SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN N.° 54
FEBRERO DE 2000

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis - 28917 B° de La Fortuna (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 94 - Fax: (91) 611 59 88

La portada de este número reproduce una fotografía del profesor D. Pedro Puig Adam (1900-1960), de quien toma el nombre nuestra Sociedad y en conmemoración del centenario de su nacimiento.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

José Javier Etayo Gordejuela

Vicepresidentes:

Eugenio Roanes Macías	(Madrid)
Juan Bosco Romero Márquez	(Castilla-León)
Vicente Mendiola-Muñoz Morales	(Castilla-La Mancha)

Vocales:

Julio Fernández Biarge	(Redacción de publicaciones)
José Vicente García Sestafe	(Relaciones Institucionales)
Eugenio Roanes Lozano	(Gestión de publicaciones)
Martín Garbayo Moreno	(Actividades y concursos)

Secretario:

Francisco González Redondo

Vicesecretario:

Miguel Ángel Gallardo Ortiz

Tesorero:

Alberto Aizpún López

Bibliotecario:

Joaquín Hernández Gómez

Adjunta a la presidencia:

María Gaspar Alonso-Vega

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria del 2000

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente al año 2000 para el sábado día 29 de abril del 2000, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

XVIII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

convocado por

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras

BASES

Primera: Podrán participar en el Concurso los alumnos de B.U.P., E.S.O. y F.P. en tres niveles:

a) Primer nivel: alumnos de 3° E.S.O.
b) Segundo nivel: alumnos de 4° E.S.O.
c) Tercer nivel: alumnos de 3° B.U.P., 1° Bachillerato y 2° y 3° de F.P.II

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles) y se realizarán en Madrid, en un solo día, el sábado 17 de junio del 2000 a partir de las 10 horas.

Tercera: Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del dia 17 de Mayo del 2000, dirigiéndose por carta al presidente de nuestra sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Ciudad Universitaria
28040-Madrid

En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 1999-2000.

NOTA IMPORTANTE: Los dos primeros clasificados de cada nivel están invitados a participar en la VIII Olimpiada Rioplatense, que está previsto celebrar en diciembre del 2000 en Argentina (Ello en el supuesto de que se consigan becas para pagar los billetes hasta Buenos Aires).

Recuerdo de Don Pedro Abellanas

Cuando un verdadero maestro desaparece, no sólo queda su recuerdo y el fruto de su investigación científica, reconocible en sus escritos, sino sobre todo, quedan docenas de discípulos directos y millares de jóvenes que le deben una parte importante de su formación. Este es el caso de don Pedro Abellanas, que nos ha dejado en los últimos días del pasado mes de Julio.

Parece como si él mismo hubiese elegido la fecha para hacer imposible la rápida difusión de la triste noticia y la proliferación de homenajes y actos en su honor, a los que tan poco aficionado era, por muy merecidos que fuesen. Todos nos fuimos enterando con lamentable retraso, y con retraso también aparece en nuestro Boletín esta nota, con la que la Sociedad "Puig Adam" quiere mostrar el dolor de nuestros socios por la pérdida del que directa o indirectamente ha sido maestro de todos.

Yo fui su primer discípulo y quiero extenderme aquí en los recuerdos de esos años en que gocé del privilegio de tenerlo como maestro. Como les ocurre a otros muchos compañeros, le debo lo más importante de mi formación matemática. Aunque esta formación la he empleado en menesteres muy distintos de los que él hubiese deseado, nunca he negado su origen ni la gratitud que debo por ello a don Pedro.

Abellanas llegó a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza en 1942, como catedrático de Geometría Analítica, y allí comenzó a impartir sus clases al reducido grupo de alumnos de segundo curso de la sección de Matemáticas. Era muy joven -27 años- y debió de ser una gran satisfacción para él comenzar sus clases en el bello edificio donde hoy se aloja el Rectorado, ya que era natural del mismo Zaragoza.

Ciertamente que su entrada en esa Facultad causó gran sensación. Contribuyó a ello su aspecto serio y dominante, acentuado incluso con las secuelas de sus heridas de guerra, pero muy especialmente porque era notoria su inmensa capacidad de trabajo, su riguroso sentido del cumplimiento del deber y la exigencia que mostraba con los demás; exigencia que resultaba ineludible, porque siempre comenzaba por aplicársela a si mismo.

Entró en la mencionada sección de Matemáticas trayendo aires de renovación completa de la enseñanza universitaria. La sección estaba entonces carente de catedráticos numerarios y atendida por excelentes y abnegados enseñantes de la Matemática elemental más clásica, que nos daban una preparación fundamental para enfrentarnos con éxito al mundo de la enseñanza y de sus oposiciones, pero que no conseguía abrir nuestras mentes a los nuevos horizontes del hacer matemático.

Lo que Abellanas trajo a Zaragoza fue algo diferente. Yo tuve la inmensa suerte de estar entre los alumnos de su primera promoción. No tardamos ni una semana en percatarnos de que sus clases rompían todos los moldes de lo que conocíamos. Nos sorprendía en primer lugar la puntualidad en el comienzo, practicada y exigida y la disciplina imperante en las clases. No era la disciplina que cabría esperar de una persona despótica o soberbia, sino justo la precisa para el funcionamiento eficaz de la tarea docente.

Sin un texto en español que pudiese auxiliarnos, hubo que tomar apuntes. Debo señalar que plasmar en apuntes las explicaciones de don Pedro era una tarea que él hacía fácil con su perfecta administración del espacio de la pizarra y con la claridad en la exposición de los razonamientos. Los apuntes resultaban tan claros que se hacía grato pasarlos a limpio y estudiarlos cada día. Conservo con cariño los originales manuscritos.

En correspondencia con el minucioso trabajo que dedicó a sus clases, estableció un nivel de exigencia que desalentó a algunos compañeros, algunos de los cuales hicieron sus maletas y emigraron a otras universidades en busca de aprobados más cómodos. Hubo, en cambio, quien se trasladó a Zaragoza precisamente en busca del maestro cuya fama se había hecho notoria. Entre ellos, el primero fue el que hoy es excelente matemático, Sancho Guimerá.

El contenido de su primer curso en Zaragoza fue una verdadera iniciación a las Matemáticas para los que lo seguimos. Como no teníamos una base suficientemente sólida, comenzó por unas breves nociones de algebra y, a través de los espacios vectoriales, construyó una geometría métrica analítica. Después, ampliando el espacio euclídeo con los elementos impropios, e introduciendo las coordenadas homogéneas, nos hizo entrar en las afinidades y proyectividades y en ese marco, estudiamos las cónicas y las cuádricas, así como las curvas y superficies algebraicas, todo ello con amplio uso de los recursos algebraicos: vectores, matrices, etc. Esto que hoy parece un desarrollo normal de la asignatura, era entonces una novedad casi revolucionaria, que aun no había pasado a los libros de texto.

A pesar de la riqueza de esos contenidos, lo importante para nosotros fue sobre todo el seguir la construcción lógica de una rama de las Matemáticas desde sus principios. No obstante, Abellanas consideró el curso que había dado como una mera experiencia y se propuso desarrollar el del año siguiente con distinto planteamiento. Conocedores de este proyecto, resultó que todos los alumnos que habíamos seguido el primero volvimos a sus clases en el curso siguiente, unos obligados por no haberlo aprobado y los demás por seguir aprendiendo cosas interesantes de un modo tan grato, aunque no exento de esfuerzo.

No nos defraudó. Ese curso, tras las lecciones previas de álgebra, comenzó con una introducción axiomática al espacio proyectivo y desarrolló lo más elemental de su geometría. Después, tras la elección de los elementos impropios, estudió los espacios afines y por último, introdujo el absoluto del espacio, con la consecuencia de la geometría métrica. El estudio de las cónicas, de las cuádricas y de las curvas algebraicas se adaptó entonces a ese nuevo marco.

Los que tuvimos la suerte de seguir ambos cursos, debemos a don Pedro la parte más importante de nuestra formación matemática, que ya nunca tuvimos que reconsiderar y sobre la que edificamos cualquier construcción posterior.

No menos llamativo que el desarrollo de sus clases, fue el modo de realizar los exámenes. Aprovechando que el número de alumnos del curso era muy reducido, montó un sistema de evaluación distinto de todo lo conocido. Las pruebas comenzaban por varias sesiones escritas de ejercicios y eran seguidos por larguísimos exámenes orales, que a veces se continuaban a lo largo de varios días.

El propósito de tan minucioso proceso de evaluación, no era, por supuesto, el de atormentar al alumno, ni el de asegurar con toda precisión la justicia de una calificación. El examen era un diálogo en el que el alumno aseguraba sus ideas y aprendía más sobre temas que creía haber comprendido, que en muchos días de estudio previo. Mis exámenes de junio con don Pedro, incluidos los especiales para conseguir la calificación máxima, totalizaron más de 24 horas y puedo afirmar que en ellos aclaró mucho mis ideas. Es de destacar el trabajo que este sistema de evaluación supone para el profesor. Está claro que, de haber sido más numeroso el alumnado, esa práctica hubiese resultado materialmente inviable.

Al terminar mi licenciatura, me ofreció trabajar bajo su dirección en Geometría Algebraica y acepté con entusiasmo sus planes. Me prestó un ejemplar del libro de van der Waerden, que aún no había sido traducido al inglés, con el encargo de que lo estudiase y de paso hiciese varias copias manuscritas, sin retenerlo mucho tiempo. Le advertí que no sabía alemán, pero me contestó que tendría que aprenderlo. En aquel tiempo no sólo no había fotocopiadoras, sino que tampoco había bolígrafos, por lo que me costó gran esfuerzo tanto la traducción como manuscribirlo con cuatro copias, por medio del papel carbón.

Cuento esto para dar idea del grado de entrega y dedicación que don Pedro exigía a sus colaboradores. Así inició su dirección de mi tesis doctoral, la primera de las muchas que dirigiría a lo largo de su vida.

Abellanas obtuvo por oposición la Cátedra de Geometría Proyectiva de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central de Madrid (así se denominaba entonces) en 1948, justamente el año en que entré como Profesor Adjunto de Geometría Analítica en la misma Facultad. Siguió dirigiendo allí mis trabajos. Para ello me fue entregando numerosas separatas de artículos de O. Zariski y de otros autores, de los que también que tuve que hacer reproducciones manuscritas. Don Pedro me recibía con frecuencia para leer mis borradores, que corregía minuciosamente, dándome consejos para la continuación de la tesis, pero sin forzarme a una línea determinada.

El entusiasmo emprendedor y la capacidad de trabajo de don Pedro encontraron en Madrid un marco más amplio que en Zaragoza. El número de discípulos se multiplicó considerablemente y en el mundo de las Matemáticas, allí donde aparecía una ocasión de desarrollar un trabajo fecundo, aunque fuese duro y no remunerado, allí estaba Abellanas para acometerlo.

Preocupado por la Enseñanza de las Matemáticas en todos los niveles, formó la Sección de Metodología en la Facultad y participó activamente en todas las comisiones encargadas de estudiar los nuevos planes de estudios, organizó cursos de formación del profesorado, reorganizó la Real Sociedad Matemática Española y dirigió durante veinticinco años el Instituto "Jorge Juan" del C.S. de I.C.. Fue don Pedro el que inició las Olimpiadas Matemáticas Españolas, que durante treinta y tres años han ido aumentando su prestigio y eficacia, han alcanzado reconocimiento oficial y están ya en conexión con las Olimpiadas Internacionales. Una actividad creadora tan intensa y tan ubicua, no dejó de levantar recelos y envidias, motivando el que fuese acusado de querer estar presente en todas partes y acaparar todos los centros de decisión. Acusaciones injustas, ya que Abellanas nunca entorpeció el trabajo de los demás; más bien asumía los más duros y peor remunerados, cuando veía que eran beneficiosos y nadie estaba dispuesto a aceptarlos.

Toda esa tarea la llevó a término sin menoscabo de su labor creadora en Geometría Algebraica, a la que hizo aportaciones muy valiosas, manteniéndose en la primera línea, junto con algunos de sus discípulos, en los medios internacionales. En ese aspecto yo le defraudé, dedicándome a aplicar los conocimientos que él me había proporcionado al auxilio de los investigadores en Química Física primero y a las aplicaciones informáticas después. Se que le dolió, pero nunca me lo recriminó.

Con una actividad tan viva y fecunda, parece inexplicable que tuviese tiempo para producir la cantidad de libros de texto que llegó a publicar. Parece que los escribía de un tirón, sin retoques ni correcciones. Siempre desarrollando una línea impecable de rigor y sin recurrir a copiar textos ajenos. No le resultaron de lectura amena, ni pretendió que lo fuesen, pero cuando alguien necesitaba un concepto o resultado determinados, había que recurrir a los textos de Abellanas para encontrarlos expuestos con precisión. Algunos envidiosos, incapaces de escribir uno solo, se obstinaban en escandalizarse encontrando en ellos minúsculos errores.

A pesar de una vida de trabajo tan intenso, supo encontrar tiempo para su vida familiar. Ha dejado doce hijos, dos de ellos matemáticos, cuatro dedicados a la docencia. Con firme fe religiosa y con ideas políticas muy definidas, fue siempre muy consecuente con ellas en sus actos, pero nunca las utilizó para su medro personal ni hizo distinciones entre los demás en razón al modo de pensar de cada uno.

En 1984 se jubiló como catedrático de la Universidad Complutense y nos prohibió a todos sus discípulos cualquier iniciativa para hacerle un homenaje público, siguiendo la norma practicada a lo largo de toda su vida, de evitar manifestaciones ostentosas de reconocimiento de su labor. Le horrorizaba la hipocresía y la adulación, pero incluso cuando sabía que un homenaje era realmente sincero y merecido, le molestaba el sentirse protagonista de un espectáculo.

Ahora no podemos sustraernos al deber de proclamar que somos conscientes de la enorme deuda que la matemática española tiene con su persona. Que además de sus aportaciones originales a la Geometría Algebraica, con su magisterio, ha contribuido al grado de desarrollo que las Matemáticas han alcanzado en nuestro país, en mayor medida que ningún otro, en las últimas décadas. La Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas se une hoy al recuerdo de nuestro maestro.

Julio Fernández Biarge

Como complemento de este Recuerdo a Don Pedro Abellanas, transcribimos una relación de sus publicaciones (y recensiones en Mathematical Reviews):

Dimension de una variedad algebraica. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 2 (1942), 13-21 (Reviewer: J. L. Dorroh)

Sobre la teoría geométrica de superficies algebraicas para un cuerpo de constantes perfecto de característica **p.** Revista Acad. Ci. Madrid 36 (1942), 482-499 (Reviewer: D.B. Scott)

Las formulas de Schubert para la determinación de los números elementales de superficies de segundo orden. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 3 (1943), 164-175 (Reviewer: J. L. Dorroh)

Fórmulas de las características de Cremona para cuádricas completas. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 4 (1944), 3-9 (Reviewer: J. L. Dorroh)

Superficies algebraicas normales sobre un cuerpo de coeficientes perfecto de característica arbitraria. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 5 (1945), 221-230 (Reviewer: D. B. Scott)

Estructura analítica del segmento abierto definido por los postulados de incidencia y orden de Hilbert. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 6 (1946), 101-126 (Reviewer: L. M. Blumenthal)

On the orientation in the bundle of rays in Euclidean or hyperbolic space. Revista Acad. Ci. Zaragoza (2) 1 (1946), 24-31 (Reviewer: L. M. Blumenthal)

On the postulates of order in the projective space of Steinitz-Rademacher. Revista Acad. Ci. Zaragoza (2) 1 (1946), 18-23 (Reviewer: L. M. Blumenthal)

Descomposiciones producidas por una colineación en P^n_K. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 8 (1948), 261-276 (Reviewer: D. B. Scott)

Cuerpos ordenables con automorfismo único. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 9 (1949), 3-9 (Reviewer: D. B. Scott)

Aclaración sobre el artículo "Orderable fields with a single automorphism." Revista Mat. Hisp-Amer. (4) 9 (1949) 80 (Reviewer: D. B. Scott)

Théorie arithmétique des correspondances algébriques. Revista Mat.Hisp.-Amer. (4) 9 (1949), 175-233 (Reviewer: I. S. Cohen)

Subvariedad fundamental respecto de una correspondencia algebraica. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 10 (1950), 207-219 en español y 220-232 en inglés (Reviewer: B. Segre)

Curso General de Matemáticas (coautor F. Navarro Borrás). Madrid, 1951.

Historical essay on the concepts of space and geometry. Revista Acad. Ci. Zaragoza (2) 6 (1951), 9-26.

Algebraic correspondences II. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 11 (1951), 138-158 en español y 159-179 en inglés (Reviewer: I. S. Cohen)

Algunas correcciones (al artículo anterior). Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 13 (1953), 310-311 (Reviewer: D. B. Scott)

Orientación de variedades algebraicas. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 12 (1952), 79-93 en español y 94-101 resumen en inglés (Reviewer: B. Segre)

Subvariedades principales de una variedad algebraica. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 13 (1953), 255-282 en español y 283-310 en inglés (Reviewer: D. B. Scott)

Ciclos y divisores sobre una superficie algebraica. Revista Mat. Hisp.-Amer. (4) 16 (1956), 3-10.

Teoría aritmético-geométrica de las superficies algebraicas. Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4) 17 (1957), 65-149 (Reviewer: E. Lluis)

Matrices de polinomios en varias indeterminadas. Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4) 17 (1957), 267-277 (Reviewer: G. Papy)

Elementos de Matemática. Madrid 1958, 376 págs.

