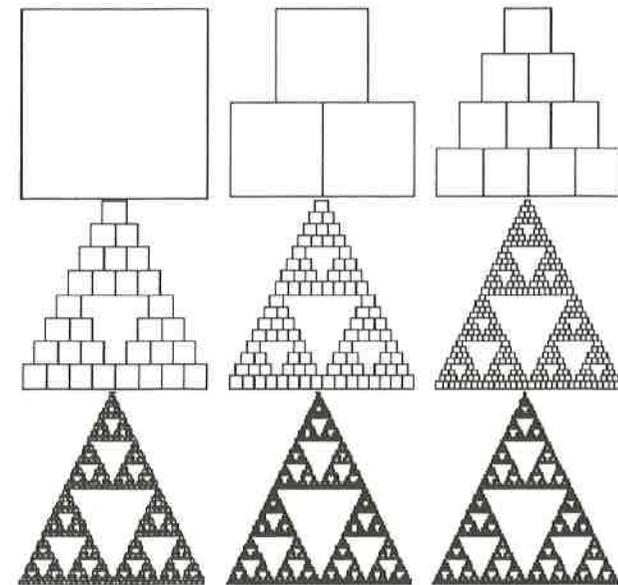


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMATICAS**



**BOLETIN N.º 52
JUNIO DE 1999**

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura 11 del artículo titulado "Una introducción a la Geometría Fractal...", contenido en este número 52 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Acta de la Asamblea	5
XXXV Olimpiada Matemática Española	6
III Concurso de Primavera	12
Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik	13
Nota necrológica	13
Anuncios de Congresos	14
Simplifying the Structure of Equations Describing Electromechanical Objects by Means of Mathematical Transformations to Substitutional Equivalent Systems, por Adam Marlewski, Stanislaw Rawicki y Eugenio Roanes Macías	19
Una introducción a la Geometría Fractal y su aplicación a la comprensión de imágenes, por Miguel Reyes	32
Vectores deslizantes; pares de vectores, por José Pérez Blanco	56
El teorema de Pitágoras en la semejanza de triángulos, por Joxé Alberto García Suárez	61
Sobre cálculo con funciones usuales en el análisis económico, por Manuel Suárez Fernández y M. Elisa Amo Saus	63
Una reflexión sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos en los adolescentes, por Juan José Prieto Martínez	74
Reseña de libros	79
Problemas resueltos	82
Índice de soluciones publicadas	93
Instrucciones para el envío de originales	94
Adquisición de números atrasados de nuestro Boletín	95
Boletín de inscripción	96

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS (Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ (Castilla-León)
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES (Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE (Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO (Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

Adjunta a la presidencia:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 1999 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día 10 de abril de 1999, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria de mil novecientos noventa y nueve.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

Punto primero. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.

Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

Punto segundo. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.

El Presidente informa sobre las actividades realizadas y a realizar:

a) Se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 49, 50 y 51 del Boletín.

b) Se informa que el 20 de junio de 1998 se celebró el XVI Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados. Los ejercicios tuvieron lugar en la Facultad de Matemáticas y la entrega de premios en la E.U. de Biblioteconomía.

c) Se recuerda, también, la colaboración de la Sociedad en la Olimpiada Matemática que convoca la Real Sociedad Matemática Española. D. Joaquín Hernández, representante en la Fase final, informa de lo acontecido y de las posibles reformas en las bases para el futuro.

d) Se informa de la reunión en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, convocada por la Ministra de Educación y coordinada por D. Miguel de Guzmán, para analizar el estado de la Enseñanza de la Matemática en la Educación Secundaria, a la que –inicialmente– fue invitada a participar nuestra Sociedad y a la que asistió –finalmente– D. Joaquín Hernández como Secretario. De esta reunión se emitirán las conclusiones en breve.

e) Se informa de la participación de la Sociedad en el Seminario celebrado en Granada sobre “Recursos en el Aula de Matemáticas” organizado por la Sociedad Andaluza

Thales, así como de la edición de las Actas del III Simposio "Leonardo Torres Quevedo: su vida, su tiempo, su obra", organizado por Amigos de la Cultura Científica y en el que la Sociedad celebró una Jornada científica en recuerdo de Puig Adam, y del envío de las Actas del ICME celebrado en Sevilla.

f) Se informa que la Sociedad colabora en la organización del Congreso IMACS-ACA, que se celebrará en julio de 1999 en El Escorial.

g) Acerca de las relaciones de reciprocidad entre la Real Sociedad Matemática Española y las Sociedades de Profesores de Matemáticas integradas en la Federación, el Presidente informa que ésta ha estudiado el tema y elaborado un proyecto general que podría ser común para todas las Sociedades de la Federación.

h) Se informa de la asistencia a las reuniones de la Junta de Gobierno de la Federación, de las que se hace un breve resumen. Complementariamente, se hace constar el cese preceptivo del Presidente, D. Ricardo Luengo, quien ha sido sucedido por Dña. María Jesús Luelmo.

i) Se anuncia que el XVII Concurso de Resolución de Problemas se celebrará el sábado 19 de junio en la Facultad de Matemáticas.

Punto tercero. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.

D. Alberto Aizpún reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería: ingresos y gastos. A continuación explica detalladamente el número de recibos emitidos y las gestiones realizadas con los socios cuyos recibos han sido devueltos, para concluir constatando el equilibrio final entre ingresos y gastos. Complementariamente informa de que se ha abierto una cuenta corriente en la Caja de Ingenieros, que funciona en régimen de cooperativa, explicando los movimientos efectuados en el tránsito desde la antigua cuenta en Caja Madrid.

Punto cuarto. Elección de nuevos cargos directivos.

Se renueva en sus cargos hasta 2003 a cinco miembros de la Junta Directiva elegidos en 1995: Juan Bosco Romero Márquez (Vicepresidente por Castilla-León), Julio Fernández Biarge (Vocal de Redacción de publicaciones), José Vicente García Sestafe (Vocal de Relaciones Institucionales), Eugenio Roanes Lozano (Vocal de Gestión de publicaciones) y Martín Garbayo Moreno (Vocal de Actividades y Concursos).

Punto cinco. Asuntos de trámite.

a) En cuanto al convenio de reciprocidad con la Real Sociedad Matemática Española, mencionado en el informe del Presidente, se acuerda que el Presidente se dirija, por un lado a la Real Sociedad para pactar unas condiciones que no sean onerosas para nuestra Sociedad, y por otro a la Federación para aclarar el efecto de los acuerdos que se suscriban en la cuota que se abona a la Federación.

b) Se acuerda que, a partir de ahora, los números atrasados del Boletín (de los cuales existan ejemplares sobrantes), puedan ser adquiridos al precio de coste de mil pesetas ejemplar.

Punto seis. Ruegos y preguntas.

a) D. Víctor Manuel Sánchez, por un lado, pregunta si no sería conveniente informar también por carta, además de a través del Boletín, de las diferentes actividades de la Sociedad: Asambleas, Concursos, etc, así como la difusión en revistas, prensa diaria, etc. Por otro, sugiere que la Sociedad publique un libro con los enunciados y soluciones de los problemas propuestos en las fases finales de la Olimpiada.

b) D. Juan Bosco Romero pregunta por la posibilidad de solicitar subvenciones para la financiación complementaria de las actividades de la Sociedad, así como por la posible existencia de directorios mundiales de revistas de educación matemática.

c) D. Eugenio Roanes Macías recuerda que en el año 2000 debe conmemorarse el Centenario del nacimiento de D. Pedro Puig Adam con la organización de un Congreso, la reedición de algunos de sus libros, etc.

d) D. Eugenio Roanes Lozano plantea la posibilidad de incluir en el Boletín propaganda de material para la educación matemática a cambio de subvenciones para la Sociedad.

Llegados a este punto, el Presidente levanta la sesión a las trece horas y veinte minutos de la fecha arriba indicada.

V.º B.º El Presidente

El Secretario

XXXV Olimpiada Matemática Española

Primera fase - Madrid

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la "XXXV Olimpiada Matemática Española" correspondientes al curso 1998-99 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 22 y 23 de enero de 1999.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*.

Como es sabido, esta Olimpiada se desarrolla en dos fases: la primera tiene lugar en los distintos distritos; este año, tres de ellos corresponden a la Comunidad de Madrid, que cuenta con cinco universidades estatales, además de las privadas; los tres ganadores de cada distrito son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio, a través de la RSME, para la concesión de un premio en metálico (este año, de 50.000, 35.000 y 25.000 pesetas para los tres ganadores de cada distrito) y son invitados a participar en la segunda fase. Los mejores clasificados en ésta, además de recibir los premios correspondientes, podrán integrarse en los equipos que representarán a España en las próximas olimpiadas internacionales.

Las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de tres horas y media de duración cada una, en las que se propusieron seis problemas (no ocho, como era habitual), cuyos enunciados damos a continuación de esta crónica. Estos problemas son los mismos que se propusieron simultáneamente en la mayor parte de los distritos españoles. Las pruebas de los tres distritos que corresponden este año a todas las Universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurrieron 123 alumnos de los 136 inscritos, algunos menos que el año precedente.

Cada problema se calificó con un máximo de 7 puntos, rompiendo la costumbre de hacerlo de 0 a 10, para hacerlo como en la mayor parte de las competiciones internacionales. De este modo, había una posibilidad teórica de obtener 42 puntos. Al igual que otros años, el nivel medio de preparación de los asistentes fue bastante bajo, debido a la presencia de un buen número de alumnos que mostraron desconocer lo que son unas pruebas olímpicas, no consiguiendo ni un solo punto en los ocho problemas. Unos pocos, no obstante, destacaron claramente sobre ese nivel medio.

Damos a continuación los nombres de los alumnos premiados en los distritos de Madrid A, B y C, ordenados por puntuaciones decrecientes:

1° A	D. Roberto Carlos BARREDA MORIANA , del COU del Colegio JOYCE de Madrid	36 puntos
1° B	D.ª Beatriz SANZ MERINO , del C.O.U. del Colegio San Viator de Madrid	35 puntos

1° C	D. David MARTÍN HERRERO , de 2° de LOGSE del IES San Juan Bautista de Madrid	30 puntos
2° A	D. Diego MUNICIO GARCÍA , de 3° de BUP del Colegio de los Menesianos de Madrid	30 puntos
2° B	D. Andrés TALLOS TANARRO , del COU del Colegio Padre Manyanet de Madrid	29 puntos
2° C	D.ª María GARCÍA CERDEÑO , de 2° de LOGSE del IES San Juan Bautista de Madrid	28 puntos
3° A	D. Jesús Pascual MORENO DAMAS , de 3° de BUP del Colegio Los Olmos de Madrid	28 puntos
3° B	D. Álvaro NAVARRO TOVAR , del COU del Colegio El Prado de Madrid	27 puntos
3° C	D. Alberto GARCÍA PAÑOSO , del COU del Colegio JOYCE de Madrid	27 puntos

Los empates se resolvieron con un examen atento de cada caso.

Debemos señalar en primer lugar la presencia entre estos alumnos premiados de dos de 3° de BUP y otros dos de 2° de LOGSE.

Destacaremos que Dña. **Beatriz Sanz Merino** participó ya en la OME anterior, quedando en tercer lugar del distrito C en la primera fase y recibiendo Medalla de Oro en la final; también fue premiada en nuestro Concurso de 1997, quedando en segundo lugar del segundo nivel. Asimismo, **D. Álvaro Navarro Tovar** ocupó el primer puesto del distrito C en la primera fase de la anterior OME y obtuvo Medalla de Plata en la fase final; en nuestros Concursos, fue tercero del primer nivel en 1996 y primero del segundo en 1997. Dña. **María García Cerdeño** resultó premiada en primer nivel de nuestro Concurso en 1996.

También este año puede comprobarse que los Centros de procedencia de los alumnos premiados son, en su mayoría, los mismos que en los anteriores, lo que es prueba de que en ellos se realiza una encomiable labor de estímulo y preparación. Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

Algunos de los problemas propuestos resultaron más sencillos para los alumnos que en otras ocasiones, pero otros presentaron gran dificultad.

Damos a continuación los enunciados de esos problemas y, junto con cada uno, las puntuaciones medias alcanzadas en él, por todos los participantes y por los nueve premiados, así como el número de soluciones calificadas con 6 o con 7, que consideramos aceptables.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA PRIMERA FASE DE LA XXXIV OME

Problema 1°:

¿Qué dígitos se han omitido en la siguiente multiplicación?

$$\begin{array}{r}
 2 * * \\
 \times \quad * * \\
 \hline
 * 6 1 \\
 * * 4 \\
 \hline
 * * 0 1
 \end{array}$$

Puntuación media obtenida por todos los alumnos: 4,9.
Puntuación media obtenida por los nueve premiados: 7,0.
Número de soluciones aceptables (calificados con 6 ó 7): 77.

Problema 2°:

Una empresa produce semanalmente 300 bicicletas de montaña que vende íntegramente al precio de 600 euros cada una. Tras un análisis de mercados observa que si varía el precio, también varían sus ventas (de forma continua) según la siguiente proporción: por cada 7 euros que aumente o disminuya el precio de las bicicletas, disminuye o aumenta la venta en 3 unidades.

- ¿Puede aumentar el precio y obtener mayores ingresos?
- ¿A qué precio los ingresos serán máximos?

Puntuación media obtenida por todos los alumnos: 3,9.
Puntuación media obtenida por los nueve premiados: 6,8.
Número de soluciones aceptables (calificados con 6 ó 7): 49.

Problema 3°:

Dado un triángulo ABC con baricentro G :

- Prueba que para cualquier punto del plano M se verifica:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 \geq \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$$

obteniéndose la igualdad si y solamente si $M = G$.

- Fijado un número $k > \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2$, halla el lugar geométrico de los puntos M tales que $\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = k$.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos: 0,2.
Puntuación media obtenida por los nueve premiados: 1,1.
Número de soluciones aceptables (calificados con 6 ó 7): 0.

Problema 4°:

Hallar todos los pares de números naturales x, y ($x < y$) tales que la suma de todos los números naturales comprendidos estrictamente entre ambos es igual a 1999.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos: 1,5.
Puntuación media obtenida por los nueve premiados: 5,0.
Número de soluciones aceptables (calificados con 6 ó 7): 9.

Problema 5°:

Prueba que la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles es siempre igual a la suma de los radios de sus circunferencias inscrita y circunscrita.

Puntuación media obtenida por todos los alumnos: 2,0.
Puntuación media obtenida por los nueve premiados: 6,2.
Número de soluciones aceptables (calificados con 6 ó 7): 23.

Problema 6°:

Sean a, b y c números reales no nulos (con suma no nula) tales que:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}.$$

Prueba que también se verifica:

$$\frac{1}{a^{1999}} + \frac{1}{b^{1999}} + \frac{1}{c^{1999}} = \frac{1}{a^{1999} + b^{1999} + c^{1999}}.$$

Puntuación media obtenida por todos los alumnos: 0,8.
Puntuación media obtenida por los nueve premiados: 3,9.
Número de soluciones aceptables (calificados con 6 ó 7): 8.

III Concurso de Primavera ¿Un resurgimiento de la enseñanza pública?

El Concurso de Primavera sigue creciendo. De los 139 centros participantes en la 2.^a fase en la edición anterior, hemos pasado a 192 este año. Este dato que, para los que estáis algo alejados del mundo de la Enseñanza Secundaria podría no aportar nada, ser algo natural, para nosotros, el Comité Organizador, que estamos cada día peleando en el aula, es un dato que nos llena de satisfacción. Pero si analizamos un poco los datos de participación, la satisfacción se torna en algo más importante: esperanza. En efecto: todos somos conscientes de los difíciles momentos que está viviendo la Enseñanza Pública en este país. Momentos que empezaron hace ya bastantes años; no en el 96. Pues bien, en este estado de cosas, de 26 Colegios Públicos participantes en el año anterior, hemos pasado a 50 este año y de 61 Institutos que lo hicieron en la edición del año pasado, hemos pasado a 82 este año. La participación en la enseñanza concertada-privada también ha crecido, pero en menor escala: 51 centros participantes en el concurso del 98, 60 en el del 99.

Por supuesto que tenemos muy claro que el crecimiento de los índices de participación en un concurso, no implica automáticamente una mejora en la calidad de la enseñanza de las matemáticas en los centros porque, entre otras cosas, aunque estemos convencidos que hacer este tipo de matemáticas sí conlleva mejorar la enseñanza de la misma, no está nada claro que participar en un concurso arrastre obligatoriamente la forma de llevar las clases a lo más natural en las matemáticas, la resolución de problemas; en algunos centros, sabemos positivamente que la participación en el Concurso de Primavera significa exclusivamente mandar a unos estudiantes a la 2.^a fase, sin haber dedicado mucho tiempo, ciertamente, a la preparación y realización de la primera.

Pero, en cualquier caso, no es menos cierto que el Concurso de Primavera ha despertado ciertas ilusiones en un colectivo importante tanto de profesores como de estudiantes. Por ellos pensamos seguir, y extenderlo a otras comunidades. Desde aquí, os animamos a los miembros de la sociedad Puig Adam que no residís en la Comunidad de Madrid que montéis algo parecido. En La Rioja lo han hecho este año –disponiendo de nuestro material– y se han visto sorprendidos por el éxito. Como apuntábamos una vez, con nuestro material, experiencia organizativa y ánimo, siempre podéis contar.

*Joaquín Hernández Gómez
Del Comité Organizador del Concurso de Primavera*

Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

Como ya indicamos en números anteriores de nuestro Boletín, la dirección de Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 30 (4) DE 1998

- #0687 (sección U70). Reflections on computers in school mathematics: CAMP+30, por Larry L. Hatfield, Bol. Soc. Puig Adam 50 (1998), págs. 16-33.
- #0012 (sección A30). El movimiento renovador de la matemática española de finales del siglo XIX, por Javier Peralta, Bol. Soc. Puig Adam 50 (1998), págs. 34-48.
- #0013 (sección A30). Evolución en la enseñanza de la Geometría Elemental, por Eugenio Roanes Macías, Bol. Soc. Puig Adam 50 (1998), págs. 49-60.
- #0483 (sección I30). Criterios de condensación de Cauchy y de la integral con DERIVE, por Juan José Armendáriz Viñuelas, Bol. Soc. Puig Adam 50 (1998), págs. 61-67.
- #0481 (sección I25). Revisión de una cuestión clásica: Las funciones seno y coseno, por Manuel Suárez Fernández, Bol. Soc. Puig Adam 50 (1998), págs. 68-78.
- #0374 (sección G40). Superficies y Teorema de Tales, por Pedro Pescador Díaz, Bol. Soc. Puig Adam 50 (1998), págs. 79-82.

Notas necrológicas

La Junta Directiva ha tenido noticia del fallecimiento de la madre de Joaquín Hernández Gómez, bibliotecario de nuestra Sociedad, y también de la madre de Emilio Palacián, director de la revista SUMA. Nuestro más sentido pésame a ambos.

Anuncios de Congresos

IV Cursos Universitarios de Verano en Canarias

Lanzarote, 3, 4 y 5 de agosto de 1999

Simposio sobre Ciencia y Técnica en España de 1898 a 1936:

Sesión I: Blas Cabrera y Felipe.
Sesión II: Santiago Ramón y Cajal.
Sesión III: Leonardo Torres Quevedo.

Información y Secretaría en Madrid:

Escuela Técnica Superior de Arquitectura
Juan de Herrera, 4. 28040 Madrid
Cátedra de Física Aplicada
Tel.: 91 336 65 18. Fax: 91 336 65 54

III SEIEM

Valladolid, 15-18 de septiembre de 1999

Seminarios de trabajo:

Seminario I: Didáctica de la Geometría
Seminario II: Didáctica, disciplina científica
Seminario III: Metodología de investigación (observacional).

Grupos de trabajo:

Aprendizaje de la Geometría
Conocimiento y desarrollo profesional del profesor
Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria
Didáctica del Análisis
Didáctica, disciplina científica
Educación infantil

Historia de la Educación Matemática
Pensamiento numérico y algebraico

Información e inscripciones:

Dolores Gómez y Tomás Ortega
Dpto. Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática
Facultad de Educación
C/ Geólogo Francisco Hernández Pacheco, s/n. 47014 Valladolid
Tel.: 983 423 000 ext. 24 472. Fax: 983 423 436
e-mail: ortega@am.uva.es

RSME2000 (Primer anuncio)

Madrid, 27, 28 y 29 de enero del 2000

La Real Sociedad Matemática Española anuncia la celebración de su primer congreso nacional tras la reconstitución. El congreso tendrá lugar en Madrid en la Universidad Complutense, aunque algunos actos se celebrarán en alguna de las otras universidades madrileñas. El objeto de este y los subsiguientes congresos, de carácter bianual, es reconocer y presentar a la comunidad matemática y científica los avances más significativos realizados por matemáticos españoles en el último bienio, prestando especial atención a estimular la participación de jóvenes y reforzar la presencia de las matemáticas en nuestra sociedad.

Presidente de Honor

Su Alteza el Príncipe de Asturias, D. Felipe de Borbón.

Comité Organizador

Carlos Andradás (Univ. Complutense)
Emilio Bujalance (UNED)
Antonio Córdoba (Univ. Autónoma de Madrid)
Ildefonso Díaz (Univ. Complutense)
Alberto Ibort (Univ. Carlos III)

Manuel de León (CSIC)
Juan Llovet (Univ. de Alcalá)
Francisco Martín (Fed. Española Soc. Profs. Matemáticas, FESPM)
José Manuel Vega (Univ. Politécnica Madrid)
David Ríos (Univ. Rey Juan Carlos)

Comité Científico

(Actúa como tal la Comisión Científica de la RSME)
Antonio Córdoba (Univ. Autónoma Madrid)
Pilar Bayer (Univ. Barcelona)
Miguel Ángel Herrero (Univ. Complutense Madrid)
David Nualart (Univ. de Barcelona)
Antonio Ros (Univ. de Granada)
Antonio Sánchez-Calle (Univ. Autónoma Madrid)
Luis Seco (Univ. de Toronto)

Programa

El congreso se desarrollará desde el jueves 27 a las 16,00 horas hasta el sábado 29 a las 18,00 horas cuando tendrá lugar la conferencia de clausura. Constará de cinco módulos de trabajo correspondientes a la tarde del jueves 27 y las mañanas y tardes del viernes 28 y sábado 29. Cada módulo contendrá *conferencias plenarias* más alguna actividad como *sesiones de pósters, minisymposia* o *mesas redondas*. Un programa detallado se adjuntará en el segundo anuncio y en la página web de la RSME, sección CONGRESO2000. Asimismo se celebrará una comida social de todos los asistentes y se contará con la participación de editoriales, compañías de software matemático y empresas.

Inscripción

El boletín de inscripción será enviado con el segundo anuncio. La inscripción no se considerará formalizada hasta no haber recibido el pago de la cuota de inscripción en la cuenta de la RSME que se especificará en dicho anuncio,

Cuota de inscripción	socios	15.000 pts.
(hasta el 30 de septiembre)	no socios	20.000 pts.
	estudiantes	5.000 pts.

Las inscripciones realizadas con posterioridad al 30 de septiembre llevarán un recargo de 3.000 pts., salvo en el caso de estudiantes, que mantendrán la misma cuota. La cuota de inscripción incluye la cena social y la documentación que se repartirá en el congreso con los *abstracts* de las conferencias plenarias. *A los únicos efectos de ir haciendo una estimación del número de asistentes, se ruega que aquellos interesados envíen un e-mail a la cuenta rsme_2000@mat.ucm.es.* Se prevé la posibilidad de conceder un número limitado de becas.

Viaje y alojamiento

Los congresistas interesados pueden gestionar el viaje y alojamientos a través de la agencia de *El Corte Inglés*, oficina de la Universidad Complutense (tel. 91 394 35 05), que está gestionando plazas hoteleras a distintos precios, así como precios reducidos en avión y tren.

Convocatoria de propuestas de pósters y minisymposia

Pósters. Para la sesión de pósters dentro del congreso **RSME2000**, el comité organizador invita a todos los interesados en presentar un póster a enviar sus propuestas al comité organizador. Las propuestas deberán ser enviadas antes del **15 de septiembre de 1999** a:

Carlos Andradas
Congreso **RSME2000/Pósters**
Dpto. de Álgebra, Fac. Matemáticas (Univ. Complutense)
28040 Madrid

La propuesta debe incluir los datos completos de autor, título del póster, código de la AMS del trabajo y un *abstract* del póster sobre el que se basará la selección de los mismos. La selección se realizará por el comité organizador y la aceptación será comunicada a los interesados antes del 30 de octubre.

Minisymposia. La sesión de minisymposia tendrá una duración de 90 minutos. El comité organizador invita a todos los interesados en proponer un minisymposium a que envíen su propuesta antes del **15 de agosto de 1999** a:

Carlos Andradas
Congreso **RSME2000/Pósters**
Dpto. de Álgebra, Fac. Matemáticas (Univ. Complutense)
28040 Madrid

La propuesta debe incluir los datos completos de organizador y los ponentes en el symposium (entre un mínimo de cuatro y un máximo de seis), título del symposium y de las comunicaciones de las que conste, y medios necesarios para su realización. Puesto que el número de minisymposia posible es reducido, la selección se realizará por el comité organizador atendiendo a la calidad, interés y actualidad del tema, dando especial importancia a los de carácter interdisciplinar. La aceptación será comunicada a los interesados antes del 30 de septiembre. El comité organizador pondrá a disposición de los responsables de los minisymposia el espacio y medios físicos necesarios para su realización, aunque desgraciadamente no sufragará los gastos de los participantes en el mismo.

Simplifying the Structure of Equations Describing Electromechanical Objects by Means of Mathematical Transformations to Substitutional Equivalent System

Adam Marlewski, Institute of Mathematics,
Poznan University of Technology *

Stanislaw Rawicki, Institute of Industrial Electrical
Engineering, Poznan University of Technology

Eugenio Roanes Macías, Departamento de Algebra,
Universidad Complutense de Madrid †

Abstract

Within the framework of an electrical drive, application of a micro-processor technique requires of design engineers an utilization achievements in various fields, among others the mathematical theory of structures and algorithms, the theory of transformations and minimization. In this paper, problems of minimization of the structure of the dynamic mathematical model of an electrical three-phase induction motor with asymmetry of the stator and rotor circuit are analyzed. Equations of the induction machine in the natural system have been transformed to the zero-sequence system and the two-phase system connected with the coordinate system rotating in general with any speed in relation to the stator. The method of choice of the speed of the coordinate system is given in order to get the simplest form (minimization problems) of equations of the mathematical model for the symmetrical state and various asymmetries of the three-phase induction machine.

*e-mail: amarlew@math.put.poznan.pl

†e-mail: roanes@eucmos.sim.ucm.es

1 Introduction

A microprocessor technique has created new possibilities for designing of high-quality control systems within the framework of an electrical drive. Application of a microprocessor technique for optimum control requires of design engineers an utilization achievements in various fields, among others the mathematical theory of structures and algorithms, the theory of transformations and minimization. Software for microprocessor control of electric motors within a real-time system is connected with necessity of minimization of the structure of equations describing a physical model.

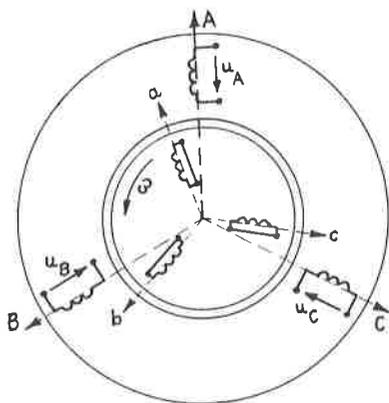


Fig. 1

Fig. 1 presents a scheme of windings of a three-phase induction motor (the phase windings: A, B, C in the stator and a, b, c in the rotor). Windings are placed symmetrically within the machine circumference; the space angle between the axes of neighbouring phases is equal to 120° . The stator is motionless, however the rotor rotates with the angular speed ω . The stator winding is supplied from cosinusoidal voltages u_A, u_B, u_C forming the symmetrical three-phase system:

$$\begin{aligned} u_A &= \sqrt{2}U \cos(\omega_1 t + \gamma) \\ u_B &= \sqrt{2}U \cos(\omega_1 t + \gamma - \frac{2\pi}{3}) \\ u_C &= \sqrt{2}U \cos(\omega_1 t + \gamma + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \quad (1)$$

where U, ω_1, γ are effective value, pulsation and an initial phase of the supply voltage.

During typical operation of an induction motor, the rotor winding is short-circuited. With the object of achieving the possibility for a machine diagnostics, the winding damages are here modeled by simplified way by means of assumption of asymmetrical resistances R_A, R_B, R_C in the stator circuit and R_a, R_b, R_c in the rotor circuit.

Minimization of the structure of the dynamic mathematical model of an electrical three-phase induction motor is possible with the help of the special transformation to the zero-sequence system and the two-phase system connected with the cartesian coordinate system. Suitable choice of the speed of the coordinate system creates the simplest form of equations for the symmetrical state and various asymmetries of resistances.

2 Mathematical Relations in Natural System of Induction Machine

Within the framework of the mathematical model of a three-phase induction machine, a structure of the following relations has great weight: relation between the magnetic flux vector ψ and the current vector I and the formula for the electromagnetic torque m . The vector ψ is connected with the vector I as follows:

$$\psi = LI \quad (2)$$

where

$$\psi = [\psi_A, \psi_B, \psi_C, \psi_a, \psi_b, \psi_c]^T \quad (3)$$

$$I = [i_A, i_B, i_C, i_a, i_b, i_c]^T \quad (4)$$

L - the inductance matrix:

$$L = \begin{pmatrix} L_s & M_s & M_s & Mc_1 & Mc_2 & Mc_3 \\ M_s & L_s & M_s & Mc_3 & Mc_1 & Mc_2 \\ M_s & M_s & L_s & Mc_2 & Mc_3 & Mc_1 \\ Mc_1 & Mc_3 & Mc_2 & L_r & M_r & M_r \\ Mc_2 & Mc_1 & Mc_3 & M_r & L_r & M_r \\ Mc_3 & Mc_2 & Mc_1 & M_r & M_r & L_r \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$c_1 = \cos\phi, \quad c_2 = \cos\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right), \quad c_3 = \cos\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) \quad (5b)$$

L_s, L_r - the phase stator or rotor self inductance, M_s, M_r - the mutual inductance between the stator phases or the rotor phases, M - the mutual inductance between the stator and the rotor phases for the rotor position $\phi = 0$ (it is assumed that the space magnetic-field distribution is cosinusoidal), ϕ - angular position of the axis of the rotor phase a in relation to the axis of the stator phase A .

The electromagnetic torque m can be calculated as a partial derivative of the magnetic-field energy W_m in relation to the rotor position ϕ , multiplied by the number ρ of pairs of magnetic-field poles:

$$m = \rho \frac{\partial W_m}{\partial \phi} \quad (6)$$

The formula for the energy W_m is the following:

$$W_m = \frac{1}{2}(\psi_A i_A + \psi_B i_B + \psi_C i_C + \psi_a i_a + \psi_b i_b + \psi_c i_c) \quad (7)$$

In the matrix notation, we have:

$$W_m = \frac{1}{2} I^T \psi = \frac{1}{2} I^T L I \quad (8)$$

Taking the formulae (4), (5), (6) and (8) into consideration, we obtain the following expression:

$$m = -\rho M \left[\sin\phi (i_A i_a + i_B i_b + i_C i_c) + \sin\left(\phi - \frac{2\pi}{3}\right) (i_A i_c + i_B i_a + i_C i_b) + \sin\left(\phi + \frac{2\pi}{3}\right) (i_A i_b + i_B i_c + i_C i_a) \right]. \quad (9)$$

3 Transformation Equations

The natural phase quantities of the stator (A, B, C) and the rotor (a, b, c) are here transformed to the equivalent, substitutional system of two windings in the stator (u, v) and in the rotor (ur, vr) connected with the coordinate

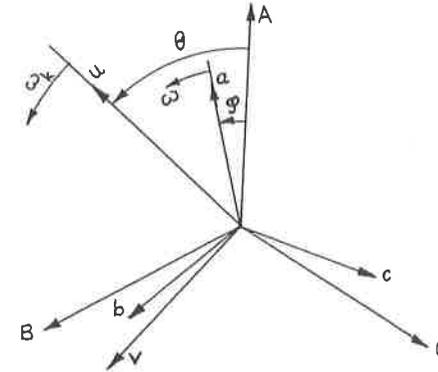


Fig. 2

system u, v (Fig. 2). In a general way, the coordinate system (u, v) can rotate with any speed ω_k . The transformation equations of a three-phase induction machine are the following:

$$W^N = B W \quad (10)$$

$$W = B^{-1} W^N \quad (11)$$

W - the vector of phase voltages, currents or magnetic fluxes of the stator and the rotor in the natural system (A, B, C, a, b, c), W^N - the vector of voltages, currents or magnetic fluxes in the new, substitutional system (us, vs, so, ur, vr, ro). The zero-sequence system (so, ro) has here complementary character. The orthogonal transformation matrix is:

$$B = \text{diag}(B_s, B_r), \quad (12)$$

where *diag* - formation of the diagonal matrix,

$$B_s = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta) & -\sin(\theta - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (13)$$

$$B_r = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} \cos(\theta - \phi) & \cos(\theta - \phi - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \phi + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\theta - \phi) & -\sin(\theta - \phi - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\theta - \phi + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

θ - angular position of the axis u of the coordinate system in relation to the axis of the stator phase A .

Starting from the formula (2) for the natural system, we calculate:

$$\psi = LI, \quad (15)$$

$$B\psi = BLI, \quad (16)$$

$$B\psi = BLB^{-1}BI, \quad (17)$$

$$\psi^N = L^N I^N, \quad (18)$$

$$L^N = BLB^{-1}. \quad (19)$$

For the inductance matrix L^N in the new system, it was calculated:

$$L^N = \begin{pmatrix} L_1 & 0 & 0 & M_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_{so} & 0 & 0 & 0 \\ M_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{ro} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

where

$$L_1 = L_s - M_s, \quad L_2 = L_r - M_r, \quad M_1 = \frac{3}{2}M$$

$$L_{so} = L_s + 2M_s, \quad L_{ro} = L_r + 2M_r. \quad (21)$$

The expression (20) is considerably simplified in comparison with the relation (5). For programming within the microprocessor control of an electric drive,

it is very profitable that in the formula (20) dependence on the rotor position ϕ is eliminated. The elements of the matrix L^N do not depend also on the position θ of the coordinate system.

Taking the formulae (6), (8) into account, we calculate:

$$m = \frac{1}{2}\rho I^T \frac{\partial L}{\partial \phi} I, \quad (22)$$

$$m = \frac{1}{2}\rho I^T B^{-1} B \frac{\partial L}{\partial \phi} B^{-1} BI, \quad (23)$$

$$(I^N)^T = (BI)^T = I^T B^T = I^T B^{-1}, \quad (24)$$

$$m = \frac{1}{2}\rho (I^N)^T B \frac{\partial L}{\partial \phi} B^{-1} I^N. \quad (25)$$

In formulae (24), we have taken into consideration that the transformation matrix B is orthogonal. After the matrix calculations in accordance with (25), we have obtained the following, very simple expression:

$$m = \rho M_1 (i_{vs} i_{ur} - i_{us} i_{vr}) \quad (26)$$

For the new system, the torque m does not depend on the angles ϕ, θ .

The important part of the mathematical model of an induction machine is the voltage drop at resistances in the stator and rotor circuit; we calculate it as follows:

$$RI \quad (27)$$

where the resistance matrix is:

$$R = \text{diag}(R_A, R_B, R_C, R_a, R_b, R_c) \quad (28)$$

The resistance matrix in the new system is the following:

$$R^N = BRB^{-1} = \begin{pmatrix} r_{1s} & r_{2s} & r_{3s} & 0 & 0 & 0 \\ r_{4s} & r_{5s} & r_{6s} & 0 & 0 & 0 \\ r_{7s} & r_{8s} & r_{9s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{1r} & r_{2r} & r_{3r} \\ 0 & 0 & 0 & r_{4r} & r_{5r} & r_{6r} \\ 0 & 0 & 0 & r_{7r} & r_{8r} & r_{9r} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

where

$$\begin{aligned}
r_{1s} &= \frac{1}{3}(R_A + R_B + R_C) + \frac{1}{6}(2R_A - R_B - R_C)\cos 2\theta - \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_B - R_C)\sin 2\theta \\
r_{2s} &= -\frac{1}{6}(2R_A - R_B - R_C)\sin 2\theta - \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_B - R_C)\cos 2\theta \\
r_{3s} &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(2R_A - R_B - R_C)\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{6}}(R_B - R_C)\sin \theta \\
r_{4s} &= r_{2s} \\
r_{5s} &= \frac{1}{3}(R_A + R_B + R_C) - \frac{1}{6}(2R_A - R_B - R_C)\cos 2\theta + \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_B - R_C)\sin 2\theta \\
r_{6s} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(R_B - R_C)\cos \theta - \frac{1}{3\sqrt{2}}(2R_A - R_B - R_C)\sin \theta \\
r_{7s} &= r_{3s} \\
r_{8s} &= r_{6s} \\
r_{9s} &= \frac{1}{3}(R_A + R_B + R_C) \\
r_{1r} &= \frac{1}{3}(R_a + R_b + R_c) + \frac{1}{6}(2R_a - R_b - R_c)\cos 2(\theta - \phi) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_b - R_c)\sin 2(\theta - \phi) \\
r_{2r} &= -\frac{1}{6}(2R_a - R_b - R_c)\sin 2(\theta - \phi) - \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_b - R_c)\cos 2(\theta - \phi) \\
r_{3r} &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(2R_a - R_b - R_c)\cos(\theta - \phi) + \frac{1}{\sqrt{6}}(R_b - R_c)\sin(\theta - \phi) \\
r_{4r} &= r_{2r} \\
r_{5r} &= \frac{1}{3}(R_a + R_b + R_c) - \frac{1}{6}(2R_a - R_b - R_c)\cos 2(\theta - \phi) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_b - R_c)\sin 2(\theta - \phi) \\
r_{6r} &= \frac{1}{\sqrt{6}}(R_b - R_c)\cos(\theta - \phi) - \frac{1}{3\sqrt{2}}(2R_a - R_b - R_c)\sin(\theta - \phi) \\
r_{7r} &= r_{3r} \quad , \quad r_{8r} = r_{6r} \\
r_{9r} &= \frac{1}{3}(R_a + R_b + R_c). \tag{30}
\end{aligned}$$

4 Choice of the Coordinate-System Speed

The dynamic mathematical model of an induction machine consists of so-called voltage equations, the motion equation and relations between currents and magnetic fluxes. The inductance matrix (20) and the electromagnetic torque described by the formula (26) do not depend on the position of the rotor (ϕ) and the coordinate system (θ). Because of this independence, choice of the optimum speed of the coordinate system, ensuring minimization of equation structure, is connected with the resistance matrix (29), (30) for the new system. As a general rule, the three-phase induction motors have supply by means of three electric conductors and the windings are star-connected without zero lead. In this case, the zero-sequence system (so, ro) can be omitted because the currents i_{so}, i_{ro} are equal to zero.

During normal operation of an induction motor at full symmetry, the resistance matrix (29) is very simple:

$$R^N = \text{diag}(R_s, R_s, R_s, R_r, R_r, R_r), \tag{31}$$

where R_s, R_r - the resistance of the stator and rotor phase circuit.

For the above variant, the coordinate system rotating with so-called synchronous speed ω_1 (formally equal to pulsation ω_1 of the supply network) is the most convenient. The supply voltages have here constant values. For the steady state, also the currents and fluxes are constant and derivatives are equal to zero (the equation structure is simplified to a maximum). At full symmetry, the dynamic mathematical model of an induction machine is the following:

$$D\psi_{us} = \sqrt{3}U \cos \gamma + \omega_1 \psi_{vs} - R_s i_{us} \tag{32}$$

$$D\psi_{vs} = \sqrt{3}U \sin \gamma - \omega_1 \psi_{us} - R_s i_{vs} \tag{33}$$

$$D\psi_{ur} = (\omega_1 - \omega) \psi_{vr} - R_r i_{ur} \tag{34}$$

$$D\psi_{vr} = -(\omega_1 - \omega) \psi_{ur} - R_r i_{vr} \tag{35}$$

$$D\omega = \frac{p}{J}(m - m_h) \quad , \quad m = \rho M_1 (i_{vs} i_{ur} - i_{us} i_{vr}), \tag{36}$$

$$i_{us} = \lambda (L_2 \psi_{us} - M_1 \psi_{ur}) \tag{37}$$

$$i_{vs} = \lambda (L_2 \psi_{vs} - M_1 \psi_{vr}) \tag{38}$$

$$i_{ur} = \lambda (L_1 \psi_{ur} - M_1 \psi_{us}) \tag{39}$$

$$i_{vr} = \lambda (L_1 \psi_{vr} - M_1 \psi_{vs}) \tag{40}$$

where $\lambda = (L_1 L_2 - M_1^2)^{-1}$, \mathcal{D} - differential operator, J - moment of inertia, m_h - the load torque.

At the damage only in the stator circuit, modeled by assumption of asymmetry of the stator phase resistances: R_A, R_B, R_C (at rotor symmetry: $R_a = R_b = R_c = R_r$), the coordinate system stationary in relation to the stator is the most advantageous; we assume: the speed $\omega_k = 0$, the angle $\theta = 0$. Within the mathematical model, we change now only four equations: (32)-(35); the expressions (36)-(40) are the same. At present, different voltage equations are:

$$\mathcal{D}\psi_{us} = \sqrt{3}U \cos(\omega_1 t + \gamma) - \frac{1}{6}(4R_A + R_B + R_C)i_{us} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_B - R_C)i_{vs} \quad (41)$$

$$\mathcal{D}\psi_{vs} = \sqrt{3}U \sin(\omega_1 t + \gamma) + \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_B - R_C)i_{us} - \frac{1}{2}(R_B + R_C)i_{vs} \quad (42)$$

$$\mathcal{D}\psi_{ur} = -\omega\psi_{vr} - R_r i_{ur} \quad (43)$$

$$\mathcal{D}\psi_{vr} = \omega\psi_{ur} - R_r i_{vr}. \quad (44)$$

At the rotor asymmetry (different resistances R_a, R_b, R_c) and the symmetrical stator ($R_A = R_B = R_C = R_s$), the coordinate system stationary in relation to the rotor gives the simplest equations (assumption: $\omega_k = \omega$ and $\theta = \phi$). Now the new voltage equations are the following:

$$\mathcal{D}\psi_{us} = \sqrt{3}U \cos(\omega_1 t - \phi + \gamma) + \omega\psi_{vs} - R_s i_{us}, \quad (45)$$

$$\mathcal{D}\psi_{vs} = \sqrt{3}U \sin(\omega_1 t - \phi + \gamma) - \omega\psi_{us} - R_s i_{vs}, \quad (46)$$

$$\mathcal{D}\psi_{ur} = -\frac{1}{6}(4R_a + R_b + R_c)i_{ur} + \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_b - R_c)i_{vr}, \quad (47)$$

$$\mathcal{D}\psi_{vr} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(R_b - R_c)i_{ur} - \frac{1}{2}(R_b + R_c)i_{vr}. \quad (48)$$

5 Automatization of calculus

The calculi involved in this paper can be automated using a CAS (Computer Algebra System). For example, one can benefit from the features of a Maple's worksheet to save a lot of effort on doing these calculus. As most of the refereed calculi are about matrix, we have to load the linear algebra package using the *with* command

```
> with(linalg):
```

Because of I is a reserved word in Maple (it is Maple's name for the square

root of -1), we can call *Current* - the current vector

```
> Current:=vector([i[A],i[B],i[C],i[a],i[b],i[c]]);
```

$$Current := [i_A, i_B, i_C, i_a, i_b, i_c]$$

The inductance matrix, that we call *Inductance* now (L is also reserved word in Maple), can be defined as follows

```
> Inductance:=matrix([[L[s],M[s],M[s],M*c[1],M*c[2],M*c[3]],
[M[s],L[s],M[s],M*c[3],M*c[1],M*c[2]], [M[s],M[s],L[s],
M*c[2],M*c[3],M*c[1]], [M*c[1],M*c[3],M*c[2],L[r],M[r],
M[r]], [M*c[1],M*c[3],M*c[2],M[r],L[r],M[r]], [M*c[1],
M*c[3],M*c[2],L[r],M[r],L[r]]]);
```

to obtain (5) as output. The magnetic flux vector, that we call *Flux* now (instead of *psi*), can be obtained by multiplying the matrix *Inductance* by the vector *Current*

```
> Flux:=evalm(Inductance &* Current):
```

The formula (8) for the energy can be obtained as the inner product of vectors *Flux* and *Current*

```
> Wk:=(1/2)*innerprod(Flux,Current):
```

and now we do the substitutions mentioned in (5b) to obtain W_m :

```
> Wm:=subs(c[1]=cos(phi),c[2]=cos(phi+(2/3)*Pi),c[3]=
cos(phi-(2/3)*Pi),Wk):
```

The electromagnetic torque m can be calculated by applying formula (6)

```
> m:=rho*diff(Wm,phi):
```

The output obtained can be manipulated by factoring

```
> factor(m):
```

and then collecting the three trigonometric expressions that appear

```
> collect(%,{sin(phi),sin(phi+1/3*Pi),cos(phi+1/6*Pi)});
```

$$-\rho M(i_C i_c + i_A i_a + i_B i_b) \sin(\phi) - \rho M(i_b i_A + i_B i_c + i_C i_a) \cos(\phi + \frac{1}{6}\pi)$$

$$-\rho M(-i_B i_a - i_c i_A - i_b i_C) \sin(\phi + \frac{1}{3}\pi)$$

From the two trigonometric equalities

$$\sin(\phi + \frac{1}{3}\pi) = -\sin(\phi - \frac{2}{3}\pi) , \quad \cos(\phi + \frac{1}{6}\pi) = \sin(\phi + \frac{2}{3}\pi)$$

it follows that the previous expression is the same as formula (9).

On the other hand, matrix (13) can be introduced in the following way

```
> B_s1:=matrix([[cos(theta), cos(theta-(2/3)pi),
cos(theta+(2/3)pi)], [-sin(theta), -sin(theta-(2/3)pi),
-sin(theta+(2/3)pi)], [1/sqrt(2), 1/sqrt(2), 1/sqrt(2)]]):
```

```
> B_s := evalm(sqrt(2/3)*B_s1):
```

and matrix B_r (14) can be introduced in analogous manner. From both of them, one can introduce matrix B using the *diag* command

```
> B:=diag(B_s,B_r):
```

The rest of calculus can be done in the same CAS, but it is omitted for the sake of brevity.

6 Conclusions

At formation of a mathematical model of an electromechanical system, it is advisable to transform the natural system to the equivalent, substantial system with the object of achieving the simplest form of equations describing electrical machines.

For the symmetrical electric three-phase induction motors, the new system connected with the coordinate system rotating with the synchronous speed is the most advantageous. At the mathematical modeling of the induction motor with the damage in the stator (stator asymmetry), we choose the coordinate system stationary in relation to the stator. The coordinate system fixed with the rotor ensures the simplest equations at failure in the rotor (rotor asymmetry).

Within of microprocessor control of electric drive, programming often requires minimization of the structure of equations describing a physical model.

In many practical cases, this structure minimization is necessary condition for simulation realization and diminution of an influence of measuring errors.

References

- [1] W.Hejmo, R.Koziol, *Microprocessor systems in automatics of electric drive* (in Polish), WNT, Warsaw, 1994
- [2] S.Rawicki, *Transformations of polyharmonic three-phase slip-ring induction machine* (in Polish), Proceedings of the IX Symposium "Applications of Computers in Electrotechnics", Łódź, 1984, 139-143
- [3] E.Roanes M., E.Roanes L. *Cálculos matemáticos por ordenador con Maple V.5*, Rubiños, 1999
- [4] T.Sobczyk, *Infinitely-dimensional linear and quadratic forms of electric machines*, *Rozprawy Elektrotechniczne*, núm. 29, 1983, 697-707

UNA INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA FRACTAL Y SU APLICACIÓN A LA COMPRESIÓN DE IMÁGENES

MIGUEL REYES

DPTO. DE MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE INFORMÁTICA, CAMPUS DE MONTEGANCEDO, BOADILLA DEL MONTE, 28660 MADRID

E-mail: mreyes@fi.upm.es

ABSTRACT. In this paper we give an introduction to the Fractal Geometry: fractal sets and dimensions, and the iterated function systems. Finally, we introduce some fractal techniques to the image compression.

1. INTRODUCCIÓN

Se puede considerar que la Geometría Fractal nació con la aparición del conjunto de Cantor, alrededor del año 1890. Este conjunto presenta una serie de irregularidades y, hasta cierto punto, patologías que causaron gran impacto y confusión entre los matemáticos de la época, llegando incluso a poner en duda la estructura de los cimientos de la matemática. A este conjunto siguieron otra serie de ellos como el triángulo de Sierpinski, las curvas de Von Koch y Peano, y muchos más con propiedades análogas.

El primer problema que se planteaba era distinguir entre el tamaño claramente diferente de los distintos conjuntos, asunto que no resolvía la medida de Lebesgue. Con este objetivo Hausdorff, en 1917, ideó las medidas que llevan su nombre.

Intuitivamente, una medida se puede imaginar como un microscopio de escala fija. Al pasar el microscopio por los diferentes conjuntos nos podemos encontrar con que la imagen del conjunto no se ve (conjuntos de medida cero), con que el conjunto nos llena todo el objetivo del microscopio (conjuntos de medida infinita) o con que la imagen del conjunto se ve con nitidez (conjuntos de medida finita y positiva). La finalidad última de una medida es distinguir entre el tamaño de los diferentes conjuntos y, por tanto, una medida será adecuada para una familia de conjuntos si los mide finita y positivamente.

Antes de las medidas de Hausdorff, en \mathbb{R}^n se disponía de la medida de Lebesgue (escala n del microscopio) y de la medida "cardinal" (número de elementos del conjunto, que correspondería a la escala 0 de nuestro microscopio). Ninguna de estas dos medidas resultaba adecuada para medir los conjuntos patológicos de que hablábamos inicialmente, pues con la medida "cardinal" todos miden infinito (tienen infinitos elementos) y con la de Lebesgue todos miden cero. Hausdorff ideó una familia infinita de medidas asociadas cada una de ellas a uno de los números reales comprendidos entre 0 y n , dándose el caso de que la medida asociada a 0 coincide con la medida "cardinal" y la asociada a n con la medida de Lebesgue (salvo una

constante de proporcionalidad). Además, para cada conjunto de \mathbb{R}^n sólo existe un número comprendido entre 0 y n para el cual la medida asociada puede ser la adecuada, siendo infinito la medida con cualquiera de las asociadas a valores reales inferiores y cero con cualquiera de las asociadas a valores reales superiores. Este número real se llama dimensión de Hausdorff del conjunto. Conviene observar que puede ocurrir que la medida asociada a este número real asigne medida cero o infinito al conjunto en cuestión, y en este caso no habría ninguna medida de Hausdorff adecuada al conjunto. Para este tipo de conjuntos Hausdorff ideó otra familia de medidas, más sofisticadas, asociadas a ciertas funciones, que se llaman medidas generalizadas de Hausdorff (ver [10]).

Con las medidas de Hausdorff se resolvió el problema de la clasificación de los conjuntos en función de su tamaño, pero entonces nos encontramos con el problema de la existencia de conjuntos del mismo tamaño o dimensión con propiedades geométricas completamente antagónicas. Al estudio de estas propiedades y la clasificación que producían entre los diferentes conjuntos dedicaron, y están dedicando aun, su trabajo una cantidad considerable de notables matemáticos de este siglo entre los que cabe destacar a A.S. Besicovitch, R.O. Davies, K.J. Falconer, J.M. Marstrand, P. Mattila, D. Preiss, C.A. Rogers, etc. La rama de la matemática dedicada al estudio de este tipo de conjuntos y sus propiedades se llama *Teoría Geométrica de la Medida*.

Alrededor del año 1970, el físico y matemático B.B. Mandelbrot observó el importante papel que podían desempeñar este tipo de conjuntos para la investigación en las ciencias aplicadas, pudiendo ser una herramienta fundamental en la modelización de una considerable parte de los objetos y fenómenos naturales. Esta serie de conjuntos, que hasta ahora no recibían ningún nombre concreto, fueron bautizados por él con el nombre de *fractales* y publicó, en 1977, un libro titulado "The Fractal Geometry of Nature" con gran cantidad de aplicaciones de estos conjuntos a diferentes ramas de las ciencias aplicadas. Este libro tuvo gran éxito y difusión entre el mundo científico y desde entonces se conoce a esta rama de la matemática con el nombre de *Geometría Fractal*. Actualmente los fractales y sus propiedades se utilizan con gran éxito en casi todas las ramas de la Ciencia: Matemáticas (Sistemas Dinámicos, Teoría de Números, etc.), Física, Química, Medicina, Ciencias de la Tierra, etc.

Se pretende dar aquí una breve introducción a esta rama de las matemáticas, y su aplicación a la compresión de imágenes. Se procurará dar suficientes referencias para cualquier lector interesado en profundizar en alguno de los tópicos que se traten. En la próxima sección presentaremos algunos de los fractales más conocidos, y que serán utilizados en el resto del trabajo. En la sección 3 se tratará sobre los conceptos de medida y dimensión fractal, y en 4 sobre los Sistemas de Funciones Iteradas, que es una de las familias más importantes de conjuntos fractales. Para terminar introduciremos, en 5, las técnicas fractales de compresión de imágenes. El lector interesado en profundizar, en ésta u otras aplicaciones de la Geometría Fractal, se

puede dirigir a cualquiera de los libros o artículos de autores como M.F. Barnsley ([1], [2]), J. Feder ([5]), B.B. Mandelbrot ([8]), y muchos mas en las diferentes ramas de la ciencia.

Todo el trabajo se desarrollará en \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, donde se considerará la distancia euclídea

$$d(x, y) = |x - y| = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

para $x, y \in \mathbb{R}^n$, o cualquier otra métrica d equivalente a ella y para la que el espacio métrico (\mathbb{R}^n, d) es completo.

2. EJEMPLOS DE CONJUNTOS FRACTALES

En esta sección se presentan los fractales mas conocidos, y que luego utilizaremos en el resto del artículo. El lector interesado en detalles sobre alguno de los temas que aquí trataremos puede consultar [3, 7].

2.1. El conjunto ternario de Cantor. En 1890 Cantor ideó el conjunto que lleva su nombre y que se construye a través del proceso infinito que describiremos a continuación. Se parte del intervalo cerrado $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$, dividiendo dicho intervalo en tres partes iguales de longitud $\frac{1}{3}$ cada una de ellas, eliminando el intervalo abierto central y quedándonos con dos intervalos cerrados, $I_1^1 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_2^1 = [\frac{2}{3}, 1]$, de longitud $\frac{1}{3}$ cada uno de ellos. El segundo paso de la construcción consiste en repetir el proceso anterior, a escala $\frac{1}{3}$, sobre cada uno de los intervalos cerrados I_i^1 , $1 \leq i \leq 2$, es decir se divide cada uno de estos intervalos en tres partes iguales de longitud $\frac{1}{9}$ y se eliminan los intervalos abiertos centrales, para obtener un total de 2^2 intervalos cerrados, $\{I_i^2\}_{i=1}^{2^2}$, cada uno de ellos de longitud 3^{-2} . Siguiendo así, en el paso $k \geq 1$ tendremos 2^k intervalos cerrados, $\{I_i^k\}_{i=1}^{2^k}$, cada uno de ellos de longitud 3^{-k} . El conjunto de Cantor se define como el conjunto que nos queda después de este proceso infinito de eliminación de intervalos abiertos centrales (ver Figura 1), es decir

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k} I_i^k$$

El conjunto ternario de Cantor C es no vacío, como queda de manifiesto al observar que los extremos de cada uno de los intervalos cerrados que aparecen en su construcción nunca se pueden eliminar por este proceso infinito, y es compacto. Además se puede observar que está formado por aquellos puntos del intervalo $[0, 1]$ cuya expansión decimal en base 3 no contiene a la cifra 1:

$$C = \{x = 0.a_1a_2a_3\dots : a_i = 0, 2\}$$

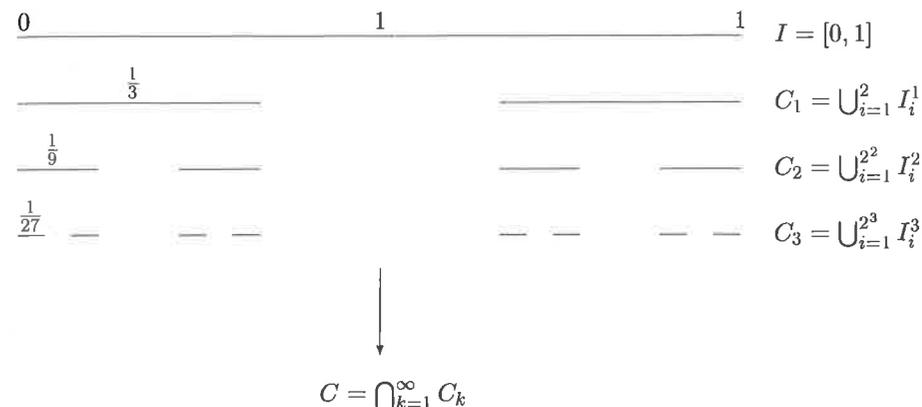


FIGURA 1. El conjunto clásico de Cantor

luego es un conjunto no numerable cuyo cardinal es el de \mathbb{R} , es decir

$$\text{card}(C) = \text{card}(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$$

y de longitud nula, puesto que

$$L^1(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} L^1 \left(\bigcup_{i=1}^{2^k} I_i^k \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{2^k} L^1(I_i^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \cdot 3^{-k} = 0$$

donde L^1 representa a la medida 1-dimensional de Lebesgue (longitud).

2.2. Un conjunto de Cantor en el plano. Mediante un proceso similar al anterior se construye un conjunto de Cantor en el plano. Se parte del cuadrado unidad $Q_0 = [0, 1] \times [0, 1]$ y, en el primer paso, nos quedamos con los 4 cuadrados cerrados, $\{Q_i^1\}_{i=1}^4$, contenidos en Q_0 de lado $\frac{1}{4}$ y que contienen a sus vértices (ver Figura 2). En el paso 2 repetimos el proceso anterior a escala $\frac{1}{4}$ sobre cada uno de los cuadrados obtenidos y llegamos a tener 4^2 cuadrados cerrados de lado $\frac{1}{16}$ y, así sucesivamente, en el paso k tendremos 4^k cuadrados cerrados, $\{Q_i^k\}_{i=1}^{4^k}$, de lado 4^{-k} cada uno de ellos. Se define el conjunto de Cantor en el plano como

$$Q = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{4^k} Q_i^k$$

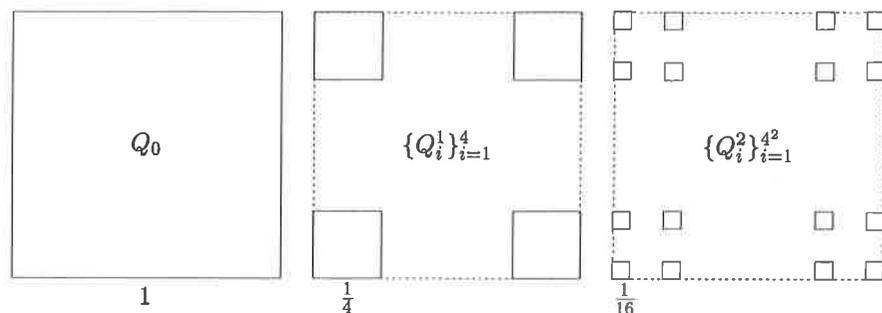


FIGURA 2. Conjunto de Cantor en el plano

Es fácil ver que el conjunto Q es compacto no vacío y no numerable, con área cero:

$$L^2(Q) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{4^k} L^2(Q_i^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k \cdot (4^{-k})^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} 4^{-k} = 0$$

donde L^2 representa a la medida 2-dimensional de Lebesgue (área). Además, si evaluamos el perímetro del conjunto en cada uno de los pasos de su construcción, se puede definir el perímetro del Q como

$$P(Q) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{4^k} P(Q_i^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k \cdot 4 \cdot 4^{-k} = 4$$

2.3. La curva de Koch. Se parte ahora del segmento unidad $[0, 1]$ eliminando el intervalo abierto central de longitud $\frac{1}{3}$ y sustituyéndolo por dos intervalos de longitud $\frac{1}{3}$ cada uno de ellos y que forman con el intervalo eliminado un triángulo equilátero (ver figura 3). Con ello habremos obtenido una curva K_1 formada por cuatro segmentos de longitud $\frac{1}{3}$. Si repetimos, a escala, este proceso sobre cada uno de los segmentos de K_1 obtendremos otra curva K_2 formada por 4^2 segmentos de longitud 3^{-2} cada uno de ellos, y así sucesivamente. En el paso k tendremos una curva K_k formada por 4^k segmentos de longitud 3^{-k} cada uno de ellos (ver figura 3). Es fácil ver que esta sucesión de curvas $\{K_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge uniformemente a una curva K que recibe el nombre de curva de Koch.

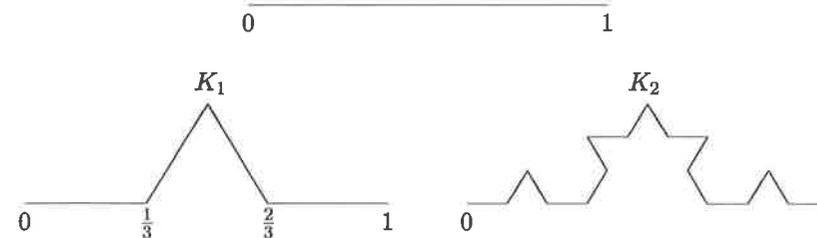


FIGURA 3. La curva de Koch

La curva de Koch tiene longitud infinita

$$L^1(K) = \lim_{k \rightarrow \infty} L^1(K_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k \cdot 3^{-k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty$$

y no sólo eso, sino que la longitud entre dos cualesquiera de sus puntos es también infinita. Por otro lado su área es nula ya que, para cualquier $k \geq 1$, está contenida en la unión de 4^k rectángulos cerrados de base 3^{-k} y altura $\frac{3^{-k}}{2\sqrt{3}}$. Luego

$$L^2(K) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k \cdot 3^{-k} \cdot \frac{3^{-k}}{2\sqrt{3}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k = 0$$

También se puede probar que la curva de Koch no tiene tangente en ninguno de sus puntos.

2.4. El triángulo de Sierpinski. Se parte del triángulo equilátero de lado unidad T_0 y, en el primer paso, nos quedamos con los 3 triángulos equiláteros cerrados, $\{T_i^1\}_{i=1}^3$, contenidos en T_0 de lado $\frac{1}{2}$ y que contienen a sus vértices (ver figura 4). En el paso 2 repetimos el proceso anterior a escala $\frac{1}{2}$ sobre cada uno de los triángulos obtenidos y llegamos a tener 3^2 triángulos cerrados de lado $\frac{1}{4}$ y, así sucesivamente, en el paso k tendremos 3^k triángulos cerrados, $\{T_i^k\}_{i=1}^{3^k}$, de lado 2^{-k} cada uno de ellos. Se define el triángulo de Sierpinski como

$$T = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{3^k} T_i^k$$

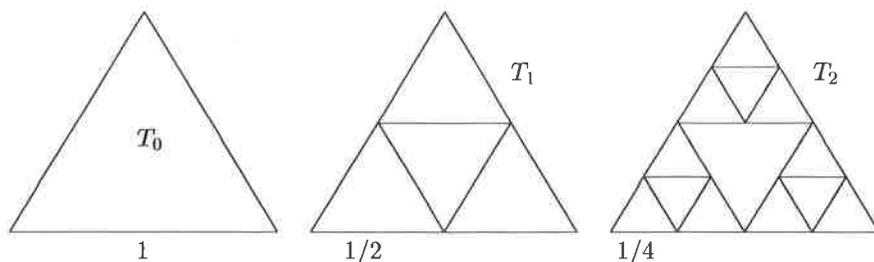


FIGURA 4. El triángulo de Sierpinski

Por su construcción, el triángulo de Sierpinski es un conjunto compacto de perímetro infinito

$$P(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{3^k} P(T_i^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (3^k \cdot 3 \cdot 2^{-k}) = 3 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty$$

y área nula

$$L^2(T) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{3^k} L^2(T_i^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^{-k} \cdot \frac{2^{-k} \sqrt{3}}{2} = 0$$

3. FRACTALES Y DIMENSIÓN

Una vez presentados algunos de los fractales mas conocidos, y que dieron lugar a los primeros estudios en lo que luego se llegó a llamar Geometría Fractal, podemos pasar a considerar la definición formal del término "fractal" introducido en la literatura por primera vez, como ya se dijo en la introducción, por B.B. Mandelbrot en 1977.

Conviene observar, en primer lugar, que no existe una definición unánimemente aceptada en la literatura, ya que cualquiera de las definiciones conocidas se encuentra con que deja fuera de ella a alguno de los conjuntos clásicamente aceptados como tales o incluye indebidamente a otros que no lo son. También es cierto que según el tema que se vaya a estudiar puede haber una definición más conveniente que otra. Dado el carácter de este artículo, en el que se pretende dar una introducción del tema a un público muy amplio, consideraremos la vaga definición dada por Y. Fisher en 1994 en [6].

3.1. Definición de conjunto fractal. Se llamará conjunto *fractal* a aquel que tenga alguna de las siguientes propiedades:

1. Tiene "detalles" a todas las escalas.
2. Es autosemejante (sus partes son semejantes al conjunto total).
3. Tiene una descripción algorítmica simple.
4. Su dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica.

Se puede ver que cada uno de los conjuntos presentados como fractales en la sección previa verifica varias de estas propiedades.

La última propiedad fué la definición original dada por B.B. Mandelbrot en 1977 ([8]). En esta propiedad aparece un término que aún no hemos definido (dimensión fractal) y otro desconocido para la mayoría del público no matemático (dimensión topológica). El concepto de dimensión topológica no es trivial y aquí daremos una definición inductiva del mismo.

3.2. Dimensión topológica. La *dimensión topológica* de un conjunto totalmente desconexo (no hay dos puntos del conjunto que se puedan unir por una curva que esté contenida en él) es cero. La *dimensión topológica* de un conjunto E es m si entornos arbitrariamente pequeños de puntos de E tienen frontera que interseca a E en un conjunto de dimensión topológica $m - 1$.

La dimensión topológica en \mathbb{R}^n es siempre un entero comprendido entre 0 y n . El conjunto clásico de Cantor es totalmente desconexo y su dimensión topológica será 0. Un intervalo tiene dimensión topológica 1 ya que para todo punto podemos encontrar entornos arbitrariamente pequeños (intervalos en \mathbb{R} , circunferencias en \mathbb{R}^2 , esferas en \mathbb{R}^3 , ...) cuya frontera interseca al intervalo en un conjunto de dimensión topológica cero (uno o dos puntos).

En cuanto al término de dimensión fractal, existen varios conceptos diferentes que reciben ese nombre: dimensión de Hausdorff, de empaquetamiento ("packing"), de autosemejanza, de recuento por cajas ("box-counting"), de Minkowski, ... Las definiciones más precisas, o más matemáticas, son las de Hausdorff y la de empaquetamiento, mientras que desde el punto de vista de las aplicaciones lo son las dimensiones de autosemejanza y de recuento por cajas. Estas últimas serán las que aquí consideraremos.

3.3. Dimensión de autosemejanza. Esta ligada a los llamados conjuntos autosemejantes. Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ se llama *autosemejante* si está formado por partes que son copias semejantes al conjunto total y "casi disjuntas", es decir si

$$A = \bigcup_{i=1}^N A_i$$

con $N \geq 2$ y

$$A_i \cap A_j = \emptyset \text{ ó "casi vacío"}$$

para $i \neq j$, y para cada i , $1 \leq i \leq N$, existe una semejanza $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de razón $r_i < 1$ ($|f_i(x) - f_i(y)| = r_i|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$) tal que $f_i(A) = A_i$.

Por intersección "casi vacía" entendemos un conjunto de tamaño claramente inferior al del conjunto total. Por ejemplo, si el conjunto total es no numerable se considerará casi vacía una intersección numerable. El hecho de admitir intersecciones casi vacías es para incluir en esta clase a conjuntos como la curva de Koch, algunas de cuyas partes intersecan en un punto.

Se llama *dimensión de autosemejanza* del conjunto autosemejante A al único número real $s \geq 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^N r_i^s = r_1^s + r_2^s + \dots + r_N^s = 1$$

y se representará por $s = \dim A$.

La existencia de este número s queda asegurada por el hecho de que la función $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^N r_i^t$$

es continua y decreciente con

$$\varphi(0) = N \geq 2 \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = 0$$

La importancia matemática de esta definición viene avalada por el hecho de que coincide con la dimensión de Hausdorff y porque los conjuntos autosemejantes son muy usados en la modelización de los fenómenos naturales. Todos los conjuntos citados en la sección anterior son autosemejantes. Veremos ahora algunos ejemplos de cálculo de la dimensión de autosemejanza.

3.4. Ejemplos. 1. Un segmento. Todo segmento $I \subset \mathbb{R}^n$ es la unión de sus dos mitades I_1 e I_2 , siendo cada una de ellas semejante al conjunto total con razón $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$ y su intersección el punto común de contacto (ver figura 5). Según lo anterior, el segmento I será autosemejante con dimensión de autosemejanza igual al único número $s \geq 0$ que verifica

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = \frac{2}{2^s} = 1$$

es decir $s = \dim I = 1$ que coincide con la dimensión topológica.

2. Un cuadrado. Todo cuadrado $A \subset \mathbb{R}^n$ es la unión de sus cuatro cuartas partes, $\{A_i\}_{i=1}^4$, siendo cada una de ellas semejante al conjunto total con razón $\frac{1}{4}$, y la

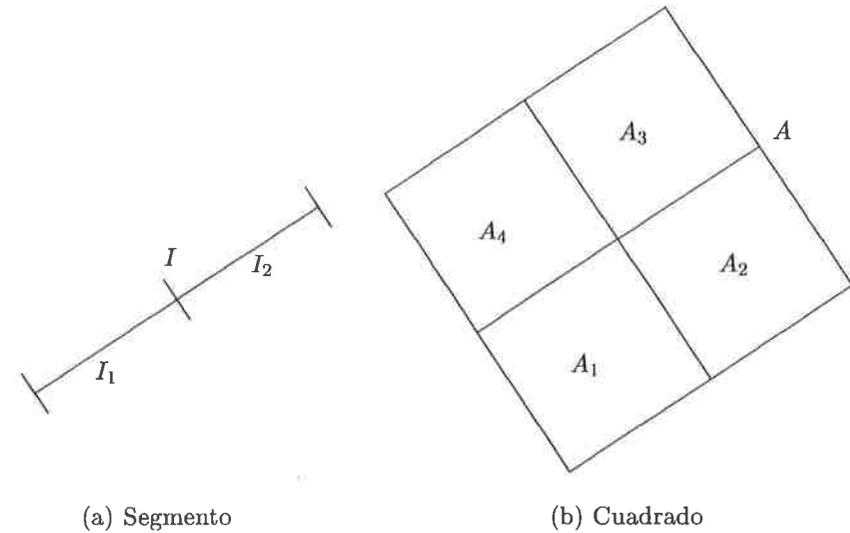


FIGURA 5. Conjuntos de dimensión topológica entera

intersección de cada dos de ellas un punto o un segmento (ver figura 5). Luego A es autosemejante de dimensión de autosemejanza el único número $s \geq 0$ que verifica

$$\left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 4 \cdot \frac{1}{2^s} = 1$$

de donde $s = \dim A = 2$.

3. El conjunto ternario de Cantor. Sea $C \subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$ el conjunto ternario de Cantor presentado en 2.1. Si consideramos

$$C_1 = C \cap \left[0, \frac{1}{3}\right] \quad \text{y} \quad C_2 = C \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

entonces $C = C_1 \cup C_2$ con $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ y siendo ambos, C_1 y C_2 , semejantes al conjunto total con razón $\frac{1}{3}$. Luego C es autosemejante con dimensión de autosemejanza el único número positivo s que verifica

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{2}{3^s} = 1$$

Luego ha de ser $3^s = 2$, de donde

$$\dim C = s = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309\dots$$

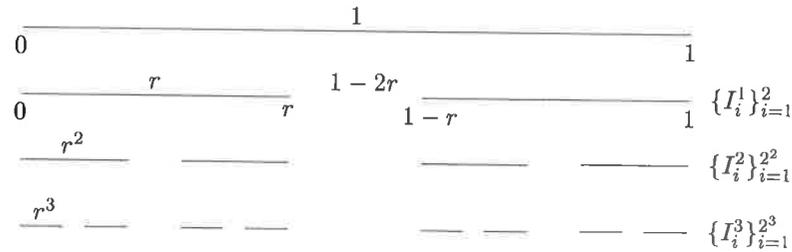


FIGURA 6. Conjunto generalizado de Cantor

4. Conjuntos generalizados de Cantor en \mathbb{R} . Sea $0 < r \leq \frac{1}{2}$, y supongamos que realizamos la misma construcción del conjunto clásico de Cantor (ver 2.1) pero con razón r en vez de $\frac{1}{3}$ (ver figura 6). Es decir, en el paso $k \geq 1$ tendremos 2^k intervalos cerrados, $\{I_i^k\}_{i=1}^{2^k}$, de longitud r^k cada uno de ellos. Se define entonces el *conjunto generalizado de Cantor* C_r como

$$C_r = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{2^k} I_i^k$$

Es fácil comprobar, de forma análoga al ejemplo anterior (ver [3]), que C_r es autosemejante y su dimensión es

$$\dim C_r = s(r) = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{r}}$$

Puesto que la aplicación $s : (0, 1/2] \rightarrow (0, 1]$ definida por $s(r) = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{r}}$ es biyectiva, se tiene que para cualquier número $s \in (0, 1]$ existe un único conjunto generalizado de Cantor C_r , con $r = 2^{-\frac{1}{s}}$, tal que $\dim C_r = s$.

5. Un conjunto de Cantor en el plano. Sea $Q \subset [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ el conjunto de Cantor presentado en 2.2. Es fácil ver que Q está formado por cuatro copias disjuntas y semejantes al conjunto total con razón $\frac{1}{4}$. Luego el conjunto Q es autosemejante y resolviendo la ecuación

$$\left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{4}\right)^s = \frac{4}{4^s} = 1$$

se obtiene su dimensión de autosemejanza $s = \dim Q = 1$.

Se puede observar que este conjunto tiene la misma dimensión de autosemejanza que un segmento, siendo sus propiedades geométricas radicalmente opuestas.

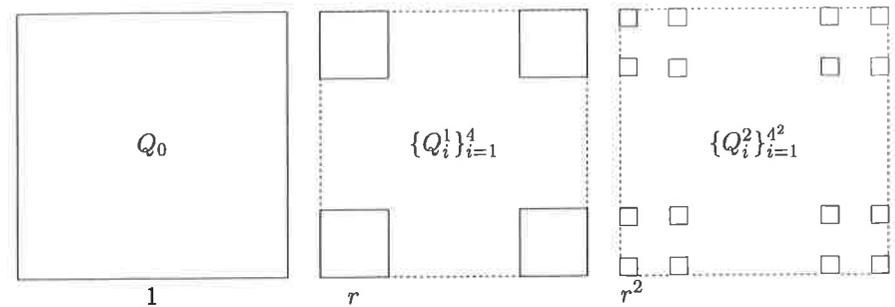


FIGURA 7. Conjunto generalizado de Cantor en el plano

6. Conjuntos generalizados de Cantor en el plano. Sea $0 < r \leq \frac{1}{2}$, y se realiza la misma construcción de la sección 2.2 pero con razón r en vez de $\frac{1}{4}$ (Figura 7). Es decir, en el paso $k \geq 1$ se tendrán 4^k cuadrados cerrados, $\{Q_i^k\}_{i=1}^{4^k}$, de lado r^k cada uno de ellos. Se define entonces el conjunto generalizado de Cantor en el plano Q_r como

$$Q_r = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{4^k} Q_i^k$$

Es fácil ver que Q_r es autosemejante y que su dimensión de autosemejanza es el número s que verifica que $4r^s = 1$, es decir

$$s(r) = \dim Q_r = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{r}}$$

Puesto que la aplicación $s : (0, \frac{1}{2}] \rightarrow (0, 2]$ definida por $s(r) = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{r}}$ es biyectiva, se tiene que para cualquier $s \in (0, 2]$ existe un único conjunto generalizado de Cantor Q_r , con $r = 4^{-\frac{1}{s}}$, tal que $\dim Q_r = s$.

7. La curva de Koch. Es fácil ver que la curva de Koch (ver 2.3) K está formada por la unión de cuatro copias semejantes al conjunto total, con razón $1/3$, y cuyas intersecciones son vacías o se reducen a un punto. Luego la curva de Koch es un conjunto autosemejante con dimensión el número s que verifica

$$\left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s + \left(\frac{1}{3}\right)^s = \frac{4}{3^s} = 1$$

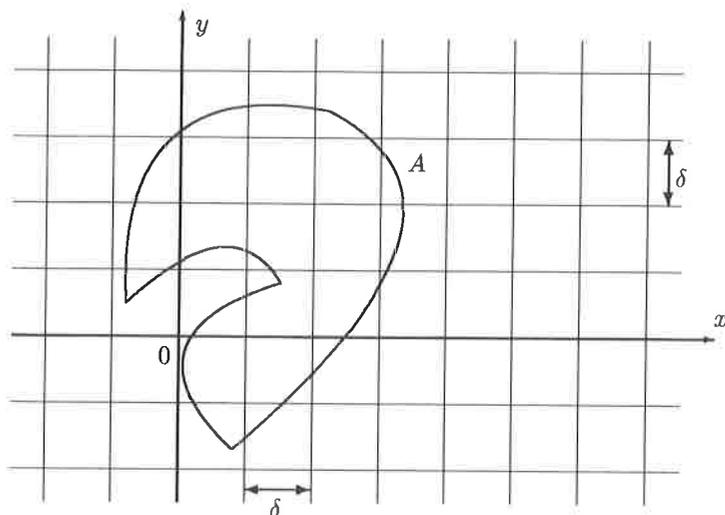


FIGURA 8. δ -malla

es decir

$$s = \dim K = \frac{\log 4}{\log 3} = 1.2618\dots$$

8. El triángulo de Sierpinski. Siguiendo argumentos similares se puede ver que el triángulo de Sierpinski, que se presentó en 2.4, es autosemejante y su dimensión es

$$s = \dim T = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.5849\dots$$

A continuación exponemos brevemente la dimensión box-counting o de recuento por cajas, que es la más conocida de las dimensiones fractales entre los investigadores en ciencias aplicadas y de la Naturaleza.

3.5. **Dimensión de recuento por cajas.** Por simplicidad daremos su definición en el plano, aunque análogamente se puede definir en \mathbb{R}^n , $n \geq 1$. Dado $\delta > 0$, llamaremos δ -malla a la familia de todos los cuadrados semiabiertos de la forma

$$Q(p, q) = [p\delta, (p+1)\delta) \times [q\delta, (q+1)\delta)$$

para cualesquiera $p, q \in \mathbb{Z}$. Estos cuadrados forman un enlosado completo y disjunto del plano (ver figura 8).

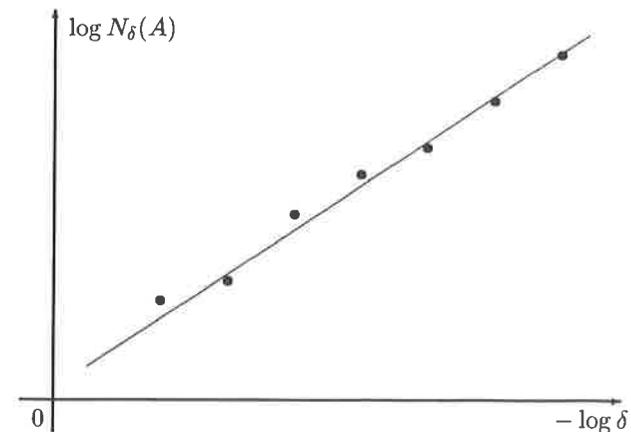


FIGURA 9. Representación log-log

Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$, llamaremos $N_\delta(A)$ al número de cuadrados de la δ -malla que intersecan al conjunto A . Se define la *dimensión recuento por cajas* o *dimension box-counting* como el límite

$$\dim_B A = \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log N_\delta(A)}{-\log \delta}$$

cuando este límite existe. Esta dimensión coincide o es muy próxima, en la mayoría de los casos, con la dimensión de Hausdorff y la de autosemejanza. Para más detalles se puede consultar [3] o [5].

Veamos ahora como se puede proceder para calcular de forma práctica la dimensión recuento por cajas, o un valor aproximado de la misma. Dado el conjunto A se consideran las δ -mallas asociadas a varios valores de δ , $\{\delta_k\}_{k=1}^N$, próximos a cero. En la práctica se suele considerar $\delta_k = 2^{-k}$, $1 \leq k \leq N$. Para cada valor de k , $1 \leq k \leq N$, se calcula $N_{\delta_k}(A)$ y en un plano, que se suele llamar log-log, se representan los N puntos $(-\log \delta_k, \log N_{\delta_k}(A))$, $1 \leq k \leq N$. En la práctica, estos N puntos aparecen aproximadamente alineados alrededor de una recta que se puede calcular, por ejemplo aplicando mínimos cuadrados, y cuya pendiente nos da un valor muy aproximado a la dimensión recuento por cajas de A (ver figura 9).

Vamos a terminar esta sección presentando un problema práctico cuyo estudio dió lugar a los conceptos de dimensión y medida fractal de forma independiente a lo aquí expuesto. El problema es el relativo a calcular la longitud de una frontera o costa y a la caracterización de su irregularidad.

3.6. Longitud de una costa. Supongamos que disponemos, sobre un papel, de la fotografía de una curva γ que nos representa a una frontera entre dos países, a la costa de una isla o de un país, etc., y que queremos determinar su longitud. Admitamos también que sobre esta foto podemos realizar todos los aumentos que se deseen hasta poder detectar hasta los más pequeños detalles. El cálculo práctico de su longitud consiste en fijar una escala $\varepsilon > 0$ sobre un compás y, a partir de un punto P_0 de la curva (que será uno de los extremos si la curva no es cerrada), tomar puntos sucesivos $P_1, P_2, \dots \in \gamma$ de tal manera que cada uno de ellos esté a distancia ε del anterior, hasta que recorramos completamente la curva. Si obtenemos hasta $N(\varepsilon)$ puntos, se suele decir que a escala ε la longitud de la curva es

$$\ell(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

Es evidente que para distintas escalas se obtendrán diferentes valores de la longitud, y que al disminuir la escala aumentará la longitud ya que se podrán detectar irregularidades más pequeñas que a escala superior no se detectaban. Es decir, que si repetimos el cálculo anterior para distintas escalas $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \dots$ obtendremos valores crecientes de la longitud

$$\ell(\varepsilon_1) \leq \ell(\varepsilon_2) \leq \ell(\varepsilon_3) \leq \dots$$

y parece lógico preguntarse por $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ell(\varepsilon)$, que sería un valor que no dependería de la escala y que se podría llamar longitud de la curva (costa, frontera, etc.). Efectivamente, si γ es una curva suave (derivable) el límite anterior coincide con la definición matemática de longitud de la curva, pero si es una curva irregular (no derivable), como ocurre con la mayoría de las costas o fronteras reales, nos encontramos con que el límite anterior es infinito, convergiendo más rápido a infinito cuanto más agreste o irregular es la curva. Parece claro entonces que no se puede hablar de la longitud de una costa o frontera sin decir la escala a la que se ha medido, y que esta longitud no da información sobre la irregularidad de la curva.

Si llamamos $\ell_d(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d$, $1 \leq d \leq 2$, se puede observar que en la mayoría de los casos reales

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ell_1(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon = \infty$$

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ell_2(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^2 = 0$$

por lo que cabe preguntarse sobre la existencia de algún número real d , $1 \leq d \leq 2$, tal que

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ell_d(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d = k$$

con $0 < k < \infty$.

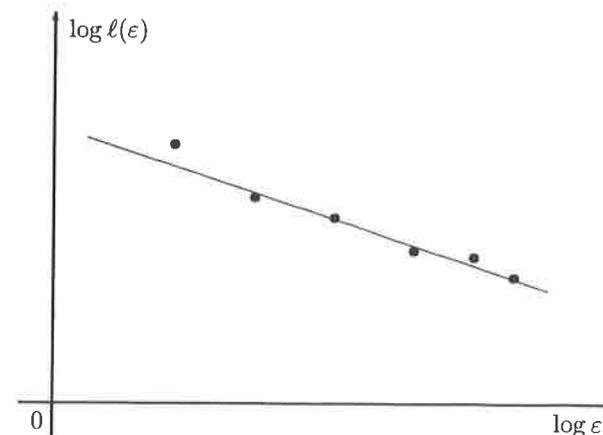


FIGURA 10. Experimento de Fry Richardson para la costa oeste de Inglaterra

Fry Richardson (1881-1953) observó que si medimos la longitud de una curva determinada

$$\ell(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon$$

a diferentes escalas, $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$, y representamos los puntos $\{(\log \varepsilon_i, \log \ell(\varepsilon_i))\}_{i=1}^n$ en un plano cartesiano, nos encontramos con que están alineados alrededor de una recta (cuya ecuación se puede obtener por mínimos cuadrados) de pendiente α (ver figura 10). Es decir que

$$\log \ell(\varepsilon) \sim \alpha \cdot \log \varepsilon$$

y por tanto que $\ell(\varepsilon) \sim \varepsilon^\alpha$. Luego

$$\ell(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon \sim \varepsilon^\alpha$$

de donde $N(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-1+\alpha}$, y entonces

$$\ell_d(\varepsilon) = N(\varepsilon) \cdot \varepsilon^d \sim \varepsilon^{-1+\alpha+d} \rightarrow_{\varepsilon \downarrow 0} \begin{cases} 0 & , \text{ si } d > 1 - \alpha \\ 1 & , \text{ si } d = 1 - \alpha \\ \infty & , \text{ si } d < 1 - \alpha \end{cases}$$

con lo que el valor de d buscado para que $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \ell_d(\varepsilon) = k$, con $0 < k < \infty$, es $d = 1 - \alpha$.

Fry Richardson realizó este experimento para varios ejemplos de curvas obteniendo, por ejemplo, que para la costa oeste de Inglaterra $d \approx 1.3$, para la costa de Noruega $d \approx 1.5$, y para la curva de Koch $d \approx 1.26$. Este valor del parámetro d es

una medida de la irregularidad de la curva (a mayor valor de d mayor irregularidad) y está muy próximo al valor de la dimensión recuento por cajas en la mayoría de los casos.

4. SISTEMAS DE FUNCIONES ITERADAS

Michael F. Barnsley desarrolló, en 1985, la teoría de Sistemas de Funciones Iteradas como una generalización de los Fractales Autosemejantes que ya se conocían desde 1981. Daremos aquí una breve descripción de los mismos.

Diremos que una aplicación $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es *contractiva* en el espacio métrico completo (\mathbb{R}^n, d) si

$$d(f(x), f(y)) \leq r \cdot d(x, y)$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $0 \leq r < 1$. Toda semejanza contractiva es una aplicación contractiva pero no a la inversa. En esta sección, y para facilitar la exposición, llamaremos *fractal* a cualquier conjunto compacto y no vacío de \mathbb{R}^n , y representaremos por $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ el espacio de todos los fractales de \mathbb{R}^n , donde se define la *distancia de Hausdorff* como

$$d_h(A, B) = \max\{\max_{a \in A} d(a, B), \max_{b \in B} d(b, A)\}$$

donde $d(a, B) = \min_{b \in B} d(a, b)$ es la mínima distancia del punto a al conjunto B . Intuitivamente, la distancia de Hausdorff entre dos fractales es la mayor distancia que hay entre un punto de un conjunto y el otro conjunto. Se puede probar que el espacio de los fractales con la distancia de Hausdorff, $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), d_h)$, es un espacio métrico completo.

Enunciaremos a continuación uno de los más importantes teoremas de la matemática, el teorema del punto fijo o de la aplicación contractiva, que tiene múltiples aplicaciones tanto en las matemáticas como en otras ciencias.

4.1. Teorema del punto fijo. Sea (X, d) espacio métrico completo y $f : X \rightarrow X$ una aplicación contractiva de razón r , $0 \leq r < 1$. Entonces existe un único $x \in X$ tal que

$$f(x) = x \quad (\text{punto fijo})$$

y además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x, \quad \forall y \in X$$

donde f^n representa a la composición de f consigo mismo n veces.

Dada una aplicación contractiva $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de razón r , $0 \leq r < 1$, podemos considerar la aplicación

$$f : \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \\ A \rightarrow f(A) = \{f(x) : x \in A\}$$

que está bien definida al ser f continua y ser compacto la imagen continua de cualquier compacto. Además se puede probar que

$$d_h(f(A), f(B)) \leq r \cdot d_h(A, B), \quad \forall A, B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$$

con lo que f es contractiva en $(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), d_h)$, y podemos aplicar el teorema del punto fijo para encontrar un único conjunto $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ tal que $A = f(A)$. Es claro que $A = \{x\}$ donde x es el punto fijo de f en (\mathbb{R}^n, d) .

Llamaremos *sistema de funciones iteradas* a una familia finita $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ de aplicaciones contractivas en \mathbb{R}^n de razones, respectivamente, $\{r_1, r_2, \dots, r_N\}$.

Dado un sistema de funciones iteradas podemos considerar la aplicación $F : \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ definida sobre el espacio de los fractales por

$$F(B) = \bigcup_{i=1}^N f_i(B)$$

que verifica

$$d_h(F(B), F(C)) \leq r \cdot d_h(B, C), \quad \forall B, C \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$$

donde $r = \max\{r_1, r_2, \dots, r_N\} < 1$. Es decir, la aplicación F es contractiva sobre el espacio métrico completo de los conjuntos fractales, y por lo tanto podemos aplicar el teorema del punto fijo 4.1 para llegar al siguiente resultado:

4.2. Teorema. Dado un Sistema de Funciones Iteradas, $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$, existe un único fractal (conjunto compacto y no vacío) $A \subset \mathbb{R}^n$ tal que

$$A = F(A) = \bigcup_{i=1}^N f_i(A)$$

Además, para cualquier $B \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F^k(B) = A$$

en la métrica de Hausdorff. El conjunto A se llamará *atractor del Sistema*.

Se puede observar que el atractor del SFI (sistema de funciones iteradas) desempeña el mismo papel del conjunto autosemejante con respecto a las semejanzas, es decir es invariante con respecto al mismo. El mismo teorema 4.2 nos sugiere un método, *algoritmo determinista*, para obtener el atractor:

4.3. Algoritmo determinista.

1. Elegir $B \subset \mathbb{R}^n$ compacto y no vacío
2. Hacer $Z = B$
3. Representar Z
4. Hacer desde $i = 1$ hasta N :
 - (a) Hallar $F(Z) = \bigcup_{i=1}^N f_i(Z)$
 - (b) Hacer $Z = F(Z)$ (Sustituir Z por $F(Z)$)

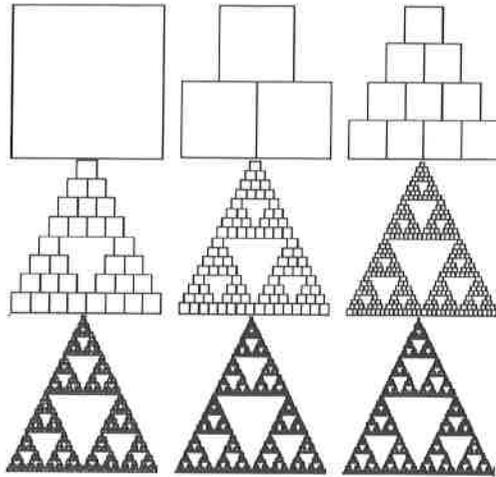


FIGURA 11. Triángulo de Sierpinski determinista

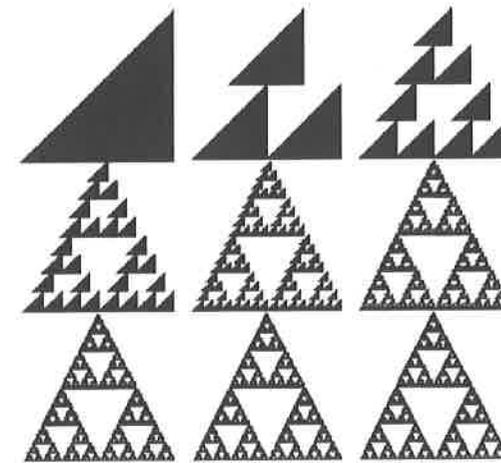


FIGURA 12. Triángulo de Sierpinski determinista

(c) Representar Z

5. Fin

Si este algoritmo se programa en algún lenguaje de programación, la entrada será el conjunto B arbitrario y la salida será $F^M(B)$ que, para $M = 10$, nos da en general una muy buena aproximación del atractor A . Recordemos que el atractor A es independiente de la entrada B elegida. El inconveniente fundamental de este algoritmo es su lentitud y la memoria que ocupa en su ejecución. En la figura 11 y 12 se pueden ver los resultados obtenidos al aplicar el algoritmo determinista (hasta $M = 8$) al SFI $\{f_1, f_2, f_3\}$, asociado al triángulo de Sierpinski, que viene representado por la tabla

i	a	b	c	d	e	f
1	.5	0	0	.5	1	1
2	.5	0	0	.5	50	1
3	.5	0	0	.5	25	50

donde la fila i representa a la aplicación contractiva

$$f_i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

definida sobre una pantalla de 100×100 píxeles ($[1, 100] \times [1, 100]$). Se puede observar que partiendo de diferentes conjuntos iniciales se obtiene el mismo atractor.

Con el propósito de mejorar los resultados damos ahora otro algoritmo llamado *algoritmo aleatorio* o "juego del caos".

4.4. **Algoritmo aleatorio.** Asignamos a cada una de las funciones del Sistema f_i , $1 \leq i \leq N$, una probabilidad $p_i > 0$ con

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1$$

y realizamos el siguiente proceso iterativo:

Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Se elige aleatoriamente $x_1 \in \{f_1(x_0), \dots, f_N(x_0)\}$ donde $f_i(x_0)$, $1 \leq i \leq N$, tiene una probabilidad p_i de ser elegido. Análoga e independientemente del paso anterior, se elige aleatoriamente $x_2 \in \{f_1(x_1), \dots, f_N(x_1)\}$, según la misma distribución de probabilidades. Cuando tenemos $\{x_0, x_1, \dots, x_p\}$, se determina x_{p+1} mediante el mismo proceso anterior, es decir eligiendo de manera independiente (de los pasos anteriores) y aleatoria

$$x_{p+1} \in \{f_1(x_p), \dots, f_N(x_p)\}$$

según la misma distribución de probabilidades, y así sucesivamente. Entonces se tiene que: *Con probabilidad uno, el conjunto obtenido $\{x_p\}_{p=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}^n$ converge en la métrica de Hausdorff, al atractor A del Sistema, en el siguiente sentido:*

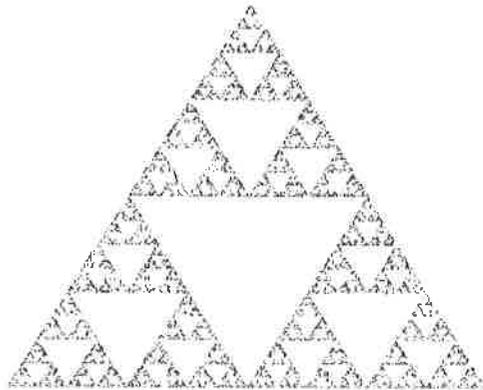


FIGURA 13. Triángulo de Sierpinski aleatorio

Dado $\varepsilon > 0$, existe $k = k(\varepsilon)$ tal que

$$\lim_{M \rightarrow \infty} d_h \left(A, \{x_p\}_{p=k}^M \right) < \varepsilon$$

Una descripción más precisa del algoritmo aleatorio sería la siguiente:

1. Elegir un punto arbitrario $x \in \mathbb{R}^n$
2. Hacer desde $i = 1$ hasta M :
 - (a) Elegir $j \in \{1, 2, \dots, N\}$ con probabilidades $\{p_1, \dots, p_N\}$
 - (b) Hallar $y = f_j(x)$
 - (c) Hacer $x = y$ (Sustituir el valor de x por el de y)
 - (d) Si $i \geq 50$, representar x
3. Fin

Mediante una implementación de este algoritmo, que es muy rápido y económico en memoria, hasta representar unos 10.000 puntos, despreciando los 50 primeros, se obtienen muy buenas representaciones del atractor. En la figura 13 se puede ver el triángulo de Sierpinski generado mediante este algoritmo. Para más detalles consultar [1, 7].

5. TÉCNICAS FRACTALES PARA LA COMPRESIÓN DE IMÁGENES

Vamos a describir aquí, muy brevemente, en qué consisten las técnicas fractales para la compresión de imágenes en computador. Consideraremos los casos de imágenes binarias y monocromáticas. Un tratamiento profundo del tema se puede ver en [2, 6].

5.1. **Imágenes binarias.** Comenzaremos describiendo lo que se entiende por imagen binaria y planteando la necesidad de su compresión. Podemos suponer aquí que la pantalla consta de 256×256 píxels

$$X = \{(i, j) : i, j \in \mathbb{Z}, 0 \leq i, j \leq 255\}$$

que se puede identificar, a efectos de cálculo matemático con $[0, 1]^2$. Por imagen binaria se entiende aquella que sólo utiliza los colores blanco y negro, es decir 0 y 1, con lo que una imagen es una aplicación $f : X \rightarrow \{0, 1\}$. Puesto que cada píxel sólo tiene dos posibilidades (0 ó 1), guardar su información sólo necesita de 1 bit, y guardar la imagen completa en la memoria del ordenador necesitará

$$256 \cdot 256 = 65.536 \text{ bits}$$

sea cual fuere la imagen considerada.

Veamos ahora cuanta memoria se necesitará para guardar el SFI asociado al triángulo de Sierpinski, que consta de 3 aplicaciones dependientes de 6 parámetros cada una de ellas y siendo estos parámetros 0, $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ que en base 2 se expresan por .00, .10 y .01 respectivamente, con lo que sólo se necesitan 2 bits para describir cada uno de ellos. En total

$$3 \cdot 6 \cdot 2 = 36 \text{ bits}$$

Luego resultará más económico guardar el SFI y generar la imagen en el momento que se desee que guardar la imagen original del triángulo de Sierpinski. Dada la velocidad actual de los ordenadores, el tiempo necesario para generar el atractor (a partir del SFI) es despreciable con respecto al ahorro de memoria. La razón de compresión es $65.536 : 36 \approx 2.000 : 1$.

Por técnicas fractales para compresión de imágenes se entiende los métodos que permiten obtener fractales (o SFI) que aproximan a las imágenes reales para que, en vez de almacenar la imagen real en memoria, almacenemos el SFI que nos generará el fractal (que aproxima a la imagen). En el caso de imágenes binarias, muchas de las técnicas usadas se basan en el siguiente teorema debido a M.F. Barnsley ([1]).

5.2. **Teorema del Collage (Barnsley, 1986).** Sea I una imagen binaria real ($I \subset \mathbb{R}^n$ compacto) y, dado $\varepsilon > 0$, supongamos que podemos encontrar un SFI $\{f_1, f_2, \dots, f_N\}$ con factor de contractividad $r < 1$, tal que

$$d_h \left(I, \bigcup_{i=1}^N f_i(I) \right) \leq \varepsilon$$

Entonces

$$d_h(A, I) \leq \frac{\varepsilon}{1-r}$$

donde A es el atractor del SFI.

En la práctica, en vez de almacenar I se guarda el SFI y, cuando se quiere tener I se genera A ($A \approx I$). Se puede observar que la aproximación no depende del número de aplicaciones del SFI. En general, para obtener una imagen real se necesita más de un fractal, es decir más de un SFI.

5.3. Imágenes monocromáticas. Por imagen monocromática se entiende aquella en que cada píxel tiene un color que va del blanco al negro a través de 256 niveles de gris. Si seguimos considerando la misma pantalla de 256×256 píxels que llamabamos X (identificable con $[0, 1]^2$) y si representamos por $G = \{0, 1, 2, \dots, 255\}$ los niveles de gris, que se pueden identificar a efectos matemáticos con $[0, 1]$, una *imagen monocromática* es una aplicación $f : X \rightarrow G$. Puesto que $256 = 2^8$, para almacenar en memoria cada uno de los posibles niveles de gris (elementos de G) se necesitan 8 bits, y para guardar en memoria la imagen completa

$$256 \cdot 256 \cdot 8 = 524.288 \text{ bits}$$

lo que pone de manifiesto la importancia de desarrollar técnicas que permitan disminuir el espacio necesario para almacenar las imágenes. Una de ellas es la fractal que, como su nombre indica, utiliza fractales para aproximar las imágenes reales. Daremos a continuación algunas ideas en las que se basan estos métodos.

La imagen monocromática se puede considerar como una superficie

$$I = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in X\} \subset \mathbb{R}^3$$

Dividimos X en 1024 bloques, $\{R_i\}_{i=1}^{1024}$, de tamaño 8×8 bits que llamaremos *bloques rango*, y llamaremos *bloque dominio* a cualquier bloque de 16×16 bits (ver figura 14)

Fijado un bloque rango R y otro dominio D , existen seis formas posibles de comprimir homogéneamente D en R :

$$V^j \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^j & b^j \\ c^j & d^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^j \\ f^j \end{pmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 6$$

con $V^j(D) = R$. Para cada una de ellas se buscan los valores de s^j y r^j tales que, si definimos

$$W^j \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^j & b^j & 0 \\ c^j & d^j & 0 \\ 0 & 0 & s^j \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ f(x, y) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^j \\ f^j \\ r^j \end{pmatrix}$$

se obtiene una mayor proximidad entre los conjuntos

$$\{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in R\} \quad \text{y} \quad \{W^j(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in D\}$$

Notemos que, puesto que hay $241 \cdot 241 = 58.081$ posibles bloques dominio, para cada uno de los 1024 bloques rango hay que considerar $58081 \cdot 6 = 348.486$ posibles transformaciones y después elegir la mejor. Las 1024 aplicaciones obtenidas (una por cada bloque rango) nos generan la aproximación fractal a la imagen real original.

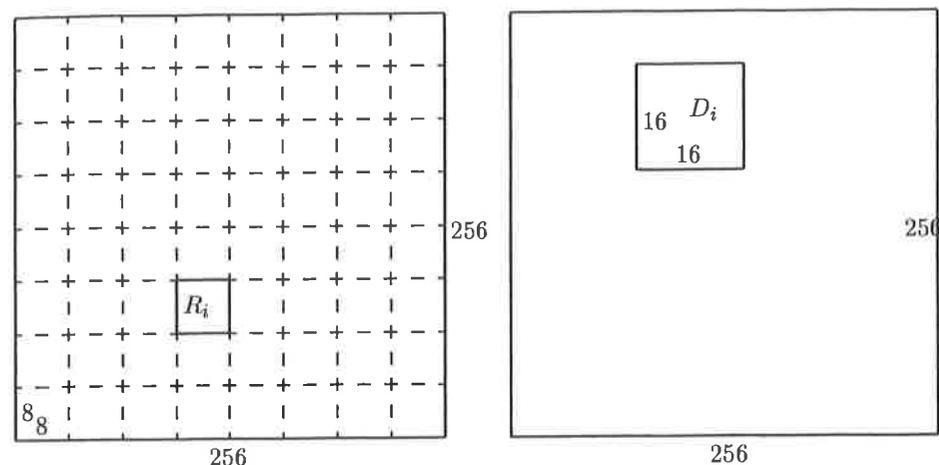


FIGURA 14. Bloques rango y dominio

REFERENCIAS

- [1] M.F. Barnsley, *Fractals Everywhere*, Academic Press, London, 1988.
- [2] M.F. Barnsley & L.P. Hurd, *Fractal Image Compression*, AK Peters Ltd., Wellesley, 1993.
- [3] K.J. Falconer, *Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, Chichester, 1990.
- [4] K.J. Falconer, *Techniques in Fractal Geometry*, John Wiley & Sons, Chichester, 1997.
- [5] J. Feder, *Fractals*, Plenum Press, New York, 1988.
- [6] Y. Fisher, *Fractal Image Compression*, Springer Verlag, New York, 1994.
- [7] M. de Guzmán, M.A. Martín, M. Morán y M. Reyes, *Estructuras Fractales y sus Aplicaciones*, Labor, Barcelona, 1993.
- [8] B.B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1977.
- [9] H.O. Peitgen, D. Saupe and H. Jürgens, *Chaos and Fractals: New Frontiers of Science*, Springer Verlag, New York, 1992.
- [10] C.A. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1970.

Vectores deslizantes; pares de vectores

José Pérez Blanco

I.E.S. Núñez de Arce.
Departamento de Álgebra Geometría y Topología
Universidad de Valladolid

Resumen

En la Física un vector deslizante es un vector cuyo punto de aplicación puede ser cualquier punto de una recta que tiene la dirección del vector, llamada recta de acción. Un par de vectores es un sistema formado por dos vectores deslizantes cuya resultante como vectores libres es cero.

Sabemos que todo sistema de vectores deslizantes puede reducirse a un vector más un par. En este artículo demostramos que dados dos puntos del plano afín, P y Q , y un vector v linealmente independiente de \overrightarrow{PQ} , todo sistema de vectores deslizantes puede reducirse a un vector deslizante aplicado en P , $[P, u]$, más un par aplicado en P y en Q de la forma $[P, Q, \lambda v]$. Como consecuencia se obtiene que el conjunto de sistemas de vectores deslizantes en el plano afín es un espacio vectorial de dimensión tres.

Notación. Sea V un espacio vectorial real de dimensión dos, $A = (V, C)$ un espacio afín con C como conjunto de puntos. Dados el punto $P \in C$ y el vector $u \in V$, $Q = P + u$, es el punto que verifica $\overrightarrow{PQ} = u$. Sea $r_{P,u}$ la recta que pasa por el punto P y tiene por subespacio asociado el generado por el vector $u \neq 0$.

Definición. Dados los puntos $P, Q \in C$ y los escalares α y β , con $\alpha + \beta \neq 0$, se llama baricentro de $\{P, Q\}$ con pesos $\{\alpha, \beta\}$ al punto T verificando

$$T = 0 + \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha \overrightarrow{0P} + \beta \overrightarrow{0Q})$$

con 0 un punto cualquiera, el baricentro no depende del punto 0

Definición. Se llama vector deslizante a los elementos del conjunto cociente $VD = C \times V / \sim$ con la siguiente relación de equivalencia

$$(P, u) \sim (Q, v) \text{ si } u = v \text{ y } r_{P,u} = r_{Q,v}$$

Denotaremos con $[P, u]$ a la clase de (P, u) .

Definición. Suma de dos vectores deslizantes.

(a) Si los vectores $\{u, v\}$ son linealmente independientes se define

$$[P, u] + [Q, v] = [T, u + v], T = r_{P,u} \cap r_{Q,v}$$

(b) Para $\alpha + \beta \neq 0$ se define

$$[P, \alpha u] + [Q, \beta u] = [T, (\alpha + \beta) u]$$

con T el baricentro de $\{P, Q\}$ con pesos $\{\alpha, \beta\}$, es decir, $T = 0 + \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha \overrightarrow{0P} + \beta \overrightarrow{0Q})$

Observación. (a) La suma no depende de los representantes elegidos; en el primer caso es obvio; en el segundo es suficiente tener en cuenta que si r y s son rectas paralelas el conjunto de los baricentros de los pares $\{P, Q\}$ con pesos $\{\alpha, \beta\}$, con $P \in r$ y $Q \in s$, están en una recta (paralela a las anteriores).

Para demostrar la afirmación anterior podemos suponer que la ecuación de la recta r es $x = 0$ y que la de la recta s es $x = k$, entonces se tiene $P = (0, p)$ y $Q = (k, q)$, para ciertos escalares p, q y k , el baricentro R es el punto $(\frac{\beta k}{\alpha + \beta}, \frac{\alpha p + \beta q}{\alpha + \beta})$ por lo que está en la recta $x = \frac{\beta k}{\alpha + \beta}$, que es paralela a las anteriores.

(c) La suma $[P, u] + [Q, -u]$ no está definida, por ello se introduce el concepto de par.

Definición. Se llama par a todo elemento del conjunto cociente

$$\{[P, u] + [Q, -u] : P, Q \in C, u \in V\} / \approx$$

donde $([P, u] + [Q, -u]) \approx ([P', v] + [Q', -v])$ si se verifica una de las dos condiciones siguientes

1) Existen $R \in C, w \in V$ verificando

$$\begin{aligned} [P, u] + [R, w] &= [P', v] \\ [Q, -u] + [R, -w] &= [Q', -v] \end{aligned}$$

2) Existen dos puntos R y S verificando que si es $w = \overrightarrow{RS}$ existe α real verificando

$$\begin{aligned} [P, u] + [R, \alpha w] &= [P', v] \\ [Q, -u] + [S, -\alpha w] &= [Q', -v] \end{aligned}$$

Denotaremos con $[P, Q, u]$ a la clase de $[P, u] + [Q, -u]$

Proposición 1. Dados los puntos P y Q y el par $[A, B, u]$ existe un vector w verificando

$$[A, B, u] = [P, Q, w]$$

Demostración. Sea $A' = A + 2\vec{AP}$ se tiene que P es el baricentro de $\{A, A'\}$ con pesos $\{1, 1\}$ ya que

$$A + \frac{1}{2}(\vec{AA} + \vec{AA}') = A + \vec{AP} = P$$

por tanto

$$[A, B, u] = [P, B', 2u]$$

donde es $[B, -u] + [A', -u] = [B', -2u]$, ya que $[A, u] + [A', u] = [P, 2u]$.

Si $B' = Q$ se ha terminado la demostración; en caso contrario podemos suponer que P, Q y B' están alineados sea $Q = P + \alpha \vec{PB}'$ se tiene que Q es el baricentro de $\{P, B'\}$ con pesos $\{(1 - \alpha), \alpha\}$, por lo que es

$$\left[P, -\frac{(1 - \alpha)}{\alpha} 2u \right] + [B', -2u] = \left[Q, -\frac{2}{\alpha} u \right]$$

y como

$$\left[P, \frac{(1 - \alpha)}{\alpha} 2u \right] + [P, 2u] = \left[P, \frac{2}{\alpha} u \right]$$

se tiene

$$[P, B', 2u] = \left[P, Q, \frac{2}{\alpha} u \right]$$

Definición: Dos sistemas formados por vectores deslizantes y pares de vectores (en lo sucesivo diremos sistemas) se dice que son equivalentes si puede obtener uno a partir del otro mediante las operaciones elementales siguientes

1. Incorporación y supresión de conjuntos de vectores $\{[P, u], [P, -u]\}$
2. Incorporación y supresión de pares de vectores $[P, P, u]$ y $[P, Q, \alpha \vec{PQ}]$
3. Sustitución de dos vectores deslizantes por su suma
4. Sustitución de un vector deslizante por dos cuya suma sea el vector dado.
5. Sustitución del conjunto $\{[P, u], [Q, -u]\}$ por el par $[P, Q, u]$
6. Sustitución del par $[P, Q, u]$ por el conjunto $\{[P, u], [Q, -u]\}$
7. Sustitución de los pares $[P, Q, u]$ y $[P, Q, v]$ por su suma $[P, Q, u + v]$

Observación. La relación definida en el apartado anterior es de equivalencia en el conjunto formado por los vectores deslizantes y los pares de vectores.

Notación. Escribiremos un sistema separando los elementos con el signo +, pondremos que dos sistemas son equivalentes separándolos con el signo igual (=)

Proposición 2. Dados dos puntos P y Q, y el vector libre $[A, u]$ existe un vector w verificando

$$[A, u] = [P, u] + [P, Q, w]$$

Demostración. Se tiene

$$[A, u] = [P, u] + [P, -u] + [A, u] = [P, u] + [P, A, -u]$$

por tanto, según la proposición 1, existe un vector w verificando

$$[A, u] = [P, u] + [P, Q, w]$$

Proposición 3. Dado el vector v linealmente independiente de \vec{PQ} y el par $[P, Q, w]$ existe un escalar α verificando $[P, Q, w] = [P, Q, \alpha v]$

Demostración. Por ser V un espacio vectorial de dimensión dos y $\{\vec{PQ}, v\}$ linealmente independientes existen α y β verificando $w = \alpha v + \beta \vec{PQ}$ por tanto

$$[P, Q, w] = [P, Q, w] + [P, Q, -\beta \vec{PQ}] = [P, Q, \alpha v]$$

Teorema. Dados dos puntos P y Q y el vector v, linealmente independiente de \vec{PQ} , todo sistema se puede expresar de la forma

$$[P, u] + [P, Q, \alpha v]$$

con α real.

Demostración. Es una consecuencia inmediata de las proposiciones 2 y 3.

Corolario. El conjunto cociente de los sistemas por la anterior relación, es un espacio vectorial real, de dimensión tres, con las siguientes operaciones

$$([P, u] + [P, Q, \alpha v]) + ([P, u'] + [P, Q, \alpha' v]) = [P, u + u'] + [P, Q, (\alpha + \alpha') v]$$

siendo una base

$$\{[P, u] + [P, Q, 0], [P, u'] + [P, Q, 0], [P, 0] + [P, Q, v]\}$$

donde $\{u, u'\}$ es una base de V y $v \neq 0$

Bibliografía

- [1] AROCA HERNANDEZ-ROS, J. M.: Algebra Lineal y Geometría. Manuales y textos universitarios. Ciencias; 7. Universidad de Valladolid. 1988
- [2] ORTEGA GIRON, M. R. Lecciones de Física. Universidad de Córdoba, 1989

El teorema de Pitágoras en la semejanza de triángulos

Xosé Alberto García Suárez

IES "Eduardo Ponda"
Dpto. de Métodos Cuantitativos (Universidad de Santiago)

Abstract

In this note a proof of the Fundamental Theorem of Similarity of Triangles, exclusively based on Pitágoras' Theorem, is given.

En esta nota se demuestra el teorema fundamental de la semejanza de triángulos haciendo uso exclusivamente del teorema de Pitágoras.

En el número 45, de febrero de 1997, de este boletín, publica Ricardo Moreno Castillo una nota titulada "Una demostración del teorema de Tales", en la que partiendo de dos triángulos rectángulos de lados a, b, c y a', b', c' , respectivamente, y ángulos iguales, situados como se indica en la figura 1, y suponiendo que $a' = ma, b' = nb, c' = pc$, aplica el teorema de Pitágoras a estos triángulos y al de lados $a - a', b - b', c - c'$, para obtener tres relaciones entre a^2, b^2 y c^2 , de cuya condición de compatibilidad (expresada por la anulación del determinante de Vandermonde de filas las potencias de grados 0, 1 y 2 de m, n y p) se obtiene la proporcionalidad de los lados. El caso general se reduce a éste trazando las alturas.

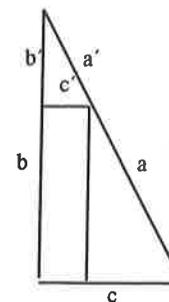


Figura 1

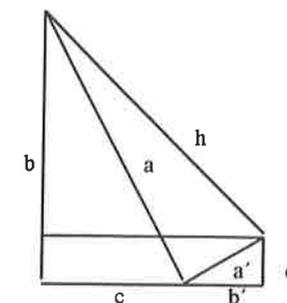


Figura 2

La demostración que aquí se expone se deduce de modo elemental de la *figura 2*:
En el triángulo rectángulo de lados a, a', h ,

$$h^2 = a^2 + a'^2 = b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2;$$

y en el de lados $b - c', c + b', h$,

$$h^2 = (b - c')^2 + (c + b')^2 = b^2 - 2bc' + c'^2 + c^2 + 2cb' + b'^2,$$

de donde resulta

$$bc' = b'c,$$

relación que igualmente se obtiene expresando en la *figura 1* el área del triángulo de lados a, b, c , como suma de las de los otros dos triángulos y la del rectángulo.

Dado el carácter tan elemental de la demostración, llama la atención la omisión de este resultado en los libros de texto, ya sea utilizándolo como enfoque metodológico en la introducción de la semejanza, ya como simple aplicación del teorema de Pitágoras. Acaso la interiorización generalizada del paradigma euclidiano tenga que ver con ello.

Sobre el cálculo con funciones usuales en el análisis económico

Manuel Suárez Fernández
M.^a Elisa Amo Saus

*Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete
Universidad de Castilla-La Mancha **

Abstract

To show a theoretic support for the use of differential calculus in non-derivables one variable functions. (Application to economic functions).

Resumen

Cuando se aplica la matemática a la economía (o a la física, química, ingeniería, etc.), se considera una idealización de la realidad que posea la simplicidad necesaria para abordar su estudio utilizando el razonamiento lógico-deductivo.

Así pues, con el fin de plantear con claridad y precisión ciertos problemas relativos a la economía e intentar después dar solución razonada a los mismos, se identifican los conceptos que en dichos problemas intervienen, con objetos matemáticos sobre los que efectuar el estudio teórico. Y, claro está, para que los consiguientes resultados den adecuada respuesta a los problemas económicos de partida, dichos objetos matemáticos habrán de ser elegidos en consonancia con la realidad a la que representan, lo cual, a menudo, trae consigo que carezcan de propiedades sin las cuales hay que prescindir de utilizar en los razonamientos, importantes recursos del cálculo.

* Los autores agradecen al Dr. D. Enrique Viaña Remis, Catedrático de Economía Española e Internacional de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales de Albacete, sus sugerencias sobre el presente trabajo y, en particular, el ejemplo sobre teoría de la utilidad marginal, aportado al mismo.

Introducción

Como ejemplo de lo referido en el precedente resumen, para interpretar numerosas cuestiones del análisis económico (dada la específica naturaleza de las mismas) hay que recurrir a funciones reales de una o varias variables reales que, en algunos o todos los puntos de su conjunto original (o de definición), carecen de propiedades, tan importantes para el cálculo, como la continuidad o la derivabilidad¹, sin que entre las mismas falten aquellas para las cuales alguna o todas las variables independientes (es decir, las que toman valores en el conjunto original de la función) solo toman valores reales aislados, ni, en particular, aquellas en las que (como, por ejemplo, las sucesiones) alguna o todas las variables independientes solo toman valores naturales, y tampoco aquellas cuya imagen está contenida en el conjunto \mathbf{N} .²

No obstante, en no pocas ocasiones, dichas funciones “parecen merecedoras” de, por ejemplo, ser derivables y de que determinadas funciones sean sus correspondientes funciones derivadas. Además, si (en contra de lo que dicen las “reglas”) se derivasen, los resultados, lejos de ser descabellados, serían matemáticamente correctos y se prestarían a una interpretación económica no carente de interés.

Para dar a esta circunstancia alguna explicación distinta de la casualidad y justificar ciertos cálculos usuales en el análisis económico, exponemos a continuación un, llamémoslo, “posible soporte teórico” de la utilización del cálculo diferencial en el estudio de determinadas funciones reales de variable real que, por ejemplo, no sean derivables. Con este fin analizaremos algunos conceptos que, como los de “fórmula” o “función”, se enmarcan en la génesis misma de la matemática moderna (la cual, más que una nueva matemática, es una manera nueva y, a la vez, la clásica de nuestro tiempo, de presentar la matemática de siempre).

¹ Cuando consideremos cualquier concepto que, como la continuidad, la derivabilidad o la diferenciabilidad de funciones, es relativo a (o se fundamenta en) una cierta topología, entiéndase que la misma es la usual sobre \mathbf{C} o \mathbf{C}^2 o \mathbf{C}^3 , etc., siendo \mathbf{C} el conjunto de los números complejos, o la restricción de dicha topología a un subconjunto de \mathbf{C} (así, pues, si, en particular, solo se consideran números reales, la topología usual sobre \mathbf{R} o \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3 , etc., siendo \mathbf{R} el conjunto de los números reales, es la restricción a \mathbf{R} de la topología usual sobre \mathbf{C}). En consecuencia, si E es un conjunto contenido en \mathbf{R} , entonces la topología que consideramos sobre E es aquella para la cual, si x_0 es un elemento de E , entonces A es un entorno de x_0 si y sólo si A es un conjunto contenido en E tal que existe algún número real positivo r tal que si $x \in E$ y $|x - x_0| < r$ entonces $x \in A$.

² Por ejemplo, las sucesiones de números reales en ningún punto de su conjunto original (que es el conjunto \mathbf{N} de los números naturales o bien el conjunto \mathbf{N}^+ de los números naturales positivos) no son diferenciables ni derivables (ni tiene sentido hablar de tal diferenciabilidad o derivabilidad). Sin embargo, son funciones continuas (en todo punto), aunque tal continuidad (formal) no acostumbra a ser, digamos, “aprovechable para el cálculo”.

Conjuntos y fórmulas

La teoría de conjuntos viene a proporcionar claridad y precisión a la matemática, así como unidad entre sus distintas partes. Para ello cada objeto matemático es identificado con algún “conjunto”, si bien lo recíproco no es cierto (es decir, no todo conjunto que podamos imaginar o definir, es identificado con algún objeto matemático³) y tales conjuntos (los que se identifican con objetos matemáticos) son rigurosamente seleccionados mediante unos enunciados, que son los axiomas de la teoría de conjuntos⁴, de manera que cada conjunto es, en suma, definido por una cierta expresión que decimos es una “fórmula”. Así, pues, por una parte los conjuntos y por otra las fórmulas que los definen, vienen a constituir las dos grandes clases de conceptos que se utilizan en una moderna presentación de la matemática.

Funciones y fórmulas que definen funciones

Una de las primeras cosas que, a partir de los axiomas, se demuestra es que «si A, B son conjuntos entonces la clase $A \times B$, llamada “producto cartesiano de A por B ” (que suponemos es bien conocida), es un conjunto».

A partir de este resultado se definen las relaciones binarias (entre conjuntos) y, en particular, las relaciones de equivalencia (con las clases de equivalencia y los conjuntos cociente), las relaciones de orden (más en particular, de orden total, de buen orden) y las aplicaciones (más en particular las inyectivas, suprayectivas, biyectivas, sucesiones, operaciones, leyes de composición interna, leyes de composición externa, etc.). Así se completa una terminología básica que permite definir las estructuras numéricas (de los números naturales, enteros, racionales, decimales en particular, reales y complejos), las más abstractas del álgebra (grupos, anillos, cuerpos, etc.) y las topológicas, todas las cuales son conceptos fundamentales de la matemática y todas las cuales son conjuntos.

En este esquema general (el cual, a grandes rasgos, viene a decir que la matemática puede ser interpretada como una gran teoría de conjuntos), ¿qué lugar corresponde a las funciones? Aunque la actual definición de “función” es la misma que la de “aplicación” (es decir, actualmente, el término función se considera sinónimo del término “aplica-

³ A cualesquiera conjuntos, sean o no de los que se identifican con objetos matemáticos, en todo lo que sigue los llamaremos “clases” y, en particular, a los que se identifican con tales objetos, los llamaremos “conjuntos”.

⁴ La teoría de conjuntos que, bien puede decirse, fundamenta la matemática de nuestro tiempo, es la ZF (o teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel), complementada con el llamado “axioma de elección” y, aunque explícitamente no acostumbra a decirse, también con el llamado axioma de fundación, en virtud del cual, por ejemplo, ningún conjunto es elemento de sí mismo.

ción”), informalmente se puede responder que «el de ciertas aplicaciones», pues, por haberlo consagrado la tradición o la costumbre, se vienen a llamar funciones, a las aplicaciones entre conjuntos contenidos en conjuntos numéricos o en productos cartesianos de conjuntos numéricos (es decir, entre conjuntos contenidos en \mathbf{C} , $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, $\mathbf{C} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C}$, etc. siendo \mathbf{C} el conjunto de los números complejos o, en particular, en \mathbf{R} , $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, etc., siendo \mathbf{R} el conjunto de los números reales, o, más en particular, en \mathbf{N} ó \mathbf{N}^+). Y, así, puesto que las aplicaciones son relaciones binarias y las relaciones binarias son conjuntos (que se pueden definir como «subconjuntos de productos cartesianos de conjuntos»), resulta, en suma, que (tanto si atendemos a la definición formal como a la consagrada por la costumbre) también las funciones son conjuntos y, como tales, para cada función ha de existir alguna fórmula que la defina. De todo lo expuesto hasta el momento (con el fin de situar convenientemente la idea que, en definitiva, pretendemos comunicar), resaltemos, precisamente, que una cosa es una función y otra cosa es una fórmula que la define, puesto que, como ya se dijo, cualquier función es un conjunto y las fórmulas no son conjuntos.

Para fijar ideas, consideremos un ejemplo:

Siendo $[-1,3]$ el intervalo real cerrado de extremos -1 y 3 ⁵, si f es la función de $[-1,3]$ en \mathbf{R} tal que si $x \in [-1,3]$ entonces $f(x) = x^2$, entonces $f = \{(x,u) \mid (x \in [-1,3] \wedge (u = x^2))\}$ ⁶, y $x \in [-1,3] \wedge (u = x^2)$ es una fórmula que define al conjunto f (y no es un conjunto, pues las fórmulas no son conjuntos).

Analizando, ahora, dicha fórmula, apreciamos que la misma “se compone” de las fórmulas $x \in [-1,3]$ y $(u = x^2)$, unidas por el signo “ \wedge ” (cuyo significado intuitivo viene a ser el de la conjunción copulativa “y”).

La primera de las mismas (o sea, $x \in [-1,3]$), viene a decir que $[-1,3]$ es el conjunto original de f , y de la segunda (o sea, de $u = x^2$), que viene a precisar cuál es la dependencia entre x y u , diremos que es una “ley de definición de f ”.

Así pues, una cosa es la función f (que es un conjunto), otra cosa es la fórmula $x \in [-1,3] \wedge (u = x^2)$, que define a f (y no es un conjunto) y una tercera cosa (que si bien figura en la fórmula anterior, no coincide con ella) es la fórmula $u = x^2$, que decimos es una “ley de definición de f ”.

Lo referido para la función del ejemplo, se puede afirmar para funciones cualesquiera, si bien, con el fin de no complicar la escritura y dada la analogía con cualquier otro caso, lo que sobre el particular digamos en todo lo que sigue, será relativo a funciones reales de una variable real:

⁵ Es decir, siendo x una variable (o signo al que se le dan distintos significados en un mismo contexto) y \mathbf{R} el conjunto de los números reales, $[-1,3] = \{x \mid (x \in \mathbf{R}) \wedge (-1 \leq x) \wedge (x \leq 3)\}$ (lo cual leemos, “el intervalo real cerrado de extremos -1 y 3 es igual al conjunto de los x tales que x pertenece a \mathbf{R} y -1 es menor o igual que x y x es menor o igual que 3 ”). Así, pues, $[-1,3]$ es un conjunto y $(x \in \mathbf{R}) \wedge (-1 \leq x) \wedge (x \leq 3)$ es una fórmula que lo define.

⁶ Es decir (siendo x, u variables) f es igual al conjunto de los pares ordenados (x, u) tales que x pertenece al intervalo real cerrado de extremos -1 y 3 , y u es igual a x elevado a 2 .

Si E es un conjunto contenido en \mathbf{R} y f es una función de E en \mathbf{R} (lo cual implica que f es un subconjunto de $E \times \mathbf{R}$), entonces existe una fórmula $\alpha(x, u)$ en la que figuran variables x, u , que decimos es una “ley de definición de f ”, tal que para cada elemento x_0 de E , existe un único número real u_0 tal que $\alpha(x_0, u_0)$ y $u_0 = f(x_0)$ (es decir, tal que se verifica $\alpha(x_0, u_0)$ y u_0 es la imagen de x_0 mediante f), de donde, $f = \{(x, u) \mid (x \in E) \wedge \alpha(x, u)\}$ y decimos que “ $(x \in E) \wedge \alpha(x, u)$ es una fórmula que define a f ”.

Es muy fácil razonar (y, además, “salta a la vista”) que se verifican las siguientes propiedades:

– Si E_1 es el conjunto original de una función f_1 , E_2 lo es de una función f_2 y $E_1 \neq E_2$. Entonces $f_1 \neq f_2$.⁷

– Es posible que dos funciones tengan una misma ley de definición y que, sin embargo, una de dichas funciones sea derivable mientras que la otra no.⁸

– Si E_1 es el conjunto original de una función f_1 , E_2 lo es de una función f_2 , $E_1 \subset E_2$, existe alguna ley de definición común a f_1 y f_2 , r es un número real que es punto de acumulación de E_1 y existe $\lim_{x \rightarrow r} f_2(x)$, entonces existe $\lim_{x \rightarrow r} f_1(x)$ y $\lim_{x \rightarrow r} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow r} f_2(x)$.⁹

⁷ Y ello aunque haya alguna fórmula que sea ley de definición de f_1 y (la misma fórmula) sea ley de definición de f_2 , pues si, por ejemplo, f_1 es la función f del ejemplo anterior y f_2 es la función de \mathbf{R} en \mathbf{R} tal que para todo número real x_0 , $f_2(x_0) = x_0^2$, entonces, siendo x, u variables, $u = x^2$ es una ley de definición de f_1 y también de f_2 , y, sin embargo, $f_1 \neq f_2$.

⁸ Por ejemplo, si $f_1 = \{(x, u) \mid (x \in \mathbf{N}) \wedge (u = x^3)\}$ y $f_2 = \{(x, u) \mid (x \in \mathbf{R}) \wedge (u = x^3)\}$ entonces (siendo x, u variables) $u = x^3$ es una ley de definición común a f_1 y f_2 , f_2 es derivable (en todo punto) y f_1 no es derivable en punto alguno.

⁹ Anteriormente expresamos que hay funciones no derivables que, no obstante, “parecen merecedoras” de serlo y que si, en contra de lo que dicen las “reglas”, se derivasen, entonces los resultados serían correctos. Una explicación de esta circunstancia, distinta de la casualidad, es considerar las propiedades que acabamos de referir. Para aclarar estas ideas, veamos un ejemplo: Sea $f: \mathbf{N}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ tal que si $n \in \mathbf{N}^+$ entonces $f(n) = x \cdot (2^{1/n} - 1)$. Dicha función, que es la sucesión de números reales, $2, 2 \cdot (2^{1/2} - 1), 3 \cdot (2^{1/3} - 1), \dots$ y, “expresada como conjunto”, $f = \{(x, u) \mid (x \in \mathbf{N}^+) \wedge (u = x \cdot (2^{1/x} - 1))\}$, no es derivable en punto alguno de su conjunto de definición (que es \mathbf{N}^+). Así, pues, siendo x, u variables, una fórmula que define a f es $(x \in \mathbf{N}^+) \wedge (u = x \cdot (2^{1/x} - 1))$ y una “ley de definición” de f es la fórmula $u = x \cdot (2^{1/x} - 1)$. Pues bien, lo que viene a ocurrir es que la función f no es derivable en punto alguno de su conjunto de definición “por culpa” de éste (cuyos puntos son todos aislados) y si, no obstante, dicha función f “parece merecedora” de ser derivable, es porque su ley de definición “parece merecedora” de serlo de una función derivable. Por ejemplo, siendo $E = \{x \mid (x \in \mathbf{R}) \wedge (x \geq 1)\}$, de la función $g: E \rightarrow \mathbf{R}$ tal que “si $x \in E$ entonces $g(x) = x \cdot (2^{1/x} - 1)$ ”, pues de esta función también la fórmula $u = x \cdot (2^{1/x} - 1)$ es una ley de definición y g es derivable en todo punto de su conjunto de definición (en el punto 1 , lo es por la derecha), puesto que dicho conjunto (que es E) “es adecuado” para ello. Por consiguiente, si, por ejemplo, queremos determinar el $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot (2^{1/n} - 1))$, podemos servirnos del cálculo diferencial (sin que por ello “dejemos de hacer las cosas bien”) determinando el $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \cdot (2^{1/x} - 1))$, aplicando la regla de l'Hôpital a la función $g(x) = x \cdot (2^{1/x} - 1) = (2^{1/x} - 1) / (1/x)$. Resulta que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (2^{1/x} - 1)' / (1/x)' = \lim_{x \rightarrow \infty} ((-1/x^2) \cdot 2^{1/x} \cdot L2) / (-1/x^2) = L2$ (siendo $L2$ el logaritmo neperiano de 2). Luego, puesto que $\mathbf{N}^+ \subset E$ y las funciones f, g tienen una misma ley de definición, en virtud de la tercera de las propiedades antes referidas, el $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L2$.

Como en la introducción decíamos, "para interpretar numerosas situaciones relativas a la economía, dada la específica naturaleza de las mismas, hay que recurrir a funciones reales de una o varias variables reales que, en algunos o todos los puntos del suconjunto original (o de definición), no son continuas o no son derivables (o no son diferenciables), sin que entre las mismas falten aquellas para las cuales alguna o todas las variables independientes sólo toman valores reales aislados, ni, en particular, aquellas para las cuales alguna o todas las variables independientes sólo toman valores naturales (por ejemplo, las sucesiones) y tampoco aquellas cuya imagen está contenida en \mathbb{N} ".

Sin embargo, para que sea posible aprovechar recursos del cálculo (y, más concretamente, del cálculo diferencial), de los cuales, considerando sólo dichas funciones, habría que prescindir, lo que se hace es incluir en la argumentación otras funciones de variable continua¹⁰, que sean prolongaciones o, digamos, "casi prolongaciones" respectivas de las primeras¹¹ y permitan utilizar los referidos recursos.

Trataremos de aclarar y precisar estas ideas, considerando (a manera de posible "soporte teórico" de las mismas) junto con el concepto de "función", los de "fórmula que define a una función" y "ley de definición de una función", que en apartados anteriores hemos introducido, y ello, por ejemplo, de la manera siguiente:

Supongamos que, para efectuar un estudio relativo a la economía cuya específica naturaleza requiere considerar una función de la cual el conjunto original esté constituido por puntos aislados, se han efectuado n observaciones (n , claro está, es un cierto número natural) y como resultado de las mismas se han determinado n pares ordenados $(t_1, u_1), (t_2, u_2), \dots, (t_n, u_n)$ cuyas componentes son números reales. Así resulta una "función muestra" f consistente en un conjunto que simplícidamente ("por extensión") se puede expresar, $\{(t_1, u_1), (t_2, u_2), \dots, (t_n, u_n)\}$. Siendo t, u variables, una ley de definición de la misma es $((t = t_1) \wedge (u = u_1)) \vee ((t = t_2) \wedge (u = u_2)) \vee \dots \vee ((t = t_n) \wedge (u = u_n))$.

Puesto que esta fórmula sólo sirve como ley de definición, para una función cuyo conjunto original esté contenido en el conjunto finito $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, a partir de la referida función f y mediante algún método de interpolación (el de Lagrange, el de interpolación parabólica

progresiva, el de Newton, etc.) o ajuste (el de las medias, el de los momentos, el de los mínimos cuadrados, etc.) se define una función g , real de una variable continua, cuyo conjunto original es un intervalo I que contenga al $[t_1, t_n]$ (es decir, al intervalo cerrado de extremos t_1 y t_n). Ello, en realidad, significa que se determina una fórmula $\alpha(x, u)$ en la cual x, u son variables (x la variable independiente y u la variable dependiente) y $g = \{(x, u) \mid (x \in I) \wedge \alpha(x, u)\}$. Es decir, una fórmula $\alpha(x, u)$ que es una ley de definición de una función g tal que,

- si, por ejemplo, g ha sido determinada mediante un método de interpolación, entonces g es prolongación de la función f y definida en un intervalo real I , de la cual $\alpha(x, u)$ es una ley de definición (pues, en este caso, g coincide con f en los puntos t_1, \dots, t_n).

- si g ha sido determinada mediante un método de ajuste entonces, en general, g no coincidirá con f en los puntos t_1, \dots, t_n (es decir, en general no se verificará que $g(t_1) = f(t_1), \dots, g(t_n) = f(t_n)$), pero (como anunciamos en la nota de pie de página número 11), convenimos en decir que " g es casi prolongación de f " (y que "las diferencias $f(t_1) - g(t_1), \dots, f(t_n) - g(t_n)$ son casi cero").

Además, supongamos que, por ejemplo, la fórmula $\alpha(x, u)$ no presenta inconveniente alguno para que g sea derivable. Luego, (puesto que el conjunto original de g , por ser un intervalo real, tampoco ha de presentarlo) g será, en efecto, una función derivable (y, en ese caso, por ser una función real de una variable real, también será diferenciable).

Así, pues, con el fin de utilizar el cálculo diferencial cuando convenga, se introduce (en lugar de la función f) dicha función g de variable continua, en el estudio que se está efectuando. Y, puesto que dicha función g ha sido definida como prolongación o casi prolongación de f , respectivamente se verifica o, digamos, "casi se verifica" que $f = \{(t, u) \mid (t \in T_n) \wedge \alpha(t, u)\}$, siendo $T_n = \{(t_1, u_1), (t_2, u_2), \dots, (t_n, u_n)\}$, por lo que los resultados (del cálculo efectuado con la función g introducida en el contexto) se aplican a la función f , no derivable en punto alguno (es decir, se utiliza el cálculo diferencial para estudiar f , aunque, para hacer las cosas bien, "a través de la función g ").

Por ejemplo, en demografía, efectuar una "proyección de población", o de nacimientos, o de defunciones, etc., es determinar, respectivamente, funciones de población, natalidad, mortalidad, etc., a partir de conjuntos de personas censadas (que, es evidente, han de ser finitos), por lo que, tanto su conjunto original (de números reales, cada uno de los cuales determina el momento o intervalo de tiempo en el que individuos de la población que se estudia, están, nacen, mueren, etc.) como su conjunto imagen (de números naturales, cada uno de los cuales determina el número de individuos que, en un momento dado o en un intervalo de tiempo, están, nacen, mueren etc.), son finitos (y la imagen de cualquiera de dichas funciones ha de estar, pues, contenida en \mathbb{N}). Los métodos matemáticos para efectuar una proyección de población, son los referidos de interpolación o de ajuste de funciones y, entre las funciones que ajustadas a los valores de una función-muestra (es decir, entre las funciones que, una vez determinadas sus constantes mediante algún méto-

¹⁰ Por ejemplo, son funciones de variable continua, las funciones reales de variable real cuyo conjunto original es un intervalo cualquiera de interior no vacío contenido en \mathbb{R} (es decir, aquellas cuyo conjunto original es un intervalo abierto o cerrado o semiabierto, finito o infinito, propiamente contenido en \mathbb{R} o igual a \mathbb{R} , con tal que no sea vacío ni se reduzca a un punto).

¹¹ Recordemos que si E_1, E_2, G_1, G_2 son conjuntos no vacíos, f es una aplicación de E_1 en E_2 y g es una aplicación de G_1 en G_2 entonces se dice que " f es una restricción de g " y " g es una prolongación de f "; si y sólo si E_1 es un subconjunto de G_1 y para todo elemento x de E_1 , $f(x) = g(x)$. Y, además, informalmente hablando, diremos que " g es casi prolongación de f " si y sólo si E_1 es un subconjunto de G_1 y para cada elemento x de E_1 , el valor $f(x)$ "está muy próximo" al valor $g(x)$, lo cual, más formalmente, supondremos que g ha sido determinada a partir de f , mediante alguno de los métodos de interpolación o de ajuste de funciones que más adelante mencionaremos.

do de ajuste con el fin de que “casi prolonguen” a la función-muestra o función determinada experimentalmente), acostumbran a explicar mejor las características que (como el tamaño) la demografía estudia de una población, se cuentan,

- las funciones de Folwell, que son las definidas en un intervalo real y cuya ley de definición es una fórmula $u = a + b \cdot c^t$ en la cual t, u son las variables y a, b, c son constantes reales de manera que $0 < c < 1$ y $b < 0$.
- las funciones de Gompertz, que son las definidas en un intervalo real, para las que una ley de definición es alguna fórmula $u = K \cdot A^t$ en la cual t, u son las variables y K, A, B son constantes reales de manera que $0 < B < 1$ y $0 < A < 1$.
- las curvas logísticas, que son las funciones definidas en un intervalo real, para las que una ley de definición es alguna fórmula $u = (b \cdot e^{at}) / (1 + c \cdot e^{at})$ en la cual t, u son las variables y a, b, c son constantes reales positivas.
- las curvas antilogísticas, que son las funciones definidas en un intervalo real, para las que una ley de definición es alguna fórmula $u = c - (a / (1 + b \cdot e^{ht}))$ en la cual t, u son las variables y a, b, c, h son constantes reales y $h < 0$.

Algunas de las funciones que, al estudiar una población, se determinan experimentalmente (es decir, mediante una estadística), son,

- la función de fórmula de definición $B_n(x, t, u)$ tal que, siendo x, t variables independientes y u la variable dependiente, dado un valor x_0 de x y un valor t_0 de t , el valor que resulta para u es el número de individuos nacidos en el instante t_0 , de madre de edad x_0 .¹²
- la función de fórmula de definición $D_n(x, t, u)$ tal que, siendo x, t variables independientes y u la variable dependiente, dado un valor x_0 de x y un valor t_0 de t , el valor que resulta para u es el número de individuos de edad x_0 fallecidos en el instante t_0 .
- la función de fórmula de definición $N_n(x, t, u)$ tal que, siendo x, t variables independientes y u la variable dependiente, dado un valor x_0 de x y un valor t_0 de t , el valor que resulta para u es el número de individuos de edad x_0 en el instante t_0 .

A partir de dichas funciones-muestra se definen (en un intervalo real $I = [t_0, t_1]$, siendo x, t las variables independientes y u la variable dependiente) mediante alguno de los referidos métodos de ajuste, como respectivas “casi prolongaciones” de las mismas,

- una función de natalidad, de ley de definición $u = B(x, t)$.
- una función de mortalidad, de ley de definición $u = D(x, t)$.
- una función de población, de ley de definición $u = N(x, t)$.

¹² Como en los casos siguientes, el subíndice “ n ” es para expresar que se trata de una fórmula de definición de una función-muestra que define un conjunto finito de n pares de puntos (determinados, pues, mediante una estadística).

Y, siendo r, s números reales tales que $r < s$, a partir de las referidas funciones se definen, por ejemplo,

- la función de natalidad de ley de definición $u = B(t)$, tal que $B(t) = \int_r^s B(x, t) \cdot dx$ y, para cada valor t_0 de t , conviniendo llamar (dentro del formalismo del cálculo) “número de individuos nacidos vivos en el instante t_0 , de madres de edades comprendidas entre r y s ”, al número real $B(t_0)$.
- la función de mortalidad de ley de definición $u = D(t)$, tal que $D(t) = \int_r^s D(x, t) \cdot dx$ y, para cada valor t_0 de t , conviniendo llamar (dentro del formalismo del cálculo) “número total de defunciones de individuos de edades comprendidas entre r y s ”, al número real $D(t_0)$.
- la función de población $u = N(t)$, tal que $N(t) = \int_r^s N(x, t) \cdot dx$ y, para cada valor t_0 de t , conviniendo en llamar (dentro del formalismo del cálculo) “número total de individuos vivos, de edades comprendidas entre r y s en el instante t_0 ”, al número real $N(t_0)$.

Otro ejemplo lo proporciona la “teoría de la utilidad marginal”.¹³

Para los marginalistas, la utilidad que, para un consumidor, en un momento dado, representa un bien, depende de la cantidad que, de dicho bien, el consumidor, en el referido momento, posea (la segunda televisión o el tercer traje, son menos valorados que el primero). Así, pues, para los marginalistas, el valor de los bienes depende de la utilidad de la última cantidad adquirida de los mismos (es decir, del punto en el que estos se incrementen). Y para expresar matemáticamente estas ideas, los marginalistas Menger, Jevons y Walras representaron la utilidad de un bien b mediante una función $f_b(x_b)$ (en cuya expresión x_b es una variable) cuyo dominio de definición (o conjunto original) es el subconjunto de los números reales que miden las distintas posibles cantidades del bien b y cuyo conjunto imagen es \mathbf{R}^+ (es decir, el de los números reales no negativos) y tal que dicha función es continua, con derivada continua, en todo su dominio de definición y $F(x) = \sum_{b \in \{1, \dots, n\}} f_b(x_b)$ es la función de utilidad del conjunto de las n clases de bienes que se están considerando. Luego, si se efectúa un incremento diferencial y positivo de un bien b' , se efectúa un incremento diferencial y negativo de otro bien b'' y se dejan los demás $(n - 2)$ bienes invariantes, de manera que la utilidad, en su conjunto, no varíe para el consumidor en cuestión, entonces, $dF(x) = f'(x_{b'}) \cdot dx_{b'} + f'(x_{b''}) \cdot dx_{b''}$, siendo x la variable que representa un conjunto ordenado de las n variables x_b , de donde $-(dx_{b'} / dx_{b''}) = f'(x_{b''}) / f'(x_{b'})$. Como, además, lo referido implica que, en conjunto, las n cantidades de los respectivos n bienes, deben tener el mismo valor antes y después de los incrementos efectuados, resulta que, siendo $p_{b'}$ y $p_{b''}$ los respectivos precios (números reales positivos) de una unidad del bien b' y de una del bien b'' , se verifica que, $p_{b'} \cdot dx_{b'} + p_{b''} \cdot dx_{b''} = 0$, de donde, en suma, $p_{b'} / p_{b''} = f_b'(x_{b'}) /$

¹³ Cuyas ideas básicas fueron introducidas en el análisis económico, casi al mismo tiempo e independientemente, por los economistas Carl Menger (1871), Stanley Jevons (1871) y León Walras (1874).

$f(x_b, \cdot)$. Es decir, los precios deben ser directamente proporcionales a las utilidades marginales, para los valores respectivos x_b, x_b' de los bienes b', b ".

Pues bien, en los referidos planteamientos (así como en otros muchos, pues los referidos sólo son considerados a título de ejemplo) no entran muchos casos que son de indudable interés práctico, en los que, por su específica naturaleza, el conjunto original de cada una de las funciones de utilidad "parciales" (que antes habíamos denotado $f_b(x_b)$) y, en consecuencia, también de la "total" (suma de las parciales, que antes denotamos $F(x)$), ha de ser el conjunto \mathbf{N} de los números naturales o el conjunto \mathbf{N}^+ de los números naturales, salvo el cero o bien otro subconjunto de \mathbf{N} . Lo que, en estos casos, sin más, se puede hacer (en lugar de suponer, como antes, incrementos diferenciales de ciertos bienes) es considerar para cada bien b , en un punto x_b , que representa el "último valor" (número natural) de la correspondiente variable, dos distintos incrementos de la misma, ambos en una unidad, cuyos respectivos incrementos de la función $f(x_b)$, se definen como ${}^+ \Delta f_b(x_b) = f_b(x_b + 1) - f_b(x_b)$ y ${}^- \Delta f_b(x_b) = f_b(x_b) - f_b(x_b - 1)$ y que, respectivamente, se dicen "variación marginal externa" y "variación marginal interna".

Así, pues, si queremos englobar todos estos casos, cuya variable sólo toma valores naturales, en los esquemas que requieren variable continua, para los cuales es posible servirse de los recursos del cálculo diferencial, hay que proceder, como en general hemos referido y, en particular, referimos para la demografía, efectuando un ajuste de funciones, de manera que las respectivas funciones resultantes $g_b(x_b)$, que ajustan a las funciones $f_b(x_b)$ de variable natural (y, así, son "casi" prolongación de éstas), sean derivables, con derivada continua, en todos los puntos de su dominio de definición, para utilizar en los planteamientos relativos al cálculo (sino en todo el dominio de definición, al menos en algún subconjunto del mismo, que, en la práctica, resulte "importante") dichas funciones resultantes de los ajustes efectuados, en lugar de las funciones primeras (no derivables, puesto que son de variable natural). Si, por ejemplo, suponemos que una de las referidas funciones de utilidad, correspondiente a un cierto bien, cuyo dominio de definición está contenido en \mathbf{N} , es la función f tal que (expresada como conjunto) es $f = \{(x, u) \mid (x \in \mathbf{N}^+) \wedge (u = x^{-1})\}$ y que la correspondiente función "auxiliar", resultante de un cierto ajuste, (también expresada como conjunto) es $g = \{(x, u) \mid (x \in \mathbf{R}^+) \wedge (u = x^{-1})\}$ entonces, para (un subconjunto del dominio de definición cuyos puntos son) valores "grandes" de la variable, como, por ejemplo, para $x = 100$, resulta que, ${}^+ \Delta f(100) = f(100 + 1) - f(100) = -0,000099$, ${}^- \Delta f(100) = f(100) - f(100 - 1) = -0,000101$, mientras que $g'(100) = -0,000100$. Es decir, para un valor "grande" de la variable, como el valor 100 considerado, la variación marginal externa y la variación marginal interna de la función f , definida en \mathbf{N}^+ , son valores muy cercanos entre sí y, ambos, muy cercanos a la variación diferencial en una unidad (pues la derivada $g'(100)$ expresa tal valor diferencial, puesto que $dg(100) = g'(100) \cdot dx$ y, en consecuencia, si $dx = 1$ entonces $dg(100) = g'(100) \cdot 1 = g'(100)$), lo que, para los referidos valores "grandes" de la variable, "se diga y resulte para la función $g(x)$, tiene interpretación práctica para la función f , que, en principio, había sido introducida, atendiendo a la específica

naturaleza del problema económico que se estudia. Los casos considerados, sólo son, pues, algunos ejemplos de cómo es usual proceder en un estudio demográfico y, en general, del análisis económico. Esto es, considerar derivadas, diferenciales o integrales de diversas funciones, las cuales han sido obtenidas mediante algún método de ajuste a partir de funciones-muestra (porque, como ya ha sido dicho, para dichas funciones-muestra, derivar, diferenciar o integrar, no tendría razón de ser o conduciría a resultados incorrectos).

Bibliografía

- [1] MALINVAUD, E.: *Lecciones de teoría microeconómica*, Editorial Ariel S.A. (1974). Espluges de Llobregat (Barcelona).
- [2] LEGUINA, J.: *Fundamentos de demografía*, Siglo XXI de España Editores (1989), 4ª Edición, Madrid.

Una reflexión sobre el aprendizaje de conceptos matemáticos en los adolescentes

Juan José Prieto Martínez

IES "Antonio de Nebrija" (Madrid)
Dpto. de Estadística e Investigación Operativa
Universidad Complutense de Madrid
e-mail: jjprieto@eucmos.sim.ucm.es

Abstract

This article shows a reflection on the learning of mathematical concepts for teenagers. It also proposes the production of outlines and the debate in the classroom as an instrument for the learning process.

1. Introducción

Un profesor de matemáticas se dirige a sus alumnos, escribiendo una expresión matemática en la pizarra diciendo: "Esto, naturalmente, es trivial." Miró de nuevo la expresión al ver las caras sorprendidas de los alumnos, y comentó: "Yo pienso que esta expresión es trivial." Se quedó pensativo, y empezó a escribir en una parte de la pizarra fórmulas y fórmulas durante cinco minutos. Volviéndose de nuevo a sus alumnos dijo: "Sí, es trivial."

Parece existir, inconsistencia entre la primera expresión confiada y el largo periodo de concentración y resolución que se requiere una vez que ha surgido la duda. Al principio, el profesor quería decir: "Nosotros podemos aceptar de una manera rápida la verdad de la expresión." Después, habiendo razonado y analizado lógicamente, confirmó que la expresión aceptada en principio intuitivamente estaba demostrada. Por esto, se puede concluir que estar seguro de algo es una cosa; conocer por qué no se encuentra seguro, es otra.

2. El aprendizaje de los conceptos matemáticos

El lenguaje se utiliza para activar la formación de un concepto ayudando a recolectar y separar experiencias. En matemáticas, examinamos la idea de una definición con ayuda

de ejemplos. El problema particular de las matemáticas estriba en su gran abstracción y generalidad, lograda por generaciones sucesivas de individuos inteligentes¹, cada uno de los cuales han creado conceptos o han generalizado otros de anteriores generaciones.

El alumno que aprende hoy en día tiene que procesar datos no de gran dificultad, sino sencillos algoritmos matemáticos. Esto no sólo constituye una ventaja, en tanto que un estudiante puede adquirir en un determinado de años conceptos que se necesitaron siglos de esfuerzos para desarrollarse, sino que también expone al que estudia un riesgo. "Los matemáticos no pueden aprender en el entorno cotidiano sino sólo de una manera indirecta desde otros matemáticos." Esto hace que el estudiante sea dependiente, en un grado muy grande, de los profesores, y en el peor de los casos, se expone a la posibilidad de adquirir un temor duradero con relación a las matemáticas. Aunque los primeros principios de matemáticas² son objetivos a conseguir por el estudiante, el profesor y no el alumno es quién más necesita conocerlos profundamente, y aunque son bastantes simples en sí mismos, sus aplicaciones matemáticas implican muchísima reflexión. El profesor debe ser un educador y comunicador de cultura, con gran talento y personalidad.

La gran mayoría de los libros de texto tienen conceptos de un orden más elevados que el estudiante tiene. Para ello hay que preparar al estudiante, enfrentándolo con una colección adecuada de ejemplos y ejercicios resueltos. Es imprescindible partir de aquello que el alumno conoce. Los conceptos deben ser presentados de una manera natural, coloquial y con ejemplos con los que se familiarice el alumno. Más tarde el profesor debe profundizar en los conceptos con rigor matemático. Es muy útil que el profesor revise definiciones y conceptos en libros de matemáticas que superen el nivel en el cual trabaja. Esto le capacita experimentar de primera mano la frustración del joven estudiante, y poderle indicar para qué sirve lo que debe estudiar.

Los buenos profesores ayudan a sacar una definición con ejemplos. Los ejemplos han de tener en común las propiedades que forman el concepto. Deben ser similares en las vías en que han de abstraerse, y cualquier otra forma que difiera lo suficiente, respecto de las propiedades esenciales de este concepto particular, basta para rechazarlo o, con más precisión, se elimina para su adquisición. Componer una colección adecuada requiere además de inventiva una comprensión muy clara del concepto que ha de ser comunicado. No se deben plagiar los mismos ejemplos que tiene el libro del que aprende, sino a partir del conocimiento del que enseña, dar todas las opciones posibles que el concepto tiene. Es posible que se utilicen conceptos a un nivel más intuitivo sin comprenderlo conscientemente. Se aplican como básicos y frecuentemente utilizados debido a que cuanto más fácil y automática es cualquier actividad menos pensamos acerca de ella, y en parte debido a que las ideas más fundamentales de matemáticas se adquieren a una edad temprana cuando no se tiene capacidad para analizarlas. Algunas de estas ideas fundamentales se encuentran también entre las más sutiles.

¹ Individuos inteligentes: Grandes pensadores matemáticos (Pitágoras, Newton, etc.).

² Primeros principios de matemáticas: Los estudiados en Primaria y Secundaria.

Por otra parte, puesto que en matemáticas los ejercicios son invariablemente otros conceptos, es necesario en principio asegurarse de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende. Llevar esto a efecto, sin embargo, significa que antes de que intentemos comunicar un nuevo concepto debemos encontrar cuáles son sus conceptos contributivos y, para cada uno de éstos, hemos de aflorar dichos conceptos. Así debe ser hasta que alcancen los conceptos primarios o experiencias que se suponen "sabidas". Cuando se ha realizado esto, puede formarse un plan idóneo que presentará, al estudiante, un trabajo posible en matemáticas, no imposible.

El análisis de conceptos implica mucho más trabajo que el dar una definición. Es la construcción de la estructura de abstracciones sucesivas. Si un nivel dado se comprende bastante mal la construcción termina por derribarse. Esta dependencia es probablemente mayor en matemáticas que en cualquier otra materia. Entender álgebra sin antes haber comprendido aritmética, realmente es imposible, pues gran parte del álgebra que aprendemos en la escuela es aritmética generalizada. Puesto que muchos alumnos aprenden a realizar las manipulaciones de aritmética con una comprensión muy imperfecta de los principios subyacentes, es poco sorprendente que las matemáticas continúen como un libro cerrado para ellos. Incluso aquellos que han tenido un buen comienzo pueden, por ausencia o desatención, fracasar en adaptarse al ritmo de la clase; o por otra razón fracasar en formar conceptos de alguna etapa dada. En este caso, todos los conceptos subsiguientes dependientes de éstos pueden no ser comprendidos jamás, y el alumno se aparta invariablemente más de su profundidad. En este último caso, sin embargo, la situación puede no ser tan irremediable, si el aprendizaje permite retroceder. El éxito entonces dependerá, en parte, de la confianza del que aprende en sus propios poderes de comprensión. (El profesor es el medio).

Los conceptos necesitan para cada nueva etapa de abstracción estar disponibles. No es suficiente que hayan sido aprendidos en el pasado: han de estar accesibles cuando se necesitan. Esto es, en cierto modo, una vez más, tener facilidades disponibles para retroceder. La revisión apropiada, planificada por un profesor, será útil para los "principiantes"; pero los estudiantes más avanzados deben tomar una parte más activa en la dirección de sus propios estudios, y, por ello una consideración del primer trabajo será más efectiva si está guiada por una instrucción externa. "Una respuesta posee más significado para quien antes ha formado una pregunta".

3. El esquema y el debate en el aula como instrumento del aprendizaje

La importancia principal de un esquema como instrumento del aprendizaje, significa que si los primeros esquemas son inadecuados, dificultamos la asimilación de conceptos posteriores, o quizás hace que esto no sea posible. Aprender a manipular símbolos de

modo que pueda obtenerse la respuesta apropiada puede ser muy difícil de diferenciar, en sus primeras etapas, del aprendizaje de conceptos. El que aprende matemáticas básicas o elementales no puede distinguir entre los dos, si no tiene experiencia de comprensión matemática. No siendo un lector reflexivo, no se tiene conocimiento directo si se han captado ambos casos correctamente. La solución consiste en probar la adaptabilidad a situaciones nuevas del que aprende, si bien, matemáticamente relacionados (conceptos y símbolos).

La computación mecánica o algoritmos no hace esto. La cantidad que un alumno brillante puede memorizar es notable y la apariencia del aprendizaje matemático puede mantenerse hasta que alcanza un nivel en el cual sólo el verdadero aprendizaje conceptual es adecuado a la situación. En esta etapa, el que aprende intenta dominar las nuevas tareas por los únicos medios que conoce (memorizar la regla por cada tipo de problema). Al ser ahora imposible esta tarea, incluso la apariencia externa del progreso cesa, y con acompañamiento de tensión, otros alumnos se quedan en la cuneta.

Un esquema adecuado significa aquel que toma en cuenta la tarea del aprendizaje a largo plazo, y no justo lo inmediato. El profesor debe mirar mucho más allá del que aprende en el presente, y donde sea posible, comunicar nuevas ideas de tal modo que se formen esquemas adecuados a largo plazo. A pesar de sus posibles deficiencias, el esquema es todavía mejor que la colección de definiciones, leyes mnemotécnicas y algoritmos sin razón que se enseñan a veces, puesto que tiene sentido y, por tanto, contribuye a una creencia general en las matemáticas como actividad significativa. Es grande la responsabilidad del profesor en las primeras etapas del aprendizaje. Debe asegurarse que tiene lugar el aprendizaje esquemático, no sólo para conceptos sino para memorizar las manipulaciones de símbolos. Ha de conocer qué etapas requiere sólo asimilación directa y cuando es necesaria la acomodación esquemática. (En las primeras etapas el ritmo ha de ser más lento.) Los esquemas deben ser planificados para ser más adaptables tanto a las necesidades presentes como en las futuras, las cuales deben ir acompañadas de notas o pequeños resúmenes escritos con rigor y lenguaje matemático.

El presente ritmo de cambio de las matemáticas y los usos para los que se destinan son tal que nadie puede conocer qué tareas futuras tendrán que afrontar los presentes alumnos de matemáticas. Ahora bien, un buen camino a seguir es intentar establecer un fundamento bien estructurado de ideas matemáticas básicas, sobre el cual podrá contribuir el que aprender en cualquier dirección futura que sea necesaria: esto es, encontrar por sí mismo y ayudar a los alumnos a hallar los patrones básicos. Es necesario enseñarles a buscar éstos por sí mismos, y enseñarles siempre a estar preparados para acomodar sus esquemas. Apreciar el valor de éstos como instrumentos de trabajo pero estando siempre dispuesto para remplazarlos por otros mejores. Sólo esto último les prepara para un futuro desconocido.

La discusión y debate entre compañeros sobre los esquemas propuestos puede constituir también una importante contribución para el aprendizaje. El mero acto de comunicar

nuestras ideas parece ayudar a clarificarlas, pues haciendo esto, las unimos a palabras coloquiales que las hacen más conscientes. "Un problema planteado está medio resuelto", y todos nos hemos encontrado en alguna ocasión con que, en el proceso de plantear algún problema académico (o personal) a un atento receptor, nosotros mismos llegamos a una solución.

Una discusión sobre un esquema propuesto es algo más que pensar en voz alta. Es también la interrelación de nuestras ideas con las de otros; la acomodación de nuestros propios esquemas a los de ellos nos capacita asimilar sus ideas, y la exposición de nuestras ideas a ellos les capacita para asimilarlas a sus esquemas. Obsérvese que el primer proceso requiere flexibilidad y mente abierta, el segundo requiere habilidad para ver dónde descansan las diferencias entre el esquema propio y el del que escucha y aprende. Si podemos cumplir con estas demandas, nuestros propios esquemas actitudinales quedarán cumplidos. Más aún, dichos esquemas se hacen más flexibles, lo que quiere decir que se adquieren hábitos y actitudes que favorecen el conocimiento y el desarrollo humano.

La discusión también estimula nuevas ideas. Escuchar o leer lo que han escrito algunos compañeros puede hacer surgir a la luz nuevas ideas en nosotros, que no nos fueron comunicadas por otros, pero que no podríamos tener sin su comunicación. Hay que notar que nadie en el aula entenderá perfectamente las matemáticas. Aquellos que realmente las comprendan, no son algo común; los que puedan comunicarlas, menos todavía. Aun menos corrientes quienes además son excelentes líderes de grupos, y los que puedan además comunicar esta habilidad son, sin duda, raros.

Reseña de libros

E. ROANES MACÍAS y E. ROANES LOZANO: *Cálculos Matemáticos por ordenador con MAPLE V.5*. Ed. Rubiños-1860, Madrid, 1999, 444 páginas y un disquete de 3,5".

En la actualidad, los sistemas informáticos de cálculo simbólico están siendo muy utilizados tanto por los que se dedican a la enseñanza de las Matemáticas como por los que investigan en ellas o las utilizan como auxiliar en el desarrollo de las más diversas disciplinas científicas o tecnológicas.

Entre los distintos sistemas de cálculo simbólico existentes, MAPLE V ocupa un lugar muy destacado que ha conseguido, tanto por la enorme extensión de los campos de las matemáticas a que se aplica (algunos muy especializados), como por su cómodo y simple manejo. Este último aspecto es tan notable, que la introducción al uso del MAPLE V para tareas sencillas, apenas requiere aprendizaje ni lectura de manuales, bastando la consulta ocasional de las excelentes "ayudas en línea" que suministra el mismo sistema y de los "tutoriales" que lo acompañan.

No obstante, los usuarios no informáticos que tengan que utilizar cálculos matemáticos en sus trabajos científicos, técnicos o docentes, desearán, sin duda profundizar más, conociendo a fondo la valiosa ayuda que puede ofrecerles el sistema MAPLE V, sin limitarse a esa simple introducción. Pero precisamente la riqueza de posibilidades que ofrece ese sistema en su enorme repertorio de comandos y procedimientos y sobre todo, en lo que contienen los numerosos "paquetes" especializados de su biblioteca compartida, hacían que, hasta ahora, fuese bastante penoso conseguirlo con la simple consulta de los manuales disponibles. Además, aquellos que vayan a hacer un uso intenso del sistema, agradecerían la posibilidad de entrenarse mediante un repertorio adecuado de ejercicios.

Son estos deseos los que viene a satisfacer la obra que comentamos hoy. A lo largo de sus 26 capítulos, nos proporciona una completísima colección de ejemplos y ejercicios, con los que se puede ir aprendiendo cómo utilizar todas las prestaciones del MAPLE V, en forma cómoda y agradable. Estos ejemplos están presentados con gran sentido didáctico, ordenados en forma adecuada para un aprendizaje progresivo y clasificados por las partes de las matemáticas a las que se aplican, de tal modo que el lector puede escoger los que sean de su interés inmediato o recorrerlos todos, si desea tener un panorama general de las posibilidades del sistema.

Cada capítulo, además de ejemplos ilustrativos, contiene un elevado número de ejercicios, cuyas soluciones detalladas aparecen al final. Estos ejercicios no forman un simple repertorio de enunciados para entrenamiento, sino que constituyen en sí mismos una introducción didáctica que sustituye por completo a cualquier estudio de manuales.

El libro va acompañado de un disquete de 3,5" en el que, entre otras cosas, se encuentran los archivos *.mws correspondientes a los ejemplos de cada uno de los capítulos, lo

que, si el usuario lo desea, le evita el trabajo de teclear los enunciados; no obstante, para el principiante puede ser aconsejable hacerlo manualmente, para habituarse a la ortografía y sintaxis propias del sistema. También se dan en el disquete listas de datos que se utilizan en algunos de los ejercicios y que sería tedioso introducirlas directamente a través del teclado.

El sistema MAPLE V, además del repertorio extensísimo de comandos contenido en su núcleo y en la biblioteca compartida, ofrece las posibilidades propias de un lenguaje de programación, permitiendo al usuario la construcción de "procedimientos". Muchos de estos procedimientos, construidos por otros, están disponibles en "paquetes" que se añaden a la biblioteca compartida o incluso han sido incorporados a ella. En el libro que comentamos, ya en su Capítulo 4, se puede aprender fácilmente cómo se construyen estos procedimientos y, a largo de todo él, se hace uso de este recurso cuando resulta conveniente.

Los autores del libro han desarrollado varios paquetes de procedimientos, de gran utilidad en ciertas áreas de las matemáticas, como son:

- Resolución de ecuaciones por diversos métodos específicos.
- Automatización de la discusión y resolución de sistemas de ecuaciones lineales.
- Reducción de una matriz a la forma canónica de Jordan y ajuste de la matriz de paso.
- Aplicaciones lineales en el espacio euclídeo de dimensión 2.
- Isometrías, semejanzas, afinidades y proyecciones en 3 dimensiones.
- Geometría de la tortuga.

La descripción de algunos de estos paquetes puede verse en los artículos publicados por los autores en nuestro Boletín, en los números 42 y 43 (de 1996) y 48 (de 1998).

Al final del libro se incluye una tabla con todos los comandos mencionados en él, que son más de 600, para facilitar las consultas sobre su uso. Entre ellos están incluidos los propios de los paquetes desarrollados por los autores.

J. F. B.

VARIOS AUTORES (Versión en español de JODY L. DORAN y EUGENIO HERNÁNDEZ): *Las matemáticas en la vida cotidiana*, Addison-Wesley/Universidad Autónoma de Madrid, 1999. Contiene 772 páginas.

Se trata de un ambicioso proyecto en que han participado numerosos profesores de Estados Unidos. Han conseguido plasmar en un libro un atractivo curso de Matemáticas Generales para alumnos sin especiales aptitudes matemáticas del nivel de College americano, tratando de justificar la utilidad universal de las Matemáticas.

El libro, que podría calificarse de matemática culturalista, aparece estructurado en cinco partes, divididas cada una en varios capítulos, cuyos títulos ya sugieren el modo interesante y divertido de expresar ideas, que los autores exhiben. Una breve pasada por su índice lo atestigua:

Primera parte: Las Ciencias de la Administración.

1. Redes viarias; 2. De visita por los vértices; 3. La planificación y la programación de horarios; 4. La programación lineal.

Segunda parte: La Estadística, la ciencia de los datos.

5. La producción de los datos; 6. La descripción de los datos; 7. La probabilidad: las matemáticas del azar; 8. La inferencia estadística.

Tercera parte: La codificación de la información.

9. Los números de identificación y los códigos de barras; 10. La transmisión de la información.

Cuarta parte: La elección social y la toma de decisiones.

11. La elección social: el sueño imposible; 12. Sistemas de votación ponderados; 13. El reparto equitativo; 14. El reparto; 15. La teoría de juegos: las matemáticas de la competición.

Quinta parte: Acerca de la forma y del tamaño.

16. Crecimiento y forma; 17. El crecimiento geométrico; 18. Las distancias inaccesibles; 19. El reflejo del Universo; 20. Nuevas geometrías para un nuevo universo; 21. La simetría y los diseños; 22. Los recubrimientos.

Los autores no pretenden que los lectores se dediquen a las Matemáticas. Más bien que los lectores disfruten y se diviertan con su lectura. Pero, sobre todo, pretenden hacer ver que las Matemáticas sirven para resolver problemas.

También pretenden hacer ver que gran parte de las Matemáticas no tratan de fórmulas ni de ecuaciones; tratan sobre la teoría de muchos de los artilugios del mundo contemporáneo y, en general, sobre los hechos medibles relacionados con el mundo que nos rodea. Y hasta pretenden que alguna vez el lector las utilice para resolver algún problema de la vida cotidiana, como sugiere el título del libro.

Una traducción formidable (parece que el libro hubiera sido escrito directamente en buen castellano) y una cuidada edición, que incluye varias páginas a todo color, contribuyen a completar la calidad de esta publicación.

E. Roanes M.

Problemas resueltos

Problema n° 26 (BOLETÍN N.° 48)

Sea N el conjunto de los número enteros positivos.

Determinar si existe una función $f: N \rightarrow N$ tal que $f(f(n)) = 2n$, para todo $n \in N$.

Solución:

Efectivamente existe una función que cumple la condición del enunciado:

Cualquier entero positivo (entendiendo que no se incluye al cero como entero positivo). En cualquier caso, si se incluyera bastaría definir $f(0) = 0$ se puede expresar de una de las dos formas siguientes: como $2^k(2(2s-1)-1)$ o como $2^k(2(2s-1)+1)$ con k un número natural (incluido el cero) y s un número entero positivo (sin incluir el cero). Pues bien, defino la función $f: N \rightarrow N$ como sigue:

Si un entero positivo n se puede expresar como $2^k(2(2s-1)-1)$, con $k \in N$ y $s \in N^* = N - \{0\}$, entonces $f(n) = f(2^k(2(2s-1)-1)) = 2^k(2(2s-1)+1)$.

Si un entero positivo n se puede expresar como $2^k(2(2s-1)+1)$, con $k \in N$ y $s \in N^* = N - \{0\}$, entonces $f(n) = f(2^k(2(2s-1)+1)) = 2^{k+1}(2(2s-1)-1)$.

La función definida satisface la condición del problema.

José Antonio Blázquez Hernández (Fuenlabrada)

Problema n° 6 (BOLETÍN N.° 32)

Para cada entero positivo n , se define $S(n)$ como el mayor entero que, para todo entero k , $1 \leq k \leq S(n)$, n^2 puede escribirse como suma de k cuadrados estrictamente positivos.

(a) Demostrar que $S(n) \leq n^2 - 14$ para cada $n \geq 4$.

(b) Hallar un entero n tal que $S(n) = n^2 - 14$.

(c) Demostrar que hay un número infinito de enteros n tales que $S(n) = n^2 - 14$.

Solución:

(a) No existe ningún número natural m , que pueda escribirse como suma de $m - 13$ cuadrados estrictamente positivos:

Para $m \leq 17$ es obvio.

Sea $m > 17$ y supongamos que puede escribirse como suma de $m - 13$ cuadrados estrictamente positivos:

Sean $r = 0, 1, \dots, m - 13$ los sumandos mayores que 1 y $m - 13 - r$ los sumandos iguales a 1.

$r = 0 \Rightarrow$ la suma de todos ellos es $m - 13 < m$.

$1 \leq r \leq 4 \Rightarrow$ la suma de estos r sumandos es $13 + r$, que no puede descomponerse como suma de r cuadrados

$r > 4 \Rightarrow$ la suma de todos los sumandos es mayor o igual que $m - 18 + 4 \cdot 5 = m + 2$. En consecuencia $S(n) \leq n^2 - 14$ para cada $n \geq 4$.

(b) $169 = 13^2$; $169 = 5^2 + 12^2$; $169 = 3^2 + 4^2 + 12^2$; $169 = 4^2 + 5^2 + 2 \cdot 8^2$; $169 = 5^2 + 4 \cdot 6^2$

$169 = 12^2 + 3^2 + (4 - k) \cdot 2^2 + 4k \cdot 1^2$ $k = 0, 1, 2, 3, 4$; en consecuencia

169 puede escribirse como suma de $6 + 3k = \{6, 9, 12, 15, 18\}$ cuadrados

$169 = 11^2 + 2 \cdot 4^2 + (4 - k) \cdot 2^2 + 4k \cdot 1^2$ $k = 0, 1, 2, 3, 4$; en consecuencia

169 puede escribirse como suma de $7 + 3k = \{7, 10, 13, 16, 19\}$ cuadrados

$169 = 12^2 + (6 - k) \cdot 2^2 + (4k + 1) \cdot 1^2$ $k = 0, 1, \dots, 6$; en consecuencia

169 puede escribirse como suma de $8 + 3k = \{8, 11, 14, 17, 20, 23, 26\}$ cuadrados

$169 = 10^2 + 3^2 + (15 - k) \cdot 2^2 + 4k \cdot 1^2$ $k = 0, 1, \dots, 15$; en consecuencia

169 puede escribirse como suma de $17 + 3k = \{17, 20, \dots, 59, 62\}$ cuadrados

$169 = 10^2 + 2 \cdot 3^2 + (12 - k) \cdot 2^2 + (4k + 3) \cdot 1^2$ $k = 0, 1, \dots, 12$; en consecuencia

169 puede escribirse como suma de $18 + 3k = \{18, 21, \dots, 51, 54\}$ cuadrados

$169 = 10^2 + (17 - k) \cdot 2^2 + (4k + 1) \cdot 1^2$ $k = 0, 1, \dots, 17$; en consecuencia

169 puede escribirse como suma de $19 + 3k = \{19, 22, \dots, 67, 70\}$ cuadrados

$169 = 3^2 + (40 - k) \cdot 2^2 + 4k \cdot 1^2$ $k = 0, 1, \dots, 40$; en consecuencia

169 puede escribirse como suma de $41 + 3k = \{41, 44, \dots, 158, 161\}$ cuadrados

$169 = 2 \cdot 3^2 + (37 - k) \cdot 2^2 + (4k + 3) \cdot 1^2$ $k = 0, 1, \dots, 37$; en consecuencia

169 puede escribirse como suma de $42 + 3k = \{42, 45, \dots, 150, 153\}$ cuadrados

$169 = (42 - k) \cdot 2^2 + (4k + 1) \cdot 1^2$ $k = 0, 1, \dots, 42$; en consecuencia

169 puede escribirse como suma de $43 + 3k = \{43, 46, \dots, 166, 169\}$ cuadrados

Ahora bien, por (a) sabemos que 169 no puede escribirse como suma de $169 - 13 = 156$ cuadrados; en consecuencia:

$$S(13) = 13^2 - 14$$

(c) Sea $n \in N / S(n) = n^2 - 14 \Rightarrow n^2$ se descompone como suma de k ($1 \leq k \leq n^2 - 14$) cuadrados estrictamente positivos. Ahora bien:

$$(2n)^2 = (2n)^2$$

$$n^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow (2n)^2 = (2a)^2 + (2b)^2$$

$$n^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow (2n)^2 = (2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2$$

Sea $p \in \mathbb{N} / 4 \leq p \leq 4(n^2 - 14) \Rightarrow p = 4k + r; 1 \leq k \leq n^2 - 14 \quad 0 \leq r \leq 3$.

Como $(2n)^2 = n^2 + n^2 + n^2 + n^2$

- Si $k = n^2 - 14 \Rightarrow r = 0$ y $(2n)^2$ se puede escribir como suma de $n^2 - 14 + n^2 - 14 + n^2 - 14 + n^2 - 14 = 4(n^2 - 14)$ cuadrados
- Si $1 \leq k < n^2 - 14 \Rightarrow 0 \leq r \leq 3$
 - ◆ $r = 0$ $(2n)^2$ se puede escribir como suma de $k + k + k + k = 4k = p$ cuadrados
 - ◆ $r = 1$ $(2n)^2$ se puede escribir como suma de $k + 1 + k + k + k = 4k + 1 = p$ cuadrados
 - ◆ $r = 2$ $(2n)^2$ se puede escribir como suma de $k + 1 + k + 1 + k + k = 4k + 2 = p$ cuadrados
 - ◆ $r = 3$ $(2n)^2$ se puede escribir como suma de $k + 1 + k + 1 + k + 1 + k = 4k + 3 = p$ cuadrados

Sea $p \in \mathbb{N} / 4(n^2 - 14) < p \leq (2n)^2 - 14 \Rightarrow p = 4n^2 - 56 + r; 1 \leq r \leq 42$ y $(2n)^2$ se puede escribir como suma de $n^2 + n^2 + n^2 + n^2 - 56 + r = p$ cuadrados

En resumidas cuentas:

Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $S(n) = n^2 - 14 \Rightarrow S(2n) = (2n)^2 - 14$

Jesús Granda (Madrid)

Problema n° 5 (BOLETÍN N.° 35)

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Determine, si existe, una función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que cumpla las condiciones siguientes:

$$f(1) = 2$$

$$f(f(n)) = f(n) + n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$f(n) < f(n + 1) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Solución:

Consideremos la sucesión: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_k = a_{k-1} + a_{k-2} \quad \forall k \geq 3$

⊗ Obviamente es una sucesión estrictamente creciente

⊗ Sea $r \geq 2 \Rightarrow a_r - 1 = \begin{cases} a_{r-1} + a_{r-3} + \dots + a_1 & \text{si } r \text{ par} \\ a_{r-1} + a_{r-3} + \dots + a_2 & \text{si } r \text{ impar} \end{cases}$

Para $r = 2$ es obvio $a_2 - 1 = a_1$

Supongámoslo cierto $\forall m \leq r - 1$

en particular $a_{r-2} - 1 = \begin{cases} a_{r-3} + a_{r-5} + \dots + a_1 & \text{si } r - 2 \text{ par} \\ a_{r-3} + a_{r-5} + \dots + a_2 & \text{si } r - 2 \text{ impar} \end{cases}$

Demostremoslo para r :

$$a_r - 1 = a_{r-1} + a_{r-2} - 1 = \begin{cases} a_{r-1} + a_{r-3} + \dots + a_1 & (r - 2 \text{ par}) \text{ } r \text{ par} \\ a_{r-1} + a_{r-3} + \dots + a_2 & (r - 2 \text{ impar}) \text{ } r \text{ impar} \end{cases}$$

Sea $n \in \mathbb{N}$. Puede ocurrir:

- ◆ n coincide con un término de la sucesión: $\exists r_1 \in \mathbb{N} / a_{r_1} = n$
- ◆ n no coincide con ningún término de la sucesión:

Sea $r_1 \in \mathbb{N} / a_{r_1} < n < a_{r_1+1} \Rightarrow n = a_{r_1+1} + n_1$. Puede ocurrir:

- n_1 coincide con un término de la sucesión: $\exists r_2 \in \mathbb{N} (r_2 < r_1) / n_1 = a_{r_2}$
- entonces $n = a_{r_1+1} + a_{r_2}$
- n_1 no coincide con ningún término de la sucesión:

Sea $r_2 \in \mathbb{N} (r_2 < r_1) / a_{r_2} < n_1 < a_{r_2+1} \Rightarrow n = a_{r_1+1} + a_{r_2+1} + n_2$

Repetimos el proceso con n_2 y así sucesivamente. Después de un número finito de pasos llegamos a que n se escribe de **forma única**:

$$n = a_{r_1} + a_{r_2} + \dots + a_{r_t} \quad r_1 > r_2 > \dots > r_t \quad r_1, r_2, \dots, r_t \in \mathbb{N}$$

En resumidas cuentas:

$$\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = \sum_{j=1}^t a_{r_j} \text{ de forma única}$$

Definimos pues, la función $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(n) = \sum_{j=1}^t a_{r_j+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Veamos ahora que cumple las condiciones:

♦ $f(1) = 2$

Obvio: $f(1) = f(a_1) = a_2 = 2$

♦ $f(f(n)) = f(n) + n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

$$f(f(n)) = f\left(f\left(\sum_{j=1}^t a_{r_j}\right)\right) = f\left(\sum_{j=1}^t a_{r_j+1}\right) = \sum_{j=1}^t a_{r_j+2} = \sum_{j=1}^t a_{r_j+1} + \sum_{j=1}^t a_{r_j} = f(n) + n$$

♦ $f(n) < f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$

$$n+1 = \sum_{j=1}^t a_{r_j} \Rightarrow f(n+1) = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j+1} + a_{r_t}$$

• Si $r_t = 1 \Rightarrow n = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j} \Rightarrow f(n) = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j+1} < f(n+1)$

• Si $r_t \geq 2$ **par** $\Rightarrow n = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j} + a_{r_t} - 1 = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j} + a_{r_t-1} + a_{r_t-3} + \dots + a_1$

$$f(n) = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j+1} + a_{r_t} + a_{r_t-2} + \dots + a_2 = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j+1} + a_{r_t+1} - 1 < f(n+1)$$

• Si $r_t \geq 2$ **impar** $\Rightarrow n = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j} + a_{r_t} - 1 = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j} + a_{r_t-1} + a_{r_t-3} + \dots + a_2$

$$f(n) = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j+1} + a_{r_t} + a_{r_t-2} + \dots + a_3 = \sum_{j=1}^{t-1} a_{r_j+1} + a_{r_t+1} - 2 < f(n+1)$$

Jesús Granda (Madrid)

Problema n° 7 (BOLETÍN N.° 35)

Un número natural es capicúa si, al escribirlo en notación decimal, se puede leer de igual forma tanto de izquierda a derecha como de derecha a izquierda, por ejemplo: 8, 23432, 6446.

Sean $x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots$ todos los números capicúas. Para cada i sea $y_i = x_{i+1} - x_i$. ¿Cuántos números primos distintos tiene el conjunto $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$?

Solución:

Sea $x_i = \sum_{k=0}^n a_k 10^k = (a_n, a_{n-1}, \dots, a_0)_{10}$ un número capicúa

- ♦ Si n es par $a_j = a_{n-j} \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, (n/2)-1$
 - Si $a_{n/2} \neq 9$ entonces:

$$x_i = (a_n, \dots, a_{(n/2)+1}, a_{n/2}, a_{(n/2)-1}, \dots, a_0)_{10}; \quad x_{i+1} = (a_n, \dots, a_{(n/2)+1}, a_{n/2} + 1, a_{(n/2)-1}, \dots, a_0)_{10};$$

$$y_i = x_{i+1} - x_i = 10^{n/2} \text{ que nunca es primo.}$$

- Si $a_{n/2} = 9$ y j es el primer índice tal que $a_j = a_{n-j} \neq 9$ entonces:

$$x_i = (a_n, \dots, a_{n-j}, 9, 9, \dots, 9, a_j, \dots, a_0)_{10};$$

$$x_{i+1} = (a_n, \dots, a_{n-j} + 1, 0, 0, \dots, 0, a_j + 1, \dots, a_0)_{10}$$

$$y_i = x_{i+1} - x_i = 10^{j+1} + 10^j \text{ no es primo a menos que } j = 0$$

pues en este caso $y_i = 11$.

- Si $a_k = 9 \quad \forall k = 0, 1, \dots, n$ entonces:

$$x_i = (9, 9, \dots, 9)_{10} = \sum_{k=0}^n 9 \cdot 10^k; \quad x_{i+1} = 10^{n+1} + 10^0 \Rightarrow y_i = 2 \text{ primo}$$

- ♦ Si n es impar $a_j = a_{n-j} \quad \forall j = 0, 1, 2, \dots, (n-1)/2$
 - Sea j el primer índice tal que $a_j = a_{n-j} \neq 9$ entonces:

$$x_i = (a_n, \dots, a_{n-j}, 9, 9, \dots, 9, a_j, \dots, a_0)_{10};$$

$$x_{i+1} = (a_n, \dots, a_{n-j} + 1, 0, 0, \dots, 0, a_j + 1, \dots, a_0)_{10}$$

$y_i = x_{i+1} - x_i = 10^{j+1} + 10^j$ no es primo a menos que $j = 0$,

pues en este caso $y_i = 11$.

• Si $a_k = 9 \forall k = 0, 1, \dots, n$, entonces:

$$x_i = (9, 9, \dots, 9)_{10} = \sum_{k=0}^n 9 \cdot 10^k; \quad x_{i+1} = 10^{n+1} + 10^0 \Rightarrow y_i = 2 \text{ primo}$$

En consecuencia los únicos números primos del conjunto $\{y_1, y_2, y_3, \dots\}$ son 2 y 11.

Jesús Granda (Madrid)

Problema n° 12 (BOLETÍN N.° 35)

Dos números enteros no negativos a y b son "cuates" si la expresión decimal de $a + b$ consta solamente de ceros y unos. Sean A y B dos conjuntos infinitos de enteros no negativos, tales que B es el conjunto de todos los números que son "cuates" de todos los elementos de A , y A es el conjunto de todos los números que son "cuates" con todos los elementos de B .

Pruebe que en uno de los conjuntos A ó B hay infinitos pares de números x , y tales que $x - y = 1$.

Solución:

Si para $\forall a \in A$ se tiene que o bien $a - 1 \in A$ o bien $a + 1 \in A$, el problema está demostrado.

Sea pues $a \in A$ tal que $a - 1 \notin A$, $a + 1 \notin A$

• Si a termina en $0 \Rightarrow b$ termina en 0 ó $1 \forall b \in B$

Lo que implica que cualquier elemento de A debe terminar en 9 , 0 ó 1

Si $\exists a' \in A / a'$ termina en $9 \Rightarrow b$ termina en $1 \forall b \in B \Rightarrow a - 1 \in A$. Absurdo

Si $\exists a' \in A / a'$ termina en $1 \Rightarrow b$ termina en $0 \forall b \in B \Rightarrow a + 1 \in A$. Absurdo

En consecuencia, todos los elementos de A terminan en 0 .

• Si a termina en $1 \Rightarrow b$ termina en 9 ó $0 \forall b \in B$

Lo que implica que cualquier elemento de A debe terminar en 0 , 1 ó 2

Si $\exists a' \in A / a'$ termina en $0 \Rightarrow b$ termina en $0 \forall b \in B \Rightarrow a - 1 \in A$. Absurdo

Si $\exists a' \in A / a'$ termina en $2 \Rightarrow b$ termina en $9 \forall b \in B \Rightarrow a + 1 \in A$. Absurdo

En consecuencia, todos los elementos de A terminan en 1 .

• Si a termina en $c \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} \Rightarrow b$ termina en $10 - c$ ó $11 - c \forall b \in B$

Lo que implica que cualquier elemento de A debe terminar en $c - 1$, c ó $c + 1$

Si $\exists a' \in A / a'$ termina en $c - 1 \Rightarrow b$ termina en $11 - c \forall b \in B \Rightarrow a - 1 \in A$.

Absurdo

Si $\exists a' \in A / a'$ termina en $c + 1 \Rightarrow b$ termina en $10 - c \forall b \in B \Rightarrow a + 1 \in A$.

Absurdo

En consecuencia, todos los elementos de A terminan en c .

Así pues, si $\exists a \in A$ tal que $a - 1 \notin A$, $a + 1 \notin A$, resulta que todos los elementos de A terminan en la misma cifra.

Sea $b \in B$

♦ Si la expresión decimal de $a + b$ termina en $0 \Rightarrow b + 1 \in B$

♦ Si la expresión decimal de $a + b$ termina en $1 \Rightarrow b - 1 \in B$

Jesús Granda (Madrid)

Problema n° 15 (BOLETÍN N.° 35)

Demuestra que, siendo p un número primo mayor que 5 , la suma:

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{(p-1)^4}$$

escrita como número racional a/b , tiene la propiedad de que a es divisible por p .

Propuesto por Joaquín Gómez Rey

Solución:

El numerador de dicho número racional es:

$$a = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k} \right)^4$$

Para todo $k = 1, 2, \dots, p-1$; sea r_k el resto de la división de

$$\frac{(p-1)!}{k} \text{ por } \frac{(p-1)!}{k} \equiv r_k \pmod{p};$$

y puesto que p no divide a

$$\frac{(p-1)!}{k} \Rightarrow r_k \in \{1, 2, \dots, p-1\}.$$

Además si $r_k = r_{k'}$ $k, k' = 1, 2, \dots, p-1$; resulta que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{(p-1)!}{k} \equiv r_k \pmod{p} \\ \frac{(p-1)!}{k'} \equiv r_{k'} \pmod{p} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (p-1)! \equiv kr_k \pmod{p} \\ (p-1)! \equiv k'r_{k'} \pmod{p} \end{array} \right\} \Rightarrow kr_k \equiv k'r_{k'} \pmod{p}$$

y como m.c.d. $(r_k, p) = 1$ resulta $k \equiv k' \pmod{p} \Rightarrow k - k' \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow k = k'$.

Así pues, los $p-1$ restos son distintos y pertenecen al conjunto $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Por tanto:

$$\sum_{k=1}^{p-1} r_k^4 = \sum_{k=1}^{p-1} k^4$$

Ahora bien

$$\frac{(p-1)!}{k} \equiv r_k \pmod{p} \Rightarrow \left(\frac{(p-1)!}{k} \right)^4 \equiv r_k^4 \pmod{p}$$

y tenemos así:

$$a = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{(p-1)!}{k} \right)^4 \equiv \sum_{k=1}^{p-1} r_k^4 = \sum_{k=1}^{p-1} k^4 = \frac{(p-1)p(2p-1)[3(p-1)^2 + 3(p-1) - 1]}{30} \pmod{p}$$

y puesto que m.c.d. $(p, 30) = 1$ resulta

$$a \equiv 0 \pmod{p}$$

Jesús Granda (Madrid)

Problema n° 5 (BOLETÍN N.° 38)

Sea S el conjunto de todos los números reales estrictamente mayores que -1 . Determinar todas las funciones $f: S \rightarrow S$ que verifican las condiciones:

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$, para todos los $x, y \in S$.

(ii) $\frac{f(x)}{x}$

Solución:

De la condición (i) tenemos:

$$f(f(0)) = f(0 + f(0) + 0f(0)) = 0 + f(0) + 0f(0) = f(0);$$

luego

$$f(0) = f[f(f(0))] = f[0 + f(f(0)) + 0f(f(0))] = f(0) + f(0) + f(0)f(0);$$

esto es

$$[f(0)]^2 + f(0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = -1 \notin S \\ f(0) = 0 \in S \end{cases}$$

Así pues, la condición (i) implica $f(0) = 0$. Por otra parte

$$\forall y \in S \quad f(f(y)) = f(0 + f(y) + 0f(y)) = y + f(0) + yf(0) = y$$

Así pues, la condición (i) implica $f(f(y)) = y \quad \forall y \in S$. Deducimos pues que

$$2f(1) + [f(1)]^2 = f[f(f(1) + f(1) + f(1)f(1))] = f[1 + f(1) + f(1)] = 1 + f(1) + f(1)$$

$$\text{de donde } [f(1)]^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} f(1) = -1 \notin S \\ f(1) = 1 \in S \end{cases}$$

Así pues, la condición (i) implica $f(1) = 1$.

Sea ahora $x \in S$ con $x > 1$ (por la condición (ii))

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{x} > \frac{f(1)}{1} = 1 \Rightarrow f(x) > x.$$

Por otra parte como $f(x) > x \Rightarrow f(x) > 1$, la condición (ii) implica también:

$$\frac{f(f(x))}{f(x)} > \frac{f(1)}{1} \Rightarrow \frac{x}{f(x)} > 1 \Rightarrow x > f(x). \text{ Contradicción}$$

Conclusión: No existe ninguna función $f : S \rightarrow S$ que cumpla las condiciones (i) y (ii).

Jesús Granda (Madrid)

Índice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.º	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números											
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º		
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	-	-
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	-	-
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	-	-	-	-	-	-
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	-	-
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	-	-
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	-	-
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	-	-
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	-	-	-
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	-	-
12	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	-	-
13	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	-	-
14	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	-	-
15	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	-	-
16	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	-	-
17	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	-	-
18	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	-	-
19	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	-	-
20	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	-	-
21	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	-	-
22	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	-	-
23	OI-89-Cuba	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	-	-
25	Oposiciones	31	30	29	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	OME-f1-90	27	27	28	28	29	31	31	30	-	-	-	-
27	OME-f2/f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	-	-	-	-
28	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	-	-
29	OMI-90-China/	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	-	-
30	OI-90-Valladolid	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
31	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	-	-	-	-
32	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	-	-	-	-	-	-
33	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-
34	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	46	XX	33	33	33	-	-
35	OME-f1-91	33	34	34	34	-	-	-	-	-	-	-	-
36	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	48	XX	XX	35	-	-
37	OME-f1-91/PNS	XX	XX	47	35	34	-	-	-	-	-	-	-
38	OMI-92-MOSCÚ/	35	48	XX	XX	XX	52	38	35	46	38	-	-
39	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	-	-	-	-	-	-	-	-
40	OME-f1-92/f1-92(v)	47	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	-	-
41	/PNS	47	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-
42	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	-	-	-	-	-	-
43	OMI-93-Turq./	XX	46	XX	XX	52	XX	52	XX	47	39	-	-
44	OI-93-Méjico/PNS	XX	52	39	39	52	XX	-	-	-	-	-	-
45	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	-	-
46	OME-f2-94/PNS	41	49	49	41	49	49	45	45	41	-	-	-
47	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	52	XX	-	-	-	-	-	-
48	OI-94-Brasil/OME-f1-94/f1-94(v)	43	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	-	-
49	OME-f2-95	46	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-
50	OMI-95-Canadá	42	XX	XX	42	XX	XX	-	-	-	-	-	-
51	OI-95-Chile	XX	XX	XX	47	XX	XX	-	-	-	-	-	-
52	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-
53	OME-f1-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-
54	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-
55	OMI-96-India/	XX	XX	49	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-
56	PNS	XX	47	45	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-
57	OI-96-Costa Rica	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	XX	XX	XX	-	-
58	OME-96-f1	XX	47	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-
59	OMR-96	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-
60	OMI-97-Argentina	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-
61	OI-97-Méjico	XX	XX	XX	50	XX	XX	-	-	-	-	-	-
62	OMEf1-98	-	-	-	-	-	-	XX	XX	XX	XX	-	-
63	OMR-97	49	XX	49	XX	-	-	XX	50	XX	XX	-	-
64	OMI-98	51	XX	51	XX	51	52	-	-	-	-	-	-
65	OI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = OI. Mat. Internac. OI = OI. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Los originales de artículos, problemas, reseñas de libros, anuncios de congresos, etc., deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo especificado a continuación.

Copias en papel

Se enviarán por duplicado, escritas con un procesador de texto en hojas de tamaño DIN A-4.

Los artículos comenzarán con el título (en minúsculas grandes), nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el boletín), e-mail si se tiene, abstract de unas líneas en inglés. Terminar el artículo con la bibliografía (y nada más después de ella).

Si se utiliza LATEX, el formato debe ser 17 cm × 12,8 cm en 10 puntos, o bien 19 cm × 14 cm en 11 puntos (para ser aprovechado directamente en la imprenta). En tal caso se incluirá el archivo de estilo utilizado.

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo dos archivos:

- archivo del documento para el procesador de texto utilizado.
- archivo en código ASCII (éste es el que suele utilizar la imprenta).

Si se envía en LATEX, ajustado al tamaño indicado, no es preciso este último (el archivo en código ASCII).

Las figuras se captarán por escaneado, por lo que es innecesario incluirlas en el disquete (en archivos de extensión TIF o similares).

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín (no al apartado, que ya no está operativo).

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

ADQUISICIÓN DE NÚMEROS ATRASADOS DE NUESTRO BOLETÍN

A partir de ahora, los números atrasados del Boletín (de los cuales existan ejemplares sobrantes), podrán ser adquiridos al precio de coste de mil pesetas ejemplar.

Los números de los que aún quedan algunos ejemplares sobrantes son los siguientes:

35, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51 y 52

El importe puede ser abonado mediante cheque a nombre de nuestra Sociedad o mediante transferencia a la cuenta corriente de nuestra Sociedad domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
C/ Fuencarral, 101
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

La carta de petición se enviará a la sede de nuestra Sociedad:

SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
Facultad de Educación (despacho 3.517)
C/ Rector Royo Villanova, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid

En la carta se incluirá:

- el número o números a adquirir,
- la dirección a donde se han de enviar,
- el correspondiente cheque nominativo o resguardo de transferencia.

**SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION**

D. Teléf. (....)
Dirección
Ciudad Cod.º Postal
Centro de trabajo

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco
Sucursal o Agencia en
Dirección de la misma
para que cargue en la cuenta: / / /
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1998-99 y siguientes.

Fecha de de 1999

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pts. (de ellas, 3.000 pts. en concepto de cuota de la Sociedad "Puig Adam" y 2.000 pts. en concepto de cuota por la que se recibe la revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas).
Quienes prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria:

CAJA DE INGENIEROS
c/ Fuencarral, 101
28004 Madrid
cc. 3025-0006-24-1400002948

ORDEN DE DOMICILIACION EN LA ENTIDAD BANCARIA

Fecha BANCO:
Sucursal o Agencia en
Dirección de ésta

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta: / / /
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos
Dirección

Remítanse ambas partes (toda esta página) a:
Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
c/ Rector Royo Villanova, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid