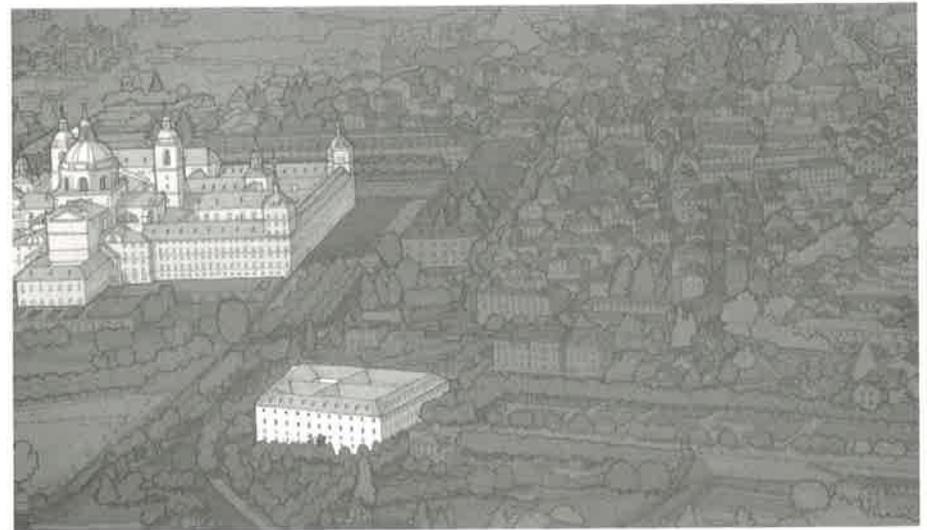


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMATICAS**



**BOLETIN N.º 53
OCTUBRE DE 1999**

Número especial, conteniendo las comunicaciones de la sesión en español
del congreso IMACS-ACA'99 (copyright IMACS, by permission)
y cofinanciado por Texas Instruments

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 88

La portada de este número reproduce la panorámica de El Escorial, en cuyo Edificio Eurofórum Infantes se celebró el congreso IMACS-ACA'99.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Número especial del Boletín	5
Sobre el Congreso IMACS-ACA'99, por <i>Eugenio Roanes Lozano</i>	6
Programa del Congreso Internacional IMACS-ACA'99	13
Sobre la sesión en español del IMACS-ACA'99	19
Modificaciones curriculares posibilitadas por las nuevas tecnologías: aparición de contenidos, por <i>Justo Cabezas Corchero y Eugenio Roanes Lozano</i>	20
Cambios curriculares en la enseñanza del Álgebra, por <i>Lola Rodríguez Soalleiro</i>	32
Diferentes opciones para la resolución de problemas con calculadoras gráficas, por <i>Agustín Carrillo</i>	49
Compass Avoidance, por <i>Tomás Recio</i>	59
Búsqueda automática de lugares geométricos, por <i>Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano</i>	67
Sobre demostración automática de un problema geométrico, por <i>Francisco Javier Blanco Silva</i>	78
Anuncios de Congresos y otros eventos	82
Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik	84
Nota necrológica	85
XVII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas	86
Índice de soluciones publicadas	92
Instrucciones para el envío de originales	93
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción	96

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS (Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ (Castilla-León)
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES (Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE (Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO (Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

Adjunta a la presidencia:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Número especial del Boletín

Como ya se anunció en números anteriores de nuestro Boletín, nuestra Sociedad ha participado activamente en la organización del congreso IMACS-ACA'99 (International Association for Mathematics and Computers in Simulation - Applications of Computer Algebra'99), celebrado en el Euroforum de El Escorial del 24 al 28 de junio del presente año.

Nuestra Sociedad ha obtenido permiso de la Sociedad IMACS para publicar en este número 53 un resumen de las comunicaciones presentadas en la sesión en español del citado congreso, titulada "Computer Algebra in the Spanish Educational System", lo cual agradecemos desde aquí a la Sociedad IMACS.

Por otra parte, la empresa de material científico Texas Instruments, uno de los principales patrocinadores del IMACS-ACA'99, ha aceptado que parte de esa subvención sea invertida en cofinanciar la publicación de este número especial de nuestro Boletín, lo que agradecemos desde aquí a la empresa Texas Instruments.

La Junta directiva

Sobre el Congreso IMACS-ACA'99

(Euroforum-Infantes, San Lorenzo de El Escorial, 24-27 junio 1999)

Eugenio Roanes Lozano

Dpto. Álgebra, Universidad Complutense de Madrid
Presidente del Comité Organizador IMACS-ACA'99

Resumen

This is a report of IMACS-ACA (Applications of Computer Algebra) 1999 Conference (Euroforum-Infantes, San Lorenzo de El Escorial, June 24th-27th 1999), written by its General Chairman. A general survey plus the most important details are included.

1. Introducción

La Computación Simbólica (también llamada Álgebra Computacional o Cálculo Simbólico) es una área joven de investigación a caballo entre la Informática y la Matemática. El fundir ambas mentalidades (una teórica y la otra más próxima al mundo real) crea un terreno abonado para el crecimiento de nuevas aplicaciones de gran utilidad e interés. Aunque el mismo tipo de herramientas esté siempre en segundo plano, se cubre una amplia variedad de campos, como muestra la diversidad de sesiones organizadas en el IMACS-ACA '99 (ACA es el acrónimo de *Applications of Computer Algebra*).

La sociedad científica IMACS (*International Association for Mathematics and Computers in Simulation*) organiza y coordina congresos en distintas áreas de Matemáticas y Computación. Publica una revista (SCI) bajo el sello Elsevier/North-Holland (*Mathematics and Computers in Simulation*) y publica monografías y actas sobre congresos.

Este ha sido el quinto IMACS-ACA. Los anteriores han tenido lugar en Nuevo México (USA) 1995; Linz (Austria) 1996; Maui, Hawaii (USA) 1997 y Praga (República Checa) 1998. La evolución del número de comunicaciones presentadas y de congresistas indican un interés creciente en este congreso en particular.

Organizar este congreso desde la Universidad Complutense de Madrid ha supuesto traer a nuestro país durante unos días a muchos expertos de primera línea en el campo. Asimismo, la celebración en España de este congreso ha facilitado la asistencia de investi-

gadores y profesores españoles. En 1998 un número destacable (15) de las ponencias presentadas al IMACS-ACA tenían autores o coautores españoles. Este año ese número se ha más que duplicado (31).

Es de destacar la celebración, dentro del marco del congreso, de una sesión sobre *El Álgebra Computacional y el Sistema Educativo Español*, para el cual se admitieron 6 ponencias.

2. Algunos datos sobre el congreso

Este año se ha mantenido aproximadamente igual el número de inscritos y de ponencias presentadas.

Por un lado se ha tratado de que los organizadores de sesión (auxiliados por los miembros del comité científico) mantengan unos altos niveles de calidad a la hora de admitir ponencias.

Por otra parte, ha habido un fuerte incremento en los precios frente al año anterior, por lo que el porcentaje de asistentes de la antigua Europa del Este ha sido mucho menor, lo que ocurrió también el año en que el congreso tuvo lugar en Maui. Asimismo se ha de hacer notar que ha habido algunas cancelaciones por problemas de obtención de visado para España (fundamentalmente por problemas de plazos).

1999	Número total de ponencias de 1/2 hora	139
1999	Número total de ponencias de 1 hora	6
1998	Número total de ponencias (1/2 hora)	141

1999	Número de inscritos	161
1998	Número de inscritos	171

3. Estructura del congreso

La Presidencia de Honor del congreso la ha ostentado el Excmo. y Magfco. Sr. Rector de la Universidad Complutense de Madrid, D. Rafael Puyol.

El máximo responsable del congreso (Presidente del Comité Organizador / General Chair) ha sido el Dr. Eugenio Roanes-Lozano (de la Universidad Complutense Madrid).

A continuación se detallan los distintos comités del congreso:

Comité de Programa / Program Chairs:

Catedrático Victor Edneral	Moscow State Univ.
Dr. Laureano González-Vega	Univ. de Cantabria
Dr. Jaime Gutiérrez	Univ. de Cantabria
Dr. Richard Liska	Tech. Univ. Prague

Comité Organizador / Organizing Committee:

Catedrático Stanly Steinberg	Univ. New Mexico
Dr. Michael Wester	Cotopaxi
Catedrático Eugenio Roanes-Macías	Univ. Complutense Madrid
Catedrático Luis Laita	Univ. Politécnica Madrid

Comité Local / Local Committee:

Profesor Martin Garbayo	Univ. Complutense Madrid
Profesora Mercedes Hidalgo	Univ. Complutense Madrid
Profesora Dolores Rodríguez-Soalleiro	CPR Leganes
Alumno de Doctorado F. Javier Blanco	Univ. Complutense Madrid

Comité Científico / Scientific Committee:

Catedrático Bruno Buchberger	RISC-Linz
Catedrático Jacques Calmet	Univ. of Karlsruhe
Catedrático Francisco Castro	Univ. de Sevilla
Catedrático Arjeh Cohen	Eindhoven Univ. Tech.
Catedrático Rob Corless	Univ. of Western Ontario
Dr. Sam Dooley	IBM Yorktown Heights
Catedrático Vladimir Gerdt	Institute Nuclear Res.
Dr. Richard Jenks	IBM Yorktown Heights
Catedrático Erich Kaltofen	N. Carolina State Univ.
Catedrático Deepak Kapur	State Univ. New York
Catedrático Wolfgang Kuechlin	Univ. of Tuebingen
Dr. Bernhard Kutzler	BK Teachware (Austria)
Catedrático Luis Laita	Univ. Politécnica Madrid
Dr. Richard Liska	Tech. Univ. Prague
Catedrático Juan Llovet	Univ. de Alcalá
Catedrático Ignacio Luengo	Univ. Complutense Madrid
Catedrático Michael Monagan	Simon Fraser Univ.
Dr. Antonio Montes	Univ. Politéc. Catalunya
Catedrático Matu-Tarow Noda	Ehime Univ.

Catedrático Antonio Quesada

Dr. Mohamed O. Rayes

Catedrático Tomás Recio

Catedrático Tateaki Sasaki

Catedrático Stanly Steinberg

Dr. David Stoutemeyer

Catedrático Jose Luis Vicente-Córdoba

Dr. Emil Volcheck

Catedrático Franz Winkler

Akron Univ.

Texas Instruments - Dallas

Univ. de Cantabria

Univ. of Tsukuba

Univ. New Mexico

Soft Warehouse

Univ. de Sevilla

National Security Agency

J. Kepler Univ. Linz

4. Agradecimientos

Es de destacar la ayuda de muchos organismos y personas sin la ayuda de los cuales no habría sido posible, de hecho, la celebración del congreso.

4.1. Patrocinadores

En cuanto a patrocinadores, en años anteriores organismos y empresas de la talla de la Fundación Nacional de Ciencias americana (NSF), Agencia Nacional de Seguridad americana (NSA), ministerio Checo de Educación, Texas Instruments, Wolfram Research..., han patrocinado este congreso. Este año los patrocinadores han sido también importantes y su aportación generosa.

La Universidad Complutense de Madrid ha donado 650.000 ptas, dentro del marco de sus ayudas para "Organización de Reuniones, Congresos y seminarios en la Universidad Complutense" (proyecto OCS-UCM 1998). Este montante ha sido utilizado en su totalidad, como se proponía, para cubrir toda la inscripción, alojamiento y viaje de conferenciantes.

Es de lamentar la ausencia en el Acto Inaugural del representante del Sr. Rector, Director Académico Jose Javier Etayo, por una inoportuna avería en su coche oficial cuando viajaba camino de El Escorial.

Por parte de la Universidad Complutense hay que mencionar también a los Servicios Informáticos, en particular a D. Fernando Pescador, por las facilidades dadas para el mantenimiento y gestión de la cuenta de correo del congreso.

Texas Instruments ha donado, dentro de su encomiable labor de apoyo a la educación matemática, 700.000 ptas. Estas han sido utilizadas para abonar la inscripción de los propios asistentes de Texas Instruments, becar a asistentes de Europa del Este, pagar los servicios de autobús de recogida de congresistas en el aeropuerto y de vuelta al aeropuerto y cofinanciar la publicación de este número especial de nuestro Boletín. Nuestro agradeci-

miento por su gestión ante la central de la empresa Texas Instruments para el Sr. Sottomayor y la Sra. Rodríguez Soalleiro.

Es de destacar la inestimable ayuda de la profesora Rodríguez Soalleiro, Asesora Pedagógica de Texas Instruments, miembro del Comité Local y Organizadora de Sesión, que gestionó el reconocimiento del evento por parte del Ministerio de Educación y Cultura, con la concesión de créditos de formación a los profesores de Educación Secundaria.

La empresa americana Cotopaxi, a través de su presidente, Dr. Wester, estuvo a cargo del mantenimiento y actualización de la información en la página "web" del congreso, siendo el proceso impecable. Un enlace a esta página se instaló en la portada de las páginas "web" de la empresa española Addlink Software Científico.

Volviendo a esta empresa, Addlink Software Científico, aunque no ha realizado aportación económica alguna, ha sido crucial su aportación. A través de uno de sus Directores, Sr. Cifuentes, se prestaron a adelantar la fianza que requiriera el hotel o centro de convenciones. Asimismo, realizaron sin cargo "mailings" y comunicaciones por "e-mail" masivas. Llevaron a cabo las gestiones (que finalmente no fructificaron) con empresas de software para donaciones en metálico y gestionaron las concesiones temporales de licencias de "software". Regalaron las carpetas donadas a los congresistas. Y lo que es más importante, prestaron gratuitamente dos ordenadores portátiles y dos cañones de proyección durante los días que duró el congreso. Su ayuda, teniendo en cuenta los precios usuales de alquiler de equipos informáticos, puede estimarse en más de 500.000 ptas.

Es de destacar el comportamiento de las dos personas desplazadas por la empresa Addlink al congreso (Sr. Molina y Srta. Montserrat García). No sólo llevaron el "stand" de la empresa, como era previsible, sino que colaboraron en el mantenimiento de los servicios de audiovisuales de las distintas salas y brindaron generosamente su ayuda como unos organizadores más, siempre que fue necesario.

Texas Instruments y Addlink Software Científico montaron dos atractivos "stands" en el patio cubierto del edificio Infantes.

El congreso se realiza bajo la cobertura de la Sociedad IMACS, que proporciona divulgación y soporte, así como facilidades para la posterior publicación de trabajos.

La Real Sociedad Matemática Española ha concedido 4 becas de 40.000 ptas para subvencionar a jóvenes investigadores.

La Sociedad Matemática "Puig Adam" ha concedido dos medias becas de 25.000 pesetas para cubrir medias inscripciones de socios.

BK Teachware subvencionó a una congresista pagando su inscripción.

En las fechas en que se escribe este informe, 20 de agosto, ya concluido hace semanas el congreso, se acaba de recibir noticia de la concesión de una subvención solicitada al Programa Sectorial de Promoción General del Conocimiento (DGES, Ministerio de Educación y Cultura), número de Referencia: CO99-0053, por un montante de 750.000 pts (el no tener noticia a tiempo de la concesión de esta subvención es lo que produjo la cancelación de la prevista traducción simultánea de las sesiones sobre educación).

4.2. Otros

Este congreso no habría sido posible sin la participación desinteresada de los miembros del comité organizador, de programa y local. Las últimas semanas fueron especialmente intensas, y la dedicación y entusiasmo de sus miembros fue ejemplar.

También deseáramos hacer constar nuestro agradecimiento a las encargadas de la coordinación y organización de Euroforum-Infantes: Srtas. Patricia Ramos, Helena Azafredo y Marga Ayuso, así como a todo el personal en general por su amabilidad, interés por solucionar los problemas y profesionalidad.

5. Más información

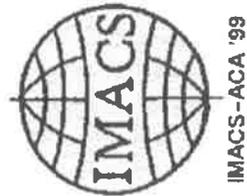
Para más información puede consultarse la página "web" del congreso

<http://math.unm.edu/ACA/1999.html>

donde pueden encontrarse, además del programa, "abstracts" y artículos completos correspondientes a las ponencias presentadas.

6. Conclusión

Estas notas suponen el resumen del intenso trabajo de un grupo de personas que, dentro de España y desde el extranjero, fructificó en lo que, estimamos, ha sido un éxito, de participación, de nivel científico y de organización. A todos ellos, participantes y organizadores, nuestro agradecimiento.



Cotopaxi

Ministerio de Educación y Cultura (DGES)

Real Sociedad Matemática Española

Sociedad Matemática Puig Adam

Universidad Complutense – Servicios Informáticos



Program for the 5th International IMACS Conference on Applications of Computer Algebra ACA'99

June 25, 1999 (Friday)				
SESSION	COMPUTER ALGEBRA MEETS EDUCATION I <i>Bernhard Kutzler</i> A	APPROXIMATE ALGEBRAIC COMPUTATION: TOWARDS SYMBOLIC-NUMERIC ALGORITHMS <i>Tateaki Sasaki, Matu-Tarow Noda, Bernard Mourrain & Robert Corless</i> B	COMBINATORIAL AND COMPUTATIONAL METHODS IN ALGEBRAIC GEOMETRY <i>Jie-Tai Yu & Vladimir Shpilrain</i> C	COMPUTER ALGEBRA FOR DYNAMICAL SYSTEMS AND MECHANICS I <i>Victor Edneral, Ilias Kotsireas & Nikolay Vasiliev</i> D
9:00 am	Setting the Tone: CAS as pedagogical tools <i>Bernhard Kutzler</i>	New results on the Table Maker's Dilemma <i>Jean-Michel Muller & Vincent Lefevre*</i>	The Parameterization Problem for Algebraic Surfaces <i>Josef Schicho</i>	Computer Algebraic Approximations—Creation of Approximated Solutions of Scientific and Engineering Problems in Symbolic Form <i>Victor Edneral</i>
9:30 am	Basic Skills versus Technology—not a Contradiction but a Completion <i>Josef Boehm</i>	Polynomial Algebra with Coefficients of Limited Accuracy <i>Hans Stetter</i>	Computing subfields in pure transcendental extensions <i>Jaime Gutierrez & Rosario Rubio</i>	
10:00 am	The Use of Mathematics Specific Technology in Capstone Mathematics Teacher Preparation Courses <i>Gary A. Harris</i>	A System of Automatic Algorithm Stabilization <i>Hiroshi Sekigawa</i>	Again $x + x^2y + z^2 + t^3 = 0$ <i>Lenny Makar-Limanov</i>	Solving the problem of stabilization of a gyroscopic system with the help of Computer Algebra <i>A. V. Bonshchikov, L. A. Bourlakov & V. D. Irtegov</i>
10:30 am	Some Reflections About the Impact of Computer Algebra Systems in the Ordering of the Curricula of Mathematics <i>Justo Cabezas & Eugenio Roanes-Lozano*</i>	To Be Announced <i>Hiroshi Kai</i>	Invariants of algebraic varieties <i>Vladimir Shpilrain</i>	About investigation of systems with first integrals <i>L. A. Bourlakov & V. D. Irtegov</i>
11:00 am	BREAK			
11:30 am	A Computer Classroom Lecture: Asymptotic Convergence of Rational Functions <i>Bill Pletsch</i>	To Be Announced <i>Victor Y. Pan</i>		Analytical Approach for Simplifying Dynamical Systems of Polynomial Type <i>J. Palacián & P. Yanguas</i>
12:00 pm	Exam questions when using CAS for school mathematics teaching <i>Vlasta Kokol-Volje</i>	Mechanism of Cancellation Errors in Multivariate Hensel Construction with Floating-point Numbers <i>Tateaki Sasaki</i>		Communications of the Poisson Series Processors PSPC with General Scientific Software <i>A. Abad, A. Gavin & J. F. San-Juan</i>
12:30 pm	Using the TI-92Plus: Examples <i>Michel Beaudin</i>	Exacts predicates for arrangement of arcs of circle <i>A. Fronville</i>		Parallelisation of Perturbation Analysis: the method of Multiple Scales applied to vibration problems <i>Raya Khanin & Matthew Cartmell</i>
1:00 pm	Why use CAS with TI89 in mathematical education? Classrooms experiments. <i>Bengt Ahlander</i>	Approximate p-adic GCD computation <i>D. Rupprecht</i>		Some computational experiments in Celestial Mechanics <i>Jean-Charles Faugere</i>
1:30 pm	LUNCH			

Program for the 5th International IMACS Conference on Applications of Computer Algebra ACA'99

June 25, 1999 (Friday)					
SESSION	COMPUTER ALGEBRA MEETS EDUCATION I Bernhard Kutzler A	APPROXIMATE ALGEBRAIC COMPUTATION: TOWARDS SYMBOLIC-NUMERIC ALGORITHMS Tateaki Sasaki, Matsu-Tarou Noda, Bernard Mourrain & Robert Corless B	TORIC IDEALS AND INTEGER PROGRAMMING Lorenzo Robbiano C	COMPUTER ALGEBRA FOR DYNAMICAL SYSTEMS AND MECHANICS I Victor Edneral, Ilias Kotsireas & Nikolay Vasiliev D	APPLICATIONS OF COMPUTER ALGEBRA TO SIGNAL PROCESSING Jeremy Johnson & Markus Pueschel E
3:30 pm	Using Logo as a Scaffolding to Develop Algebraic Thinking in a Virtual Classroom Garry Clark* & Edward Redden	Towards numerical stability in normal form algorithms B. Mourrain	Computing Toric Ideals Lorenzo Robbiano	Some remarks on differential Hilbert polynomials in two variables G. Corra Ferro	Minimal Syzygies and Multidimensional Filter Design Hyungju Park
4:00 pm	Discovery Experiences in Synthetic Geometry with DERIVE Miguel de Gusman	Hybrid Rational Function Approximation and its Applications Matsu T. Noda		Extended Characteristic Sets of Finitely Generated Differential Ideals G. Corra Ferro & Vladimir Gerdt	Group Representations and Automatic Derivation of Fast Signal Transforms Markus Pueschel
4:30 pm	About how to implement Geometric Transformations on a CAS E. Roanes-Macias & E. Roanes-Lozano*	Approximate polynomial decomposition M. Giesbrecht	New algorithms for Computing Toric Ideals Anna Bigatti	Enumeration of intersections of Newton's polyhedrons Alejandro Aranson	A Wreath Product Approach to Signal and Image Processing Dan Rockmore
5:00 pm	BREAK				
5:30 pm	A number-based approach to introductory algebra: A study with 11-12 year olds using graphic calculators Tenoch E. Cedillo A.	On approximate ideals B. Trager or P. Gianni	Decomposing Graver Test Sets in Stochastic Programming Raymond Hemmecke	Symbolic Computation of Formal Solutions for 2 and 3 Dimensional Dynamical Systems G. Eichenmueller	Groebner Bases and Wavelet Design Ivan Selesnick
6:00 pm	Instrumentation processes underlying the use of TI92 at high school level Badr Defouad		Initial Ideals of Toric Ideals and Group Relaxations in Integer Programming Serkan Hosten	A new classification of planar homogeneous quadratic systems Dries Boularus	To Be Announced Jean-Charles Faugere & Fabrice Rouillier
6:30 pm	A didactical laboratory: image filtering A. Cavallone*, C. D'Apice*, M. Marsella & S. Salerno			Computation of Normal Forms of Hamiltonian Systems in the Presence of Poisson Commuting Integrals (Liouville-Integrability and Birkhoff Normal Forms) J. Mikram & F. Zinnoun	To Be Announced Jeremy Johnson