Introducción a la Matemática, vol. I. Editorial Saeta. Madrid 1960.

Los ideales irrelevantes en la teoría de cohomología de superficies algebraicas. Actas de la Primera Reunión Anual de Matematicos españoles en la Univ. de Madrid (1961), 158-163 (Reviewer: B. Segre)

Geometría básica, 1ª edición. Editorial Romo. Madrid 1961, 532 págs.

Un lema sobre módulos. Actas de la Primera Reunión Anual de Matemáticos Españoles en la Univ. de Madrid (1961), 175-182. (Reviewer: E. H. Batho)

Elementos de Matemática, 2 edición. Madrid 1961, 539 págs.

A triangulation of the Riemann variety of a projective space. Rev. Acad. Ci. Zaragoza (2) 16 (1961) núm. 1, 15-21 (Reviewer: B. Segre)

Variedad de Riemann triangulable de un espacio proyectivo. Actas de la 2ª Reunión Anual de Matemáticos Españoles y Seminario Matemático de Zaragoza (1962), 59-65 (Reviewer: P. Samuel)

Matemática para físicos e ingenieros. Editorial Romo. Madrid 1963, 785 págs. (Reviewer: A. A. Armendáriz)

Introducción a la Matemática, vol. II. Editorial Saeta. Madrid 1964.

Dirección de los Textos Piloto de Matemáticas para Bachillerato. Comisión Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Matemática, Madrid 1964-65.

Elementos de matemática, vol. I (texto) y vol. II (soluciones de los problemas), cuarta edición. Madrid 1965. 735 + 241 págs. (Reviewer: A. A. Armendáriz)

Estructura de semigrupos conmutativos. Rev. Mat. Hisp.-Amer.(4) 25 (1965) 3-44 (Reviewer: R. P. Hunter)

Variedades algebraicas totales. Proc. Internat. Colloq. Algebraic Geometry (Inst. "Jorge Juan" del C.S.I.C. - Internat. Math. Unión), Madrid 1965, (Reviewer: E. Lluis)

Algebraic correspondences. Univ. e Politec. Torino Rend. Sem. Mat. 25 (1965/1966), 75-82 (Reviewer: A. Evyatar)

Real varieties of class r. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano, 36 (1966), 60-68 (Reviewer: H. Popp)

Sheaves on the total spectrum of a ring. Rend. Mat. e Appl. (5) 25 (1966), 72-76 (Reviewer: K. Sakai)

Correspondencia de clase r. Actas VII Reunión Anual de Matemáticos Españoles en Valladolid (1966), págs. 36-42 (Reviewer: M. L. Laplaza)

Geometría básica, 2ª edición. Editorial Romo, Madrid 1969, 850 págs. (Reviewer: M. L. Laplaza)

Zassenhaus categories (In Honor of Prof. Dr. Iñiguez y Almech on the Occasion of his Seventieth Birthday and Academic Retirement) Consejo Sup. Investigación. Ci., Fac. Ci. Zaragoza (1969), págs. 11-46 (Reviewer: O. Wyler)

The theorem of the primitive element for some differentiable algebras. Univ. e Pollitec. Torino Rend. Sem. Mat. 29 (1969/70), 153-160 (Reviewer: R. Cohn)

Elementos de Matemática, 10 edición. Madrid 1970, 735 + 241 págs.

Some geometrical applications of the preparation theorem of Weiestrass-Malgrange. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 40 (1970), 81-92.

Correspondencias algebraicas sobre un anillo noetheriano. Actas de las Primeras Jornadas Matemáticas Luso-Españolas, publicadas por el Instituto "Jorge Juan" de Matemáticas (1972), págs 53-54.

Algebraic correspondences over a Notherian ring (Commemoration volumes for Prof. Dr. Akitsuga Kawaguchi's seventieth birthday, vol.II). Tensor, N.S. 25 (1972), 251-261 (Reviewer: Audun Holme)

Some ideas on equisingularity by Vicente. Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino 32 (1973/74) (Reviewer: Augusto Nobile)

Preanalytic sets. Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 44 (1974), 119-129 (Reviewer: M. Herrera)

Valued analytic R*-algebras.* Studies in Mathematics (in honor of A. Almmeida Costa). Instituto de Alta Cultura. Lisboa, 1974 , págs. 83-94 (Reviewer: J. S. Joel)

Algebra Lineal y Geometría. Universidad Nacional de Educación a distancia, 1974.

Análisis Matemático I. Cálculo infinitesimal. Universidad Nacional de Educación a distancia, 1976.

Professor Antonio Almeida Costa. Rev. Mat. Hisp.-Amer. (4) 38 (1978), núm. 2-3, 165-166.

Unas reflexiones sobre la Biografía de la Matemática. Discurso de apertura del curso 1979-80 en la Univ. Complutense de Madrid.

Sobre el centenario del nacimiento de Puig Adam

Como muchos de vosotros sabéis, en este año 2000 se cumplen cien años del nacimiento de Don Pedro Puig Adam (12 Mayo 1900).

Hemos pensado que una posible forma de recordar su figura, a la vez que rendirle un pequeño homenaje, sería publicar en cada uno de los números de la revista que aparecerán a lo largo de este año algún apunte, alguna conferencia o algo que Don Pedro hubiera escrito a lo largo de su vida. En la medida de lo posible, lo que vamos a escoger va a estar relacionado con las Matemáticas y preferentemente con la enseñanza de las Matemáticas. Si además no es muy conocido, mucho mejor.

En este primer número de este año, publicamos sus apuntes de una clase dada a alumnos del antiguo 6º de Bachillerato, durante el curso 1954-55. Lo que tenéis es una fotocopia de la hoja del cuaderno en el que escribía la preparación y posteriores conclusiones de estas clases. Hemos creído que merecía la pena ver sus propias anotaciones aunque lo hemos vuelto a escribir para facilitar su lectura. Esperamos que este pequeño homenaje os resulte interesante a la vez que os ayude a comprender mejor lo que significó o pudo significar Puig Adam en la enseñanza de las Matemáticas en nuestro país.

Joaquín Hernández Gómez

Transcripción del manuscrito incluido a continuación, para facilitar su lectura:

Día 4 de Febrero (sábado) (24ª experiencia activa)

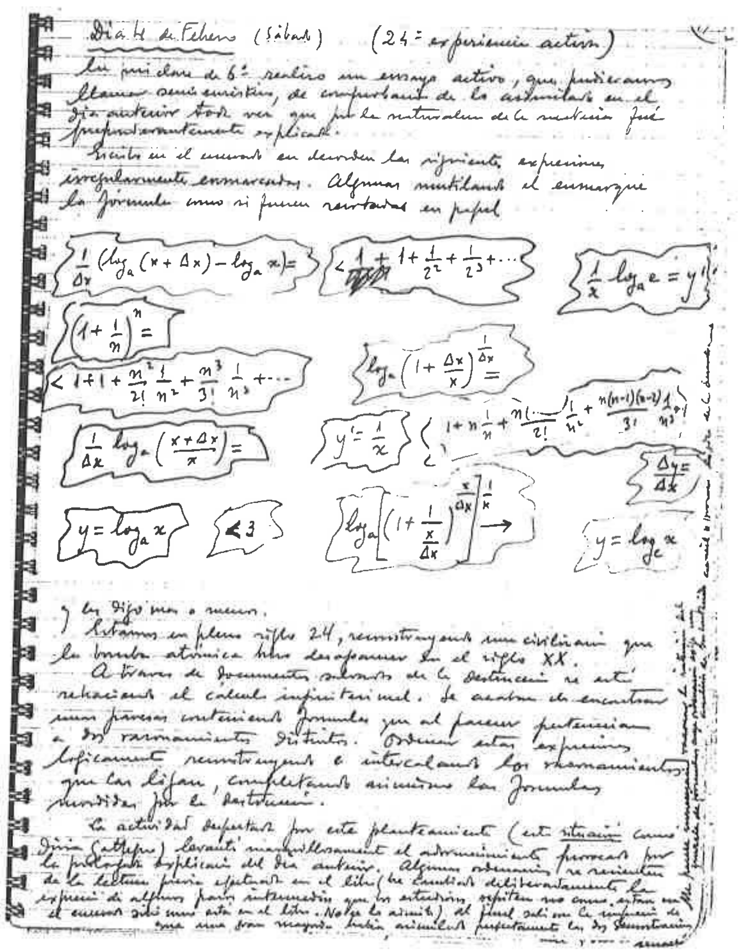
En mi clase de 6º realizo un ensayo activo, que pudiéramos llamar semieurístico, de comprobación de lo asimilado en el día anterior, toda vez que por la naturaleza de la materia fue preferentemente explicada.

Escribo en el encerado en desorden las siguientes expresiones irregularmente enmarcadas. Algunas mutilando el enmarque de la fórmula como si fueran recortadas en papel (ver fórmulas) y les digo más o menos:

Estamos en pleno siglo XXIV, reconstruyendo una civilización que la bomba atómica hizo desaparecer en el siglo XX.

A través de documentos salvados de la destrucción, se está rehaciendo el Cálculo infinitesimal. Se acaban de encontrar unas pavesas conteniendo fórmulas que al parecer pertenecía a dos razonamientos distintos. Ordenar estas expresiones lógicamente, reconstruyendo e intercalando los razonamientos que las ligan, completando asimismo las fórmulas mordidas por la destrucción.

La actividad despertada por este planteamiento (esta <u>situación</u> como diría Gattegno) levantó maravillosamente el aburrimiento provocado por la prolongada explicación del día anterior. Algunas ordenaciones se resienten de la lectura previa efectuada en el libro (he cambiado deliberadamente la expresión de algunos pasos intermedios que los estudiosos repiten no como están en el encerado sino como está en el libro. No se lo admito). Al final salí con la impresión de que una gran mayoría había asimilado perfectamente las dos demostraciones. Me parece innecesario razonar la intención del puzzle de fórmulas cuya ordenación exige un análisis de su contenido esencial del proceso lógico de la demostración.



Presentación del Profesor Karl-Heinz Keuneczke

En el pasado verano tuve el placer de asistir en Goesing (Austria) a la charla que impartió el profesor Karl-Heinz Keunecke en el congreso sobre Enseñanza del Algebra Computacional *ACDCA 1999*. Presencié, con sorpresa, el montaje de todo un pequeño laboratorio de Física portátil, en el cual un sistema de adquisición de datos instalado en un péndulo se conectaba mediante un interfaz a una calculadora. A continuación se presentó de una manera muy atractiva e interesante una práctica de Física que hacía uso de ecuaciones diferenciales (a nivel de enseñanzas media). La lección fue eminentemente práctica, basada en datos reales y en el uso de una calculadora simbólica.

Al terminar la charla me apresuré a proponer al profesor Keunecke la redacción de un artículo para que pudiéramos disfrutar con su trabajo y a aprender de su experiencia a través de las páginas del Boletín de nuestra sociedad matemática, a lo que afortunadamente accedió.

La carrera científica del profesor Karl-Heinz Keunecke se desarrolla en la universidad de Kiel (es doctor en Física) y trabaja como profesor en el centro de enseñanza media "Humboldt Schule Kiel" hasta su jubilación. Convencido de que los Sistemas de Cómputo Algebraico serán en el futuro una herramienta habitual para los alumnos de enseñanzas medias en la clase de Matemáticas y Física, se dedica ahora intensamente al estudio de este tema. Ha desarrollado y sigue desarrollando numerosas publicaciones y lecciones sobre enseñanza de Matemáticas y Física.

E. Roanes Lozano.

Differential equations as a teaching topic in school?

Karl-Heinz Keunecke
Kiel(Alemania)

Abstract

Some pocket calculators comprise a computer algebra system (CAS). These new tools force educators to reassess the mathematics curriculum since they allow to teach new topics in math and science. Will the CAS bring differential equations and the pertaining solution methods to school? This article presents some ideas about how to introduce differential equations in math or physics. At first a numerical method for solving first and second order differential equations ought to be explained to the students. Then they have to learn how the results can be presented on pocket calculators such as TI-89 and TI-92 Plus making use of tables and the different graphical displays. The numerical solvers of these pocket calculators are then applied to the differential equations of linear and nonlinear oscillations. The simulation of the oscillations of a physical pendulum at large angular displacements are compared with observations. It is further shown that even chaotic oscillations can be modeled and the typical features of such motions like chaotic transitions, bifurcations, sensitivity with respect to initial conditions etc. can be demonstrated.

1 Introduction

Physics teachers have treated already ordinary differential equation in their lessons before computer algebra was available. They did so for good reasons.

1. Finding and solving differential equations is one of the most powerful tools of physicists in order to understand physical processes, to discover their laws and to make predictions.
2. Many physical laws are formulated as differential equations, e.g. Newtons second law, the law of induction, the wave equation or the Schroedinger equation.

High school students are neither supposed to know the theory of differential equations nor are they taught to solve the equations. They need help from a teacher who suggest very often a function as a purported solution and asks to verify the claim. When a CAS is used the computer can be asked for the solution instead of the teacher. For details we refer to [1]. But a CAS can do more. It can solve differential equations also numerically. It opens the door to modelling a variety of other processes in nature. Physics in school was and is essentially restricted to linear phenomena because in general only linear problems could be solved mathematically. If a CAS is available this restriction may be given up. The formal distinction between linear, nonlinear or even chaotic processes may be neglected at first. The numeric solver treats all kinds of ODE in the same way. It replaces the continuous problem by a discrete substitute and operates on the latter by iterative processes starting from the initial condition.
In order to introduce ordinary differential equations in school the students must learn:

- How to derive the differential equation of physical processes(i.e. modelling)
- How solutions of differential equations may be approximated numerically
- How differential equations of order 2 and higher may be converted into a system of first order differential equations
- How to apply the tools of a calculator like the TI89/92Plus to obtain and process the solution of ordinary differential equations

I would like to show how this could be realized in the context of physics or math lessons.
All my examples deal with differential equations of oscillations. I will begin with harmonic oscillations. Then I will pass to the physical pendulum at larger angles as an example of a nonlinear oscillation. Finally chaotic oscillations are simulated.

2 Exact solution of differential equations with DeSolve()

When investigating oscillations in physics lessons teachers start usually with harmonic oscillations. The differential equation of free undamped oscillations of e.g. a spring-mass system is given by:

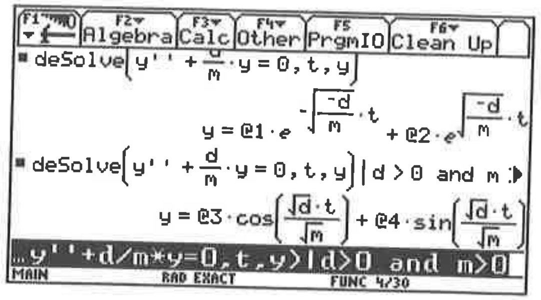


Figure 1: *General solution for an undamped oscillation.*

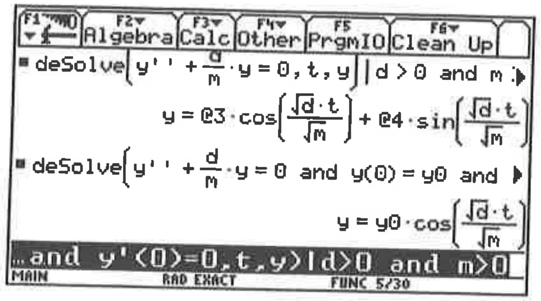


Figure 2: *Particular solution for an undamped oscillation.*

where d is the spring constant and m the mass.
When the DeSolve() [2] command is applied to equation (1) the general solution is written in terms of exponential functions (second row in fig.1). Students are not used to deal with exponential functions with imaginary arguments at this stage and therefore only solutions with trigonometric functions for the periodic motion are applicable.
This can be achieved by means of the "with" operator "|" ($\ddot{y} + \frac{d}{m}y = 0 \; |d > 0$ and $m > 0$) as it can be seen in row 3 of fig.1. A particular solution is achieved when the initial or boundary conditions e.g. $y(0) = y_0$ and $\dot{y}(0) = 0$ are added to the "DeSolve()" command (row 3 and 4 in fig.2).
One can prove easily that the function $y = y_0 \cdot \cos(\sqrt{\frac{d}{m}} \cdot t)$ in fig.2 is a solution of (1) by the operations shown in fig.3. From the answer

$$y = y_0 \cdot \cos(\sqrt{\frac{d}{m}} \cdot t) \tag{2}$$

the basic properties of the harmonic oscillations can be deduced in class.
Adding a friction force proportional to the velocity to equation (1),

$$\ddot{y} = -\frac{d}{m} \cdot y - \frac{\beta}{m} \cdot \dot{y} \tag{3}$$

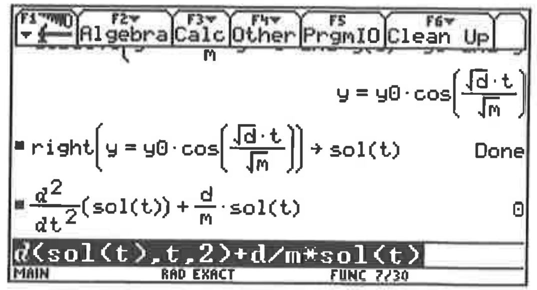


Figure 3: *Verification that sol(t) is a solution of equation (1).*

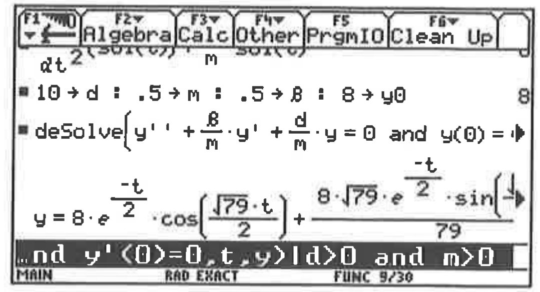


Figure 4: *Solution with discrete parameters*, $d = 10$, $m = 0.5$, $\beta = 0.5$ *and* $y_0 = 8$.

then again a solution with exponential functions appears (fig.4, first row) which in this case cannot be written in terms of trigonometric functions, except if you replace the argument of the e function by a negative term e.g. $-k^2$. But this manipulation confuses the students rather then it helps. In school therefore it is proposed to study only solutions with numerically defined parameters y_0, d and m. One result is shown in the last row of fig.4.

3 Numerical solutions of differential equations

The numerical solution of differential equations is obtained by solving the corresponding difference equations by iterations starting from an initial or boundary value. Only first order differential equations can be converted directly into difference equations. Differential equations of order 2 or higher must first be transformed into a system of first order equations. This formal transformation of a second order differential equations $\ddot{y} = f(t, y, \dot{y}, g(t))$ can be done by replacing y by y_1 and $\dot{y}$ by y_2 which yields:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f(t, y_1, y_2, g(t)) \end{aligned}$$

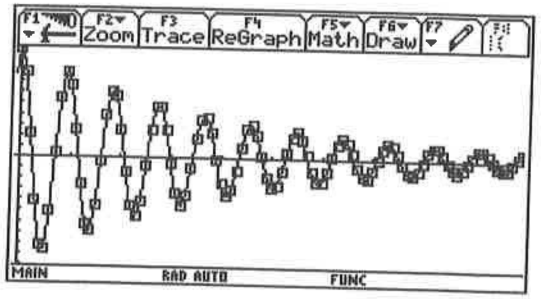


Figure 5: *Comparison of the exact(x-y line) and the numerical(squares) solution of equation (3)*

This formal process does not spark students imagination. For them it is easier to express e.g. equation (3) as an equation for velocity v, a well known quantity, by using $\dot{y} = v$ and $\ddot{y} = \dot{v}$. Then the system of first order equations defines the velocity and the derivative of velocity.

$$\begin{aligned} y_1' &= v \\ y_2' &= -\frac{d}{m} \cdot y - \frac{\beta}{m} \cdot v \end{aligned} \tag{4}$$

The TI-92 needs the variable y_1 and y_2 instead of y and v and one has to type at the Y=Editor:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -\frac{d}{m} \cdot y_1 - \frac{\beta}{m} \cdot y_2 \end{aligned} \tag{5}$$

One has the choice to solve the system approximately by using the Euler or the Runge-Kutta method. Especially the Euler method is very critical as regards the step width of the discretization. If it is too large an exponentially increasing function is obtained as a solution of equation (3) - definitely a wrong answer. In order to check that a reasonable approximation is reached with the Runge-Kutta method, we may display the numerical and the exact solution of equation (3) as in fig.5. There are no obvious differences between the approximation and the exact solution.
Besides harmonic oscillations it is important to discuss also oscillations which are nonharmonic. The physical pendulum with large angular displacements is an often cited example because the experiment is easy to realize.
In this experiment the angle of a swinging bar is measured by means of a potentiometer at the axis of rotation as shown in the sketch in fig.6. The voltage at the potentiometer is recorded by means of the computer based analogue to digital converter CBL[1]. The use of the CBL is described for example in [4] or [5]. The

[1] CBL: Computer Based Laboratory, produced by Texas Instruments Incorporated

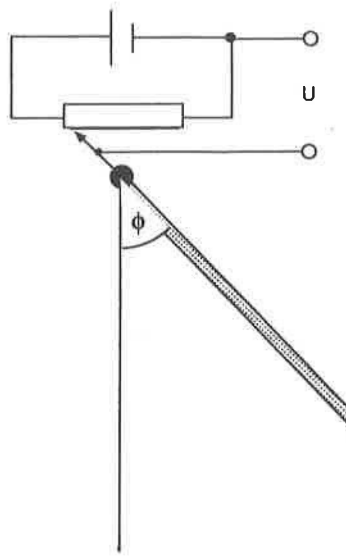


Figure 6: *Sketch of the physical pendulum, the angle is measured by the voltage at the potentiometer.*

recorded data from the pendulum are displayed with respect to time in fig.7. The angle at the cursor position is 178^0. It is obvious that the period of the oscillation decreases with decreasing angular displacement.
By using the "Trace" option of TI-89 or TI-92+ the period can be calculated from the positions of the maxima and minima. In fig.8 the data of the CBL are loaded in a table.
The first two columns show time and angle. In column c5 the angular velocity is calculated. Applying the "Shift()" command to the data ϕ_i in column c2 the shifted angles ϕ_{i+i} and ϕ_{i-i} are listed in column c3 and in column c4 . From these columns

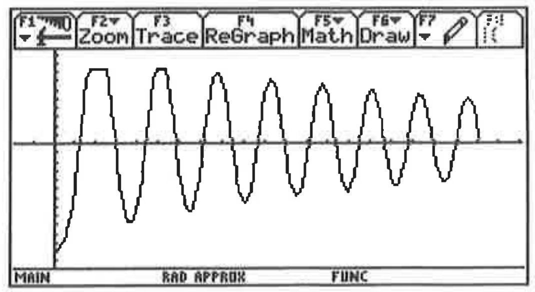
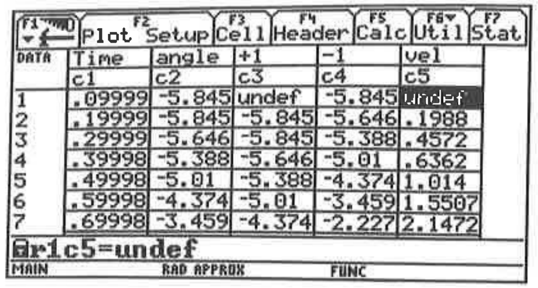


Figure 7: *Angular displacement of the pendulum versus time.*



Time c1	angle c2	+1 c3	-1 c4	vel c5
.09999	-5.845	undef	-5.845	undef
.19999	-5.845	-5.845	-5.646	.1988
.29999	-5.646	-5.845	-5.388	.4572
.39998	-5.388	-5.646	-5.01	.6362
.49998	-5.01	-5.388	-4.374	1.014
.59998	-4.374	-5.01	-3.459	1.5507
.69998	-3.459	-4.374	-2.227	2.1472

r1c5=undef

Figure 8: *Measured angular displacement in column c2 and calculated angular velocity in column c5.*

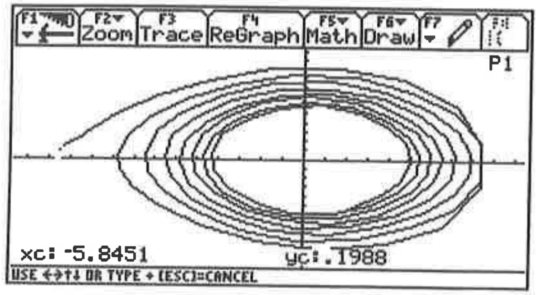


Figure 9: *Phase diagram of the physical pendulum*

the angular velocity

$$\dot{\phi} = \frac{\phi_{i+i} - \phi_{i-i}}{\Delta t} \tag{6}$$

can be determined numerically (column c5). This allows to display the phase portrait of the oscillation (fig.9).

On the right hand side of the graph one can see a vertical line at 160^0. The reason is that the potentiometer has only a restricted range from 0^0 to 340^0. The nature of the pendulum can be investigated more thoroughly when the solutions of the differential equation are considered for different cases. The differential equation of the physical pendulum with a friction force proportional to the angular velocity is given by:

$$\ddot{\phi} = -\frac{m \cdot g \cdot s}{J} \cdot \sin\phi - \frac{\beta}{J} \cdot \dot{\phi} \tag{7}$$

where the first term describes the torque of the bar and the second one the friction force. In order to study the relation between the period of oscillation and the angular displacement, equation 7 has been solved for $\beta = 0$. The results are shown in fig.10, fig.11 and fig.12.

For initial angles exceeding 90^0 it is obvious that the oscillation is not sinusoidal as it can be seen from fig.10. Also the oscillation period clearly depends on the amplitude.

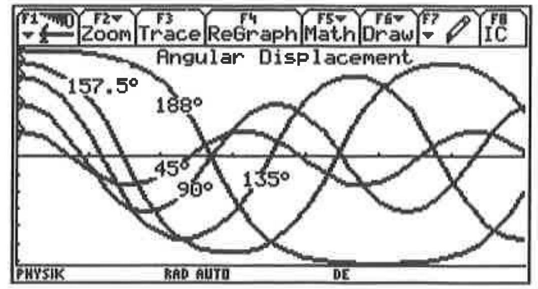


Figure 10: *Oscillations with intial displacements between* 179^0 *and* 90^0.

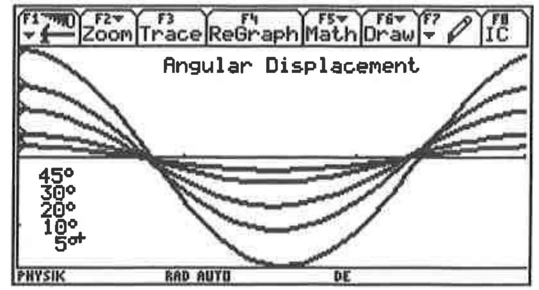


Figure 11: *Oscillations with intial displacements between* 45^0 *and* 5^0.

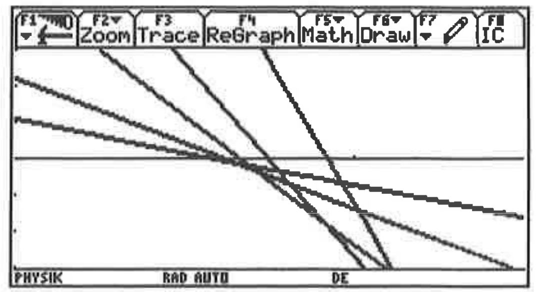


Figure 12: *Enlarged presentation of the first zeroes of the oscillations of fig.11.*

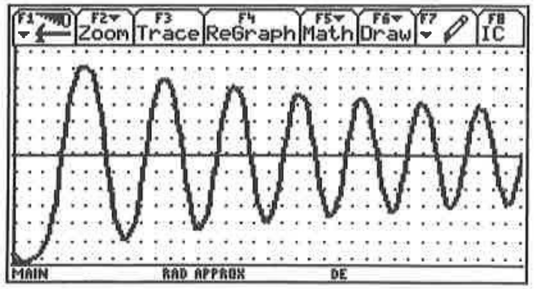


Figure 13: *Simulation of the angular displacement of a physical pendulum by means of the ODE (7)*

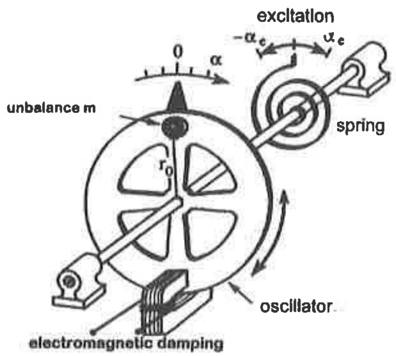


Figure 14: *Sketch of a driven rotational pendulum with an unbalance*

For angles below 45^0 the change of the period is smaller as it is shown in fig.11 and fig.12 where the region near the zeros on the t-axis is displayed enlarged. The relation between frequency and displacement can be investigated qualitatively from these graphs. Finally the observed oscillation in fig.7 is modeled by the differential equation 12. The damped oscillation is displayed in fig.13.
The last oscillator which is to be investigated here is a rotational pendulum with an unbalance.
The swinging wheel in fig.14 has two stable states. When it is excited by a periodical force chaotic oscillations can occur. Therefore it is one of those elementary experiments to illustrate deterministic chaos. The differential equation is also well known [3] and can be solve by the ode solver of TI-89/92+. The according differential

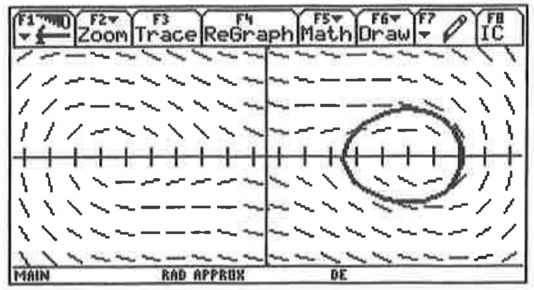


Figure 15: *Phase portrait of a quasi harmonic oscillations of a rotational pendulum with an unbalance*

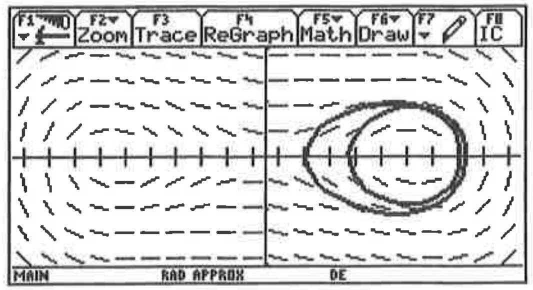


Figure 16: *1. bifurcations, (frequency doubling)*

equation is :

$$\ddot{\phi} = \frac{D}{J} \cdot (\phi - \phi_e t \cdot \sin \omega t) + \frac{m \cdot g \cdot r_0}{J} \cdot \sin \phi - k_1 \cdot sign\dot{\phi} - k_2 \cdot I^2 \cdot \dot{\phi}. \qquad (8)$$

Here the first term on the right side of the equation describes the driving force of the oscillation. The second term is the torque of the unbalance. The last two terms describe the constant friction force and a friction force proportional to the angular velocity which depends on the variable current through the damping magnet.

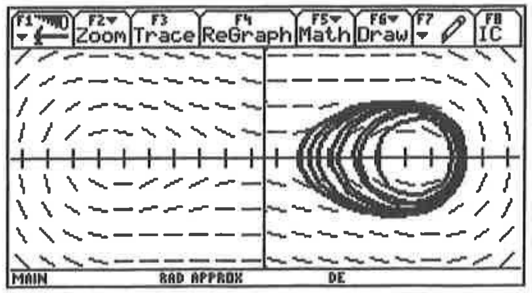


Figure 17: *Further bifurcations*

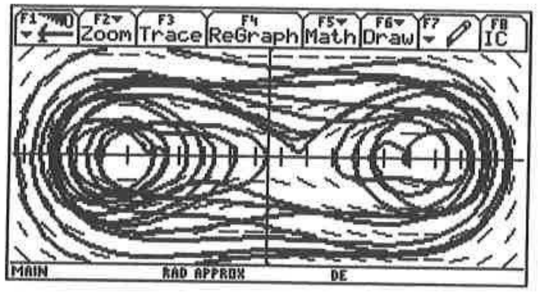


Figure 18: *Chaotic oscillation of a rotational pendulum*

Simulating the motion of the rotational pendulum the steady state of the oscillations encounters after a while. The transient periods are suppressed in the phase portraits of different oscillations which are diplayed in fig.15 to 18. When the current through the the damping magnet is varied then different oscillations appear. The first three figures 15 to 15 demonstrates the bifurcation scenario for varying the damping of the system. In fig.18 the phase portrait of a chaotic oscillation.

4 Conclusion

I tried to give an idea what can be done with the differential equation solvers, DeSolve() and the numeric solver of the TI calculators. The introduction of a CAS in schools gives the chance to add new topics to the classical curriculum in mathematics and physics because students spend less time on numerical work. It is now possible to observe real world processes by using modern technology and to simulate these processes by solving differential equations during mathematics and/or physics lessons. And it's higly rewarding!

References

[1] Karl-Heinz Keunecke: *Differentialgleichungen im Physikunterricht, Praxis der Naturwissenschaften 5/44 p. 5-9, 1995*

[2] *Das TI-92 Plus Modul, p. 54-57, Texas Instruments Incorporated, 1998*

[3] Roman Worg: *Deterministisches Chaos, Wege in die nichtlineare Dynamik, p. 48, BI-Wissenschaftverlag, 1993*

[4] John Gastineau, Kenneth Appel et al.: *Physics with CBL, Vernier Software, 1998*

[5] Karl-Heinz Keunecke: *Computerunterstützter Physikunterricht, Experimente zur Mechanik, Lehrerhandreichung published by Texas Instruments Germany, 1998*

Algunas representaciones radicales infinitas de los números naturales

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Bonifacio Sotos
Casas Ibáñez (ALBACETE)

Abstract

This article shows how infinite radical representations of all positive integers are obtained by means of recurrent sequences generated from algebraic identities.

1 Representación a través de raíces cuadradas

Recientemente en [1], y por un método distinto al usual (concretamente a través de métodos geométricos sobre polígonos regulares) hemos demostrado la conocida igualdad

$$2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 \ldots}}}$$

la cual esencialmente llama nuestra atención por aportar una curiosa expresión de un número natural mediante infinitos radicales. El objetivo de este artículo es dar un sencillo modelo de trabajo para generar representaciones de todos los números enteros positivos mediante infinitos radicales de índice arbitrario. Para ello partiremos de la identidad algebraica

$$n(n+2) = n\sqrt{1 + (n+1)(n+3)} \tag{1}$$

Llamando $\alpha_n = n(n+2)$, (1) puede reescribirse como

$$\alpha_n = n\sqrt{1 + \alpha_{n+1}}$$

y aplicando sucesivamente esta fórmula recurrente tenemos

$$\alpha_n = n\sqrt{1+\alpha_{n+1}} = n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+\alpha_{n+2}}}$$
$$= n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+\alpha_{n+3}}}} = \ldots$$

esto es

$$\left.\begin{array}{rcl} \alpha_n & = & n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\ldots}}}} \\ \alpha_n & = & n(n+2) \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Haciendo $n = 1$ en esta última expresión obtenemos una curiosa representación radical infinita (R.R.I.) del número 3

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}} \qquad (3)$$

Tomando $n = 2, 3, \ldots$ se obtienen R.R.I. de los números $8, 15, \ldots$

$$\begin{array}{rcl} 8 & = & 2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}} \\ 15 & = & 3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\ldots}}} \end{array} \qquad (4)$$

las cuales en realidad se deducen implícitamente de (3).

Justifiquemos formalmente el paso al límite que hemos dado en la expresión (3). De (3) conjeturamos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}} = 3$$

Para probar que la sucesión

$$\tilde{\alpha}_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots+(n-1)\sqrt{1+n}}}}$$

converge a 3 cuando $n \to \infty$ probaremos que existen dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{A_n\}$ tales que

$$a_n \le \tilde{\alpha}_n \le A_n \quad y \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n = 3$$

De la cadena de identidades

$$3 = \sqrt{1+2\cdot 4} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}} = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\cdot 6}}} = \ldots \qquad (5)$$

se conjetura que

$$3 = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}} \quad \forall n \ge 2$$

cuya demostración por inducción es sencilla pues se verifica

$$(n+2)^2 = 1+(n+1)\sqrt{(n+3)^2}$$

Eligiendo

$$A_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}}}$$

se tiene $\tilde{\alpha}_n \le A_n$ pues $n+2 > 1$ para todo n natural, y $\{A_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$, al ser $\{A_n\}$ la sucesión constante e igual a 3. Para encontrar $\{a_n\}$ utilizaremos la siguiente desigualdad cuya demostración es inmediata

$$\sqrt{1+xm} < \sqrt{m}\sqrt{1+x} \quad \forall m > 1\,, \quad \forall x > 1 \qquad (6)$$

aplicada $n-1$ veces sobre la sucesión $\{A_n\}$, de dentro hacia fuera, tomando primero $m_1 = \sqrt{(n+2)^2} = n+2 > 1$ y $x_1 = n > 1$, así

$$A_n = \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+n\sqrt{(n+2)^2}}}}} \le$$

$$\leq \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-1)\sqrt{n+2}\sqrt{1+n}}}}} \leq$$

volvemos a aplicar (6) de dentro hacia fuera tomando ahora $m_2 = \sqrt{n+2} > 1$ y $x_2 = (n-1)\sqrt{1+n} > 1$

$$\leq \sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots\sqrt{1+(n-2)\sqrt[4]{n+2}\sqrt{1+(n-1)\sqrt{1+n}}}}}}$$

llegando finalmente

$$A_n \leq \sqrt[2^{n-1}]{n+2}\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+(n-1)\sqrt{1+n}}}} = \sqrt[2^{n-1}]{n+2}\,\tilde{\alpha}_n$$

Denotando por

$$a_n = \frac{A_n}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}}$$

se tiene $a_n \leq \tilde{\alpha}_n$ y obsérvese que $\{a_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$, pues

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}} = 1$$

para ver esto basta tomar logaritmos y usar la regla de L'Hôpital

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2^{n-1}]{n+2}} = \lim_{n\to\infty} (n+2)^{\frac{-1}{2^{n-1}}}$$

$$\ln L = -\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{2^{n-1}} = \{\frac{\infty}{\infty}\} = -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+2)2^{n-1}\ln 2} = 0 \quad \Rightarrow L = 1$$

Mediante (2) sólo tenemos R.R.I. de "algunos" naturales (los pertenecientes a la sucesión n^2+2n). Con objeto de obtener dichas R.R.I. para cualquier natural observemos que si partimos de la identidad

$$n(n+3) = n\sqrt{(5+n)+(n+1)(n+4)}$$

razonando como antes tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} \beta_n & = & n\sqrt{(5+n)+(n+1)\sqrt{(6+n)+(n+2)\sqrt{(7+n)+\ldots}}} \\ \beta_n & = & n(n+3) \end{array}\right\} \quad (7)$$

Así, poniendo $n = 1$ en (7)

$$4 = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+\ldots}}} \quad (8)$$

Nótese que de (4) y (8) tenemos dos R.R.I. distintas del número 4. En realidad, para cualquier natural existen infinitas R.R.I.
Usando un razonamiento análogo al anterior, justificaremos el paso al límite efectuado en (8). A partir de (8) conjeturamos $\{\tilde{\beta}_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$ siendo

$$\tilde{\beta}_n = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+\cdots+(n-1)\sqrt{(n+4)+n}}}}$$

Para demostrar esto encontraremos dos sucesiones $\{b_n\}$ y $\{B_n\}$ tales que

$$b_n \leq \tilde{\beta}_n \leq B_n \quad y \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} B_n = 4$$

Por otra parte a partir de la cadena de igualdades

$$4 = \sqrt{6+2\cdot 5} = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\cdot 6}} = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\cdot 7}}} = \cdots \quad (9)$$

conjeturamos

$$4 = \sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+\cdots\sqrt{(n+4)+n\sqrt{(n+3)^2}}}}} \quad \forall n \geq 2$$

que se prueba fácilmente por inducción pues

$$(n+3)^2 = (n+5)+(n+1)\sqrt{(n+4)^2}$$

Tomaremos

$$B_n = \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + \cdots \sqrt{(n+4) + n\sqrt{(n+3)^2}}}}}$$

que cumple $\tilde{\beta}_n \leq B_n$ pues $n + 3 > 1$ para todo n natural y $\{B_n\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$, al ser $\{B_n\}$ la sucesión constantemente 4.
Para encontrar $\{b_n\}$ usaremos la siguiente desigualdad, cuya prueba es sencilla

$$\sqrt{x + my} < \sqrt{m}\sqrt{x+y} \quad \forall m > 1, \ \forall x, y > 1 \tag{10}$$

aplicada $n - 1$ veces sobre la sucesión $\{B_n\}$ de dentro hacia fuera, tomando primero $m_1 = \sqrt{(n+3)^2} = n + 3 > 1$, $x_1 = n + 4 > 1$ e $y_1 = n > 1$, resultando

$$B_n = \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + \cdots \sqrt{(n+4) + n\sqrt{(n+3)^2}}}}} \leq$$

$$\leq \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + \cdots \sqrt{(n+3) + (n-1)\sqrt{n+3}\sqrt{(n+4) + n}}}}} \leq$$

aplicamos de nuevo (10) de dentro hacia fuera tomando $m_2 = \sqrt{n+3} > 1$, $x_1 = n+3 > 1$ e $y_2 = (n-1)\sqrt{(n+4)+n} > 1$, y continuamos con la cadena de desigualdades

$$\leq \sqrt{6+2\sqrt{7+\cdots\sqrt{(n+2) + (n-2)\sqrt[4]{n+3}\sqrt{(n+3)+(n-1)\sqrt{(n+4)+n}}}}}$$

obteniendo al final

$$B_n \leq \sqrt[2^{n-1}]{n+3}\sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + \cdots (n-1)\sqrt{(n+4) + n}}}} = \sqrt[2^{n-1}]{n+3}\ \tilde{\beta}_n$$

Tomamos

$$b_n = \frac{B_n}{\sqrt[2^{n-1}]{n+3}}$$

y así se tiene $b_n \leq \tilde{\beta}_n$. Es fácil probar como en el caso anterior $\{b_n\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 4$.
En general, para $k \in N$ arbitrario, pero fijo se tiene

$$\left.\begin{aligned} \gamma_n &= n\sqrt{p_2(n) + (n+1)\sqrt{p_2(n+1) + (n+2)\sqrt{p_2(n+2) + \ldots}}} \\ \gamma_n &= n(n+k) \\ p_2(m) &= (k^2 - k - 1) + (k-2)m \ , \quad m \geq 1 \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Haciendo $n = 1$ en (11) se deduce una R.R.I. de cualquier natural mayor que 2

$$k + 1 = \sqrt{p_2(1) + 2\sqrt{p_2(2) + 3\sqrt{p_2(3) + \ldots}}}$$

$$p_2(m) = (k^2 - k - 1) + (k-2)m \ , \quad m \geq 1$$

2 Representación a través de raíces cúbicas

En este apartado aportaremos R.R.I. a través de raíces cúbicas, usando un razonamiento análogo al anteriror.
En esta ocasión partiremos de la identidad

$$n^2(n+2) = n^2\sqrt[3]{(5 + 5n + n^2) + (n+1)^2(n+3)}$$

Llamando $\delta_n = n^2(n+2)$, la igualdad anterior se puede expresar como

$$\delta_n = n^2\sqrt[3]{(5 + 5n + n^2) + \delta_{n+1}}$$

y razonando como antes

$$\delta_n = n^2\sqrt[3]{(5 + 5n + n^2) + (n+1)^2\sqrt[3]{[5 + 5(n+1) + (n+1)^2] + \ldots}}$$

Haciendo $n = 1$ en esta última expresión, obtenemos la siguiente R.R.I. del número 3

$$3 = \sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{19 + 9\sqrt[3]{29 + 16\sqrt[3]{41 + \ldots}}}}$$

Para justificar el paso al límite efectuado implícitamente en la representación anterior, razonamos como en el primer apartado del trabajo.
A partir de las igualdades

$$3 = \sqrt[3]{11+4\cdot 4} = \sqrt[3]{11+4\sqrt[3]{19+9\cdot 5}} = \sqrt[3]{11+4\sqrt[3]{19+9\sqrt[3]{29+16\cdot 6}}} = \cdots \quad (12)$$

establecemos la identidad

$$3 = \sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{19 + \cdots \sqrt[3]{(5 + 5(n-1) + (n-1)^2) + n^2\sqrt[3]{(n+2)^3}}}} \quad \forall n \geq 2$$

que puede probarse por inducción fácilmemte, ya que

$$(n+2)^3 = 5 + 5n + n^2 + (n+1)^2(n+3)$$

Ahora probaremos que la sucesión

$$\tilde{\gamma}_n = \sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{19 + 9\sqrt[3]{29 + \cdots + (n-1)^2\sqrt[3]{(5 + 5(n-1) + (n-1)^2) + n^2}}}}$$

converge a 3 cuando $n \to \infty$ y para ello encontraremos dos sucesiones $\{c_n\}$ y $\{C_n\}$ tales que

$$c_n \leq \tilde{\gamma}_n \leq C_n \quad y \quad \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} C_n = 3$$

Tomamos

$$C_n = \sqrt[3]{11 + 4\sqrt[3]{19 + 9\sqrt[3]{29 + \cdots \sqrt[3]{(5 + 5(n-1) + (n-1)^2) + n^2\sqrt[3]{(n+2)^3}}}}}$$

la cual cumple $\tilde{\gamma}_n \leq C_n$ y $\{C_n\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$.
Para determinar $\{c_n\}$ aplicaremos la siguiente desigualdad

$$\sqrt[3]{x + my} < \sqrt[3]{m}\sqrt[3]{x+y} \quad \forall m > 1, \forall x, y > 1 \quad (13)$$

sobre la sucesión $\{C_n\}$ de dentro hacia fuera. Razonando como en la sección anterior, pero tomando ahora en la primera aplicación de (13) $m_1 = n+2 > 1$,

$x_1 = 5 + 5(n-1) + (n-1)^2 > 1$, $y_1 = n^2 > 1$. En la segunda aplicación de (13) tomamos $m_2 = \sqrt[3]{n+2} > 1$, $x_2 = 5 + 5(n-2) + 5(n-2)^2 > 1$, $y_2 = (n-1)^2\sqrt[3]{(5 + 5(n-1) + (n-1)^2) + n^2} > 1$. Al cabo de $n-1$ aplicaciones de (13) sobre $\{C_n\}$ obtendremos

$$C_n \leq \sqrt[3^{n-1}]{n+2}\,\tilde{\gamma}_n$$

por lo que bastará tomar

$$c_n = \frac{C_n}{\sqrt[3^{n-1}]{n+2}}$$

que satisface las condiciones deseadas $c_n \leq \tilde{\gamma}_n$ y $\{c_n\} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 3$, ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3^{n-1}]{n+2}}$$

En general, para $k \in N$ arbitrario, pero fijo se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} \xi_n & = n^2\sqrt[3]{p_3(n) + (n+1)^2\sqrt[3]{p_3(n+1) + (n+2)^2\sqrt[3]{p_3(n+2) + \ldots}}} \\ \xi_n & = n^2(n+k) \\ p_3(m) & = (k^3 - k - 1) + (3k^2 - 2k - 3)m + (2k-3)m^2\ , \quad m \geq 1 \end{array}\right\}$$

Tomando $n = 1$ se deduce una R.R.I. de cualquier natural mayor que 2

$$k + 1 = \sqrt[3]{p_3(1) + 2^2\sqrt[3]{p_3(2) + 3^2\sqrt[3]{p_3(3) + \ldots}}}$$

$$p_3(m) = (k^3 - k - 1) + (3k^2 - 2k - 3)m + (2k-3)m^2\ , \quad m \geq 1$$

3 Representación a través de raíces i-ésimas

Como se señaló al principio terminaremos el trabajo generalizando los resultados presentados en los apartados anteriores. Para ello consideraremos la identidad algebraica

$$n^{i-1}(n+2) = n^{i-1}\sqrt[i]{[(n+2)^i - (n+1)^{i-1}(n+3)] + (n+1)^{i-1}(n+3)}$$

siendo $i \in N$ arbitrario, pero fijo. Llamando $\varphi_n = n^{i-1}(n+2)$, la última igualdad se puede escribir

$$\varphi_n = n^{i-1}\sqrt[i]{f(n) + (n+1)^{i-1}\sqrt[i]{f(n+1) + (n+2)^{i-1}\sqrt[i]{f(n+2) + \ldots}}}$$

donde $f(n) = (n+2)^i - (n+1)^{i-1}(n+3)$. Haciendo $n = 1$, tenemos la siguiente R.R.I. general del número 3

$$3 = \sqrt[i]{(3^i - 2^{i-1}\cdot 4) + 2^{i-1}\sqrt[i]{(4^i - 3^{i-1}\cdot 5) + 3^{i-1}\sqrt[i]{(5^i - 4^{i-1}\cdot 6) + \ldots}}}$$

La justificación rigurosa del paso al límite efectuado en la representación anterior puede realizarse del mismo modo que se ha hecho en las secciones anteriores.

En general, fijando los índices $i, k \in N$ se tiene

$$\left.\begin{array}{ll} \varphi_n & = n^{i-1}\sqrt[i]{p_i(n) + (n+1)^{i-1}\sqrt[i]{p_i(n+1) + (n+2)^{i-1}\sqrt[i]{p_i(n+2) + \ldots}}} \\ \varphi_n & = n^{i-1}(n+k) \\ p_i(m) & = (m+k)^i - (m+1)^{i-1}(m+k+1)\ , \quad m \geq 1 \end{array}\right\}$$

Observemos para finalizar que los resultados aquí expuestos pueden extenderse sin pérdida de generalidad para los números reales.

Bibliografía

[1] CORTÉS LÓPEZ, J.C. Y ALEDO SÁNCHEZ J.A., **Cálculo geométrico del límite de ciertas sucesiones recurrentes**. Aparecerá en las IX J.A.E.M. (Lugo, septiembre 1999).

Iterando $4x(1-x)$ de forma exacta

Nicolás Rosillo Fernández

C.P.R. Valdepeñas
nrosillo@olmo.pntic.mec.es

Abstract

In this article it is shown what happens when a chaotic system (the logistic equation) is iterated in an exact form by a computer algebra system like DERIVE.

1. Introducción

El sistema dinámico discreto $f(x) = 4x(1-x)$ fue propuesto (May, 1976) como modelo de comportamiento de una población en un ecosistema. Dicho sistema está normalizado a la unidad, por lo que $0 \leq x \leq 1$.

Este sistema es caótico en el intervalo [0,1] (Devaney, 1989) y, por ser caótico, el sistema dinámico a estudio es sensible a las condiciones iniciales.

Esta propiedad indica que, partiendo de dos valores iniciales tan cercanos como se desee, las órbitas (el conjunto de resultados obtenidos a través de la iteración repetida de la función) de ambos difieren significativamente. Este hecho tiene una importancia capital en la dinámica caótica, ya que, en una situación real, cualquier error cometido al determinar los datos iniciales generará tal discrepancia entre los valores teóricos calculados para seguir la evolución del sistema y su comportamiento real que hará inútil toda predicción a largo plazo. Desde otro punto de vista, en los casos en que se conoce exactamente el valor inicial, pero se precisa un ordenador para el cálculo de las sucesivas imágenes, la situación es la misma, al introducirse en los cálculos los errores de redondeo (Romero, 1994).

2. Trabajando de forma exacta

Los comentarios anteriores surgen del mismo motivo: la introducción en los cálculos de los errores de redondeo. Dicha introducción puede producirse en dos momentos distintos: al introducir el valor inicial y/o al realizar los cálculos el ordenador con los dígitos de precisión elegidos.

Existe no obstante una vía distinta a la hora de enfocar el problema. Gracias a los programas de cálculo simbólico existe la posibilidad de estudiar el problema de forma exacta. Además, se supone el conocimiento exacto del valor inicial. Y así se hace a continuación.

Todos los resultados descritos a continuación se han obtenido usando el programa DERIVE para Windows.

Se introduce en el programa la orden que permite obtener los valores provenientes de iterar una expresión un número determinado de veces, partiendo de un valor inicial dado. Si se desean obtener las diez primeras iteraciones, partiendo del valor inicial 0.6, ha de introducirse en el programa:

ITERATES (4·x·(1 - x), x, 0.6, 10)

pulsando Simplificar/Normal el resultado aparece de forma exacta.

$$\left[\frac{3}{5}, \frac{24}{25}, \frac{96}{625}, \frac{203136}{390625}, \frac{152343062016}{152587890625}, \frac{14919175985671 2062976}{23283064365386962890625},\right.$$

$$\frac{1380553266528015589278381439008362484009 3696}{5421010862427522170037264004349708557128906 25},$$

2917360608734421304103284077631638266288731796693771025163698785815940
2938735877055718769921841343055614194546663891930218803771879265696043
3070095895764238336
1486368179321289062 5,

30889011980229711491324980182755733589357567762329987088974081430675 95
86361685550944446253863518628003995711160003644362813850237034701685 91
97417450475112329679228211553508384402848145569241864849722639089340 80
80316242705797150750347228822656054729394614966359699509894683194669 36
842071232067074647309921913303151804416
5300377705807477468624711036682128906 25,

6853984314004718119265152257999585713791291575491285143696211041775092
7458340731200206743290965315462933837376471534600406894271518333206278
8976567404283850988157615245252916228128810975400547231503796006938331
3850701183049361748904004278033615116032558361014534127280952253026604
5882483759867458146727563347037679190604358979862575378236152087943812
8616482959208469148126079231878137749520407426643526294144655436506391
5354416724014063690720949703992749800442043699955473354125353992140135
4765414217260588507120031686823003222742297563699265350215337206058336
2012027995224430224297569053415073804454326436030441307780773914532931
5166286460036129274335518469686573264990081533198917895788326859474182
2012027995224430224297569053415073804454326436030441307780773914532931
5166286460036129274335518469686573264990081533198917895788326859474182

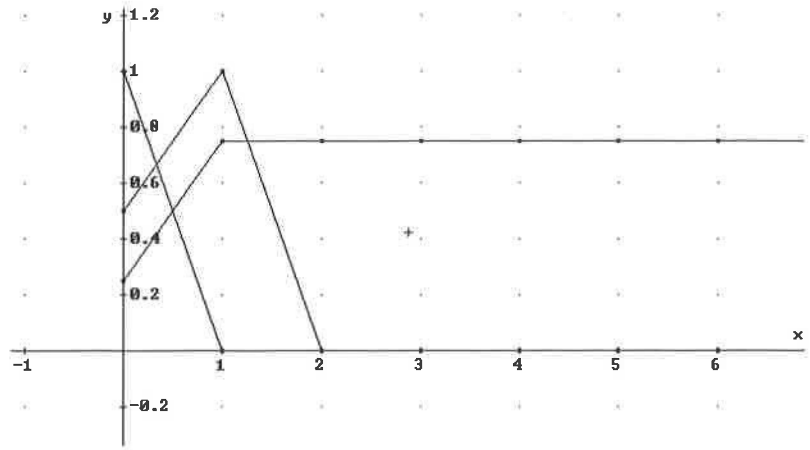
$$\left.\frac{31595776}{12890625}\right]$$

Se ha omitido la representación de la décima iteración.

Como se observa en la órbita obtenida de forma exacta, la fracción que representa cada iteración tiene numerador y denominador mayores que la fracción correspondiente a la iteración anterior.

¿Ocurre siempre así? No siempre. Existen cinco valores para los que este hecho no ocurre. A saber: 0, 1, 1/2, 1/4 y 3/4.

Los tres primeros valores, como puede observarse en la gráfica que sigue, conducen a 0 (uno de los dos puntos fijos del sistema a estudio) al ser iterados. Por ser la función a



estudio simétrica con respecto a $x=1/2$, los puntos situados a igual distancia de este eje de simetría conducen a las mismas órbitas, por tener las mismas imágenes al ser iterados. 1/4 y 3/4 conducen a 3/4, como se observa también en la gráfica, que es el segundo punto fijo del sistema.

Al resto de los valores racionales introducidos les ocurre lo siguiente:

3. Proposición

Iterando la función $4x(1-x)$, los resultados obtenidos partiendo de una fracción irreducible distinta de 0, 1, 1/2, 1/4 y 3/4 son a su vez fracciones, que en su forma irreducible están formadas por numeradores mayores o iguales que los obtenidos en la iteración anterior y denominadores estrictamente mayores.

Demostración. Sea el valor inicial del que se parte p/q, con $p,q\in\mathbb{N}$ y que al tener que estar comprendido en el intervalo (0, 1) debe cumplir $p<q$.

La iteración del valor inicial es entonces:

$$4\frac{p}{q}\left(1-\frac{p}{q}\right)=4\frac{p}{q}\left(\frac{q-p}{q}\right)$$

Se demostrará que si p/q es irreducible, $1-p/q$ también lo es. Por tanto:

$$m.c.d.(p,q)=1\Rightarrow m.c.d.(q-p,q)=1$$

Supóngase que $m.c.d.(q-p,q)=d\neq 1$. Eso significa que

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{q-p}{d}=m\in\mathbb{N}\ \text{y}\ \dfrac{q}{d}=n\in\mathbb{N}\Rightarrow \text{d es divisor de q.}\\[2ex] \dfrac{q-p}{d}=\dfrac{q}{d}-\dfrac{p}{d}\Rightarrow n-\dfrac{p}{d}=m\Rightarrow n-m=\dfrac{p}{d}\Rightarrow \text{d es divisor de p}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{d}=1.$$

Por tanto $\frac{p}{q}\cdot\left(\frac{q-p}{q}\right)$ es irreducible y cumple $p\cdot(q-p)\geq p$ y $q^2>q$.

El 4 que aparece en el sistema dinámico no influye de forma significativa en lo anteriormente demostrado puesto que:

a) Si el denominador es $q\neq 0\,(\mathrm{mod}\,2)$, cuadruplicaría a $p\cdot(q-p)$.

b) Si el denominador es $q=2\cdot k$ con $k\geq 3$, $k\neq 0\,(\mathrm{mod}\,2)$

$4\frac{p}{2\cdot k}\cdot\left(\frac{q-p}{2\cdot k}\right)=\frac{p\cdot(q-p)}{k^2}$, que cumple $k^2>q$, y en la siguiente iteración se produciría el caso a).

c) Si el denominador es $q=2^2\cdot k$ con $k\geq 3$, $k\neq 0\,(\mathrm{mod}\,2)$

$4\frac{p}{2^2\cdot k}\cdot\left(\frac{q-p}{2^2\cdot k}\right)=\frac{p\cdot(q-p)}{2^2\cdot k^2}$, que cumple $2^2\cdot k^2>2^2\cdot k$, y en las sucesivas iteraciones se mantendría en el denominador el factor 2^2.

d) Si el denominador es $q=2^n\cdot k$ con $n>2$ y $k\neq 0$ (mod 2)

$4\frac{p}{2^n\cdot k}\cdot\left(\frac{q-p}{2^n\cdot k}\right)=\frac{p\cdot(q-p)}{2^{2n-2}\cdot k^2}$, que cumple $2^{2n-2}\cdot k^2>2^n\cdot k$ puesto que $2n-2>n$ si $n>2$ y $k^2\geq k$. Además $2n-2\geq 4$, lo que asegura que en la siguiente iteración el exponente al que está elevado el factor 2 seguirá creciendo.

El único caso en que el numerador se mantiene igual tras una iteración es $p=q-1$, ya que:

$\frac{q-1}{q}\left(1-\frac{q-1}{q}\right)=\frac{q-1}{q}\cdot\frac{1}{q}=\frac{q-1}{q^2}$, dando por supuesto que el denominador es del tipo descrito en los apartados b), c) o d), lo que produciría la simplificación del 4 de la parte superior de la fracción.

4. ¿Hasta dónde se puede llegar?

En principio, la iteración del sistema dinámico a estudio sólo depende del tiempo que se esté dispuesto a esperar. Si se observa la instrucción dada para la obtención de la órbita de forma exacta, se comprobará que el número de iteraciones introducido es muy bajo. El ordenador utilizado (Pentium 133 con 32 Mb de RAM) no permite ir mucho más allá en el estudio de la órbita en un tiempo razonable. Parece que el problema no es el programa utilizado (DERIVE para Windows en castellano V.4.09), pues con MATHEMATICA 3.0 se han obtenido tiempos muy similares en el cálculo de órbitas, como se observa en la tabla siguiente.

Nº ITER.	DERIVE 4.09	MATHEMATICA 3.0
10	0.1 seg.	1.33 seg.
11	0.1 seg.	1.29 seg.
12	0.4 seg.	.87 seg.
13	1.6 seg.	2.22 seg.
14	6.1 seg.	7.86 seg.
15	24.0 seg.	30.42 seg.
16	99.2 seg.	123.8 seg.
17	419.7 seg.	494.83 seg.
18	1766.2 seg.	1941.6 seg.

Suponiendo que no existiera el problema de tiempo de cálculo antes mencionado, puede irse algo más allá, observando la manera en que crece el número de dígitos de numerador y denominador. Si se factorizan los distintos elementos de la órbita, se observa la aparición de número primos cada vez mayores en el numerador. Así, para las siete primeras iteraciones se obtiene:

$$\frac{2^3\cdot 3}{5^2}, \frac{2^5\cdot 3}{5^4}, \frac{2^7\cdot 3\cdot 23^2}{5^8}, \frac{2^9\cdot 3\cdot 23^2\cdot 433^2}{5^{16}}, \frac{2^{11}\cdot 3\cdot 23^2\cdot 433^2\cdot 15647^2}{5^{32}},$$

$$\frac{2^{13}\cdot 3\cdot 23^2\cdot 433^2\cdot 577^2\cdot 15647^2\cdot 263601791^2}{5^{64}},$$

$$\frac{2^{15}\cdot 3\cdot 23^2\cdot 433^2\cdot 577^2\cdot 769^2\cdot 15647^2\cdot 1278721^2\cdot 263601791^2\cdot 23374177646977^2}{5^{128}}$$

El denominador del ejemplo es de la forma $5^{(2^n)}$, con n indicando la iteración. Se observa que para n=8 se sobrepasa 10^{100}, número conocido como gugol, cifra superior al número de partículas elementales (protones, neutrones y electrones) en el universo observable (aproximadamente 10^{80} partículas).

Por último, comentar que puede comprobarse fácilmente que en la iteración 333 se habrá sobrepasado el gugolple, $10^{(10^{100})}$, del que Carl Sagan (1982) comentaba lo siguiente: "Podríamos intentar escribir un gugolple, pero es una ambición sin salida. Una hoja de papel lo suficientemente grande para poder escribir en ella explícitamente todos los ceros de un gugolple no se podría meter dentro del universo conocido".

5. Conclusiones

Si en un sistema como el estudiado la imposibilidad de conocer de forma exacta el valor inicial produce la invalidación del comportamiento a largo plazo del sistema que se estudia, y el supuesto conocimiento exacto del valor inicial impide la realización explícita de los cálculos, el conocimiento de la evolución de este sistema caótico no es posible más allá de lo meramente aproximativo.

Una segunda conclusión es que si las fracciones obtenidas no se pueden simplificar, ningún número racional puede tener una órbita periódica, ni puede ser preperiódico.

Curiosamente, todas las excepciones son periódicas (0, 1/4 y 3/4), o preperiódicas (1/2 y 1).

5. Bibliografía

[1] DEVANEY, R. (1989). *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Reading, Massachussetts, Addison-Wesley.

[2] DEVANEY, R. (1992). *A First Course in Chaotic Dynamical Systems*. Reading, Massachussetts, Addison-Wesley.

[3] MARTÍN, M.A., MORÁN, M. y REYES, M. (1995). *Iniciación al Caos*. Madrid, Ed. Síntesis.

[4] MAY, R. (1976). "Simple mathematical models with very complicated dynamics". *Nature*. 261, 459-467.

[5] PEITGEN, H.O., JÜRGENS, H. y SAUPE, D. (1992). *Chaos and Fractals. New frontiers of Science*. New York, Springer-Verlag.

[6] ROMERO, J.L. (1994). "Introducción al Caos". *Epsilon*, 10 (1), nº 28, 55-80.

[7] SAGAN, C. (1982). *Cosmos*. Primera Edición, Barcelona, Ed. Planeta.

Sobre las ideas y conceptos de cálculo de probabilidades en los adolescentes

Juan José Prieto Martínez

I. E. S. Antonio de Nebrija. Madrid.
Departamento de Estadística e Investigación Operativa.
Facultad de C.C. Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.
e-mail: jjprieto@eucmos.sim.ucm.es

Abstract

Which are the ideas and concepts that teenagers learn in secondary schools, about of calculus probability?. The research has been performed with 17 and 18 years old students from 10 secondary schools from the centre of Madrid. They are getting ready to get into the University (Selectividad L.O.G.S.E.). The test consists of 8 questions about what they have learned. The research results show which the clearest probability concepts for the teenager are and which the least clear for them are. Therefore, the research gives an idea to the teacher of which probability concepts should be treated more carefully in class.

1. Introducción

A pesar que hay muchas investigaciones, todavía es preciso completar en muchos aspectos nuestros conocimientos del desarrollo de conceptos en este campo. La dificultad de construir modelos se encuentra en que si se intenta los descubrimientos realizados por psicólogos y los educadores matemáticos, el modelo resultante corre el riesgo de ser tan complicado que puede resultar en la práctica de poca o ninguna utilidad. Por otro lado, si se construye un modelo simple, se corre el riesgo de sobresimplificar y dejar fuera del modelo importantes perspectivas. Shaughnessy (ver [7]) afirma que la historia de la investigación en este campo parece haber sido la de simplificar primero, teniendo en cuenta la experiencia, y los ajustes a través de modelos después. El enfoque de investigación de Fischbein (ver [3]) se basa en la iteración entre intuiciones y matemáticas. Este autor entiende por intuición el conocimiento y el razonamiento inmediato, aceptando la formulación de Bruner (ver [1]) de que la intuición implica comprender el significado de la

estructura de un problema sin necesidad explícita del pensamiento analítico y del lenguaje oral y escrito (científico). Establece que la compatibilidad entre la intuición y la estructura lógica del conocimiento es una componente esencial de la comprensión, y una precondición de la utilización independiente y efectiva de ese conocimiento en diversos contextos.

Engel (ver [2]) admite una intuición natural sobre la que se puede construir el pensamiento axiomático pero niega la existencia de una intuición probabilística análoga a partir de la experiencia. Fischbein, Barbat y Minzat (ver [4]) explican la contradicción entre el hallazgo de los psicólogos de la emergencia espontánea de una intuición probabilística y la negación de un matemático como Engel de tal intuición, en base a que el objeto de investigación de psicólogos y matemáticos es distinto. Los primeros han estudiado fundamentalmente el concepto inicial de la probabilidad y su cuantificación mientras que los segundos tratan con formación de conceptos, que no surgen espontáneamente sino mediante definiciones, teoremas y expresiones cuantitativas de las mismas. El objetivo principal de este trabajo es establecer una categorización de las ideas y conceptos probabilísticos, y comprobar cuál es el manejo del lenguaje probabilístico mas básico de los estudiantes en base a su abstracción intuitiva. Se pretende contribuir al esclarecimiento del problema acerca de la existencia o no de la intuición natural probabilística mediante las preguntas del adolescente en el mismo momento de la prueba. Ayudar en todo momento al estudiante, no ponerle nervioso para probar que justamente el conocimiento profundo de la materia hace posible un éxito.

2. Diseño de la prueba

El método de medición es realizado a 300 alumnos de segundo curso de bachillerato en la modalidad de ciencias sociales pertenecientes a 10 institutos de educación secundaria de Madrid centro, los cuales han sido encuestados a finales del curso académico 97/98. Todos han superado el segundo curso de bachillerato, por lo que esta prueba es una puesta a punto de cara al examen de selectividad. La prueba trata de un estudio de 8 ejercicios de teoría de probabilidades. Los ejercicios con soluciones se encuentran en un anexo al final de este trabajo.

La amplísima variedad de conceptos, de muy distinto nivel de dificultad que conforma el cuestionario, y que pretende cubrir todos los contenidos del currículo de probabilidades de Bachillerato, parece que dificulta el estudio de la comprensión probabilística de los alumnos. Las pocas investigaciones sobre la comprensión probabilística de los adolescentes, hacen que este artículo sea un estudio exploratorio, aunque su validez puede que no esté suficientemente contrastada en el campo del pensamiento probabilístico.

Debido a la cantidad de conceptos existentes en el cálculo de probabilidades de Bachillerato, solamente serán considerados para evaluar mediante la prueba los siguientes conceptos:

- El lenguaje escrito probabilístico.
- Regla de Laplace. Propiedades de la definición clásica.
- Definición de sucesos dependientes e independientes. (Ejercicio 1).
- Concepto de probabilidad condicionada. (Ejercicio 2).
- Concepto de esperanza matemática. (Ejercicio 3).
- Concepto de variable aleatoria continua. (Ejercicio 4).
- Concepto de distribución binomial. (Ejercicio 5).
- Concepto de distribución normal y manejo de su tabla. (Ejercicio 6).
- Concepto de intervalo de confianza para la media. (Ejercicio 7).
- Concepto de región de aceptación y región crítica en un contraste de hipótesis. (Ejercicio 8).

A continuación se presenta la información resumida en gráficos de los resultados obtenidos en la prueba de algunos de los conceptos estudiados (de los ejercicios 2, 5 y 7).

Resultado referente al concepto de probabilidad condicionada.

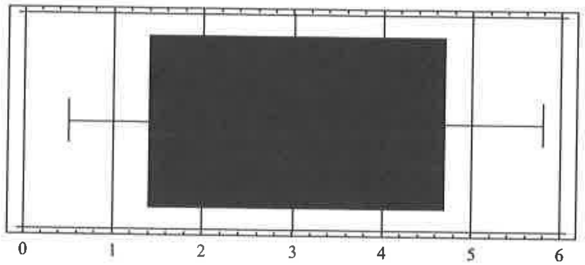


Gráfico 1.

Resultado referente al concepto de distribución binomial.

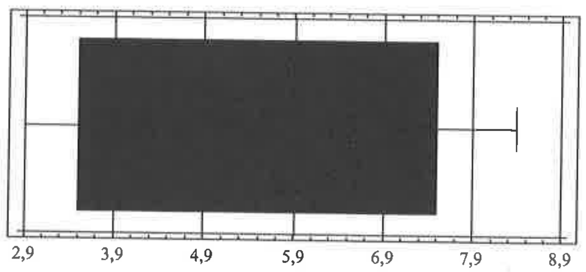


Gráfico 2.

Resultado referente al concepto de intervalo de confianza.

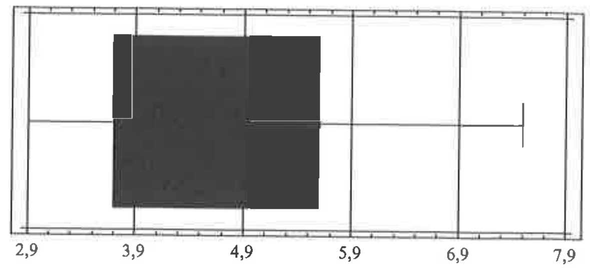


Gráfico 3.

3. Discusión y conclusiones sobre resultados

A continuación se presentan tres puntos fundamentales en los que se basa el conocimiento de las ideas y conceptos probabilísticos que constituyen el pensamiento sobre la probabilidad de nuestros estudiantes. El alumno debe dominarlos para comprender y aplicar la teoría elemental de probabilidades, y el profesor debe reconocerlos al ser motivo de dificultades muy específicas en el aprendizaje. Estos son:

- El lenguaje escrito del azar.
- Conceptos de cálculo de probabilidades (en este trabajo son los presentados en el apartado anterior).
- Cálculo de probabilidades (los que se deben realizar en la prueba).

Nuestros estudiantes tienen distintos grados de conocimiento sobre las teoría de probabilidades. Las palabras, incertidumbre, aleatoriedad, probabilidad se generan en la vida cotidiana de manera usual y, aunque se admite todas ellas en el lenguaje cotidiano, en realidad hay una gran confusión en su utilización. Existe un gran número de alumnos que confunden **muy probable** con **siempre sucede**, y confunden **improbable** con **no puede suceder**. Esto se debe a que en el lenguaje coloquial las palabras **posible** y **probable** están muy mezclados al ser sinónimos ya que en el mismo diccionario de la Real Academia Española, identifica **imposible** con **no posible**.

La evaluación del proceso de enseñanza-aprendizaje de un alumno por parte del profesor debe tener en cuenta: la observación directa del alumno en clase, un control de su cuaderno de trabajo, la participación del alumno en el trabajo colectivo, pero sobre todo es fundamental la realización de algunas pruebas de evaluación que respondan a los objetivos formulados al principio del curso. En este sentido, los criterios de evaluación deben coincidir con la formulación de los objetivos. El profesor debe elaborar varias pruebas que sirvan para valorar el grado de consecución de los objetivos en relación con el aprendizaje de procedimientos, actitudes y fundamentalmente de *conceptos*, sobre todo a nivel de segundo de bachillerato.

Aquí se pretende saber si los adolescentes han superado los objetivos, estos últimos a través del conocimiento, comprensión, aplicación y cálculo de los conceptos ligados a los contenidos presentados en el apartado anterior. Mediante la corrección y supervisión con rigor de cada una de las pruebas se ha señalado cuales son los objetivos en concreto que los alumnos muestreados no han superado. Antes quisiera afirmar, a mi modesta forma de pensar, que:

"La regla de Laplace y sus propiedades son producto del pensamiento intuitivo primario del ser humano, es decir, existe una intuición natural estadística sobre la que se puede construir el pensamiento de probabilidad".

Nuestros adolescentes dan el valor de uno a la probabilidad de un suceso seguro y el valor de cero a la probabilidad del suceso imposible, y por tanto tienen una escala aproximada de probabilidad con los mismos límites inferior y superior como mandan los axiomas probabilísticos. Ahora bien, tienen dificultades bastante evidentes para asignar probabilidades a otros sucesos compuestos, asociando incluso valores mayores que uno o incluso negativos. Utilizan de manera muy contradictoria la definición clásica de probabilidad, unas veces correctamente, otras veces incorrectamente, lo que da sensación de un dominio muy inestable. Nuestros estudiantes tienen dificultades para interpretar la vida real de una manera probabilística, es decir, les parece bastante difícil asociar un modelo matemático-probabilístico al problema planteado. Esto se ha verificado en los tres primeros ejercicios. Tienden a explicar fenómenos aleatorios con razonamientos vagos, causales y con argumentos y estrategias que se corresponden a fenómenos no expresamente del azar. Un resultado asociado y esencial que se desprende de la investigación en relación a cómo conciben el azar nuestros adolescentes, es la creencia sistemática y latente acerca de que todos los sucesos de una experiencia aleatoria tienen la misma posibilidad de ocurrir. Surge así la idea abstracta de "equiprobabilidad del azar" que se estudia sin tener en cuenta las características concretas del fenómeno aleatorio en estudio. Una idea latente es aquella que se manifiesta o no en función del contexto de la tarea y puede coexistir con ideas probabilísticas mas elaboradas.

Sobre la forma de asignación de probabilidades a los sucesos, se detecta la existencia de destrezas de cálculo debido a:

- Una mal utilización de conceptos claves (definición de fenómeno aleatorio, de suceso aleatorio, regla de Laplace, etc.).
- No saben utilizar el lenguaje apropiado, y analizar las situaciones aleatorias.
- No saben utilizar estrategias como el planteamiento de un problema a partir de un diagrama de árbol.

- La ley de suma de probabilidades es de difícil aplicación sobre todo por la dificultad de hacer el inventario de todos los sucesos elementales asociados a un suceso compuesto.
- Hay una aceptación intuitiva del cálculo de la probabilidad condicionada, y la comprensión del concepto de independencia estadística no se ve perturbada significativamente por la confusión con la idea de independencia física (relación directa).
- No manejan con soltura los conceptos de dependencia e independencia de sucesos.
- La probabilidad condicionada como mecanismo básico de asignar probabilidades en una fórmula resulta muy difícil y nada intuitiva; en el origen de dicha dificultad está no sólo la complejidad computacional que dicha definición comporta sino también el razonamiento causal abusivo de los componentes.
- Definir perfectamente una variable aleatoria, la cual se distribuye según una distribución de probabilidad, es bastante complicado por parte de nuestros estudiantes. No saben distinguir entre variable y los posibles valores que toma dicha variable.
- La dificultad de aplicación de las leyes de suma y multiplicación de probabilidades influyen en la dificultad de la ley binomial.
- Existe también un problema en la identificación del planteamiento del ejercicio a un modelo probabilístico binomial, sin saber perfectamente el significado de parámetros de una distribución.
- Hay grandes dificultades, en un tanto por ciento muy elevado, en la utilización de la tabla de la normal:
  1. No tipifican bien, sin saber cuál es el concepto que encierra la tipificación.
  2. No comprenden la simetría de la distribución normal.
  3. Poco entendimiento en el cálculo de áreas a través de la tabla, sin conocer que las áreas tipificadas y sin tipificar son semejantes.
  4. No saben aproximar una distribución binomial por una normal.

- No conocen verdaderamente el significado de valor esperado de una variable aleatoria.
- El cálculo de probabilidades a partir de una función de densidad y su correcto entendimiento puede ser una verdadera exigencia.

Por consiguiente, principalmente se ha detectado dos tipos de causas a las que se enfrentan nuestros estudiantes a la hora de resolver problemas de cálculo de probabilidades:

a) Las que se tienen de la naturaleza del pensamiento intuitivo de los alumnos, caracterizándose por centrarse sólo en aspectos parciales. Pretenden tener una "receta" o algoritmo probabilístico-matemático que les asegure el éxito en la prueba. "Dime como se hace cada problema-tipo, que yo me encargo de estudiarlos".

b) El insuficiente desarrollo de operaciones generales de conocimiento humano, como son los de conocimiento teórico mediante esquemas y resúmenes, y de conocimiento práctico, a través de la realización minuciosa de ejercicios y problemas resueltos. (Piaget e Inhelder (ver [5]). La discusión y debate de temas específicos en el aula desarrollados individualmente, justamente mediante esquemas y ejemplos, estimulan el aprendizaje del adolescente. Ver Prieto [6].

Referencias

[1] BRUNER, J. The process of education. Cambridge, M.A: Harvard University Press, 1965.

[2] ENGEL, A. Teaching probability in intermediate grades. International. Journal of Mathematical Educational, 2 (3), 15-25, 1971.

[3] Fischbein. Intuition in science and mathematics. An educational approach. Dordrecht: Reidel, 1987.

[4] FISCHBEIN, E., BARBAT, I. y MINZAT, I. Primary and secondary intuitions in the instruction of probability. Educational Studies in Mathematics, 4, 264-280, 1971.

[5] PIAGET, J. e INHELDER, B. La genèse de l'idée de basard chez l'enfant. Paris: P.U.F., 1951.

[6] PRIETO MARTÍNEZ, J.J. Una reflexión sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos en los adolescentes. Bol. Soc. "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas. Nº52, 74-78,1999.

[7] SHAUGHNESSY, J.M. Research in probability and statistics: reflections and directions. En D.A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp 465-494). New York: McMillan Publishing, 1992.

Anexo: problemas que ilustran el contenido de este artículo

Problema 1

Cuatro fichas están marcadas con las letras A, B, C, y ABC; se toma una de ellas al azar. Se pregunta si los tres sucesos consistentes en la presencia de la letra A, la letra B o la letra C sobre la ficha son o no independientes.

Solución.

$$p(A)=p(B)=p(C)=0{,}5.\ p(A\cap B)=p(A\cap C)=p(B\cap C)=0{,}25.$$

Se verifica la condición de independencia dos a dos, pero

$$p(A\cap B\cap C)=0{,}25\neq 0{,}5^3$$

y por tanto no son independientes.

Problema 2

Se aplica una prueba médica T para detectar la presencia de alergia de primavera a los estudiantes de 10 institutos de Vigo. Se admite, por estudios realizados, que la proporción de individuos con alergia es del 14%. En tales estudios se ha establecido que aproximadamente el 27% de los individuos dan positivos (T +) y el 5% de estudiantes con alergia dan negativo (T -). Calcular:

1. La proporción de estudiantes que tienen alergia y dan positivo.

2. La proporción de estudiantes que tienen alergia y dan negativo.

Solución.

Sea:

A= *"La persona tiene alergia". p(A)=0,14.*
NA= *"La persona no tiene alergia". p(NA)=0,86.*
$T+$= *"El test da positivo. p(T+)=0,27.*
p(T-/A)=0,05; p(T+/A)=0,95.

Primero,

$$p(T+/A)=\frac{p(A\cap T+)}{p(A)}\Rightarrow p(A\cap T+)=p(T+/A)p(A)=(0{,}95)(0{,}14)=0{,}133.$$

Segundo,

$$p(T-/A)=\frac{p(A\cap T-)}{p(A)}\Rightarrow p(A\cap T-)=p(T-/A)p(A)=(0{,}05)(0{,}14)=0{,}007.$$

Problema 3

En ocasiones, algunas líneas aéreas venden más billetes de los disponibles en un vuelo. Una compañía ha vendido 255 billetes que corresponden a un avión con 250 plazas. Sea X la variable aleatoria que corresponde al número de pasajeros que se presentan en un aeropuerto para viajar en el avión. La distribución de X es:

Número de personas	248	249	250	251	252	253	254	255
Probabilidad	0,04	0,1	0,14	0,3	0,22	0,18	0,08	0,03

a) **Calcular la probabilidad de que todos los pasajeros que llegan a coger el avión tengan plaza.**
b) **Obtener la probabilidad de que algunos de los pasajeros que se presentan en el aeropuerto se quede sin plaza.**
c) **Calcular el número esperado de viajeros que aparecen en el aeropuerto.**

Solución.

Sea X= *"Número de pasajeros que llegan al aeropuerto".*

a) Hay que calcular:

$$p(X \le 250) = p(X = 248) + p(X = 249) + p(X = 250) = 0{,}04 + 0{,}1 + 0{,}14 = 0{,}28..$$

b) Sea A= *"Todos los pasajeros tienen plaza".* Hay que calcular *1-p(A),* siendo:

$$p(A) = p(X \le 250) = 0{,}28.$$

Luego, $p(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}28 = 0{,}72.$

c) $E(X) = \sum_i x_i p(x_i) = 248(0{,}04){+}249(0{,}1){+}250(0{,}14){+}251(0{,}3){+}252(0{,}22){+}$

$$253(0{,}18){+}254(0{,}08){+}255(0{,}03){=}$$

$$9{,}92{+}24{,}9{+}35{+}75{,}3{+}11{,}44{+}45{,}54{+}20{,}32{+}7{,}65{=}230{,}07.$$

Problema 4

Sea una variable aleatoria X con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} ae^{-2x} & si \quad x \ge 0 \\ o & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Se pide:
a) Qué valor debe tomar "a" para que f(x) sea una función de densidad?.
b) Suponiendo que se cumple el apartado anterior, halla la función de distribución F(x).
c) Determinar la esperanza y la varianza de la distribución.
d) Hallar la probabilidad de que X tome un valor mayor que 1.

Solución.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)d(x) = 1; \int_0^{+\infty} ae^{-2x} d(x) = 1; \text{ se deduce que a=2.}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x} & si \quad x \ge 0 \\ o & si \quad x < 0 \end{cases};$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2x} & si \quad x \ge 0 \\ o & si \quad x < 0 \end{cases}.$$

$$E(X) = \int_0^{+\infty} xf(x)d(x) = \frac{1}{2}; Var(X) = \int_0^{+\infty} (x - 1/2)^2 f(x)dx = 1/4.$$

$$P(X > 1) = \int_1^{+\infty} f(x)d(x) = \int_{-1}^{+\infty} 2e^{-2x} dx = e^{-2}.$$

Problema 5

La probabilidad de encontrar una persona zurda es de 0,1. En una clase de 20 alumnos hay tres pupitres para zurdos. Calcular la probabilidad de que no haya suficientes pupitres.

Solución.

Sea $X_i = 1$ *si el alumno i-ésimo es zurdo;* $X_i = 0$ *en caso contrario. p(X =1)=0,1.*

Sea $Y = \sum_{i=1}^{20} X_i$ una variable aleatoria que se distribuye según una binomial de parámetros $n=20$ y $p=0.1$. Entonces

$$p(Y=j) = \binom{20}{j} 0{,}1^j (1-0{,}1)^{20-j}.$$

La probabilidad pedida es:

$p(Y>3)=1-p(Y\leq 3)=1-[p(Y=0)+p(Y=1)+p(Y=2)+p(Y=3)] =1-0{,}1215-0{,}2702-0{,}2852-0{,}1901 =0{,}1332.$

Problema 6

Un fabricante de bolsas de plástico asegura que tienen una resistencia a la rotura, en Kg., que se distribuye como una normal de parámetros 10 y 1. Calcula la probabilidad de que se rompa una bolsa con 5 Kg. de naranjas y 4 botellas de 1 litro de agua cuyos envases pesan 25 gramos.

Solución.

El peso total es 5+4+4(0,025)=9,1 kg. Entonces

p(que se rompa la bolsa)= $p(X \leq 9{,}1) = p(Z \leq 9{,}1-10) = 1-0{,}8159=0{,}1841.$

Problema 7

En una muestra de tamaño 40, resultó ser la media igual a 63, y la varianza 38. Suponiendo normalidad en la población, se pide:

a) Un intervalo de confianza a un nivel de significación del 95%.

b) El tamaño necesario para que con una confianza del 95%, la duración media estimada no difiera de la real en más de una unidad.

Solución.

Sea X que se distribuye según una $N(\mu, \sqrt{38})$. Se tiene que n=40 y $\bar{x} = 63$.

Se sabe que $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ se distribuye como una $N(0,1)$.

Si $1-\alpha = 0{,}95$ entonces $z_{\alpha/2} = 1{,}96$. Por consiguiente el intervalo es: *(61,08; 64,92).*

El tamaño muestral se calcula igualando a 1 la diferencia máxima entre la media estimada y la media real:

$$1 = 1{,}96 \cdot \frac{6{,}2}{\sqrt{n}} \Rightarrow n = 147{,}6 \approx 148 \text{observaciones}.$$

Problema 8

Una compañía bancaria estudia la oportunidad de comprar un sistema operativo de ordenadores ofrecido por una empresa. La compañía lo compra siempre y cuando los trabajos realizados con el nuevo sistema operativo no supere los 20 minutos. Para ello realizaron una serie de trabajos, n=100, observando que el tiempo promedio es 21, con una cuasivarianza igual a 100. Para un nivel de significación del 1%, ¿debe la compañía bancaria comprar el nuevo sistema operativo?

Solución.

Se tomarán como hipótesis para el contraste: $H_0 : \mu = \mu_0$ frente a $H_1 : \mu > 20.$

Debido al tamaño muestral $n=100>30$ se puede afirmar que $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ se distribuye según una $N(0,1)$.

Región crítica: para el nivel de significación del 1%: $p(z > z_c) = \alpha = 0{,}01 \Rightarrow z_c = 2{,}33.$

Calculando el valor de z correspondiente a $\bar{x} = 21$:

$$\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{21-20}{10/10} = 1.$$

Como la región crítica es el conjunto de valores de z mayores que z_c, el valor crítico no cae en la región crítica con lo cual no se rechaza H_0 a este nivel de significación, es decir, no hay evidencia suficiente en la muestra como para pensar que no se cumple el criterio de funcionamiento y se acepta la hipótesis nula.

Una aplicación de una idea arquimediana

Juan A. Aledo y Juan C. Cortés

Departamento de Matemáticas, Universidad de Castilla-La Mancha, 02071 Albacete

Departamento de Matemáticas, I.E.S. Bonifacio Sotos, 02200 Casas Ibáñez, Albacete

Resumen

In this paper we solve an attractive problem since an original approach, which is not the natural way for obtaining its solution: to approach a circumference by regular polygons inscribed in it. Later we check the validity of this method using integral calculus, and we study a generalization of this problem through numerical methods.

1 Introducción

Es sin duda interesante buscar diferentes enfoques para resolver un mismo problema. En efecto, determinadas soluciones nos embelesan no tanto por el problema que resuelven, sino por la riqueza matemática en que están imbuidas, bien por la originalidad del planteamiento, bien por la amalgama de áreas de la Matemática que convoca. En este sentido encontramos trabajos recientes como por ejemplo [3] y [4], donde se aportan pruebas alternativas a ciertos problemas clásicos, que son más intuitivas, geométricas y cercanas a los alumnos.

En el presente trabajo proponemos el siguiente problema geométrico, donde pensamos tiene lugar la conjunción de una solución original con el uso conjugado de diversas partes de las Matemáticas como son la geometría de

los polígonos, la trigonometría, el cálculo de límites, el uso de funciones equivalentes, el método de inducción, el cálculo integral, la resolución aproximada de ecuaciones...

Problema de la cabra: *Una cabra está atada mediante una cuerda de longitud l en el exterior de una construcción circular de radio r, siendo $l < \pi r$. ¿Cuál es el área máxima que puede pastar la cabra?*

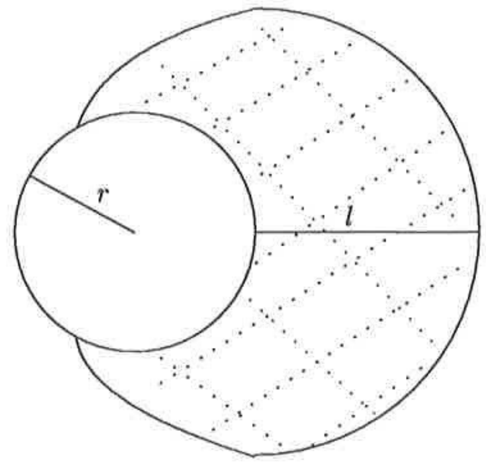


Figura 1: Interpretación geométrica del problema.

El planteamiento de este problema surge del hábito matemático de generalizar las situaciones con las que nos enfrentamos en nuestras clases de Resolución de Problemas. En efecto, el problema anterior pero con un recinto en forma de triángulo equilátero, apareció recientemente en la fase semifinal de la X Olimpiada Matemática de nuestra provincia, y por ejemplo en [1, pg 14, ejercicio 9], encontramos de nuevo el mismo problema con un recinto en forma de cuadrado. Tras resolver estos dos sencillos problemas, nos planteamos qué sucedería si el recinto fuese un círculo.

Antes de continuar con el estudio que nos ocupa, nos gustaría subrayar que la curva que describe la cabra cuando la cuerda está tensada, tiene interés desde el punto de vista de la Tecnología Mecánica para diseñar la forma de los dientes entre los engranajes de una máquina fresadora. Así, y como puede verse en [5, pg 143], los perfiles de los dientes de dichos engranajes deben ser construidos según la envolvente del círculo del engranaje para que se produzca una trasmisión regular del movimiento. Dicha evolvente es precisamente la curva que debe seguir la cabra para pastar el área máxima.

Las características del problema invitan de un modo natural a utilizar el cálculo integral como herramienta de resolución, tal como mostraremos más adelante. No obstante, dado que el problema nace desde y para los alumnos de Bachillerato, este enfoque, que como veremos nos conduce a una integral en coordenadas polares para calcular el área buscada, escapa a los conocimientos de este nivel educativo. Motivados por este inconveniente, nos proponemos utilizar la misma idea que utilizó Arquímedes de Siracusa (287?-212 a. de C.) para calcular π con dos cifras exactas: Inscribir una sucesión de polígonos regulares en una circunferencia, lo que nos permitirá resolver este atractivo problema de un modo elegante.

Efectivamente, la intuición nos sugiere que, fijada una circunferencia C_r de radio r, la sucesión de polígonos regulares $P_r(n)$ inscritos en ésta se aproximará, conforme vaya creciendo el número de lados n, a la circunferencia en cuestión. El siguiente par de límites vienen a confirmar esta intuición.

Mediante un sencillo cálculo trigonométrico puede comprobarse que el lado $\Upsilon_r(n)$ del polígono regular $P_r(n)$ viene dado por

$$\Upsilon_r(n) = 2r \text{ sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Así, si denotamos por $l_r(n)$ y $a_r(n)$ al perímetro y al área respectivamente del polígono regular $P_r(n)$, resultan fácilmente

$$l_r(n) = n\Upsilon_r(n) = 2rn \text{ sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
$$a_r(n) = n\,\frac{r^2}{2} \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$$

Ahora, teniendo en cuenta el conocido límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} l_r(n) = \lim_{n\to\infty} 2r\pi\,\frac{n}{\pi} \text{ sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi r$$

y

$$\lim_{n\to\infty} a_r(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{r^2}{2}\,2\pi\,\frac{n}{2\pi} \text{ sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2$$

que son, respectivamente, la longitud y el área de la circunferencia C_r de radio r.

2 Resolución del problema

Como ya señalábamos, una primera aproximación a nuestro problema parece sugerir como herramienta de resolución algún tipo de integral, quizás en coordenadas polares, que permita calcular el área en la que puede pastar la cabra. Nosotros, inspirados en la idea arquimediana citada en la introducción, proponemos el siguiente método de resolución: Abordar el problema cambiando la construcción circular por otra con forma de polígono regular de n lados inscrito en la circunferencia original, de modo que la cabra esté atada en uno de los vértices. De este modo, puesto que haciendo crecer el número de lados logramos una aproximación de la circunferencia tan buena como deseemos, la solución del problema original será el límite, cuando n tiende a infinito, de la solución del problema alternativo con un polígono regular de n lados.

Supongamos pues que la cabra está atada al vértice de coordenadas $(r, 0)$ de un polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r centrada en el origen de coordenadas. Por simetría respecto al eje de abscisas, bastará con que estudiemos el área a la que tiene acceso la cabra por encima de dicho eje. Este área no es más que una suma de sectores circulares, como puede verse en la figura 2, y por tanto se facilita enormemente su cálculo.

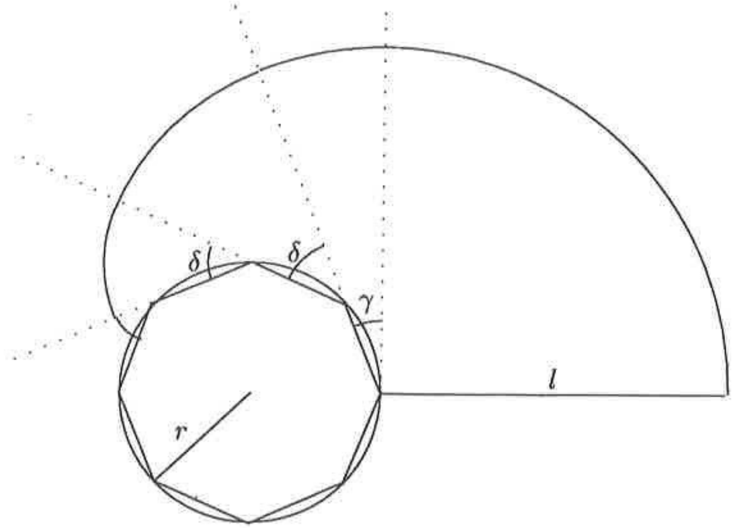


Figura 2: Caso particular de un octógono.

Supondremos que la longitud de la cuerda l es menor que la mitad del perímetro $l_r(n)$ del polígono $P_r(n)$. Nótese que si $l < \pi r$, entonces para n suficientemente grande tendremos que $l < l_r(n)/2$ y por tanto ésta hipótesis no es restrictiva, pues nosotros pretendemos hacer tender n a infinito.

Recordemos que el área de un sector circular de ángulo φ y radio r es $\varphi r^2/2$. Por otra parte denotaremos por $k \equiv k(l,r,n)$ al número de sectores que barre la cabra, siempre considerando sectores en la región de ordenadas positivas, esto es,

$$k = \left[\frac{l}{\Upsilon_r(n)}\right] + 1 = \left[\frac{l}{2r\ \mathrm{sen}(\pi/n)}\right] + 1,$$

donde por [ ] estamos denotando la parte entera. Conviene señalar, pues tendremos que usarlo más adelante, que

$$\left[\frac{l}{2r\ \mathrm{sen}(\pi/n)}\right] + 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{l}{2r\ \mathrm{sen}(\pi/n)} + 1$$

son infinitésimos equivalentes para n suficientemente grande.

Volviendo de nuevo a la figura 2, el ángulo barrido en el primer sector es

$$\frac{\pi}{2} + \gamma(n) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n},$$

siendo su radio l. Los siguientes $k-1$ sectores tienen todos el ángulo común

$$\delta(n) = \frac{2\pi}{n}$$

y, en cada caso, el radio $l - i\Upsilon_r(n)$ para $i = 1, \ldots, k-1$.

Así pues, la suma de las áreas de todos estos sectores viene dada por

$$\begin{aligned} A_r(l,n) &= \frac{l^2}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{n}\right) + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{(l - i\Upsilon_r(n))^2}{2}\right)\frac{2\pi}{n} \\ &= \frac{\pi l^2}{4} + \frac{\pi l^2}{2n} + \frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{k-1}\left\{l^2 + i^2\Upsilon_r(n)^2 - 2li\Upsilon_r(n)\right\}. \end{aligned}$$

Teniendo ahora en cuenta las conocidas identidades (pueden demostrarse fácilmente por inducción en k)

$$\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{(k-1)k}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} i^2 = \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}$$

resulta

$$\begin{aligned} A_r(l,n) &= \frac{\pi l^2}{4} + \frac{\pi l^2}{2n} + \frac{\pi l^2}{n}(k-1) \\ &+ \frac{\pi}{n}\Upsilon_r(n)^2\frac{(k-1)k(2k-1)}{6} - \frac{2\pi l}{n}\Upsilon_r(n)\frac{(k-1)k}{2} \end{aligned}$$

Necesitamos por tanto encontrar el límite de $A_r(l,n)$ cuando n tiende a infinito, para lo que estudiaremos los respectivos límites de cada uno de los sumandos anteriores:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi l^2}{2n} = 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi l^2}{n}(k-1) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi l^2}{n}\dfrac{l}{2r\ \mathrm{sen}(\pi/n)} = \dfrac{l^3}{2r}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\pi}{n}\,\Upsilon_r(n)^2\,\dfrac{(k-1)k(2k-1)}{6} = \dfrac{l^3}{6r}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\pi l}{n}\Upsilon_r(n)\,\dfrac{(k-1)k}{2} = \dfrac{l^3}{2r}$

Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} A_r(l,n) = \frac{\pi l^2}{4} + \frac{l^3}{6r},$$

y finalmente el área de la región en que puede pastar la cabra es

$$\frac{\pi l^2}{2} + \frac{l^3}{3r}.$$

Pero, ¿nos habrá conducido este bello pero al fin y al cabo intuitivo razonamiento geométrico a una solución correcta?. De momento, la dimensionalidad cuadrática de la solución obtenida está en consonancia con el hecho de que buscamos la fórmula para un área. Sin embargo, y a fin de asegurarnos de la veracidad del resultado obtenido, abordaremos a continuación la resolución del problema desde el enfoque basado en el cálculo integral que sugeríamos como vía natural al principio de la sección.

3 Resolución mediante cálculo integral

Como podemos observar en la figura 3, la solución del problema es el doble del área A correspondiente a la región de ordenadas positivas, que puede dividirse en dos partes: el cuarto de círculo de radio l, cuya valor es $A_1 = \pi l^2/4$, y el área A_2 entre la curva C que describe la cabra desde el punto P en sentido antihorario con la cuerda tensada, y la circunferencia a la que está atada.

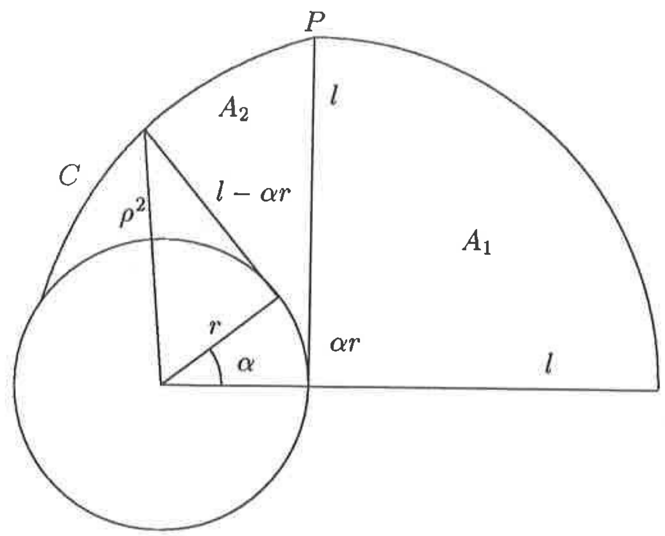


Figura 3

Para calcular A_2 mediante una integral en coordenadas polares, necesitamos expresar la curva C como una función $\rho = \rho(\alpha)$ dependiente del ángulo α que define la posición de la cabra según la figura anterior, y que varía en el intervalo $[0, l/r]$. Por el teorema de Pitágoras $\rho^2 = r^2 + (l - \alpha r)^2$, y por tanto

$$A_2 = \frac{1}{2}\int_0^{l/r} \rho^2 d\alpha - \frac{1}{2}r^2\frac{l}{r} = \frac{1}{2}\left(rl + \frac{l^3}{3r}\right) - \frac{lr}{2} = \frac{l^3}{6r},$$

de donde

$$A = A_1 + A_2 = \frac{\pi l^2}{4} + \frac{l^3}{6r}$$

y finalmente el área buscada es

$$2A = \frac{\pi l^2}{2} + \frac{l^3}{3r}$$

como habíamos obtenido en la sección anterior.

Nótese que la solución al problema en el caso particular en que $l = \pi r$ es, por continuidad, $5\pi^3 r^2/6$. Pero ¿qué ocurre si $l > \pi r$? Estudiaremos este caso en la siguiente sección.

4 Generalización del problema

Mientras que en el caso en que $l \leq \pi r$, conocemos los extremos del intervalo en que varía el ángulo α, dato que nos permite calcular la integral que nos conduce a la solución, cuando $l > \pi r$ el cálculo del extremo superior $\overline{\alpha}$ de integración nos lleva a una ecuación trigonométrica cuya solución no puede calcularse explícitamente.

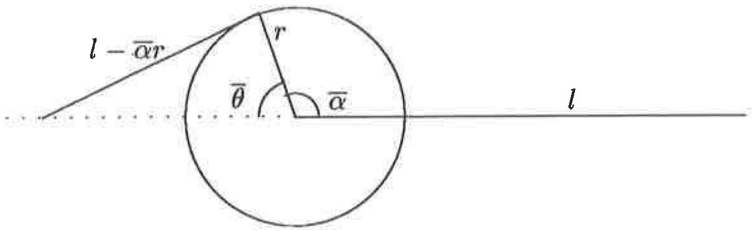


Figura 4

En efecto, de la figura 4 se desprende que

$$\tan(\overline{\theta}) = \frac{l - \overline{\alpha}r}{r},$$

de donde

$$\overline{\theta} = \arctan\left(\frac{l - \overline{\alpha}r}{r}\right).$$

Puesto que $\overline{\alpha} + \overline{\theta} = \pi$, se sigue que el extremo de integración $\overline{\alpha}$ es la solución de la ecuación trascendente

$$\alpha + \arctan\left(\frac{l - \alpha r}{r}\right) = \pi \qquad (1)$$

y por tanto no podemos obtener una expresión analítica.

En lo que sigue usaremos el método de iteración de punto fijo (ver por ejemplo [2]) para calcular una aproximación de $\overline{\alpha}$ con un error tan pequeño como deseemos, que nos conducirá a una solución aproximada del problema.

Para aplicar el método del punto fijo escribimos la ecuación (1) de la forma $\alpha = \varphi(\alpha)$, siendo

$$\varphi(\alpha) = \pi - \arctan\left(\frac{l}{r} - \alpha\right),$$

para la que existe una constante $0 < R < 1$ tal que $|\varphi'(\alpha)| \leq R < 1$ para todo α en el intervalo $]\pi/2, \pi[$ en el que está aislada la raíz, condición exigida para poder aplicar dicho método. En efecto,

$$|\varphi'(\alpha)| = \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{r} - \alpha\right)^2} \leq \frac{1}{1 + \left(\frac{l}{r} - \pi\right)^2} = R < 1.$$

Bajo estas condiciones, el método del punto fijo nos asegura que, tomando un valor inicial $\alpha_0 \in]\pi/2, \pi[$, la sucesión $\alpha_n = \varphi(\alpha_{n-1})$ converge a la solución exacta de la ecuación (1). Además, es sencillo obtener una cota del error cometido en la aproximación n-ésima a partir del Teorema del Valor Medio y la cota de $|\varphi'|$. Así,

$$|\overline{\alpha} - \alpha_n| = |\varphi(\overline{\alpha}) - \varphi(\alpha_{n-1})| = |\varphi'(\xi_{n-1})||\overline{\alpha} - \alpha_{n-1}| \leq R|\overline{\alpha} - \alpha_{n-1}|$$

donde ξ_{n-1} está comprendido entre α_{n-1} y $\overline{\alpha}$, y aplicando reiteradamente este argumento n veces llegamos a

$$|\overline{\alpha} - \alpha_n| \leq R^n|\overline{\alpha} - \alpha_0| \leq R^n\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = R^n\frac{\pi}{2}.$$

La n-ésima aproximación α_n de $\overline{\alpha}$ nos servirá para calcular de un modo aproximado el área buscada. El error que cometemos al calcular dicha superficie podemos acotarlo del siguiente modo

$$2\left|\frac{1}{2}\int_0^{\overline{\alpha}} \rho^2 d\alpha - \frac{1}{2}\int_0^{\alpha_n} \rho^2 d\alpha\right| = \left|\int_{\alpha_n}^{\overline{\alpha}} \rho^2 d\alpha\right| \leq |\overline{\alpha} - \alpha_n| \cdot M_n$$

siendo $M_n \geq \max\{\rho^2(\alpha)\}$ cuando α varía entre α_n y $\overline{\alpha}$. Por comodidad tomaremos $M_n = l^2 + r^2$ para todo n, de modo que si queremos calcular el área con un error menor que $\varepsilon > 0$ previamente fijado, basta tomar n de manera que

$$\frac{\pi}{2}\, R^n(l^2 + r^2) < \varepsilon,$$

de donde

$$n > \left[\frac{\log\left(\frac{2\varepsilon}{\pi(l^2+r^2)}\right)}{\log(R)} \right] \tag{2}$$

Por ejemplo, si queremos encontrar una solución con un error menor que $\varepsilon = 0.01$ para los datos $r = 1$ y $l = 5$ (nótese que $l/r = 5 > \pi$), tenemos que

$$R = \frac{1}{1+(5-\pi)^2}$$

y, aplicando (2), debemos tomar $n = 6$ iteraciones. Así, eligiendo como aproximación inicial $\alpha_0 = 3 \in]\pi/2, \pi[$ resulta $\alpha_6 = 1.881064627$ y por tanto la aproximación del área que obtenemos es

$$2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\alpha_6}\left(1+(5-\alpha)^2\right)d\alpha + \frac{25\pi}{4}\right] - \pi = 69.56263078$$

Finalmente, nótese que el enfoque poligonal que dábamos al problema en la sección 2 no tiene cabida para resolver esta generalización del problema.

Referencias

[1] Cólera, J., De Guzmán, M., Fernández, S., y Oliveira M.J. (1998) *Matemáticas I Bachillerato Logse.* Ed. Anaya. Madrid.

[2] Danko, P. y Popov, A. (1983) *Ejercicios y Problemas de Matemáticas Superiores.* Ed. Paraninfo. Madrid.

[3] Fernández Herce, J. y González Menorca, M. (1997) Una visión distinta de un problema clásico, *Suma* 24, 59–62.

[4] Fernández Herce, J. y González Menorca, M. (1998) Una visión distinta de un problema clásico II, *Suma* 28, 5–9.

[5] Lasheras Esteban, J. M. (1987) *Tecnología Mecánica, Volumen II.* Ed. Donostiarra. San Sebastián.

Indice de los articulos publicados en los 53 primeros numeros de este boletin (1983-99)

Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

Como ya indicamos en números anteriores de nuestro Boletín, la dirección de Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 31 (5) DE 1999

#2889 (sección A30). La matemática en Bagdag, por Ricardo Moreno Castillo, Bol. Soc. Puig Adam 49 (Junio 1998), págs. 53-67.

#3318 (sección G64). La geometría de la tortuga en la esfera con Maple, por Juana Núñez García, Bol. Soc. Puig Adam 49 (Junio 1998), págs. 24-41.

#3363 (sección H64). Sobre movimientos, por Carmen Alonso Delgado y Manuel Suárez Fernández, Bol. Soc. Puig Adam 49 (Junio 1998), págs. 68-73.

#3405 (sección I30). Estudio de una sucesión de funciones con Derive, por Luís Miguel Lestón López y Manuel José Fernández Gutiérrez, Bol. Soc. Puig Adam 49 (Junio 1998), págs. 42-52.

#2996 (sección C50). Una Reflexión sobre el Aprendizaje de Conceptos Matemáticos en los Adolescentes, por Juan José Prieto Martínez, Bol. Soc. Puig Adam 52 (Junio 1999), págs. 74-78.

#3312 (sección G50). El teorema de Pitágoras en la semejanza de triángulos, por Joxé Alberto García Suárez, Bol. Soc. Puig Adam 52 (Junio 1999), págs. 61-62.

#3432 (sección I95). Una introducción a la Geometría Fractal y su Aplicación a la Comprensión de Imágenes, por Miguel Reyes, Bol. Soc. Puig Adam 52 (Junio 1999), págs. 32-55.

#3495 (sección M55). Simplifying the Structure of Equations Describing Electromechanical Objects by Means of Mathematical Transformations to Substitutional Equivalent Systems, por Adam Marlewski, Stanislaw Rawicki y Eugenio Roanes Macías, Bol. Soc. Puig Adam 52 (Junio 1999), págs. 19-31.

Anuncio de Congreso

organizado por la Univ. Complutense de Madrid
con la colaboración de la Soc. Puig Adam

AISC'2000 Fifth International Conference ARITFICIAL INTELLIGENCE AND SYMBOLIC COMPUTATION Madrid, July 17th-19th, 2000

The conferences in this series are held every two years. The previous four took place in Karlsruhe (Germany), Cambridge (United Kingdom), Steyr (Austria) and Plattsburgh (USA).

The aim of the conference is to provide a forum for the exchange of ideas and the presentation of new tools and solutions. Another goal is to make personal contacts among researchers from different fields related to AI and Symbolic Computation. The conference is concerned with all aspect of research (including theory, implementations and applications).

Steering Committee:

Jacques Calmet, Univ. Karlsruhe (Germany)
John Campbell, Univ. College, London (U.K.)
Jochen Pfalzgraf, Univ. Salzburg (Austria)
Jan Plaza, SUNY- Plattsburgh (USA)
Eugenio Roanes-Lozano, Univ. Complutense (Spain); Conference Chairman

Invited speakers:

Marc Knoppe (EuWin AG, Frankfurt, Germany): Artificial Intelligence as Decision Tool for an Efficient Strategic and Operative Management.
Michael Kohlhase (Univ Saarbruecken, Germany): Agent-Oriented Integration of mathematical Software Systems.
Luis M. Laita (Univ. Politécnica Madrid): George Boole, a forerunner of Symbolic Computation.

Proceedings:

Proceedings of previous conferences of this series were printed by Springer-Verlag (in their volumes LNCS 737, 958, 1138 and LNAI 1476)

Location of the Conference:

Hotel NH Zurbano, c/ Zurbano, 79-81, 28003-Madrid

Registration amount:

40.000 pts (for payments received before May 15th) / 50.000 pts (later)

Hotel reservation and payment:

Viajes EuroBusiness, c/Jorge Juan, 21, Madrid-28001, Tel 91-4354686

Adress (organization):

Dr. Eugenio Roanes-Lozano
Secc. Dptal. Algebra
Facultad de Educación 28040-Madrid
e-mail: AISC2000@ccedu.ucm.es

Problemas propuestos

en la XL OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS celabrada en Bucarest el 16-17 julio de 1999

Problema n^0 1

Determinar todos los conjuntos finitos S de puntos del plano que tienen por lo menos tres puntos y satisfacen la siguiente condición: para cualesquiera dos puntos distintos A y B de S, la mediatriz del segmento AB es un eje de simetría de S.

Problema n^0 2

Sea $n \geq 2$ un entero dado.
(a) Determinar la menor constante C para la cual se verifica la desigualdad

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\left(\sum_{1\leq i\leq n} x_i\right)^4$$

para todos los números reales $x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$
(b) Para esta constante C, determinar cuándo se verifica la igualdad.

Problema n^0 3

Se considera un tablero cuadrado de nxn, donde n es un entero positivo par. El tablero se divide en n^2 cuadrados unitarios. Decimos que dos cuadrados distintos del tablero son adyacentes si tienen un lado común.

Se marcan N cuadrados unitarios del tablero de tal manera que cada cuadrado (marcado o sin marcar) es adyacente a por lo menos un cuadrado marcado.

Determinar el menor valor posible de N.

Problema n^0 4

Determinar todas las parejas (n, p) de enteros positivos tales que

p es primo

$n \leq 2p$, y

$(p-1)^n + 1$ es divisible por n^{p-1}.

Problema n^0 5

Dos circunferencias Γ_1 y Γ_2 están dentro de la circunferencia Γ , y son tangentes a Γ en los puntos distintos M y N respectivamente. La circunferencia Γ_1 pasa por el centro de la circunferencia Γ_2. La recta que pasa por los puntos de intersección de Γ_1 y Γ_2 corta a Γ en los puntos A y B. Las rectas MA y MB cortan a Γ_1 en los puntos C y D respectivamente.

Demostrar que CD es tangente a Γ_2

Problema n^0 6

Determinar todas las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$.

Problemas propuestos en la OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA UNIVERSITARIA celabrada en octubre de 1999

Problema n^0 7 (1^0 de la OIMU)

Encontrar el valor de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-1})^k}{k}$$

Problema n^0 8 (2^0 de la OIMU)

Los vértices de un triángulo ABC pertenecen a la hipérbola $xy = 1$. Demostrar que el ortocentro pertenece también a esta hipérbola

Problema n^0 9 (3^0 de la OIMU)

Sean $0 < x_1 < x_2 < ... < x_n$ todas las raices reales del polinomio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, con $n > 1$. Si $y_1, y_2, ..., y_n$ son todas las raices del polinomio $g(x) = f(x) - xf\ '(x)$ y $z_1, z_2, ... z_n$ todas las raices del polinomio $h(x) = f(x) + xf\ '(x)$, demostrar que estas raices son reales y satisfacen

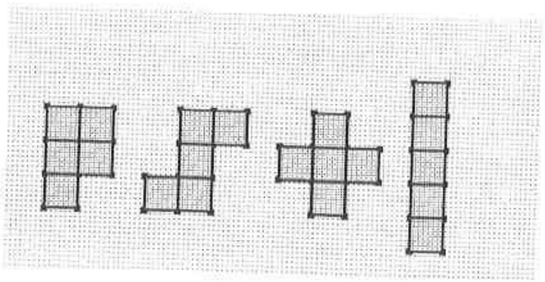
$$y_1 < 0 < z_1 < x_1 < y_2 < z_2 < x_2 < ... < y_n < z_n < x_n$$

Problema n^0 10 (4^0 de la OIMU)

La suma de dos cuadrados consecutivos puede ser un cuadrado perfecto: por ejemplo, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Encontrar el menor entero n mayor que 2 para el cual existen n números enteros consecutivos tales que la suma de sus cuadrados es un cuadrado perfecto.

Problema n^0 11 (5^0 de la OIMU)

En el juego tetris-5 se utilizan cuatro tipos de fichas que tienen una de sus caras pintadas de negro y otra de blanco tal como se muestran en la siguiente figura. Las fichas pueden ser colocadas en un tablero cuadriculado de $m{\times}n$ en cualquier posición siempre y cuando no se superpongan y tengan la cara negra hacia arriba.



(a) Demostrar que se puede recubrir un tablero 8x8 que no contiene sus cuatro esquinas.

(b) Demostrar que no se puede recubrir un tablero 1999x2001 que no contiene sus cuatro esquinas.

Problema n^0 12 (6^0 de la OIMU)

Sea $N = \{1, 2, 3, ...\}$ el conjunto de los números naturales y sea $N_m = \{0, 1, 2, ...m-1\}$ para cualquier número natural m. Demostrar que para cualquier función f, si $f : N \rightarrow N_m$, existe un número real α tal que $[\alpha^n] \equiv f(n) \pmod{m}$.
Nota: $[x]$ es la parte entera del número real x.

Problema n^0 13 (7^0 de la OIMU)

En R^3 se define el producto "o" de la siguiente manera :

$$(x, y, z)o(u, v, t) = (xu + yt + zv, xv + yu + zt, xt + yv + zu)$$

Demostrar que para cualquier $k \in N$ si $(x, y, z)^k = (0, 0, 0)$ entonces $x = y = z = 0$.
Nota: Se define $(x, y, z)^k = (x, y, z)^{k-1}o(x, y, z)$ para cualquier entero $k > 1$.

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.°	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										
		1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°	9.°	10.°	
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	–	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	–	–	–	–	–	–	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	–	–	–	–	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	–	–	–	–	–	–	–	–	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	–	–	–	–	–	–	–	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	–	–	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	–	–	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	–	–	–	–	–	–	–	–	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	–	–	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	–	–	–	–	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	46	XX	33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	–	–	–	–	–	–	
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	48	XX	XX	35	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	47	35	34	–	–	–	–	–	
32	OMI-92-MOSCÚ/	35	48	XX	XX	XX	52	38	35	46	38	
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	–	–	–	–	–	–	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	47	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	
	/PNS	47	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	–	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	–	–	–	–	
35	OMI-93-Turq./	XX	46	XX	XX	52	XX	52	XX	47	39	
	OI-93-Méjico/PNS	XX	52	39	39	52	XX	–	–	–	–	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	
37	OME-f2-94/PNS	41	49	49	41	49	49	45	45	41	–	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	52	XX	–	–	–	–	
39	OI-94-Brasil/OME-	43	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	
	f1-94/f1-94(v)	46	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	–	–	–	–	
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
43	OME-f-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
44	OMI-96-India/	XX	XX	49	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	47	45	XX	XX	XX	–	–	–	–	
45	OI-96-Costa Rica	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	XX	XX	XX	
	OME-96-f1	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	–	–	
46	OMR-96	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
47	OMI-97-Argentina	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
48	OI-97-México	XX	XX	XX	50	XX	XX	–	–	–	–	
	OMEf1-98	–	–	–	–	–	–	XX	XX	XX	XX	
		49	XX	49	XX	–	–	–	–	–	–	
	OMR-97	–	–	–	–	XX	XX	XX	50	XX	XX	
		51	XX	51	XX	51	52					
50	OMI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
51	OI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
54	OI-99/OIMU-99	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
		XX	XX	XX								

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. OIMU = Olimpiada Iberoamericana de Matemática Universitaria. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo especificado a continuación.

Copias en papel

Se emviarán por duplicado, escritas con un procesador de texto en hojas de tamaño DIN A-4.

Los artículos comenzarán con el título (en minúsculas grandes), nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el boletín), e-mail si se tiene, y "abstract" de unas líneas en inglés. Terminar el artículo con la bibliografía (y nada más después de ella).

Si se utiliza PAPEL, el formato debe ser 17 cm × 12,8 cm en 10 puntos, (para ser aprovechado directamente en la imprenta). En tal caso se incluirá el archivo de estilo utilizado.

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además, si se desea, se pueden volver a incluir al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo el archivo en Word.

Si se envía en PAPEL, ajustado al tamaño indicado, no es preciso este último.

Las figuras se captarán por escaneado, por lo que es innecesario incluirlas en el disquete (en archivos de extensión TIF o similares).

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín (no al apartado, que ya no está operativo).

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

ADQUISICIÓN DE NÚMEROS ATRASADOS DE NUESTRO BOLETÍN

A partir de ahora, los números atrasados del Boletín (de los cuales existan ejemplares sobrantes), podrán ser adquiridos al precio de coste de mil pesetas ejemplar.

Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53 y 54

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de nuestra Sociedad o mediante transferencia a la cuenta corriente de nuestra Sociedad domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
C/ Fuencarral, 101
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (despacho 3.517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid

En la carta se incluirá:

- el número o números a adquirir,
- la dirección a donde se han de enviar,
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION

D. .... Teléf. (....) ....
Dirección ....
Ciudad .... Cod.° Postal ....
Centro de trabajo ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de la misma ....
para que cargue en la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1998-99 y siguientes.

Fecha .... de .... de 2000

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pts. (de ellas, 3.000 pts. en concepto de cuota de la Sociedad "Puig Adam" y 2.000 pts. en concepto de cuota por la que se recibe la revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas).
Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/ Fuencarral, 101
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACION EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha .... BANCO: ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de ésta ....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....
Dirección ....
Remítanse ambas partes (toda esta página) a:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
c/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid