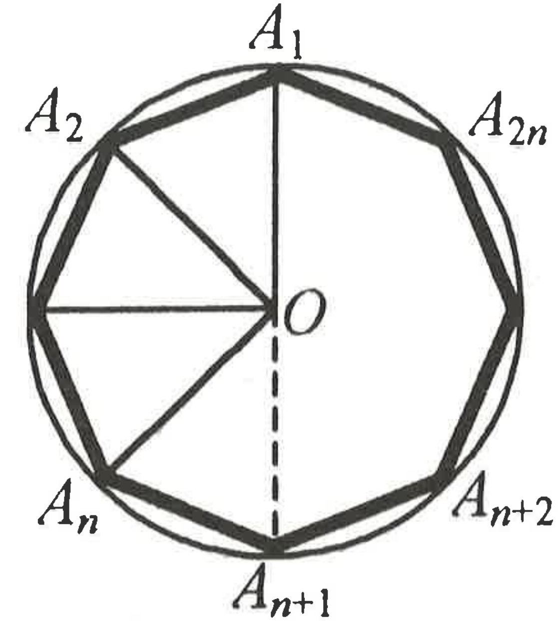
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS



BOLETIN N.° 51
FEBRERO DE 1999

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura 1 del artículo titulado "Un resultado curioso de Geometría Elemental", contenido en este número 51 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS	(Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ	(Castilla-León)
VICENTE MENDIOLA-MUÑOZ MORALES	(Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO	(Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

Adjunta a la presidencia:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 1999

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1999 para el día 10 de abril de 1999, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (edificio nuevo), Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad.
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

¡¡Esperamos tu asistencia¡¡

XVII Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

convocado por

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras

BASES

Primera: Podrán participar en el Concurso los alumnos de BUP, ESO y FP en tres niveles:

a) Primer nivel: alumnos de 1° BUP, 3° ESO y FP I;
b) Segundo nivel: alumnos de 2° BUP, 4° ESO y 1° de FP II;
c) Tercer nivel: alumnos de 3° BUP, 1° Bachillerato y 2° y 3° de FP II.

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles) y se realizarán en Madrid, en un solo día, el sábado 19 de junio de 1999 a partir de las 10 horas.

Tercera: Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del dia 19 de mayo de 1999, dirigiéndose por carta al presidente de nuestra sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Álgebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Ciudad Universitaria
28040-Madrid

En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 1998-99.

NOTA IMPORTANTE: Los dos primeros clasificados de cada nivel están invitados a participar en la VII Olimpiada Rioplatense, que está previsto celebrar en diciembre de 1999 en Argentina. Ello en el supuesto de que se consigan becas para pagar los billetes hasta Buenos Aires. De la pasada edición de la Olimpiada Rioplatense se hace una reseña más adelante, en este mismo número del Boletín.

VII Olimpiada Matemática Rioplatense

Argentina - 1998

En la segunda semana de diciembre se celebró en Pilar, localidad a unos 50 km de Buenos Aires, la *VII Olimpíada Matemática Rioplatense.* En esta edición participaron 68 estudiantes procedentes de seis países iberoamericanos: Argentina, Brasil (con dos equipos), Colombia, España, México y Uruguay.

El equipo español estuvo formado por los siguientes estudiantes:

- Los ganadores del XVI Concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad,
  - Fernando Cruz Robledillo,
  - Carlos Hernández Corbato,
  - Roberto Rubio N'ñez,
  - Borja Cadenato Palacio,
  - Carlos Domingo Mas,
- y los ganadores de Medalla de Oro en la última Olimpiada de Mayo,
  - Luis Hernández Corbato, de Madrid (Primer Nivel),
  - Alberto Suárez Real, de Salinas (Asturias) (Segundo Nivel),

junto con los profesores Mercedes Sánchez y Gregorio Hernández, como miembros del Jurado, y Azucena Corbato en calidad de Tutora.

Las pruebas se celebraron los días 9 y 10 en dos sesiones de tres horas y media cada una, en las que se propusieron seis problemas en total. En los restantes días hubo varios concursos y juegos entre todos los participantes, que disfrutaron del buen tiempo, sin excesivo calor, del verano argentino. Los estudiantes estuvieron alojados en una residencia en las afueras de Pilar, con una preciosa arboleda e instalaciones deportivas que permitieron una estrecha convivencia entre ellos, y esta convivencia y los aspectos lúdicos de la estancia serán, sin duda, los recuerdos que más perdurarán en ellos.

La OMR está organizada en cuatro niveles (A, 1, 2 y 3), según los años de escolarización de los estudiantes, cuya edad varía de los 12 a los 18 años, pudiendo participar cada equipo con tres alumnos por nivel. El equipo español participó en los niveles A (un alumno), 1 (tres alumnos) y 2 (tres alumnos). El jurado sólo hace públicos los nombres de los ganadores de las medallas de oro, plata y bronce, sin que se conozca la puntuación obtenida por ningún estudiante.

Por parte española obtuvieron medalla:

Luis Hernández Corbato, Medalla de Oro en el Nivel A,
Alberto Suárez Real, Medalla de Bronce en el Nivel 1, y
Carlos Domingo Mas, Medalla de Bronce en el Nivel 2.

Debemos agradecer a FOMA (Fundación Olimpiada Matemática Argentina) su invitación a participar, un año más, en esta competición, sus atenciones y desvelos para hacer grata nuestra estancia y el entusiasmo que despliegan en esta hermosa tarea de estimular entre los más jóvenes el talento matemático. También agradecemos al CIDE (Centro para la Investigación y Desarrollo Educativo) su colaboración, que hizo posible el viaje de alumnos y profesores hasta Argentina.

III Concurso de Primavera

Cuando estéis leyendo esta revista, aquellos que sois profesores de enseñanza no universitaria ya probablemente hayáis recibido información sobre el III Concurso de Primavera. Como habréis observado, hay dos novedades respecto a años anteriores:

En primer lugar, la participación se extiende hasta nuestros actuales estudiantes de COU ó 2.º de Bachillerato LOGSE. Hemos creído que no había razones importantes para no contar con estos estudiantes. Se podía pensar que los estudiantes del último año tienen su cabeza puesta en las pruebas de acceso pero, por la experiencia que tenemos en algunos centros, hemos observado que no es exactamente así, fue a muchos de esos estudiantes también les gusta hacer actividades no tan directamente relacionadas con la dichosa selectividad.

Por otra parte, aumentamos a cuatro el número de niveles: Primaria, primer ciclo de ESO, segundo ciclo de ESO y Bachillerato o equivalentes. Aunque seguimos defendiendo la tesis de que a los estudiantes les gusta competir con ellos mismos, y observar cómo cada año respondían –en una prueba análoga– a más cuestiones que el año anterior, creemos que, en cualquier caso, esa idea la pueden mantener, dado que los niveles no se refieren a un solo curso, sino a dos. Por otra parte, cuatro niveles dan una visión más fiel de la actual distribución de la enseñanza no universitaria.

En el próximo número haremos un análisis detallado de cómo fue este concurso, pero, en cualquier caso, nos gustaría agradecer ya a la Consejería de Educación y al departamento de Asuntos Generales de la Comunidad de Madrid su disposición y eficacia para haber hecho llegar a dos mil centros públicos y concertados de la Comunidad de Madrid, en un tiempo récord, toda la primera información sobre este III Concurso de Primavera.

Comité Organizador del III Concurso de Primavera

Recuerdo de Fidel Oliveros Alonso

Querido amigo Fidel:

Cuando se me pidió que escribiese este recuerdo, me resistí por dos razones: una, porque sé que no te gusta mucho que te echen flores; la otra, porque, como sabes, no se me da nada bien esto de redactar (recuerda cómo, cada vez que tenía que escribir algo que se salía de lo habitual, enseguida acudía a ti para pedirte consejo).

Sin embargo, esa resistencia inicial pronto se desvaneció. Somos muchos los que tenemos mucho que agradecerte, y... ¡qué menos podía yo hacer!

Al comenzar a escribir, surgió de nuevo el problema: ¿Y qué digo? ¡Si yo nunca he escrito nada similar! ¡Si no se me ocurre nada!... Enseguida me di cuenta de que lo mejor era escribir con toda sencillez, sin andarme con demasiados formalismos académicos. Me ha ocurrido algo parecido a lo que me sucedió las dos últimas veces que fui a verte a la clínica: una de ellas, la víspera de tu tercera operación; la otra, poco después de que recibieses la Unción de Enfermos. En ambas ocasiones, iba yo realmente preocupado por qué te podría decir. Y no era para menos: Al problema del cáncer había que añadir los ya viejos del corazón y de la vista. Sin embargo, la preocupación se deshizo nada más pasar la puerta de tu habitación y comprobar que –a pesar de tu decaimiento físico– continuabas con el mismo buen humor con el que aparecías por el Instituto a las ocho y cuarto de la mañana, o que tenías cuando íbamos a tomar café al bar "Piluca" o al de Pedro. ¡Con razón te llamaban algunas ATS el enfermo de la sonrisa!

Y, ahora, aunque no te guste mucho, paso al capítulo de tus méritos y reconocimientos. Para ello he tenido que recurrir a diversas fuentes, pues algunos datos te los tenías muy callados, como, por ejemplo: que en 1964 sacaste el número dos en la oposición que te permitió acceder a la Cátedra de Arquitectura Técnica de Sevilla; o que, en 1960 y 1967, obtuviste el número uno en sendas oposiciones a Cátedra de Instituto, por las que accediste, respectivamente, al Instituto de Ávila y al "Cervantes" de Madrid, en los que, durante algunos cursos, desempeñaste el cargo de Director.

Hay otros datos que he completado acudiendo a personas que te trataron antes de hacerlo yo, y que también deseo mencionar: Tus primeros pasos por Pareja (Guadalajara); los estudios de bachillerato en el Instituto "Cardenal Cisneros"; la licenciatura en la Universidad de Madrid; tu época de becario en el Consejo Superior de Investigaciones Científicas o de profesor en la Universidad; tus destinos en los Institutos "Murillo" de Sevilla o "Hermanos D'Elhuyar" de Logroño, en los que desempeñaste, respectivamente, los cargos de Secretario y Director. Y, ya más recientemente, a partir del 89, tu labor como profesor Asociado en la ETS de Ingenieros Industriales.

A partir del curso 79-80 lo tengo más fácil, pues fue el curso en el que ambos aparecimos, vía concurso de traslados, por el entonces recién creado Instituto "Avenida de los Toreros". De las muchas cosas que tenemos que agradecerte, sólo mencionaré unas cuantas:

– Tu gran dedicación profesional: clases sistemáticas de recuperación y de pendientes fuera de horario; disponibilidad total para atender a los alumnos en cualquier momento; elaboración de una muy útil colección de exámenes y de otra no menos valiosa de apuntes de teoría..

– La organización o impulso de diversas actividades tales como "El problema semanal" (cfr. el boletín número 10 de nuestra Sociedad), "El club matemático", o la participación sistemática del Instituto en los más diversos concursos de Matemáticas.

– Tu gran generosidad en la distribución de los grupos al principio de cada curso.

– El fomentar de manera casi imperceptible, pero muy eficaz, el buen entendimiento y el perfeccionamiento de los miembros del Seminario: a veces, haciéndonos partícipes de tu admiración por el enunciado o resolución de un problema; en cualquier momento, comentándonos satisfecho el hallazgo de una mejor forma de explicar un tema; con frecuencia, pidiéndonos el parecer sobre alguna cuestión, etc.

– Tus amenas y ricas conversaciones, así como tu hábito de destacar siempre lo más positivo de cada persona.

Y, así, sin ruido, el Instituto cuenta ya con un considerable "patrimonio" matemático, consistente, sobre todo, en un llamativo número de antiguos alumnos que ya están sirviendo a la sociedad desde sus puestos de matemáticos, físicos o ingenieros.

Yo, además, deseo agradecerte el que "me complicases un poco la vida", "liándome" con los concursos que organizaba la "Puig Adam", Sociedad, que quiere reconocer y agradecer tu eficiente y generosa colaboración con estas líneas.

Transmite también nuestro agradecimiento a José Ramón Pascual, Juan Ochoa, Salvador Herrero... y al propio D. Pedro; y os pido que, desde ahí, sigáis ayudándonos a que nuestra Sociedad funcione.

Pero siendo tan de agradecer las lecciones mencionadas anteriormente, hay otra que nos has dado en estos últimos meses que, a mi modo de ver, las supera: la de afrontar con tanto garbo la última y más difícil oposición. Échanos una mano también en esto.

Víctor M. Sánchez

Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

Como ya indicamos en números anteriores de nuestro Boletín, la dirección de Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 30 (4) DE 1998

#2812 (sección H65). Sobre automatización de la reducción de matrices a su forma canónica de Jordan, por E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano, Bol. Soc. Puig Adam 48 (1998), págs. 17-40.

#2813 (sección H65). Cálculo de la inversa de la matriz de Vandermonde, por Emilio Defez Candel, Bol. Soc. Puig Adam 48 (1998), págs. 51-58.

#2928 (sección K65). Ciclo de la vida de familia, por José V. García Sestafe, Bol. Soc. Puig Adam 48 (1998), págs. 41-50.

#2865 (sección I65). Algunas aplicaciones de un teorema de Peano, por Juán Carlos Cortés López, Bol. Soc. Puig Adam 48 (1998), págs. 59-65.

#2770 (sección H10). Tendencias y repercusiones del álgebra actual, por Concepción Romo Santos, Bol. Soc. Puig Adam 48 (1998), págs. 67-79.

Nota necrológica

Después de cerrar este número, la Junta Directiva ha tenido noticia del fallecimiento de la profesora Ignacia Gómez Aguilar, esposa de nuestro consocio y amigo Gonzalo Calero Rosillo. En nombre de la Junta Directiva, nuestro más sentido pésame.

Anuncio de Congreso

IMACS ACA 99

Conference on Applications of Computer Algebra

El Escorial, 25-27 junio 1999
e-mail: imacs-aca99@ccedu.ucm.es

La "International Association for Mathematics and Computers in Simulation" (IMACS), con la Colaboración de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas, organiza la Conferencia Internacional sobre Aplicaciones de Álgebra Computacional correspondiente al año 1999, a celebrar en el Euroforum de El Escorial los días 24 al 27 de junio (programa científico del 25 al 27), con la ayuda de los Servicios Informáticos de la Universidad Complutense de Madrid.

Breve información

El Álgebra Computacional o Cálculo Simbólico es una joven área de investigación nacida de la cooperación entre Informática y Matemática, que cubre un amplio espectro, desde el marco teórico hasta el desarrollo de los Sistemas de Cómputo Algebraico (como Derive, Maple, Mathematica, Macsyma, Reduce, Axiom...).

Este será el quinto congreso IMACS sobre Aplicaciones de Álgebra Computacional. En el anterior, celebrado el pasado año en Praga, se presentaron 143 ponencias (15 de ellas con autores españoles) en una ámplia variedad de sesiones: Robótica, Física de Altas Energías, Industria, Álgebra y Geometría, Inteligencia Artificial, Biología, Educación...

Aunque el idioma oficial será el inglés, se procurará que la sesión de educación cuente con traducción simultánea, supuesto que las subvenciones económicas lo permitan.

Además se organizará una sesión de Educación en España, en castellano.

General Chair

Eugenio Roanes Lozano (eroanes@eucmos.sim.ucm.es), Univ. Complutense, Madrid

Program Chairs

Victor Edneral (edneral@theory.npi.msu.su), Moscow State Univ. (Russia).
Laureano Gonzalez-Vega (gvega@matesco.unican.es), Univ. de Cantabria.
Jaime Gutiérrez (jaime@matesco.unican.es), Univ. de Cantabria.

Organizing Committee

Stanly Steinberg (stanly@math.unm.edu), Univ. New Mexico (USA).
Michael Wester (wester@math.unm.edu), Cotopaxi (USA).
Eugenio Roanes Macías (roanes@eucmos.sim.ucm.es), Univ. Complutense, Madrid.
Luis Laita (laita@fi.upm.es), Univ. Politécnica de Madrid.

Local Committee

Martin Garbayo Moreno (garbayo@eucmos.sim.ucm.es), Univ. Complutense Madrid.
Mercedes Hidalgo Herrero (mhidalgo@eucmax.sim.ucm.es), Univ. Complutense.
Dolores Rodríguez (mrodri7@olmo.pntic.mec.es), CPR Leganés.

Scientific Committee

Bruno Buchberger, RISC-Linz (Austria).
Jacques Calmet, Univ. of Karlsruhe (Germany).
Francisco Castro, Univ. of Seville (Spain).
Arjeh Cohen, Eindhoven Univ. of Technology (The Netherlands).
Rob Corless, Univ. of Western Ontario (Canada).
Sam Dooley, IBM Yorktown Heights (USA).
Vladimir Gerdt, Institute for Nuclear Research (Russia).
Richard Jenks, IBM Yorktown Heights (USA).
Erich Kaltofen, North Carolina State Univ. (USA).
Deepak Kapur, State Univ. New York (USA).
Wolfgang Kuechlin, Univ. of Tuebingen (Germany).
Bernhard Kutzler, BK Teachware (Austria).
Luis Laita, Univ. Politécnica de Madrid (Spain).
Richard Liska, Tech. Univ. Prague (Czech Republic).
Juan Llovet, Univ. de Alcala (Spain).
Ignacio Luengo, Univ. Complutense de Madrid (Spain).
Michael Monagan, Simon Fraser Univ. (Canada).
Antonio Montes, Univ. Politécnica de Catalunya (Spain).
Matu-Tarow, Ehime Univ. (Japan).
Antonio Quesada, Akron Univ. (USA).
Mohamed O. Rayes, Texas Instruments Dallas (USA).
Tomás Recio, Univ. de Cantabria (Spain).
Tateaki Sasaki, Univ. of Tsukuba (Japan).
Stanly Steinberg, Univ. New Mexico (USA).
David Stoutemeyer, Soft Warehouse (USA).
José L. Vicente Córdoba, Univ. of Seville (Spain).
Emil Volcheck, National Security Agency (USA).
Franz Winkler, J. Kepler Univ. Linz (Austria).

Información en Internet
http://math.unm.edu/ACA/1999.html

Información e inscripciones
Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
c/. Rector Royo Villanova, s/n
28040 Madrid
e-mail: imacs-aca99@ccedu.ucm.es

Algunas Soluciones Amplias de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Vicente Fraile Ovejero (*) y *Ramón Fraile Peláez* (**)
(*)Profesor de Universidad jubilado
(**)Profesor de Instituto

Resumen

Among the irregular functions which satisfy certain ordinary differential equations, or systems, we can consider uniform polygonals and step functions, on condition that they can be expressed by means of one functional symbol which can be used in the Differential Calculus. This paper offers examples of differential equations which have this type of solutions.

1. Es sabido que el concepto de solución de un sistema de ecuaciones diferenciales

$$y_i' = f_i(x, y_1, ..., y_n), \quad i = 1, 2, ..., n$$

puede ser extendido, como mostró Carathéodory, a funciones que satisfagan ese sistema para casi todo valor de la variable independiente, con la condición de que dichas funciones sean absolutamente continuas. Si, por ejemplo, se trata de una sola ecuación $y' = f(\ x, y\ )$, la ecuación integral

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$$

indica que puede haber un campo más amplio de soluciones de la ecuación diferencial, puesto que nos permite suavizar las condiciones exigidas ordinariamente a f.

Una poligonal uniforme, rectilínea o curvilínea, es derivable para casi todo x, y es absolutamente continua en cualquier intervalo acotado; puede ser, pues, solución de una ecuación diferencial ordinaria. Una función escalonada no es absolutamente continua en cualquier compacto, pero es derivable para casi todo x; podría ser, sin embargo, solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Vamos a ver aquí algunos ejemplos de ecuaciones que tienen este tipo de soluciones amplias (poligonales y escalonadas). Para ello es forzoso que dispongamos, de alguna manera, de expresiones funcionales simbólicas que nos permitan incorporar al cálculo diferencial esas poligonales y escalonadas; hemos de saber derivar, y también integrar, dichas expresiones, cada una de las cuales definirá una poligonal, o bien una escalonada. Es ya sabido que esto se logra con el recurso de los valores absolutos.

La ecuación más sencilla de una poligonal rectilínea y uniforme cualquiera es:

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i |x - x_i| + bx + c \tag{1}$$

donde las x_i son las abscisas de los n vértices, y a_i, b, c son números reales, cumpliendo que algún $a_i \neq 0$. La derivada de esta expresión será la ecuación de una escalonada; pero hemos de saber derivar (1) sin trocearla. Podemos hacerlo en el sentido de las distribuciones, pues (1) define una distribución. Hay otro sistema más breve de obtener esa misma derivada, cuyos fundamentos vamos a expresar a continuación.

2. Consideremos una función real de variable real, $u(x)$, continua y no idénticamente nula en $I \subset \mathbb{R}$. Supondremos que u tiene en I un número finito de ceros y que en todos ellos la función cambia de signo. Formularemos ahora esta otra función : $\frac{|u|}{u}$, que es $+1$ cuando $u > 0$, y es -1 cuando $u < 0$.

Observemos que no está definida en los ceros de u, y esto la distingue de la función "signo de u". La derivada de $\frac{|u|}{u}$ existe y es 0 en todo $x \in I$ que no anule a u. En los ceros de u la derivada no existe; pero existe en todo entorno reducido de cada uno de esos ceros y, por lo tanto, la derivada de $\frac{|u|}{u}$

tiene límites laterales en todos ellos, y son nulos. Podemos, pues, convenir en que esa derivada sea también cero en los puntos donde se anula u, con lo cual, $D\,\frac{|u|}{u} = 0, \forall x \in I$.

Veamos las consecuencias de aceptar este convenio. En primer lugar, la propiedad de ser continua toda función derivable no es ahora cierta, pues $\frac{|u|}{u}$ tiene discontinuidades finitas inevitables en I y, sin embargo, es derivable en I. Por lo tanto, $\frac{|u|}{u}$ provista de derivada nula en todos los puntos de I no es una función. Tampoco es una distribución con semejante derivada, aunque $\frac{|u|}{u}$ define, efectivamente, una distribución, porque si son x_1, x_2,..., x_n los puntos de salto de $\frac{|u|}{u}$ en I (en el primero de los cuales la oscilación es, por ejemplo, negativa), la derivada de $\frac{|u|}{u}$ según las distribuciones es

$$D_\delta \frac{|u|}{u} = 2 \cdot \sum_{1}^{n} (-1)^k \cdot \delta_k$$

donde δ_k son las deltas de Dirac en los x_k.

En segundo lugar, podemos elegir u de manera que sea uniforme y continua en toda la recta real y, de haberlos, siempre con ceros aislados en $\mathbb{R}$, en número finito o infinito. Entonces, la pseudofunción $\frac{|u|}{u}$, que podríamos llamar en adelante *p-función*, se comporta como una constante en el cálculo diferencial de la teoría de funciones reales. Ello implica que si $v(x)$ es derivable en un intervalo cualquiera, la derivada del producto $\frac{|u|}{u} \cdot v$ en dicho intervalo es :

$$D\left(\frac{|u|}{u} \cdot v\right) = \frac{|u|}{u} \cdot D(v) = \frac{|u|}{u} \cdot v'$$

Si escogemos $v = u$, y suponemos que es derivable en $(-\infty, +\infty)$, tendremos:

$$D\left(\frac{|u|}{u} \cdot u\right) = D\left(|u|\right) = \frac{|u|}{u} \cdot u' \tag{2}$$

Hemos llegado así a la derivada del valor absoluto de la función u; es decir, a la derivada de una función valorada. Ya podemos, pues, derivar la expresión simbólica de la poligonal (1), y obtendremos la ecuación de una escalonada genérica:

$$g(x) = \sum_{1}^{n} a_i \cdot \frac{|x - x_i|}{x - x_i} + b$$

Como $|u|$ es continua en $I \subset \mathbb{R}$, será localmente integrable, y define una distribución. La derivada primera de $|u|$ según las distribuciones coincide con la expresada en (2). Para empezar, $|u|$ carece de saltos y, por lo tanto, en su derivada como tal distribución no hay deltas de Dirac. Hallemos esta derivada recordando que hemos supuesto u derivable ordinariamente en $I = \mathbb{R}$. En el cálculo introduciremos la p-función $\frac{|u|}{u}$, que permitirá englobar en una sola expresión el distinto comportamiento por trozos contenido en otras expresiones.

Consideremos el espacio vectorial de todas las funciones reales indefinidamente derivables que se anulan fuera de un compacto (no necesariamente el mismo para todas), y sea φ una función genérica de este espacio. La derivada de nuestra distribución $|u|$ se define como:

$$\langle |u|', \varphi \rangle = -\langle |u|, \varphi' \rangle = -\int_{\mathbb{R}} |u| \cdot \varphi' \cdot dx \qquad (3)$$

Si u tiene en $\mathbb{R}$ un número finito de ceros $x_1, ..., x_n$, en cada uno de los cuales cambia de signo, y suponemos que u es positiva en $(-\infty,\ x_1)$, será alternativamente negativa y positiva en (x_1, x_2), $(x_2, , x_3)$, etc. Teniendo esto en cuenta podemos suprimir las barras en la integral de (3), y queda:

$$\langle |u|', \varphi \rangle = -\left(\int_{-\infty}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} + ... + (-1)^n \cdot \int_{x_n}^{+\infty} \right) u' \cdot \varphi \cdot dx$$

Una integración por partes nos lleva a

$$\langle |u|', \varphi \rangle = -\left[(u \cdot \varphi)_{-\infty}^{x_1} - \int_{-\infty}^{x_1} u' \cdot \varphi \cdot dx - (u \cdot \varphi)_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} u' \cdot \varphi \cdot dx - ... + \right.$$
$$\left. +(-1)^n \cdot (u \cdot \varphi)_{x_n}^{+\infty} + (-1)^{n+1} \cdot \int_{x_n}^{+\infty} u' \cdot \varphi \cdot dx \right]$$

Todas las partes integradas son nulas por serlo u cuando los límites son ceros de u, ó por serlo φ cuando hay límite infinito, pues las funciones φ tienen soporte compacto. Por lo tanto:

$$\langle |u|', \varphi \rangle = \left(\int_{+\infty}^{x_1} - \int_{x_1}^{x_2} + ... + (-1)^n \cdot \int_{x_n}^{+\infty} \right) u' \cdot \varphi \cdot dx$$

El segundo miembro lo podemos expresar de una forma más breve teniendo en cuenta que $\frac{|u|}{u} = +1$ en $(-\infty,\ x_1)$, según la hipótesis de ser $u > 0$ en dicho subintervalo. Así, pues, $\frac{|u|}{u}$ será alternativamente -1 y $+1$ en los subintervalos siguientes, y podremos escribir

$$\langle |u|', \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{|u|}{u} \cdot u' \cdot \varphi \cdot dx$$

A esto mismo se llega si u tiene en $\mathbb{R}$ un número infinito de ceros aislados; por ejemplo, si u es periódica con infinitos ceros.

Pero esta última integral es, como sabemos, la distribución $\frac{|u|}{u} \cdot u'$ actuando sobre φ. Es decir:

$$\langle |u|', \varphi \rangle = \langle \frac{|u|}{u} \cdot u', \varphi \rangle \quad \Rightarrow \quad |u|' = \frac{|u|}{u} \cdot u'$$

Vemos, pues, que la derivada primera de $|u|$ según las distribuciones coincide con la obtenida aceptando que $\frac{|u|}{u}$ tiene derivada nula en los ceros de u.

Esta coincidencia ya no se da en la derivada segunda de $|u|$ ni en las sucesivas, si u es sucesivamente derivable, porque el factor $\frac{|u|}{u}$ de la derivada primera introduce saltos en dicha derivada y, por lo tanto, habrá deltas de Dirac en $|u|''$ y siguientes. Las respectivas derivadas segundas de $|u|$ con los dos métodos son :

$$|u|'' = \frac{|u|}{u} \cdot u''$$

$$|u|'' = \frac{|u|}{u} \cdot u'' + 2 \cdot \sum_{1}^{n} (-1)^k \cdot u'(x_k) \cdot \delta_{x_k}$$

si u tiene n ceros, x_k, en $\mathbb{R}$. La primera expresión aparece como sumando en la segunda; y, en general, $\frac{|u|}{u} \cdot u^{(m)}$ figura como sumando en la derivada m-ésima de u según las distribuciones (es el sumando principal).

Desde el punto de vista de la teoría de funciones, la tasa de variación de una función en un salto de dicha función no puede venir expresada por un número. Nuestro convenio del Apartado 2 prescinde de este hecho; pero tiene algunas ventajas: permite aligerar el cálculo de derivadas distribucionales y, provisto del recurso de los valores absolutos, proporciona una manera de expresar simbólicamente comportamientos funcionales distintos a trozos que pueden ser derivados e integrados como una sola expresión.

3. Si una ecuación diferencial es satisfecha por una expresión funcional simbólica donde aparecen valores absolutos, es probable que dicha ecuación contenga también valores absolutos. Veremos después ejemplos donde acontece esto. Sin embargo, hay soluciones con partes valoradas sin que en la ecuación diferencial ordinaria figuren argumentos con barras.

Las dos familias uniparamétricas

$$y = x - (c-x)^2, \qquad y = x - (c - |x|)^2$$

tienen la misma ecuación diferencial:

$$y'^2 - 2y' + 4y = 4x - 1 \tag{4}$$

Para la familia de parábolas ordinarias $y = x - (c-x)^2$, la eliminación de c entre tal ecuación y su derivada conduce a (4). Las curvas de la familia

$$y = x - (c - |x|)^2 \tag{5}$$

son, en cambio, poligonales curvilíneas de dos lados, cada uno de los cuales es una parte de las parábolas de las familias $y = x - (c-x)^2$, $y = x - (c+x)^2$ respectivamente, para cada c. Estas poligonales tienen sus vértices en $(0, -c^2)$. La derivada de (5) es

$$y' = 1 + 2 \cdot \frac{|x|}{x} \cdot (c - |x|)$$

Las derivadas laterales en $x = 0$ son $y'(0^+) = 1 + 2c$, $y'(0^-) = 1 - 2c$. Los vértices de (5) son, pues, puntos angulosos, excepto para $c = 0$.

La eliminación de c entre (5) y su derivada es inmediata, puesto que esta última equivale a

$$c - |x| = \frac{y' - 1}{2 \cdot \frac{|x|}{x}}$$

cuyo cuadrado hace desaparecer las barras en el segundo miembro. Obtenemos así la misma ecuación (4). Por lo tanto, existen dos clases de curvas integrales de (4) —aparte la solución singular $y = x$—: unas de clase 1, y otras con derivada no continua en $x = 0$.

Hay también ecuaciones sin argumentos valorados que tienen como soluciones cierto tipo de escalonadas. Por ejemplo, si u es continua en $\mathbb{R}$, toda escalonada de la forma $y = a \cdot \frac{|u|}{u}$ es evidentemente solución de $y' = y^2 - a^2$; también lo es $y = a$. Sin embargo, no podemos asegurar que si una constante k es solución ordinaria o singular de una ecuación diferencial, lo sea $k \cdot \frac{|u|}{u}$. Por ejemplo, $y = 1$ es solución particular de $y' + y \cdot \cos x = \cos x$; pero no lo es $y = \frac{|u|}{u}$, excepto para los valores de x que hacen $u > 0$.

4. Hemos dicho al principio del apartado anterior que si una ecuación tiene soluciones con argumentos valorados es probable que también los tenga la propia ecuación. En estos casos es preciso saber cómo se integran las expresiones funcionales simbólicas con barras. De un modo intuitivo podemos decir que si a la integral $I = \int u \cdot dx$ la multiplicamos por un factor que valga

+1 cuando es $u > 0$ y -1 si es $u < 0$, tendremos la integral de la función valorada $|u|$; pero este factor es la p-función $\frac{|u|}{u}$. O sea:

$$\int |u| \cdot dx = \frac{|u|}{u} \cdot \int u \cdot dx$$

La ecuación de primer orden, lineal, $x \cdot y' - y = -|x|$ tiene el argumento x valorado. La integral general es

$$y = x \cdot \int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{|x|}{x}\right) \cdot dx + cx = -|x| \cdot \ln(|x|) + cx$$

La eliminación de c entre esta expresión y su derivada

$$y' = -\frac{|x|}{x} \cdot \ln(|x|) - \frac{|x|}{x} + c$$

conduce, efectivamente, a la ecuación dada.

He aquí otro ejemplo: Tratemos de hallar la ecuación diferencial de una familia de contornos de ángulos; concretamente de aquellos cuyos lados pasan por $O = (0,0)$ y $A = (2a, 0)$ respectivamente, y cuyos vértices están en la recta $x = a$. La ordenada h del vértice genérico, V, es, pues, un parámetro. El número a es una constante dada. Obtendremos la expresión funcional simbólica de esta familia y su ecuación diferencial.

La ecuación del contorno de un ángulo con vértice en $x = a$ y ordenada h tiene la forma $y = p \cdot |x - a| + qx + r$. Los coeficientes p, q, r se obtienen sustituyendo en la ecuación, sucesivamente, las coordenadas del vértice $V = (a, h)$ y las de dos puntos cualesquiera, uno de cada lado; por ejemplo, $O = (0,0)$ y $A = (2a, 0)$, obteniéndose $p = -\frac{h}{a}$, $q = 0$, $r = h$. La ecuación de la familia será

$$y = -\frac{h}{a} \cdot |x - a| + h \tag{6}$$

Su derivada es

$$y' = -\frac{h}{a} \cdot \frac{|x - a|}{x - a}$$

Eliminando h entre (6) y la derivada, tenemos :

$$\left(x - a - a \cdot \frac{|x - a|}{x - a}\right) \cdot y' - y = 0 \tag{7}$$

que es la ecuación diferencial de la familia, y contiene la p-función $\frac{|x-a|}{x-a}$. La integración de (7) es inmediata, y conduce a

$$y = c \cdot \left(x - a - a \cdot \frac{|x - a|}{x - a}\right)$$

donde c es constante arbitraria. Para que esta integral general tenga la misma forma que (6) basta hacer $c = -\frac{h}{a} \cdot \frac{|x-a|}{x-a}$. No olvidemos que $\frac{|x-a|}{x-a}$, con el convenio aceptado en el Apartado 2, tiene derivada nula, incluso en $x = a$.

BIBLIOGRAFÍA

1. Fraile, A. : *Ampliación de la Geometría Analítica ordinaria.* Revista Matemática Hispano-Americana, 4^a. serie, t. II. 1942. Madrid.

2. Fraile, A. : *Derivación e integración de funciones de variable real con argumentos en valor absoluto.* Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. X, núm. 3. 1945. Buenos Aires.

3. Tacchella, G. : *Fundamenti di Geometria anallitica a due e a tre dimensioni dei luoghi lineari "composti".* Giornale di Matematiche di Battaglini, 3^a serie, 24. 1933.

El artículo que aparece a continuación "***Resolución de tres problemas propuestos en olimpíadas matemáticas con la ayuda de la función de González Quijano***", que ocupa las páginas 26-34, tiene un problema en la compilación del fichero tex, las fracciones continuas no aparecen correctamente.

En el siguiente **enlace** podrás ver el artículo corregido por los autores.

Resolución de tres problemas propuestos en olimpíadas matemáticas con la ayuda de la función de González Quijano.

Manuel Benito * y J. Javier Escribano †

Abstract

In our book *Sucesiones de Brocot*, we have defined the González Quijano function G from the Brocot's series (also named Stern-Brocot trees). Here, we use that function to solve three problems proposed in three different Mathematical Olympiads.

Introducción

En 1915 el matemático e ingeniero de caminos español Pedro Miguel González Quijano (1870–1958), utilizó las sucesiones de Brocot (también conocidas como árboles de Stern-Brocot [0], [0], [0], [0]) para definir una función real continua estrictamente creciente y no derivable en infinitos puntos [0]. Inspirados en su trabajo, en [0] definimos una función que denominamos función G **de González Quijano** que nos permite enunciar y demostrar teoremas análogos a los ya conocidos sobre fracciones continuas, como los de Euler-Lagrange, Galois, Serret y Geromo [0].

Esta función, entre otras cosas, permite obtener mediante reglas fáciles de recordar, el inverso de un número en $\frac{Z}{(n)}$, las soluciones de las ecuaciones de Pell $x^2 - A \cdot y^2 = \pm 1$, y la fracción de menor denominador que pertenece a un intervalo dado.

En este artículo utilizamos esta función para resolver tres problemas propuestos en sendas olimpíadas matemáticas.

*mbeniy8@palmera.pntic.mec.es
†jesbriba@boj.pntic.mec.es

Conocimientos previos

Se denomina **mediación** de dos fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, de numeradores y denominadores no negativos, a la fracción $\frac{a+c}{b+d}$ comprendida entre ambas.

La aplicación sistemática de esta propiedad, ya utilizada por Arquímedes, permitió al relojero francés Achille Brocot introducir las sucesiones que llevan su nombre.

La sucesión de Brocot de orden 0, denotada por B_0, está formada, por definición, por las fracciones

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{0}.$$

Para obtener la sucesión B_1, de orden 1, escribimos las dos fracciones anteriores y, entre ellas, la fracción $\frac{1}{1}$ obtenida por mediación de ambas:

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{1}; \frac{1}{0}.$$

En general, para $n \geq 1$, B_n se obtiene copiando la sucesión de orden $n-1$ e intercalando, entre cada dos fracciones consecutivas, su mediación:

B_0 :	$\frac{0}{1}$																$\frac{1}{0}$
B_1 :	$\frac{0}{1}$								$\frac{1}{1}$								$\frac{1}{0}$
B_2 :	$\frac{0}{1}$				$\frac{1}{2}$				$\frac{1}{1}$				$\frac{2}{1}$				$\frac{1}{0}$
B_3 :	$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{1}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{2}{1}$		$\frac{3}{1}$		$\frac{1}{0}$
B_4 :	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{1}$	$\frac{4}{1}$	$\frac{1}{0}$

....

A partir de las sucesiones de Brocot definimos la función

$$\begin{array}{rcl} G : [0, +\infty) \bigcup \{\frac{1}{0}\} & \longrightarrow & [0,1] \\ x & \rightsquigarrow & G(x) \end{array}$$

del siguiente modo:

$$
\mathrm{G(x)}=\begin{cases} \displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{w_k(x)}{2^k} & \text{si} \quad x \in [0,+\infty), \\ 1 & \text{si} \quad x = \frac{1}{0}, \end{cases} \qquad \text{donde}
$$

$$
w_0(x) = 0\,,
$$

$$
w_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [\frac{0}{1}, \frac{1}{1})\,, \\ 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{1}{1}, \frac{1}{0})\,, \end{cases}
$$

y si x está comprendido entre dos términos consecutivos $\frac{a}{b}$ y $\frac{a'}{b'}$ de la sucesión B_n, $(n \geq 1)$, entonces

$$
w_{n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in [\frac{a}{b}, \frac{a+a'}{b+b'}), \\ 1 & \text{si} \quad x \in [\frac{a+a'}{b+b'}, \frac{a'}{b'}). \end{cases}
$$

EJEMPLOS:

Para calcular $G\,(25)$ procedemos del siguiente modo:

$$
w_0\left(\frac{2}{5}\right) = 0\,;
$$

$$
\frac{2}{5} \in \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right)\,, \text{ luego } w_1\left(\frac{2}{5}\right) = 0\,;
$$

$$
\frac{2}{5} \in \left[\frac{0}{1}, \frac{1}{2}\right)\,, \text{ luego } w_2\left(\frac{2}{5}\right) = 0\,;
$$

$$
\frac{2}{5} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)\,, \text{ luego } w_3\left(\frac{2}{5}\right) = 1\,;
$$

$$
\frac{2}{5} \in \left[\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right)\,, \text{ luego } w_4\left(\frac{2}{5}\right) = 1\,;
$$

los siguientes w_n son todos 0. Así,

$$
G\left(\frac{2}{5}\right) = 0'0011_{(2} = \frac{3}{16}\,.
$$

Análogamente se obtienen:

$$
G(1) = 0'1_{(2} = \frac{1}{2}\,,
$$

$$
G\left(\frac{5}{3}\right) = 0'1011_{(2} = \frac{11}{16}\,.
$$

Si x es un número racional pq, todos los w_i son nulos a partir de un cierto índice $n+1$, y $G\,(pq)$ puede expresarse del siguiente modo

$$
G\left(\frac{p}{q}\right) = 0'w_1w_2\ldots w_{n\,(2}\,.
$$

Para calcular la cadena $w_1w_2\ldots w_{n\,(2}$ $(w_n = 1)$, se puede utilizar el mismo método que se emplea para hallar el máximo común divisor entre p y q por el algoritmo de las diferencias, escribiendo un 1 cuando al numerador se le resta el denominador y un 0 cuando al denominador se le resta el numerador, como muestra el siguiente algoritmo escrito en *pseudo-código*:

```
mientras a ≠ 0 hacer
  si a < b
    entonces w = 0; b = b − a
  si_no w = 1; a = a − b
fin_mientras
```

Así para calcular $G\,(43)$ empezamos por $A = 0'$.

Como $4 > 3$, restamos 3 de 4 y adjuntamos un 1 a la derecha de A. Pasamos a tener la fracción $\frac{1}{3}$ y $A = 0'1$.

Como $1 < 3$, restamos 1 de 3 y adjuntamos un 0 a la derecha de A. Pasamos a tener la fracción $\frac{1}{2}$ y $A = 0'10$.

Como $1 < 2$, restamos 1 de 2 y adjuntamos un 0 a la derecha de A. Pasamos a tener la fracción $\frac{1}{1}$ y $A = 0'100$.

Como $1 = 1$, adjuntamos un 1 a la derecha de A, con lo que obtenemos $0'1001$, el proceso ha terminado.

4	1	1	1	0
3	3	2	1	1
0′	1	0	0	1

Para calcular $G(\frac{2}{5})$ tenemos

2	2	2	1	0
5	3	1	1	1
0′	0	0	1	1

Si

$$G\,(pq) = 0'1\ldots^{a_1}\ldots 10\ldots^{a_2}\ldots 0\ \ldots\ 1\ldots^{a_n}\ldots 1\,,$$

el desarrollo en fracción continua de pq es $[a_0; a_1 \ldots, a_n]$, ver [0].

Así

$$G\left(\frac{2}{5}\right) = 0'0011_{(2}, \quad \text{luego} \quad \frac{2}{5} = 12 + 12\,,$$

$$G\left(\frac{4}{3}\right) = 0'1001_{(2}, \quad \text{luego} \quad 43 = 1 + 12 + 11\,.$$

Por tanto

$$G^{-1}(0'0011_{(2)}) = 12 + 12 = \frac{2}{5}\,,$$

$$G^{-1}(0'1001_{(2)}) = 1 + 12 + 11 = \frac{4}{3}\,,$$

$$G^{-1}(0'1011_{(2)}) = 1 + 11 + 12 = \frac{5}{3}\,,$$

$$G^{-1}(0'001011_{(2)}) = 0 + 12 + 11 + 11 + 12 = \frac{5}{13}\,.$$

Primer problema

En la *XIV British Mathematical Olympiad* [0] celebrada en 1978 se propuso el siguiente problema:

Probar que no existen fracciones mn, con $0 < m < n \leq 100$, tales que en su desarrollo decimal aparezca el bloque de cifras consecutivas "167", en este orden.

Solución

Dado que

$$0'a_1 \ldots a_k 167 \ldots = \frac{a_1 \ldots a_k + 0'167\ldots}{10^k}$$

bastará probar la proposición para

$$\frac{m}{n} = 0'167\ldots$$

El problema queda reducido a demostrar que en el intervalo $[0'167, 0'168)$ no hay fracciones de denominador $n < 100$.

Para hallar la fracción de menor denominador que pertenece a este intervalo, observamos que $0'167 = 1671000$, y calculamos

$$G\left(\frac{167}{1000}\right) = 0'0000010\ldots^{82}\ldots 011_{(2}$$

$$G\left(\frac{168}{1000}\right) = 0'0000010\ldots^{19}\ldots 01_{(2}$$

De todos los números comprendidos entre

$$0'0000010\ldots^{82}\ldots 011_{(2}$$

y

$$0'0000010\ldots^{19}\ldots 01_{(2}\,,$$

el que tiene un desarrollo con menor número de cifras es

$$0'0000010\ldots^{20}\ldots 01_{(2}$$

$$G^{-1}\left(0'0000010\ldots^{20}\ldots 01_{(2)}\right) = 15 + 11 + 120 + 1 = \frac{22}{131}$$

luego la fracción de menor denominador que tiene por desarrollo decimal $0'167\ldots$ es 22131. Por tanto $n \geq 131 > 100$.

Segundo problema.

En la *XXIV British Mathematical Olympiad* [0], celebrada en 1987 se propuso el problema siguiente:

Hallar un par de enteros r,s tales que $0 < s < 200$ y que

$$\frac{45}{61} > \frac{r}{s} > \frac{59}{80}\,.$$

Probar que dicho par es único.

Solución

La mediación de las fracciones 5980 y 4561 nos da la fracción 104141 que está comprendida entre ambas.

Veamos ahora que es la única con denominador menor que 200.

$$G\left(\frac{59}{80}\right) = 0'011011110001_{(2}$$
$$G\left(\frac{45}{61}\right) = 0'01101111001_{(2}$$

El desarrollo con menor número de cifras comprendido entre ambos es $0'0110111100011_{(2}$ que corresponde a la fracción

$$G^{-1}\left(0'0110111100011_{(2}\right) = \frac{104}{141}$$

La fracción de menor denominador comprendida entre las fracciones

$$\frac{59}{80} \text{ y } \frac{104}{141} \text{ es } \frac{163}{221}$$

y entre las fracciones

$$\frac{104}{141} \text{ y } \frac{45}{61} \text{ es } \frac{149}{202}.$$

En ambos casos el denominador es mayor que 200.

Tercer problema.

En la primera fase de la *XXIV Olimpíada Matemática Española*, celebrada en Febrero de 1993, se propuso el siguiente problema.

Hallar un par de enteros r, s *tal que* $0 < s < 100$ *y* $2945 < rs < 2031$

Solución

La mediación entre 2945 y 2031 es 4976, fracción que está comprendida entre ambas.

Podemos probar, aunque el enunciado no lo pida, que es la única con denominador menor que 100.

$$G\left(\frac{29}{45}\right) = 0'0101111001_{(2}$$
$$G\left(\frac{20}{31}\right) = 0'010111101_{(2}$$

El desarrollo con menor número de cifras comprendido entre ambos es $0'0101111001_{(2}$.

$$G^{-1}(0'01011110011_{(2}) = \frac{49}{76}.$$
$$G^{-1}(0'010111100101_{(2}) = \frac{78}{121}.$$
$$G^{-1}(0'010111100111_{(2}) = \frac{69}{107}.$$

Problema para el lector

Probar que no existen fracciones mn, *con* $0 < m < n \leq 1000$, *tales que en su desarrollo decimal aparezca el bloque de cifras consecutivas "1998", en este orden.*

Referencias

[1] M. Benito, J.J. Escribano. *Sucesiones de Brocot.* Santos Ochoa, Logroño, 1998.

[2] A. Brocot. Calcul des rouages par aproximation, nouvelle méthode. *Revue Chronométrique*, **6**, *(1862), pp. 186–194.*

[3] A. Brocot. *Calcul des rouages par aproximation, nouvelle méthode, par Brocot, horloger.* París, 1862.

[4] A. GARDINER. *The Mathematical Olympiad Handbook.* Oxford University Press, 1997.

[5] P. M. GONZÁLEZ QUIJANO. Sobre algunas funciones continuas con infinitas singularidades en el menor intervalo. *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Valladolid. Tomo III, Sección de Ciencias Matemáticas, pp. 69–117.* Imprenta Fontanet, Madrid, 1916.

[6] R. L. GRAHAM, D. E. KNUTH, O. PATASHNIK. *Concrete Mathematics.* Addison Wesley, 1994.

[7] E. LUCAS. *Théorie des nombres.* París, 1891.

[8] M. A. STERN. Ueber eine zahlentheoretische Funktion. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **55**, *(1860), pp. 193–220.*

Análisis estadístico de datos con Microsoft Excel

Julián Sainz Ruiz

IEE "Santa Catalina" de El Burgo de Osma (Soria)

Abstract

With this article I intend to present the main features that Microsoft Excel as spreadsheet offers for the manipulation of statistics data. Habitual users of spreadsheets already know about their graph possibilities and the facility to built elementary charts to calculate simple statistics parameters such as the medias, variance, standar deviation, coeficients...

The functions for the spreadsheet are tools which help to make decisions, to carry out actions and fulfill operations which bring back values automatically. Microsoft Excel offers a wide range of funtions which allow realizing different kinds of calculus.

Introducción

Para el análisis estadístico de datos Microsoft EXCEL dispone de dos elementos fundamentales:

1. El Asistente para funciones.
2. Herramientas para el análisis.

En el Manual del usuario de Microsoft Excel, cuya referencia bibliográfica incluyo al final, se pueden consultar las densas listas de funciones y herramientas de estos elementos de que dispone Microsoft Excel .

El *Asistente para funciones* simplifica la introducción de fórmulas en la barra de fórmulas. Para iniciar el Asistente para funciones, hay que eligir el comando Función del menú Insertar o utilice el botón f_x de la barra de herramientas. Las funciones están agrupadas por categorías, tales como "Financieras", "Matemáticas y trigonométricas" o "Estadísticas". Cuando se selecciona una función del cuadro de lista, la definición de la función y de sus argumentos aparece automáticamente, así como la posición correcta de los puntos y comas (;) y paréntesis [()]. Para poder utilizar algunas funciones, se necesita instalar primero la macro automática correspondiente.

Las *Herramientas para el análisis* son un juego de funciones especiales para el análisis de datos. Entre dichas funciones están las de análisis estadísticos, que pueden ser utilizadas en varios tipos de datos. Para utilizar estas funciones es necesario proporcionar los datos y parámetros requeridos para cada análisis de manera adecuada. El programa hace entonces los cálculos necesarios y muestra los resultados obtenidos.

Antes de utilizar una de estas herramientas, deberá organizar los datos que desee analizar en columnas o en filas dentro de la hoja de cálculo. Es importante observar que Microsoft Excel denomina **rango de entrada** a dicha disposición de los datos. También podrá incluir títulos de texto en la primera celda de una fila o de una columna para identificar las variables.

Cuando utilice herramientas para analizar datos de un "rango de entrada", Microsoft EXCEL creará una tabla de resultados. El contenido de la tabla de resultados depende de la herramienta para análisis utilizada. Si ha incluido títulos en el rango de entrada, Microsoft EXCEL los utilizará en la tabla de resultados; de lo contrario Microsoft EXCEL creará automáticamente títulos para los resultados que figuran en la tabla de resultados.

Para utilizar una de estas herramientas para el análisis hay que seguir los siguientes pasos:

1. Seleccione Análisis de datos en el menú Herramientas.

Si el comando Análisis de datos no aparece en el menú Herramientas, ejecute el programa Instalar para instalar las Herramientas para análisis. Lo que haremos ahora será instalar un macro automático, herramientas para el análisis, que incluye Microsoft EXCEL.

2. En el cuadro Funciones para análisis, seleccione la función que desea utilizar.
3. Elija el botón "Aceptar".
4. Escriba el rango de entrada, de salida y demás opciones deseadas.

Podrá insertar rangos de celdas en los cuadros "Rango de entrada" y "Rango de salida", escribiendo referencias de celda en el cuadro, o seleccionando el contenido de cada cuadro, y luego el rango de celdas de la hoja de cálculo.

También podrá introducir referencias en otras hojas de cálculo en los cuadros "Rango de entrada" y "Rango de salida".

5. Elija el botón "Aceptar".

Los resultados del análisis aparecerán en el rango designado.

En los casos prácticos que se proponen a continuación, se utilizan algunas de las herramientas descritas anteriormente.

1. Estadística descriptiva

Esta herramienta para el análisis de datos genera un informe de estadísticas de una sola variable para datos del rango de entrada. Este procedimiento proporciona información sobre la tendencia central y dispersión de los datos. Las estadísticas de esta tabla sirven de base para realizar análisis más detallados y pueden indicar qué pruebas realizar más adelante.

Ejemplo:

Un profesor es calificado de 1 a 5 obteniéndose los siguientes resultados:

2,5,4,4,1,2,2,3,4,4,5,3,3,1,2,5,4,4,3,3,4,2,3,3,2,3,4,3,4,4

Empleando la función Estadística Descriptiva del macro Análisis de datos obtenemos los siguientes resultados (Tabla 1):

Tabla 1

Media	3,2
Error típico	0,2
Mediana	3
Moda	4
Desviación estándar	1,09544512
Varianza de la muestra	1,2
Curtosis	–0,54187192
Coeficiente de asimetría	–0,25632336
Rango	4
Mínimo	1
Máximo	5
Suma	96
Cuenta	30
Nivel de confianza (95.000%)	0,39199222

2. Covarianza y coeficiente de correlación

– La Covarianza es una medida de la relación entre los valores que toman dos variables X e Y. Los datos de tales valores hay que introducirlos en la hoja de cáculo según un "rango de entrada" (ver tabla 2). La Covarianza esta vinculada a la unidad de medida correspondiente a X e Y. Dos pares de rangos de datos relacionados en forma similar producirán valores de Covarianza diferentes si las magnitudes de los puntos de datos varía. La función Covarianza se utiliza para determinar si dos rangos de datos varían conjuntamente, es decir, si los valores altos de un conjunto están asociados con los valores altos del otro (Covarianza positiva), si los valores bajos de un conjunto están asociados con los valores altos del otro (Covarianza negativa) o si los valores de ambos conjuntos no están relacionados de manera alguna (Covarianza tiende a cero).

– El Coeficiente de Correlación permite medir la relación entre dos conjuntos de datos que han sido calculados en escala para ser independientes de la unidad de medida.

La función Coeficiente de correlación se utiliza para determinar si dos conjuntos de datos varían conjuntamente, es decir, si los valores altos de un conjunto están asociados con los valores altos del otro (correlación positiva), si los valores bajos de un conjunto están asociados con los valores bajos del otro (correlación negativa) o si los valores de ambos conjuntos no están relacionados (correlación tiende a cero).

Ejemplo:

La tabla 2 se muestran los datos de tres muestras de las que utilizando las herramientas de Microsoft EXCEL vamos a calcular las covarianzas y correlaciones respectivas de una forma rápida.

Tabla 2

Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3
1,2	4,2	120
2,5	8,7	40
3,6	11,4	40
2,8	9,1	130
4,8	4,2	120
1,8	6,6	20
2,2	7,9	40
5,1	12,2	40

Covarianza

	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3
Muestra 1	1,7025		
Muestra 2	1,50625	7,717334375	
Muestra 3	0,75	−61,203125	1835,9375

Coeficiente de correlación

	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3
Muestra 1	1		
Muestra 2	0,41554645	1	
Muestra 3	0,01341494	−0,51417473	1

3. Generación de números aleatorios

Permite obtener mustras aleatorias independientes extraídas de una población entrede varias distribuciones posibles. Las variables aleatorias pueden ser aplicadas en varios tipos de simulaciones estadísticas.

Vamos a utilizar esta función que dispone Microsoft EXCEL para obtener mediante un proceso de **simulación estadística** muestras aleatorias de determinadas poblaciones de manera muy rápida. Mediante este muestreo artificial vamos a comprobar:

– Que la media muestral y la desviación típica corregida son buenos estimadores de la media y desviación típica poblacional. Sin embargo, la desviación típica muestral no estima bien a la poblacional.

– Las propiedades de la media muestral.

A continuación, con la ayuda de la función GENERACIÓN DE NÚMEROS ALEATORIOS, construimos siete muestras de tamaño 5 de una población que sigue una distribución normal de media 18.1 y desviación típica 0.4. Para cada muestra calculamos su media, desviación típica y desviación típica corregida. (Tabla 3)

Tabla 3

Muestra	1	2	3	4	5	6	7
	17,1672295	18,8532362	17,6147073	17,8628474	19,3898818	17,2469449	17,3774865
	17,8156865	18,1946125	18,5550002	18,0178099	17,8757564	17,4872407	18,3255938
	18,2543249	18,2539875	18,1825548	18,2368981	18,6365764	18,0120005	18,2599569
	18,3322331	18,5330395	17,8296882	18,0390793	17,8808136	18,1457821	17,725383
	18,1588111	18,3091256	18,0939423	17,9766266	17,6959988	18,3247675	18,3609986
Media	17,945657	18,4288003	18,0551786	18,0266523	18,2958054	17,8433471	18,0099348
σ_n	0,42731565	0,2411378	0,32012806	0,12146646	0,63585459	0,40845658	0,39146208
σ_{n-1}	0,47775342	0,26960026	0,35791405	0,13580363	0,71090705	0,45666834	0,43766791

Se observa fácilmente que la media muestral es un buen estimador de la media poblacional. Se ve que la desviación típica muestral en la mayor parte de los casos subestima a la desviación típica de la población y que es mejor estimador de ésta la desviación típica corregida. Es conveniente repetir la simulación varias veces para comprobar que los resultados son ciertos. Incluso es aconsejable hacerlo tomando muchas más muestras y estas con un tamaño mayor. Esto, con ayuda de la hoja de cálculo se hace de una forma rápida y visual.

4. Análisis de varianza de un factor

Permite realizar análisis de varianzas sencillos, que somete a prueba la hipótesis según la cual las medias de varias muestras son iguales. Generalmente, el análisis de varianza, es un procedimiento estadístico que se utiliza para determinar si las medias de dos o más muestras fueron extraídas de poblaciones con la misma mediaAlfa representa el nivel de significación con el cual desea evaluar los valores críticos de la estadística F. El valor alfa predeterminado es 0,05. Este valor crítico aperecerá en la tabla de resultados.

La función Análisis de la varianza de un factor realiza un análisis sencillo, que somete a prueba la hipótesis según la cual las medias de varias muestras son iguales.

Ejemplo:
En una determinada zona rural los labradores tienen a su disposición la compra de cuatro tipos de abonos producidos en cuatro fábricas distintas. En las etiquetas de los sacos, cada fábrica asegura que su abono es completamente superior a los otros tres, en sus efectos fertilizantes.

Se han tomado cuatro fincas de la misma calidad de tierra y sembradas con el mismo tipo de arboles y se les ha administrado a cada una un tipo de abono. Al final de la cosecha se han tomado muestra de árboles en cada una de ellas y se ha pesado la cantidad de fruto que dan. Obteniéndose los siguientes datos (tabla 4):

Tabla 4

		Abonos		
	1	2	3	4
Peso en kilos	80	75	83	100
	72	52	79	41
	40	43	68	37
	59	90	92	60
		31		53
				72

¿Mienten todas las fábricas? ¿Bajo qué supuestos?

Solución:
Seleccionando Análisis de varianza de un factor y dando el rango de entrada adecuado y tomando alfa 0,05 la hoja de cálculo nos muestra el siguiente resultado:

RESUMEN

Grupos	Cuenta	Suma	Promedio	Varianza
Columna 1	4	251	62,75	304,916667
Columna 2	5	291	58,2	575,7
Columna 3	4	322	80,5	99
Columna	6	363	60,5	536,3

ANÁLISIS DE VARIANZA

Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	Probabilidad	Valor crítico para F
Entre grupos	1330,58158	3	443,527193	1,07373373	0,38991447	3,28738281
Dentro de los grupos	6196,05	15	413,07			
Total	7526,63158	18				

El contraste de hipótesis lo planteamos del modo siguiente:

H_0 = "Los pesos medios obtenidos por la aplicación de los distintos abonos son iguales".

H_1 = "Los pesos medios obtenidos por la aplicación de los distintos abonos no son iguales".

El valor F de nuestro problema es $F = 1{,}07373373$.

Si vamos a la tabla de la F de Snedecor, $F_{(0,05;3,15)} = 3{,}28738281$.

Por lo tanto $F \leq F_{(0,05;3,15)}$, por lo que se acepta la hipótesis H_0, es decir no existe diferencia significativa entre los abonos, luego los fabricantes mienten.

5. Análisis de varianza de dos factores con una sola muestra por grupo

Permite realizar un análisis de dos factores con una sola muestra por grupo.

Ejemplo:

Se tienen cuatro razas de gatos: Se toman tres muestras elegidas al azar de forma que en cada una de ellas hay un gato de cada raza. Se dispone de tres tipos de vitaminas distintas y se administra una de ellas solamente a cada muestra. Elegimos como variable de respuesta el peso ganado por cada uno de los gatos, cuya información se recoge en la tabla:

Tabla 5

Razas	Tratamientos		
	Vitamina A	**Vitamina B**	**Vitamina C**
1	80	70	82
2	60	32	35
3	90	82	85
4	95	89	78

Se quiere saber:

1. Si la ganancia media de los pesos es equivalente para las tres vitaminas.
2. Si el peso medio ganado es significativamente distinto de una raza a otra.

Para resolver el problema utilizamos la Herramienta de Análisis de varianza de dos factores con una sola muestra por grupo que suministra Microsoft EXCEL obteniendo los resultados siguientes:

Análisis de varianza de dos factores con una sola muestra por grupo

Resumen	Cuenta	Suma	Promedio	Varianza
Fila 1	3	232	77,3333333	41,3333333
Fila 2	3	127	42,3333333	236,333333
Fila 3	3	257	85,6666667	16,3333333
Fila 4	3	262	87,3333333	74,3333333
Columna 1	4	325	81,25	239,583333
Columna 2	4	273	68,25	645,583333
Columna 3	4	280	70	552,666667

ANÁLISIS DE VARIANZA

Origen de las variaciones	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Promedio de los cuadrados	F	Probabilidad	Valor crítico para F
Filas	3975	3	1235	**23,4859675**	0,00102553	**4,75705519**
Columnas	398,166667	2	199,083333	**3,52880355**	0,09702038	**5,14324938**
Error	338,5	6	56,4166667			
Total	4711,66667	11				

Nuestro doble contraste de hipótesis será:

1. H_0 = "Las tres vitaminas proporcionan una ganancia en peso medio equivalente".
   H_1= "Las ganancias en peso medio proporcionadas por las distintas vitaminas no son iguales".

$$\text{Como, } 3{,}52880355 < 5{,}14324938,\ F < F_{(\alpha=0.05;n1=2,n2=6)}$$

por tanto se acepta la hipótesis nula de que no hay diferencia de ganancia de pesos debida a las vitaminas.

2. H'_0 =" El peso medio ganado es independiente de las razas".
   H'_1 = " El peso medio ganado varia de unas razas a otras, es decir, depende de ellas".

$$\text{Como, } 23{,}4859675 > 4{,}75705519,\ F > F_{(\alpha;n1,n2)}$$

por lo tanto rechazamos la hipótesis nula y se acepta que el peso medio varia de unas razas a otras.

Conclusiones

En la enseñanza de la Estadística ha existido siempre un desfase entre la compresión de los conceptos y los medios técnicos para poder aplicarlos. Es necesario la renovación no sólo de los contenidos, sino también de metodología en la enseñanza de esta materia. El ordenador liberará a los alumnos de la parte mecánica de los cálculos que implica el tratamiento estadístico de cantidades de datos, lo que permitirá una mejor adquisición de los conceptos relacionados con la estadística.

La hoja de cálculo de Microsoft ofrece multitud de herramientas de facil manejo para poder trabajar de forma sencilla muchos de los conceptos de estadística. La utización de éstas no supone ningún esfuezo de aprendizaje y los resultados obtenidos tienen un gran potencial de aplicación.

Referencias bibliográficas

[1] MURRAY R. SPIEGEL: *Estadística*, 2ª Edición, Madrid (España), McGraw-Hill, 1991.
[2] V. QUESADA, A. ISIDORO y L. A. LÓPEZ: *Curso y Ejercicios de Estadística*, 1ª Edición, Madrid (España). Ed. Alhambra Universidad, 1994ç
[3] MICROSOFT: *Manual del usuario, Microsoft Excel*, 1ª Edición, (EE.UU.), Microsoft Corporation, 1994.

SOBRE UN PROBLEMA OLIMPICO DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES ENTEROS

Juan Carlos Cortés López
Departamento de Matemáticas
I.E.S. Bonifacio Sotos
Casas Ibáñez (ALBACETE)

Abstract

Once we have given a solution of an olympic problem, we provide another solution from which we may generalize the result. We rely on the reasoning of the suggested solution to prove an interesting theorem in a different way.

En la primera fase de la Olimpiada Matemática Española de 1998 se propuso el siguiente problema (ver [1, p.85]):

Un polinomio $p(x)$ tiene coeficientes enteros y para un cierto entero a se verifica que

$$p(a) = p(a+1) = p(a+2) = 1$$

¿Existe algún entero k tal que $p(k) = 8$?

Recientemente en [2, p.89] se ofreció la siguiente respuesta al problema:

No necesariamente. Basta considerar el polinomio $p(x) = -x^4+x^2+1$ que satisface las condiciones del enunciado para $a = -1$; $p(-1) = p(0) = p(1) = 1$ y sin embargo no existe k entero tal que $p(k) = 8$, ya que, como es sencillo comprobar realizando un estudio de la función se tiene

$$\lim_{x\to-\infty} p(x) = \lim_{x\to\infty} p(x) = -\infty \quad ; \quad p(x) \leq \frac{5}{4}$$

Sin embargo, veamos que esta respuesta es parcial y es posible afirmar que **no existe nunca** un polinomio verificando las condiciones exigidas. En efecto, a partir del polinomio $p(x)$ del enunciado, definamos el polinomio asociado $P(x)$ del mismo grado y coeficiente director que $p(x)$

$$P(x) = p(x) - 1$$

Como $p(a) = p(a+1) = p(a+2) = 1$, entonces $\{a, a+1, a+2\}$ son raíces de $P(x)$

$$P(a) = p(a) - 1 = 1 - 1 = 0$$

(análogamente se comprueba que $P(a+1) = P(a+2) = 0$) luego $P(x)$ puede escribirse como

$$P(x) = (x-a)(x-a-1)(x-a-2)q(x) \qquad (1)$$

donde $q(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros, cuyo coeficiente director es el mismo que el de $p(x)$ (y $P(x)$) y cuyo grado es tres unidades inferior al de $p(x)$ (y $P(x)$). Entonces como $P(x) = p(x) - 1$ se tiene de (1)

$$p(x) - 1 = (x-a)(x-a-1)(x-a-2)q(x) \qquad (2)$$

Si existiese k entero de modo que $p(k) = 8$, entonces desde (2) se tendría

$$7 = (k-a)(k-a-1)(k-a-2)q(k)$$

lo cual es imposibe ya que 7 es primo y lo hemos descompuesto como producto de al menos tres factores enteros distintos, $\{k-a, k-a-1, k-a-2\}$ (observar que puede ocurrir que $q(k) = 1$ ó $q(k) = 7$).

Resulta ahora interesante observar que la hipótesis de consecutividad de $\{a, a+1, a+2\}$ no se ha utilizado y por tanto el resultado puede generalizarse para un polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros cumpliendo que

$p(a) = p(b) = p(c) = 1$, siendo a, b, c enteros distintos.

Nos gustaría que el lector dedicase un momento de reflexión a la interpretación gráfica del resultado, la cual nos parece muy interesante y nada intuitiva a priori.

Recordemos un problema análogo al estudiado hasta ahora y que apareció en la Competición de Grado de Pekín en el año 1963 (ver [3, p.15])

Un polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros toma el valor 2 para cuatros enteros distintos. Demostrar que $p(x)$ nunca toma los valores $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ para ningún valor entero x .

Usando al misma técnica anterior el problema puede resolverse sin dificultad, pero es interesante observar que pueden relajarse las hipótesis y basta con suponer que $p(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros que toma el valor 2 en tan sólo tres enteros distintos, en lugar de en cuatro enteros distintos.

Así pues, y resumiendo podemos generalizar las condiciones anteriores y enunciar el siguiente teorema cuya demostración es ahora inmediata

Teorema 1 *Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes enteros de modo que para al menos tres enteros distintos a, b, c toma el mismo valor entero α, esto es, $p(a) = p(b) = p(c) = \alpha$. Entonces no existe ningún entero k tal que $p(k) = \beta$, con β entero y de modo que $|\beta - \alpha|$ sea un número primo.*

Para terminar observemos que esta misma técnica podemos aplicarla para demostrar, de un modo distinto al que aparece en [4, p.320], el siguiente resultado

Teorema 2 *Si cualquier polinomio con coeficientes enteros*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

toma valores impares para $x = 0$ y para $x = 1$, entonces la ecuación $p(x) = 0$ no tiene raíces enteras.

Demostración.

Supongamos por reducción al absurdo que existe α entero tal que $p(\alpha) = 0$, esto es,

$$a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

$$a_0 = \alpha\left[-a_n\alpha^{n-1} - a_{n-1}\alpha^{n-2} - \ldots - a_1\right]$$

como todos los factores de la anterior igualdad son enteros, se deduce que α divide a a_0, y como por hipótesis $a_0 = p(0)$ es impar se tiene que α debe ser impar.

Consideremos ahora el polinomio auxiliar $P(x) = p(x) - [a_0 + a_1 + \ldots + a_n]$ y observemos que $x = 1$ es una raíz del mismo, pues

$$\begin{aligned} P(1) &= p(1) - [a_0 + a_1 + \ldots + a_n] \\ &= [a_0 + a_1 + \ldots + a_n] - [a_0 + a_1 + \ldots + a_n] = 0 \end{aligned}$$

luego $P(x) = (x-1)q(x)$ siendo $q(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, de grado $n-1$ y cuyo coeficiente director es a_n.

Así pues,

$$p(x) - [a_0 + a_1 + \ldots + a_n] = (x-1)q(x)$$

$$p(x) = [a_0 + \ldots + a_n] + (x-1)q(x) \qquad (3)$$

y como por hipótesis de reducción al absurdo $p(\alpha) = 0$, sustituyendo $x = \alpha$ en(3)

$$0 = p(\alpha) = [a_0 + \ldots + a_n] + (\alpha - 1)q(\alpha) \qquad (4)$$

lo cual es imposible, pues

$$a_0 + \ldots + a_n = p(0) \quad \textit{es impar por hipotesis}$$

$$\alpha - 1 \quad \textit{es par, pues } \alpha \textit{ es impar}$$

$$q(\alpha) \quad \textit{es entero}$$

por tanto el miembro derecho de (4) es la suma de un número impar y de un número par, por lo que nunca puede ser nulo.

En consecuencia la hipótesis de reducción al absurdo es falsa y el teorema queda probado.

Bibliografía

[1] Boletín No. 48 (febrero de 1998) de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas.

[2] Boletín No. 49 (junio de 1998) de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas.

[3] M. Menduiña Sánchez, Problemas de Olimpiadas Matemáticas y Concursos Internacionales (Algebra), CPR de Albacete, 1988.

[4] D.O. Shklarsky, N.N. Chentzov y I.M. Yaglom, The URSS Olympiad Problem Book, primera edición, Dover, New York, 1993.

Unas caracterizaciones lineales de los triángulos

Juan Bosco Romero Márquez

IB Isabel de Castilla (Ávila)

Abstract

In this article we give a different linear characterization of the triangles by mean of the altitudes.

1. Introducción

Presentamos, en este trabajo la clasificacion de los triángulos planos ABC según sus lados: escalenos (los tres lados distintos) e isósceles (dos de sus lados son iguales). También, damos la clasificación de los triángulos según los angulos: Si $A > 90$, obtusángulos; $A = 90$, rectángulos, y si todos los angulos son menores de 90, acutángulos.

Damos por sabidos los conceptos y las propiedades elementales más importantes sobre las medianas, alturas, bisectrices y mediatrices, junto con sus puntos notables asociados. Ver [1], [2], [3], [6] y [7], entre otros.

2. Resultados

En esta sección comenzamos con la demostración de nuestro resultado principal.

Teorema

Sea ABC un triángulo de lados $a \geq b \geq c$, y ángulos $A \geq B \geq C$. Sea H el punto obtenido como la proyección ortogonal de A sobre el lado BC; E el punto obtenido como la proyección ortogonal de H sobre el lado AC; F el punto obtenido como la proyección ortogonal de H sobre AB. Definimos los puntos H_1 y H_2 como las proyecciones ortogonales de los puntos E y F sobre el lado BC, respectivamente. Entonces se verifica:

$$A \lesseqgtr 90 \text{ si y solo si } h \gtreqless h_1 + h_2,$$

donde $h = AH$, $h_1 = EH_1$ y $h_2 = FH_2$.

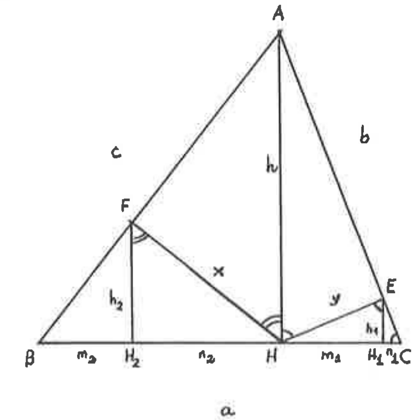


Figura 1

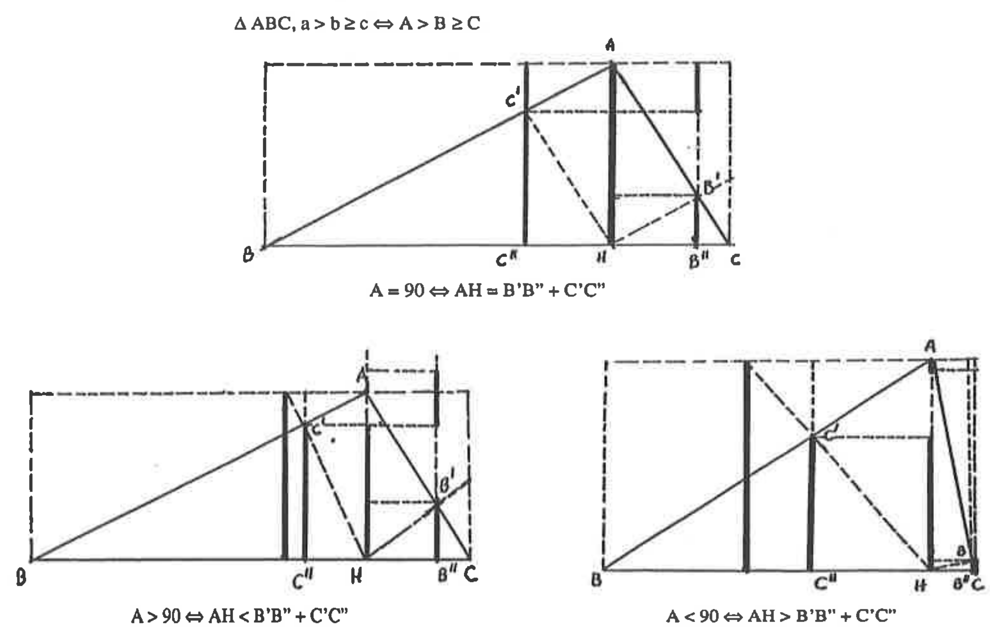


Figura 2

Demostración

Consideremos las figuras 1 y 2 con las notaciones allí indicadas.

De los triángulos EHH_1 y AEH obtenemos, respectivamente, las siguientes expresiones:

$$h_1 = y \text{ Cos } C, \qquad y = h \text{ Cos } C.$$

De ambas, llegamos a $h_1 = h \text{ Cos}^2 C$, donde y = HE.

De forma similar a partir de los triángulos FH_2H y AFH, llegamos, respectivamente, a las relaciones:

$$h_2 = x \text{ Cos } B, \; x = h \text{ Cos } B.$$

Y, por tanto, de ambas $h_2 = h \text{ Cos}^2 B$, donde x = HF.

Calculemos ahora $d_h = h - (h_1 + h_2)$, que definimos como la diferencia entre las tres alturas h, h_1 y h_2. Para ello, hay que tener en cuenta las expresiones obtenidas anteriormente, las fórmulas del coseno del ángulo doble, de la suma de cosenos en forma de producto, así como la relación que existe entre los cosenos de ángulos suplementarios.

$$d_h = h - (h_1 + h_2) = h - h_1 - h_2 = h - h \text{ Cos}^2 C - h \text{ Cos}^2 B =$$

$$= h(1 - \text{Cos}^2 C - \text{Cos}^2 B) = h\left(1 - \frac{1 + \text{Cos } 2C}{2} - \frac{1 + \text{Cos } 2B}{2}\right) =$$

$$= -h\frac{\text{Cos } 2B + \text{Cos } 2C}{2} = -\frac{h}{2} 2 \text{ Cos}\frac{2C + 2B}{2} \text{Cos}\frac{2C - 2B}{2} =$$

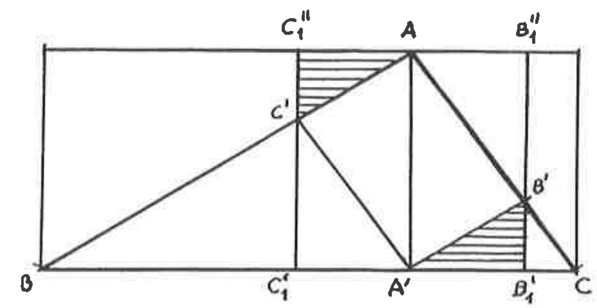
$$= -h \text{ Cos } (C - B) \text{ Cos } (180 - A) = -h \text{ Cos } (C - B) (-\text{Cos } A) =$$

$$= h \text{ Cos } (C - B) \text{ Cos } A \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow \text{Cos } A > 0 \Leftrightarrow A < 90. \\ = 0 \Leftrightarrow \text{Cos } A = 0 \Leftrightarrow A = 90. \\ > 0 \Leftrightarrow \text{Cos } A < 0 \Leftrightarrow A > 90. \end{cases}$$

que es lo que queríamos demostrar.

Observaciones

Este resultado, referido a los triángulos rectángulos, puede interpretarse como una caracterización lineal de estos triángulos, siendo por lo tanto un resultado equivalente al Teorema de Pitágoras u otra caracterización similar. Más aún, si suponemos que ABC es un triángulo rectángulo en A, entonces la igualdad $h = h_1 + h_2$ se obtiene de forma inmediata de la figura 3, por congruencia de triángulos y simetría en la construcción realizada.



$\hat{A} = 90 \Leftrightarrow AA' = B'B'_1 + B'B''_1 = B'B'_1 + C'C'_1$

Figura 3

Recientemente, en la revista "Crux Mathematicorum" este resultado ha sido publicado en forma de problema número 2346, Vol. 24, N.º 4, p. 236, May, 1998.

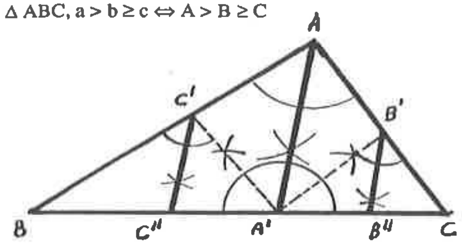
Para finalizar esta sección y, a título de investigación, proponemos la discusión del siguiente enunciado, que como ha comprobado mi amigo y colega el Prof. Ross Honsberger, de la Universidad de Waterloo, de Canadá, con el ordenador es, en general falso. De todas formas se pueden encontrar la clase de triángulos para los cuales el enunciado sí sea cierto.

Problema 1

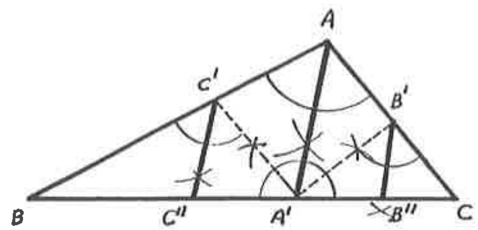
Sea ABC un triángulo y A' el punto donde corta la bisectriz del ángulo A al lado BC. Trazamos a su vez las bisectrices de los ángulos AA'C y AA'B. Estas bisectrices cortan a los lados AC y AB, en los puntos B' y C', respectivamente. Sean B_1 y C_1 los puntos donde las bisectrices de los ángulos B' y C' de los triángulos B'A'C y C'A'B cortan al lado BC, respectivamente. Véase la figura 4. Si denotamos por w = AA', $w_1 = B'B_1$ y $w_2 = C'C_1$, probar que

$$A \gtreqless \quad \text{si y sólo si} \quad w \lesseqgtr \quad w_1 + w_2.$$

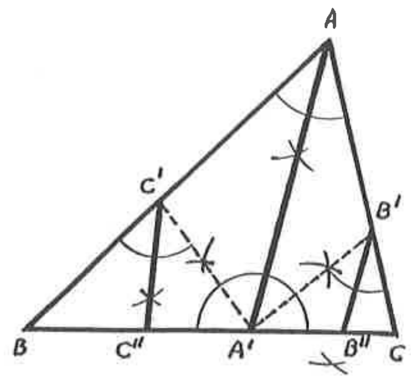
$\Delta ABC,\ a > b \geq c \Leftrightarrow A > B \geq C$



$A = 90 \Leftrightarrow AA' = B'B'' + C'C''$?

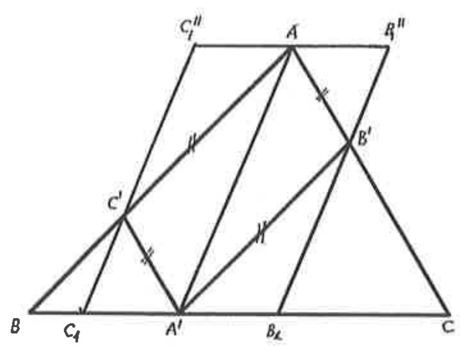


$A > 90 \Leftrightarrow AA' < B'B'' + C'C''$?



$A < 90 \Leftrightarrow AA' > B'B'' + C'C''$?

Figura 4



$A'B' \parallel AB,\ A'C' \parallel AC \Rightarrow A'C' = AB',\ AC' = A'B',$
$\Delta A'C'B \sim \Delta A'B'C \sim \Delta ABC,\ \Delta A'C'C_1 \sim \Delta B'AB''_1,$
$\Delta A'B_1B' \sim \Delta AC'C''_1;$
$A'C_1 = A'B_1,$
$AA' = B'B_1 + C'C_1$

Figura 5

El siguiente problema es más sencillo de resolver tomando como fuente de trabajo la figura 5.

Problema 2

Sea ABC un triángulo. Consideremos la ceviana arbitraria AA', donde A' es un punto que pertenece al lado BC. Construimos los puntos C', B', C_1, B_1 pertenecientes a los lados AB, AC, BC y BC, respectivamente, y tales que $A'C' \parallel AC$, $A'B' \parallel AB$, $C'C_1 \parallel AA'$, y $B'B_1 \parallel AA'$. Probar que:

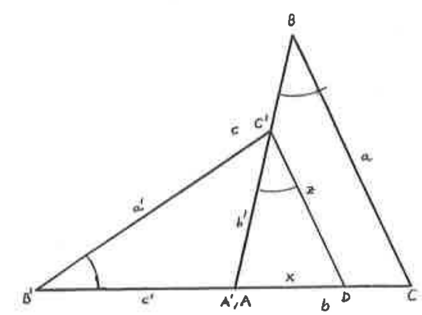
a) Si $t = BA'/BC$, entonces $BA'/BC = BC'/BA = AB'/AC$.
b) $AA' = B'B_1 + C'C_1$.

Por ultimo, vamos a resolver el siguiente problema. Ver figura 6.

Problema 3

Dados los triángulos ABC y A'B'C' tales que los ángulos B y B' son iguales, y que la suma de los ángulos A y A' es igual a 180. Demostrar que entre los lados de los dos triángulos se verifica la siguiente relación:

$$a\,a' = b\,b' + c\,c'.$$



$AB = c,\ AC = b,\ BC = a;\ A'B' = c',\ A'C' = b',\ B'C' = a'$

$\Delta ABC \sim \Delta AC'D: \frac{a}{z} = \frac{c}{b'} = \frac{b}{x},\ cx = bb'$

$\Delta B'C'D \sim \Delta ABC: \frac{a'}{c} = \frac{z}{b} = \frac{c'+x}{a}$

$\frac{a'}{c} = \frac{c'+x}{a},\ aa' = c(c'+x) = cc'+cx = bb'+cc'$

Figura 6

En efecto, disponemos los dos triángulos como se indica en la figura 6, y trazamos el segmento C'D paralelo al lado BC.

Ahora denotamos los lados de todos los triángulos obtenidos como sigue:

$$c = AB,\ AC = b,\ BC = a;\ A'B' = c',\ A'C' = b',\ B'C' = a';\ x = AD,\ z = C'D.$$

De la semejanza entre los pares de triángulos siguientes, como es inmediato de ver, obtenemos las siguientes proporciones:

$$\Delta\, ABC \approx \Delta\, AC'D \;:\; \frac{a}{z} = \frac{c}{b'} = \frac{b}{x}, \quad cx = bb' \quad (1);$$

$$\Delta\, B'C'D \approx \Delta\, ABC \;:\; \frac{a'}{c} = \frac{z}{b} = \frac{c'+x}{a} \quad (2).$$

Por (1) y (2), deducimos:

1) $cz = ab' = a'b$,

2) $\dfrac{a'}{c} = \dfrac{c'+x}{a}$.

De esta última relación y de (1), obtenemos:

$$aa' = c(c' + x) = cc' + cx = bb' + cc'.$$

Aplicación

Utilizar este resultado para aplicarlo en la búsqueda de las relaciones métricas entre las bisectrices y los lados de un triángulo.

3. Conclusiones

Estos problemas que hemos expuesto aquí han sido experimentados con construcciones geométricas y mediciones con los alumnos de la ESO, tanto de la asignatura de Matemáticas como en la de Taller.

La parte de la demostración del teorema principal la hemos realizado dentro del contexto de la trigonometría con los alumnos de 1.º de Bachillerato LOGSE, con éxito notable.

Como valores metodológicos y didácticos de este trabajo queremos resaltar, en ambos casos, para los alumnos los siguientes:

– Hacerles ver que dentro de la geometría elemental del triángulo podemos intuir, crear, investigar, resolver y analizar resultados elementales, que son bellos y sorprendentes.

– Iniciarles a la apasionante y emocionante aventura de la investigación en las matemáticas, intentando que los alumnos imiten en estos nobles y difíciles menesteres al profesor que le sirve de pauta, y de guía y de animador.

En definitiva, el difícil y noble arte de enseñar las matemáticas en cualquier nivel educativo consiste, sobre todo, y predicando con el ejemplo, en inculcar a los alumnos, la intuición para la creación de un problema o de una conjetura, así como los métodos y las técnicas para poder dilucidar si tiene o no tiene solución. También enseñarles a probar o refutar una conjetura. Cuando todo esto lo conseguimos, después de muchas horas de trabajo y esfuerzo, nuestro modesto premio es la felicidad de saber vencer retos y, tal vez, la pequeña satisfacción de haber aportado algun resultado nuevo. Que no es poco.

Bibliografía

[1] P. Puig Adam: *Geometría Métrica,* Vols.1 y 2, Madrid, 1976.
[2] G. Polya: *Matemáticas y razonamiento plausible,* Tecnos, Madrid, 1966.
[3] E. Roanes: Introducción a la Geometría, Anaya, Madrid, 1980.
[4] B. Senechal: *Géométrie classique et mathématiques modernes,* Hermann, Paris, 1979.
[5] J. B. Romero Márquez: *Problema n. 599,* propuesto en CMJ, Vol. 28, N.º 2, March 1997, págs. 145-6.
[6] I. y R. Sortais: *La géométrie du triangle,* Hermann, Paris, 1987.
[7] T. Lalesco: *La géométrie du triangle,* J. Gabay, Paris, 1989.
[8] Yvonne y René de Sortais: *Géométrie de l'espace et du plan,* Hermann, Paris, 1995.
[9] John Pottage: *Geometrical Investigations, Illustrating the Art of Discovery in the Mathematical Field,* Addison-Wesley Publishing Company, Canada, 1983.
[10] J. B. Romero Márquez: Problem 2346, *Crux Mathematicorum,* Vol. 24, N.º 4, May, 1998, pág. 236, Canadá.
[11] Ross Honsberger: *Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry,* MAA, Washington, 1995.
[12] M. Pasch y M. Dehn: *Vorlesungen über neue Geometrie,* Springer Verlag, Berlin, 1976.
[13] Editors J. King and D. Schattschneider: *Geometry Turned on Dynamic software in learning, teaching, and research,* MAA Notes 41, Washington, 1997.
[14] H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer: *Geometry Revisited,* MAA, Washington, 1967.

Un resultado curioso de geometría elemental

Joaquín Hernández Gómez

IES San Juan Bautista (Madrid)
Profesor asociado Facultad de Matemáticas UCM

Abstract

This paper proves that in a regular polygon $A_1 A_2 \ldots A_n$ *of n sides, inscribed in a circle of radius one unit, the product of the line segments joining* A_1 *to each of other vertices equals* n.

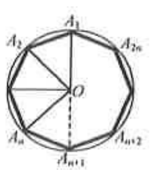
Buscando este verano problemas para concursos para nuestros estudiantes de Secundaria, encontré propuesto en [1] el siguiente:

"Un octógono regular *ABCDEFGH* está inscrito en una circunferencia de radio unidad. Probar que el producto de las longitudes de los segmentos que unen *A* con cada uno de los vértices restantes es 8."

Como quiera que tal producto aplicado al cuadrado es trivialmente 4 y al triángulo equilátero 3, tras resolver el mismo problema en el caso del pentágono regular y habiendo observado que obtenía como producto 5, la conjetura estaba naturalmente abierta. ¿Será cierto que en cualquier polígono regular de *n* lados inscritos en una circunferencia de radio 1, el producto de las distancias desde un vértice a todos los restantes es precisamente *n*?

El propósito de este artículo es probar que, efectivamente, así ocurre.

Comencemos distinguiendo dos casos según que el número de lados del polígono sea par, $2n$, o impar $2n + 1$.



a) El número de lados es par: $2n$.

Llamemos d_i a la distancia entre A_1 y A_i (i = 2, ... , n) y obtengámosla aplicando el teorema del coseno a los triángulos de vértices O, A_1 y A_i.

$$d_2^2 = 1 + 1 - 2\cos\frac{2\pi}{2n} = 2 \cdot 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{2n}$$

$$d_3^2 = 1 + 1 - 2\cos\frac{2 \cdot 2\pi}{2n} = 2 \cdot 2\,\mathrm{sen}^2\frac{2\pi}{2n}$$

$$\vdots$$

$$d_n^2 = 1 + 1 - 2\cos(n-1)\frac{2\pi}{2n} = 2 \cdot 2\,\mathrm{sen}^2\frac{(n-1)\pi}{2n}$$

As pues, $d_2 \cdot d_3 \ldots d_n = 2^{n-1}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n} \cdot \mathrm{sen}\frac{2\pi}{2n} \ldots\ \mathrm{sen}\frac{(n-1)\pi}{2n}$

d_{n+1} es trivialmente 2, pues A_1 y A_{n+1} son diametralmente opuestos, por lo que d_{n+1} se puede escribir ciertamente como

$$2 \cdot \mathrm{sen}\frac{n\pi}{2n}.$$

Por otra parte, $d_{n+1+k} = d_{n+1-k}$ por la simetría de la figura. Así que

$$d_2 \ldots d_n \cdot d_{n+1} \cdot d_{n+2} \ldots d_{2n} = 2^{2n-1}\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{2n} \cdot \mathrm{sen}^2\frac{2\pi}{2n} \ldots\ \mathrm{sen}^2\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

Observando que

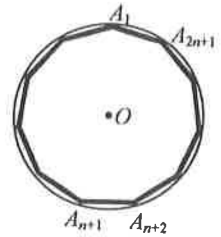
$$\mathrm{sen}\frac{(n-k)\pi}{2n} = \mathrm{sen}\frac{(n+k)\pi}{2n} \quad \text{pues} \quad \frac{(n-k)\pi}{2n} + \frac{(n+k)\pi}{2n} = \pi,$$

y para buscar una mayor simetría en la fórmula para el producto de las distancias, podemos escribir

$$d_2 \ldots d_{2n} = 2^{2n-1}\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n}\mathrm{sen}\frac{2\pi}{2n} \ldots\ \mathrm{sen}\frac{n\pi}{2n}\mathrm{sen}\frac{(n+1)\pi}{2n} \ldots\ \mathrm{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Estudiemos si cuando hay un número impar de lados, el producto buscado adopta una expresión análoga:

b) El número de lados es impar: $2n + 1$. Llamemos, igual que antes, d_i a la distancia de A_1 a A_i. (i = 2, ..., n).



$$d_2^2 = 1+1-2\cos\frac{2\pi}{2n+1} = 2\cdot 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{2n+1}$$

M

$$d_{n+1}^2 = 1+1-2\cos\frac{n2\pi}{2n+1} = 2\cdot 2\,\mathrm{sen}^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

Igual que antes, por la simetría de la figura, se verifica ahora que

$$d_2 = d_{2n+1},\ d_3 = d_{2n},\ \ldots,\ d_{n+1} = d_{n+2},\ \text{es decir},\ d_{2+k} = d_{2n+1-k}$$

con lo que

$$d_2 d_3 \ldots d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{2n+1} = 2^{2n}\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{2n+1}\ldots\mathrm{sen}^2\frac{n\pi}{2n+1}.$$

Observando ahora que

$$\mathrm{sen}\frac{\pi k}{2n+1} = \mathrm{sen}\frac{\pi(2n+1-k)}{2n+1},$$

podemos escribir el producto anterior como

$$d_2 d_3 \ldots d_{n+1} d_{n+2} \ldots d_{2n+1} = 2^{2n}\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n+1}\ldots\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2n+1}\mathrm{sen}\frac{(n+1)\pi}{2n+1}\ldots\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{2n+1}$$

Así pues, hemos probado que el producto buscado adopta la forma

$$P = 2^{2n-1}\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n}\cdot\mathrm{sen}\frac{2\pi}{2n}\ldots\mathrm{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

ó

$$P = 2^{2n}\mathrm{sen}\frac{\pi}{2n+1}\cdot\mathrm{sen}\frac{2\pi}{2n+1}\ldots\mathrm{sen}\frac{2n\pi}{2n+1}$$

Según sea 2n ó 2n+1 el número de lados del polígono.

En este momento recordé que yo había visto alguna vez algo sobre producto de senos de ángulos en progresión aritmética. Haciendo memoria, encontré en [2] el siguiente problema:

Si $w = e^{2\pi i/n}$, demostrar que:

a) $\prod_{k=1}^{n}\left(z-w^k\right) = z^n - 1;\quad \prod_{k=1}^{n-1}\left(z-w^k\right) = 1+z+\ldots+z^{n-1}.$

b) $\mathrm{sen}\frac{\pi}{n}\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}\ldots\mathrm{sen}\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$ si $n \geq 2$.

La solución al apartado a) es evidente sin más que observar que si $w = e^{2\pi i/n}$, w^k, k = 1, ..., n son las raíces n-ésimas de la unidad y, por tanto, el polinomio $P(z) = z^n - 1$ puede factorizarse como

$$\prod_{k=1}^{n}\left(z-w^k\right).$$

Para la segunda parte de a), basta dividir en ambos términos de la primera por $z - w^n$, o sea, por $z - 1$ y obtener

$$\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-w^k\right) = 1+z+\ldots+z^{n-1}.$$

Para el apartado b) tomemos $z = 1$ y tenemos:

$$1 + 1^1 + \ldots + 1^{n-1} = (1-w)(1-w^2)\ldots(1-w^{n-1}),\ \text{es decir:}$$

$$n = \left(1-\cos\frac{2\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\frac{4\pi}{n}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\cos\frac{(n-1)2\pi}{n} - i\,\mathrm{sen}\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)$$

Tomando módulos en los dos términos de la igualdad, llegamos a:

$$n = \sqrt{\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \mathrm{sen}^2\frac{2\pi}{n}}\ \mathrm{L}\ \sqrt{\left(1-\cos\frac{(n-1)2\pi}{n}\right)^2 + \mathrm{sen}^2\frac{(n-1)2\pi}{n}},$$

es decir,

$$n = \sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{n}}\ \mathrm{L}\ \sqrt{2-2\cos\frac{(n-1)2\pi}{2n}},$$

por lo que

$$n = \sqrt{2}\sqrt{2\,\mathrm{sen}^2\frac{\pi}{n}}\ \mathrm{L}\ \sqrt{2}\sqrt{2\,\mathrm{sen}^2\frac{(n-1)\pi}{n}},$$

o, lo que es lo mismo,

$$n = 2^{n-1} \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n} \cdots \operatorname{sen} \frac{(n-1)\pi}{n},$$

de donde sigue la igualdad buscada;

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n} \mathrm{L} \ \operatorname{sen}\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}. \quad (*)$$

Pertrechado con esta fórmula, el final de mi conjetura estaba muy próximo:

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n} \mathrm{L} \ \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi}{2n} \text{ era igual a } \frac{2n}{2^{2n-1}} \text{ y}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n+1} \cdot \operatorname{sen}\frac{2\pi}{2n+1} \mathrm{L} \ \operatorname{sen}\frac{2n\pi}{2n+1}$$

sería, volviendo a aplicar (*),

$$\frac{2n+1}{2^{2n}},$$

con lo que si el número de lados era $2n$, el producto buscado era

$$2^{2n-1} \cdot \frac{2n}{2^{2n-1}} = 2n$$

y si era $2n + 1$, el producto sería

$$2^{2n} \frac{2n+1}{2^{2n}} = 2n + 1,$$

es decir, en ambos casos el producto de las distancias de un vértice a los restantes, coincidía con el número de lados del polígono.

Bibliografía

[1] *Problems, problems, problems,* Vol. 3, Canadian Mathematics Competition.

[2] *Complex numbers and Geometry,* Liang-shin Hahn, Mathematical Association of America.

Índice de los artículos publicados en los 50 primeros números de este boletín (1983-98)

Reseña de libros

I. M. VINAGRADOF ET AL. (Revisión de la trad. al español: J. V. GARCÍA SESTAFE): *Enciclopedia de las Matemáticas*, Rubiños, 1997. Contiene 3700 págs. en 12 volúmenes.

Para un cultivador, por modesto que sea, de la matemática resulta un espectáculo particularmente consolador y goloso ver reunido en una sola obra –bien que voluminosa ,¡qué remedio!– todo el conjunto de saberes a que ha dedicado su actividad. Como además tuve el placer de haber sido amablemente invitado a participar en esa presentación, bien quisiera ahora, en correspondencia, recordar algunas cosas de las que entonces pude dedicarle; pero ni tengo espacio ni es fácil pasar a lenguaje escrito palabras que fueron pensadas para ser dichas oralmente.

Una breve descripción cuantitativa de la obra apuntaría a su distribución en doce volúmenes; el último de ellos, formado por los índices de todos los anteriores, detallados y completos, con abundancia de referencias cruzadas para poder alcanzar cualquier término. Los restantes tomos aparecen redactados por un equipo de unos doscientos profesores coordinados por el académico I. M. Vinogradov. Ocupan en total alrededor de 3.700 páginas que recogen más de 6.300 voces.

Buen número de ellas, respondiendo a una estructura típicamente enciclopédica, no de vocabulario o diccionario, están ampliamente desarrolladas. Quienes hemos tenido que esforzarnos muchas veces para reducir a su mínima expresión una definición, no es raro que contemplemos con una sana envidia la facultad de que han dispuesto los autores para extenderse cuanto les haya sido conveniente en la redacción de cada entrada, convirtiéndola en muchos casos en una verdadera lección sobre el concepto definido.

Sin entrar en otros detalles técnicos que fueron ya tratados por mis compañeros intervinientes en aquel acto, sí quiero señalar dos cosas. La primera, que cada artículo, excepto algunas definiciones breves o voces de referencia, viene firmado por su autor, lo que, aparte de la garantía que esa responsabilidad personal supone, da la imagen cabal de una obra conjunta producida por la escuela matemática rusa.

Y la segunda, que va acompañado de una pequeña pero sustanciosa bibliografía en la que a veces se cita desde el texto en que apareció por vez primera el concepto en la literatura hasta la publicación más actual.

Hay también algo que este libro me sugiere y no querría perder la ocasión de decirlo. Todos sabemos la mala fama que tenemos los matemáticos –que acaso no seamos los únicos en marecer– de embrollar y oscurecer las cosas más diáfanas: hablamos en un lenguaje que, a fuerza de precisión, acaba por no entender nadie. Todo el mundo sabe lo que es una recta pero empieza a no saberlo si se lo explica un matemático. Pues bien, búsquese aquí cualquiera de esas palabras de procedencia científica pero de uso común de cuyo significado solemos responder: magnitud, área, línea... la que sea.

Veremos, de éstos y otros términos de la Enciclopedia, una primera versión acomodada a la idea intuitiva que tenemos de él, pero que enseguida se va a manifestar insuficiente ante el sucesivo desarrollo de aquellos conceptos, y así la vemos evolucionar hacia formulaciones que, siendo necesarias, pueden paracer absurdamente complicadas incluso ininteligibles a quienes se las presentamos de sopetón, sin ese proceso continuado que lleva de las primeras nociones a la concepción actual.

Acaso podría esto servir para ir absolviendo a los matemáticos de su manía de emplear una terminología y una construcción aparentemente hermética; que no lo hacemos por el gusto de oscurecer, a la manera "d'orsiana", lo que está claro, sino que somos conducidos a ello, digámoslo así, por exigencias del guión.

En cuanto a la edición española, habría que referirse en primer lugar a la editorial. Yo que entiendo muy poco de esto, o sea, nada, estimo que la aventura de afrontar la publicación de una obra de esta envergadura entraña una valentía muy difícil de medir. Cierto que Rubiños nos tiene ya acostumbrados a la previsión continuada de una buena biblioteca científica, pero esta vez, si no temiera pecar de impertinente, podría decirle con el acento más castizo que "se ha pasao". Ojalá que al arriesgarse en semejante operación reciba el premio que su dedicación merece. Y dos palabras también para el profesor García Sestafe, que ha tomado sobre sí la tarea descomunal de enfrentarse con este centón matemático.

Aunque la matemática sea un lenguaje universal, presenta en cada idioma modalidades y facetas no traducibles al pie de la letra. Esa labor selectiva y de adaptación al idioma y al pensamiento español que ha sido el nervio de su quehacer se me antoja de una complejidad y de un "embotellamiento" que sólo una enorme capacidad de trabajo y una infinita paciencia habrán podido superar. Y he de decir que con la alta y clara calificación de la obra bien hecha.

José Javier Etayo

VARIOS AUTORES: «Didáctica de las Matemáticas», Volumen 1, número 4, octubre, de la Revista de *Estudios del Currículum (REC)*, Ediciones Pomares-Corredor, Caspe, 162 Barcelona-08013. Contiene 185 páginas.

Se trata de un número de esta revista monográfica (que traduce al español el "Journal of Curiculum Studies"), especialmente dedicado a Didáctica de las Matemáticas, que contiene una colección de artículos de prestigiosos especialistas en el área, enumerados a continuación:

– Concepto de currículum desde la Educación Matemática, por Luis Rico Romero.
– Orígenes de las matemáticas escolares en Alemania a principios del siglo XIX, por Hans Niels Jahnke.

– ¿Cuáles son los objetivos de las matemáticas para todos?, por Christine Keitel.
– Mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la República Dominicana, por Eduardo Luna, Sarah González, David Robitaille, Sandra Crespo y Richard Wolfe.
– Reforma del currículum en matemáticas: ¿Más allá de la revolución imposible?, por Agnieszka Wojciechowska.
– Enseñanza de las matemáticas sin un punto de vista consistente: descubrimientos del Segundo Estudio Internacional de Matemáticas de la IEA, por Lauren A. Sosniak, Corinna A. Ethington y María Varelas.
– Aprendizaje cooperativo y enseñanza adaptativa en un currículum de matemáticas, por J. Terwell, P.G.P. Herfs, E.H.M. Mertens y J.Chr. Perrenet.
– Cómo construyen los maestros la comprensión del alumno sobre las tareas en matemáticas: relacionar el contenido con los procesos cognitivos del educando, por Rainer Bromme y Katharina Juhl.
– Arrojar dos dados: el contenido de una lección de matemáticas, por Peter Menck.

La edición está especialmente cuidada. Los interesados pueden obtener información más completa consultando:

email: edpomares@mx3.redestb.es
Página web: http:/personal.redestb.es/edpomares

E. Roanes M.

Problemas propuestos

Problemas propuestos
OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICA
celebrada en República Dominicana los días 22-23 de septiembre de 1998

Problema nº 1:

Se dan 98 puntos sobre una circunferencia. Maria y José juegan alternadamente de la siguiente manera: cada uno de ellos traza un segmento uniendo dos de los puntos dados que no hayan sido unidos entre sí anteriormente. El juego termina cuando los 98 puntos han sido usados como extremos de un segmento al menos una vez. El vencedor es la persona que realiza el último trazo. Si José inicia el juego, ¿quién puede asegurarse la victoria?

Problema n° 2:

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E y F, respectivamente. AD corta la circunferencia en un segundo punto Q. Demostrar que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si, y solamente si, AC = BC.

Problema n° 3:

Hallar el mínimo número natural n con la siguiente propiedad: entre cualesquiera n números distintos, pertenecientes al conjunto $\{1, 2, ..., 999\}$, se pueden elegir cuatro números diferentes a, b, c, d, tales que $a + 2b + 3c = d$.

Problema n° 4:

Alrededor de una mesa redonda están sentados representantes de n países ($n \geq 2$), de modo que satisfacen la siguiente condición: si dos personas son del mismo país, entonces sus respectivos vecinos de la derecha no pueden ser de un mismo país. Determinar, para cada n, el número máximo de personar que puede haber alrededor de la mesa.

Problema n° 5:

Hallar el máximo valor posible de n para que existan puntos distintos $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ en el plano y números reales $r_1, r_2, ..., r_n$ de modo que la distancia entre cualesquiera dos puntos diferentes P_i y P_j sea $r_i + r_j$.

Problema n° 6:

Sea la raíz positiva de la ecuación $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Se define la sucesión $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...$ por:

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = [\lambda x_n], \text{ para } n = 0, 1, 2, ... \end{cases}$$

Hallar el residuo (resto) de la división de x_{1998} por 1998.

Nota: Los corchetes indican parte entera, o sea, x es el único entero k tal que $k \leq x < k + 1$.

Problemas propuestos
VII OLIMPIADA MATEMÁTICA RIOPLATENSE

(Por ser de niver más elemental, sus soluciones no se publicarán en nuestro Boletín)

NIVEL A

Problema n° 1:

Patricia marca sobre un pedazo de cartulina cuadrada *ABCD* su centro *O;* luego recorta del cuadrado el triángulo *AOB,* y obtiene un pedazo de cartulina *AOBCD.*

Muestra cómo Patricia puede cubrir todo el plano con piezas todas idénticas a *AOBCD,* sin que éstas se superpongan ni dejen huecos.

Problema n° 2:

Tenemos un tablero cuadriculado de 100×100. Las filas fueron numeradas de 1 a 100, de arriba hacia abajo. Del mismo modo, las columnas fueron numeradas de 1 a 100, de izquierda a derecha. A continuación, en cada columna, se pintaron las casillas que están en las filas cuyo número es un divisor del número de la columna. (Por ejemplo, en la columna 12, se pintaron las casillas de las filas 1, 2, 3, 4, 6 y 12; en la columna 13, se pintaron las casillas de las filas 1 y 13.)

a) Determina el número de casillas que se pintaron en la séptima fila.
b) Determina el número de casillas que se pintaron en todo el tablero.

Problema n° 3:

En una circunferencia se marcaron 10 puntos blancos y 1 punto negro. Consideremos todos los posibles polígonos (convexos) que tienen sus vértices en estos puntos.

Separamos los polígonos en dos tipos:

Tipo 1: los que tienen solamente vértices blancos;
Tipo 2: los que tienen al punto negro como uno de sus vértices.

¿Hay más polígonos del tipo 1 o del tipo 2? ¿Cuántos más?

Problema n° 4:

Un programa de computadora permite realizar dos operaciones:

- Apretando la tecla A, el número n que está en la pantalla se cambia por $2n + 1$;
- Apretando la tecla B, el número n que está en la pantalla se cambia por $(n - 1)/3$, pero está prohibido apretar la tecla B si $(n - 1)$ no es múltiplo de 3.

Todas las computadoras tienen inicialmente el número 3 en la pantalla.

Se propuso a los alumnos de la clase que cada uno hiciera seis operaciones. Sabemos que dos de los alumnos obtuvieron como resultado final dos números naturales consecutivos. ¿Cuáles son esos dos números?

Problema n° 5:

Tenemos una cartulina con forma de triángulo equilátero (o sea, un triángulo con los tres lados iguales).

a) Muestra cómo dividir la cartulina en 22 triángulos equiláteros, no necesariamente todos del mismo tamaño.

b) Muestra cómo dividir la cartulina en 17 triángulos equiláteros, no necesariamente todos del mismo tamaño.

Problema n° 6:

En una ciudad hay tres clubes. Cada habitante es socio de por lo menos uno de los clubes. En cada club, como máximo el 20% de los socios son hombres.

a) ¿Es posible que los hombres sean 3/7 de la población de la ciudad?
b) ¿Es posible que los hombres sean el 43% de la población de la ciudad?

En ambos casos explica por qué.

NIVEL I

Problema n° 1:

En un pentágono regular $ABCDE$, trazamos las diagonales AC y BE, que se cortan en el punto P. Recortamos el triángulo APB y obtenemos así el hexágono $APBCDE$. Tenemos una colección infinita de piezas iguales al hexágono $APBCDE$ en tamaño y forma.

Muestra que se puede embaldosar el plano con estas piezas.

Nota: Embaldosar el plano significa cubrirlo con piezas sin que éstas se superpongan, ni dejen huecos.

Problema n° 2:

Se tiene un tablero cuadriculado de 100×100. Las filas están numeradas de 1 a 100, de arriba hacia abajo. Del mismo modo, las columnas están numeradas de 1 a 100, de izquierda a derecha. En cada columna se marcan las casillas que están en las filas cuyo número es un divisor del número de la columna. Luego, en cada casilla marcada, se escribe el número de la fila en la que se encuentra. Por ejemplo, en la columna 10, se escriben los números 1, 2, 5 y 10 en las filas 1, 2, 5 y 10, respectivamente.

Prueba que la suma de todos los números escritos en las casillas marcadas es menor que 10000.

Problema n° 3:

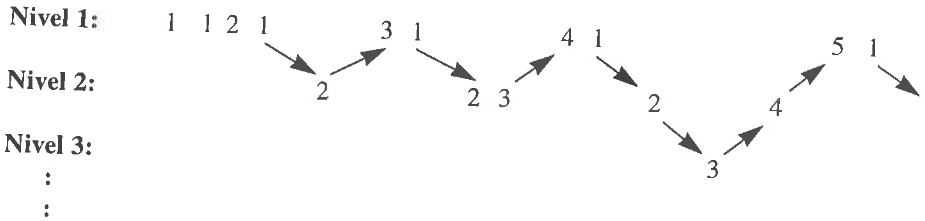
Se tiene un cuadrado de lado 1999. ¿Es posible dividirlo completamente en varios cuadrados (más de uno) que tengan lados de longitudes enteras mayores que 35?

Justifica tu respuesta.

Nota: Los cuadrados pueden ser de distintos tamaños.

Problema n° 4:

Los números 1, 2, 3, ... se colocan de la siguiente manera:



En la figura sólo se muestra la distribución de 16 números, pero si continuamos el proceso siguiendo el mismo esquema, ¿qué número ocupa la posición 1998 y en qué nivel se encuentra?

EJEMPLOS: En la posición 10 se colocó el número 4 y está en el nivel 1.
En la posición 13 se colocó el número 3 y está en el nivel 3.

Problema n° 5:

Prueba que si se dan 101 números enteros positivos cualesquiera, es posible elegir 11 de ellos cuya suma sea divisible por 11.

Problema n° 6:

En un trapecio $ABCD$ de bases AB y CD se eligen los puntos M y N en los lados AD y BC, respectivamente, de modo que

$$\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NB}.$$

Si MN intersecta a las diagonales AC y BD en P y Q, respectivamente, demuestra que $MP = NQ$.

NIVEL II

Problema n° 1:

A cada número entero positivo n se le asocia un entero no negativo $f(n)$, de modo que se cumplen las siguientes condiciones:

i) $f(ab) = f(a) + f(b)$,
ii) $f(n) = 0$, si n es primo mayor que 10 y
iii) $f(1) < f(243) < f(2) < 10$.

Halle $f(1998)$ sabiendo que es menor que 10.

Problema n° 2:

Un hombre camina pisando los durmientes de la vía del ferrocarril, recorriendo un tramo rectilíneo de vía de 1 km de longitud (los durmientes o traviesas son los maderos que soportan los rieles de la vía). Las características de este tramo son:

i) empieza y finaliza en durmientes,
ii) contiene exactamente 2.001 durmientes y
iii) la distancia entre dos durmientes consecutivos es variable y no mayor que 60 cm.

Si en cada paso el hombre avanza no más de 80 cm, determine el menor número de pasos para recorrer todo el tramo.

Justifique la respuesta y dé un ejemplo con una distribución de durmientes para la cual, con dicho número de pasos, se complete todo el tramo.

Importante: No tome en consideración ni el ancho de los durmientes ni la longitud del pie.

Problema n° 3:

Dada una circunferencia C elija un diámetro AB y marque en éste un punto P arbitrario, distinto de A y B. En uno de los dos arcos determinados por el diámetro AB, considere dos puntos M y N tales que $\angle APM = \angle BPN = 60°$. Trace los segmentos MP y NP para obtener así tres triángulos curvilíneos APM, MPN y NPB (los lados del triángulo curvilíneo APM son los segmentos AP y PM y el arco AM). En cada triángulo inscriba una circunferencia.

Demuestre que la suma de los radios de las tres circunferencias construidas es menor o igual que el radio de C.

Problema n° 4:

Sea $ABCD$ un cuadrado. En el semiplano determinado por AC que contiene a B se escoge un punto P tal que $\angle APC = 90°$ y $\angle PAC > 45°$. Sean Q el punto de corte de PC con

AB y H el pie de la altura correspondiente a Q en el triángulo AQC. Demuestre que los puntos P, H y D están alineados.

Problema n° 5:

Sean a, b y c números reales positivos tales que:

$$a + b + c = 1.$$

Demuestre que:

$$\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5}+\frac{b^7+c^7}{b^5+c^5}+\frac{c^7+a^7}{c^5+a^5}\geq\frac{1}{3}.$$

Problema n° 6:

Un tablero de tamaño $m \times n$ dividido en casillas cuadradas de tamaño 1×1 se ha cubierto completamente con piezas rectangulares de tamaño 2×1, que no se solapan ni sobresalen de los bordes del tablero.

Se consideran los cuadrados de tamaño 2×2 formados por cuatro casillas del tablero. Se dice que una pieza de tamaño 2×1 sombrea un cuadrado (de tamaño 2×2) si cubre al menos una de sus cuatro casillas. El número de piezas que sombrean cada cuadrado 2×2 puede ser 2, 3 ó 4.

Demuestre que el número de cuadrados sombreados por, exactamente, dos piezas es mayor que el número de cuadrados sombreados por cuatro piezas.

NIVEL III

Problema n° 1:

Considere un arco AB de una circunferencia C y un punto P variable en dicho arco AB. Sea D el punto medio del arco AP que no contiene a B y sea E el punto medio del arco BP que no contiene a A. C_1 es la circunferencia con centro D que pasa por A y C_2 es la circunferencia con centro E que pasa por B. Demostrar que la recta que contiene los puntos de intersección de C_1 y C_2 pasa por un punto fijo.

Problema n° 2:

Dado un entero n ≥ 2, considere todas las sucesiones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de números reales no negativos tales que

$$x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = 1.$$

Hallar el valor máximo y el valor mínimo de

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

y determinar todas las sucesiones $x_1, x_2, \ldots, x_n$ para las cuales se obtienen estos valores.

Problema n° 3:

Sea X un conjunto finito de enteros positivos. Demostrar que para cada subconjunto A de X, existe un subconjunto B de X, con la siguiente propiedad:

Para cada elemento e de X, e divide a un número impar de elementos de B, si y sólo si, e es un elemento de A.

Problema n° 4:

Sea M un subconjunto de $\{1, 2, \ldots, 1998\}$ con 1000 elementos. Demostrar que siempre es posible encontrar dos elementos a y b en M, no necesariamente distintos, tales que $a + b$ es una potencia 2.

Problema n° 5:

Diremos que M es punto medio de la poligonal abierta XYZ, formada por los segmentos XY, YZ, si M pertenece a la poligonal y divide su longitud a la mitad.

Sea ABC un triángulo acutángulo de ortocentro H. Sean $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ los puntos medios de las poligonales abiertas CAB, ABC, BCA, BHC, CHA, AHB, respectivamente. Demostrar que las rectas A_1A_2, B_1B_2 y C_1C_2 son concurrentes.

Problema n° 6:

Sea k un entero positivo fijo. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, llamaremos configuración de orden n a cualquier conjunto de k_n puntos del plano, que no contiene 3 colineales, coloreados con k colores dados, de modo que haya n puntos de cada color. Determinar todos los enteros positivos n con la siguiente propiedad: en cada configuración de orden n, es posible seleccionar 3 puntos de cada color, de manera tal que los k triángulos con vértices del mismo color que se determinan sean disjuntos dos a dos.

Problemas resueltos

Problema n° 21 (BOLETÍN N.° 48)

Hallar todos los enteros positivos n con la siguiente propiedad: existe un polinomio $P_n(x)$ de grado n, con coeficientes enteros, tal que $P_n(0) = 0$ y $P_n(x) = n$ para n valores enteros y distintos de x.

Solución:

Sea $P_n(x)$ un polinomio que verifica las hipótesis del problema. $P_n(x)$ será de la forma $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x$ debido a que $P_n(0) = 0$. Definamos el polinomio de grado n $Q_n(x) = P_n(x) - n$ cuya expresión es $Q_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x - n$. El polinomio $Q_n(x)$ tiene n raíces enteras, los n valores enteros para los cuales $P_n(x) = n$; sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ esos n ceros del nuevo polinomio, entonces $Q_n(x)$ se puede descomponer de la forma $Q_n(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_n)$ con lo que

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \text{L}\; x_n = \frac{n}{a_n} \cdot (-1)^{n+1}.$$

Como las raíces son números enteros distintos el producto de las mismas será en valor absoluto mayor o igual que:

$$\text{Si } n \text{ es par que} \left| 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \text{L}\; \frac{n}{2} \cdot \left(-\frac{n}{2}\right) \right| = \left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2$$

$$\text{Si } n \text{ es impar que} \left| 1 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-2) \text{L}\; \frac{n-1}{2} \cdot \left(-\frac{n-1}{2}\right) \cdot \frac{n+1}{2} \right| = \left(\frac{n-1}{2}\right)! \cdot \frac{n+1}{2}!$$

Teniendo en cuenta que

$$\left(\left(\frac{n}{2}\right)!\right)^2 > n \quad \forall n \text{ par} \geq 6,$$

que

$$\left(\frac{n-1}{2}\right)! \cdot \frac{n+1}{2}! > n \quad \forall n \text{ impar} \geq 5,$$

y que el producto de las raíces es igual en valor absoluto a

$$\frac{n}{|a_n|} \leq n$$

por ser a_n un número entero; llegamos a la conclusión de que no puede haber un polinomio de grado mayor o igual que cinco que verifique las hipótesis del problema. Veamos ahora que sí es posible encontrar polinomios de grados uno, dos, tres y cuatro respectivamente, es decir, $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ y $n = 4$, que las verifiquen:

$P_1(x) = x$; $x_1 = 1$
$P_2(x) = x^2 - x$; $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$
$P_3(x) = x^3 - 3x^2 - x$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ y $x_3 = -3$
$P_4(x) = x^4 - 5x^2$; $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$ y $x_4 = -2$

José Antonio Blázquez Hernández (Fuenlabrada)

Problema n° 23 (BOLETÍN N.° 48)

Demostrar que hay infinitos enteros positivos n tales que la cantidad de divisores positivos que tiene $2^n - 1$ en mayor que n.

Solución:

Basta encontrar un entero positivo k que verifique que $2^k - 1$ tiene más de k divisores porque en ese caso si demostramos que $2^{2k} - 1$ tiene más de 2k divisores entonces $2^{4k} - 1$ tendrá más de 4k divisores y así sucesivamente podremos encontrar infinitos enteros positivos que verifiquen el enunciado del problema.

Supongamos que existe un entero positivo k tal que $2^k - 1$ tiene más de k divisores. Como $2^{2k} - 1 = (2^k - 1) \cdot (2^k + 1)$ y además $2^k - 1$ y $2^k + 1$ son primos entre sí (se trata de números impares consecutivos) entonces el número de divisores de $2^{2k} - 1$ es mayor o igual que $k \cdot 2$ (como poco los divisores de $2^k - 1$ y esos divisores multiplicados por $2^k + 1$).

Veamos que para k = 12 se cumple lo pedido en el enunciado:

$2^{12} - 1 = 4095 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$. Número de divisores de $2^{12} - 1 = 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 24 > 12$.

Así pues, queda demostrada la propuesta .

José Antonio Blázquez Hernández (Fuenlabrada)

Problema n° 25 (BOLETÍN N.° 48)

Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números no negativos , n ≥ 3, tales que $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$. Determinar el máximo valor posible de la expresión $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$.

Solución:

El máximo valor posible de la expresión del problema es 1/4..

Demostremos en primer lugar que el producto de dos números cuya suya es 1 como mucho es 1/4:

Sean x e y dos números tales que $x + y = 1$, es decir, $y = 1 - x$, entonces $x \cdot y = x \cdot (1 - x)$. Definamos la función $f(x) = x \cdot (1 - x) = x - x^2$. Estudiándola se ve que tiene un máximo relativo, en este caso absoluto, en

$$x = \frac{1}{2}, \text{ siendo } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

Veamos ahora que el valor máximo posible de la expresión del enunciado es 1/4.

Que este valor se alcanza es evidente, basta que

$$x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2} \text{ y } x_i = 0 \text{ para } i = 3,\mathrm{L}\ , n.$$

Comprobemos que no se puede sobrepasar:

Demostraremos la hipótesis del problema suponiendo que n es impar y la demostración en el caso de que fuera par sería análoga.

Por ser los x_i números positivos se verifica que la expresión del enunciado es menor o igual que el producto de la suma de los términos de subíndice par con la suma de los términos de subíndice impar:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \leq (x_1 + x_3 + x_5 + \ldots x_n) \cdot (x_2 + x_4 + x_6 + \ldots x_{n-1})$$

Como $(x_1 + x_3 + x_5 + \ldots x_n)$ y $(x_2 + x_4 + x_6 + \ldots x_{n-1})$ son dos números cuya suma es 1, según vimos en la primera parte de esta demostración su producto no puede exceder de un cuarto. Así pues:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n \leq \left(x_1 + x_3 + x_5 + \ldots + x_n\right) \cdot \left(x_2 + x_4 + x_6 + \ldots + x_{n-1}\right) \leq \frac{1}{4}$$

José Antonio Blázquez Hernández (Fuenlabrada)

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.°	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números 1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°	9.°	10.°	
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83-París	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	–	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	–	–	–	–	–	–	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	–	–	–	–	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	–	–	–	–	–	–	–	–	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	–	–	–	–	–	–	–	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	–	–	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	–	–	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	–	–	–	–	–	–	–	–	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	–	–	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	–	–	–	–	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	46	XX	33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	–	–	–	–	–	–	
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	48	XX	XX	35	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	47	35	34	–	–	–	–	–	
32	OMI-92-MOSC'U/	35	48	XX	XX	XX	51	38	35	46	38	
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	–	–	–	–	–	–	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	47	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	
	/PNS	47	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	–	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	–	–	–	–	
35	OMI-93-Turq./	XX	46	XX	XX	51	XX	51	XX	47	39	
	OI-93-Méjico/PNS	XX	51	39	39	51	XX	–	–	–	–	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	
37	OME-f2-94/PNS	41	49	49	41	49	49	45	45	41	–	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	51	XX	–	–	–	–	
39	OI-94-Brasil/OME-	43	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	
	f1-94/f1-94(v)	46	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	–	–	–	–	
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
43	OME-f-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
44	OMI-96-India/	XX	XX	49	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	47	45	XX	XX	XX	–	–	–	–	
45	OI-96-Costa Rica	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	XX	XX	XX	
	OME-96-f1	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	–	–	
46	OMR-96	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
47	OMI-97-Argentina	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
48	OI-97-México	XX	XX	XX	50	XX	XX	–	–	–	–	
	OMEf1-98	–	–	–	–	–	–	XX	XX	XX	XX	
		49	XX	49	XX	–	–	–	–	–	–	
	OMR-97	–	–	–	–	XX	XX	XX	50	XX	XX	
		51	XX	51	XX	51	51					
50	OMI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
51	OI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVIO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACION EN EL BOLETIN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente

Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4. Si se utiliza LATEX, el formato debe ser 17cm × 12,8 cm en 11 puntos (para ser aprovechado directamente en la imprenta).

Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el Boletín).

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además,si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo dos archivos:

a) archivo del documento para el procesador de texto utilizado.
b) archivo del documento en código ASCII

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.

Las figuras se captarán por escaneado, por lo que es innecesario incluirlas en el disquete (en archivos de extensión TIF o similares).

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín (no al apartado, que ya no está operativo).

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen grauitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

35 ☐	38 ☐	39 ☐	40 ☐	41 ☐	42 ☐
43 ☐	44 ☐	45 ☐	46 ☐	47 ☐	48 ☐
49 ☐	50 ☐	51 ☐			

Envío adjuntos sellos para el franqueo (35 pts. por cada número del boletín).

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1 al 34, 36 y 37 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid
Tel. (91) 394 62 48

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
BOLETÍN DE INSCRIPCIÓN

D. ....

Dirección particular .... Teléf. (....) ....

Ciudad ....

Centro de trabajo .... Cod.° Postal ....

....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....

Sucursal o Agencia .... en ....

Dirección de la misma ....

para que cargue en la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1998-99 y siguientes.

Fecha .... de .... de 1999

Fdo.:

Aquellos centros que prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria CAJA DE INGENIEROS, Fuencarral, 101, 28004 Madrid, cc. 3025-0006-24-1400002948.

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (de ellas, 3.000 ptas. en concepto de cuota de la Sociedad «Puig Adam» y 2.000 pts. en concepto de cuota por la que se recibe la revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas). Remítanse ambas partes a **Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517). Tel. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.**

Fecha .... BANCO: ....

Sucursal o Agencia .... en ....

Dirección de ésta ....

....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....

Dirección ....