Program for the 5th International IMACS Conference on Applications of Computer Algebra ACA'99

June 26, 1999 (Saturday)					
SESSION	COMPUTER ALGEBRA MEETS EDUCATION II Bernhard Kutzler A	COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN AND COMPUTER ALGEBRA L. Gonzalez-Vega & J. R. Sendra B	APPLICATIONS OF COMPUTER ALGEBRA TO ROBOTICS Peter Kovacs C	COMPUTER ALGEBRA FOR DYNAMICAL SYSTEMS AND MECHANICS II Victor Edneral, Ilias Kotsireas & Nikolay Vasiliev D	COMPUTATIONS IN PURE MATHEMATICS (ALGEBRA, ANALYSIS, GEOMETRY, ...) Maria-Emilia Alonso, Francisco Castro & Laureano Gonzalez-Vega E
9:00 am	A Tutorial Mathematical System for Elementary Schools Frank Postel* & Ralf Hillebrand	Missing points and branches of real parametric curves Tomas Recio	Forward kinematics of parallel robots Jean-Pierre Merlet	Computational aspects of the N-body problem Ilias Kotsireas	Homology of semi-direct product of groups V. Alvarez, J. A. Armario & P. Real
9:30 am	High-Powered Technology in a Low-Level Mathematics Course Jim Schultz		Using Computer algebra tools for off-line studies of parallel manipulators Jean-Charles Faugere, Luc Rolland & Fabrice Rouillier*	The study by symbolic computation of the sign of the riemannian curvature in the configuration space of the 3-body problem and applications B. Elmabsout & M. Barbosa	Analyzing the transference of the co-algebra structure on the homology of CD-GAs M. J. Jimenes, P. Real & B. Silva
10:00 am	A Scheme for Conservative Use of Computer Algebra Rein Frank	Applying general-purpose symbolic and numerical computation programs for Computer Graphics and CAGD. Some applications to industry Andres Iglesias & Akemi Galvez	Self-Motions of Griffis-Duffy Type Parallel Manipulators Manfred Husty & Adolf Karger	Oscillators in Resonance Antonio Elipe & André Deprit	Steenrod reduced powers and computability Rocio Gonzalez-Diaz & Pedro Real
10:30 am	Mathematica and didactical innovation: a quadric use case G. Albano*, A. Cavallone, C. D'Apice* & G. Gargiulo	Proper Parametrization of Real Algebraic Surfaces Josef Schicho	Functional Ideal Decomposition—a Tool for Kinematics Peter Kovacs	Construction of Invariants of Symplectic Mapping Nikolay Vasiliev	The use of Mathematics for the classification of some nilpotent Lie algebras L. M. Camacho, J. R. Gomez & R. M. Navarro
11:00 am	BREAK				

Program for the 5th International IMACS Conference on Applications of Computer Algebra ACA'99

June 26, 1999 (Saturday)

SESSION	COMPUTER ALGEBRA MEETS EDUCATION II <i>Bernhard Kutzler</i> A	COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN AND COMPUTER ALGEBRA <i>L. Gonzalez-Vega & J. R. Sendra</i> B	SYMBOLIC-NUMERIC INTERFACE AND PROBLEM SOLVING ENVIRONMENTS I <i>Richard Liska, Stanly Steinberg & Robert van Engelen</i> C	COMPUTER ALGEBRA FOR DYNAMICAL SYSTEMS AND MECHANICS II <i>Victor Edneral, Rias Kotsireas & Nikolay Vasilev</i> D	COMPUTATIONS IN PURE MATHEMATICS (ALGEBRA, ANALYSIS, GEOMETRY, ...) <i>Maria-Emilia Alonso, Francisco Castro & Laureano Gonzalez-Vega</i> E
11:30 am	Computer Aided Instruction for Business Calculus in an International Liberal Arts College <i>A. Kehagias & P. N. Vlachos*</i>	An algorithm for approximate conversion of rational B-spline curves/surfaces to integral B-spline curves/surfaces and its implementation <i>Jesus Espinola, Laureano Gonzalez-Vega & Joana Necula</i>	Finite Difference Numerical Modelling Supported by Computer Algebra <i>Richard Liska</i>	Some properties of the symplectic Lie algebra <i>Rodney Coleman</i>	New ways of defining filiform Lie algebras <i>J. C. Benjumea, F. J. Echarte, D. Fernandez, M. C. Marquez, J. Nuñez & F. Ramirez</i>
12:00 pm	Flexible Mathematical GUI Controls for Mathematical Electronical Documents <i>Ralf Hillebrand* & Frank Postel</i>	Groebner Bases and Statistics <i>Lorenzo Robbiano</i>			About an algorithm of T. Oaku <i>Maribel Hartillo</i>
SESSION				INTERACTION ON PHYSICS, NUMBER THEORY & COMPUTER SCIENCE I <i>Hoang Ngoc Minh</i>	
12:30 pm	Mathematica in Undergraduate Mathematics Courses—A Teaching or Learning Aid? <i>May C. Abboud</i>		Ctadel: A Computer Algebra System for the Generation of Efficient Numerical Codes for PDEs <i>Robert van Engelen</i>	Colored multiple zeta values relations table <i>M. Bigotte</i>	Slopes in submodules of a free module <i>Jose Maria Ucha</i>
1:00 pm	Searching roots for three degree polynomials with the help of Mathematica <i>Marilo Lopez Gonzalez & Javier Rodrigo Hitas*</i>		Invariant Variational Principles and Associated Numerical Schemes for Regularization of Ill-Posed Problems <i>Ravi Venkatesan</i>	Nested Sums and Iterated Integrals <i>D. Bradley</i>	Computing Toric First Syzygies <i>P. Pison-Casares & A. Vigeron-Tenorio</i>
1:30 pm	LUNCH				

Program for the 5th International IMACS Conference on Applications of Computer Algebra ACA'99

June 26, 1999 (Saturday)

SESSION	COMPUTER ALGEBRA MEETS EDUCATION II <i>Bernhard Kutzler</i> A	DEMOS OF COMPUTER ALGEBRA SYSTEMS <i>Michael Wester & Winfried Neun</i> B	SYMBOLIC-NUMERIC INTERFACE AND PROBLEM SOLVING ENVIRONMENTS II <i>Richard Liska, Stanly Steinberg & Robert van Engelen</i> C	COMPUTER ALGEBRA IN THE SPANISH EDUCATIONAL SYSTEM <i>Lola Rodriguez</i> D	COMPUTATIONS IN PURE MATHEMATICS (ALGEBRA, ANALYSIS, GEOMETRY, ...) <i>Maria-Emilia Alonso, Francisco Castro & Laureano Gonzalez-Vega</i> E
3:30 pm	Derivations and Visualizations for the Hydrogen Atom <i>Joseph D. Myers*, Kelley B. Mohrmann & Terry T. Crow</i>	Some Perspectives on the Usability of Computer Algebra Systems <i>Michael Wester</i>	Group Invariant Finite-Difference Schemes for Advection Equation <i>Ravi C. Venkatesan</i>	Aparicion de nuevos contenidos curriculares en matematicas mediante la aplicacion de nuevas tecnologias <i>Justo Cabezas Corchero</i>	The ideal generation conjecture for general rational curves <i>F. Orecchia</i>
4:00 pm	CONVODE: A Reduce package for solving differential equations <i>Alain Moussiaux</i>	Solving a RLC Circuit using Convolution with DERIVE for Windows <i>Michel Beaudin</i>	Usefulness of computer algebra methods in numerical simulations <i>Michel Fournie</i>	Las herramientas euclideas y el ordenador <i>Tomas Recio</i>	Basic Algorithms for Specialization in Groebner Bases <i>A. Montes</i>
4:30 pm	Exploring sequences with DERIVE <i>Paolo Boieri</i>	The Computer Algebra System CoCoA <i>Lorenzo Robbiano</i>	Prototyping Symbolic-Numeric Algorithms using Naglink <i>Brian J. Dupea* & James H. Davenport</i>	Diferentes opciones para la resolucion de problemas con calculadoras graficas <i>Agustin Carrillo</i>	The Generation of Polya Polynomials using Macsyma, with Applications <i>Bill Pletsch</i>
5:00 pm	BREAK				
SESSION	TEACHING OF EFFICIENT MATHEMATICS <i>A. Akritis & Gennadi Malaschouk</i>				
5:30 pm	A project of Computer Aided Learning: A course of Computer Algebra in the web <i>Rafael J. Villanueva Mico & A. Hervas</i>	The REDLOG Package—Tools and Applications <i>Volker Weispfenning</i>	A symbolic-numerical package for linear stability analysis of numerical methods for ODEs <i>Massimo Cafaro & Beatrice Paternoster*</i>	Cambios curriculares en la enseñanza del Algebra <i>Lola Rodriguez Soalleiro</i>	Duality in Effective Algebraic Geometry <i>Bernard Mourrain</i>
6:00 pm	A study of particular methods for the approximate construction of some regular polygons by using Mathematica 3.0 <i>Juan A. Aledo, Juan C. Cortes & Fernando L. Pelayo</i>	MuPAD—An Open Computer Algebra System and its Approach of Software Integration <i>Ralf Hillebrand & Frank Postel</i>	A Symbolic Numeric Environment for Analyzing Measurement Data in Multi-Model Settings <i>Christoph Richard & Andreas Weber*</i>	Busqueda automatica de lugares geometricos <i>Eugenio Roanes Macias & Eugenio Roanes Lozano</i>	A Fast Computation of Hook Schur Functions <i>F. Gaeta</i>
6:30 pm		Computer Algebra Applied to Mathematical Cartography <i>Carlos Enriquez Turiso</i>	Extraction of Low Order Boolean Rules from Trained Neural Networks using a Computer Algebra System <i>Terence Etchells</i>	Matematicas en Pantalla <i>Rafael Perez Gomez & Miguel Posadas</i>	
evening	7:00pm - 8:00pm: Business Session in A				

June 27, 1999 (Sunday)				
SESSION	TEACHING OF EFFICIENT MATHEMATICS <i>A. Akritas & Gennadi Malaschonok</i>	MATHEMATICS ON THE INTERNET <i>Angel Diaz & Erich Kaltofen</i>	APPLICATIONS OF QUANTIFIER ELIMINATION <i>Volker Weispfenning & Hoon Hong</i>	INTERACTION ON PHYSICS, NUMBER THEORY & COMPUTER SCIENCE II <i>Hoang Ngoc Minh</i>
	A	B	C	D
9:00 am	A comparative study between two general methods for the approximate construction of regular polygons by using Mathematica 3.0 <i>Juan A. Aledo, Juan C. Cortes & Fernando L. Pelayo</i>	Interfacing Proof Checkers With OpenMath <i>Olga Caprotti</i>	A Robust Control System Design by a Special Quantifier Elimination Method using a Sturm-Habicht Sequence <i>Hirokazu Anai & Shinji Haru</i>	Functional Equations on Polylogarithms with Axiom <i>Hoang Ngoc Minh</i>
9:30 am	Possibilities for Alternative Uses of the "Calculus and Mathematica" Approach <i>Alkiviadis Akritas, Stelios Kapranidis & Athina Katalifou</i>	Plug and Play Mathematical Components <i>Mike Dewar</i>	A Special Quantifier Elimination Algorithm for Pham Systems <i>Laureano Gonzalez-Vega & Neila Gonzalez-Carnpos</i>	Algebraic Structures on the Set of Multiple Zeta Values <i>Mike Hoffman</i>
10:00 am	Classical Mathematics with Mathematica <i>Alkiviadis Akritas & Zamir Bavel</i>	To Be Announced <i>Angel L. Diaz</i>	A new solution of the quartic problem: with application to integration <i>David J. Jeffrey</i>	Computer aided Knot Theory using Mathematica and MathLink <i>N. Imafuji</i>
10:30 am	Calculus and the Race Track Principle <i>Alkiviadis Akritas & Zamir Bavel</i>	Mathematics on the Web—Past, Present and Future <i>Dave Raggett</i>	Reach Set Computation for Linear Vector Fields using Quantifier Elimination <i>Gerardo Lafferriere, George J. Pappas & Sergio Yovine</i>	Combinatorics on Algebraic Identification <i>G. Jacob</i>
11:00 am	BREAK			
11:30 am	Some elementary mathematics revisited and revised <i>David J. Jeffrey</i>	Unicode Encoding of Mathematics <i>Murray Sargent</i>	Quantifier Elimination for Trigonometric Polynomials by Cylindrical Trigonometric Decomposition <i>Petru Pau & Josef Schicho</i>	Computational Construction of representation matrices for parallel version polynomial invariants <i>M. Ochiai</i>
12:00 pm	Teaching Error-Correcting Codes, Discrete Mathematics and Modern Algebra with Computer Algebra <i>Igor Gachkov & Kenneth Hult</i>	Stylesheets for Mathematical Web Pages <i>Stephen Watt</i>	The Study of Stability using Computer Algebra <i>Stanly Steinberg</i>	Computational Decomposition of homeomorphisms into canonical Dehn's twists <i>Y. Sakata</i>
12:30 pm	Teaching of efficient mathematics <i>Gennadi Malaschonok & Natalia Malaschonok</i>	Accessing Quantifier Elimination Packages Over the Internet Out of General Purpose Systems <i>Andreas Weber</i>		On l-adic iterated integral <i>Z. Wojtkowiak</i>
1:00 pm	Efficient methods of mathematical analysis <i>Gennadi Malaschonok</i>	Concluding Discussion of the Issues Addressed in the Talks (Moderator with Audience Participation) <i>Erich Kaltofen</i>	Semilinear motion planning in REDLOG <i>Volker Weispfenning</i>	
1:30 pm	LUNCH			

Sobre la Sesión en Español del IMACS-ACA'99

La sesión en español del IMACS-ACA'99, titulada: "Computer Algebra in the Spanish Educational System", se celebró durante el día 26 de Junio en horario vespertino.

El objetivo primordial de la misma era reflexionar acerca de cómo el Álgebra computacional afecta a la enseñanza de las Matemáticas en España.

Se expusieron diferentes maneras de desarrollar los contenidos en el aula y se hizo una reflexión de cómo afecta la aplicación de estos nuevos medios no solamente al desarrollo de los contenidos actuales sino también al planteamiento de nuevos objetivos y contenidos.

Fueron muy enriquecedores los coloquios entre los ponentes y los asistentes al término de cada una de las comunicaciones.

Hubo comunicaciones tanto en los niveles de Universidad como de Secundaria.

Para el profesorado de Secundaria se consiguió certificación oficial ya que la Subdirección General de Formación del Profesorado concedió 20 horas de formación a todos los profesores de secundaria matriculados en el Congreso.

Quiero dar las gracias a todos los compañeros que participaron en mi sesión por su colaboración desinteresada y de los que he tenido la oportunidad de aprender mucho y espero que sea útil éste monográfico para aquellos que no han podido acudir al Congreso.

M.ª Dolores Rodríguez Soalleiro
Organizadora de la Sesión en español

Modificaciones curriculares posibilitadas por las nuevas tecnologías: aparición de contenidos

Justo Cabezas Corchero (*)
Eugenio Roanes Lozano (**)

* IES Rodríguez-Moñino de Badajoz
Depto. Matemáticas, Fac. Biblioteconomía, Univ. Extremadura
jcabezas@alcazaba.unex.es
** Depto. Álgebra, Fac. Educación, Univ. Complutense de Madrid
eroanes@eucmos.sim.ucm.es

Resumen

The introduction of new technologies to make the learning of the Mathematics easier can generate deep curricular changes. A particular case is the possibility of introducing contents that traditionally are not incorporated to the different curricula. In this work a didactic experience with 17-year-old student is described. DERIVE is used in it to develop a topic with the characteristics above.

1. Nuevas tecnologías en educación

Las primeras aplicaciones que se llevan a cabo con una nueva técnica o tecnología son frecuentemente un reflejo de las existentes. Pero algún tiempo después de su aparición nacen aplicaciones específicas favorecidas por el desarrollo de la propia herramienta y por las modificaciones que la tecnología realiza en el entorno social y cultural, sin que se pierdan todas las aplicaciones existentes hasta el momento.

Ello ocurrió también cuando aparecieron los ordenadores personales. Durante algún tiempo se usaron casi exclusivamente como máquina de calcular o como máquina de escribir. Y, entre las primeras aplicaciones que se realizan a la educación, son habituales el refuerzo de las formas y métodos tradicionales, destacando por entonces las investigaciones y producciones de enseñanza asistida por ordenador, donde el ordenador asume el mero papel de transmisor de conocimientos. Luego se utilizan otros programas de propósi-

to general que se aplican a diversos temas (procesadores de texto en clase de lengua, bases de datos de países en ciencias sociales...). Por ejemplo, en matemáticas son frecuentes los programas de simulación para cuestiones de probabilidad, o los que representan funciones, o los bancos de datos para ejercicios de estadística o las hojas de cálculo para reiterar algoritmos que ya se utilizaban y casi sin más beneficio sobre el uso anterior que la rapidez en la ejecución de los mismos. Pero son muy escasas las aplicaciones donde se busquen condiciones genuinas, trabajos imposibles de hacer sin el ordenador, concepciones transversales o modificaciones sustanciales de los contenidos, métodos y secuenciaciones.

En educación el desarrollo de las aplicaciones del ordenador al aula se realiza muy lentamente. Mientras que la banca, la industria y el comercio o las comunicaciones no pueden desarrollarse hoy sin el uso continuado del ordenador, que es por tanto omnipresente e imprescindible, pocos son los profesores y los centros que trabajan continuamente con el auxilio del ordenador y menos los que buscan líneas innovadoras que superen las tradicionales formas de aprendizaje.

Los propios alumnos optan frecuentemente por una postura academicista que les ofrece más garantía en cuanto al éxito en sus resultados. Hemos visto cómo, ante un programa de ordenador que resuelve alguna cuestión (por ejemplo, halla los máximos de una función) no preguntan cómo hacer para que el ordenador dé el resultado, sino cómo el programa calcula el procedimiento (primera derivada nula) de resolución que le han enseñado en matemáticas.

Creemos que deben buscarse y que es posible encontrar aplicaciones al aula más decididas, sin menoscabo de la utilidad de muchas de las aplicaciones citadas. Nos preguntamos si es posible la alteración de los tiempos y secuencias en la confección de los currículos de matemáticas o, incluso, plantear nuevas cuestiones que desarrollen capacidades de un nuevo modo. Por eso desde hace algún tiempo realizamos experiencias que puedan confirmar la viabilidad de estos cambios. La que presentamos pretende ir en esta dirección de experimentación específica e intenta desarrollar capacidades a partir de contenidos no introducidos tradicionalmente en la enseñanza.

2. Una experiencia didáctica

2.1. Introducción

En la línea citada hemos querido crear, mediante un Sistema de Cómputo Algebraico (CAS), un ejemplo de marco adecuado para el desenvolvimiento de algunos procesos de representación gráfica, que son de aplicación multidisciplinar, y que no se pueden abordar sin el auxilio del ordenador por la complejidad de los medios matemáticos necesarios.

La representación gráfica como lenguaje supone una relación entre lo representado y su imagen y de la claridad de esta relación se deriva su bondad. Las representaciones grá-

ficas de funciones de una sólo variable en el plano son un sistema de representación de amplia tradición que lo refrenda como un buen lenguaje. Sin embargo, construir en tres dimensiones una representación gráfica análoga a las que se emplean para las funciones de dos variables, es decir, realizada en el propio espacio, es poco frecuente: se suele utilizar bien un dibujo de la superficie en perspectiva situado sobre el plano, bien una familia de funciones planas obtenidas como secciones, generalmente horizontales, de las superficies. Otras representaciones están mucho menos extendidas. Por tanto, la traducción de una función expresada en lenguaje algebraico a representación gráfica puede generar, entre otras expresiones menos frecuentes, la de secciones planas de la superficie y el dibujo de la misma en perspectiva. Estudiamos estas representaciones y los procesos de traducción de una a otra con la ayuda de DERIVE.

Desde el punto de vista algebraico las dos representaciones aludidas nacen de la consideración de la z como parámetro o como variable dependiente: en el primer caso se tiene una familia uniparamétrica de funciones representadas en el plano y en el segundo una superficie. Mientras que $xy = k$ se suele leer como una familia de hipérbolas en el plano, $xy = z$ se suele leer como una superficie.

Además, estas representaciones se pueden emancipar de su génesis por una expresión algebraica. Así la superficie terrestre de una zona del planeta se representa con curvas de nivel, o sea, como una familia de líneas en el plano obtenidas como secciones horizontales de la superficie. De tal manera que la traducción entre ambas representaciones adquiere un carácter más general y aparece en muchas situaciones de diversas ciencias.

Pero la capacidad de alcanzar satisfactoriamente estos procesos intelectivos, (de lectura y reconstrucción mental de un relieve según unas curvas de nivel; de obtención de la expresión algebraica de una superficie a partir de una familia de curvas planas que son secciones, paralelas a los planos coordenados, de aquélla; de la obtención de estas familias de secciones, etc.) es un objetivo que no se persigue tradicionalmente en los currículos.

Por ello hemos realizado esta experiencia didáctica, que pretende la creación de capacidades de lectura de las representaciones gráficas de funciones en el espacio, desgranando los aludidos procesos. Aunque el resultado quiere ser general, surgen también algunas cuestiones concretas de modo natural: se citan superficies alabeadas, cuádricas, funciones de densidad de dos variables etc.. Pero, insistimos, no se estudian tanto como tales sino como ejemplos de un proceso mental de representación en el espacio, de comportamiento de las funciones según un parámetro y de representación plana del espacio mediante curvas de nivel u otras análogas.

2.2. Contexto

La actividad se enmarcó en la programación ordinaria de Tecnología de la Información para el Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud, es decir, alumnos y

alumnas de 16 y 17 años que acaban de terminar la Secundaria Obligatoria y que escogen un bachillerato científico y, en él, la materia optativa citada.

La mayor parte de estos alumnos tenían una ligera noción del uso de programas de propósito general con el ordenador. Pero sus conocimientos matemáticos no son muy altos, caracterizándose por cierta dificultad en la utilización de modelos abstractos.

El curso consta aproximadamente de 130 sesiones de 50 minutos y la programación oficial sugiere el empleo de programas matemáticos de ordenador para resolver problemas del ámbito científico. Nosotros hemos utilizado DERIVE para desarrollar este tópico durante unas 20 sesiones. De tal manera que los alumnos que van a realizar la experiencia poseen ya un aceptable conocimiento de la herramienta, utilizan con cierta soltura la representación de funciones en el plano, el comando Vector y el condicional IF entre otras menos necesarias para la experiencia que nos ocupa.

Los alumnos y alumnas participantes son los pertenecientes a los dos grupos del citado curso. Ambos grupos trabajan con el mismo profesor y ya han realizado previamente algunas experiencias de aula con él. Se disponen en parejas, formadas libremente, en un aula formada dotada con diez ordenadores Pentium II a 300 Mhz, sin que exista red.

Las hojas de trabajo son el único material de que dispone el alumno. Son, por tanto, portadoras de información y expresan también el trabajo a realizar, así como demandan algunas conclusiones, ya con experimentación complementaria, ya deducidas directamente de las tareas anteriores. Ello permite que el profesor no tenga que hacer exposiciones al grupo, con lo que su posible influencia en los resultados se reduce.

2.3. Objetivos

a) Crear, mediante un CAS, un ejemplo de marco adecuado para el desenvolvimiento de procesos abstractos multidisciplinares que no se abordan en los currículos usuales por la complejidad de los medios matemáticos necesarios.

b) Comprobar si es posible desarrollar, en los niveles de educación con los que se trabaja, la capacidad de transferir la información sobre superficies en el espacio expresada de distintas maneras de una a otra, tanto de modo intuitivo como mediante la aplicación de sencillos algoritmos que realizan en el ordenador los cambios de representación.

c) Valorar el interés de los alumnos y alumnas por estas estrategias de adquisición de capacidades mediante el ordenador y evaluar el estímulo que supone el ordenador para la adquisición de procesos matemáticos complejos.

2.4. Contenidos

Los contenidos son un medio. No se desea, por tanto que los alumnos y alumnas conozcan los comandos del programa que se usan en las hojas de trabajo, aunque es claro

que ello es necesario. Tampoco que memoricen palabras o expresiones matemáticas. Se pretenden contenidos de construcción y traducción de las formas de representación en el espacio que hemos citado.

Los trabajos se han estructurado en cuatro sesiones, cada una para ser desarrollada en 50 minutos, con los contenidos que se indican a continuación.

I. Representación de superficies en tres dimensiones

En esta primera sesión los alumnos y alumnas se introducen en la representación gráfica de superficies mediante algunas de fácil expresión. Muchas de ellas servirán para las siguientes hojas de trabajo.

Después de una corta iniciación al espacio se estudian también las ecuaciones de los planos paralelos a los coordenados. Se representan algunas funciones como

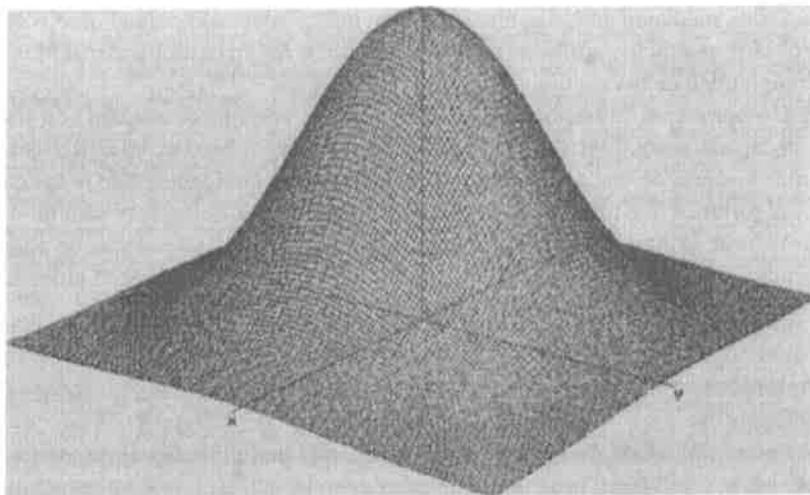
$$Z = x^2 + 3xy$$

$$\hat{e}^{-(1/2)*(x^2/2^2 + y^2/2^2)}$$

$$\text{SIN}(x)*\text{SIN}(y)$$

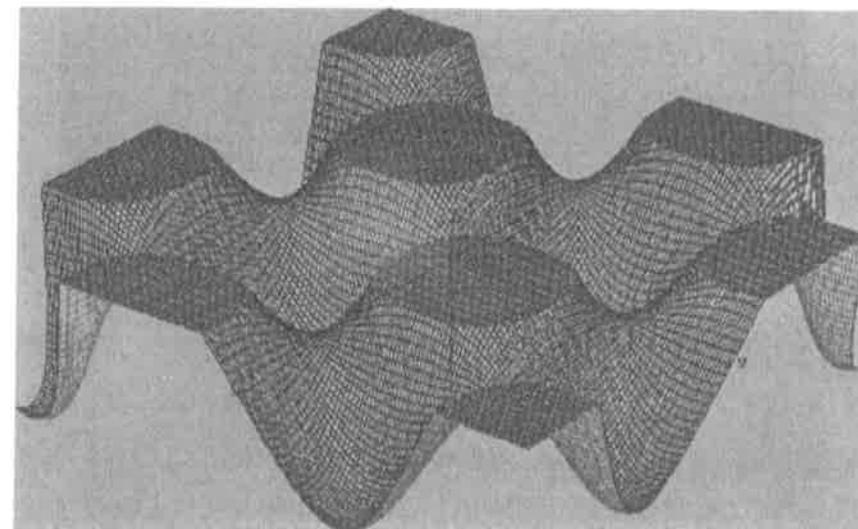
$$\text{LN}(x^2 + y^2)$$

y otras análogas y se trabajan algunos comandos de DERIVE: Length y Eye.



II. Secciones ortogonales a los ejes

En la segunda sesión se dibujan las secciones paralelas a los planos coordenados mediante la función MIN de DERIVE las paralelas al plano horizontal y mediante IF los paralelos a los planos coordenados verticales.



Por ejemplo, un corte horizontal de la función $\text{SIN}(x)*\text{SIN}(y)$ por el plano $z=0.3$ se obtiene mediante

$$\text{MIN}(\text{SIN}(x)*\text{SIN}(y), 0.3)$$

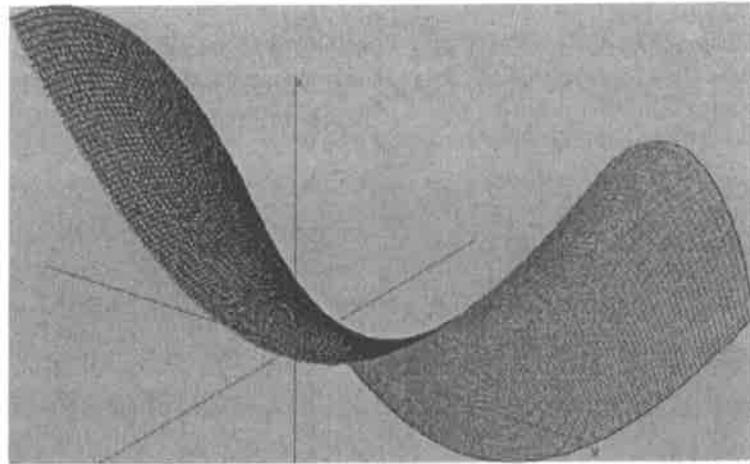
Se puede dibujar solamente el corte mediante

$$\text{IF}(\text{MIN}(\text{SIN}(x)*\text{SIN}(y), 0.3)=0.3, 0.3)$$

Se pueden obtener las secciones por planos paralelos a los coordenados verticales también mediante IF. Por ejemplo, la sección de la superficie $y^2 - x^2$ por el plano $x = 2$ se puede obtener con

$$\text{IF}(x < 2, y^2 - x^2)$$

y la curva intersección se visualiza como el borde de la superficie representada.



Si se desea el corte y sólo el corte basta sustituir el signo menor por el signo igual en la expresión anterior, pero esta representación a veces es confusa.

III. Representación plana de una sección

En la tercera sesión se encuentran y representan en el plano las secciones halladas en la sesión anterior. Por ejemplo, la intersección de

$$z = \text{SQRT}(1+x^2/3^2 + y^2/2^2)$$

y el plano

$$z = 2$$

viene dada por

$$2 = \text{SQRT}(1+x^2/3^2 + y^2/2^2)$$

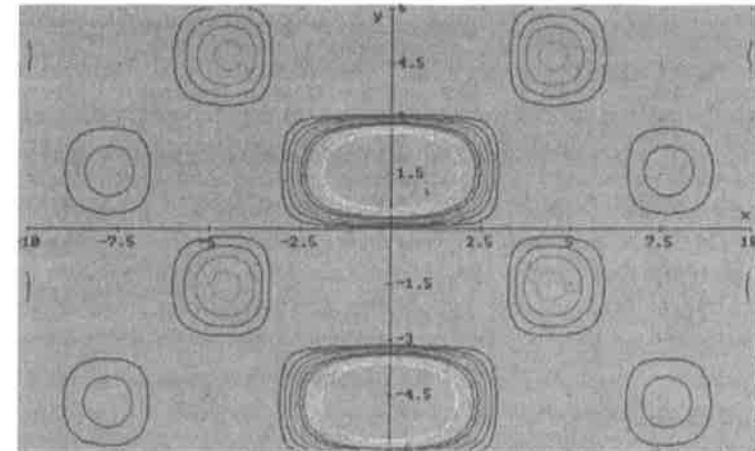
IV. Representación plana de una familia de secciones

En esta sesión se introduce otra forma de representar una superficie: mediante varios cortes por planos paralelos a alguno de los cartesianos. Para el horizontal se considera la z como parámetro y se construye un vector variando z con pasos constantes.

Así, por ejemplo, en

$$z = \text{SIN}(x)/x * \text{SIN}(y)$$

se elige como variable para el vector el parámetro z y se pide que varíe desde $z = 0.05$ hasta $z = 0.5$ de 0.05 en 0.05. El resultado es el de la figura.



2.5. Desarrollo

La actividad se llevó a cabo según el diseño realizado. Los alumnos y alumnas trabajaron sin grandes problemas y durante las sesiones tomaron notas en sus cuadernos de las incidencias o de los puntos que le llamaran la atención. Algunos alumnos pidieron una clase más de repaso al final de las cuatro sesiones y así se hizo para todos. Otras particularidades del desarrollo se pueden deducir de la evaluación.

2.6. Evaluación

Se evaluó la adquisición de las capacidades a partir de la destreza obtenida en el trabajo con los contenidos y de las notas tomadas por los alumnos en sus cuadernos. En cuanto a la experiencia en sí se evaluaron el diseño, el desarrollo, los medios, y la apreciación personal de cada alumno sobre el grado de consecución de los objetivos.

Las clases se grabaron en vídeo para comprobar el grado de interés de los alumnos y la marcha en general de las clases.

Una profesora observó distintas sesiones y tomó notas que pasaron a formar parte de la evaluación de la experiencia.

2.6.1. De la adquisición de capacidades

Para ello se dispuso una prueba tradicional, no muy distinta de las realizadas en clase: dibujar en el espacio un cono de sección elíptica y en el plano una familia de cortes horizontales al mismo y otra de verticales, contestando a algunas preguntas sobre ellas. El resultado fue razonablemente bueno, análogo al de otras pruebas de matemáticas. Se calificaron también los cuadernos de clase.

Los profesores que valoraron este aspecto encontraron, además, como positivo que los alumnos habían perdido el miedo a las expresiones algebraicas complejas, que las representaciones en el plano no presentaban inconvenientes para los alumnos, aunque no ocurría lo mismo con las representaciones en el espacio, donde algunos tenían ciertos problemas. Pero el profesorado admite que, en general, se consiguió la capacidad de entender cómo se obtienen y dibujan las secciones de las superficies y de cómo escribir en el plano los cortes en el espacio. La profesora que realizó la observación, que conoce a los alumnos, creyó ver una respuesta buena a la actividad por parte de alumnos que no son demasiado brillantes en matemáticas.

2.6.2. De los medios

Interesó también estudiar los medios. Realizamos una encuesta a los alumnos sobre:

- El programa de ordenador utilizado.
- Los ordenadores.
- Las hojas de trabajo.
- Otros medios.

Se pidió a los alumnos que, en pregunta abierta, aportasen calificativos sobre los distintos puntos a valorar. El programa de ordenador fue bien valorado, no existiendo comentarios negativos más que en algún caso en que el ordenador se bloqueó (por un problema de hard) y otros seis que piensan que la ayuda debería estar en español. El resto de los calificativos que se obtuvieron fueron positivos, en conformidad con otras encuestas realizadas en otros cursos. De ellos los de mayor frecuencia fueron:

Bueno, muy bueno	(38%)	Regular o malo	(0%)
Fácil	(35%)	Difícil	(7%)
Útil	(20%)	No útil para él	(2%)
Interesante	(22%)	No interesante	(0%)
Divertido	(12%)	Aburrido	(0%)

Un calificativo para nosotros novedoso fue el de útil, probablemente debido a que el conocimiento sobre el programa de estos alumnos es superior al de los alumnos con los que hemos realizado otras experiencias.

La evaluación de los ordenadores fue positiva en todos los casos, no arrojando datos de interés.

En cuanto a las hojas de trabajo la mayor parte de los comentarios son positivos (buenas, fáciles y amenas son los adjetivos aplicados a la generalidad de las hojas que son más frecuentes). Algunos son antagónicos: cortas de explicación (9 alumnos) y, por otro lado, suficientes (6 alumnos). La profesora que asistió como observadora las valoró positivamente.

Finalmente, los medios materiales son bien valorados por casi todos los alumnos. Las críticas en este apartado solamente vienen, en uno de los grupos, por la ubicación de las horas de clase en el horario del centro, lo que no dependía de nosotros.

2.6.3. De la actividad

El profesor que llevó a cabo la experiencia y la profesora que participó como observadora encontraron a los alumnos muy interesados en las actividades, aunque al final de cada sesión algunos daban muestras de cansancio.

Los alumnos calificaron muy positivamente la actividad (55 calificativos positivos y 2 negativos). Creen en su mayoría que se han logrado los objetivos, aunque el profesor piensa que es difícil para ellos enjuiciar este aspecto.

En cuanto a sugerencias para otras actividades parecidas, aportan algunas ideas: muchos piensan que puede aplicar el diseño de las clases a otros materias o a otros temas; otros sugieren que se hagan con otros programas para contrastarlos, y muchos opinan que debe darse más tiempo para poder profundizar en lo estudiado. También sugieren una sesión final de síntesis con problemas nuevos sin resolver.

Tanto algunos alumnos como la profesora que ha llevado a cabo la observación opinan que debería de expandirse el tema con aplicaciones a las clases usuales de matemáticas de los alumnos. Un alumno considera que no deben hacerse experiencias de este tipo pues las matemáticas deben hacerse de modo tradicional, con lápiz y papel y una alumna piensa que deberían realizarse los algoritmos que se han empleado también de modo tradicional.

3. Conclusiones

La experiencia ha resultado positiva. Ha sido muy bien valorada en cuanto a medios y diseño y aceptablemente en cuanto a la adquisición de conceptos, admitiéndose, por tanto, el logro de los dos primeros objetivos. Las motivaciones de los alumnos para el tra-

bajo fueron altas y se plasmaron en una buena forma de trabajar, aunque el logro de este tercer objetivo suele ser constante en todas las experiencias que utilizan el ordenador.

Se han detectado, en unos pocos alumnos, dificultades en entender lo que debe de hacer el ordenador y si lo tiene que hacer en el plano o en el espacio.

Las repeticiones deberían abarcar a conceptos de otras áreas del conocimiento, aumentar el tiempo y llevar una hoja final de recapitulación que además permitiese la creación y solución de otros interrogantes de modo más abierto.

Los profesores insisten en que no es objetivo de la experiencia la adquisición de contenidos matemáticos por los alumnos sino mostrar la viabilidad de la misma y el comprobar razonablemente el logro de adquisición de capacidades. Si se desea que los alumnos adquieran contenidos matemáticos (o de otra área) hay que continuar las hojas con otras concretas en la clase de matemáticas (o del área en cuestión), que aprovechen las destrezas y conceptos adquiridos. Crean que el objetivo de trabajar en el tema elegido en los niveles en los que se ha hecho no es posible sin la ayuda del ordenador.

4. Agradecimiento

Agradecemos a la profesora Vilá Rodríguez su colaboración como observadora y sus valiosas indicaciones sobre el desarrollo de la experiencia.

5. Bibliografía

- [1] BURRELL, CABEZAS, ROANES LOZANO y ROANES MACÍAS (1997): "A Survey on the Use of Computer Algebra in Spain in Relationship to Its Secondary School System". En *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, n° 29, p. 149-154.
- [2] CABEZAS, (1997): "Una aplicación de DERIVE a la clase de matemáticas". En: *Boletín de la Sociedad Puig Adam*, n° 46, pp. 71-78.
- [3] CABEZAS, y ROANES LOZANO (1998): "Do Computer Algebra Systems Change the Order in Which We should Teach Mathematics?". En: *Proceedings III Derive Conference. Gettysburg (PA, USA)*, MathWare Ltd (CD-ROM)
- [4] -"Estadística para documentalistas: una dificultad salvada con DERIVE". Preprint.
- [5] *DERIVE User Manual* (1995): Honolulu: Soft Warehouse.
- [6] DEWEY (1965): "La experimentación en la educación". En: *La educación de hoy*. 3.ª ed. Buenos Aires: Losada.
- [7] FILHO (1933): *La Escuela Nueva*. Madrid: Labor, pp. 80-81, 118
- [8] GIMENO (1989): *El currículum: una reflexión sobre la práctica*, 2.ª ed, Madrid: Morata.
- [9] GUTIÉRREZ MARÍN (1997): *Educación multimedia y nuevas tecnologías*, Madrid: Ediciones de la Torre, pp. 90-126
- [10] HEUGL (1997): "Experimental and active learning with DERIVE". En: *En Zentralblatt für Didaktik der mathematik 1997*, n° 29, p. 142-148.

- [11] KUTZLER (1997): "El impacto de DERIVE en la enseñanza y evaluación de matemáticas". En *Delta*, n° 1, pp. 11-23.
- [12] -(1997): *Introduction to DERIVE for Windows*, 2.ª ed., Linz.
- [13] LLORENS (1995): *Introducción al uso de DERIVE: Aplicaciones al Álgebra Lineal y al Cálculo Infinitesimal*, 2.ª ed. Valencia: Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica.
- [14] LLINARES y SÁNCHEZ (1990): *Teoría y práctica en educación matemática*, Sevilla: Alfar.
- [15] RESNICK y FORD (1990): *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*, Madrid: Paidós.
- [16] ROANES MACÍAS y ROANES (1996): *Primeros pasos en DERIVE y en Maple*, Madrid: Facultad de Educación de la Universidad Complutense.

Cambios curriculares en la enseñanza del Álgebra: una propuesta metodológica haciendo uso de calculadoras gráficas

M.^a Dolores Rodríguez Soalleiro

Asesora de Matemáticas del Centro de Profesores de Leganés. Madrid
mrodri7@olmo.pntic.mec.es

Resumen

Matrices, determinants and lineal systems of equations are the most traditional contents in the teaching of Algebra in Bachillerato (high-school) level. Nowadays, the teaching of these contents is based on algorithms related to matrix operations to solve lineal systems of equations. By using graphics with CAS we can go beyond the mere explanation of algorithms and focus on problems applied to real life situations. We are not trying to change the contents but the methodology to make the teaching and learning processes more efficient.

1. Introducción

Este artículo recoge la presentación que hice en el congreso IMACS-ACA 99, celebrado en El Escorial del 24 al 27 de Junio de 1999, en él se pretende hacer una reflexión sobre posibles cambios curriculares en la enseñanza del Álgebra en Bachillerato y se incluye una propuesta metodológica haciendo uso de las calculadoras gráficas.

No se trata de eliminar contenidos pero sí de plantearnos si algunos de los contenidos en los que tanto insistimos tendrían cabida en unos procesos de enseñanza que se abordan teniendo en cuenta la existencia de estas nuevas tecnologías. Mediante la utilización de calculadoras gráficas se pueden desarrollar ampliamente todos los objetivos que, para el bloque de Álgebra de Bachillerato, propone la LOGSE.

En cuanto a los cambios metodológicos son bastante elocuentes si el lector analiza el desarrollo de los ejemplos que figuran en el presente artículo.

El mismo consta de los siguientes apartados:

- Contenidos curriculares
- Matrices y determinantes
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Propuesta metodológica
- Bibliografía.

2. Contenidos curriculares

Los contenidos de las Matemáticas de 2º curso de Bachillerato LOGSE son:

1. Álgebra: Matrices, Determinantes y Sistemas de ecuaciones.
2. Análisis: Límites, Derivadas e Integrales.
3. Geometría: Rectas y planos, Lugares geométricos y Cuerpos y superficies.

en la materia de Matemáticas II mientras que los contenidos en la materia de Matemáticas II Aplicadas a las Ciencias Sociales son:

1. Álgebra: Matrices, Determinantes, Sistemas de ecuaciones y Programación lineal.
2. Análisis: - Límites- Derivadas- Integrales.
3. Estadística y Probabilidad: Probabilidad, Muestreo y Contraste de hipótesis.

Vemos que el Álgebra constituye uno de los tres bloques en que se divide el currículo de dichas materias y que los contenidos estudiados son, fundamentalmente, matrices, determinantes y sistemas, ocupando aproximadamente un trimestre del curso escolar.

Por otra parte, los contenidos de dicho bloque están organizados de tal manera que casi el único objetivo del estudio de las matrices y los determinantes es para su utilización como herramientas para la resolución de sistemas de ecuaciones.

3. Matrices y Determinantes

Los objetivos que el currículo LOGSE fija para el estudio de las matrices son los siguientes:

1. Representar e interpretar una tabla de números como una matriz, identificando elementos concretos de la misma, así como los tipos de matrices más característicos.
2. Calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.
3. Interpretar y manejar las matrices y sus propiedades en problemas extraídos de contextos reales.

4. Utilizar el lenguaje matricial y las operaciones con matrices como instrumento para representar datos, relaciones y ecuaciones y, en general, para resolver situaciones diversas.

Observamos que, normalmente, concedemos más importancia a algunos de ellos en detrimento de otros pues los problemas típicos que se estudian actualmente en el apartado de las matrices se basan fundamentalmente en lograr los dos primeros objetivos olvidando los dos últimos. De esta manera los contenidos se centran en operaciones con matrices: suma, resta, multiplicación, transpuesta, inversa, potencia, así como realizar operaciones del tipo $a^3 - 3a + 5$ siendo "a" una matriz.

Son ejercicios en los que las operaciones son fáciles pero que requieren muchísimo tiempo por la enorme cantidad de datos con los que se trabaja además de que, en mi opinión, no aportan a los alumnos ningún conocimiento matemático al ser la ejecución inmediata de meros algoritmos que ya conocen. Se trata también de ejercicios en los que el profesor suele poner datos para que los problemas "salgan" y por tanto no son adecuados a los datos o números que aparecen en la vida real.

Veamos con unos ejemplos cómo se resolverían una serie de ejercicios del tipo que estamos comentando mediante la utilización de la calculadora gráfica, modelo TI-89 de la casa Texas Instruments.

Ejemplo 1:

Dada la matriz siguiente:

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- 1º. Calcular su cuadrado.
- 2º. Calcular $a^3 - 3a + 5$.
- 3º. Calcular su inversa.

Solución:

Introducimos la matriz en el editor dándole el nombre de "a" y a continuación, al pulsar "a", aparece la misma matriz en la pantalla: figuras 1, 2, 3 y 4



Fig.1

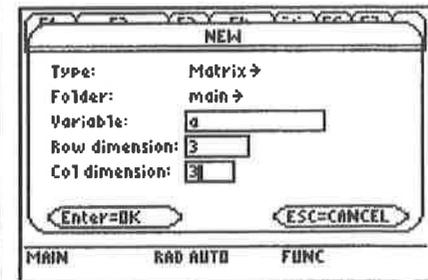


Fig.2

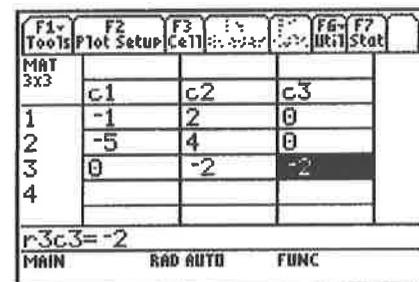


Fig.3

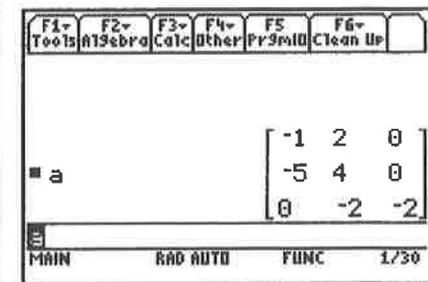


Fig.4

La calculadora reconoce a partir de ahora la variable "a" como la matriz que hemos introducido. Pulsando a² ENTER nos devuelve inmediatamente el cuadrado de dicha matriz, resolviendo, de esta forma, el primer apartado: figura 5.

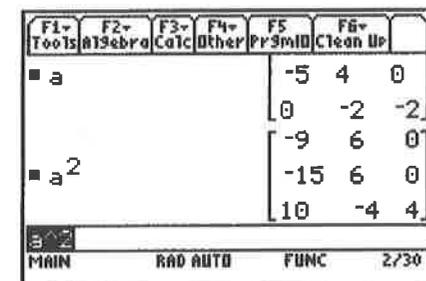


Fig.5

Lo mismo ocurre con los otros dos apartados que se piden: figuras 6 y 7.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	1/9ebra	Calc	Other	Pr3mid	Clean Up
= a ²				-15	6 0
				10	-4 4
= a ³ - 3·a + 5				-13	0 0
				0	-13 0
				10	2 3
= a ³ - 3a + 5					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 3/30	

Fig.6

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	1/9ebra	Calc	Other	Pr3mid	Clean Up
= a ³ - 3·a + 5				0	-13 0
				10	2 3
= a ⁻¹				2/3	-1/3 0
				5/6	-1/6 0
				-5/6	1/6 -1/2
= a ⁻¹					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 4/30	

Fig.7

Ejemplo 2:

Dadas las matrices a y b:

$$a = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & -7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se pide:

1. Calcular su suma.
2. Calcular $a^4 - 2b^3$.

Solución:

Introducimos la matriz b: Figura 8.

F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
Tools	Plot Setup	Cell	Block	Calc	Util	Stat
MAT 3x3						
	c1	c2	c3			
1	1	9	-6			
2	2	4	-7			
3	0	1	2			
4						
r3c3=2						
MAIN		RAD AUTO		FUNC		

Fig. 8

y obtenemos los resultados solicitados tecleando las operaciones indicadas : figuras 9 y 10.

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	1/9ebra	Calc	Other	Pr3mid	Clean Up
= a + b					
[0 11 -6]					
[-3 8 -7]					
[0 -1 0]					
= a + b					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 1/30	

Fig.9

F1	F2	F3	F4	F5	F6
Tools	1/9ebra	Calc	Other	Pr3mid	Clean Up
= a ⁴ - 2·b ³					
[0 -1 0]					
[-203 -510 1098]					
[-83 -342 714]					
[-18 -58 136]					
= a ⁴ - 2b ³					
MAIN		RAD AUTO		FUNC 2/30	

Fig.10

En lo que se refiere al apartado dedicado a los determinantes la situación es similar pero con el agravante de que parece ser muy importante saber desarrollar un determinante inmenso por sus adjuntos o haciendo uso de sus propiedades cuando con la calculadora lo tendríamos resuelto en un momento:

Ejemplo 3:

Calcular el determinante de la matriz siguiente:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 6 & 9 & 2 \\ 5 & -5 & 5 & 8 & 2 \\ -3 & 6 & 9 & 7 & -7 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 2 \\ -6 & 5 & 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Introducimos la matriz en el editor dándole el nombre "c" y la presentamos en la pantalla de la calculadora pulsando c: figuras 11 y 12.

Solución:

Introducimos la matriz ampliada a la que llamamos "d": figuras 15 y 16.

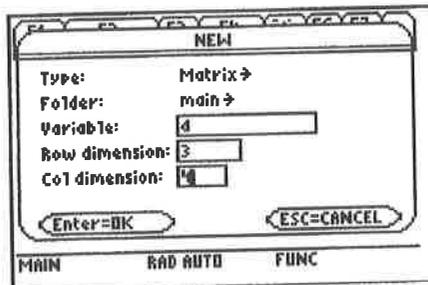


Fig.15

F1- Tools	F2- Plot Setup	F3- Cell	F4- Matrix	F5- Unit	F6- Stat	F7- Stat
MAT 3x4						
	c2	c3	c4			
1	2	3	8			
2	1	3	7			
3	2	1	6			
4						
r3c4=6						
MAIN RAD AUTO FUNC						

Fig.16

Y con la orden **rref** obtenemos el sistema equivalente: figuras 17 y 18.

$$\left. \begin{aligned} 1x + 0y + 0z &= 1/2 \\ 0x + 1y + 0z &= 3/2 \\ 0x + 0y + 1z &= 3/2 \end{aligned} \right\}$$

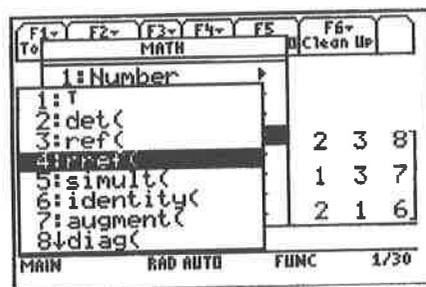


Fig.17

F1- Tools	F2- Algebra	F3- Calc	F4- Other	F5- Pr3mid	F6- Clean Up
d					
			2 1 3 7		
			3 2 1 6		
			1 0 0 1/2		
			0 1 0 3/2		
			0 0 1 3/2		
rref(d)					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

Fig.18

es decir, la solución es:

$$\begin{aligned} x &= 1/2 \\ y &= 3/2 \\ z &= 3/2 \end{aligned}$$

Ejemplo 5:

Resolver el sistema:

$$\left. \begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \\ 2x + y - z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Solución:

Introducimos la matriz ampliada "f" en el editor de matrices: figuras 19 y 20.

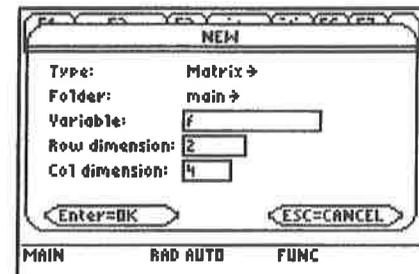


Fig.19

F1- Tools	F2- Plot Setup	F3- Cell	F4- Matrix	F5- Unit	F6- Stat	F7- Stat
MAT 2x4						
	c2	c3	c4			
1	1	3	5			
2	1	-1	0			
3						
4						
r2c4=0						
MAIN RAD AUTO FUNC						

Fig.20

Al aplicar la orden **rref(f)** obtenemos el sistema equivalente: figuras 21 y 22.

$$\left. \begin{aligned} 1x + 0y - 4z &= -5 \\ 0x + 1 + 7z &= 10 \end{aligned} \right\}$$

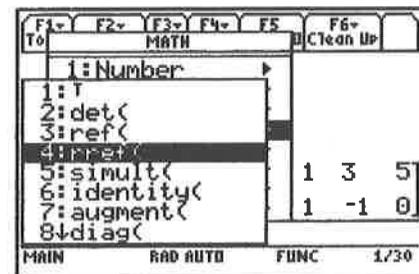


Fig.21

F1- Tools	F2- Algebra	F3- Calc	F4- Other	F5- Pr3mid	F6- Clean Up
f					
			1 1 3 5		
			2 1 -1 0		
			1 0 -4 -5		
			0 1 7 10		
rref(f)					
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30					

Fig.22

es decir, tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} x - 4z = -5 \\ y + 7z = 10 \end{array} \right\}$$

Sistema compatible indeterminado cuyas soluciones habremos de obtener a partir del resultado anterior. En efecto, haciendo $z = 1$ tenemos, la solución del sistema:

$$\lambda \in \mathbf{R}; \left\{ \begin{array}{l} z = -5 + 4\lambda \\ y = 10 - 7\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

Ejemplo 6:

Resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ 2x + y + z = 2 \\ x - y - z = -2 \end{array} \right\}$$

Solución:

Introduciendo la matriz ampliada "g" y aplicando el orden **rref**:

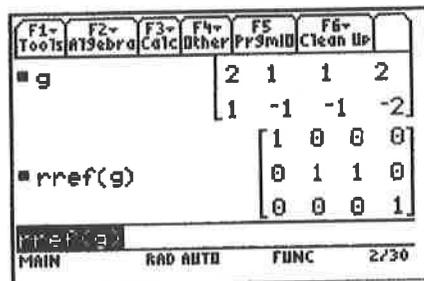


Fig. 23

obtenemos el sistema equivalente:

$$\left. \begin{array}{l} 1x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 1y + 1z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{array} \right\}$$

vemos que es un sistema incompatible. Es importante que los alumnos realicen la interpretación del resultado que aparece en la tercera fila.

Si disponemos de una calculadora gráfica con cálculo simbólico podemos resolver sistemas dependientes de un parámetro:

Ejemplo 7:

Estudiar y resolver el siguiente sistema:

$$\left. \begin{array}{l} kx + 2y + 6z = 0 \\ 2x + ky + 4z = 2 \\ 2x + ky + 4z = k - 2 \end{array} \right\}$$

según los valores del parámetro k.

Solución:

Introducimos la matriz ampliada y le llamamos "a": figuras 24 y 25.



Fig.24

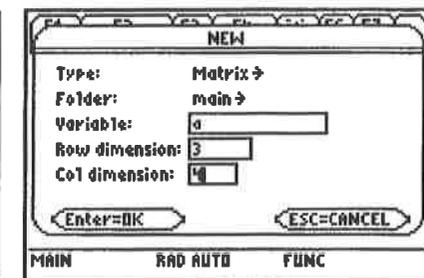


Fig.25

e introducimos los datos de la matriz ampliada: figuras 26 y 27.

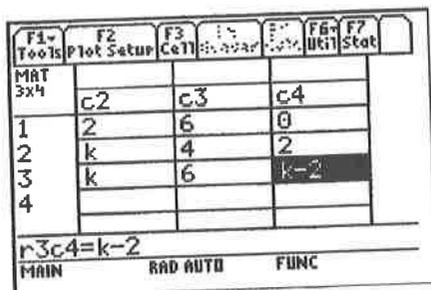


Fig.26

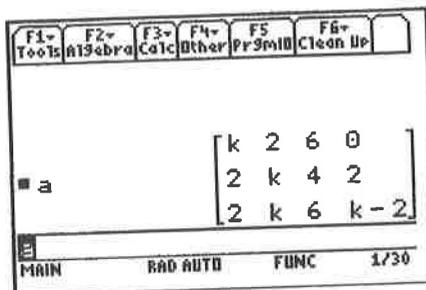


Fig.27

Como hemos visto en los ejemplos anteriores, con la orden **rref** obtenemos las soluciones directamente: figuras 28 y 29.

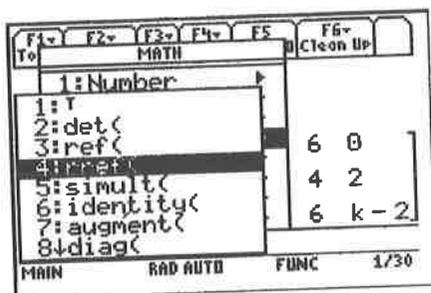


Fig.28

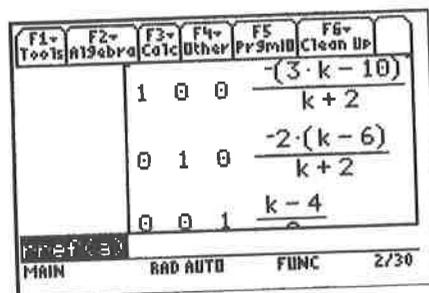


Fig.29

Vemos inmediatamente que para $k = -2$ el sistema es incompatible. Además, si tratáramos de calcular las soluciones para $k = -2$, obtendríamos: figura 30.

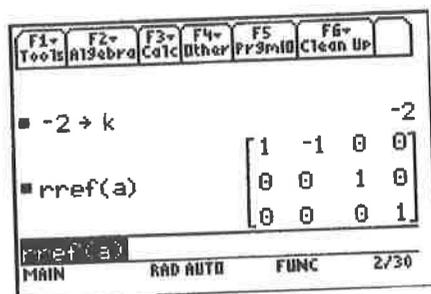


Fig.30

Es decir, llegaríamos a una situación similar a la obtenida en el ejercicio 6. Por tanto el sistema es compatible para $k \neq -2$. Se trata de analizar cuándo es *compatible determinado* y cuándo es *compatible indeterminado*.

Introducimos la matriz de los coeficientes y calculamos su determinante: figuras 31 y 32.

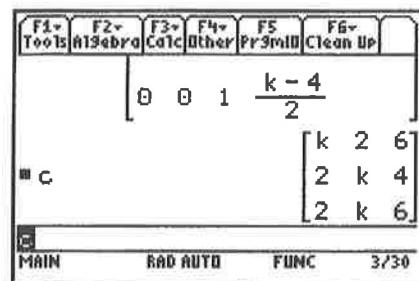


Fig.31

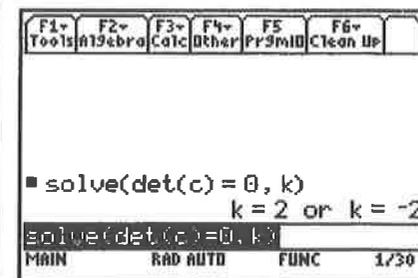


Fig.32

El determinante es cero para los valores -2 y 2 . Para $k = -2$ ya está hecho el análisis. Veamos qué ocurre para $k = 2$: figura 33.

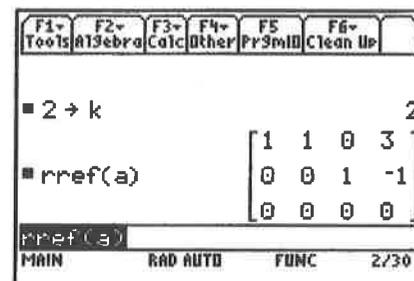


Fig.33

Sistema compatible indeterminado cuyas soluciones se obtienen a partir del resultado que nos muestra la pantalla en la primera y segunda fila de la matriz resultante:

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}x &= 3 - 1 \\y &= 1 \\z &= -1\end{aligned}$$

El estudio, por tanto queda de este modo:

- $k = -2 \Rightarrow$ Sistema incompatible.
- $k = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado
- $k \neq -2$ y $k \neq 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado.

Si lo resolvemos para cualquier valor distinto de -2 y 2 , por ejemplo para $k = 5$: figura 34.

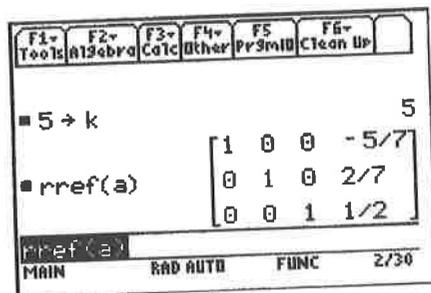


Fig.34

Vemos que la solución es:

$$\begin{aligned}x &= -5/7 \\y &= 2/7 \\z &= 1/2\end{aligned}$$

Sería interesante analizar este ejercicio desde el punto de vista geométrico y podemos hacerlo al habernos ahorrado tiempo utilizando la calculadora.

Teniendo en cuenta que las ecuaciones del sistema propuesto representan geométricamente 3 planos en el espacio, se pide estudiar las posibles posiciones que adoptan según los valores del parámetro k y, en caso de que existan intersecciones, calcularlas.

Según el estudio realizado podemos concluir:

- $k = -2 \Rightarrow$ Sistema incompatible. Los planos no se cortan.
- $k = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado. Los planos se cortan según la recta:

$$\left. \begin{aligned}x + y &= 3 \\z &= -1\end{aligned} \right\}$$

$k \neq -2$ y $k \neq 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado. Los planos se cortan en un punto que será distinto según los valores que tenga el parámetro k , por ejemplo para $k = 5$ se trata del punto: $(-5/7, 2/7, 1/2)$.

5. Propuestas metodológicas

Veamos a continuación algunas propuestas metodológicas para el bloque de Álgebra haciendo uso de calculadoras gráficas:

1. Matrices:

- Trabajar con lápiz y papel matrices de dimensiones pequeñas y con calculadora las matrices de dimensiones grandes.
- Cuando se trate de números grandes o difíciles de manejar (como suele suceder cuando los problemas se extraen de contextos reales) trabajar con la calculadora.
- Resaltar la importancia de la notación (a_{ij}) para aplicaciones a hojas de cálculo y bases de datos.
- En operaciones con matrices: trabajar con lápiz y papel matrices de dimensiones pequeñas (2×2 , 2×3 , etc.) y pasar a la calculadora para dimensiones mayores.
- Obtener el rango de una matriz por el método de Gauss para matrices de dimensiones pequeñas, utilizando la calculadora para matrices de dimensiones más elevadas.
- Insistir en la interpretación de los resultados que nos proporciona la calculadora.
- Aplicar el cálculo matricial a problemas de la vida real y a problemas relacionados con otras áreas; Física, Química, Economía,...
- Hacer algunos problemas de investigación o hacer que ellos mismos descubran propiedades de las operaciones con las matrices.

2. Determinantes:

- Calcular el determinante de matrices cuadradas de dimensiones pequeñas con lápiz y papel, por ejemplo hasta 3×3 . Resolver determinantes de órdenes mayores con calculadora.
- Hacer algunos problemas de investigación o hacer que ellos mismos descubran propiedades de los determinantes y su interpretación geométrica.

3. Sistemas de ecuaciones:

- Significado que tiene tanto el planteamiento como la solución de todo tipo de sistemas de ecuaciones.
- Resolución de sistemas de ecuaciones: aplicar básicamente la calculadora a no ser que sean sistemas de fácil y ágil solución con lápiz y papel.
- Estimar los resultados e interpretar los mismos.
- Interpretar geoméricamente el planteamiento de un sistema así como los resultados de su estudio y soluciones.
- Hacer aplicaciones a problemas con contexto sacados de la vida real y/o aplicaciones a otras áreas que estudian los alumnos.

Bibliografía

- [1] ANZOLA, M. & VIZMANOS, J. R.: *Matemáticas II*, Ed. SM, 1998.
- [2] ANZOLA, M. & VIZMANOS, J. R.: *Matemáticas II aplicadas a las Ciencias Sociales*, Ed. SM, 1998.
- [3] BOTELLA, L. y otros: *La TI-83 en clase: Bachilleratos*, Ed. Texas Instruments España, 1998.
- [4] GUZMÁN, M.: "Papel de la Tecnología en la Educación Matemática", Revista *MATEX*, N° 1, Ed. Texas Instruments España, 1996.
- [5] KOLMAN, B.: *Introductory Linear Algebra with applications*, Ed. Prentice Hall, 1997.
- [6] MORA, J. A. y otros: *Matrices con TI-92*, Ed. Proyecto T3 España, 1999.
- [7] MORA, J. A. y otros: *Matrices con TI-83*, Ed. Proyecto T3 España, 1999.
- [8] QUESADA, A.: *El impacto de las calculadoras gráficas en la enseñanza de aplicaciones matriciales a nivel preuniversitario*, Actas VII JAEM, Ed. SPM Emma Castenuovo de Madrid, 1994.
- [9] RODRÍGUEZ, M. D.: "Recursos en Secundaria: La calculadora gráfica", Revista *AULA de Innovación Educativa*, N.º julio 1999, Ed. GRAO.
- [10] RODRÍGUEZ, M. D.: "Usando la calculadora en el examen de Selectividad", Revista *TIMAT*, N.º 5., Ed. Texas Instruments España, 1999.
- [11] SÁNCHEZ, A.: "Matrices y determinantes con la TI-92", Ed. Texas Instruments España, 1996.
- [12] VELA, D.: "Sistemas de ecuaciones lineales (Álgebra con TI-82)", Revista *TIMAT*, N.º 1, Ed. Texas Instruments España, 1996.
- [13] VIZMANOS, J. R.: "¿Debemos cambiar las pruebas de acceso a la Universidad con el uso de calculadoras gráficas?", Revista *TIMAT*, N.º 4, Ed. Texas Instruments España, 1999.
- [14] WAITS, B.: "El apoyo que dan las calculadoras gráficas para enseñar y aprender mejor matemáticas", Revista *TIMAT*, N.º 1, Ed. Texas Instruments España, 1997.

Diferentes opciones para la resolución de problemas con calculadoras gráficas

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Centro de Profesorado de Linares - Andújar (Jaén)
acarrillo@jet.es

Resumen

Starting from a single calculus problem about maximums and minimums, we propose different ways of solution using the graphics calculators TI-83 and TI-92. The various alternatives let you work with different students, according their interest, motivation and learning rhythm offering different possibilities for their solution, even with different levels of difficulty.

Introducción

El Diseño Curricular del área de Matemáticas correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria, atribuye a la formación matemática el favorecer, fomentar y desarrollar en los alumnos la capacidad de explorar, formular hipótesis, razonar lógicamente y predecir, así como la facultad de usar de forma efectiva diversas estrategias para plantear y resolver problemas relacionados con la vida cultural, social y laboral.

La lectura de este párrafo debería ayudar para cambiar la metodología empleada en el área de matemáticas, para facilitar la incorporación de nuevos hábitos y propuestas de trabajo, así como, no sólo contribuir, sino para no impedir, la utilización en el aula de recursos que enriquezcan la práctica diaria para mejorar los procesos de aprendizaje y aprendizaje.

Siempre que se plantea la utilización de un recurso aparecen razones en su contra, como son las atribuidas al propio sistema educativo que no lo permiten por horarios, currículos, número de alumnos, etc.

A pesar de estas razones, no muy positivas, es conveniente modificar la metodología para favorecer la incorporación de cuantos recursos son habituales en la sociedad y en particular en el entorno del alumno y con la imaginación y la originalidad que caracterizan al docente, diseñar aplicaciones para obtener su mejor aprovechamiento.

Si continuamos la lectura del Diseño Curricular entre sus objetivos encontramos "reconocer el papel de los recursos en el propio aprendizaje".

En este sentido, encontramos el papel de la calculadora como un recurso más, ya que aparece en los medios laborales o domésticos como una simple herramienta de cálculo (que a veces, pero no siempre, puede sustituir al "papel y al lápiz"), debe considerarse como un recurso a través del cual es posible enunciar problemas significativos para el propio aprendizaje.

Si tomamos como referencia la calculadora en el área de matemáticas, plantearemos unas breves reflexiones sobre su utilización en el aula.

Si su utilidad y posibilidades están reconocidas, no sólo en el Diseño Curricular, sino cuando trabajamos con un grupo de profesores en las actividades de formación, ¿Por qué tantos inconvenientes para su empleo en el aula?

En primer lugar, consideramos que el trabajo ya iniciado con la formación del profesorado debe continuar para animar a su uso, mostrando a través de ejemplos y experiencias didácticas las ventajas que ofrecen.

Tras estos primeros ánimos y superada la fase de confianza que el profesor requiere, un material adecuado le permitirá dar los primeros pasos en el aula, para afrontar, a continuación, con ejemplos propios, adecuados a su grupo de alumnos, ciertos conceptos y procedimientos para desarrollar una actitud favorable que reconozca su utilidad.

No debemos olvidar la necesidad del reconocimiento oficial, ya que no en todas las comunidades, ni siquiera en todas las provincias de una misma comunidad, se puede asegurar su utilización en las pruebas de aptitud para el acceso a la universidad, y en algunos casos, no queda claro qué tipo de calculadora se permite y cuál no.

La utilización de la calculadora en los niveles no universitarios, además de entenderse como preparación para su utilización en estudios posteriores para aquellos alumnos que la requieran, se debe enfocar como formación básica para todos los alumnos.

Trabajar con la calculadora en el aula aporta, entre otras, las ventajas siguientes:

- Dedicar mayor atención a las estrategias que a los cálculos.
- Facilitar el acceso a determinados conceptos.
- Permitir la experimentación y exploración a través de métodos de ensayo y error.
- Utilizar estimaciones y aproximaciones.
- Eliminar cálculos repetitivos o complicados.
- Abordar problemas con datos más reales.
- Realizar simulaciones.
- Apoyar los conceptos con las gráficas.

La realización de actividades con calculadora supondrá cambiar la metodología de trabajo en el aula para modificar determinados conceptos, procedimientos y actitudes tradicionales.

La calculadora supondrá, en cuanto a los

• Conceptos:

- Incidir más en las ideas.
- Introducir conceptos a través de las gráficas.
- Estimar y aproximar.
- Simular y experimentar.
- Deducir propiedades y relaciones.
- Investigar y relacionar conceptos.

• Procedimientos:

- Resolver problemas de forma numérica y algebraica.
- Efectuar cálculos complicados y repetitivos.
- Visualizar conceptos.
- Estimular la intuición.
- Manipular mayor cantidad de datos.

• Actitudes:

- Valoración crítica de la tecnología utilizada.
- Cambio en la forma de trabajo.
- Autonomía para comprobar y modificar el resultado.
- Mayor iniciativa personal.
- Realización de actividades en grupo.

También, permite distintas formas de actuación que favorecerán la atención en un mismo grupo de alumnos, a aquellos con dificultades y diferencias en cuanto a intereses, motivación, actitudes o ritmos de aprendizaje.

Además, la adecuada selección de actividades con distintos planteamientos permitirá plantear actividades abiertas con más de una vía para su resolución, con distintos grados de dificultad y de investigación.

El sentido de este trabajo no es ofrecer una exposición de las actividades que se pueden realizar con la calculadora, tan sólo nos conformamos con mostrar como se puede abordar una actividad con procedimientos diferentes.

Qué procedimiento utilizar en cada momento dependerá del nivel educativo en el que se realice la actividad y de los conceptos que se deseen trabajar.

Por ejemplo, la actividad que planteamos trata de obtener un máximo de una función, que podremos resolver sin acudir al concepto de derivada, no conocido por los alumnos de

ESO, aunque con ayuda de la calculadora podemos trabajar y estudiar su gráfica para obtener el valor buscado.

Actividad

Disponemos de 20 metros de alambre para vallar un terreno rectangular. Determinar las longitudes de los lados para que el recinto resulte de área máxima.

Proponemos tres formas diferentes de resolver un problema de máximos y mínimos utilizando la calculadora gráfica.

Estos tres métodos los podemos denominar: gráfico, analítico y geométrico.

Primer método: gráfico

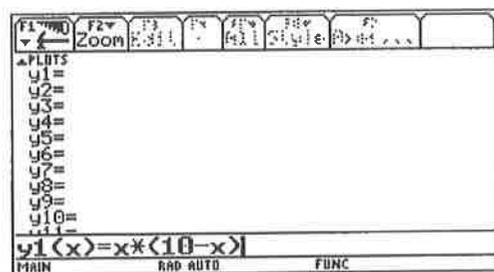
La condición propuesta en el enunciado que relaciona las medidas del recinto rectangular es:

$$2x + 2y = 20 \qquad x + y = 10$$

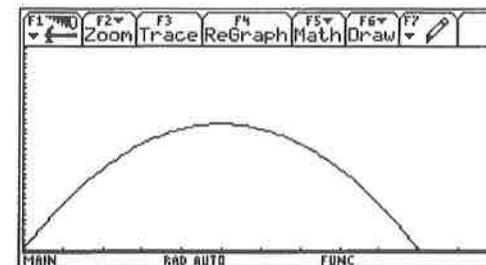
Mientras que la función que debemos estudiar a través de la representación gráfica es la correspondiente al área del recinto:

$$A = xy \qquad A = x(10 - x)$$

Utilizando la calculadora gráfica representamos la función $y = x(10-x)$.



Después de ajustar la ventana de representación, obtendremos la gráfica de la función mostrada en la figura siguiente:

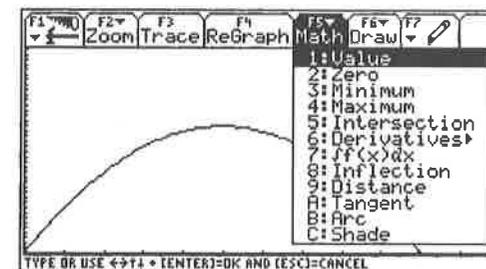


A continuación, podemos buscar el máximo estudiando la tabla de valores de la función

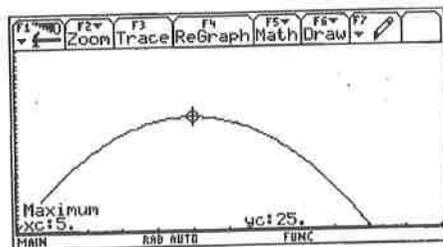
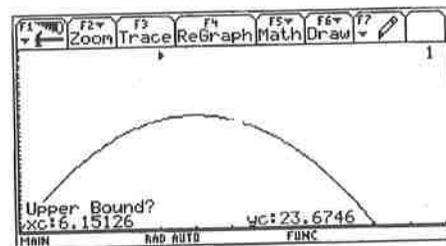
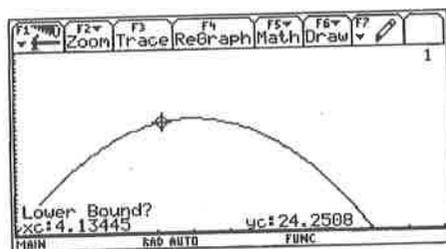
x	y1				
0.	0.				
1.	9.				
2.	16.				
3.	21.				
4.	24.				
5.	25.				
6.	24.				
7.	21.				

x=0.

o con ayuda de las funciones disponibles en la calculadora gráfica, que observamos en el siguiente menú:



Seleccionamos la función **Maximum** para determinar que el valor $x = 5$ hace máximo el área del recinto, como podemos comprobar en las figuras siguientes:



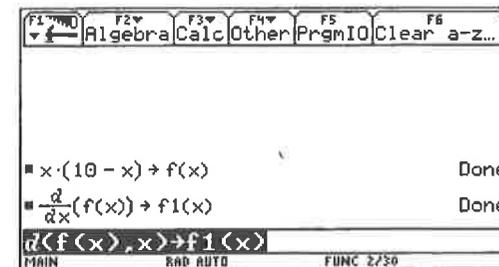
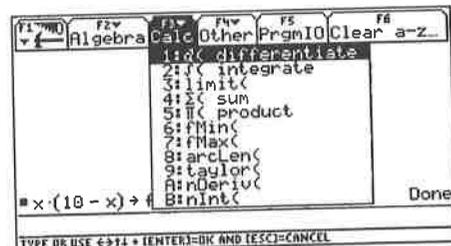
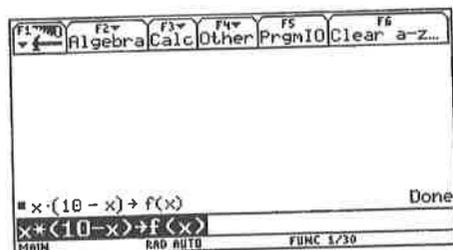
Por tanto, para $x = 5$ e $y = 5$, obtenemos el área mayor que corresponde a un recinto cuadrado.

Segundo método: analítico

Será necesario emplear una calculadora que permita la realización de cálculos simbólicos, para aplicar directamente la condición que debe cumplir un valor x_0 punto para ser un máximo relativo de una función $f(x)$

$$f'(x_0) = 0 \quad f''(x_0) < 0$$

Definimos la función $f(x) = x(10-x)$ y calculamos los valores que anulan a la derivada primera



Utilizando el comando **solve** obtenemos que $x = 5$ es un posible extremo de la función. Por lo que sólo nos queda comprobar el signo de la segunda derivada para este valor.

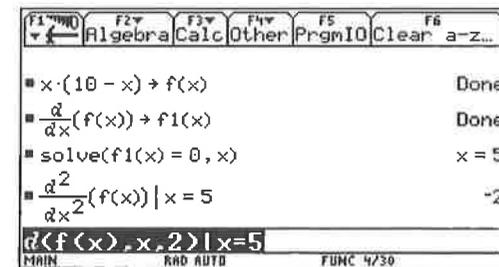
De nuevo utilizando el comando **d**, calcularemos la derivada de f' , que también podemos hallar directamente utilizando la expresión:

$$d(f(x), x, 2)$$

Para obtener directamente el valor para $x = 5$ escribiremos:

$$d(f(x), x, 2) | x = 5$$

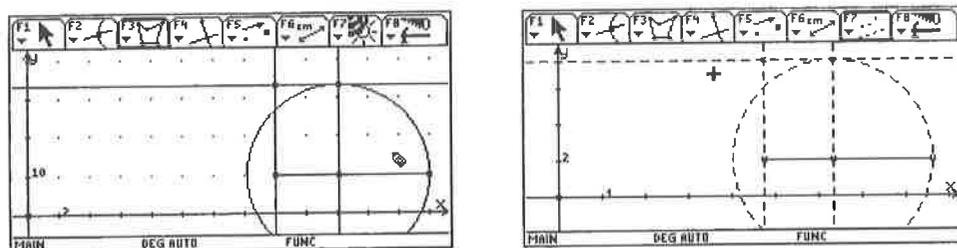
y obtendremos que $f''(5) = -2$ que es menor que cero, por lo que $x=5$ es el máximo de la función.



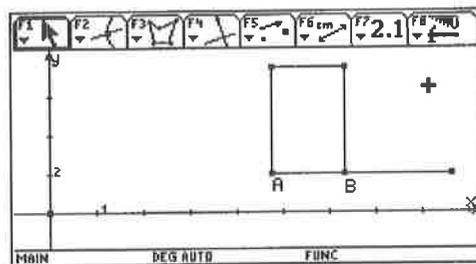
Tercer método: geométrico

En la calculadora **TI-92** disponemos del programa **Cabri Géomètre** para trabajar la geometría en el plano de manera sencilla, por lo que podemos diseñar una construcción que permita visualizar, para el enunciado del problema propuesto, la variación del terreno y la función correspondiente al área.

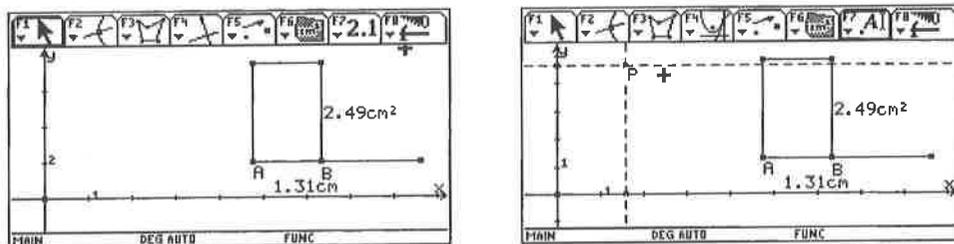
A partir de unos ejes de coordenadas ajustamos las unidades para representar un segmento de una longitud que llamamos l . Sobre él, dibujamos un punto y trazamos un rectángulo cuyos lados correspondan a los segmentos x y $l - x$.



Antes de continuar, ocultamos los elementos que no sean necesarios, dejando sólo los ejes y el rectángulo que representa al recinto que se desea vallar.



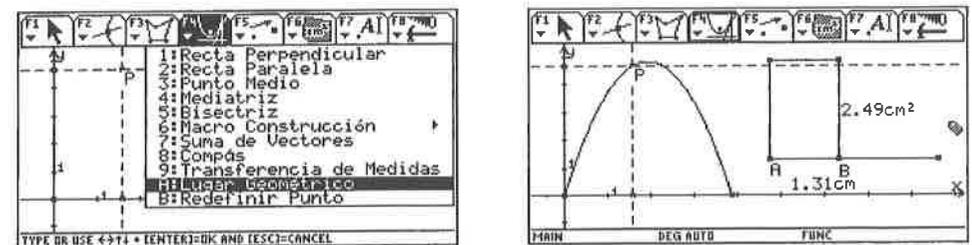
El siguiente paso consistirá en medir el lado AB y el área del rectángulo.



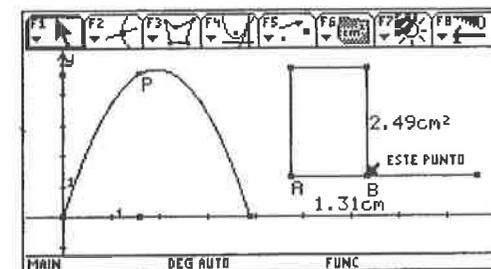
Una vez dibujado el rectángulo, llevaremos la medida del segmento x y la medida del área a los ejes de coordenadas para representar la función que relaciona la longitud del segmento con el área del terreno.

Realizamos la transferencia de medidas a los ejes para obtener el punto P cuyas coordenadas corresponden a la distancia AB y al área del recinto.

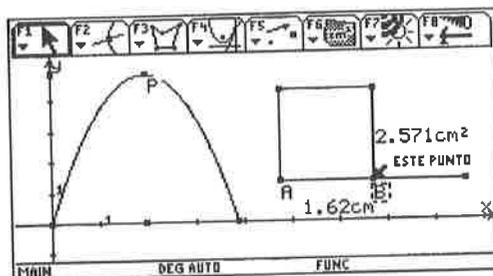
A continuación, utilizando la herramienta **Lugar geométrico** dibujaremos la curva descrita por el punto P cuando la longitud del segmento AB, y por tanto del área, van cambiando.



Aprovechando las posibilidades de iteración que el programa permite, podemos mover el punto B por el segmento para comprobar la variación del recinto y que forma toma cuando el punto P se acerca al máximo de la función.



Además, podemos aumentar la precisión de los cálculos, aunque no lo creemos necesario, pulsando la tecla + una vez seleccionada cualquiera de las medidas existentes en la construcción.



Para comprobar que el área mayor se obtiene cuando la figura es un cuadrado, bastará con la propia observación, aunque también podemos optar por medir el otro lado del rectángulo y comprobar la igualdad de lados cuando el punto P se acerca al máximo de la función.

Conclusión

Actividades como la anterior es fácil encontrar en el currículo de la ESO y el Bachillerato y plantear su resolución para aprovechar las posibilidades de las calculadoras, considerando los conceptos, procedimientos y actitudes que se desean trabajar y también, qué calculadora vamos a utilizar para su resolución, aunque esto es secundario, ya que siempre podremos aprovechar la ayuda que ofrecen y habitar a los alumnos para trabajar con ellas.

Que el alumno utilice la calculadora no supone aprender menos, sino aprender de otra forma.

Compass Avoidance*

Tomás Recio

Universidad de Cantabria (Spain)
recio@matesco.unican.es

Resumen

The talk's goal is to analyse the conceptual implications for math education that arise from the use of computers in two precise situations:

- 1) *As a tool for geometric reasoning (automatic theorem proving)*
- 2) *As a replacement for ruler and compass, the paradigmatic scientific tools of school (computational geometry). The underlying thesis is that popular dynamic geometry programs such as Cabri are far from fulfilling the conceptual requirements of the 21st century elementary geometry education.*

1. Introduction

The scientific tools I was taught to handle during my childhood were the so called Euclidian tools (compass, ruler, etc...) for technical design, the logarithmic tables and the slide rule (in order to perform arithmetic calculations). About twenty years later (and about twenty years ago) my sons' elementary instruction lacked of logarithmic tables and of slide rules, both replaced by pocket calculators and computers; but compass and ruler remained for them a basic scientific/technological tool. Today they attend science and engineering courses at Spanish universities, and they are taught to use Autocad; but still compass and ruler masterly is frequently required to pass some fundamental courses on geometric design.

It goes without saying that the academic demand of compass and ruler expertise has its counterpart in the way students learn –in the academic setting– how to approach problems concerning geometric constructions. For instance, when a student is asked to draw a tangent to a circle from a given exterior point, it is implicitly assumed that he is not to

* Based in a short communication presented at the Spanish Special Sesion of IMACS-ACA'99.

draw some "approximate" sketch with his bare hands and eyes; rather, the problem he is assumed to solve is how to accomplish this task by means of an "ideal" sequence of exact compass/ruler movements. We could say that the medium (the Euclidian tools) for geometric constructions ends up finally being the message to be transmitted in Academia. Another consequence of this tradition is the underlying compass/ruler metaphor in many computer programs for geometry education: basic commands and displacements (with the mouse) mimic compass/ruler operations.

Now it happens that computers are today's geometric design tools, as compass and ruler were Euclid days' tools. Nowadays there is little room for Euclidean artifacts in professional draughtsmanship. Moreover, it happens that our students paint or draw so often via word processors such as the one I am writing this paper with. But we still present school geometry in a way that is intimately constrained by the old fashioned devices. Thus, when our secondary education students switch off their personal computers to get ready for school, they have got, as well, to turn off in their minds the kind of geometry they could have been exposed to through the manipulation of many computer programs; and they have to come back to academic "reality"...

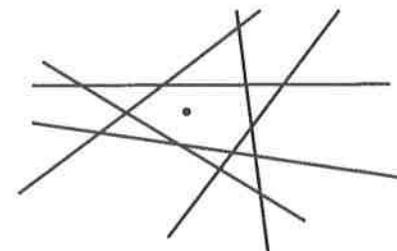
By no means should these considerations be understood as proclaiming the need of a "pixelized" version of geometry (the study of figures as they appear in a computer screen) as the primary source for developing space intuition; I am totally in favour of the traditional idea of geometry as the study of ideal spatial objects. The point I will like to emphasize here refers to the way we should approach the development of spatial intuition in school, and does not question the nature of such intuition in itself. I am inclined to believe that there is a rich geometry world around the many faces of computer aided geometric design, as there was a rich compass and ruler geometry. And that such world is—sociologically speaking—waiting for our students to explore: they will get into it, anyway. So we must develop a new approach to geometry that takes this world into consideration. The new approach will involve making educational choices, such as emphasizing geometric thinking about many simple objects rather than dealing with few, more complicated ones; or opening the curriculum to elementary convexity properties; or establishing a link between performing geometric operations and counting their number... Of course it also implies using computers, but this is not as crucial as it might seem at first glance. Still, it implies that computer's role in geometry education deserves, in my opinion, something else from being powerful transpositions of a compass/ruler-driven geometry. It is the aim of this short communication to present summarily these ideas and some consequences.

2. A simple problem

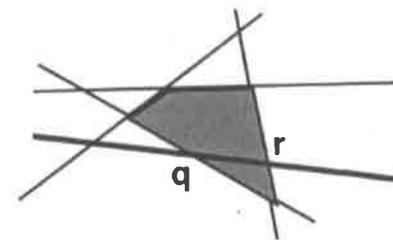
Let us consider, for instance, the following problem

P: Given some lines and a point (not in any of these lines), construct the polygon

which is the boundary of the half-planes (determined by the lines) containing the given point.



This is an important problem in many practical applications, from forestry to meteorology. Moreover, this is almost a visually-trivial problem. Seemingly, there is little a compass has to do about it. We can easily determine the region R bounded by a small number of lines, say, by 4 lines. Then, in order to find the region bounded by 5 lines we could start constructing the region determined by four of them (in bold in the figure below). Then we have got to pick a new line, finding its two points $\{q,r\}$ of intersection with R (the shadowed region in the figure). Finally we must choose which of the two subregions of R contains the given point and output, accordingly, the new polygon.



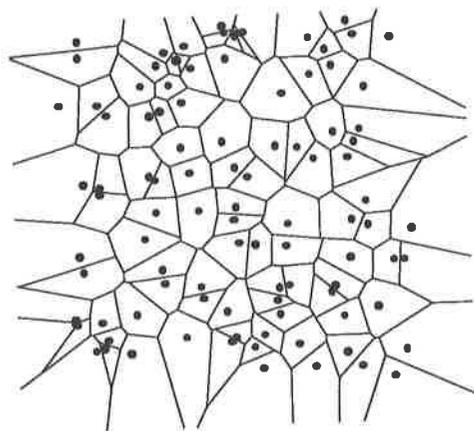
Obviously, in order to find the corresponding region in the case of several more lines, it is enough to repeat this procedure a certain number of times.

Most of these operations are, geometrically speaking, rather irrelevant in the usual scholar context. Finding the line versus quadrilateral intersections, in the standard-geometry paradigm, is "just" pointing out the intersections of a line and of a quadrilateral. We obviously "see" where this intersection happens, and the same consideration applies to all the other steps in the construction. The real problem arises when one considers—as it happens in applications—that we have 30 lines, 100 lines, 10,000 lines. For instance, it could happen that we are considering a large collection of meteorological data stations and

that we would like to extrapolate the data from each station to its surrounding region. But, what should be taken as the surrounding region of a given meteorological station? The meteorologist Thiessen, about 100 years ago (cf. for applications of this sort of constructions, the book by Okabe, A.; Boots, B.; Sugihara, K. (1992): "Spatial Tessellations. Concepts and Applications of Voronoi Diagrams", J. Wiley. Chichester), considered that, under some hypotheses, the surrounding region of each site could be described by means of the bisectors from the given site to all the others. For example, if we have three sites (i.e. three data collecting stations), represented by dots in the figures below, we should consider as the region around site S, the interior of the polygon obtained intersecting the half planes (containing S) determined by the bisector lines 1, 2 and 3 (bisector=line of points equidistant from two given sites). The resulting regions for each of the three sites appear in the figure below, to the right: the one of S it is just bounded by part of lines 2 and 3.



This simple picture for three sites hides a rather complex structure that is better reflected by displaying (next figure) the corresponding regions for a collection of 100 randomly placed sites.



Therefore, our problem P (that is, after all, a way of computing just one of the above regions) appears connected to some practical geometric constructions...such as the Thiessen partition of the plane. In the case of dealing with a large number of lines, a short-sighted way of thinking about problem P would conclude that it is "only" a matter of using a computer that takes care of the large number of data and repeating the line/polygon intersection procedure outlined above.

But computers do not see...the way we do. Thus, in order to mimic with the computer this simple construction, we ought to think in this other way: imagine we have a polygon given by the (ordered) sequence of its vertices, and that we have one line (given, say, by two points); how do we find which edges of the polygon intersect the line and where? How many elementary arithmetic operations (say, with integers) do we have to perform if we assume the given vertices, points, have rational coordinates? Our naive approach to this problem yields a number of operations proportional to the number of edges of the polygon, for instance, 4. So, if we proceed by induction in this way, from the region R determined by 4 lines to the region determined by 5 lines, to the region determined by 6 lines, etc., we will end up with a number of operations which is proportional to the square of the number of given lines. This is no trivial for a modest computer if we have already 30 lines. Computing the Thiessen partition displayed above took already several seconds in my computer.

3. Solving the problem

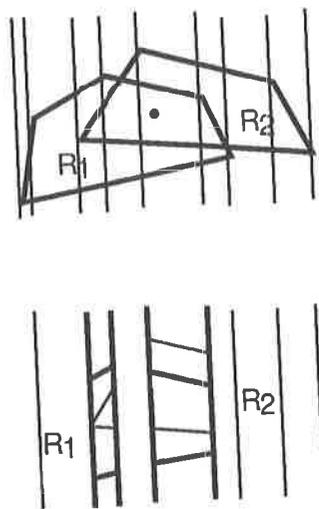
Hopefully it should be clear now, at least, that some visually trivial problems might have practical interest and, also, that they are related to (rather simple) geometric situations. Moreover it is quite probable that the reader wonders why both facts should have any relevance on geometry teaching. After all, he might say, speeding up tedious (but trivial) computations is the realm of computer sciences, not of mathematics.

It is not totally so. There is a "Geometry of Computation" (or Computational Geometry, cf. a recent book in French on the subject: Boissonat, J-D.; Yvinec, M. (1995): "Géométrie Algorithmique", Ediscience. Paris) as a fundamental part of the "Mathematics of Computation". Now history tells us that many classic geometry (and algebraic) problems arose when considering the effect of the ruler and compass technology in our manipulation of space (cf. Toussaint, G. (1992): "Scanning the Issue", in "Computational Geometry", Proceedings of the IEEE, sept. 1992, vol.80, no.9).

Why should we not continue with this trend, considering now as a primary goal the analysis of the geometric problems that arise from the use of computers? But, the reluctant reader could argue, we are interested in teaching geometry, not software engineering: even to learn about geometric problems arising in computing one must first learn geometry. And surely young students are not going to do better if they are asked to adopt, crudely, the point of "view" of a computer.

This is quite true, but not more true than the fact they are not going either to learn the new geometry environment through compass and ruler constraints. The problem is to identify some essential shift in the geometric ideas behind the technology driven approach. Some ideas that are relevant in the new trend but that are, as well, relevant for learning geometry in its most basic conception. For instance, induction is, many times, better replaced in this Computational Geometry approach, by the so called "divide and conquer" paradigm. Let us go back to problem P and let us proceed not adding one line after the other, but dividing the number N of lines into two sets of approximately half the number of lines, and imagining we can solve the same problem P for each of the two sets of lines, yielding two regions R_1 and R_2 . Then, how could we find the solution of P as the intersection of R_1 and R_2 ?

This problem can be also formulated in this other way: given two convex polygons each with m (roughly $m=N/2$) edges, how to find efficiently their intersection?



A purely geometric analysis shows that we can accomplish this by intersecting N times two polygons each with at most four edges. The two given polygons are partitioned by vertical lines through each vertex—in total by N vertical lines—and therefore their global intersection turns to be the gluing of the corresponding intersections on each vertical strip. But on every strip the two polygons are either empty, a triangle or a quadrilateral, and thus their local intersection can be found independently of the number N of vertices. See the above two figures for a rough explanation.

Thus the extra price we have to pay for dividing this problem (of finding the solution for the problem P for N lines) into two pieces is essentially proportional to the number N ,

that is, if $T(N)$ is the number of operations for the instance N of the problem, we have that $T(N)=2T(N/2)+CN$, where C times N takes into account the number of operations needed to intersect the two subregions R_1 and R_2 . Now each sub problem could be solved, again by dividing it into two sub problems of, roughly, equal size, and so on. Finally we end up with a number $T(N)$ proportional to $N \cdot \log(N)$, which is much better than N^2 (compare already for $N=30$).

4. Conclusions

Let us extract some conclusions from this solution. It requires geometric thinking, not computer familiarity. Convexity is what makes it work (otherwise we could have many more pieces from each region in every vertical strip), and the "divide and conquer" paradigm is what makes it valuable, since it allows reducing substantially the number of geometric operations. As said in the introduction, this example could provide some hints about the shift in geometric ideas that could be behind a "compass avoiding" proposal:

1. Thinking about geometric constructions through computer constraints is as artificial (in the sense of non-human) as it is through Euclidean tools. Not more, not less. For instance, we can not say at no cost that a line meets "here" with a polygon, just because we "see" it (as in the compass/ruler culture we can not draw a tangent with bare hands). But requires a different training. School geometry should provide it.

2. Thinking about geometric constructions through computer constraints could be rich in simple, elementary situations that require the hypothetical manipulation of mental geometric objects, as it happens in the traditional approach. The computational approach manipulates, usually, many, but simple objects. But the geometric hypothetical constructions should work in every case, even for a small number of objects (see the situation above about the intersection of two polygons and how our proof deals with figures representing polygons with few edges). The traditional approach manipulates always a few, albeit complicated, objects; it makes mental manipulation and representation more difficult.

3. The rigorous justification of both computational geometry constructions and compass/ruler constructions requires elementary geometry. No one makes more new traditional geometry nowadays than computational geometers. But the favourite topics for computational geometry are not the same as in the compass/ruler geometry. Convexity is relevant there, for example, and usually postponed in the traditional approach.

4. There is an algorithmic thinking (counting steps, for instance) behind the computational geometry approach. This trend was not alien to the compass/ruler geometry (starting with Euclid, who already analysed in one of his books—in today's words—the computational equivalence of two models of geometric computation; and continuing with Hilbert

or Lemoine, to mention a few). But it is absolutely not present in traditional geometry education, against the recommendations of the ICMI (see the International Commission on Mathematical Instruction "School Mathematics in the 1990's" (Kuwait, 1986), document).

The previous example could also yield some misleading impressions. I am not proposing to present this problem to elementary school children the way I have done here; rather I am suggesting to take into consideration constructions of this sort, after being didactically digested. For this purpose it is relevant to remark that:

5. Currently there is no geometric software that exploits the didactical potential of solving elementary geometric problems with a computer, using the computer as a tool in itself and not as a way to merely reproduce in the screen the traditional approach through old fashioned drawing tools.

In conclusion, I hope to have provided in this short paper, some arguments supporting my opinion that a "didactically relevant" computational geometry awaits to be developed. In particular, computer programs to help learning about the geometry of the future are yet to be built.

References

Two references in Spanish discussing the same ideas are:

- [1] T. RECIO: *Cálculo Simbólico y Geométrico*, Editorial Síntesis, Madrid, 1998.
- [2] T. RECIO: *Tratamiento automático de la información geométrica*, UNO, n.º 20, abril 1999, pp. 63-75.

Búsqueda automática de lugares geométricos

Eugenio Roanes Macías † y Eugenio Roanes Lozano ‡

Dpto Algebra, Fac. de Educación, Univ. Complutense

† roanes@eucmos.sim.ucm.es , ‡ eroanes@eucmos.sim.ucm.es

Resumen

Looking for geometric loci is easier using suitable computer systems. A Dynamic Geometry System can help in a first exploration of the problem and a Computer Algebra System is necessary to use algebraic methods of mechanical proving. How to use the last one in the discovering process and how to proof theorems relative to geometric loci in a automatic way is described. Two examples are shown as illustration: the extension of Simson's theorem discovered last century by Jakob Steiner and a second extension recently found by Professor Miguel de Guzmán.

1 Introducción

La determinación de lugares geométricos se hace más cómoda utilizando algunos de los sistemas computacionales desarrollados en los últimos años.

El proceso previo de exploración empírica de problemas relativos a lugares geométricos se facilita extraordinariamente haciendo uso de alguno de los modernos sistemas de Geometría Dinámica, como Cabri-géomètre, The Geometer's Sketchpad o Cinderella.

Por otra parte, los métodos algebraicos de demostración automática son hoy practicable y fácilmente aplicables gracias a los actuales sistemas computacionales de cálculo simbólico, como Axiom, Derive, Macsyma, Maple, Mathematica, MuPAD o Reduce.

T. Recio desarrolla en [5] la posibilidad de aplicarlos a completar hipótesis de teoremas geométricos. Aquí vamos a aplicarlos a descubrir y demostrar de modo automático teoremas relativos a lugares geométricos.

El propósito de este trabajo es el de contribuir a la divulgación de estos modernos métodos de investigación en Geometría, presentándolos desprovistos de todo formalismo, de modo que sean aprovechables por los no especializados en técnicas de Algebra Computacional.

Ello es más fácil de presentar a la luz de ejemplos concretos de lugar geométrico. Las generalizaciones del teorema de Simson encontradas por J. Steiner y por M. de Guzmán [7] van a servirnos como modelo en la presentación de estas técnicas y métodos.

2 Teorema de Simson: generalizaciones

Es uno de los más famosos de la Geometría Euclídea. Es atribuido a Robert Simson (1687-1768), profesor de la Universidad de Glasgow, quizás por ser autor de un libro, *Elements of Plane Geometry*, del que llegaron a hacerse hasta 24 ediciones. Pero parece que su verdadero autor fue el también escocés Wallace hace 200 años (1797).

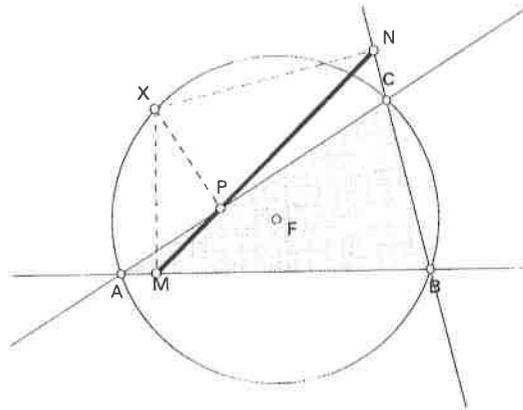


Fig. 1

Teorema de Simson-Wallace (enunciado clásico).- Se consideran en el plano euclídeo un triángulo, ABC , un punto, X , y sus proyecciones ortogonales sobre las rectas-lados AB, BC, CA , que denotamos respectivamente M, N, P . Si X está en la circunferencia circunscrita a ABC , entonces los tres puntos M, N, P están alineados (Fig. 1).

Su demostración usual (vía Geometría Sintética) está basada en el concepto de arco capaz (ver, por ejemplo, [3], pág. 29, donde se prueba la igualdad de los ángulos XNP y XNM). Su demostración automática puede hacerse con bases de Groebner (ver, por ejemplo, [3], pág. 185) o por pseudodivisiones (ver, por ejemplo, [3], pág. 199).

La primera generalización del teorema de Simson se debe al gran geómetra suizo Jakob Steiner (1796-1863), considerado por algunos como "el Apolonio de los tiempos modernos".

Teorema de Simson generalizado por Steiner.- Dado un triángulo, ABC , el lugar geométrico de los puntos, X , cuyas proyecciones ortogonales, M, N, P , sobre las rectas-lados AB, BC, CA , determinan un triángulo, MNP , de área constante es una circunferencia de centro el circuncentro de ABC . Si, en particular, el área del triángulo MNP es nula, entonces dicha circunferencia es la circunscrita al triángulo ABC (Fig. 2).

Este enunciado data de 1823, siendo Steiner profesor de la Univ. de Berlín, apareciendo en los Annales de Gergonne XIV (1823-24), pág. 13, (citado en [1]). La demostración fue encontrada un año después, independientemente, por Querret y por Sturm y publicada en

el mismo volumen de los referidos Annales (págs. 280 y 286, respectivamente). Como el área del triángulo MNP sólo es nula si sus vértices son puntos alineados, el enunciado de Steiner generaliza al clásico teorema de Simson-Wallace.

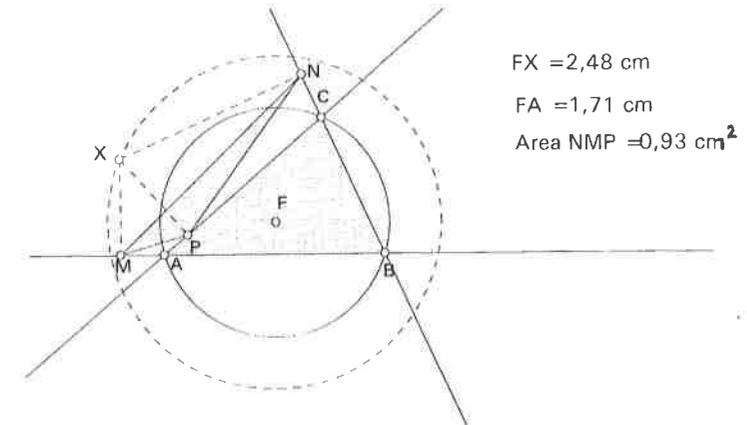


Fig. 2

Una segunda generalización encontrada por M. de Guzman, ha sido publicada recientemente en [7]:

Teorema de Simson generalizado por Guzmán.- Se consideran en el plano euclídeo un triángulo, ABC , y tres direcciones fijas (no paralelas a los respectivos lados de ABC). El lugar geométrico de los puntos, X , cuyas proyecciones, M, N, P , sobre las rectas-lados de ABC , en aquellas tres direcciones respectivas, determinan un triángulo, MNP , de área constante es una cónica.

La demostración desarrollada en el mencionado artículo es de tipo analítico-sintética.

3 Exploración experimental

El problema planteado en ambas generalizaciones puede ser explorado de modo experimental sobre un Sistema de Geometría Dinámica (como Cabri-géomètre, The Geometer's Sketchpad, Cinderella, etc), para descubrir, en una primera aproximación, el mencionado lugar geométrico. Describimos a continuación posibles experiencias a realizar.

Experiencia 1 (exploración experimental de la generalización de Steiner).- Construir un triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Elegir un punto arbitrario, X , y proyectarlo ortogonalmente sobre las rectas-lados de ABC . Construir el triángulo de vértices dichas proyecciones y calcular su área. Mover el punto X procurando que dicho área se mantenga constante, para localizar el lugar de los puntos desde los que ello se consigue.

Experiencia 2 (comprobación experimental de la generalización de Steiner).- Construir un triángulo ABC , su circunferencia circunscrita y otra concéntrica con esta. Elegir sobre esta última un punto, X , y proyectarlo ortogonalmente sobre las rectas-lados de ABC (Fig. 2). Construir el triángulo de vértices dichas proyecciones y calcular su área. Mover el punto X sobre esa circunferencia, comprobando que dicho área se mantiene constante. Repetir para otras circunferencias concéntricas con la circunscrita. Repetir para la circunscrita, comprobando que ahora el área es nula.

4 Demostración automática de un lugar

T. Recio propone en [5] la utilización de técnicas de demostración automática (basadas en bases de Groebner) para completar hipótesis de teoremas geométricos. Vamos aquí a mostrar cómo aplicar estas técnicas a descubrir lugares geométricos, al tiempo que se demuestra automáticamente cuál es la ecuación del lugar buscado.

Las técnicas que utilizaremos están basadas en seudodivisiones, como se propugna en [2], por ser su complejidad computacional menor que en las basadas en bases de Groebner. Se trata de técnicas cuya fundamentación algebraica es muy simple, pero cuya utilización requiere el concurso de un sistema cálculo simbólico, por lo extremadamente laboriosas que resultan ser las citadas seudodivisiones.

4.1 Algoritmo de seudodivisión

Dos polinomios, p y q , en las variables x, y, \dots, v , pueden ser considerados como polinomios en la única variable x , cuyos coeficientes son polinomios en las restantes variables:

$$p = p_n(y, \dots, v) \cdot x^n + \dots + p_1(y, \dots, v) \cdot x + p_0(y, \dots, v)$$

$$q = q_h(y, \dots, v) \cdot x^h + \dots + q_1(y, \dots, v) \cdot x + q_0(y, \dots, v)$$

Ahora bien, al tratar de efectuar la división euclídea usual de p entre q , en general se obtienen un cociente y un resto cuyos coeficientes son expresiones racionales (no enteras) en las variables y, \dots, v .

Ello se evita multiplicando al dividendo por el coeficiente líder del divisor elevado a un exponente entero apropiado. Basta elegir dicho exponente, como el entero, m , resultante de restar el grado de p (respecto de la variable x) menos el de q y sumar uno, es decir, $m = n - h + 1$.

La división polinómica usual del polinomio producto del p por q_h^m , entre el polinomio q , se denomina *seudodivisión* de p entre q (respecto de x) y el cociente y el resto obtenidos, se denominan *seudocociente* y *seudorresto*. Ambos son expresiones enteras (no fraccionarias), según puede probarse. El factor q_h^m , por el que se multiplica el dividendo, suele denominarse *factor multiplicador* de la seudodivisión. Al seudorresto lo denotaremos *sresto*(p, q, x).

Lema.-Sean $c(x, y, \dots, v)$ y $r(x, y, \dots, v)$ el seudocociente y seudorresto de la seudodivisión de $p(x, y, \dots, v)$ entre $q(x, y, \dots, v)$ respecto de la variable x . Los valores de las variables para los que se anulan $p(x, y, \dots, v)$ y $q(x, y, \dots, v)$ también anulan al seudorresto $r(x, y, \dots, v)$.

Su demostración es inmediata consecuencia de la igualdad $r = q_h^m \cdot p - q \cdot c$.

4.2 Planteamiento en coordenadas

Para abreviar cálculos, elegimos un sistema de referencia de origen el vértice A del triángulo y cuyo semieje positivo de abscisas pase por B . Respecto de tal sistema, las coordenadas de los vértices, A, B, C , el circuncentro F , el punto X y sus proyecciones, M, N, P , pueden expresarse de modo general en la forma:

$$A(0, 0), B(b, 0), C(c, d), F(f, g), X(x, y), M(m, 0), N(n, h), P(p, q)$$

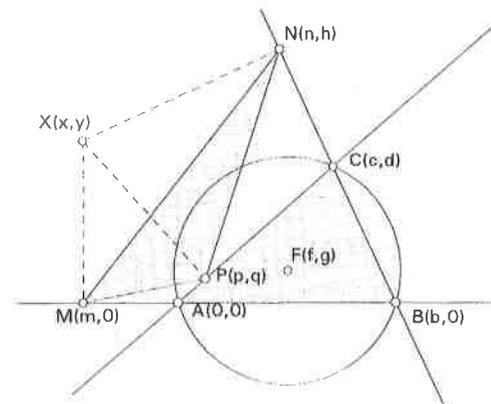


Fig. 3

Comencemos por determinar analíticamente las condiciones de la hipótesis. El circuncentro, F , queda determinado por equidistar de A, B y C , de donde resultan las dos condiciones:

1) $dist(F, B) = dist(F, A)$ equivale a la anulación del siguiente polinomio $h1$

$$h1 = (f - b)^2 + g^2 - (f^2 + g^2)$$

2) $dist(F, C) = dist(F, A)$ equivale a la anulación del polinomio $h2$

$$h2 = (f - c)^2 + (g - d)^2 - (f^2 + g^2)$$

Al ser nula la segunda coordenada de M , este punto ya es de la recta AB , por lo que ser M proyección ortogonal de X sobre AB , se traduce en una única condición:

3) $XM \perp AB$ equivale a la anulación del polinomio $h3 = m - x$.

El que N sea proyección ortogonal de X sobre BC , se traduce en dos condiciones:

4) N está en la recta BC equivale a la anulación del polinomio $h4 = (n - b)d - h(c - b)$

5) $XN \perp BC$ equivale a la anulación del polinomio $h5 = (n - x)(c - b) + (h - y)d$

El que P sea proyección ortogonal de X sobre CA , se traduce en dos condiciones:

6) P está en la recta CA equivale a la anulación del polinomio $h6 = pd - qc$

7) $XP \perp CA$ equivale a la anulación del polinomio $h7 = (p - x)c + (q - y)d$

4.3 Demostración automática del enunciado de Steiner

Vamos ya a ocuparnos del descubrimiento del lugar geométrico del enunciado de Steiner, al tiempo que se desarrolla una demostración automática del mismo, efectuandoseudodivisiones. Abordaremos el problema en dos fases sucesivas.

Problema directo: si el área de MNP es la constante S , entonces ¿dónde está X ?

Como el área, S , del triángulo MNP viene dada por

$$S = \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} p & q & 1 \\ n & h & 1 \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(ph - nq + mq - mh)$$

la condición de ser S el área de MNP equivale a la anulación del polinomio

$$h8 = 2S - (ph - nq + mq - mh)$$

A partir de las ocho condiciones consistentes en la anulación de los polinomios $h1$ a $h8$, se trata de obtener una expresión que relacione las coordenadas del punto X con los datos del triángulo y su circuncentro. Para obtener dicha expresión, ejecutaremosseudodivisiones.

Observemos que b, c, d, S son variables libres o independientes, por lo que, desde un punto de vista algebraico, $h1, \dots, h8$ pueden ser considerados como polinomios en las variables $f, g, m, n, h, p, q, x, y$ con coeficientes en $k[b, c, d, S]$, donde k es el cuerpo base.

Comenzaremos por eliminar las coordenadas de M, N y P . Ejecutando laseudodivisión de $h8$ entre $h3$ respecto de m , no aparecerá m en elseudorresto (que denotamos $r1$), por ser $h3$ de grado uno en la variable m :

$$r1 = \text{sresto}(h8, h3, m) = 2S - ph + nq - xq + xh$$

Ejecutando laseudodivisión de $r1$ entre $h4$ respecto de n , no aparece n en elseudorresto, que denotamos $r2$:

$$r2 = \text{sresto}(r1, h4, n) = 2dS - dph - dxq + dxh + qdb + qch - qhb$$

Para eliminar h puede usarse $h5$, pero $h5$ contiene a la variable n (que ya ha sido eliminada), por lo que se ha de eliminar previamente n de $h5$, sustituyendo $h5$ por elseudorresto, $H5$, de dividirlo entre $h4$ respecto de n :

$$H5 = \text{sresto}(h5, h4, n) = \phi(y, p, x, q, h)$$

Con la notación $\phi(y, p, x, q, h)$ se desea indicar que resulta un polinomio en las variables dependientes y, p, x, q, h , de grado mayor que cero en cada una de ellas, que omitimos por brevedad. Ahora porseudodivisión de $r2$ entre $H5$ respecto de h , no aparece h en elseudorresto, que denotamos $r3$:

$$r3 = \text{sresto}(r2, H5, h) = \phi(y, p, x, q)$$

Porseudodivisión de $r3$ entre $h6$ respecto de p , no aparecerá p en elseudorresto, $r4$:

$$r4 = \text{sresto}(r3, h6, p) = \phi(y, x, q)$$

Para eliminar q puede pensarse en usar $h7$, pero $h7$ contiene a la variable p (que ya ha

sido eliminada), por lo que se ha de eliminar previamente p de $h7$, sustituyendo $h7$ por elseudorresto, $H7$, de dividirlo entre $h6$ respecto de p :

$$H7 = \text{sresto}(h7, h6, p) = \phi(y, x, q)$$

y ahora porseudodivisión de $r4$ entre $H7$ respecto de q , no aparece q en elseudorresto, $r5$:

$$r5 = \text{sresto}(r4, H7, q) = \phi(y, x)$$

Finalmente, para relacionar las coordenadas de X con las coordenadas, (f, g) , del circuncentro (contenidas en $h1$ y $h2$), ejecutamosseudodivisiones entre esos dos polinomios:

$$r6 = \text{prem}(r5, h1, b)$$

$$r7 = \text{prem}(r6, h2, c)$$

resultando

$$r7 = -d^5x^2b - d^5y^2b + 2fbxd^5 + 8fbd^4S - 8cgd^3bS + 16cgd^3Sf - 8f^2cbd^2S + 16f^3cd^2S + 2gd^5by - 8gd^3fbS + 8g^2d^4S + 16gd^3f^2S - 8d^4f^2S$$

La anulación de los polinomios $h1$ a $h8$, implica la anulación del polinomio $r7$, según sigue del lema de 4.1, aplicado reiteradamente.

Esta ecuación, $r7 = 0$, proporciona del lugar geométrico buscado, que resulta ser una circunferencia. Vamos a determinar su centro. Como los términos de $r7$ no constantes (de grado total mayor que cero en x, y) aparecen todos multiplicados por d^5b , puede dividirse $r7$ entre d^5b respecto de d (lo que es lícito por ser $d \neq 0 \neq b$, supuesto el triángulo no degenerado), para obtener como cociente (notado $C7$) dichos términos sin su factor común:

$$C7 = \text{cociente}(r7, d^5b, d) = -x^2 - y^2 + 2fx + 2gy$$

Se ha obtenido pues una circunferencia de centro (f, g) , que es el circuncentro del triángulo ABC . Su radio se calcula ahora en la forma usual, a partir del término independiente del polinomio $r7$, obteniéndose una expresión racional en S y en las coordenadas de los vértices de ABC . Dicho radio tiene particular interés para el caso en que el triángulo MNP tenga área nula. Sustituyendo $S = 0$ en dicha expresión racional, se obtiene $f^2 + g^2$, que es el radio de la circunferencia circunscrita.

Conclusión: Los puntos X , tales que el área de MNP es constante, están en una circunferencia de centro el circuncentro de ABC . Si, en particular, este área es nula, entonces dicha circunferencia es la circunscrita.

Problema recíproco: para todos los puntos X de una circunferencia de centro el circuncentro de ABC , ¿es el área del triángulo MNP la misma?

Vamos a analizar si dicho área depende sólo de la distancia del punto X al circuncentro, F . Por ser tal distancia $\sqrt{(x-f)^2 + (y-g)^2}$, la condición $\text{dist}(X, F) = r$ equivale a la anulación del polinomio

$$h9 = (x-f)^2 + (y-g)^2 - r^2$$

Además, las siete condiciones consistentes en la anulación de los polinomios $h1$ a $h7$ siguen ahora siendo válidas. Por otra parte, la expresión del área, S , del triángulo MNP , equivale

a la anulación del polinomio $h8$, anteriormente considerado, pero ahora S no es una constante por hipótesis, sino la variable dependiente cuyo valor se desea determinar.

Notemos que ahora b, c, d, r son las variables libres o independientes, por lo que, desde un punto de vista algebraico, $h1, \dots, h8, h9$ pueden ser considerados como polinomios en las variables $f, g, m, n, h, p, q, x, y, S$ con coeficientes en $k[b, c, d, r]$, donde k es el cuerpo base.

Por tanto, a partir de las nueve condiciones $h1$ a $h9$, se trata de obtener una expresión que determine el área de MNP en función de r y de las coordenadas de los vértices del triángulo. Para ello, efectuaremos seudodivisiones adecuadas, que comentamos brevemente.

Comenzamos sustituyendo el polinomio $h9$ por otro en que no aparezcan las variables g ni f , efectuando seudodivisiones sucesivas entre $h2$ y $h1$:

$$\begin{aligned} h9_2 &= sresto(h9, h2, g) \\ h9_3 &= prem(h9_2, h1, f) \end{aligned}$$

Sustituimos ahora el polinomio $h8$ por otro en que no aparezcan las variables p ni q , efectuando seudodivisiones sucesivas entre $h6$ y $h7$:

$$\begin{aligned} h8_2 &= sresto(h8, h6, p) \\ h7_2 &= sresto(h7, h6, p) \\ h8_3 &= sresto(h8_2, h7_2, q) \end{aligned}$$

Vamos a sustituir el polinomio $h8_3$ por otro en que no aparezcan las variables n ni h , efectuando seudodivisiones sucesivas entre $h4$ y $h5$:

$$\begin{aligned} h8_4 &= sresto(h8_3, h4, n) \\ h5_2 &= sresto(h5, h4, n) \\ h8_5 &= sresto(h8_4, h5_2, h) \end{aligned}$$

Sustituimos el polinomio $h8_5$ por otro en que no aparezca la variable m , efectuando una seudodivisión entre $h3$:

$$h8_6 = sresto(h8_5, h3, m)$$

Finalmente, sustituimos $h8_6$ por el resto de su seudodivisión entre $h9_3$ respecto de y :

$$h8_7 = sresto(h8_6, h9_3, y)$$

Factorizando el polinomio obtenido, se obtiene el factor común a todos sus términos, que resulta ser $4b^2d^4$. Dividiendo entre este factor respecto de la variable d (lo que es lícito por no ser nulos ni d ni b , supuesto el triángulo no degenerado), se obtiene como cociente una expresión, denotada $h8_8$ (que resulta ser un polinomio de grado uno en S):

$$h8_8 = cociente(h8_7, 4b^2d^4, d)$$

De acuerdo con el lema de 4.1, la anulación de los polinomios $h1$ a $h9$, implica la anulación del polinomio $h8_8$. Se tiene así una ecuación de grado uno en la variable S , que al ser resuelta proporciona el valor de S :

$$\frac{1}{8} \frac{db(d^4 - 2bcd^2 + b^2d^2 + 2c^2d^2 - 4d^2r^2 + c^4 - 2bc^3 + b^2c^2)}{d^4 + b^2d^2 + 2c^2d^2 - 2bcd^2 - 2bc^3 + b^2c^2 + c^4}$$

Observemos que la solución obtenida para el área sólo depende de b, c, d (coordenadas de los vértices del triángulo) y del radio, r , de la circunferencia, pero no de las coordenadas (x, y) del punto X sobre dicha circunferencia.

Conclusión: Para todos los puntos de una circunferencia de centro el circuncentro de ABC , el área del triángulo MNP es constante.

4.4 Demostración automática del enunciado de Guzmán

El planteamiento es muy parecido al efectuado en 4.2. La única diferencia estriba en que las rectas XM, XN y XP son ahora de direcciones prefijadas (no paralelas a los respectivos lados), en lugar de ser perpendiculares a las rectas-lados. Vamos a determinar esas tres direcciones fijando sus respectivos coeficientes directores, que denotaremos

$$(v, w), (u, t), (z, a)$$

3) tener la recta XM coeficientes directores (v, w) , equivale a la anulación del siguiente polinomio $h3$:

$$h3 = v(m - x) - wy$$

5) tener la recta XN coeficientes directores (u, t) , equivale a la anulación del siguiente polinomio $h5$:

$$h5 = u(n - x) + t(h - y)$$

7) tener la recta XP coeficientes directores (z, a) , equivale a la anulación del siguiente polinomio $h7$:

$$h7 = z(p - x) + a(q - y)$$

Los cálculos a realizar, que omitimos por brevedad, son similares a los efectuados en 4.3, sin más que sustituir los polinomios $h3, h5, h7$ de 4.2 por los homónimos que se acaban de indicar. El último resto que así se obtiene, dividido entre d ($d \neq 0$, supuesto el triángulo no degenerado) e igualado a cero, lleva a la ecuación del lugar geométrico:

$$\begin{aligned} &(-dztv + daw - zuvb + czw)x^2 + \\ &(-auvb - dztw - ztvb + czuw + cztv + dauw)xy + \\ &(cztw - atvb)y^2 + \\ &(-daunw - czunw + dztvb + zunvb)x + \\ &(-czunw + datvb - daunw + aunvb)y + \\ &(2atvd + 2cztv)S = 0 \end{aligned}$$

que corresponde a la ecuación de una cónica.

Los coeficientes del polinomio primer miembro de esta ecuación dependen de las coordenadas b, c, d , de los vértices del triángulo ABC , de los coeficientes directores $(v, w), (u, t), (z, a)$, de las tres direcciones de proyección paralela y del área S .

El único término de dicho polinomio que depende de S es el término independiente, de lo que pueden sacar consecuencias, pero eso se sale del propósito de este trabajo.

5 Descripción general del proceso de búsqueda del lugar

Como se habrá observado, en el proceso de búsqueda automática de un lugar geométrico intervienen tres tipos de variables:

- 1) las variables libres o independientes (b, c, d en el modelo de la anterior sección 4) son los parámetros que determinan los objetos geométricos considerados inicialmente
- 2) las variables del lugar, x, y , son las coordenadas del punto genérico, X , del lugar
- 3) las variables ligadas o dependientes (f, g, \dots), son los parámetros que determinan los objetos introducidos mediante los polinomios que definen las condiciones de la hipótesis.

Al plantear las condiciones de la hipótesis en términos algebraicos, se obtiene un conjunto de polinomios,

$$h_i(b, c, d, \dots, f, g, \dots, x, y); i = 1, 2, \dots$$

en que aparecen los tres tipos de variables, pero estos pueden ser considerados como polinomios en las variables ligadas y las del lugar, con coeficientes en el anillo, R , de los polinomios que generan las variables libres sobre el cuerpo base (por ejemplo, R es el anillo $k[b, c, d, r]$ en la segunda parte de 4.3).

En general, partiendo de los polinomios h_i , se trata de eliminar las variables ligadas, para obtener un polinomio en x, y con coeficientes en R , que determina el lugar geométrico buscado. El proceso de eliminación recuerda al gausiano, sustituyendo combinaciones lineales por pseudodivisiones. Un ejemplo típico del proceso es el descrito en 4.4.

Notemos que no siempre este modo de operar es el idóneo. En efecto, si se hubiera aplicado este modo de proceder en el ejemplo descrito en 4.3, se habría obtenido la circunferencia de centro

$$[b/2, (c^2d^2 - bc)/(2d)]$$

Posteriormente se comprobaría que estas son las coordenadas del circuncentro de ABC , que se obtienen inmediatamente de h_1 y h_2 .

Ahora bien, la exploración experimental iniciada en la sección 3 hacía suponer que el lugar buscado iba a ser una circunferencia de centro el circuncentro de ABC . Por ello, en el proceso de eliminación efectuado en 4.3, se evitó que f o g fueran pseudodivisor, con objeto de que no desaparecieran del polinomio final del proceso.

6 Ejecución de cálculos

Sería muy penoso ejecutar a mano los cálculos mencionados anteriormente. Para realizarlos en tiempo razonable se ha de utilizar un sistema de cálculo simbólico.

Maple dispone de un comando para hallar seudorrestos, denominado *prem* (abreviación de *pseudo-remainder*), cuya uso se describe, por ejemplo, en [6], págs. 105-106.

Los autores de este trabajo también han desarrollado una implementación del seudorresto para Derive, publicada en [4], que permite ejecutar este tipo de cálculos en ese sistema.

Los autores han ejecutado los cálculos aquí mencionados tanto en Maple, como en Derive, y ofrecen el código, en uno u otro sistema, a quienes pueda interesar.

7 Conclusiones

Los Sistema de Geometría Dinámica suponen una gran comodidad en el proceso previo de exploración experimental de lugares geométricos.

El método de pseudodivisiones de Ritt-Wu, aplicado por Chou a la demostración automática de multitud de teoremas geométricos en [2], es aplicable, con las variantes descritas aquí, a determinar automáticamente ecuaciones de lugares geométricos, aunque su utilización requiere, en la práctica, el concurso de un sistema de cálculo simbólico.

Como se habrá observado, la ejecución práctica de este tipo de demostración automática (o, como otros denominan, de demostración mecánica) no desliga del proceso algebraico-geométrico, ya que, tanto el planteamiento del problema en coordenadas, como la elección del orden en que se han de realizar las pseudodivisiones, requieren una contribución inteligente por parte de quien la realiza.

No se pretende con este trabajo jubilar las bellas demostraciones *via Geometría Sintética* de los teoremas relativos a lugares geométricos. Sólomente hacer notar que la técnica aquí esbozada permite eludir el no siempre superable proceso de invención de la demostración genial, haciendo más asequible a todos el descubrimiento de lugares geométricos.

Agradecimientos: Deseamos manifestar nuestro agradecimiento a los profesores M. de Guzmán y T. Recio, por la aportación de ideas, que facilitaron este trabajo.

Referencias

- [1] F. G.-M., *Exercices de Geometrie*, Maisson, 1912.
- [2] S. C. Chou, *Mechanical Geometry Theorem Proving*, Reidel, 1988.
- [3] E. Roanes M., E. Roanes L., *Nuevas tecnologías en Geometría*, Complutense, 1994.
- [4] E. Roanes L., E. Roanes M., "Automatic Theorem Proving in Elementary Geometry with Derive", *International Derive Journal*, Vol. 3, No. 2, pp. 67-82, 1996.
- [5] T. Recio, *Cálculo simbólico y geométrico*, Síntesis, 1998.
- [6] E. Roanes M., E. Roanes L., *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5*, Rubiños, 1999.
- [7] M. de Guzman, "An extension of the Wallace-Simson theorem: projecting in arbitrary directions", *American Math. Monthly*, Vol. 106, No. 6, pp. 574-580, June-July 1999.

Sobre demostración automática de un teorema geométrico

Francisco Javier Blanco Silva
University of Purdue, USA
fbs@math.purdue.edu

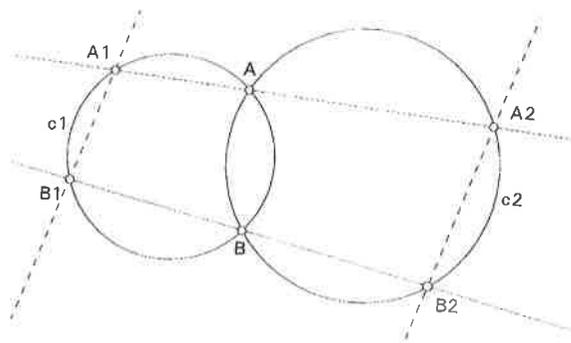
Resumen

A Classic Geometry problem involving properties of secant circles is solved by using pseudodivision and Mechanical Proving. The steps followed in this solution differ from the steps taken in the solution stated in Chou's book and the method used here offers a better understanding of the 'degenerate cases' and a less complex manipulation of polynomials.

1 Introducción

En [ejemplo 90, página 147, Chou] aparece resuelto el siguiente problema con el método de Ritt-Wu:

Problema 1 Por los dos puntos comunes A, B a las circunferencias C_1 y C_2 se trazan dos rectas que cortan a las circunferencias en A_1 y A_2 , B_1 y B_2 , respectivamente. Demuéstrese que $A_1B_1 \parallel A_2B_2$



Las indicaciones que en la obra citada se dan son las siguientes:

$$\begin{aligned} C_1 &= (u_1, 0) & A &= (0, u_2) & A_1 &= (x_2, u_4) & A_2 &= (x_4, x_3) \\ C_2 &= (u_3, 0) & B &= (0, x_1) & B_1 &= (x_5, u_5) & B_2 &= (x_7, x_6) \end{aligned}$$

Y las condiciones de degeneración que se deducen son $C_1 \neq C_2$, y que las rectas A_1A y B_1B no sean isotrópicas.

En la notación usada por Chou en la obra citada, las coordenadas u son fijas, y las coordenadas x son las indeterminadas. Se observa que, por ejemplo, en la construcción del punto A_1 se ha introducido la segunda coordenada fija, y la primera se calculará con la condición de pertenencia a la circunferencia C_1 .

$$(x_2 - u_1)^2 + u_4^2 = u_1^2 + u_2^2$$

Esta condición, por venir de una ecuación de segundo grado, ofrece dos dificultades: primero, hay en general dos posibles soluciones para el valor de x_2 ; segundo, las manipulaciones de los polinómios introducidos, usando el método de Ritt-Wu, son bastante complejas. No es esta la única dificultad que surge al introducir los datos de este modo. Una vez finalizado el proceso de demostración, los polinómios que muestran las condiciones de degeneración del problema no son muy sencillas; conviene modificar en algún modo las variables para obtener un significado intuitivo aceptable. Desgraciadamente, y en este caso no hemos podido encontrar la razón por la cual se da este efecto, las condiciones de degeneración que se obtienen no son tales. El lector puede verificarlo fácilmente. En el presente artículo se muestra una ligera mejora a la manera de introducir los datos del problema al programa que mostrará su solución mediante demostración automática. Esta mejora conseguirá varios objetivos:

1. Todos los polinómios usados serán de primer grado.
2. No necesitan un proceso previo de triangulación, ya que simplemente con ordenarlos convenientemente se consigue esta situación.
3. Las condiciones de degeneración son las que deben ser; ni una más, ni una menos.

2 Solución que proponemos

Supongamos que los puntos A y B tienen por coordenadas $A = (0, 1)$ y $B = (0, -1)$, siendo las coordenadas de los centros de las circunferencias $C_1 = (a, 0)$ y $C_2 = (b, 0)$. Consideremos vectores $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ y $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ con puntos de anclaje en A y B

respectivamente. Una recta por A y vector director ν corta a la circunferencia C_1 en el punto $A_1 = (x_1, y_1)$. Para calcular sus coordenadas hemos de considerar al punto A_1 como perteneciente a la recta anterior: Así,

$$x_1 - \alpha \nu_1 = 0 \quad (1)$$

$$y_1 - 1 - \alpha \nu_2 = 0 \quad (2)$$

La condición de pertenecer igualmente a la circunferencia C_1 viene dada por la siguiente ecuación de segundo grado en x_1 e y_1 :

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = 1 + a^2$$

Al substituir con las igualdades anteriores en esta, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado en α :

$$(v_1^2 + v_2^2)\alpha^2 + 2(v_2 - v_1)\alpha = 0$$

Una de sus soluciones es obviamente $\alpha = 0$, lo que nos ofrece el punto A . La otra solución de α será la que nos interesará¹:

$$(v_1^2 + v_2^2)\alpha + 2(v_2 - v_1) = 0 \quad (3)$$

Sean $g_1(x_1, \alpha)$, $g_2(y_1, \alpha)$ y $g_3(\alpha)$ los polinomios que conseguimos con las ecuaciones (1), (2) y (3) respectivamente. Usando el mismo procedimiento conseguimos polinomios $g_4(x_2, \beta)$, $g_5(y_2, \beta)$ y $g_6(\beta)$ (al considerar el punto A_2), $g_7(x_3, \gamma)$, $g_8(y_3, \gamma)$ y $g_9(\gamma)$ (al considerar el punto B_1) y finalmente $g_{10}(x_4, \delta)$, $g_{11}(y_4, \delta)$ y $g_{12}(\delta)$ (al considerar el punto B_2). El polinomio tesis se consigue al considerar la ecuación que establece el paralelismo de los segmentos A_1B_1 y A_2B_2 .

$$(y_4 - y_2)(x_3 - x_1) - (y_3 - y_1)(x_4 - x_2) = 0$$

Usando ahora el método de Ritt-Wu con estos polinomios (obsérvese que no es necesario triangular previamente el sistema, pues simplemente ordenando los polinomios convenientemente se tiene conseguido este propósito), obtenemos la demostración de la afirmación pedida.

$$\begin{array}{llll} h_1 = g_1 & h_2 = g_2 & h_3 = g_4 & h_4 = g_5 \\ h_5 = g_7 & h_6 = g_8 & h_7 = g_{10} & h_8 = g_{11} \\ h_9 = g_3 & h_{10} = g_6 & h_{11} = g_9 & h_{12} = g_{12} \end{array}$$

Observamos que las condiciones de degeneración se reducen a que los vectores ν y ω sean no nulos:

$$\begin{array}{l} \nu_1^2 + \nu_2^2 \neq 0 \\ \omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0 \end{array}$$

¹Obviamente, en el caso que la dirección considerada ofrezca una tangente a la circunferencia en el punto A , se verificará que α sólo puede ser cero.

3 Código

Seguidamente presentamos el código empleado en *Maple V.5* para demostrar este teorema:

```
> restart;
> h1 := x1 - alpha * v1;
> h2 := y1 - 1 - alpha * v2;
> h3 := x2 - beta * v1;
> h4 := y2 - 1 - beta * v2;
> h5 := x3 - gamma * w1;
> h6 := y3 + 1 - gamma * w2;
> h7 := x4 - delta * w1;
> h8 := y4 + 1 - delta * w2;
> h9 := alpha * (v1^2 + v2^2) + 2 * (v2 - v1);
> h10 := beta * (v1^2 + v2^2) + 2 * (v2 - a * v1);
> h11 := gamma * (w1^2 + w2^2) - 2 * (w1 + w2);
> h12 := delta * (w1^2 + w2^2) - 2 * (a * w1 + w2);
> Tesis := (y4 - y2) * (x3 - x1) - (y3 - y1) * (x4 - x2);
> R1 := prem(Tesis, h1, x1, t1);
> R2 := prem(R1, h2, y1, t2);
> R3 := prem(R2, h3, x2, t3);
> R4 := prem(R3, h4, y2, t4);
> R5 := prem(R4, h5, x3, t5);
> R6 := prem(R5, h6, y3, t6);
> R7 := prem(R6, h7, x4, t7);
> R8 := prem(R7, h8, y4, t8);
> R9 := prem(R8, h9, alpha, t9);
> R10 := prem(R9, h10, beta, t10);
> R11 := prem(R10, h11, gamma, t11);
> R12 := prem(R11, h12, delta, t12);
```

Referencias

- [Chou] Shang-Ching Chou, *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel Publishing company, 1988.
- [Roanes] E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano *Nuevas tecnologías en Geometría*, Ed. Complutense, 1994.

Anuncios de Congresos y otros eventos

RSME 2000

Real Sociedad Matemática Española
Univ. Complutense de Madrid, 27-29 enero 2000

La Real Sociedad Matemática Española celebra su primer congreso estatal bianual (tras su reconstitución) en Madrid en la Univ. Complutense, aunque algunos actos se celebrarán en algunas otras de las universidades madrileñas. Para información detallada e inscripciones, vease:

<http://www.mat.ucm.es/rsme2000/info.html>

3rd EUROPEAN CONGRESS OF MATHEMATICS

Societat Catalana de Matematiques
European Mathematical Society
Barcelona, July 10th to 14th, 2000

The programme of the Congress includes nine plenary lectures, thirty invited lectures in parallel sessions, mini-symposia, poster sessions,... Para información detallada e inscripciones, vease:

<http://www.iec.es/3ecm/>
<http://www.si.upc.es/3ecm/>

ALHAMBRA 2000 JOINT MATHEMATICAL EUROPEAN-ARABIC CONFERENCE

Granada, July 10th to 14th, 2000

ALHAMBRA 2000 is an acknowledged satellite activity of the 3rd European Congress of Mathematics, that will deal with historical perspectives on contributions of both cultures to the present mathematical knowledge. Para información detallada e inscripciones, vease:

<http://www.ugr.es/local/alhambra2000>

ICME - 9

International Congress on Mathematical Education
Tokio/Makuhari, Japan, July 31 - August 6, 2000

Working Group for Action No. 11: The use of Technology in Mathematics Education (Computers, Calculators, IT Media). Para información, vease:

<http://wwwstaff.murdoch.edu.au/~kissane/ICME-9.htm>

CEAMM2000

Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000

Actividades relativas al año 2000, declarado por la International Mathematical Union (con el respaldo de la Unesco) como Año Mundial de las Matemáticas. Para información detallada, vease:

<http://dulcinea.uc3m.es/ceamm>

Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

Como ya indicamos en números anteriores de nuestro Boletín, la dirección de Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 31 (3) DE 1999

- #1729 (sección F60). Resolución de tres problemas propuestos en Olimpiadas Matemáticas con la ayuda de la función de González Quijano, por Manuel Benito y J. Javier Escribano, Bol. Soc. Puig Adam 51 (Feb 1999), págs. 26-34.
- #1845 (sección G70). Un resultado curioso de Geometría Elemental, por Joaquín Hernández Gómez, Bol. Soc. Puig Adam 51 (Feb 1999), págs. 58-62.
- #1868 (sección H20). Sobre un problema olímpico de polinomios con coeficientes enteros, por Juan Carlos Cortés López, Bol. Soc. Puig Adam 51 (Feb 1999), págs. 45-49.
- #1787 (sección G40). Unas caracterizaciones lineales de los triángulos, por Juan Bosco Romero Márquez, Bol. Soc. Puig Adam 51 (Feb 1999), págs. 50-57.
- #1941 (sección I75). Algunas soluciones amplias de ecuaciones diferenciales ordinarias, por Vicente Fraile Ovejero y Ramón Fraile Peláez, Bol. Soc. Puig Adam 51 (Feb 1999), págs. 17-25.
- #1957 (sección K10). Análisis estadístico de datos con Microsoft Excel, por Julián Sáinz Ruiz, Bol. Soc. Puig Adam 51 (Feb 1999), págs. 35-44.

Nota necrológica

Después de cerrar este número, la Junta Directiva ha tenido noticia del fallecimiento del profesor D. Pedro Abellanas Cebollero. En nombre de la Junta Directiva nuestro más sentido pésame a sus familiares. (En el próximo número del Boletín está previsto publicar un recuerdo más amplio).

XVII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

El XVII Concurso de Resolución de Problemas, convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras (ver nuestro Boletín nº 51, en el que aparecen las Bases), se celebró en la mañana del sábado 19 de Junio de 1999.

Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en los de la E. U. de Biblioteconomía y Documentación, situada en el Edificio "Pablo Montesino" de la calle de la Santísima Trinidad, 35, amablemente cedidos por su Dirección para ese acto.

Concurrieron a él 125 participantes. Varios de ellos procedían de Comunidades Autónomas distintas de la de Madrid. Según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles: Los del I, cursaban 3º de ESO, o FP1; los del II, 4º de ESO, 2º de BUP o 1º de FP2 y los del III, 3º de BUP, 1º del nuevo Bachillerato o 2º o 3º de FP2.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 10 puntos. A continuación de esta crónica damos sus enunciados, con datos estadísticos que reflejan sus dificultades relativas.

Recordaremos que los dos primeros clasificados de cada nivel están invitados a participar en la VIII Olimpiada Rioplatense, que se celebrará en el próximo Diciembre en Argentina. Podrán asistir a ella, siempre que se consigan becas o ayudas para pagar los billetes del vuelo a Buenos Aires (ver la crónica de la VII OMR en nuestro Boletín nº 51).

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de felicitación a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a las firmas y entidades que proporcionaron los valiosos premios distribuidos entre los ganadores, especialmente a *Texas Instruments*, que regaló magníficas calculadoras, a *Coca-Cola*, a *Editorial Rubiños* y *Editorial Euler*, y a la Universidad Complutense, que cedió amablemente los locales para la celebración de los actos.

Éstos han sido los alumnos premiados en cada nivel:

NIVEL I

1. **D. Javier GONZÁLEZ ORTEGA**, del Colegio de *San Viator de Madrid*.
2. **D. Jorge GALLEGO PÉREZ**, del Colegio *Retamar de Madrid*.
3. **D. Alberto CASTILLO RUFO**, del Colegio *JOYFE de Madrid*.
4. **D. Javier GÓMEZ SERRANO**, del Colegio *Alemán de Madrid*.
5. **D^a. Isabel CALVO MOYA**, del IES *San Juan Bautista de Madrid*.

NIVEL II

1. **D. Carlos HERNÁNDEZ CORBATO**, del IES *Fortuny de Madrid*.
2. **D. Miguel Ángel ADÁN ALONSO**, del Colegio *Santo Tomás de Madrid*.
3. **D^a. Sofía MAGRANER UBICK**, del Colegio *de las Irlandesas de Madrid*.
4. **D. Antonio GONZÁLEZ MARSAL**, del Colegio *El Prado de Madrid*.
5. **D. David GONZALO GÓMEZ**, del Colegio *de San Viator de Madrid*.

NIVEL III

1. **D. Jesús Pascual MORENO DAMAS**, del Colegio *Los Olmos de Madrid*.
2. **D. Roberto RUBIO NÚÑEZ**, del IES *Font Sant Lluís de Valencia*.
3. **D. Carlos VINUESA DEL RÍO**, del IES *Beatriz Galindo de Madrid*.
4. **D. Victor ANTOLÍN URTUETA**, del IES *Antonio Machado de Madrid*.
5. **D. Carlos Eduardo GONZÁLEZ GUILLÉN**, del IES *Los Rosales de Madrid*.

Nos complace señalar que el alumno **Jesús Pascual MORENO DAMAS**, que ha recibido el primer premio del Nivel III, participó en la XXXV Olimpiada Matemática Española, en Enero de 1999, siendo alumno de 3º de BUP, y se clasificó con el puesto 3ºA de la fase regional de Madrid. El alumno **Roberto RUBIO NÚÑEZ**, 2º del Nivel III, obtuvo el primer premio en los Niveles I y II en nuestros concursos de los años 1997 y 1998 y participó en las VI y VII Olimpiadas M. Rioplatenses, obteniendo una medalla de bronce en la primera; **Carlos Eduardo GONZÁLEZ GUILLÉN**, 5º del Nivel III, fue 2º del Nivel II en 1998 y **Carlos HERNÁNDEZ CORBATO**, 1º del Nivel II, fue 2º del Nivel I en 1998 y también participó en la VII O. M. Rioplatense. Se confirma así en todos ellos una trayectoria muy prometedora para el futuro.

También debemos resaltar la sistemática repetición, año tras año, de éxitos obtenidos por alumnos de los mismos centros, lo que prueba la tenaz y eficaz labor formativa de algunos de sus profesores, a los que queremos felicitar.

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en este concurso.

PRIMER NIVEL

Problema nº 1:

Una pareja lleva en un avión 135 kg de equipaje. La mujer paga 1.350 pesetas por exceso de equipaje y el hombre 2.700 pesetas por el mismo motivo. Si todo el equipaje hubiese correspondido a uno solo de los dos, habría pagado 8100 pesetas por exceso de equipaje. Sabiendo que el pago por exceso de equipaje es proporcional a dicho exceso, ¿Cuántos kg puede llevar una persona sin pagar nada adicional?

*Puntuación media de todos: 2,3; de los 5 premiados: 8,2.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 2 alumnos).*

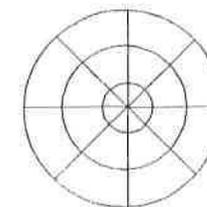
Problema nº 2:

En una cuadrícula de p filas y q columnas, escribimos todos los números enteros desde 1 hasta pq , llenando primero la primera fila de izquierda a derecha, luego la segunda, etc., en orden creciente. Si el número 20 aparece escrito en la tercera fila, el 41 en la quinta y el 103 en la última, ¿Cuántas filas y cuántas columnas tiene la cuadrícula?

*Puntuación media de todos: 6,2; de los 5 premiados: 9,4.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 16 alumnos).*

Problema nº 3:

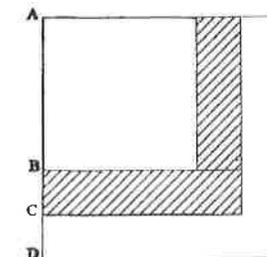
En una partida de dardos entre siete jugadores, cada uno de éstos ha lanzado siete dardos, que han dejado en la tabla marcas que pueden tomarse como puntos. La forma del tablero es la de la figura y los radios de las circunferencias concéntricas son de 8, 16 y 24 cm. Cada círculo está dividido en ocho partes iguales. Demostrar que hay tres marcas que forman un triángulo cuya área es menor que 125 cm^2 .



*Puntuación media de todos: 1,5; de los 5 premiados: 6,8.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 4 alumnos).*

Problema nº 4:

Tres cuadrados en los que las longitudes de sus lados son números enteros están colocados como se muestra en la figura. Si $BC = CD$ y el área sombreada es 31, calcular el área del cuadrado mayor.



*Puntuación media de todos: 3,6; de los 5 premiados: 8,0.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 14 alumnos).*

SEGUNDO NIVEL

Problema nº 1:

En el interior de un triángulo rectángulo de hipotenusa 5 y área 6 dibujamos dos circunferencias iguales, tangentes entre sí, ambas tangentes a la hipotenusa, y cada una tangente a un solo cateto. Calcular la distancia entre los centros de dichas circunferencias.

*Puntuación media de todos: 2,1; de los 5 premiados: 4,2.
Puntuación máxima: 8 (alcanzada por 3 alumnos).*

Problema nº 2:

Si a y b son números positivos para los que $a^2 + b^2 = 7a$, ¿qué es mayor, $\log((a + b)/3)$, ó $(\log a + \log b)/2$?

*Puntuación media de todos: 2,6; de los 5 premiados: 10,0.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 8 alumnos).*

Problema n° 3:

Hallar todos los valores de a para los que las raíces de la ecuación

$$x^2 - (a+1)x + a + 4 = 0$$

son ambas negativas.

Puntuación media de todos: 0,9; de los 5 premiados: 2,8.

Puntuación máxima: 8 (alcanzada por un alumno).

Problema n° 4:

Las dimensiones de las cuartillas de papel son $a = 15,5$ cm, $b = 21,5$ cm. Una de ellas ha sido plegada de modo que uno de sus vértices coincide con su opuesto. Calcular el área del polígono resultante.

Puntuación media de todos: 2,2; de los 5 premiados: 4,8.

Puntuación máxima: 8 (alcanzada por un alumno).

TERCER NIVEL**Problema n° 1:**

Un "mago" solicita a uno de los presentes que piense un número de tres cifras, abc , y luego le pide que forme los cinco números acb , bac , bca , cab y cba , que sume esos cinco números, y que diga el resultado N . Con ese dato, el "mago" identifica el número original, abc . Haz el papel del "mago" y determina abc si $N = 3194$.

Puntuación media de todos: 2,5; de los 5 premiados: 4,4.

Puntuación máxima: 9 (alcanzada por un alumno).

Problema n° 2:

Una circunferencia de radio 10 tiene por centro el vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo isósceles. Sabiendo que dicha circunferencia determina en la hipotenusa del triángulo tres segmentos iguales, calcula el área de dicho triángulo.

Puntuación media de todos: 1,3; de los 5 premiados: 6,4.

Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 3 alumnos).

Problema n° 3:

Se da la ecuación

$$X^3 + AX^2 + (A^2+7)X - 31 = 0$$

en la que A es un número real. Demostrar que solamente una de las raíces de esa ecuación es real.

Puntuación media de todos: 0,8; de los 5 premiados: 3,0.

Puntuación máxima: 8 (alcanzada por un alumno).

Problema n° 4:

Sea $ABCD$ un rectángulo en el que $BC = 3AB$. Demostrar que si P y Q dividen el lado BC en tres partes iguales, entonces

$$\hat{D}BC + \hat{D}PC = \hat{D}QC.$$

Puntuación media de todos: 4,4; de los 5 premiados: 9,6.

Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 10 alumnos).

Índice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.º	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números											
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º		
1	Varios	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	—	—	—	—	—	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	—	—	—	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	—	—	—	—	—	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	—	—	—	—	—	C
6	Varios	7	7	16	—	—	—	—	—	—	—	—	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	—	—	—	—	—	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	—	—	—	—	—	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	—	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	—	—	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	—	C
12	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	—	—	—	—	—	—	—	C
13	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	—	C
14	OME-f2-87	20	21	21	21	21	—	—	—	—	—	—	C
15	Varios	15	15	15	15	—	—	—	—	—	—	—	C
16	OME-f1-87	18	18	18	21	21	21	—	—	—	—	—	C
17	OME-f2-88	22	22	21	18	22	22	22	22	—	—	—	C
18	OI-88-Perú	25	23	23	23	23	23	—	—	—	—	—	C
19	OMI-88-Australia	23	23	23	23	25	25	—	—	—	—	—	C
20	OME-f1-88/Putnam	23	26	24	24	23	26	—	—	—	—	—	C
21	OME-f2-89/	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	—	C
22	OI-89-Cuba	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	—	C
23	OMI-89-R.F.A./	26	27	—	—	—	—	30	30	30	31	—	C
24	Oposiciones	28	28	XX	28	29	30	30	30	—	—	—	C
25	Oposiciones	31	30	29	—	—	—	31	30	—	—	—	C
26	OME-f1-90	27	27	28	28	29	31	30	31	—	—	—	C
27	OME-f2/f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	—	—	—	C
28	OMI-90-China/	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	—	C
29	OI-90-Valladolid	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	—	C
30	OME-f1-91	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
31	OME-f2-91	33	33	33	33	XX	35	XX	XX	—	—	—	C
32	OMI-91-Suecia	32	32	XX	XX	33	33	—	—	—	—	—	C
33	OI-91-Argentina/	38	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
34	OME-f2-92/	XX	XX	XX	33	38	46	XX	33	33	33	—	C
35	OME-f1-91/PNS	33	34	34	34	—	—	—	—	—	—	—	C
36	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	48	XX	XX	35	—	C
37	OME-f1-91/PNS	XX	XX	47	35	34	—	—	—	—	—	—	C
38	OMI-92-MOSCÚ/	35	48	XX	XX	XX	52	38	35	46	38	—	C
39	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	—	—	—	—	—	—	—	C
40	OME-f1-92/f1-92(v)	47	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	—	C
41	/PNS	47	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	C
42	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	—	—	—	—	—	C
43	OMI-93-Turq./	XX	46	XX	XX	52	XX	52	XX	47	39	—	C
44	OI-93-Méjico/PNS	XX	52	39	39	52	XX	—	—	—	—	—	C
45	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	—	C
46	OME-f2-94/PNS	41	49	49	41	49	49	45	45	41	—	—	C
47	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	52	XX	—	—	—	—	—	C
48	OI-94-Brasil/OME-f1-94/f1-94(v)	43	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
49	OME-f2-95	46	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
50	OMI-95-Canadá	42	XX	XX	42	XX	XX	—	—	—	—	—	C
51	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
52	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	C
53	OME-f-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
54	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
55	OMI-96-India/	XX	XX	49	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
56	PNS	XX	47	45	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
57	OI-96-Costa Rica	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	XX	XX	XX	—	C
58	OME-96-f1	XX	47	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	C
59	OMR-96	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
60	OMI-97-Argentina	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
61	OI-97-México	XX	XX	XX	50	XX	XX	—	—	—	—	—	C
62	OMEf1-98	—	—	—	—	—	—	XX	XX	XX	XX	—	C
63	OMR-97	49	XX	49	XX	—	—	XX	50	XX	XX	—	C
64	—	—	—	—	—	XX	XX	—	—	—	—	—	C
65	—	51	XX	51	XX	51	52	—	—	—	—	—	C
66	OMI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
67	OI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase I ó 2); OMI = OI. Mat. Internac. OI = OI. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo especificado a continuación.

Copias en papel

Se enviarán por duplicado, escritas con un procesador de texto en hojas de tamaño DIN A-4.

Los artículos comenzarán con el título (en minúsculas grandes), nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el boletín), e-mail si se tiene, y "abstract" de unas líneas en inglés. Terminar el artículo con la bibliografía (y nada más después de ella).

Si se utiliza LATEX, el formato debe ser 17 cm x 12,8 cm en 10 puntos, o bien 19 cm x 14 cm en 11 puntos (para ser aprovechado directamente en la imprenta). En tal caso se incluirá el archivo de estilo utilizado.

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo dos archivos:

- a) archivo del documento para el procesador de texto utilizado.
- b) archivo en código ASCII (éste es el que suele utilizar la imprenta).

Si se envía en LATEX, ajustado al tamaño indicado, no es preciso este último (el archivo en código ASCII).

Las figuras se captarán por escaneado, por lo que es innecesario incluirlas en el disquete (en archivos de extensión TIF o similares).

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín (no al apartado, que ya no está operativo).

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

ADQUISICIÓN DE NÚMEROS ATRASADOS DE NUESTRO BOLETÍN

A partir de ahora, los números atrasados del Boletín (de los cuales existan ejemplares sobrantes), podrán ser adquiridos al precio de coste de mil pesetas ejemplar.

Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52 y 53

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de nuestra Sociedad o mediante transferencia a la cuenta corriente de nuestra Sociedad domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
C/ Fuencarral, 101
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (despacho 3.517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid

En la carta se incluirá:

- el número o números a adquirir,
- la dirección a donde se han de enviar,
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.

**SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION**

D. Teléf. (...)
Dirección
Ciudad Cod.° Postal
Centro de trabajo

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco
Sucursal o Agencia en
Dirección de la misma
para que cargue en la cuenta: / / / /
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1998-99 y siguientes.

Fecha de de 1999

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pts. (de ellas, 3.000 pts. en concepto de cuota de la Sociedad "Puig Adam" y 2.000 pts. en concepto de cuota por la que se recibe la revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas).

Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/ Fuencarral, 101
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACION EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha BANCO:
Sucursal o Agencia en
Dirección de ésta

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: / / / /
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos
Dirección

Remítanse ambas partes (toda esta página) a:
Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
c/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid