25$ in this model? The following figure is an example with $\kappa = 1.5$.



In this figure we see that no matter what the initial population level. The population in this model is doomed to extinction. The alarming point is that the process does not take terribly long. The direction lines at the top of the figure are very steep. There is a slight leveling off around pop = 2.5 and then the lines become steep again. Some action needs to be taken before it is too late! Can our mathematical modeling help us decide on what action is appropriate?

Resolving a Dispute with the Help of Modeling

Mathematics is a problem solving discipline, but what does it have to say about the non-technical problems facing society today? Can we apply mathematics to a real problem? Can we influence policy? In the following paragraphs we will use the analysis that we did above together with the ability of our CAS to handle non continuous input for the rate of change. We will take a real dispute and show how the mathematics can help us find a solution to a problem that seems to be insolvable. We will use mathematics to influence an important ecological dispute.

The situation described in the over harvesting situation of the previous section is not unlike the situation that is taking place at the cod fishing banks off the coast of the north

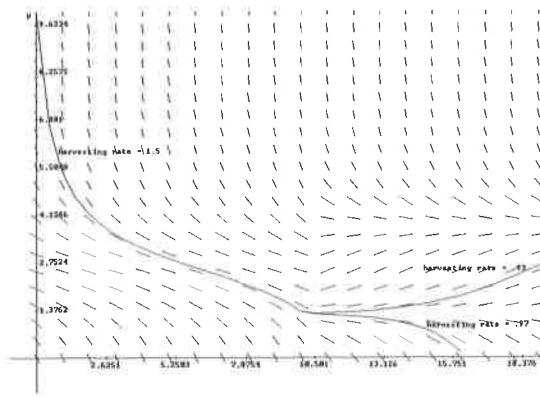
eastern United States. Environmentalists are saying that all fishing must be stopped immediately so the cod fish population can recover. The fishermen point out that they are a 'species' too. Fishing is their livelihood. Their families depend on cod fishing for *their* existence. Both sides have compelling arguments. Of course, if the fishing continues at the present rate, the fishermen will be forced to stop fishing. There simply will be no more fish. This argument is countered with an insistence that the environmentalists are being alarmists. Is a compromise possible?

The last question is really one of can we find a new value for κ which will allow fishing to continue, although at a reduced level, and keep the species away from extinction? One of the advantages of numerical modeling is that we do not have to have a rate of growth that leads to a nice analytic solution to the differential equations. We can even include the following statements that involve applying the direction field and function approximation calculations to a nonlinear function, P.

P: = if t<10.05
pop*(1 – pop/5) – 1.5
pop*(1 – pop/5) – 93

It needs to be noted that the function definition should properly include the variables t and pop. However, these are specified by the latter commands, and the goal here is to emphasize the parameters, κ and λ. The value 10.05 was chosen as the dividing point so that it did not coincide with one of the grid points for plotting the direction field and function.

But showing these commands gets us a little ahead of our story. Let's back up. Suppose the situation at the end of the previous section has been taking place for 10 years, how do we reverse the trend? If we look at the numerical data we see that the population at the beginning of the tenth year is 1.31. Substituting 1.31 for pop in the equation R = pop*(1 – pop/5) – λ and setting R to 0 results in λ = .96. Thus, we must choose a value for λ less than .96 if the population is to survive. Suppose we put a safety net under the unstable equilibrium, say pop = 1.25 and solve for λ when R = 0. The resulting value is λ = .9375. To be even more safe we choose λ = .93 . Here is the result



As we see from the upper graph, the population takes an up turn and heads towards an equilibrium value of pop = 3.76. This should be a number that guarantees a reasonable harvest at the restricted rate for harvesting. The rate ($\lambda = .93$) is significantly below the present rate of 1.5, but it is much better to have a more limited harvest than having nothing left to harvest. The fishing fleet may have to be cut back, but there is still a fishing fleet and employment. The restricted harvest can be compensated for by an increase in market price.

To illustrate how critical the number $\lambda = .96$ is in this process we graphed the function when $\lambda = .98$. In this case the population becomes extinct. It is now an interesting project for your students to translate their numerical results into understandable physical actions and the write a report which makes recommendations that can be presented in an open meeting. Now their mathematical training has really equipped them to be problem solvers!

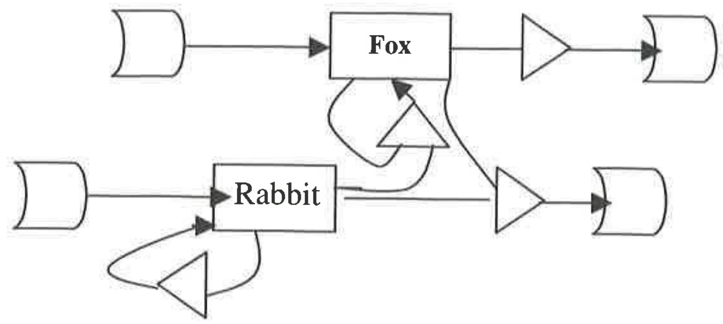
Conclusion

It is indeed a fact that over 95% of the students we encounter in our mathematics classes will not be mathematics majors and, in fact, over 80% of them will not even major in sciences. On the other hand, almost all of them will be using mathematics, either by design or by accident, in their daily lives.

Many of the statements that they have to evaluate are stated in terms of percentages or graphs. They will have to evaluate statements that quote from numerical data. As good citizens, they will need to make informed decisions based on this data. Very few of our students come away from their mathematics classes believing that they have these kind of skills. They are led to believe that these skills can only be acquired in a higher-level mathematics class. Most have no desire to continue with mathematics to gain these skills. They have simply lost interest and desire to do other things.

What has been shown in this paper is that with some basic mathematical training, a simple visual modeling tool, and the powerful CAS tools that are readily available to them students can tackle current problems and make meaningful conclusions. The tools, the data, and the methods of analysis are all within their grasp. Yes, certain explanations will need to be minimized and subtleties will need to be overlooked or explained in terms of very elementary ideas that are inadequate. This is material for a later course. The fact is that the gain is immeasurable. Students are learning that mathematics speaks to today's current problems and not just problems from centuries ago or about artificially constructed situations. We may even spark enough interest in mathematics that we will see some of the students in the advanced courses that deals with the subtleties and gives improved solution methods.

The visual modeling tool can be used to model situations with more than one dependent variable in which the dependent variables related to each other. For example, here is a diagram for the classical rabbit fox population interaction



We will not go into the details of constructing the rates. We only note that they are the birth rate of the rabbits, the death rates of rabbits and foxes and the results of foxes feeding on rabbits. The fact is that the modeling tool can be applied. The function construction and graphing routines in both DERIVE and the graphing calculators with DE graphing options can handle systems of equations. The direction field routines are more limited. DERIVE will graph only a direction field for one function. The graphing calculators can graph a direction field on a phase plane.

The important fact is that by using the tools we have within our grasp, we have a way to empower our students and enrich their mathematical experience. We also show them that an understanding of mathematics is a way to power and more general understanding. So why don't we use them?

References

[1] CAMPBELL, P. J., "Finite Mathematics as Environmental Modeling", *The UMAP Journal,* vol. 17 n.° 4, 1996, pp. 415

[2] BLANCHARD, P., DEVANEY, R.L., HALL, G., *Differential Equations*, Brooks/Cole Publishing Company, 1998, USA

Identidades de trigonometría circular e hiperbólica a partir del álgebra matricial

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Bonifacio Sotos, Casas Ibáñez (Albacete)
Departamento de Informática
Universidad de Castilla-La Mancha (Albacete)
Gema Calbo Sanjuán
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Fernando de los Ríos, Quintanar del Rey (Cuenca)

Abstract

In this paper we obtain some classical trigonometrical identities using linear algebra, moreover we give an application about integral calculus.

1 Introducción

En este trabajo obtendremos cuatro identidades trigonométricas clásicas por un método distinto al usual. Las dos primeras identidades corresponden a la trigonometría circular

$$\sum_{r=0}^{n} \sin r\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad si \quad \alpha \in R - \{2k\pi\}_{k\in Z} \tag{1}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \cos r\alpha = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \quad si \quad \alpha \in R - \{2k\pi\}_{k\in Z} \tag{2}$$

En ([5, p.328]) puede verse una prueba de estas fórmulas basadas en los números complejos.

Las otras dos identidades son análogas a las anteriores, pero pertenecen a la trigonometría hiperbólica, y también proporcionan la suma de los senos y cosenos (hiperbólicos) cuyos argumentos están en progresión aritmética centradas en el origen y cuya diferencia es un ángulo α,

$$\sum_{r=0}^{n} \sinh r\alpha = \frac{\sinh \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sinh \frac{n\alpha}{2}}{\sinh \frac{\alpha}{2}} \quad si \quad \alpha \in R - \{0\} \tag{3}$$

$$\sum_{r=0}^{n} \cosh r\alpha = \frac{\sinh \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \cosh \frac{n\alpha}{2}}{\sinh \frac{\alpha}{2}} \quad si \quad \alpha \in R - \{0\} \tag{4}$$

La demostración clásica de estas fórmulas está basada en la representación de las funciones seno y coseno hiperbólicos a través de la función exponencial, los detalles pueden encontrarse en ([3, p.82]).

2 Resultados previos

Usando un razonamiento análogo a la deducción escalar de la suma de los n primeros términos de una progresión geométrica, deducimos el siguiente resultado matricial clónico,

Proposición 1
Sea A una matriz cuadrada de modo que $I - A$ es invertible, entonces

$$\sum_{i=0}^{n} A^i = (I - A^{n+1})(I - A)^{-1} \tag{5}$$

donde I denota la matriz identidad del mismo tamaño que la matriz A.

En el siguiente apartado necesitaremos aplicar las siguientes igualdades de trigonometría circular,

Lema 1
Para todo $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in Z$ se cumple

(i) $$\frac{(1 - \cos\alpha - \cos(n+1)\alpha + \cos(n+1)\alpha\cos\alpha + \sin(n+1)\alpha\sin\alpha)}{2(1-\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \cos \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \tag{6}$$

(ii) $$\frac{(\sin\alpha - \sin(n+1)\alpha - \cos(n+1)\alpha\sin\alpha + \sin(n+1)\alpha\cos\alpha)}{2(1-\cos\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \tag{7}$$

Demostración

Como ambas identidades se demuestran de un modo análogo, sólo demostraremos una, por ejemplo, la segunda. Para ello partiremos de

$$\frac{(\sin\alpha - \sin(n+1)\alpha - \cos(n+1)\alpha\sin\alpha + \sin(n+1)\alpha\cos\alpha)}{2(1-\cos\alpha)} =$$

aplicamos la fórmula del seno de la resta de ángulos $\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x \sin y$, para $x = (n+1)\alpha$ e $y = \alpha$,

$$= \frac{1}{2(1-\cos\alpha)}[\sin\alpha - \sin(n+1)\alpha + \sin n\alpha] =$$

como consecuencia de la fórmula del ángulo mitad, $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, y sustituyendo en la última igualdad,

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}[\sin\alpha - \sin(n+1)\alpha + \sin n\alpha] =$$

Ahora utilizamos la fórmula de transformación de la suma de senos en productos, $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2} \cdot \cos\frac{x-y}{2}$, para $x = \alpha$ e $y = n\alpha$, junto con la paridad de la función coseno, con lo que la última igualdad queda

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left[2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2} \cdot \cos\frac{(n-1)\alpha}{2} - \sin(n+1)\alpha\right] =$$

aplicando la fórmula del seno del ángulo doble para $x = \frac{(n+1)\alpha}{2}$, se tiene, $\sin(n+1)\alpha = 2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}$, y sustituyendo, en la útima expresión de la cadena de igualdades,

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left[2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(n-1)\alpha}{2} - 2\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\right] =$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\frac{(n-1)\alpha}{2} - \cos\frac{(n+1)\alpha}{2}\right] =$$

y finalmente, el término entre corchetes, se transforma en un producto aplicando la identidad, $\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{y-x}{2}$ para $x = \frac{(n-1)\alpha}{2}$ e $y = \frac{(n+1)\alpha}{2}$, por lo que se obtiene

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\sin\frac{n\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

De un modo análogo, pero utilizando las identidades de trigonometría hiperbólica, pueden probarse los siguientes resultados auxiliares,

Lema 2
Para todo $\alpha \neq 0$ se cumple

(i) $$\frac{(1-\cosh\alpha-\cosh(n+1)\alpha+\cosh(n+1)\alpha\cosh\alpha-\sinh(n+1)\alpha\sinh\alpha)}{2(1-\cosh\alpha)} =$$

$$= \frac{\sinh\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cosh\frac{n\alpha}{2}}{\sinh\frac{\alpha}{2}} \tag{8}$$

(ii) $$\frac{(\sinh\alpha-\sinh(n+1)\alpha-\cosh(n+1)\alpha\sinh\alpha+\sinh(n+1)\alpha\cosh\alpha)}{2(1-\cosh\alpha)} =$$

$$= \frac{\sinh\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sinh\frac{n\alpha}{2}}{\sinh\frac{\alpha}{2}} \tag{9}$$

3 Deducción de las identidades de trigonometría circular

Para demostrar (1) y (2) usando álgebra lineal, aplicaremos la proposición 1 a la matriz de giro o rotación, de centro el origen de coordenadas y ángulo α,

$$M = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

para lo cual debemos exigir la invertibilidad de la amtriz, $I - M$. Esto se cumple, si $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in Z$, pues

$$det(I-M) = \begin{vmatrix} 1-\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{vmatrix} = 2(1-\cos\alpha) \neq 0 \ sii \ \alpha \neq 2k\pi, \ k \in Z$$

Para aplicar (5) necesitmos calcular $(I-M)^{-1}$ y M^{n+1}. Un cálculo sencillo nos muestra

$$(I-M)^{-1} = \frac{1}{2(1-\cos\alpha)}\begin{bmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{bmatrix} \tag{10}$$

Por otra parte, utilizando el prinicipio de inducción sobre n, y las fórmulas de adición del seno y del coseno, se tiene ([1, p.147])

$$M^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & \sin n\alpha \\ -\sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix} \tag{11}$$

De (10) y (11)

$$\left(I - M^{n+1}\right)\cdot(I-M)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2(1-\cos\alpha)}\begin{bmatrix} 1-\cos(n+1)\alpha & -\sin(n+1)\alpha \\ \sin(n+1)\alpha & 1-\cos(n+1)\alpha \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{bmatrix}$$

desarrollando este producto de matrices y teniendo en cuenta el lema 1, se deduce

$$\left(I-M^{n+1}\right)\cdot(I-M)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} & \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{-\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sin\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} & \frac{\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cos\frac{n\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Por otra parte, aplicando (11),

$$\sum_{i=0}^{n} M^{i} = \begin{bmatrix} \sum_{r=0}^{n} \cos r\alpha & \sum_{r=0}^{n} \sin r\alpha \\ -\sum_{r=0}^{n} \sin r\alpha & \sum_{r=0}^{n} \cos r\alpha \end{bmatrix} \tag{13}$$

Como por (5), (12) y (13) son iguales, igualando entrada a entrada se deducen las identidades (1) y (2).

4 Deducción de las identidades de trigonometría hiperbólica

Para ello aplicaremos el mismo razonamiento que en la sección anterior, pero sobre la matriz

$$N = \begin{bmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha \end{bmatrix}$$

Como

$$det(I-N) = \begin{vmatrix} 1-\cosh\alpha & -\sinh\alpha \\ -\sinh\alpha & 1-\cosh\alpha \end{vmatrix} = 2(1-\cosh\alpha) \neq 0 \quad sii \quad \alpha \neq 0,$$

En lo que sigue, supondremos $\alpha \in R - \{0\}$. Al igual que antes, y con objeto de aplicar (5), calculamos

$$(I-N)^{-1} = \frac{1}{2(1-\cosh\alpha)} \begin{bmatrix} 1-\cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & 1-\cosh\alpha \end{bmatrix} \tag{14}$$

y usando el principio de inducción es sencillo calcular N^{n} (ver [1, p.148])

$$N^{n} = \begin{bmatrix} \cosh n\alpha & \sinh n\alpha \\ \sinh n\alpha & \cosh n\alpha \end{bmatrix} \tag{15}$$

luego aplicando (14) y (15)

$$\left(I-N^{n+1}\right)\cdot(I-N)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2(1-\cosh\alpha)} \begin{bmatrix} 1-\cosh(n+1)\alpha & -\sinh(n+1)\alpha \\ -\sinh(n+1)\alpha & 1-\cosh(n+1)\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-\cosh\alpha & \sinh\alpha \\ \sinh\alpha & 1-\cosh\alpha \end{bmatrix}$$

desarrollando este producto de matrices y teniendo en cuenta el lema 2, se deduce

$$\left(I-N^{n+1}\right)\cdot(I-N)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\sinh\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cosh\frac{n\alpha}{2}}{\sinh\frac{\alpha}{2}} & \frac{\sinh\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sinh\frac{n\alpha}{2}}{\sinh\frac{\alpha}{2}} \\ \frac{\sinh\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\sinh\frac{n\alpha}{2}}{\sinh\frac{\alpha}{2}} & \frac{\sinh\frac{(n+1)\alpha}{2}\cdot\cosh\frac{n\alpha}{2}}{\sinh\frac{\alpha}{2}} \end{bmatrix} \tag{16}$$

Ahora bien por (15)

$$\sum_{i=0}^{n} N^{i} = \begin{bmatrix} \sum_{r=0}^{n} \cosh r\alpha & \sum_{r=0}^{n} \sinh r\alpha \\ \sum_{r=0}^{n} \sinh r\alpha & \sum_{r=0}^{n} \cosh r\alpha \end{bmatrix} \tag{17}$$

utilizando (5) sabemos que (16) y (17) son iguales, por lo que igualando las entradas se deducen las identidades (3) y (4).

5 Aplicación al cálculo de integrales definidas

Para terminar aplicaremos (1) y (4) para evaluar $\int_0^{\pi} \sin x dx$ y $\int_0^{\ln 2} \cosh x dx$ respectivamente, usando la definición de Riemann. Para calcular la primera integral, dividimos el intervalo $[0,\pi]$ en n partes iguales. Aplicando la definición de Riemann sabemos,

$$\int_0^{\pi} \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{\pi}{n}\cdot\sin\frac{r\pi}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{r=1}^{n} \sin\frac{r\pi}{n} =$$

aplicamos (1) para $\alpha = \frac{\pi}{n}$ (obsérvese que para $r=0$, $\sin r\alpha = 0$)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \cdot \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2n}\cdot\pi\right)\cdot\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2n}} = 2$$

donde hemos aplicado $\sin(r\alpha) \equiv r\alpha$ si $\alpha \to 0$. Análogamente, puede evaluarse por ejemplo, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$ utilizando para ello (2).

Para calcular $\int_0^{\ln 2} \cosh x\, dx$ razonamos como antes, dividiendo el intervalo $[0, \ln 2]$ en n partes iguales

$$\int_0^{\ln 2} \cosh x\, dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{\ln 2}{n} \cdot \cosh \frac{r \ln 2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{n} \sum_{r=1}^{n} \cosh \frac{r \ln 2}{n} =$$

y aplicamos (4) para $\alpha = \frac{\ln 2}{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{n} \cdot \frac{\sinh\left(\frac{n+1}{2n} \cdot \ln 2\right) \cdot \cosh \frac{\ln 2}{2}}{\sinh \frac{\ln 2}{2n}} =$$

aplicamos $\sinh(r\alpha) \equiv r\alpha$ si $\alpha \to 0$,

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln 2}{n} \cdot \frac{\sinh \frac{\ln 2}{2} \cdot \cosh \frac{\ln 2}{2}}{\frac{\ln 2}{2n}} = 2 \sinh \frac{\ln 2}{2} \cdot \cosh \frac{\ln 2}{2} = \sinh \ln 2 = \frac{3}{4}$$

Tal y como puede comprobarse usando la regla de Barrow.

Bibliografía

[1] Anzola M., Caruncho J. y Pérez-Canales G.; Problemas de Algebra (volumen 3), Ed. Alef Primer Ciclo, Madrid, (1981).

[2] Murray R. Spiegel y Abellanas L.; Fórmulas y Tablas de Matemática Aplicada, Ed. McGraw Hill, Madrid, (1997).

[3] Rivaud J.; Ejercicios de Análisis, Ed. Aguilar, Madrid, (1975).

[4] Sherátov V.G.; Funciones Hiperbólicas, Ed. Mir, Moscú, (1984).

[5] Shklarsky D.O., Chentzov N.N. y Yaglom I.M.; The URSS Olympiad Problem Book, Ed. Dover, New York, (1993).

El Teorema Π de Buckingham: núcleo del Análisis Dimensional

Francisco A. González Redondo

Departamento de Álgebra
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

Dimensional Analysis is considered nowadays an established branch of a mathematical nature in the Foundations of Physics. In this paper, its basis, the Π Theorem of Dimensional Analysis is reconstructed from E. Buckingham's various nonsystematic formulations. Finally, the need for rewriting its history is advanced.

1. Introducción

Uno de los temas principales, el nuclear, que integrará la disciplina "Análisis Dimensional" desde el momento mismo de su creación por P. W. Bridgman en 1922, pero que es previo históricamente tanto en su formulación como en su demostración y sus aplicaciones, es el llamado "Teorema Π". En 1914 Edgar Buckingham publicó en las páginas del *Physical Review* un artículo que con el tiempo llegaría a convertirse en todo un clásico. En él se introducía el que a partir de otro trabajo, ya de 1915 se conocerá como Teorema Π, mediante el cual se determina el número de monomios adimensionales independientes -monomios Π, de ahí el nombre del Teorema- que caracterizan un determinado problema físico.

Con la vaguedad y confusión propias de la novedad que se introduce con él, los términos 'principio de homogeneidad dimensional', 'razonamiento dimensional', 'principio de semejanza', etc, referidos unas veces a los mismos conceptos, utilizados otras veces por distintos autores para denotar conceptos diferentes, generan intervenciones varias y controversias numerosas. En todo caso, la utilidad del teorema en Física y en Ingeniería resultó tan manifiesta que su uso se generaliza rápidamente. Así, tan pronto como en 1916, comienzan a impartirse cursos en los más importantes foros científicos de la época para explicar y aplicar un resultado que se conoce ya con el nombre de 'Teorema de Buckingham' o 'Teorema Π de Buckingham'. El mismo Buckingham escribirá en 1921 otro artículo en el que tras repetir en esencia sus desarrollos anteriores y con la perspectiva que dan los años, concreta su concepción: el método de las dimensiones se resume en el Teorema Π y, todo lo más, hay que ilustrarlo con ejemplos.

Cuando en 1922 Bridgman publica su *Dimensional Analysis* con el que se crea el Análisis Dimensional como disciplina científica independiente integra el Teorema Π -con este nombre- como su núcleo formal esencial. Tras una década (1920-30) de intensas discusiones científicas en torno a los diferentes temas que se engloban en la disciplina, incluyendo su propia fundamentación física, filosófica y lógico-matemática, el Análisis Dimensional tal y como lo concibe Bridgman, queda establecido y -en esencia, es decir, en cuanto a su concepción teórica global- cerrado. Simultáneamente queda firmemente anclado su núcleo esencial, el Teorema de Buckingham. A partir de ese momento, al menos en lo que se refiere al Análisis Dimensional, parecía quedar asumido por la comunidad científica que en este ámbito sólo existían dos campos de investigación en los que seguir trabajando, ambos en torno al Teorema Π: a) en tanto que herramienta, sus numerosas y útiles aplicaciones a problemas concretos; y b) en tanto que enunciado matemático, la búsqueda de nuevas (y mejores) demostraciones.

En este artículo sintetizo qué es el Teorema Π para Buckingham. Para ello he optado por reconstruir, al modo axiomático-deductivo -en tanto que, pienso, se trata del formato más esclarecedor- los desarrollos que aparecen dispersos por los diversos trabajos en los que lo estudia: primero, las proposiciones implícitas en las que basa la construcción que no explicita (y a las que llamaré 'Postulados'), los conceptos que da por caracterizados o definidos aunque no los concrete y que, por tanto, asume, y los conceptos que define basándose en aquellos previos; a continuación trataré el enunciado y la demostración del teorema. Los artículos que utilizo son los citados arriba y otros que recojo en la Bibliografía. Aunque coinciden en lo esencial, se introducen matices en unos y otros que merece la pena sintetizar aquí. Se observará desde el principio que Buckingham deja sin elucidar [da por supuesta su existencia] los conceptos de los que -desde hoy- diríamos que da cuenta la Teoría Dimensional.

2. El Teorema Π: Postulados y Definiciones previos

Postulado 1. *[Principio de expresibilidad relacional de los problemas físicos]*

Sean Q_1, Q_2, ..., Q_n las magnitudes físicas de diferentes tipos implicadas en un cierto fenómeno físico. Si estas n magnitudes bastan para describir el fenómeno completamente, el valor de cada una de ellas está totalmente determinado cuando se

conocen los valores de las restantes, y esta dependencia mutua puede enunciarse simbólicamente escribiendo la ecuación

$$F(Q_1, Q_2, ..., Q_n) = 0 \qquad (1)$$

A continuación introduce mediante definiciones algunos de los conceptos que necesitará después.

Definición 1.

Una ecuación del tipo (1) donde los símbolos Q_1, Q_2, ..., Q_n representan valores numéricos de magnitudes físicas se denomina *ecuación física*.

Definición 2.

Una *ecuación física* se dice *teórica* si está basada en principios generales.

Ejemplo 1. La ecuación de St. Venant del flujo de gases.

Definición 3.

Una *ecuación física* se dice *empírica* si ha sido deducida directamente a partir de experimentos sobre una cierta máquina o fenómeno concreto sin referencia a ninguna otra cosa.

Ejemplo 2. La fórmula para la pérdida de carga en las tuberías de agua.

Como apunte complementario puede resaltarse la condición ingenieril de Buckingham en la pujante Mecánica de Fluidos de su tiempo, que pone de manifiesto en los dos ejemplos mencionados.

Definición 4.

Una *ecuación física* se dice *completa* si sigue siendo válida independientemente de la elección de unidades que se realice.

Introducidos estos conceptos, y sin más dilación, afirma -y con ello se termina su elucidación, si la hubiera, del concepto de dimensión-:

Postulado 2.

Toda magnitud física Q tiene una dimensión conocida que se expresa en función de unas determinadas unidades que pueden considerarse fundamentales.

Una vez definido el concepto de ecuación física completa, y establecido que toda magnitud tiene una dimensión, enuncia:

Postulado 3. *[Principio de Homogeneidad Dimensional]*

Todos los términos de una ecuación física completa correcta deben tener las mismas dimensiones.

Pero aún faltan tres 'postulados' más para llegar al teorema:

Postulado 4.

Toda ecuación física completa tiene la forma:

$$\Sigma\, MQ_1^a Q_2^b \ldots Q_n^n = 0 \tag{2}$$

donde Σ representa la sumación de un cierto número de términos, los exponentes a, b, ..., n son constantes para cada término (aunque pueden diferir de un término a otro), y los coeficientes M de cada término son números adimensionales cuyo valor no depende del tamaño de las unidades utilizadas para medir las Q_i, siempre que las interrelaciones entre las unidades no cambien.

Postulado 5.

Las n unidades $[Q_1]$, $[Q_2]$, ..., $[Q_n]$ -así simbolizadas- necesarias para medir n tipos de magnitudes Q_1, Q_2, ..., Q_n se derivan a partir de k unidades independientes que pueden considerarse fundamentales. En otras palabras, si k es el número de unidades fundamentales necesarias para medir las n magnitudes, entre las n unidades siempre existe al menos un subconjunto de k unidades que son independientes entre sí y que pueden utilizarse como fundamentales.

Resultado que amplía sin demostración en la forma de:

Postulado 6.

Son equivalentes las dos proposiciones siguientes:

(a) Todos los términos de una ecuación física completa correcta deben tener las mismas dimensiones.

(b) Si el valor numérico de uno de los términos de una ecuación depende del tamaño elegido para una de nuestras unidades fundamentales, todos los demás términos deben depender de ese tamaño de la misma manera, de modo que cuando se cambie el tamaño de esta unidad los términos cambiarán en la misma razón y la ecuación seguirá siendo válida.

Con todo lo anterior ya puede establecerse el teorema.

3. El Teorema Π: Enunciado y Demostración

Teorema Π.

Toda ecuación que describa un fenómeno físico

$$F(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n) = 0 \tag{3}$$

que sea completa puede reducirse a la forma

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_{n-k}) = 0 \tag{4}$$

en la que k es el número de unidades fundamentales independientes necesarias para determinar las unidades de las Q y las $(n\text{-}k)$ magnitudes Π_x son productos adimensionales independientes de la forma

$$\Pi_x = Q_1^\alpha Q_2^\beta \ldots Q_k^\kappa P_x \tag{5}$$

donde P_x es cada una de las restantes $(n - k)$ magnitudes que se derivan de las Q_1, Q_2, ..., Q_k correspondientes a las k unidades fundamentales.

Demostración.

Si la ecuación física (3) es completa, por el *Postulado 4*, ésta puede expresarse en la forma

$$\Sigma\, MQ_1^a Q_2^b \ldots Q_n^n = 0\,. \tag{6}$$

Si se divide la ecuación (6) por un término (sumando) cualquiera se tiene

$$\Sigma\, NQ_1^\alpha Q_2^\beta \ldots Q_n^\nu + 1 = 0 \tag{7}$$

Por el *Postulado 3*, todos los términos de una ecuación física cualquiera deben tener las mismas dimensiones. Además, los coeficientes N son adimensionales, puesto que son simplemente razones entre los coeficientes adimensionales M, de modo que los exponentes α, β, ...ν, de cada término de la ecuación (7) deben tener un cierto conjunto de valores tal que, cuando se introduzcan, según el *Postulado 2*, las dimensiones conocidas de las Q, se verifique una ecuación dimensional del tipo

$$\left[Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} \ldots Q_n^{\nu}\right] = [1] \tag{8}$$

Sea Π un producto adimensional cualquiera de potencias de las Q de la forma (8), es decir,

$$\Pi = Q_1^{\alpha} Q_2^{\beta} \ldots Q_n^{\nu} \tag{9}$$

Entonces, la ecuación (7) puede escribirse

$$\Sigma N\Pi + 1 = 0 \tag{10}$$

donde Π_1, Π_2, ..., Π_i son todas las expresiones del tipo (9) que pueden construirse -de acuerdo con (8)- independientemente, utilizando los diferentes conjuntos de valores de los exponentes de las Q (todos y cada uno de los productos adimensionales independientes). Entonces, la expresión

$$(\Pi_1^{x_1} \Pi_2^{x_2} \ldots \Pi_i^{x_i}) \tag{11}$$

también es adimensional, sean cuales sean los exponentes x.

Por tanto, la ecuación (7) también satisfacerá el requisito dimensional (*Postulado 3*) de tener todos sus términos las mismas dimensiones -dimensiones cero en este caso- si tiene la forma:

$$\Sigma\, N\Pi_1^{x_1} \Pi_2^{x_2} \ldots \Pi_i^{x_i} + 1 = 0 \tag{12}$$

El número de términos, los valores de los coeficientes N y los valores de los exponentes x pueden ser cualesquiera sin que se afecten las dimensiones de cada término, de modo que el primer miembro de la ecuación (12) es simplemente una función indeterminada de los argumentos independientes Π.

En consecuencia, la forma más general que puede tener la ecuación física (1), sometida únicamente al requisito de homogeneidad dimensional, es

$$f(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_i) = 0 \tag{13}$$

donde

$$[\Pi_1] = [\Pi_2] = \ldots = [\Pi_i] = [1] \tag{14}$$

y f representa una cierta función desconocida cuya forma específica debe hallarse, en todo caso, bien empíricamente -mediante experimento-, o bien teóricamente -a partir de todos aquellos principios físicos generales que puedan aplicarse-, y donde el número de argumentos i es el máximo número de productos adimensionales independientes del tipo (9) que pueden formarse combinando las Q.

Sea k el número de unidades fundamentales arbitrarias (*Postulado 5*) que se necesitan para medir las Q y n - k el de unidades que se derivan de aquéllas. Se denotará

$$[Q_1],\ [Q_2],\ \ldots,\ [Q_k]$$

a dicho conjunto de unidades, y

$$[P_1],\ [P_2],\ \ldots,\ [P_{n-k}]$$

a las restantes n - k, las correspondientes formalmente a Q_{k+1}, ..., Q_n.

Ahora bien, cada ecuación (8) que tenga un conjunto de exponentes concreto (correspondiente a un producto adimensional Π concreto) es una ecuación a la que están sujetas las dimensiones de las unidades $[Q]$. Pero como las n - k unidades se derivan de las otras k, cada expresión (8) es, en realidad, equivalente a una de estas ecuaciones de derivación. En consecuencia, existen n - k ecuaciones de la forma (8) y el número de productos Π que aparecen como variables independientes en la ecuación (13) es $i = n - k$.

Así, las i ecuaciones del tipo (8) pueden escribirse de la forma

$$\left.\begin{aligned}
[\Pi_1] &= \left[Q_1^{\alpha_1} Q_2^{\beta_1} \ldots Q_k^{\kappa_1} P_1\right] = [1] \\
[\Pi_2] &= \left[Q_1^{\alpha_2} Q_2^{\beta_2} \ldots Q_k^{\kappa_2} P_2\right] = [1] \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
[\Pi_i] &= \left[Q_1^{\alpha_i} Q_2^{\beta_i} \ldots Q_k^{\kappa_i} P_i\right] = [1]
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Para hallar la forma específica de cada Π basta sustituir en cada ecuación (*Postulado 2*) cada $[Q]$ y cada $[P]$ por su equivalente dimensional conocido en función de un conjunto cualquiera de k unidades fundamentales. En otras palabras, las n-k ecuaciones resultantes contendrán las k unidades fundamentales independientes. Como los dos miembros son de dimensiones cero, el exponente de cada unidad debe desaparecer. En consecuencia, obtenemos k ecuaciones independientes que bastan para determinar los k exponentes y, así, fijar las formas de todos los Π.

4. Consideraciones finales: el origen del Teorema Π

Durante el verano de 1920 está dando Bridgman la última revisión al contenido de un ciclo de conferencias que había impartido durante la primavera de ese año en la Universidad de Harvard. Los trabajos de Buckingham, y la posterior divulgación de éstos por otros científicos de su entorno, habían constituido la base sobre la que Bridgman fue construyendo su discurso, como reconoce en el Prefacio de su *Dimensional Analysis*, fechado en septiembre de 1920:

> <<Me encuentro en deuda especialmente con los trabajos del Dr. Edgar Buckingham sobre este tema. También estoy en deuda con Mr. M. D. Hersey, del Bureau Of Standards, quien presentó hace unos años los resultados del Dr. Buckingham a la Conferencia en una serie de lecciones [...] El resultado en esta forma se conoce como el teorema Π y parece que fue enunciado por primera vez de forma explícita por Buckingham>>.

El libro de Bridgman no verá la luz hasta 1922. En ese tiempo, Buckingham, en un impulso de honradez, va a sincerarse con el mundo incipiente de lo dimensional en su artículo de 1921, aportando su propia visión sintética de esta historia: El método dimensional para analizar problemas en Física se debe, sin duda, a Lord Rayleigh, quien lo utilizó con éxito en numerosas ocasiones. Sin embargo, pronto surgió la necesidad de proporcionar una formulación a la manera de teorema algebraico general que integrase, al modo de procedimiento rutinario, el requisito de homogeneidad dimensional. También sin duda, para Buckingham, el primero en resolver esta cuestión y proporcionar un resultado adecuado fue Riabouchinsky, como reconocería en nota de pie de página:

> <<*L'Aerophile*, 1 Sept. 1911, y *Koutchino Bulletin*, No. 4, Nov. 1912. Una referencia al primero de estos artículos apareció en el *Annual Report of the British Advisory Commitee for Aeronautics for 1911-1912*, p. 260, resumen 134. Guiado, sin duda, por las indicaciones que contenía este resumen, el presente autor [Buckingham] llegó, en esencia, al mismo teorema y lo describió, con ejemplos ilustrativos, en el *Physical Review* de octubre de 1914 (Vol. IV, p. 345). El enunciado del teorema que se da en el presente artículo [éste, el de 1921] no difiere materialmente del de Riabouchinsky aparte de que éste se limitó a las magnitudes mecánicas>>.

Efectivamente, establecido un objeto historiable, el Teorema Π, queda por escribir

su historia, que, como veremos en próximos artículos, no se resume en Riabouchinsky, sino que en ella participarán -entre otros- los también rusos T. Ehrenfest-Afanassjewa y A. Federmann, el norteamericano J. Jeans y, sobre todo, el francés A. Vaschy.

Bibliografía

[1] Bridgman, P. W. (1922): *Dimensional Analysis*. New Haven: Yale University Press. [Ed. cast. *Análisis Dimensional*. Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional-UPM. Trad.: F. A. González Redondo].

[2] González de Posada, F. y González Redondo, F. A. (1990): *El Análisis Dimensional de P.W. Bridgman*. Madrid: Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional-UPM.

[3] Buckingham, E. (1914a): "On Physically Similar Systems; Illustrations of the Use of Dimensional Equations". *Phys. Rev.* **4**, 345-376.

[4] Buckingham, E. (1914b): "Physically Similar Systems" *Journ. Wash. Acad. Sci.* **4**, 347-353 (1914).

[5] Buckingham, E. (1915a): "Model Experiments and the Form of Empirical Equations". *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng.* **37**, 263-296.

[6] Buckingham, E. (1915b): "The Principle of Similitude". *Nature* **96**, 396-397.

[7] Buckingham, E. (1921): "Notes on the Method of Dimensions". *Phil. Mag.* **42**, 696-719.

[8] Curtis, W. D. *et al.* (1982): "Dimensional Analysis and the Pi Theorem". *Linear Algebra and its Applications* **47**, 117-126.

[9] González de Posada, F. (1994): *Breviario de Teoría Dimensional*. Madrid: Grupo de Trabajo de Análisis Dimensional-UPM.

[10] Hersey, M. D. (1916): "A Relation Connecting the Derivatives of Physical Quantities". *Journ. Wash. Acad. Sci.* **6**, 620-629. [Reimpreso en *Scientific Papers of the Bureau of Standards* nº 331, 1919]

[11] Moyer, A. (1991): "P.W. Bridgman's Operational Perspective on Physics". *Studies in History and Philosophy of Science* **22**, 237-258 y 373-397.

Consideraciones áureas en una figura geométrica (pirámide)

José Aldeguer Carrillo

Univ. Politécnica de Valencia

Abstract

Reading proprieties about the Keops´ pyramide, golden ratios are found.

Introducción

La lectura de las propiedades publicadas a lo largo de la historia, desde la construcción de la pirámide de Keops (Egipto) y la aparición de algunas de ellas relacionadas con el número áureo (Φ = 1.618....), como la de Lauer en 1948, sugieren la idea de estudiar una pirámide cuadrangular regular, capaz de representar las propiedades más conocidas de la famosa pirámide.

La teoría de la proporción en su historia, como sabemos, presenta una relación singular llamada por Luca Pacioli en 1509 "divina proporción", expresada en la forma

$$\frac{m+n}{m}=\frac{m}{n}$$

Si llamamos

$$\frac{m}{n}=x$$

obtenemos $x^2 - x - 1 = 0$. Sus raíces correspondientes son en este caso

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La primera raíz x_1 es llamada número de oro, denotado Φ por William Schooling (1910) en honor del escultor griego Fidias. A x_2 lo denotamos Φ'.

Sección 1

La relación $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, sugiere la construcción del triángulo rectángulo de lados Φ, $\Phi^{1/2}$, 1 (Fig. 1).

La obtención más clásica del número de oro (Φ) desde el punto de vista gráfico es la que se realiza a partir del cuadrado A_1 PNM, de lado unidad *u* (Fig. 2). Se toma el punto medio R de PN y con radio RM se obtiene el punto Q, resultando PQ = Φ.

A partir de PQ = $A_1B_1 = \Phi$ y con centro T (punto medio de A_1B_1) trazamos la semicircunferencia sobre la que construimos el triángulo rectángulo de lados Φ, 1, $\sqrt{\Phi}$

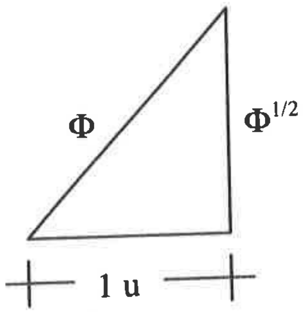


Fig. 1

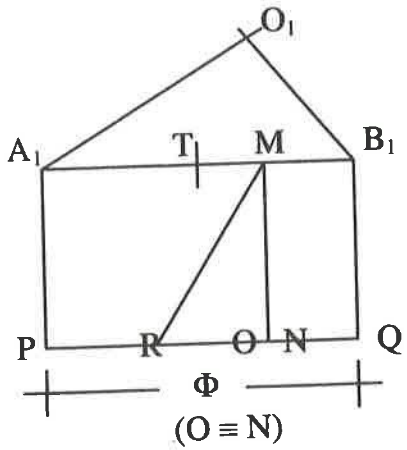


Fig. 2

Si trasladamos el triángulo $A_1O_1B_1$ al espacio tridimensional, construyendo la pirámide cuadrangular regular (Fig. 3) del siguiente modo: hacemos coincidir O_1 con O, A_1 con A y colocamos B_1 en la vertical de O, obteniendo B, tenemos definida la pirámide cuadrangular regular de lado 2u y altura $\sqrt{\Phi}$.

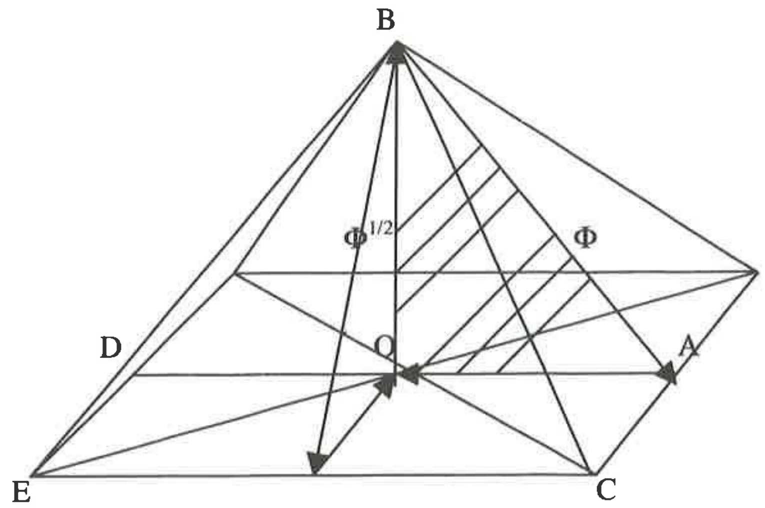


Fig. 3

Por consideraciones sencillas deducimos las siguientes propiedades de la pirámide considerada:

1.1 $\dfrac{AB}{OA} = \Phi$

1.2 $S_A = \dfrac{2\Phi}{2} = \Phi$ (cara lateral)

1.3 $S = 4\Phi$ (área lateral)

1.4 $BC^2 = \Phi^2 + 1 = (\Phi + 1) + 1 = \Phi + 2$ (arista lateral)

1.5 $S_B = 4$ (área base)

1.6 $S_T = 4\Phi + 4 = 4(\Phi + 1) = 4\Phi^2$ (área total)

1.7 $S_{ABD} = \dfrac{2\sqrt{\Phi}}{2} = \sqrt{\Phi}$ (sección media vertical)

1.8. De $\Phi^2 = \Phi + 1$; $\dfrac{1}{\Phi} = \dfrac{\Phi}{\Phi+1}$; $\dfrac{4}{4\Phi} = \dfrac{4\Phi}{4\Phi+4} \Rightarrow \dfrac{S_B}{S_L} = \dfrac{S_L}{S_T}$

1.9 De $\Phi{=}\Phi\,.1 \Rightarrow \sqrt{\Phi^2} = \Phi.1$; $(\sqrt{\Phi})^2 = \Phi.1 \Rightarrow (OB)^2 = (AB).(OA)$

1.10 Se verifica que $\dfrac{4}{\sqrt{\Phi}} = \dfrac{4}{\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}} = 3.14........ \approx \pi$

($\dfrac{4}{\sqrt{\Phi}} = \dfrac{2(EC)}{OB} \approx \pi$ puede expresarse en la forma $\dfrac{perím.base}{2(OB)} \approx \pi$)

1.11 De la proposición anterior $\dfrac{S_B}{S_{ABD}} \approx \pi$

1.12 $\dfrac{\pi}{4} \approx \dfrac{1}{\sqrt{\Phi}}$; $\left[\dfrac{\pi}{4}\right]^2 \approx \dfrac{1}{\Phi}$

1.13 $\dfrac{S_L}{S_B} = \dfrac{4\Phi}{4} = \Phi$

1.14 $\cos(OAB) = \dfrac{1}{\Phi} = -\Phi'$; $\Phi'\Phi = -1$

Podemos llamar a la pirámide considerada, pirámide áurea. Si a partir de ella como idea inicial establecemos una pirámide, cuyas dimensiones tengan como origen el triángulo áureo de dimensiones $k\sqrt{\Phi}$, $k\Phi$, k , algunas propiedades enunciadas dan lugar a propiedades notables, conocidas por los nombres de los autores que las enunciaron en su tiempo.

La Gran Pirámide (Keops), considerada por muchos como el símbolo de la arquitectura egipcia , tiene una altura de 148.63 m y su lado es de 233,70 m. El valor correspondiente de k es de 116.85. Se estiman los errores de medición de unos pocos centímetros.

De la propiedad (1.1) consideramos

$$\frac{AB}{OA} = \frac{k.AB}{k.OA} = \frac{189.06}{116.85} = \Phi \quad ; \quad \frac{OB}{OA} = \frac{k.OB}{k.OA} = \frac{\sqrt{\Phi}}{1} = \sqrt{\Phi}$$

esta relación se atribuye a Lauer (1948). De la propiedad (1.8) se obtiene

$$\frac{S_B}{S_L} = \frac{L_L}{S_T}$$

relación ya obtenida actuando sobre las medidas de la gran pirámide por el ingeniero K. Kleppisch.

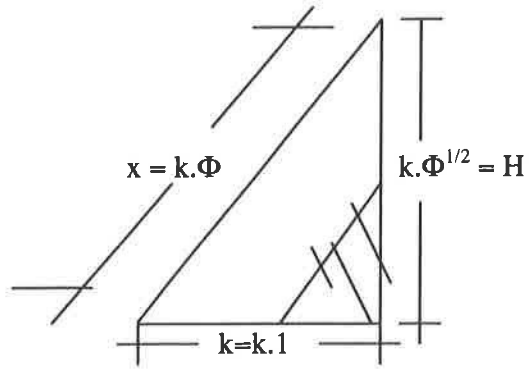


Fig. 4

De la (1.9) se deduce una de las más interesantes , atribuida a Herodoto .

$$(k.\Phi^{½})^2 = k^2.\Phi = (k.\Phi).k$$

si $x = k.\Phi$, $k.\Phi^{1/2} = H$, resulta la condición $H^2 = x\ k$ (Herodoto).

De la (1.10), consideramos

$$\frac{4}{\sqrt{\Phi}} \approx \pi \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \approx \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Phi} \approx \left[\frac{\pi}{4}\right]^2$$

Relación que se atribuye a Paul Montel.

Sección 2

Si atendemos a la planta de la pirámide , podemos seguir el siguiente proceso. Sobre la circunferencia de radio OA=1u, colocamos L_{10} (lado del polígono convexo de 10 lados (Fig.5).

Por consideraciones angulares es VQ=VA=OQ , ya que los triángulos VQA y VOQ son isósceles , resultando ser la recta que contiene a VQ bisectriz del ángulo OVA , con lo que establecemos

$$\frac{OA}{OQ}=\frac{OQ}{1-OQ}\Rightarrow\frac{1}{L_{10}}=\frac{L_{10}}{1-L_{10}}$$

$1\text{-}L_{10} = L_{10}^2$ nos aparece la ecuación de segundo grado $L_{10}^2 + L_{10} - 1 = 0$ de la que obtenemos

$$L_{10}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2} \quad ; \quad tomamos \quad L_{10}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Si L_{10}´(polígono estrellado de 10 lados), es L_{10}´= VW = VQ + QW = VQ + OW; QW=OW (por ser el triángulo isósceles), resulta por lo tanto

$$L'_{10}=L_{10}+1=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\Phi\Rightarrow L_{10}=\Phi-1\Rightarrow Q$$

W es el punto que corresponde al obtener Φ mediante el arco MQ de radio RM y centro R. Hemos obtenido $L'_{10} = \Phi$.

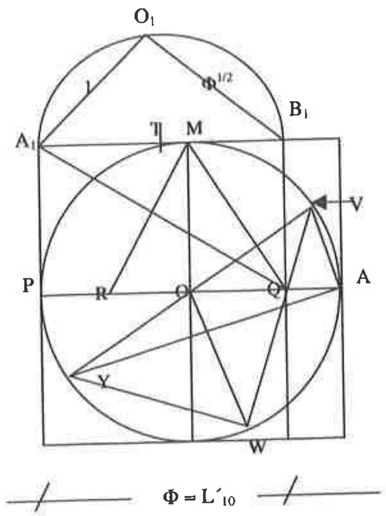


Fig. 5

donde

$$VA = L_{10};\ OA= 1\ u\ ;\ VW=L'_{10};\ YA=L'_5;\ WY=L_5$$

En el triángulo VYW, se tiene

$$L_5^2 + L'^2_{10} = 4\ ;L_5 = \sqrt{4-\Phi^2} = \sqrt{4-(\Phi+1)} = \sqrt{3-\Phi}$$

y en el triángulo VYA,

$$L'^2_5 + L_{10}^2 = 4\ ;\ L'_5=\sqrt{4-L_{10}^2} = \sqrt{4-(\Phi-1)^2} = \sqrt{2+\Phi}$$

De las relaciones anteriores deducimos:

$$L_5^2 = 3\text{-}\ \Phi$$

$$1 + L_{10}^2 = 1 + (\Phi - 1)^2 = 1 +\Phi^2 - 2\Phi + 1 =2 -2\Phi +\Phi^2 =2 - 2\Phi +\Phi+1 = 3\text{-}\Phi$$

luego es

$$L_5^2 = 1 + L_{10}^2 \Rightarrow MQ = L_5$$

Del mismo modo:

$$L'^2_{10} = \Phi^2 = \Phi + 1 = \Phi + 2 -1 = [(\Phi + 2)^{1/2}]^2\text{-}\ 1 = L'^2_5 - 1$$

luego es

$$L'^2_5 = 1 + L'^2_{10} \Rightarrow QA_1 = L'_5$$

Conclusiones

Sobre la planta de la pirámide hemos expresado los lados L_5 , L'_5 , L_{10} , L'_{10} en la circunferencia de radio 1u, todas en función de Φ, pero adquiere un carácter notable el punto Q.

Al referir la pirámide de Keops en su verdadera dimensión, dicho punto corresponde a la proyección vertical del punto de inflexión que marca en la galería de entrada el paso a las zonas de la gran galería que se suponía secreta, para facilitar el acceso a la cámara del Faraón.

Podría suponerse una coincidencia , si no fuera porque las relaciones áureas están siempre presentes. Hemos seguido de una forma sencilla, a partir de una idea (el número de oro), el desarrollo de unas propiedades áureas definidas sobre una pirámide cuadrangular regular tomada como modelo. Este desarrollo debió de servir para la redacción de lo que hoy llamaríamos "estudio previo o proyecto básico para la construcción de la Gran Pirámide".

Bibliografía

[1] CRUSAT PRATS, Leopoldo: (1948). *Geometría I.*

[2] ALSINA, C. y TRILLAS E.: *Lecciones de Álgebra Lineal.* Ed. Gustavo Gili.

[3] C. GHYKA, Matila: *El número de oro.* El Poseidón 1992.

[4] MORERA, J. L. y ALDEGUER, J.: *Álgebra Lineal Básica.* SPUV-1999.

[5] GIEDION, S.: *El presente eterno:Los comienzos de la arquitectura.* 1993.

Anuncio de Congreso

II Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1936: Cabrera, Cajal y Torres Quevedo"

La *Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas* auspician la celebración del II Simposio "Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1936: Cabrera, Cajal y Torres Quevedo" -concebido, también, como Curso de Historia de la Ciencia y de la Técnica-, que tendrá lugar en Yaiza (Lanzarote), durante los días 1, 2 y 3 de agosto de 2000, en el marco de los

V CURSOS UNIVERSITARIOS DE VERANO EN CANARIAS.
LANZAROTE. 2000

organizados por el *Centro Científico-cultural Blas Cabrera,* institución del Cabildo de Lanzarote que promovió, dirige y cuyas actividades organiza la asociación cultural *Amigos de la Cultura Científica.*

Coordinadores

Simposio: Francisco A. González Redondo
Curso: Dominga Trujillo Jacinto del Castillo

Secciones y Conferenciantes invitados

Martes, 1 de agosto. "Blas Cabrera Felipe: Física, Química, Matemática".

Sebastián Vieira Díaz (Universidad Autónoma de Madrid)
J. Ildefonso Díaz Díaz (Universidad Complutense de Madrid)

Miércoles, 2 de agosto. "Leopardo Torres Quevedo: Ingeniería".

Antonio Vaquero Sánchez (Universidad Complutense de Madrid)
Francisco González de Posada (Universidad Politécnica de Madrid)

Jueves, 3 de agosto. "Santiago Ramón y Cajal: Ciencias de las Vida".

Pedro García Barreno (Real Academia de Ciencias)
Margarita Salas Falgueras (Real Academia de Ciencias)

Comunicaciones

El Simposio está concebido con Conferencias, Ponencias, Comunicaciones y Coloquios. Las Comunicaciones que se presenten al Simposio deberán versar sobre los temas que se recogen en el título general o de las secciones y ser inéditas y originales.

Los resúmenes de las Comunicaciones, con extensión máxima de una página DIN A4 y especificación del título, autor y centro, deberán estar en posesión de la Secretaría del Comité Organizador antes del 10 de julio. El Comité Organizador decidirá sobre la aceptación definitiva del trabajo para su presentación en el Simposio antes del 20 de julio.

Los textos completos de las Comunicaciones los entregarán los autores en el Simposio al coordinador. Todas las Comunicaciones leídas integrarán las Actas Oficiales del Simposio.

Queda abierta la posibilidad de una edición especial. En este caso, un Comité Científico, nombrado al efecto, seleccionará las Conferencias, Ponencias y Comunicaciones que se publicarán en el libro.

Información y Secretaría

En Madrid, hasta el 14 de julio:
Escuela Técnica Superior de Arquitectura
Cátedra de Física Aplicada
Avda. Juan de Herrera, 4
28040 Madrid
Tel.: 91 336 65 18 - Fax: 91 336 65 54
E-mail: pgonzale@aq.upm.es

En Arrecife (Lanzarote), hasta el 4 de agosto:
Centro Científico-cultural Blas Cabrera
Avda. Coll, 3. 35500 Arrecife (Lanzarote)
Tel.: 928 80 59 53 / 928 8017 29 - Fax: 928 80 17 29
E-mail: blas-cabrera@cabildo.com

Internet: http://Cabildo.com/blas-cabrera

EACA - 2000

Sexto encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones

Barcelona, septiembre 6-8, 2000

Temas de interés:

Métodos efectivos en Álgebra, Análisis, Geometría y Topología, Estadística, etc. Complejidad de algoritmos. Cálculo científico a través de métodos simbólico-numéricos y desarrollo de software. Aplicaciones en Ciencia y Tecnología.

Información e inscripciones:

EACA-2000
Dep. Matemática Aplicada 2
Universitat Politècnica de Catalunya
c/. Pau Gargallo, 5
08028 Barcelona

Dirección electrónica: mbras@ma2.upc.es

Página WEB: http://www.mat.ub.es/~eaca2000/eaca2000.html

Actividad satélite e independiente del EACA:

Curso Intensivo

Geometría Dinámica con "Cinderella"

Dia 5 de septiembre de 3 a 7 de la tarde
Prof: J. Richter-Gebert (autor de Cinderella)

Reseña de libros

JAVIER PERALTA: *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Nivola Libros y Ediciones, S.L.. Madrid 1999. 127 páginas.

Nuestro querido consocio Javier Peralta es doctor en Matemáticas y catedrático de Escuela Universitaria en la Universidad Autónoma de Madrid. Anteriormente fue profesor de Metodología de la Matemática en la Facultad de Matemáticas de la Complutense y catedrático de Bachillerato. Su actividad docente e investigadora se ha centrado en los últimos años en la Didáctica e Historia de la Matemática.

Este, su último libro, salió de la imprenta en diciembre de 1999. En él su autor trata de poner de manifiesto la influencia que en la evolución de la matemática española tuvo ese periodo de exaltación cultural reinante en España a finales del siglo XIX.

Se presenta dividido en cuatro capítulos mas dos apéndices. En el primero de ellos, titulado *Antecedentes históricos remotos*, se hace un breve resumen de la historia de nuestra matemática, desde la Edad Media hasta mediados del siglo XIX.

En el segundo, titulado *La polémica sobre la ciencia en España*, se debate el estado de la ciencia (y en particular de la matemática), en nuestro país en relación con el panoráma científico (matemático) mundial, que sólo brillo en la época correspondiente a la dominación árabe.

En el tercer capítulo, titulado *Las matemáticas en la segunda mitad del siglo XIX*, la crisis del 98, se analiza el lento proceso de modernización científica iniciada en España a mediados del XIX, que en el campo de la matemática ya se aprecia cláramente a finales de ese siglo.

En el cuarto capítulo, titulado *Las primeras décadas del siglo XX*, se pone de manifiesto la notable mejora en la actualización y calidad conseguida de la matemática española, gracias al esfuerzo y entusiasmo de un reducido de grupo de individuos.

En el Apéndice I, titulado *Notas complementarias*, se comentan noticias, anécdotas, fragmentos de libros y artículos tomados de nuestra historia matemática, desde la época árabe, pasando por la creación de la Academia de Matemáticas por Felipe II, hasta la aparición de los primeros libros españoles de Matemática Superior y las primeras revistas españolas de matemáticas: El Progreso Matemático (1892), Revista Trimestral de Matemáticas (1901) y la Revista de la Sociedad Matemática Española (1911).

En el Apéndice I, titulado *Apuntes biográficos*, aparecen los personajes más ilustres, en relación con la matemática, de finales del XIX: José Echegaray, Zoel García de Galdeano, Eduardo Torroja, Leonardo Torres Quevedo y Ventura Reyes Prósper. Aunque sea algo posterior, a ellos se añade Rey Pastor, por su especial relevancia en la historia de la matemática española.

El libro, escrito en lenguaje sencillo y elegante, es muy agradable de leer. Numerosas fotografías de personajes y de portadas de libros, así como reproducciones de algunos artículos de interés histórico, lo hacen aún más ameno. El autor ha conseguido en muy pocas páginas dar a conocer los inicios de la incorporación de nuestro país a la actividad matemática universal.

Aunque dirigido fundamentalmente a matemáticos y a profesores de matemáticas de todos los niveles, su lectura es muy recomendable para toda persona con inquietudes culturales. Hasta para aquellos que llamándose cultos presumen de no saber matemáticas.

E. Roanes M.

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ, JOSÉ MIGUEL PACHECO CASTELAO y ALEJANDRO PÉREZ CUELLAR: *Pruebas de acceso a la Universidad (Logse) Matemáticas II*. Ejercicios propuestos. Soluciones-comentarios. Nuevas propuestas.

La SAEM THALES pretende con este libro sobre problemas de selectividad LOGSE ayudar a profesores y alumnos en su tarea diaria en la clase de matemáticas, intentando además, dar respuesta a algunas de las cuestiones que se plantearon en el Seminario que la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas organizó para tratar los problemas que frecuentemente se detectan en la relación Bachillerato-Universidad. Allí se vio la necesidad de que la selectividad LOGSE recogiese en sus pruebas el cambio, sin duda importante, que la enseñanza de las matemáticas estaba experimentando.

El presente trabajo ha contemplado:

1. La recopilación de pruebas de examen de las comunidades autónomas de Andalucía, Canarias y Madrid, bastantes diferentes entre sí en cuanto a tradición cultural y docente, para ver cómo ser interpretan los objetivos de la LOGSE en las pruebas de acceso a la Universidad en estos tres ámbitos geográficos.
2. La resolución de esos ejercicios por los autores.
3. Se ha procurado utilizar diversas técnicas en aquellos ejercicios que admiten una variedad de métodos.
4. Se hacen comentarios acerca de bastantes de los ejercicios propuestos y de cómo se han resuelto.

El libro consta de seis capítulos en 240 páginas. Los cuatro primeros se dedican al análisis de las pruebas de Acceso y exámenes de reserva en las comunidades señaladas. En el capítulo quinto los autores presentan tres juegos de pruebas completas construidas de modo que se adecúen a las directrices LOGSE. El último capítulo ofrece un modelo de prueba de acceso alternativa confeccionada sobre una batería de test con diferentes estilos evaluatorios, que cubre los siguientes objetivos:

1. Permitir explorar los conocimientos del alumno en sus diferentes dimensiones: conocimiento como tal, comprensión...
2. Conseguir una evaluación rápida y objetiva.
3. Presentar una alternativa a los clásicos repertorios de ejercicios que, con el paso del tiempo, van degenerando en repeticiones sin cuento.

Las pequeñas erratas de cálculo no perturban en ningún caso la comprensión del texto.

El precio del libro es de 1500 ptas. para socios de Sociedades Federadas y de 2000 ptas. para no socios. Los pedidos pueden remitirse a la SAEM THALES, Facultad de Matemáticas. Aptdo. 1160-41080 Sevilla (Correo electrónico: thales@cica.es)

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.°	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										
		1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°	9.°	10.°	
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	–	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	–	–	–	–	–	–	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	–	–	–	–	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	–	–	–	–	–	–	–	–	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	–	–	–	–	–	–	–	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	–	–	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	–	–	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	–	–	–	–	–	–	–	–	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	–	–	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	–	–	–	–	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	46	XX	33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	–	–	–	–	–	–	
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	48	XX	XX	35	
	OME-f1-91/PNS,	XX	XX	47	35	34	–	–	–	–	–	
32	OMI-92-MOSCÚ/	35	48	XX	XX	XX	52	38	35	46	38	
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	–	–	–	–	–	–	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	47	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	
	/PNS	47	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	–	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	–	–	–	–	
35	OMI-93-Turq./	XX	46	XX	XX	52	XX	52	XX	47	39	
	OI-93-Méjico/PNS	XX	52	39	39	52	XX	–	–	–	–	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	
37	OME-f2-94/PNS	41	49	49	41	49	49	45	45	41	–	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	52	XX	–	–	–	–	
39	OI-94-Brasil/OME-f1-94/f1-94(v)	43	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	
		46	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	–	–	–	–	
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
43	OME-f-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
44	OMI-96-India/	XX	XX	49	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	47	45	XX	XX	XX	–	–	–	–	
45	OI-96-Costa Rica	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	XX	XX	XX	
	OME-96-f1	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	–	–	
46	OMR-96	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
47	OMI-97-Argentina	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
48	OI-97-México	XX	XX	XX	50	XX	XX	–	–	–	–	
	OMEf1-98	–	–	–	–	–	–	XX	XX	XX	XX	
		49	XX	49	XX	–	–	–	–	–	–	
	OMR-97	–	–	–	–	XX	XX	XX	50	XX	XX	
		51	XX	51	XX	51	52					
50	OMI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
51	OI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
54	OI-99/OIMU-99	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
		XX	XX	XX								

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. OIMU = Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo especificado a continuación.

Copias en papel

Se enviarán por duplicado, escritas con un procesador de texto en hojas de tamaño DIN A-4. El formato debe ser 17cm x 12.8 en 11 puntos.

Para facilitar la impresión es preferible usar procesador Word o LATEX (en este último caso deberá usarse estilo "article" y si se usan paquetes específicos deberán incluirse los archivos correspondientes a esos paquetes). Si se usara otro procesador, debería ajustarse exactamente al tamaño de formato, pues habría de ser escaneado.

Los artículos comenzarán con el título (en minúsculas grandes), nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el Boletín), e-mail si se tiene, y abstract de unas líneas en inglés. Se terminará el artículo con la bibliografía (y nada más después de ella).

Las figuras deben ser de buena calidad (impresas desde ordenador). Serán incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas (además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas).

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros, como suelen aparecer en el Boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo el archivo del documento en el procesador de texto utilizado.

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín.

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

ADQUISICIÓN DE NÚMEROS ATRASADOS DE NUESTRO BOLETÍN

A partir de ahora, los números atrasados del Boletín (de los cuales existan ejemplares sobrantes), podrán ser adquiridos al precio de coste de mil pesetas ejemplar.

Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54 y 55

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de nuestra Sociedad o mediante transferencia a la cuenta corriente de nuestra Sociedad domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
C/ Fuencarral, 101
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (despacho 3.517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid

En la carta se incluirá:

- el número o números a adquirir,
- la dirección a donde se han de enviar,
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

D. .... Teléf. (....) ....
Dirección ....
Ciudad .... Cod.° Postal ....
Centro de trabajo ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NÚMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de la misma ....
para que cargue en la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1998-99 y siguientes.

Fecha .... de .... de 2000

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pts. (de ellas, 3.000 pts. en concepto de cuota de la Sociedad "Puig Adam" y 2.000 pts. en concepto de cuota por la que se recibe la revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas).
Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/ Carranza, 5
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACIÓN EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha .... BANCO: ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de ésta ....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....
Dirección ....
Remítanse ambas partes (toda esta página) a:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
c/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid