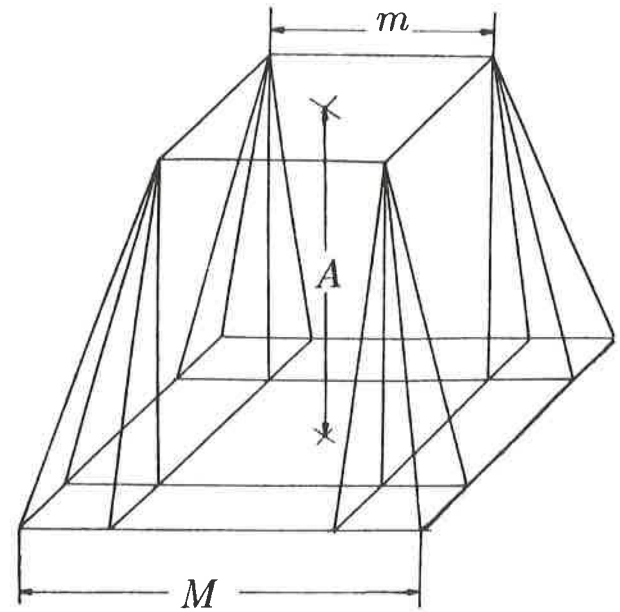
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS



BOLETIN N.° 50
OCTUBRE DE 1998

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: (91) 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura 1 del artículo titulado "Evolución en la enseñanza de la geometría elemental", contenido en este número 50 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

Información a través de Internet:
http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

XVI Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

El *XVI Concurso de Resolución de Problemas,* convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras (ver nuestro Boletín n° 48), se celebró en la mañana del sábado 20 de junio de 1998.

Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en los de la E. U. de Biblioteconomía y Documentación, situada en el Edificio "Pablo Montesinos" de la calle de la Santísima Trinidad, 35, amablemente cedidos por su Dirección para ese acto.

Concurrieron a él 144 participantes, bastantes más que en los años precedentes. Varios de ellos procedían de Comunidades Autónomas distintas de la de Madrid y algunos de alejadas, como Galicia. Según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles: los del primero, cursaban 3.° de ESO, 1.° de BUP o FP1; los del segundo, 4.° de ESO, 2.° de BUP o 1.° de FP II, y los del tercero, 3.° de BUP, 1.° del nuevo Bachillerato o 2.° ó 3.° de FP II.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 10 puntos. A continuación de esta crónica damos sus enunciados, con datos estadísticos que reflejan sus dificultades relativas. Se ve que resultaron extremadamente difíciles el 1.° del segundo nivel y el 3.° del tercero; también ofreció gran dificultad el 2.° del tercer nivel, sin que sea fácil comprender por qué.

Recordaremos que los dos primeros clasificados de cada nivel están invitados a participar en la VII Olimpiada Rioplatense, que se celebrará en el próximo diciembre en Argentina. Podrán asistir a ella, siempre que se consigan becas o ayudas para pagar los billetes del vuelo a Buenos Aires (ver la crónica de la VI OMR en nuestro Boletín n.° 48).

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de felicitación a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado, y de agradecimiento a las firmas y entidades que proporcionaron los valiosos premios distribuidos entre los ganadores, especialmente a *Texas Instruments,* que regaló magníficas calculadoras, a *Coca-Cola,* a *Editorial S.M.,* a *Editorial Rubiños,* a *Editorial Euler,* a Amigos de la Cultura Científica, al Colegio de Doctores y Licenciados y a la Fac. de CC. Matemáticas, y la E. U. de Biblioteconomía y Documentación de la Universidad Complutense, que cedieron amablemente los locales para la celebración de los actos.

Éstos han sido los alumnos premiados en cada nivel:

NIVEL I

1. D. Fernando CRUZ ROBLEDILLO, *del Colegio de Santa María del Pilar de Madrid.*
2. (ex equo) D. Carlos HERNÁNDEZ CORBATO, *del I.E.S. Fortuny de Madrid.*
3. D. Gabriel de la CRUZ FORTÚN, *del Colegio Retamar de Madrid*
4. D.ª. María del Mar CALLAU ZORI, *del I.E.S. Fortuny de Madrid.*
5. D. José CAPILLA OSORIO, *del I.E.S. San Juan de la Cruz de Madrid.*

NIVEL II

1. D. Roberto RUBIO NÚÑEZ, *del I. B. Font Sant Lluis de Valencia.*

2. D. Carlos Eduardo GONZÁLEZ GUILLÉN, *del I.E.S. Los Rosales de Madrid.*
3. D. Ignacio MOREU FERNÁNDEZ, *del Colegio El Prado de Madrid.*
4. D. Alejandro SÁIZ SABRIA, *del Colegio de San Viator de Madrid.*
5. D. Luis CABALLERO GALLEGO, *del Colegio de San Viator de Madrid.*

NIVEL III

1. D. Borja CADENATO PALACIO, *del Colegio San José del Parque de Madrid.*
2. D. Carlos DOMINGO MAS, *del I.E.S. n.° 1 de Requena (Valencia)*
3. D. José Luis SANZ MERINO, *del I.E.S. de la Avenida de los Toreros de Madrid.*
4. D. Álvaro NAVARRO TOVAR, *del Colegio El Prado de Madrid.*
5. D. Miguel MORALES GARCÍA, *del I.E.S. de la Avenida de los Toreros de Madrid.*

Nos complace señalar que el alumno **Rubio Núñez,** que ha recibido el primer premio del Segundo Nivel, también obtuvo el primero del primer nivel en el Concurso del año pasado; participó en la VI Olimpiada Matemática Rioplatense y obtuvo la única medalla de bronce que consiguió la representación española. Igualmente, **Domingo Mas** y **Navarro Tovar,** premiados ahora en el Tercer Nivel, lo fueron en el Segundo en 1997 y en el Primero en 1996. Además, el citado Navarro Tovar participó este mismo año en la primera fase de la XXXIV Olimpiada Matemática Española, siendo alumno de 3.° de BUP, obteniendo el segundo puesto en el distrito de Madrid-A y en la fase final, celebrada en Tarazona consiguió una Medalla de Plata. Se confirma así en todos ellos una trayectoria muy prometedora para el futuro.

También debemos resaltar la sistemática repetición, año tras año, de éxitos obtenidos por alumnos de los mismos centros, lo que prueba la tenaz y eficaz labor formativa de algunos de sus profesores, a los que queremos felicitar.

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en este concurso, señalando, para cada uno, las calificaciones medias obtenidas por la totalidad de los participantes y por los premiados de cada nivel.

PRIMER NIVEL

Problema 1.°

Tenemos 1998 enteros, algunos positivos y otros negativos, cuyo producto es 1. ¿Puede ser cero su suma?

Calcula todos los valores posibles de esa suma.

Puntuación media de todos: 4,5; de los 5 premiados: 10.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 13 alumnos).

Problema 2.°

Hallar el área de un octógono inscrito en una circunferencia sabiendo que tiene cuatro lados alternos de 2 cm de longitud y los otros cuatro de 3 cm de longitud.

Puntuación media de todos: 2,7; de los 5 premiados: 6,6.
Puntuación máxima: 9 (alcanzada por 6 alumnos).

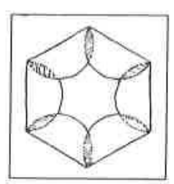
Problema 3.°

Érase una vez una lombriz con dos bocas, una en cada extremo. Ambas bocas eran idénticas y comían a la misma velocidad. Treinta minutos después de que la lombriz empezase a comer una hoja con una de sus bocas, la otra boca se sumó al festín y en otros treinta minutos se habían comido completamente la hoja. Si ambas bocas hubiesen empezado a la vez y una lo hubiera dejado cuando la hoja estuviese justamente a medio comer, la otra boca hubiese tardado x minutos en acabarla. ¿Cuánto vale x?

Puntuación media de todos: 7,4; de los 5 premiados: 10.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 35 alumnos).

Problema 4.°

En un hexágono regular de lado 2, con centro en el punto medio y radio la mitad de éste, dibujamos seis semicírculos interiores al hexágono que forman seis pétalos (zonas rayadas de la figura adjunta). Calcula el área de los seis pétalos.



Puntuación media de todos: 2,4; de los 5 premiados: 8,0.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 4 alumnos).

SEGUNDO NIVEL

Problema 1.°

En el hexágono regular *ABCDEF*, de lado 2, sea M el punto medio de CD.

a) Calcular la longitud de AM.

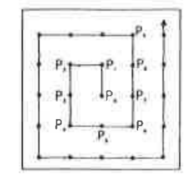
b) Si N es el punto medio de EF y las rectas AM y BN se cortan en el punto X, calcula el ángulo AXB.

Puntuación media de todos: 2,0; de los 5 premiados: 4,6.
Puntuación máxima: 7 (alcanzada por un alumno).

Problema 2.°

Consideremos en el plano puntos con coordenadas enteras. Se dibuja una "espiral poligonal" partiendo del origen, P_0, que recorre los puntos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, como se indica en la figura.

Determinar las coordenadas del punto P_{1998}.



Puntuación media de todos: 3,7; de los 5 premiados: 5,2.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 3 alumnos).

Problema 3.°

Demuestra que la suma de los catetos de un triángulo rectángulo es igual o menor que la diagonal del cuadrado construido sobre la hipotenusa.

Puntuación media de todos: 2,3; de los 5 premiados: 5,8.
Puntuación máxima: 9 (alcanzada por un alumno).

Problema 4.°

Calcula el perímetro del recinto del plano formado por los puntos (x,y) cuyas coordenadas satisfacen las tres ecuaciones siguientes:

$$y - |y| = 0$$
$$x - 3 + |x - 3| = 0$$
$$y - x + |y - x| = 0$$

Puntuación media de todos: 2,5; de los 5 premiados: 9,0.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 3 alumnos).

TERCER NIVEL

Problema 1.°

Considera la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números impares. Comprueba que dicha ecuación no posee raíces racionales.

Puntuación media de todos: 1,3; de los 5 premiados: 9,2.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 2 alumnos).

Problema 2.°

Calcula el área de un trapecio de altura 12 cm sabiendo que una de sus diagonales, que son perpendiculares, mide 15 cm.

Puntuación media de todos: 1,1; de los 5 premiados: 2,8.
Puntuación máxima: 8 (alcanzada por un alumno).

Problema 3.°

Razonar que ningún número primo es de la forma $F = 4n^8 + 81m^8$, con n y m naturales.

Puntuación media de todos: 1,2; de los 5 premiados: 1,8.
Puntuación máxima: 5 (alcanzada por un alumno).

Problema 4.°

Dado un número natural $m > 2$, probar que siempre se pueden asignar números enteros positivos menores que m a cada uno de los vértices de un hexágono, de manera que el número asignado a cada vértice difiera de la suma de los asignados a los dos contiguos en un múltiplo de m (posiblemente nulo).

Probar que en estas asignaciones, los números asignados a dos vértices contiguos son distintos.

Determinar cuántas asignaciones distintas se podrán obtener cuando $m = 11$.

Puntuación media de todos: 2,3; de los 5 premiados: 6,4.
Puntuación máxima: 9 (alcanzada por 2 alumnos).

39.ª Olimpiada Internacional de Matemáticas

La 39.ª Olimpiada Internacional de Matemáticas se ha celebrado en Taipéi (Taiwán) entre los días 9 y 21 de julio.

En ella han tomado parte delegaciones de 76 países, algunos menos que el año pasado. Quizá la ausencia más significativa haya sido la de China. En total, casi 450 jóvenes de los cinco continentes, con escasa representación femenina: sólo 31 chicas, 2 de ellas españolas.

El Jurado Internacional otorgó 37 medallas de oro, a los estudiantes con puntuación superior o igual que 31 puntos (el pasado año, el corte para el oro estuvo en 35); 66 medallas de plata (puntuaciones mayores o iguales que 24 puntos), y 106 medallas de bronce (puntuaciones mayores o iguales que 14 puntos).

Únicamente un alumno, de Irán, resolvió completamente los seis problemas, obteniendo 42 puntos (en Mar del Plata hubo cuatro alumnos con puntuaciones perfectas). Además, otros dos estudiantes –de Taiwán y Ucrania– tuvieron 41 puntos y hubo tres estudiantes –de Bulgaria, Hungría y Rusia– con 39 puntos.

Los países con mejores resultados fueron:

1. Irán: 211 puntos; 5 oros, 1 plata.
2. Bulgaria: 195 puntos; 3 oros, 3 platas.
3. Hungría: 186 puntos; 4 oros, 2 platas.
4. Estados Unidos: 186 puntos; 3 oros, 3 platas.
5. Taiwán: 184 puntos; 3 oros, 2 platas, 1 bronce.

Los resultados de los españoles, ganadores la última Olimpiada Nacional, fueron los siguientes.

1. Mario Andrés Montes García (de COU, Salamanca): 9 puntos, Mención de Honor.
2. Ramón José Aliaga Varea (de 3.° de BUP, Valencia): 3 puntos.
3. David Martín Clavo (de COU, Zaragoza): 1 punto.
4. María Pé Pereira (de 3.° de BUP, Burgos): 5 puntos.
5. Beatriz Sanz Merino (de 3.° de BUP, Madrid): 2 puntos.
6. Jaime Vinuesa del Río (de 2.° de Bto. LOGSE, Valladolid): 16 puntos, Bronce.

La próxima olimpiada se celebrará en julio de 1999 en Rumanía, primer organizador de una Olimpiada Internacional de Matemáticas, y la del 2000, Año Internacional de las Matemáticas, tendrá lugar en la República de Corea.

Recuerdo de Salvador Herrero

Salvador Herrero Pallardó nació en Burriana en 1920. Finalizada la Guerra Civil española, reemprende sus estudios, en Madrid, para cursar en la Universidad Complutense la carrera de Ciencias Exactas.

Terminada la Licenciatura, se pone de manifiesto su vocación didáctica, dedicándose a la enseñanza de las Matemáticas en varios colegios reconocidos. Hay que destacar que desde el curso 1950-51, sin interrupción, hasta el de 1963-64, fue profesor en la "Institución Española de Selección Escolar" dirigida a alumnos superdotados, institución que contaba con el asesoramiento de D. Pedro Puig Adam.

Durante este mismo período fue Profesor (primero Auxiliar y luego Encargado de Curso) en la Facultad de Ciencias Matemáticas de Madrid y también desde 1959, fue Encargado de Curso en el "Curso de Iniciación" en la E.T.S. de Ingenieros Industriales.

El año de 1964 marca un cambio de orientación en la vida profesional del profesor Herrero: decide hacer oposiciones a Institutos de Enseñanza Media, obteniendo la plaza de Agregado Numerario del Instituto femenino de Ciudad Real. Su espíritu de superación se pone de manifiesto una vez más: al año siguiente, en julio de 1965, por oposición, consigue la plaza de Catedrático del "Instituto San Andrés" de Puertollano, y un año después, mediante concurso de traslado, es nombrado Catedrático del "Instituto Maestro Juan de Ávila" de Ciudad Real, donde sucesivamente ocupó los cargos de Secretario, Vicedirector y Director.

La estancia en este Centro, hasta su jubilación, fue muy fecunda en el aspecto didáctico, aspecto al que consagró la mayoría de su tiempo. Citaremos alguna de sus numerosas actividades:

- Curso de Matemáticas aplicadas a la Genética (dirigido, especialmente, a profesores de Ciencias Naturales).

- Cursos de "Orientación y Didáctica de las Matemáticas", destinado a los profesores de las Secciones Delegadas y Colegios dependientes del Instituto.
- Cursos de Ampliación de Matemáticas (que tenían lugar todos los años) para los alumnos destacados en COU.
- Cursillos sobre "Teoría de Conjuntos y su aplicación al desarrollo y fundamentación de las matemáticas".
- Repetidas veces impartió "La enseñanza de las matemáticas con números en color" en el Centro de Educación del Profesorado de Ciudad Real.
- Consejero Asesor de Educación de la Delegación del Ministerio de Educación y Ciencia.
- En 1967 funda en el Instituto el "Club Matemático Puig Adam", organizando concursos anuales de problemas, para los alumnos de últimos cursos, con premios para los alumnos destacados y participación, subvencionada, para los mejores, en la Olimpiada Matemática Nacional.
- Hasta su muerte, acaecida el 21 de mayo del presente año, ha sido Vicepresidente de Castilla-La Mancha de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas.

Una faceta menos conocida del profesor Herrero, era su notable afición a la Psicología, que cultivó durante años; estaba en posesión del Diploma Superior en Psicología y Psicotecnia, diploma para postgraduados, expedido por la Escuela de Psicología Aplicada y Psicotecnia de la Universidad de Madrid. Resumimos muy brevemente sus numerosas actividades en este campo:

- Crea en Ciudad Real el Instituto Provincial de Psicología Aplicada y Psicotecnia, del que fue director.
- Fue psicólogo de la Unidad Provincial de "Valoración de Minusválidos" de la Seguridad Social.
- Fue jefe de los Servicios de orientación escolar del Instituto Juan de Ávila.
- Miembro ordinario y, posteriormente, miembro titular de la Sociedad Española de Psicología. En la V reunión de la referida sociedad presentó el notable trabajo "Primera Confrontación del test F.N.C. en alumnos subnormales, normales y superdotados.
- Su trabajo "Aprendizaje matemático y nivel mental" fue publicado en la revista francesa EDUCATION.

En estas breves líneas se ha pretendido exponer esquemáticamente la vida profesional de nuestro entrañable amigo Salvador Herrero, poniendo de manifiesto algunas de sus actividades y trabajos en su doble quehacer diario: Matemáticas y Psicología.

Descanse en paz este insigne profesor, que con tanta dedicación inpartió su enseñanza a sus discípulos.

J. Vicente G. Sestafe

Notas necrológicas

A finales de agosto ha fallecido el padre de nuestro compañero Joaquín Hernández Gómez, miembro de la Junta Directiva de nuestra Sociedad. Deseamos expresar, en nombre de todos los miembros de la Sociedad, nuestro más sentido pésame.

* * * *

Después de cerrar este número, la Junta Directiva ha tenido noticia del fallecimiento del padre de Carmen Azcárate, Secretaria de la Federación de las Sociedades Matemáticas, entre las que se incluye nuestra Sociedad. En nombre de la Junta Directiva, nuestro más sentido pésame.

Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

Como ya indicamos en números anteriores de nuestro Boletín, la dirección de Zentralblatt für Didaktikder Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 30 (1) DE 1998

#0169 (sección D35). Technology gets polytechnics closer: a collaboration in the European Union between Spain and Italy, por Mascarello, Maria; Hueso, José; Roca, Alicia; Torregrosa, Juan R., Bol. Soc. Puig Adam 47 (1997), págs. 13-21.

#0322 (sección F70). Unidades de medida antiguas de Castilla y León (Valladolid), por Ortiz Vallejo, María, Bol. Soc. Puig Adam 47 (1997), págs. 70-83.

#0359 (sección G43). Demostración del teorema de Tales por métodos elementales, por Pescador Díaz, Pedro, Bol. Soc. Puig Adam 47 (1997), págs. 22-29.

#0381 (sección G64). Una demostración del teorema del coseno, por Cortés López, Juan Carlos, Bol. Soc. Puig Adam 47 (1997), págs. 45-46.

#0391 (sección G90). Los espacios de Lorentz y la geometría métrica del triángulo, por Romero Márquez, Juan Bosco, Bol. Soc. Puig Adam 47 (1997), págs. 30-44.

#0448 (sección I35). Aplicaciones de las matrices al estudio de sucesiones numéricas, por Méndez Domínguez, M. Azucena, Bol. Soc. Puig Adam 47 (1997), págs. 58-69.

#0493 (sección K30). Presencia de la Matemática discreta en las competiciones deportivas, por Espinel Febles, María Candelaria, Bol. Soc. Puig Adam 47 (1997), págs. 47-57.

Copias de estas recensiones se encuentran en la Sede de Nuestra Sociedad, a disposición de los interesados.

Reflections on Computers in School Mathematics: CAMP +30[1]

Larry L. Hatfield

Department of Mathematics Education
The University of Georgia

Abstract

In the Sixties, the Computer-Assisted Mathematics Project (CAMP) at the University of Minnesota High School was a pioneering effort to explore student programming applications of the computer in school mathematics. Over the ensuing three decades, we have witnessed dramatic changes in the capabilities and potentials of the technology. What has occurred in the usages of computers in school mathematics? How has computing technology impacted on the teaching and learning of school mathematics? What have we learned?

Introducción

For the past thirty-five years, I have participated in an amazing journey within my career as a mathematics educator. This personal journey has involved a continuing search for, and understanding of, significant ways to use the computer in my teaching of mathematics and my role as a researcher and teacher educator. In my early review of research on computers in mathematics education (Hatfield, 1969) [coincidentally, presented at the April 1969 Annual Meeting of the NCTM in Minneapolis], much of the focus was upon CAI (computer-assisted instruction) and its associated CMI (computer-managed instruction) with only a few examples of student programming emphases. Looking back, I recall there was great interest and anticipation over the potentials, mostly then visions of a future where the computer would be ubiquitous and omnipresent! How has that envisioned future unfolded, to become the past three decades?

In this discussion, I will trace at least some of that journey with a goal of providing insights into the broader issues and impacts of this technology, which has already revolutionized our world and which promises to involve even greater transformations of our human activities in the future. By examining this history[2], my goal is to illuminate what I perceive to be the underlying premises and assumptions, the major qualities of these computer usages, and the fundamental issues involved. Perhaps this reflection will stimulate us to ponder more deeply what we are doing, and to shape our choices related to applications of computing technologies in ways that improve mathematical education of our students.

The emergence and growth of computers in mathematics education is a complex set of overlapping and interacting developments and events. There are many ways to sort these. As a broad organizer, I will adopt Taylor's (1981) trichotomy in which the computer is seen as "tutor" (simulating a kind of teacher), as "tutee" (being "taught" by the user via constructed programs), or as "tool" (were the user executes pre-stored software to do computationally-based work). After briefly reviewing the history within each of these domains, I will provide an analysis to examine the themes and issues that appear to cut across and within these computer usages. I will summarize with some indications of what I see to be the major problems and challenges for computers in mathematical education, yet before us.

Computer as "Tutee"

In this category of uses of the computer, the machine provides the context for mathematics students and teachers to write, test, refine, extend, and apply their own procedures or algorithms. The broader goals may vary, ranging from teaching computer science concepts, to training programmers, per se, to developing graphics artists, to creating simulations (such as games), to a focus on the mathematical concepts and processes involved. In the following, I recall some of the very earliest examples of student programming, tracing subsequent developments and variations.

---

[1] Prepared for presentation at the 1998 Spring Conference of the Minnesota Council of Teachers of Mathematics.

Nota de los editores: en el pasado verano tuve el placer de pasar unos días en la Universidad de Georgia en Athens (EE.UU.). Allí conocí el excelente trabajo que están desarrollando los profesores del Departamento de Educación Matemática de la Facultad de Educación de aquella universidad Larry Hatfield y John Olive. El profesor Hatfield ha estado experimentando desde hace más de 30 (!) años con la introducción del ordenador en el aula de matemáticas. Hoy tenemos el honor de acoger en las páginas de nuestro Boletín una recopilación de las experiencias y reflexiones de este pionero *(E. Roanes Lozano).*

[2] Since I am basing my presentation on the past, I wish to clarify several points related to my approach. First, I am not a historiam, and I do not claim that this discussion has resulted from historical research, whose methodology requires an exhaustive search involving (where feasible) primary documents. Rather, this is a "personal history" in which idiosyncratic perspectives, interpretations, and biases are freely represented! I do believe that we badly need careful historical research in the field of mathematics education, as we seem to ignore the lessons of the past when we "make apparent discoveries" and "commit similar errors" while we again "re-invent the wheel".

CAMP-Student programming in BASIC

During the winter months of my initial year of teaching school mathematics at Richfield High School in 1963, I enrolled in a special evening workshop at Control Data Corporation (CDC), taught by Dr. Robert ("Doc") Smith. Along with more than 75 other interested Twin Cities area mathematics teachers, I was introduced to simple FORTRAN programming via key-punched data cards. Despite the many input/output challenges and format error, I was hooked!

After I joined Donovan Johnson and David Johnson, along with two other newly appointed teachers, Dale LaFrenz and Tom Kieren, at University of Minnesota High School in September 1963, we began to explore a brand-new programming language. BASIC had just been made available on the Darmouth College (Hanover NH) time-sharing computer (itself a major breakthrough). In 1964, under a General Electric Foundation grant we began a two-year experiment with classes of grade 7, 9 and 11 students at U-High. At that time, Pamela W. Katzman and John Walther joined our faculty as well as the CAMP research and curriculum development team[3].

In our CAMP research, we investigated the possible role of the computer as a programmable tool in school mathematics. Our philosophical view[4] emphasized a focus:

- on students using the computer as a *problem-solving tool,*
- on students *controlling the machine* rather than vice-versa (as in the contrasting "CAI" of the day),
- on students designing and improving their *own* algorithms,
- on students using programs and output as a context for modeling and deepening their *conceptual and procedural understandings* of their mathematics, and
- on students *investigating mathematics* in a way that might promote their insight and discovery.

We saw school mathematics as a context for students who, because of the nature of the subject matter, must actively engage in a *problematic approach,* and who, through such approaches, could learn to be generative and self-directed. Indeed, we were mainly believers in the so-called "new math", seeing the value of learning fundamental structures in coming to understand mathematics as a system "that made sense". At the same time, we balanced abstract theory with a need to operationalize (apply) new ideas –in the form of computer procedures that would model the theory and allow the potential for extensions of the theory. Within the curriculum advocacies of the Sixties, we also believed in the "new pedagogy" (see esp. Bruner, 1960; Dienes, 1960, Skemp, 1971) that saw students as active learners (rather than passive receptors of information to be memorized and practiced) and teachers as stimulators and guides (rather than sources of information or "telling"). We saw student programming uses of the computer as a context for engaging students in the construction of meaning –building– up understandings, skills, and appreciations by using powerful tools they could control. We chose the BASIC language because of its ease to learn and use, which avoided diverting the focus to an emphasis on computer science or programming, per se.

Among the results of our research, we were able to report certain general and specific benefits to students (Hatfield & Kieren, 1972) and we were able to provide an existence model of the detailed infusion of student programming into school mathematics topics (see published CAMP textbooks, 1968-70). Along with several other mathematics teachers who were exploring student programming activities in school and collegiate mathematics in this early period (Andree, 1967; Bitter, 1970; Dorn, 1970; Foster, 1972; Nevison, 1970), we witnessed the positive results for many students in their conceptual understanding, their development of mathematical procedures, their interest in approaching mathematics as a problem-solving activity, and in their excitement and attraction to using the computer. For some students, the task of constructing computer programs may not have made their learning of concepts or procedures easier, and they may have been as confused or disinterested with using the computer as without –of course, such technology is never a panacea for promoting high quality mathematical experiences.

Turtle Geometry and Logo

By the late Sixties, work on developing an even simpler, more child-oriented computer programming language had resulted in the early versions of Logo (Feurzeig et al, 1969). The focus on young children's creations in controlling the mechanical "turtle" was soon accompanied by mathematicians' interest in such egocentrically-oriented constructions as representing a new theoretical geometry (Abelson & diSessa, 1980). With the appearance of the first Apple microcomputers, versions of Logo appeared that operated within the graphics environment by drawing traces of an icon "turtle's" paths. While the period of 1965-80 belonged to BASIC enthusiasts, the decade of the Eighties saw Logo become a worldwide, multi-age phenomenon.

Launching Logo into popularity as its primary advocate, Papert (1980) provided an important conceptual framework (appealing to developmental psychology and a constructivist epistemology) for its use in schools, and he quickly became the "guru" for a tidal wave of renewed interest in student programming. Perhaps more than any other perspective, Papert's notions of a child-centered, "microworld" environment had broad appeal, to

---

[3] Current known information about individual:
Dr. Donovan A. Johnson, Professor Emeritus, University of Minnesota.
Dr. David C. Johnson, Shell Professor of Mathematics Education, Kings College, University of London.
Dr. Dale E. LaFrenz (past President of MECC), President of QTech Systems, Incl., Minneapolis.
Dr. Thomas E. Kieren, Professor Emeritus, University of Alberta.
Dr. Pamela W. Katzman, University of Wisconsin-River Falls.

[4] Summarized from "Philosophy of CAMP", in L. Hatfield & D. Johnson (1969): *CAMP First Course, Teacher's commentary,* Glenview IL: Scott, Foresman & Company, pp. 1-3.

those looking for computer applications to mathematics learning that were controlled by the student. Logo proved to be easy enough for even very young children to enter and "play", yet powerful enough to offer capabilities such as mathematical recursion and modularized structures which could be called as procedures (Noss, 1985; Olive, 1985). Internationally, advocates of Logo intensely support its use, yet it is unclear how extensively it is current used (at least one of the most widely used versions is no longer available in today's Windows or Macintosh operating systems).

Rather coincident with the development of Logo were the urgent calls for reform of computer programming languages and operating systems by computer scientists –which had the effect of ensuring that Logo did include some of the called-for features. It had become clear that early symbolic languages (e.g., FORTRAN, COBOL, ALGOL) lacked the necessary structural qualities to ensure that anyone (including its author!) would be able to "debug" the massive procedures that were being written (such as for airline reservations). The development of Pascal, C+, and other structured programming systems followed (but, alas, too late for many situations, as found in the current "millennium crisis" involving the imminent computer errors related to miscoding the year to "00"). BASIC's developers, Kemeny and Kurtz, provided an update of the "old favorite" (which through the Apple and IBM PCs had become the built-in programming language on all microcomputers) in their release of True BASIC in 1983, which sought to offer most of the modern features of structured languages.

As the demand for computer programmers to work in the explosive commercial and governmental applications of computers grew in the Seventies, we saw an Advanced Placement precollege computer science course introduced by the College Board. One consequence was to attract many high quality school mathematics teachers, who were typically the only available local faculty who might be trained to teach the course.

Algorithmics & informatics

Particularly in Europe, the perspective of "informatics" was promoted from the mid-Seventies. Within this perspective, students would develop a broader knowledge related to computing technologies, which would include attention to certain computer science concepts, computer programming (not necessarily trained in any specific language, but to learn more basic and fundamental ideas or methods, such as a theory of data structures), and information processing science. The connections to school mathematics varied, but this was often seen as the context where attention to at least certain elements of informatics, such as discrete mathematical approaches, would best occur (Johnson & Tinsley, 1978; Johnson & Lovis, 1987; Cornu & Ralston, 1992).

Within the ranks of professional mathematicians, we can find a more substantial criticism and debate arising over the role of student programming and an emphasis upon algorithmics (eg., Mauer, 1984, 1985 vs. Halmos, 1985; Koblitz, 1996 vs. Dubinsky & Noss, 1996; Wu, 1996). This debate centers on differing perspectives about the nature of mathematical education using computers, especially dealing with issues of the role of proof and learning to construct proofs.

Computer as "Tutor"

This approach may well be the very first way that a computer was used in education (Smallwood, 1962). As I reported in my early review (Hatfield, 1969), the development of computer systems for simulating "teaching" was immediately widespread in the form of CAI (computer-assisted instruction) strategies. Prior to the microcomputer, such systems were rather large mainframe, multi-terminal, time-sharing approaches. The instructional goals were upon mostly low level outcomes resulting from drill and practice of skills or "facts" to be made habituated or immediately recalled. The curricular designs were fostered under the premises of neo-behaviorism where behavioral objectives, task analyses, hierarchies of skills, and performance standards led to the design of tightly controlled, randomly generated sequences of stimulus-response experiences of students.

With the continuing infusion of federal monies to support large R&D laboratories at universities (eg., Suppes at Stanford, Bitzer at Illinois, Glaser at Pittsburg, Hansen at Florida State, Mitzel at Penn State) and in the military (eg., National Science Foundation Center at Ft. Gordon, GA), there occurred a massive effort to design such systems that could be shown to be more effective in instruction than regular teaching. Overall, in school mathematics we saw positive results could be achieved by students participating in regular, systematic practice, and with some forms of tutorial level instruction.

This pursuit of the "will-o-wisp" replacement for a teacher has continued, and it is still possible to find the remnants of this movement in certain commercial systems (eg., Computer Curriculum Corporation, Josten's Learning Lab, Learning Logic System) which still exist in many schools across the nation. Instructional technology theory has been refined, but remains essentially unchanged with respect to the necessity to analyze formalized "knowledge systems" into fragmented bits which are "fed" to the learner by the computer system. While there may be incremental improvements in the basis for doing this, there still remains little clear evidence from research on mathematics learning and teaching that can be built into these systems.

For many mathematics educators, however, the paradigm of the child being "taught" and controlled by the machine has been essentially rejected. With the reality of the microcomputer, and the call for a focus on mathematical problem solving (NCTM, 1980), the stage was set for a different kind of computer experience.

Computer as "Tool"

This concept of the computer in the school was originally focused on the ways that the teacher might use it for supporting the *management of instruction,* such as with data bases of student performance data resulting from CAI sessions. Other such applications by teachers might involve computer "gradebooks", or computer-generated "worksheets" to be printed, or more general use of word processors for producing curriculum materials or other communiqués. Yet another stream of innovations involved teachers using the computer as an information storage and retrieval system for supporting and enriching the curriculum.

In mathematics education, teachers who could develop their own computer programs could create *demonstration* of certain numerical concepts or procedures –here, the focus was on the mathematical output, not on the computer algorithm or student programming, per se. Later, with more sophisticated graphics available on microcomputers, such demonstrations could include graphical figures (but many of us will recall how challenging the writing of such programs could be). Not until we began to see the concept of the computer shift to that of a *productivity tool* in business (with the first spreadsheet system early in the Eighties) did we begin to see glimmers of a new view of school mathematics tools.

Computer Algebra

One early vision was for a software system that would perform algebra –a symbolic manipulator that functioned as a model of the operations of algebra. While serving as a visiting professor at Teachers College in 1973-74, I recall being visited by a programmer from a Manhattan computer center who demonstrated an amazing program he was developing –an algebraic "solver" that could progressively produce algebraic simplifications from your successive commands (compared to the previous numerical approximations to solutions of equations produced from numerical methods modeled by a computer algorithm). In his program, the user had to examine each result, decide what to try next, enter the appropriate command (which appeared to be an entirely new language to be learned), and wait (sometimes quite awhile) for the machine to produce and print a result (often in an unrecognizable format)! Of course, if you entered a directive that made the expression or equation "worse", it blindly complied!

Perhaps the earliest version of such a system that did gain considerable use was *mu-Math* (Wilf, 1982). We all may remember how challenging it was to encode correctly the mathematical operations one desired (a parallel to the early computer programming languages which demanded great precision in formatting and syntax?). Its successors (eg., *Algebra Xpresser, Mathematica, DERIVE, Maple),* along with the emergence of increasingly sophisticated versions built into powerful graphics calculators, have clearly established a user-friendly environment for performing algebraic (including calculus and geometry, as in Roanes-Lozano, 1996) operations. Of course, here we have a new construct for working –the *"mathematical notebook".* Here, the vision is that the student will produce an integrated report of the mathematical solution process, along with a narrative discussion of her/his thinking which documents not only the "product" but the "process" of reasoning used by the student. Many of the important emphases in the NCTM Standards (1989), including problem solving and communication, can be promoted through students experiencing mathematics in such an environment.

Spreadsheets

Many mathematics educators at all levels have embraced the use of modern, general purpose spreadsheets as contexts for encouraging even young students to generate investigation and problem solving (eg., Abramovich & Nabors, 1997). In learning how to use a spreadsheet, a student sees how to encode an intuitive concept of variable by naming a cell (using a column letter and a row number). With the "fill down" command, we see how this encoding is repeated automatically to produce a set of such labels, all of which obey the same column letter but which vary across the rows. Such a set of expressions can be used to generate a set of numbers (eg., the counting numbers as "counters" –enter "1" in A1, enter "=A1+1" in A2, "fill down") and then be seen to define a transformation of a these successively (eg., enter "=2*A1+1" in B1, "fill down" –to produce the odd numbers "3, 5, 7, ..."). Thus, through "hands on", quite concrete actions the student can construct and investigate generative algebraic operations easily. Experience in such an environment would appear to promote significant forms of algebraic reasoning. Our mathematics education journals, curriculum resources, and mainstream textbooks now include increasingly serious and rich attention to infusing spreadsheet applications. To guide and support such usages, we need research on student learning in these contexts.

It is interesting to note, that while interest and attention to student programming usages have waned, within the spreadsheet context students are encountering some aspects of the notions of algorithmics. This occurs when students develop procedural actions that generalize across a class of examples. Further, within the available functions are many logical commands for writing instructions completely analogous to earlier computer programs. Such embedded overlaps among the "tutee, tutor, tool" categories blur any attempts at making these sharp distinctions.

Further, we are beginning to see the "next stage" of designs and usages with the construct of the generic spreadsheet. Specialized spreadsheets (eg., *DataScope,* designed by Konold et al., 1997), designed as "microworlds" (ala' Papert) for mathematics students, provide many features especially tailored to the more specific mathematical domain under study. In such a system, the fundamental nature of a spreadsheet is retained while eliminating many of the most esoteric or advanced operations –focusing on those features which would assist in helping students work with fundamental concepts. Efforts to model the concepts or underlying mathematical operations in ways that promote conceptual understanding are emphasized.

Specialized Tools

This notion of adapting generic designs of computer tools to embody features more applicable or accessible to learning mathematics has produced some of our most significant pedagogical and curricular tools. *The Geometric Supposer* (Schwartz et al, 1993) operated on the Apple II microcomputers in the early Eighties, providing a rich environment for exploring and proving geometric theorems. In separate developments, both *The Geometer's Sketchpad* and *Cabri Geometry* capitalized on the more powerful Macintosh windows-oriented interface to provide a dynamic ("click and drag"), constructive geometric world. To many, these tools represent the best state-of-the-art context for featuring the richness of both metric and non-metric geometric conceptual development, including transformations, dilations, and certain algebraic graphical representations. Currently under development at Key Curriculum Press is the *Fathom Dynamic Statistics* toolware, promising to provide for data analysis and statistics what GSP has provided for geometry –but interfacing seamlessly to the World Wide Web for easy access to data bases, worldwide.

"Microworlds"

In many ways, these specialized tools are exemplifications of the "microworlds" construct advocated by Papert (1980, 1993). Many mathematics education researchers have sought to investigate the design and use of such environments (Kaput & Thompson, 1994). One pervasive notion is the application of *"multiple-linked representations"* –building upon Dienes (1960) theoretical principle of multiple embodiments, where rich conceptual understanding are posited to result from seeing the ideas re-presented in differing, but related, ways. For example, in a computer microworld we might see the use of tables, equations, graphs, and figural models. Since these are programmed to be "hot linked", a change of values made in one representation automatically results in appropriate changes in all others. Again, while we have increasingly interesting and more powerful examples of such software, we still lack clear research evidence of the efficacy of these environments for mathematics learning.

The Internet & Web

We are witnessing today the explosive growth of the global use of the Internet and the World Wide Web. Among other interpretations, these are informational and communication technological computer-based tools. As we are swept along with the broader social and cultural impacts of this environment, it is not clear how such tools will change school mathematics. Some possibilities can be suggested.

- As a *communications tool,* the "walls" of the classroom and school are opened up to contact with the "outside" world. Teachers and students can connect with others, as in the Math Forum or to an expanding set of relevant homepages on the Web. Participation in interactive "chat rooms" can give rise to a new form of involvement by students and teachers.

- As an *information storage and retrieval tool,* Web resources can be used to support an enriched school mathematics curriculum which includes real, data-based applications. Students and teachers can search for information and data related to an ongoing classroom investigation. Especially with tools designed to support it (eg., Fathom Dynamic Statistics), the actual data (eg., from the U.S. census) could be "down-loaded" for analysis, interpretation, and use in the classroom.
- As an *"electronic classroom",* entire courses can be mounted and offered through a homepage on the Web. One of our faculty, Dr. James W. Wilson, has developed an exemplary model of Web-based courses (see *http://jwilson.coe.uga.edu)* which he teaches. Complete course syllabi, including all of the mathematical problems posed, are available to anyone –and his site has more than 10,000 "hits" per month! More significantly, the students post their solutions ("notebooks") on his homepage– so, after several offerings of the course the participating teachers have developed a rich array of resource material to share. Further, numerous precollege students have found this material, engaged in solving the problems, and submitted reports of their work to be made available on the same Web site. More recently, he has helped the teacher participants to develop their own homepages where they and their students are working in similar patterns of productive activity –and these are linked to Wilson's page (and, thus, to each other)! Thus, a growing "web" or network of collaborates, including professors, teachers, and students, is flourishing in the finest tradition scholarship.
- As an *"electronic seminar",* participants (including teachers and their students) can engage in real-time interactions with other classrooms, with university scholars, with political leaders, with workers who can interact about their uses of mathematics, even with parents who wish to "visit and observe" their child's school mathematical activities. A couple of examples –in 1996 we conducted a doctoral dissertation defense which included a faculty member from her office in Indianapolis, connected through the Internet with distance conferencing software. In May 1997 we sponsored an Internet– based colloquium featuring Professor Alan Schoenfeld (visiting from University of California, Berkeley) as he presented a colloquium to our faculty and students which was simultaneously viewed worldwide by nine other sites via distance conferencing software –with several sites sending email questions and comments to our Athens classroom!
- As an *"electronic laboratory",* researchers can be interfaced to schools to conduct joint, even globally-based, school mathematics and science investigations and projects. Researchers, interested in collaborating regularly with classroom teachers in studies of learning and teaching mathematics, can use distance conferencing to observe classroom activity, "interview" individuals. Teacher educators can serve as a "distance teacher" or mentor, stimulate trials of innovative problematic situations or curriculum materials, engage teachers individually or in groups as part of staff

development activities, or help teachers breakdown their isolation by connecting with other teachers with similar interests or needs.

Synthesizing the First 30 Years: Themes and Issues

To be sure, it is complex and risky to attempt a simplification of something as broad and varies as three decades of activity whith computers in mathematics education! But, having been an early and continuous participant in our search for how we might use this marvelous technological tool to improve school mathematics, I've repeatedly been engaged with many colleagues in trying to make sense of each period of activity and each new innovation as it occurred. Here, I'll try, one more time.

The following discussion is organized around several *dimensions* (or domains) for sorting the various phenomena –the events, developments, factors, and variables that are embodied in computers in school mathematics. For each dimension below, I've tried to address some of the *themes and issues* of this 30-year history.

Philosophies and purposes

The guiding perspectives for school mathematics teachers and students using computers have remained mostly intact and coherent across time, despite great changes in many of the supporting elements of hardware and software. For the most part, these reflect the more fundamental beliefs held about the nature of school mathematics and its learning and teaching.

That is, in the earliest applications of computers to mathematics education we find dramatic contrasts in the underlying epistemologies, philosophies, and goals. on one "end" of a continuum are the views of those who see mathematics as a finished, closed system of concepts, procedures and skills to be modeled (by authority) and imitated (by novice) –CAI, tutorial systems. At the other "end" are the views of those who see mathematics as an idiosyncratic construction resulting from problematic situations posed as explorations and investigations where the daily problem is to build-up meaning and understanding through personal actions and socially developed interpretations and reasoning –CAMP, Papert's Logo & microworlds, GSP and other tools. This contrast (essentially in the extent of student control, initiative, and generativity) can be found early and continuously in this history, despite the emergence of new hardware or forms of access.

I consider this contrast in the fundamental philosophical bases to be a major theme in school mathematics with the most critical issues involved. There is a pervasive tension in our field, exemplified by these very different concepts of our goals and purposes. To me, this contrast is anchored in very different notions of mathematics, per se. What *is* mathematics? What does it mean to *know* or to *do* mathematics? What should be the nature of

school mathematical *experiences?* Why should students have mathematical experiences –just what impacts and consequences to we intend? What should be the *nature* of one's mathematical knowledge? In particular, what is the balance of memorization and habituated skills and procedures versus the use of tools to retrieve and solve?

In the realm of computer-based technologies, we must confront these issues. This is the case, because these tools increasingly force us to question the need for requiring students to develop the kinds of mathematical competence that was needed in the past (when such tools were not available). Additionally, we must ponder the "trajectory" of technological change.

Changes

The reality of technologically-driven change is omnipresent. Toffler's notion of "future shock" is the crisis of coping with rapid change, and the fact that the rate of change is accelerating. Mathematics and mathematics education are especially impacted, as the technological changes bring to us increasingly powerful contexts for engaging in mathematical work.

Across these decades, we have witnessed amazing changes in the power and nature of the technology (hardware) and its applications (software). The development of the particular applications, the infusion of the power into curricula, the impact upon teaching practices, the shifts in the nature of learning activities –for the most part, none of these have kept pace with the changes in the technology. This entropy ("lag of the seasons") is due to many complex factors, but we know that central to it is the knowledge and will of the teacher. While there may be other systemic, even infrastructural, factors that mitigate against rapid adoption and implementation, the fundamental agent for change in the classroom is the teachers. Across these decades, it has been a constant struggle for teachers to learn about computer applications to their teaching.

Perhaps even more critical are the challenges of adjusting our pedagogical beliefs to a shifting concept of what our students might be doing as they experience school mathematics in ways that reflect new technologies. In the early Seventies, the first inexpensive handheld calculators caused many to ponder –what is its role, and what changes in our expectations for learning arithmetic are needed? With the recent powerful algebraic, geometric, and calculus tools, even collegiate mathematics has become a set of complex issues about learning and teaching traditional materials with traditional goals and expectations. The issues of change, and adaptation to change, remain fundamental concerns of mathematics educators.

Interacting with what is occurring within our profession are the broader impacts of technology on society. Despite home computers and Internet access, parents typically do not understand needed changes in our school mathematics goals and curricula, or in our teaching approaches, or in their children's learning. Parental expectations (that their child's mathematical experiences should be like those they recall from their own schooling) often serve to impede us from making needed changes –despite the fact that parents will agree that the rest of their world must adapt to new technologies. The issues of helping parents to cope with changes in school mathematics have remained central across these decades.

As we continue to confront change, and all of the challenges of "keeping up", perhaps the most profound challenge is in the concern for a school mathematical education that prepares one for a future that we simply cannot predict or describe very well at all. What, exactly, should be the nature of a mathematical education where computational and informational tools are likely to be even more powerful and ubiquitous? What kinds of problems, and problem-solving abilities, would the students of today need in the next millenium?

Myths and realities

One pervading characteristics is the rhetoric of promise –what we could do with computers, if... From the earliest days, the "mythology of innovation" (eg., Oettinger) has characterized our thinking about possible innovations with computers in mathematics education. We speculated that through programming our students would be transformed into generative problem solvers, actively engaged in constructing, testing, and refining powerful algorithms. The reality was surely always much less. To be sure, those of us who experienced such usages with our students can testify to impressive examples, but many of the challenges for our students' learning were still present in the programming situations.

The myths of individualization envisioned in CAI or computed-based tutorials were basic to the rationales for developing these expensive, unwieldy systems. The reality of how poorly real individualization was accomplished pervades the relative lack of success of such systems. The real fact is that we still know so very little about the complexities of a child constructing their own mathematical knowledge, that any feeble attempt to model an insightful, sensitive teacher is certain to fail.

When we consider computer environments where we shift greater control and responsibility to the student, we may find greater positive impact. Here, again, we must be cautious about balancing the many complexities of the best teaching –given the most powerful tools imaginable, most students will not "go off and invent mathematics" by themselves. The role of the teacher in stimulating and guiding productive mathematical activity is still central –and this has remained so across these decades of computer work.

Nature of computer uses and users

Strikingly, there appears to be considerable consistency in the nature of the uses and the users of computers in school mathematics education across these decades. While the qualities and details of the applications have changed quite dramatically, the essential trichotomy suggested by Taylor remains. Perhaps the shift toward de-emphasizing the "tutor"

and "tutee" uses with an almost explosive emphasis on "tool" is the most important change to recognize. And, as we explore the role of the Internet and Web, it is likely that this focus will become even more dominant.

Even so, this does not greatly simplify the issues related to users. These tools require us to confront issues related to the fundamental nature of the learning tasks, of the roles of the student and teacher, and of the underlying purposes and goals of a sound mathematical education. Again, given our resistance to change, our lack of clear understanding of mathematical learning, and our inability to predict the future, what can and should we do today to infuse significant uses of computers? How do we help teachers to adapt adjust to become significant users of computers in school mathematics –given the general and pervasive resistance of many teachers to incorporating *any* type of modern technology into their teaching (eg., Jackson)?

Problems and Challenges Before Us: The Next 30 Years?

It is interesting to ask: what, of today's picture of computers in school mathematics, would I have predicted in 1965? I think I would have predicted

- an increasing role for student programming (with more powerful yet simpler to use languages),
- massive tutorial systems capable of adaptive decisions reflecting individual needs and characteristics,
- more pervasive use of practicing with sophisticated computer systems,
- more expansive, yet curricular-based, interactive information storage and retrieval systems designed for students, and
- mathematical "notebook" software (either on large time-sharing systems or in "notebook" handheld computers) which integrated programming, word processing, and information retrieval to allow a student to work on comprehensive project-oriented problem solving.

I would not have predicted spreadsheets, GSP, algebraic manipulators, or the Internet, per se. In the main, I think I would have been quite "off the mark" in my predictions.

Rather than risk even a "peek in the crystal ball", I would propose several questions to stimulate possible thinking about our choices, and then offer two scenarios. In both, I'm assuming a backdrop of continued technological innovation and development in which computers will become even more powerful, miniaturized, inexpensive, user-friendly, enhanced, and omnipresent.

1. As I noted above, the most basic questions for me is –what should school mathematics be? This implies that we must consider the basic goals and purposes, the

qualities of mathematical experience, and what we believe about mathematics, per se. How do we balance our traditional views of skills and algorithms with an ever greater need to understand and apply?

2. Given the ways that computers can support mathematical activity, what is the role of the mathematics teachers¿ How must teachers' beliefs and attitudes change? How do we support teachers to make changes in their practices to reflect the new and changing goals and tools?
3. How must school, as a place, change to allow students and teachers to use computers in ways that transform and enhance mathematical education?
4. What broader issues of equity of access and competence must be addressed?
5. How must the role of the printed textbook change –and what are the roles of publishers, per se, in a future where electronic curricular resources may dominate? How do the economic traditions in education adjust and transform?
6. How do we fill the growing knowledge gap from research on learning and teaching mathematics, when the very nature of the learning and teaching process may shift in ways that make irrelevant the modicum of research we have?
7. How might the emerging home access via the Internet and Web completely change (and even eliminate) the need for school to be a community center?

Depending on how we address these and other questions, In can imagine at least two possible scenarios over the next three decades.

In one, the perceived failures of the schools becoming increasingly a crisis, leading more and more parents to flee to a "new" alternative: privatized commercial (storefront) "schools" operated by enterprising teams of "master" teachers who "hang their shingle" and capitalize on enriched computer-enhanced environments. With dedicated hard work, these teachers and students can demonstrate amazing results –solid learning (balancing reasonable skill with powerful exhibitions of student productions using enriched computer tools) and positive student attitudes and feeling! More than likely, daily operations would not find all students coming to the "place" but rather more connectivity from home serving as the primary mode of interactions and work. Coming to the storefront would be for those occasions when a group needs to meet in person, or when face-to-face assessments or mentoring is needed. The mathematics "curriculum" of the school will surely be more linked to the interests of the individual student, interfaced to other areas of life (eg., other curricular areas, leisure, hobbies, part-time employment, etc.). Such "schools" might grow in number, but not much in size, for "too big to be successful" is quickly realized. As free enterprise entities, these operations will be subjected to all of the factors and effects of the marketplace –poor performers close down, high performers might become "bought up" by larger corporations, competition, advertising, rising costs, capital improvement needs, etc. As "pay as you go" businesses, they may be the havens of the wealthy (unless politicians do enact some system of vouchers to allow use of public funds).

In this scenario what is happening back in the community "schoolhouse"? It is likely that the unmotivated, disadvantaged, failing, less capable students will continue to go

there (because they must, or wish to, or have no real choices)? If so, can we imagine the kind of school mathematics curriculum that will be advocated for them? And, given an increasing pressure to be accountable with public monies, can we foresee the extent and type of testing that will dominate the choices of teachers and students? Can we easily see the final, convulsive demise of the place called "public school"?

An alternative scenario places the public school at the center of an enriched, more enhanced, broadly-based institution for educating. Many of the desirable qualities of the commercial scenario above can be envisioned as developing in the public school system, propelling its operations on a wave of impacts from computer-enhanced environments. With home connectivity, the school could also become less a "prison" or "factory" model, and more a cultural centerpiece in the neighborhood where students and teachers assemble as needed. With school connectivity to universities, museums, archives, libraries, workplaces –nearby, nationally, even globally– we could imagine students becoming much more motivated to engage in learning activities. Yet, interesting problematic (relevant) situations must still be posed as challenges, and teachers must mentor and advise in ways that stimulate and support students in their activities. Without the essential relationships that have always characterized the teacher and student bond, it is not easy to imagine students who will somehow become productive learners!

We have many choices. With continued computer innovations, we will have new options for engaging our students. Will we have the will? Will we have the vision? Will we allow the changes? Will we be a part of the solution to the problem of an improved school mathematics, or will we be a part of the problem? Can we find the wisdom?

"The road to wisdom? –Well, it's plain and simple to express:

Err
and err
and err again
but less
and less
and less."

Piet Hein

References

[1] H. Abelson & A. diSessa: *Turtle geometry: The computer as a medium for exploring mathematics,* Cambridge MA: The MIT Press, 1980.

[2] S. Abramovich & W. Nahors: "Spreadsheets as generators of new meanings in middle school algebra", *Using Technology in the Classroom,* 13 (1/2), pp. 13-26, 1997.

[3] R. Andree: *Computer programming and related mathematics,* New York: John Wiley & Sons, 1967.

[4] C. Bigum et al: *Coming to terms with computers in schools* (Report to the Commonwealth Schools Commission), Victoria, Australia: Deakin University, 1987.

[5] G. Bitter: *Effect of computer applications on achievement in a college introductory calculus course*, Unpublished doctoral dissertation, University of Denver, 1970.
[6] J. Bruner: *The process of education*, Cambridge MA: Harvard University Press, 1960.
[7] B. Cornu & A. Ralston (Eds.): *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*, Paris: UNESCO, 1992.
[8] Z. Dienes: *Building up mathematics*, London: Hutchinson Educational, Ltd., 1960.
[9] W. Dorn: "Computer-extended instructions: An example". *The Mathematics Teacher*, 63(??), pp. 147-58, 1970.
[10] E. Dubinsky & R. Noss: "Some kinds of computers for some kinds of learning: A reply to Koblitz". *The Mathematical Intelligencer*, 18 (1), pp. 17-20, 1996.
[11] W. Feurzeig et al: *Programming languages as a conceptual framework for teaching mathematics* (Report N.° C615), Cambridge MA: Bolt, Beranek and Newman, 1971.
[12] T. Foster: *The effect of computer programming on student problem-solving behaviors in eighth grade mathematics*, Unpublished doctoral dissertation, University of Wisconsin, 1972.
[13] L. Hatfield: "Computers in mathematics education". In J. Wilson & L. Casrry (Eds.): *Reviews of recent research in mathematics education* (Vol. XIX, Studies in Mathematics), Stanford CA: School Mathematics Study Group, pp. 129-52, 1969.
[14] L. Hatfield & D. Johnson: *CAMP first course*, Glenview IL: Scott, Foresman & Co., 1968.
[15] L. Hatfield & T. Kieren: "Computer-assisted problem solving in school mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education*, 3 (2), pp. 99-112, 1972.
[16] P. Hein: *Grooks*, Cambridge MA: The MIT Press, p. 34, 1966.
[17] N. Jackiw: *The Geometer's Sketchpad (computer program)*, Berkeley CA: Key Curriculum Press, 1991.
[18] P. Jackson: *The teacher and the machine*, Chicago: University of Chicago Press, 1970.
[19] D. Johnson: "Algorithmics in school mathematics: Why, what and how?" In I. Wirszup & R. Streit (Eds.): *Developments in school mathematics education around the world* (Vol. 3), Reston VA: NCTM, 1992.
[20] D. Johnson & F. Lovis (Eds.): *Informatics and the teaching of mathematics*, Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1987.
[21] D. Johnson & J. Tinsley: *Informatics and mathematics in secondary schools: Impacts and relationships*, Amsterdam: North-Holland Press, 1978.
[22] J. Kaput & P. Thompson: "Technology in mathematics education research: The first 25 years in the JRME", *Journal for Research in Mathematics Education*, 25 (6), pp. 676-84, 1994.
[23] P. Katzman & D. Johnson: *CAMP geometry*, Glenview IL: Scott, Foresman & Co., 1970.
[24] J. Kemeny & T. Kurtz: *True BASIC*, West Lebanon NH: True BASIC, Inc., 198?
[25] T. Kieren & D. Johnson: *CAMP intermediate mathematics*, Glenview IL: Scott, Foresman & Co., 1969.
[26] N. Koblitz: "The case against computers in K-13 math education (kindergarten through calculus)", *The Mathematical Intelligencer*, 18 (1), pp. 9-16, 1996.
[27] C. Konold et al: "Students analyzing data: Research of critical barriers". In J. Garfield & G. Burrill (Eds.): *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference), Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute, pp. 151-67, 1997.
[28] D. Lafrenz & D. Johnson: *CAMP algebra*, Glenview IL: Scott, Foresman & Co., 1969.
[29] S. Mauer: "Two meanings of algorithmic mathematics", *Mathematics Teacher*, 77 (6), pp. 430-5, 1984.

[30] S. Mauer: "The algorithmic way of life is best", *The College Mathematics Journal*, 2 (2), pp. 50-1, 1985.
[31] National Council of Teachers of Mathematics: *Agenda for action*, Reston VA: NCTM, 1980.
[32] National Council of Teachers of Mathematics: *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*, Reston VA: NCTM, 1989.
[33] J. Nevison: *The computer as pupil: The Dartmouth secondary school project* (Final Report), Hanover NH: Dartmouth College, 1970.
[34] R. Noss: *Creating a mathematical environment through programming: A study of young pupils learning Logo*, Unpublished doctoral dissertation, University of London, 1985.
[35] A. Oettinger: *Run, computer, run: The mythology of educational innovation*, New York: The Macmillan Company, 1969.
[36] J. Olive: *A study of the application of a qualitative taxonomic synthesis to the analysis of geometric reasoning in a computer environment*, Unpublished doctoral dissertation, Emory University, 1985.
[37] J. Olive: *Technology as a catalyst for change in the teaching of mathematics, paper presented at the Eighth International Congress on Mathematical Education*, Seville, Spain, 1996.
[38] S. Papert: *Mindstorms: Children, computers, and powerful ideas*, New York: Basic Books, 1980.
[39] S. Papert: *The children's machine: Rethinking school in the age of the computer*, New York, Basic Books, 1993.
[40] E. Roanes-Lozano & E. Roanes-Macías: "Automatic theorem proving in elementary geometry with DERIVE 3", *International DERIVE Journal*, 3 (2), pp. 67-82, 1996.
[41] J. Schwartz et al: *The geometric supposer: What is it a case of?*, Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 1993.
[42] R. Skemp: *The psychology of learning mathematics*, Hammondsworth: Penquin, 1971.
[43] R. Smallwood: *A decision structure for teaching machines*, Cambridge MA: The MIT Press, 1962.
[44] Robert Taylor: *The computer in the school: Tutor, tool, & tutee*, New York: Teachers College Press, 1982.
[45] J. Walther & D. Johnson: *CAMP second course*, Glenview IL: Scott, Foresman & Co., 1969.
[46] H. Wilf: "The disk with the college education", *The American Mathematical Monthly*, 89 (1), pp. 4-8, 1982.
[47] H. Wu: "The mathematics education reform: What is it and why should you care?", *The Mathematical Monthly*, pp. 1-23.

El movimiento renovador de la matemática española de finales del siglo XIX

Javier Peralta

E.U. de Formación del Profesorado
Universidad Autónoma de Madrid

Abstract

This paper is intended to examine the repercussions on the field of the spanish mathematics of the movement of scientific renewal which arouse in our country at the end of the 19th century. In order to provide the reader with a wider perspective of this process of modernization, it also analyses briefly some episodes and certain aspects of our scientific history which took place in that century or even before.

Introducción

Como es sabido, el nombre de *Generación del 98* suele emplearse para designar a un distinguido grupo de escritores –Azorín, Baroja, Unamuno...– surgido en España en los años precedentes a la pérdida de las últimas colonias y a la guerra con Estados Unidos; si bien, en un sentido más amplio, asimismo se acostumbra a englobar bajo este epígrafe al movimiento de regeneración nacional que tiene lugar en nuestro país en las postrimerías de la pasada centuria. Esta corriente, derivada de la existencia de un determinado estado de ánimo que incita a una seria reflexión sobre España y de una crisis de conciencia arrastrada de años atrás, impregna en todos su ámbitos nuestra actividad cultural y estimula en gran medida la renovación científica.

Como no podría ser de otro modo, el efecto de ese impulso también repercute de forma positiva en el terreno de las matemáticas. Pero habida cuenta del escaso interés que generalmente despierta esta ciencia en nuestro país, pensamos sin embargo que ese importante episodio de la historia matemática nacional acaso no haya sido suficientemente resaltado.

Este es el motivo que nos ha animado a escribir el presente trabajo (y un libro recientemente terminado –del que básicamente ha sido extraído este artículo– titulado *La*

Matemática española y la crisis del 98, que esperamos vea pronto la luz). El objetivo que ha guiado nuestros pasos –ya lo hemos dicho– ha sido, pues, el de tratar de analizar, como una modesta contribución a la conmemoración del centenario, el indudable proceso de modernización llevado a cabo en el campo de las matemáticas a finales del siglo XIX.

Hemos de advertir no obstante al lector, que no espere encontrar en las páginas siguientes prácticamente nada de contenido estrictamente matemático, sino tan solo algunas notas y comentarios sobre las circunstancias, los acontecimientos, ciertos logros y el ambiente que acompañaron nuestra vida matemática, y científica en general, en ese período. Y no únicamente durante el mismo, ya que, para que pueda percibirse con mayor claridad el progreso finisecular experimentado entonces en la matemática española, no nos ha parecido conveniente empezar el relato en la época indicada, sino comenzar la narración con un breve examen de sus antecedentes históricos.

Primeras denuncias sobre el estado de la ciencia española

En el período correspondiente a la dominación árabe, España ocupaba un lugar preeminente en el panorama internacional desde un punto de vista científico. Esa tesis, comúnmente admitida, queda recogida por ejemplo en las siguientes palabras de J. Vernet, escritas en referencia a la ciencia hispano-árabe de esa época: "... todo el mundo está de acuerdo -desde Echegaray a Menéndez Pelayo- en que fue la más avanzada desde aquel entonces en todos los campos del saber" (Vernet, 1975).

A partir del siglo XIII hay en cambio muy poco que sea reseñable en nuestra matemática, si exceptuamos a la astronomía. Como muestra de la consideración que en efecto gozó esta última, baste con tener en cuenta lo manifestado por Menéndez Pelayo sin duda algo exageradamente, quien afirma que todo lo que se supo en Europa desde el siglo XI hasta Copérnico fue de origen español.

De ese atraso existente se ha sido consciente, por otra parte, desde el tercio final del siglo XVII con el movimiento de los *novatores* (así denominados por tratar de importar a nuestro país la nueva ciencia creada a raíz de la Revolución Científica), que supuso un enfrentamiento con el abuso del escolasticismo reinante y un intento por reducir la supeditación intelectual a la Iglesia. Por entonces hay que situar la llamada *primera crisis de la conciencia española,* momento en que se denuncia nuestra incultura científica, a la vez que se buscan soluciones para superarla.

La sensación de frustración por el retraso se hace patente también a lo largo del siglo XVIII. En el caso concreto de las matemáticas, el lamentable estado en que se encuentran por esa época es especialmente alarmante, y de ello hay constancia en numerosas declaraciones. Por citar algunas digamos que en una de las universidades españolas de más renombre, la de Salamanca, la cátedra de Matemáticas (a la que accede Diego de Torres Villarroel en 1726 en unas oposiciones, al estilo de entonces, bastante peculiares) "estuvo sin maestro treinta años y sin enseñanza más de ciento cincuenta", ya que "ninguna o rara vez ha tenido discípulos" (Torres Villarroel, 1948). Aunque la situación continúa en 1768, en que un grupo de profesores de esa universidad, ante la proximidad de la celebración de unas oposiciones de matemáticas, escribe al conde de Campomanes, primer fiscal del Consejo de Castilla, denunciando los escasos conocimientos del probable ganador de la cátedra: "Este opositor lleva en el estudio de la astronomía una cosa de tres meses sin haber saludado la aritmética, álgebra, geometría ni trigonometría", y confesando a continuación: "Debemos añadir que la Universidad no se halla en estado de poder juzgar sobre opositores a esa cátedra, porque hay pocos graduados que entiendan lo que son las matemáticas..." (Torres Villarroel, 1948).

Según el parecer de muchos, quien primeramente hace constar la baja cualificación de nuestra ciencia es el benedictino Fray Benito Jerónimo Feijoo. En su *Teatro Crítico* (1726) y en sus *Cartas eruditas y curiosas* (1745) la emprende contra todo tipo de disciplinas: Literatura, Filosofía Derecho, Medicina, Astronomía, Matemáticas... Concretamente, en su carta *Causas del atraso que se padece en España en orden a las ciencias naturales,* denuncia el importante retraso existente, tanto en lo que concierne a las matemáticas como a las demás ciencias.

Estas y otras manifestaciones originan una viva polémica sobre este tema, aunque su elemento desencadenante suele establecerse en relación con la publicación del artículo "Espagne", de Nicolás Masson de Morvilliers en la enciclopedia francesa *Encyclopédie Methodique* (1782); en él comenta la poca consideración que tiene la ciencia en España, y termina preguntando: "¿Qué se debe a España? Desde hace siglos, desde hace cuatro, desde hace seis, ¿qué ha hecho por Europa?" Hay que aclarar no obstante que lo que se pretende criticar en ese trabajo es el férreo control de la censura y de la Inquisición sobre la actividad científica y, en último término, arremete contra las estructuras socio-políticas: "El español tiene aptitud para las ciencias, existen muchos libros y, sin embargo, quizá sea la nación más ignorante de Europa. ¿Qué se puede esperar de un pueblo que necesita permiso de un fraile para leer y pensar? ... Un libro impreso en España sufre regularmente seis censuras antes de poder ver la luz..."

Inicio de la adopción de algunas medidas

Ante la situación de atraso ya claramente percibida desde las décadas finales del siglo XVII, los últimos Austrias deciden adoptar ciertas medidas, que en cambio casi nunca llegan a ponerse realmente en práctica. El primer gobierno de Felipe V promueve ya la creación de nuevas instituciones, como academias y sociedades científicas, que ilusionan a los españoles del *siglo de las luces.* Sin embargo, a pesar del impulso que se trata de dar al desarrollo de nuestra ciencia, sus progresos son muy pobres, particularmente en matemáticas.

Los esfuerzos hechos a partir de entonces encaminados al crecimiento científico, especialmente en el último tercio del siglo XVIII, se ven sin embargo interrumpidos a principios de la centuria siguiente con motivo de la guerra de la Independencia (1808-1814). Hay numerosas evidencias de ese parón, como la actitud que, debido a la inestabilidad política y la escasez de medios, toman algunos científicos, que pasan de publicar obras de una cierta altura a otras de mera divulgación; o más concretamente, lo ocurrido en el Observatorio de Madrid (creado en 1790 y posteriormente tomado como cuartel general de los franceses), en el que sus archivos son utilizados como combustible para luchar contra el frío, y su magnífico telescopio de Herschell, traído en 1802 y definitivamente instalado en 1806, es desmontado en 1808 para aprovechar su madera.

Pero la finalización de la guerra tampoco supone la vuelta al estado anterior. En ello influyen de manera importante no sólo la situación política reinante, sino también el ambiente de sospecha en que se encuentran la ciencia y los científicos, que muchas veces ejercen de políticos. Esto último origina la expulsión de algunos o el exilio voluntario de otros; aunque generalmente no aprovechan la estancia fuera de España para mejorar su formación.

A pesar de que una vez finalizada la guerra de la Independencia, en el primer período absolutista se trata de continuar la obra desarrollada en la Ilustración, la inestabilidad política y la ausencia de estructuras científicas contribuyen a que no se recobre ese estado de conciencia hasta mediados del siglo XIX. Los frutos de ese impulso no son prácticamente advertibles sin embargo hasta la Revolución de 1868, bajo el sosiego político de la Restauración.

No obstante, desde principios de la centuria hay algunas tentativas de renovación científica, entre las que se encuentran diversas propuestas para cambiar los planes de estudio; como el Plan Caballero (1807) que, sin embargo, no llega a ponerse en funcionamiento por coincidir prácticamente con el inicio de la guerra. En relación con ello hay que tener en cuenta que la universidad de entonces, de estilo napoleónico, es muy centralista y está fundamentalmente orientada a la utilidad (en lo que respecta a matemáticas, la mayoría de las publicaciones de la época se dirigen a la enseñanza o a sus aplicaciones técnicas).

En el Plan general de Instrucción Pública (1834) del duque de Rivas, se emprenden las primeras innovaciones en la educación superior y se inicia la creación de nuevos centros. Así, se fundan ese año las dos primeras Escuelas de Ingenieros: la de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, y la de Montes; y años después lo harán las demás, como asimismo otros establecimientos educativos y científicos: los Institutos de Enseñanza Media (1845), las Escuelas Normales (1846) y, en 1847, la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid (la Academia de Ciencias y Artes de Barcelona lo había hecho casi un siglo antes).

Con el plan Pidal (1845) se crea la Dirección General de Instrucción Pública, y en ese mismo año se incluyen diversas secciones en la Facultad de Filosofía, algunas de ellas de ciencias (matemáticas, física, química y ciencias naturales). Se establece la licenciatura en

Ciencias, para lo que se exige estar antes en posesión del grado de bachiller en Filosofía, y cursar después dentro de esta misma Facultad las asignaturas de Botánica, Complementos de matemáticas elementales, Mineralogía, Química general y Zoología en un mínimo de dos años.

Respecto del doctorado en Ciencias, que también se estructura en 1845, es preceptivo haber terminado primeramente los estudios de licenciatura en una cualquiera de las siguientes Facultades: Teología, Jurisprudencia, Medicina o Farmacia (Facultades Mayores), y posteriormente aprobar las asignaturas: Astronomía, Cálculos sublimes, Física matemática, Geología, Historia de las Ciencias y Mecánica Racional. Las Facultades de Filosofía y Ciencia se vuelven a reorganizar en 1847, con el Plan Pastor Díaz (Garma, 1988).

La separación entre ciencias y letras supone sin lugar a dudas un hecho importante para el sistema educativo, a la vez que de algún modo anima a la investigación más especializada. A pesar de ello, las ciencias no son entonces consideradas como adecuadas para la mentalidad española, pues "no cuadraban a ingenios vivos, ardientes y de imaginación fogosa, como son generalmente los que nacen a mediodía", tal como se dice en el Real Decreto del Plan Pidal que establece las opciones de ciencias y letras en los Institutos de Segunda Enseñanza (Moreno, 1988).

Continúa la polémica sobre la situación de nuestra matemática

El eminente historiador López Piñero denomina "período de catástrofe" a los años comprendidos por la guerra de la Independencia y el reinado de Fernando VII (de 1808 a 1833). En él se produce una paralización en la actividad científica y en el estudio histórico de nuestra ciencia, lo que produce asimismo un paréntesis en la antigua polémica sobre esta última (López Piñero, 1979). Pero el debate se reabre hacia la mitad de la centuria; en muchas ocasiones en el marco de la Real Academia de Ciencias.

Una de las primeras manifestaciones de esa época sobre nuestra historia científica tiene lugar en 1851, y es debida al primer presidente de la Academia, Antonio Ramón Zarco del Valle, militar y ex-ministro, quien hace una valoración muy positiva del pasado científico español. Pero las posturas sobre este tema están muy polarizadas (motivadas en buena medida por razones ideológicas); así, en 1866, en su discurso de ingreso en esa institución *–Historia de las matemáticas puras en nuestra España–*, Echegaray adopta una posición justamente opuesta a la de Zarco.

Con todo, lo más alarmante de la disertación de Echegaray es el tono catastrófico empleado: "Si prescindiendo de aquellos siglos en que la civilización arábiga hizo de España el primer país del mundo en cuanto a ciencia se refiere, sólo nos fijamos en la época moderna, y comenzamos a contar desde el siglo XV, bien comprenderéis que no es ésta, ni puede ser ésta en verdad, la historia de la ciencia en España, porque mal puede

tener historia científica pueblo que no ha tenido ciencia... porque en España no hubo más que látigo, hierro, sangre, rezos, braseros y humo... ; *la ciencia matemática nada nos debe: no es nuestra; no hay en ella nombre alguno que labios castellanos puedan pronunciar sin esfuerzo"* (Vernet, 1975). Y al ojear la *Bibliotheca Hispana Nova* de Nicolás Antonio (siglo XVIII) "busca allí algo grande que admirar", y sólo "halla libros de cuentas y geometrías de sastres" (López Piñero, 1979).

La postura de Echegaray, con la que coincide Rey Pastor unos cincuenta años más tarde, es sin embargo exageradamente catastrofista, como indica López Piñero. Pero a pesar de que, según éste y otros reputados historiadores de la ciencia, en el discurso de Echegaray se advierten falta de información y absoluta insensibilidad hacia la actividad científica española, su opinión ha permanecido predominantemente en nuestra sociedad desde entonces.

En su momento hubo no obstante algunas réplicas al contenido de su conferencia; las más importantes de las cuales probablemente fueron las debidas a Felipe Picatoste y a Antonio Sánchez Pérez. El primero de ellos, por ejemplo, escribe días después que se siente obligado "a exigir del señor Echegaray lo que las ciencias y el país tienen derecho a esperar de su mérito, y no lo tienen ciertamente para esperar un discurso en que maldiga de la ciencia patria y de su historia".

La discusión se reaviva apenas iniciada la Restauración, a raíz de la aparición de varios artículos, como *El "self-governement" y la monarquía doctrinaria* (1876) de Gumersindo de Azcárate, o la reseña por Manuel de Revilla en *Revista Contemporánea* (1876) del discurso de ingreso de Núñez de Arce en la Real Academia Española. En esta última, Revilla vierte afirmaciones como: "si en la historia literaria de Europa suponemos mucho, en la historia científica no somos nada", lo que produce una respuesta fulminante de otros, especialmente de Menéndez Pelayo en su obra *La ciencia española.*

A finales del siglo XIX, con el paso de los años la polémica va desapareciendo, y se convierte en una apuesta común por la regeneración científica española.

La creación de las Facultades de Ciencias

Ya han sido mencionados algunos de los distintos intentos que hubo durante la primera mitad del siglo XIX por cambiar los planes de estudio y de reformar la universidad. La de Madrid, concretamente, fue reorganizada entre 1836 y 1845, y en este último año, en el Plan Pidal, se dispone que sea ésta la única institución en la que puedan realizarse los estudios de doctorado y tenga capacidad legal para expedir el diploma de doctor. En 1850 recibe el título de Universidad Central en el Plan de Manuel Seijas Lozano, ministro de la Gobernación.

Hasta 1854 la enseñanza depende de diversos ministerios, pero en este año se incorpora al de Fomento, hasta la creación en 1900 del Ministerio de Instrucción Pública y

Bellas Artes. Alonso Martínez redacta una ley de reforma universitaria en la que se acaba la distinción entre Facultades Mayores y Menores, y asimismo se aborda la formación del profesorado y se pone en funcionamiento la Facultad de Ciencias; sin embargo, no puede llevarse a cabo debido a la inestabilidad política.

Claudio Moyano y Samaniego es quien finalmente realiza la reforma en 1857. En la ley Moyano la Facultad de Filosofía queda separada en dos: la Facultad de Filosofía y Letras y la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. No obstante, los legisladores siguen dudando de la utilidad de las ciencias como estudios independientes de otra carrera posterior.

Uno de los propósitos de los cambios efectuados es que las universidades no se limiten a su función docente, sino que también se transformen en centros de investigación. Pero este objetivo no se logra, debido entre otras causas al insuficiente presupuesto dedicado a ello y al escaso número de revistas científicas serias que se editan en España (esto último supone un grave obstáculo para la difusión de artículos extranjeros de actualidad, a la vez que no anima tampoco a la realización de trabajos de investigación propios).

Hay que hacer notar que generalmente no son las universidades, sino otras instituciones las que inician la difusión de monografías de investigación, tanto de autores españoles -escasas- como del exterior de nuestras fronteras. Probablemente la más importante sea la Real Academia de Ciencias de Madrid, que comienza en 1850 y 1853, respectivamente, la edición de dos publicaciones periódicas: la *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y las Memorias;* la primera de las cuales continúa hasta 1904 en que cambia su nombre por *Revista de la Real Academia de Ciencias.*

En la Primera República tiene lugar un nuevo proyecto de reforma universitaria, el Plan Chao (1873), en el que se trata de propiciar la investigación. Eduardo Chao, ministro de Fomento, plantea diversas medidas, como que en las oposiciones a cátedras de universidad haya que presentar una Memoria no sólo docente, sino que también incluya, entre otras cosas, métodos de investigación. De igual modo se dispone la renovación de las enseñanzas de las Facultades de Ciencias y de Filosofía y Letras, aunque en un principio únicamente en la Universidad de Madrid, como centro piloto. Las asignaturas que en concreto habrían de cursarse en la sección de Exactas son: Análisis Matemático, Geometría, Geometría Analítica, Trigonometría, Poligonometría, Geometría Descriptiva, Mecánica Racional, Mecánica Celeste, Astronomía Esférica, Geodesia y Física Matemática. Posiblemente haya asimismo que mencionar que en el plan de la Facultad de Filosofía y Letras aparecen las asignaturas de Filosofía de la Naturaleza, Biología y Filosofía de la Historia, y Cosmología y Teodicea, en un intento inequívoco de dar respuesta a las tendencias evolucionistas y positivistas de entonces.

A pesar de sus innegables aspectos positivos, el Plan Chao no llega sin embargo a implantarse, por lo que las Facultades de Ciencias siguen fundamentalmente, salvo pequeñas modificaciones, con la estructuración determinada por la ley de Moyano de 1857.

El resurgir científico del último tercio del siglo XIX

Por otro lado, a partir de 1855 ó 1860 aproximadamente se perciben distintas inquietudes y movimientos intelectuales en España, que tendrán una importante repercusión en la educación y en la renovación científica del país; así por ejemplo, se manifiesta una preocupación por definir "lo español" –en diferentes novelas de Pereda, Pardo Bazán o Varela, por citar a algunos escritores, se reconocen diversas posiciones sobre el particular–, lo que sin duda indica la situación de crisis moral de identidad en que se encuentra nuestro pueblo. Asimismo juega un papel preponderante en la configuración de este ambiente la introducción en nuestro país del krausismo, cuya influencia en el mismo proseguirá también en años posteriores. Las figuras más destacadas de esta conocida ideología o actitud, importada de Alemania por Julián Sanz del Río, son Francisco Giner de los Ríos y Fernando de Castro.

Con la Revolución de 1868 y la liberalización ideológica que le acompaña, comienza la recuperación científica del país. El período comprendido entre la caída de Isabel II y la restauración de Alfonso XII (1868-1874), denominado sexenio democrático, es uno de los más fecundos desde el punto de vista cultural de toda la centuria.

Se producen entonces reformas educativas inspiradas por el krausismo, en cuya filosofía se enmarcan diversas ideas sobre la metodología de la ciencia. En el caso de las matemáticas dichas consideraciones se concretan en el trabajo titulado "Sobre el concepto y división de la Matemática. Introducción a las bases para un sistema filosófico de la Matemática", contenido en los *Estudios filosóficos y religiosos* (1876) de Giner de los Ríos.

Los krausistas participan regularmente en la vida pública a veces con bruscas intervenciones, intentando mantener después del sexenio las libertades que emanan de la Constitución de 1869, ante lo que chocan los poderes públicos y la postura de la Iglesia. A consecuencia de ello, de diversas polémicas en relación con la educación (como el famoso escrito que Orovio, ministro de Fomento, dirige a los rectores de universidad en 1875), y del ambiente social reinante, aparecen distintos movimientos y se funda en 1876 la Institución Libre de Enseñanza, de la que surgirán años después la Junta de Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas y la Residencia de Estudiantes. La Institución, formada en su mayor parte por krausistas, contribuye de forma importante a la regeneración científica de España a finales del siglo XIX y principios del XX. Su figura más destacada es Giner, a quien acompañan otros profesores como Azcárate, Salmerón, Labra, Uña, Figuerola, G. de Linares, Joaquín Costa, etc., y poco después Cossío (Tuñón de Lara, 1982).

En la década de los ochenta se hacen patentes el grado de incultura de la sociedad española, con más del setenta por ciento de su población analfabeta, y el atraso económico del país. Por otro lado, la Universidad es escenario de frecuentes disputas ideológicas entre dicha institución y la Iglesia (una de las más sonadas tiene lugar con ocasión del discurso de apertura del curso 1884-85 pronunciado por Morayta, catedrático de Historia, al que responde con una nota de condena el Vicario de Toledo, quien acusa a aquél de haber puesto en duda ciertas cuestiones de la fe católica).

Con todo, en las postrimerías del pasado siglo tiene lugar un renacer científico en España y empiezan a aparecer algunas contribuciones propias de cierta calidad, pues hasta entonces, salvo casos aislados, los intentos de renovación habían consistido casi siempre en tratar de importar de fuera los descubrimientos y, si acaso, en reproducir modelos extranjeros. A pesar de ello hay que decir que, salvo contadas aportaciones individuales, como las de Torres Quevedo o Ramón y Cajal, España no crea su propia ciencia ni tampoco supone gran cosa en el panorama internacional; pero al menos crea un estado favorable de conciencia que prepara un siglo XX más fructífero.

La matemática española de finales del siglo pasado

Después de haberse esbozado cuál era la situación en que se hallaba la ciencia española a finales de la centuria pasada, nos ocuparemos más concretamente del caso particular de las matemáticas.

Como ya se ha dicho, desde mediados del siglo XIX toma un gran empuje en nuestro país la traducción y adaptación de libros extranjeros de matemáticas, y comienzan a aparecer a su vez memorias de autores nacionales; situación que cobra mayor impulso y se hace más evidente en sus últimas décadas. De esta manera se introducen en España el análisis de Cauchy por Simón Archilla y Lauro Clariana; las funciones de variable compleja por Zoel García de Galdeano; la geometría de Staudt por Eduardo Torroja; la geometría de Chasles, el cálculo de variaciones y la teoría de Galois por José Echegaray; las geometrías no euclídeas por Ventura Reyes; etc. (Vernet, 1975).

Sin embargo, si bien es cierto que de este modo se tiene acceso a la matemática internacional, no siempre se sabe escoger la orientación adecuada. Por ejemplo, respecto a la geometría importada por Torroja, dice Rey Pastor años más tarde: "A fines del siglo XIX, damos un salto de gigante con la introducción de Staudt, más estudiado aquí que en Alemania; pero la geometría se enderezó por el rumbo analítico y tanto Cremona como Torroja y quienes lo seguíamos quedamos una vez más fuera del cauce"; aunque no obstante añade después: "Torroja abrió más amplia brecha en la muralla de nuestro aislamiento matemático, e importó de lejanas tierras la Geometría de la posición de Staudt" (Etayo, 1992).

Es de destacar en consecuencia el trabajo desinteresado de unos cuantos científicos que intentaron acercarnos al nivel matemático europeo. Los más importantes probablemente sean Echegaray, García de Galdeano, Torroja y Reyes, llamados "sembradores" por Sixto Ríos en su biografía de Rey Pastor (Ríos, 1988); aunque desde luego hubo otros muchos que asimismo participaron en esa tarea, como Eduardo León y Ortiz, Augusto Krahe, José Ríus y Casas, Luis Gascó, Lauro Clariana y Ricart, Gabriel Galán, Luis Octavio de Toledo, Cecilio Jiménez Rueda, Miguel Ortega y Sala y Juan J. Durán y Loriga. Todos ellos y algunos más crearon el ambiente propicio para que pudiera organizarse a principios de siglo una comunidad matemática en nuestro país.

Pese a todo, a finales de la centuria la matemática española estaba más próxima, por ejemplo, a la geometría de Staudt o al análisis de Cauchy que a las entonces modernas teorías de Cantor, Poincaré, Weierstrass o Stieltjes, entre otros. Nuestra matemática llevaba pues casi medio siglo de retraso con respecto a la que reinaba en Europa; atraso aún más señalado si se considera la gran fecundidad de la matemática internacional del siglo XIX. Con todo, por vez primera en las dos o tres últimas centurias, se empieza al menos a conocer lo que se hace en el extranjero.

Para hacernos una mejor idea del estado de las matemáticas en España en las postrimerías del siglo pasado, posiblemente sea oportuno realizar una breve semblanza de las cuatro figuras más distinguidas en este campo y de sus principales aportaciones. Así lo haremos a continuación.

– José Echegaray y Eizaguirre (1832-1916) nació y murió en Madrid. Es posible diferenciar tres facetas en la vida de este ilustre ingeniero de caminos: científica, política y literaria. Aunque sólo hablemos de la primera, parece obligado mencionar al menos en relación con las otras que llegó a ser ministro de Hacienda y Fomento, y que su máxima popularidad la alcanzó como dramaturgo (como es sabido, le fue concedido el Premio Nobel de Literatura en 1904, compartido con el poeta Fréderic Mistral).

Fue profesor de la Escuela de Ingenieros de Caminos y catedrático de Física matemática de la Universidad Central. Pronunció numerosas conferencias e impartió diferentes cursos de excelente calidad, como *Resolución de ecuaciones y teoría de Galois y Funciones elípticas y abelianas*, algunos de los cuales se celebraron en el Ateneo de Madrid. Escribió una buena cantidad de libros de física, como *Termodinámica, Teorías modernas de la Física* (tres tomos), etc.; así como de matemáticas. De estos últimos hay que destacar *Problemas de Geometría* (obra maestra, en opinión de Galdeano) e *Introducción a la Geometría superior* (en la que se introduce la geometría de Chasles en España), entre otros (García de Galdeano, 1905).

Para terminar, señalemos que en la etapa final de su vida escribió veintitantas obras de física matemática (Carrasco, 1917).

– Zoel García de Galdeano (1846-1924) nació en Pamplona y murió en Zaragoza. Poseía una vasta cultura como consecuencia de haber estudiado varias carreras (Ciencias Exactas, Filosofía y Letras, Perito Agrimensor...). Fue catedrático de Instituto y posteriormente catedrático de la Universidad de Zaragoza, a cuya Facultad de Ciencias fue entregada su extensa biblioteca después de su muerte.

Trató de mejorar el estado de las matemáticas en nuestro país y de establecer relaciones con la matemática europea, razones que le movieron a participar en diferentes congresos internacionales y le impulsaron a fundar la primera revista matemática española: *El Progreso Matemático*. Hay que destacar especialmente por tanto el esfuerzo llevado a cabo en importar las teorías más actuales de entonces, como por ejemplo la geometría algebraica; aunque sin embargo ciertamente no puede decirse de él que fuera un auténtico matemático creador.

Entre sus discípulos se encuentra Rey Pastor, quien en diferentes momentos dejó constancia de la gran labor debida a Galdeano (Rodríguez Vidal, 1987). Para tener una idea de su amplia obra puede consultarse otro artículo de Rodríguez Vidal dedicado asimismo a este ilustre profesor (Rodríguez Vidal, 1964).

– Eduardo Torroja y Caballé (1847-1918) nació en Tarragona y murió en Madrid. Fue catedrático de las universidades de Valencia y de Madrid, y llegó a ser Consejero de Instrucción Pública.

Su actividad científica se desarrolló fundamentalmente en el campo de la geometría. Más en concreto puede señalarse que introdujo en España la geometría sintética y la geometría proyectiva de Staudt; que hizo interesantes aportaciones a la geometría descriptiva, ampliando algunos conceptos de Chasles; etc. Algunas de sus obras más importantes son: *Teoría geométrica de las líneas alabeadas y superficies desarrollables, Tratado de la geometría de la posición y sus aplicaciones a la geometría de la medida, Axonometría o perspectiva axonométrica, Aplicación de la homografía y la correlación al estudio de las superficies, ...*

El magisterio de Torroja influyó de manera considerable en diferentes discípulos. Sin duda el más relevante de ellos fue Rey Pastor, quien comenzó su labor investigadora como geómetra, aunque más tarde se orientó de lleno al análisis.

– Ventura Reyes y Prósper (1863-1922) nació en Castuera (Badajoz) y murió en Toledo. Su amplia formación le llevó a abarcar diferentes campos científicos, hasta el punto de llegar a ser catedrático de Instituto de Ciencias Naturales, de Física y Química y de Matemáticas. Pero aunque hizo contribuciones de gran significación en Ciencias Naturales referentes a aves, fósiles, moluscos, etc., sus más importantes aportaciones tienen lugar en matemáticas.

Trabajó en muchas de sus áreas, como la lógica matemática –se le considera el introductor en España de la lógica post-booleana (Etayo, 1992)–, aunque su principal campo de actuación es la geometría. A este respecto hay que decir, por ejemplo, que resolvió de manera muy elegante un problema propuesto por Steiner, lo que le valió un cierto renombre internacional (San Juan, 1950); si bien sus contribuciones más sobresalientes son dos breves artículos publicados en *Mathematische Annalen,* que constituyen toda la obra matemática española anterior al siglo XX publicada en revistas extranjeras de calidad.

Otras cuestiones relacionadas con el anterior análisis

Para completar el dibujo de la situación de nuestras matemáticas y del ambiente reinante entonces en relación con esta disciplina, seguramente merezca la pena analizar la

cuestión de la publicación de revistas matemáticas en España en esa época, junto a otros hechos cercanos a este asunto.

En el siglo XIX había grandes dificultades para la publicación de revistas científicas, debido en buena medida a problemas económicos derivados del pequeño número de suscriptores, pero asimismo a la falta de artículos de calidad (Hormigón, 1988). Por ello, la mayoría de tales revistas que se editaron en nuestro país desaparecieron enseguida, como por ejemplo *El Progreso Matemático,* cuyos años de vida fueron escasos a pesar del esfuerzo y apoyo, incluso económico, de García de Galdeano.

Por otra parte, como era de esperar, la prensa matemática española de la pasada centuria fue escasa. De la misma hay que considerar en primer lugar las publicaciones dedicadas no sólo a matemáticas, sino también a otras disciplinas científicas; entre las más importantes se encuentran el *Periódico Mensual de Matemáticas y Física* (nacido en 1851), las ya mencionadas *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* (1850) y *Memorias* (1853) de la Academia de Ciencias, y la *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias* (1874).

Aunque la primera revista especializada española, *exclusivamente* matemática, es *El Progreso Matemático,* que fue fundada en 1891 por Zoel García de Galdeano y dejó de publicarse en 1896. Sin embargo, enseguida aparecieron otras dos: *El Archivo de Matemáticas Puras y Aplicadas,* creada por Luis Gascó y *El Aspirante,* debida a Reyes y Prósper, que duraron únicamente dos años 1896 y 1897. En 1899 volvió a editarse la segunda serie de *El Progreso Matemático,* que desapareció definitivamente en 1900.

Ese periodismo matemático español es no obstante una pequeñísima muestra de la gran cantidad de revistas matemáticas (y de otras ciencias) que aparecen en el panorama internacional a lo largo del siglo XIX. Debido precisamente al elevado número de publicaciones matemáticas existentes, se crea la *Comisión Permanente del Repertorio Bibliográfico,* bajo la presidencia de Poincaré, que celebra un Congreso Internacional de Bibliografía de las Ciencias Matemáticas en el que se nombra a Zoel García de Galdeano –ya ciertamente conocido en los círculos científicos extranjeros– miembro de la comisión.

La realización del anterior congreso no es, por otro lado, un hecho aislado, pues la asombrosa fecundidad científica que se experimenta en el siglo XIX impulsa la celebración de ese tipo de reuniones, tanto nacionales como internacionales, a la vez que anima a la constitución de sociedades. Simplificando la cuestión podría decirse, como afirma R. Wavre en un trabajo sobre el panorama científico de esa centuria, que en su primera mitad se fundan asociaciones científicas en general y, en la segunda, sociedades matemáticas (Wavre, 1962).

Aunque las reuniones internacionales relativas a otras ciencias empiezan a tener lugar en 1863, las correspondientes a nuestra disciplina no se inician hasta finales de siglo. Más concretamente, el primer Congreso Internacional de matemáticos se realiza en Zurich en 1897, y en él se dispone que los siguientes se sucedan cada tres o cinco años. A partir del mismo las relaciones internacionales se hacen más estrechas, y en 1899 nace en Ginebra la revista *La Enseñanza Matemática*, en la que se comentan los acontecimientos correspondientes a esta materia en los distintos países del mundo.

Para finalizar este apartado, creemos que al menos deben ser mencionadas dos cuestiones que tienen estrecha relación con las matemáticas de finales del siglo XIX. La primera de ellas se refiere al cálculo mecánico y, en concreto, al diseño por el genial inventor Leonardo Torres Quevedo en 1893 de sus máquinas algebraicas, sucesoras de las máquinas analíticas de Charles Babbage, ya que unas y otras (que tienen a su vez antecedentes en las máquinas de calcular de Pascal y de Leibniz) son las precursoras de las computadoras. La segunda cuestión trata del estado de la astronomía, sobre la que siquiera de pasada nos ha parecido que debiéramos hacer alguna alusión, al menos en sus dos aspectos más significativos en relación con España como el hecho de la reanudación en esa época de la creación de observatorios y, especialmente, el establecimiento de la red geodésica de primer orden; esta última impulsada por el general Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero, la figura española sin duda más sobresaliente en este campo durante la segunda mitad de la centuria pasada.

La crisis del 98

El impulso de renovación científica que tiene lugar en nuestro país en las postrimerías del siglo pasado, que supone asimismo un estímulo en el terreno de las matemáticas, no es desde luego un acontecimiento aislado, sino que debe ser contemplado dentro de un movimiento más amplio de regeneración nacional. Dicha actitud, nacida como consecuencia de una crisis de conciencia y de un determinado estado de ánimo que incitan a una seria reflexión sobre España, se acostumbra a englobar bajo el título de *Generación del 98*, aunque bien es cierto que este epígrafe es también aplicable al grupo literario compuesto por algunos escritores como Azorín, Antonio Machado, Pío Baroja, Miguel de Unamuno y Ramiro de Maeztu.

Aunque en el último tercio de siglo ya comienza a sentirse un cierto espíritu de innovación, en el que claramente influyen el krausismo, la Institución Libre de Enseñanza y la famosa polémica sobre nuestra ciencia, el acontecimiento que desencadena el afán de cambio y progreso es sin duda la crisis derivada de la derrota ultramarina. Unamuno, Joaquín Costa y Ganivet, entre otros, propugnan entonces la "europeización" de España y la fórmula "despensa y escuela".

Como consecuencias del descalabro militar con Cuba, España pierde su flota y además se ve obligada a firmar un armisticio en el que renuncia a Cuba y a Puerto Rico, así como a Filipinas; posteriormente ha de desprenderse también de sus archipiélagos de Oceanía. Ello supone la total aniquilación de lo que quedaba del imperio.

A raíz de la crisis surgida por efecto del desastre militar, se retoma la antigua discusión sobre la ciencia española, ya que se apunta al atraso científico y tecnológico como una de las causas de la derrota. Y en ello coinciden políticos, como E. Vicenti: "Ningún yanqui ha presentado a nuestra escuadra o a nuestro ejército su pecho, sino una máquina inventada por algún electricista o algún mecánico. No ha habido lucha. Se nos ha vencido en el laboratorio y en las oficinas, pero no en el mar o en la tierra", y científicos, como J. Rodríguez Carracido: "... alguien dijo donosamente que nuestra derrota era inevitable, por ser los Estados Unidos el pueblo de la Física y la Química, y España el de la Retórica y Poética" (Sánchez Ron, 1988).

Así pues, la sensación de decadencia imperante en las últimas décadas de la centuria y la constancia de nuestro retraso cultural y científico -nótese por ejemplo que a finales de siglo más del cincuenta por ciento de la población española no sabe leer- se hacen más irritantes con la derrota militar del 98; aunque, como ya ha sido mencionado, ese examen de conciencia de la sociedad española ha comenzado hace tiempo. Esa seria reflexión sobre España y el intento de compararla con Europa, impulsan un reformismo intelectual del que participan la mayor parte de los pensadores; no sólo los ideológicamente próximos a la filosofía de la Institución Libre de Enseñanza, sino también otros más tradicionales, cercanos a las teorías de Menéndez Pelayo.

A pesar de ciertas contradicciones, obstáculos y paradojas, el regeneracionismo es un hecho, como quedará absolutamente probado con el resurgir científico que tendrá lugar en las primeras décadas del siglo XX. De ello, y especialmente de su repercusión en el campo de las matemáticas, trataremos en un próximo artículo.

Bibliografía

[1] P. CARRASCO: "Echegaray", en *Revista de la Sociedad Matemática Española*, núm. 51, págs. 1-6, 1917.

[2] J. J. ETAYO: "El reinado de la Geometría Proyectiva", en *Historia de la Matemática en el siglo XIX* (1.ª parte), Madrid: Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, págs. 115-138, 1992.

[3] Z. GARCÍA DE GALDEANO: "Echegaray, científico", en *Revista Trimestral de Matemáticas*, Año V, n.° 17, págs. 33-35, 1905.

[4] S. GARMA: "Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX", en J. M. SÁNCHEZ RON (Ed.), *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil*, Madrid: CSIC, Ed. El Arquero, págs. 93-127, 1988.

[5] M. HORMIGÓN: "Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX", en J. M. SÁNCHEZ RON (Ed.), *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil*, Madrid: CSIC, Ed. El Arquero, págs. 253-282, 1988.

[6] J. M. LÓPEZ PIÑERO: *Ciencia y técnica en la sociedad española de los siglos XVI y XVII*, Barcelona: Labor Universitaria, 1979.

[7] A. MORENO: "De la física como medio a la física como fin. Un episodio entre la Ilustración y la crisis del 98", en J. M. SÁNCHEZ RON (Ed.), *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil*, Madrid: CSIC, Ed. El Arquero, págs. 27-70, 1988.

[8] S. Ríos: "Julio Rey Pastor (1888-1962)", en *Gaceta Matemática,* 2.ª serie, vol. 1, núm. 2, págs. 129-135, 1988.

[9] R. Rodríguez Vidal: "Homenaje a la memoria de D. Zoel García de Galdeano", en *Gaceta Matemática,* 1.ª serie, Tomo XVI, núms. 1 y 2, págs. 3-7, 1964.

[10] R. Rodríguez Vidal: "Don Zoel García de Galdeano, maestro y apóstol del progreso matemático español", en *Boletín de la Sociedad Puig Adam de profesores de matemáticas,* núm. 14, págs. 9-12, 1987.

[10] R. San Juan: "La obra científica del matemático español D. Ventura de los Reyes Prósper", en *Gaceta Matemática,* 1.ª serie, Vol. II, núm. 2, págs. 37-41, 1950.

[11] J. M. Sánchez Ron: "Introducción", en J. M. Sánchez Ron (Ed.), *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil,* Madrid: CSIC, Ed. El Arquero, págs. 7-16, 1988.

[12] D. de Torres Villarroel: *Vida,* Buenos Aires, Espasa-Calpe, 1948.

[13] M. Tuñón de Lara: "De la Restauración al desastre colonial", en *Historia 16,* núm. 10 (La España de los caciques), págs. 53-94, 1982.

[14] J. Vernet: *Historia de la ciencia española,* Madrid: Instituto de España (Cátedra "Alfonso X el Sabio"), 1975.

[15] R. Wavre: "Los congresos internacionales de matemáticos", en F. Le Lionnais y colaboradores: *Las grandes corrientes del pensamiento matemático,* Buenos Aires, EUDEBA, págs. 320-326, 1962.

Evolución en la enseñanza de la Geometría Elemental

Eugenio Roanes Macías *

Fac. de Educación, Univ. Complutense de Madrid

Abstract

An overlook of the deep changes that have occurred in Elementary Geometry Teaching is presented below. From among the facts that have motivated such changes, the following ones are commented here: the current fashion of looking back towards the great geometrical inventions vs. the predominance of estructuralism, the acceptance of games as a didactic resource, the development of new geometric computer programs and the spread of Mathematics Competitions (with a prevalence of geometric problems). These facts have had a strong influence on the geometric aspects of the present Mathematical Education, that tries to put the rudiments of Geometry within the reach of everybody.

Introducción

La contemplación del espacio en que vivimos seguramente ha hecho reflexionar a la Humanidad desde tiempos remotos. No es de extrañar que fuera la Geometría la ciencia que primero se organizara científicamente. Pero esta temprana estructuración científica ha tenido una enorme repercusión en el modo en que esta ciencia se ha enseñado durante siglos. Sin embargo, en los últimos años se han producido cambios profundos en la enseñanza de la Geometría Elemental.

Son varios los hechos que han motivado tales cambios: la revisión de la trascendencia de las grandes invenciones geométricas frente al predominio del estructuralismo, la aceptación del juego como recurso didáctico, la aparición

*e-mail: roanes@eucmos.sim.ucm.es

de nuevos programas computacionales de carácter geométrico y la proliferación de los concursos de problemas de Matemáticas (con gran predominio de problemas geométricos). Nuestro propósito es analizar estos hechos y sus consecuencias, para justificar las tendencias actuales en la enseñanza de la Geometría Elemental.

1 Grandes avances en Geometría

Desde un punto de vista didáctico, tiene interés aprovechar muchas de las grandes invenciones geométricas, tal como fueron concebidas por sus descubridores, lo cual invita al profesor a interesarse por la historia de la geometría en sus orígenes. Tales invenciones comienzan antes que empiece a desarrollarse la matemática griega.

1.1 Geometría pre-griega

De esta época son representativos los papiros de Rhind, de Moscú y de Ahmes. Por ejemplo, en el segundo de ellos se desarrolla una justificación del cálculo del volumen de un tronco pirámide cuadrangular regular, por reducción al de otros cuerpos más sencillos, cuyo interés didáctico es palpable.

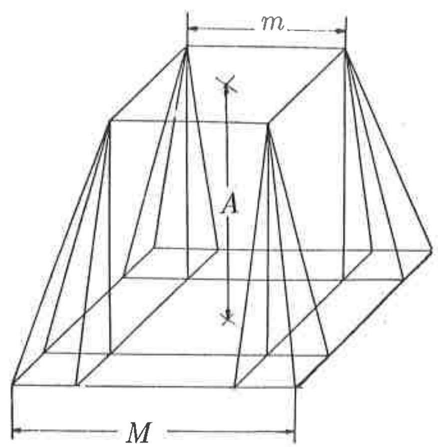


Figura 1

Seccionando el tronco por cuatro planos perpendiculares a sus bases, que contengan a las respectivas aristas de la base menor, se descompone aquel en nueve cuerpos (figura 1). Estos pueden acoplarse de modo que compongan cuerpos como los representados en la figura 2. Los tres tienen la misma altura que el tronco, pero son más sencillos de cubicar. El primero (de izquierda a derecha) es un prisma cuadrangular regular de base la base menor del tronco. El segundo es un ortoedro cuya base rectangular tiene un lado igual a la arista de la base menor del tronco y el otro lado igual a la diferencia entre las dos aristas básicas del tronco. Y el tercero es una pirámide cuadrangular regular de arista básica igual a la diferencia entre las dos aristas básicas del tronco.

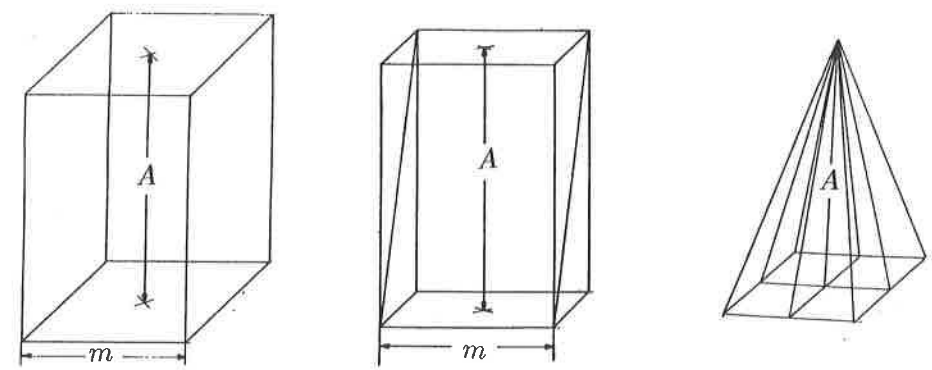


Figura 2

Denotando A a la altura del tronco, M a la arista de su base mayor y m a la de su base menor, la suma de volúmenes de los tres cuerpos de la figura 2 (naturalmente contando dos veces el segundo de ellos) resulta ser

$$m^2A + m(M-m)A + \frac{1}{3}(M-m)^2A$$

Un sencillo ejercicio de cálculo permite expresar esta suma en la forma

$$\frac{1}{3}(M^2 + m^2 + Mm)A$$

y denotando B y B' a las áreas básicas del tronco, la expresión anterior nos lleva al modo usual de expresar el volumen del tronco

$$\frac{1}{3}(B + B' + \sqrt{BB'})A$$

Puede pensarse que este resultado sólo queda así justificado para el caso en que el tronco de pirámide sea cuadrangular regular. Notemos que puede extenderse a un tronco cualquiera, sin más que aplicar el principio de Cavalieri, que comentaremos más adelante.

1.2 Geometría griega

La Matemática griega era esencialmente Geometría. Del periodo preeuclídeo nos limitaremos a señalar dos grandes descubrimientos: el teorema de Tales y el de Pitágoras. Aunque, desafortunadamente, las demostraciones elementales del teorema de Tales no suelen ser rigurosas, en cambio, del teorema de Pitágoras se han desarrollado decenas de justificaciones más simples que la que aparece en [2].

Los Elementos de Euclides constituyen la primera organización de conocimientos científicos realizada por el hombre (aprox. año 300 a. de C.). De esta obra, se comenta en [4] "la obra de Euclides permanecerá viva mucho después de que los libros de texto de hoy se encuentren superados y olvidados, siendo uno de los monumentos más nobles de la antigüedad". Su V postulado, de paralelismo, es quizás el aserto geométrico más controvertido a lo largo de la historia de la geometría.

De la Edad de Oro de la geometría griega (siglo III a. de C.), sólo citaremos por brevedad a dos grandes geómetras, Apolonio y Arquímedes.

El problema de las circunferencias tangentes a tres dadas, propuesto por Apolonio en su libro *Contactos* (en el sentido de *Tangencias*), conocido a través de los comentarios de Pappus, ha interesado a numerosos matemáticos, que encontraron diversas soluciones (Vieta, Gergonne y Bobillier, Fouche, Mannheim,...), cuya simplicidad y exactitud comparó E. Lemoine, según se refiere en [12].

Por otra parte, la demostración del cálculo del volumen de la esfera ideada por Arquímedes y grabada en su tumba es extraordinariamente ingeniosa. En un cilindro circular recto, C, de altura igual a su radio básico, R (figura 3),

se consideran otros dos cuerpos inscritos: un cono, N, de base una de las bases de C y de vértice el centro de la otra base de C; y la semiesfera, S, de base la base de C cuyo centro es el vértice de N. Un plano, P, paralelo a las

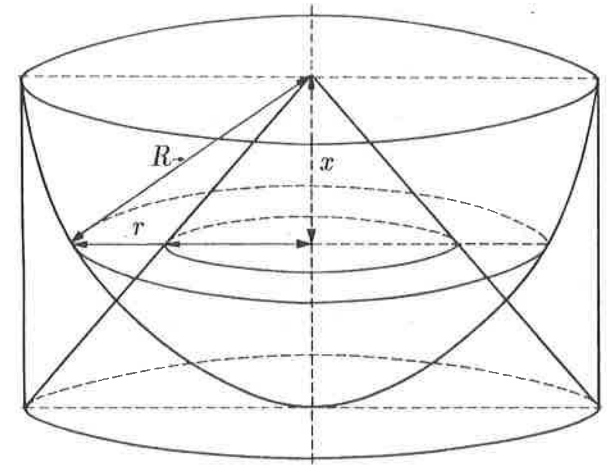


Figura 3

bases de C y a distancia x del vértice de N intersecta sobre estos tres cuerpos secciones circulares. Sobre el cono N intersecta un círculo de radio x. Sobre el cilindro C un círculo de radio R. Y sobre la semiesfera S otro círculo, cuyo radio denotamos r. Aplicando el teorema de Pitágoras, se tiene

$$r^2 + x^2 = R^2$$

de donde, multiplicando por π, resulta

$$\text{área}(P \cap S) + \text{área}(P \cap N) = \text{área}(P \cap C)$$

Como ello es cierto para cualquier x $(0 \leq x \leq R)$, parece natural admitir, aplicando el principio de Cavalieri, $vol(S) + vol(N) = vol(C)$, y por tanto

$$vol(S) = vol(C) - vol(N) = \pi R^2 R - \frac{1}{3}\pi R^2 R = \frac{2}{3}\pi R^3$$

que es la mitad del volumen de la esfera.

Aunque sean muchos los descubrimientos geométricos atribuidos a Arquímedes, debió ser de éste del que estaba más orgulloso, ya que sobre su tumba aparece la representación gráfica de la figura 3.

En la Edad de Plata de la Geometría griega (siglo IV d. de C.), sobresale Pappus, considerado como el último gran geómetra griego. De entre sus invenciones, citaremos el calculó del área (y del volumen) de la superficie (y del cuerpo) de revolución resultante de girar alrededor de un eje una figura contenida en uno de los semiplanos de borde dicho eje. Estos resultados fueron redescubiertos por Guldin (vía cálculo integral) y hoy son conocidos como teoremas de Pappus-Guldin. En [13] puede encontrarse una recreación, de interés didáctico, de cómo posiblemente fueran justificados por Pappus.

1.3 Geometría en la Edad Media

Durante la Edad Media, la Geometría se restringe a los estudios dogmáticos de los Elementos de Euclides (como parte del Cuadrivium), que para muchos terminaban estrellándose en el célebre "Pons Asinorum", relativo a la propiedad de ser isósceles un triángulo con dos ángulos iguales.

1.4 Geometría en el Renacimiento

En el Renacimiento italiano se pone de moda la búsqueda de soluciones perdidas de problemas resueltos por la geometría griega. Por ejemplo, Vieta encuentra la primera solución con regla y compás del problema de Apolonio anteriormente referido [18]. Por otra parte, Cavalieri redescubre un resultado (su principio), ya usado por Arquímedes, sobre la igualdad de volúmenes de dos cuerpos sobre los que un haz de planos paralelos intercepta secciones de áreas respectivamente iguales (para cada plano del haz). Este resultado, que simplifica extraordinariamente el cálculo de volúmenes de varios cuerpos geométricos, tiene el inconveniente de que su demostración rigurosa conlleva implícitamente el concepto de límite.

1.5 Nacimiento de la Geometría Analítica

Por fin, con "La Geometría" de Descartes, tercer apéndice a su "Discurso del Método" (1637), se abre el camino hacia el tratamiento de problemas geométricos con herramientas algebraicas. Nace así la Geometría Analítica.

1.6 Nuevo avance de la Geometría Sintética en el siglo XIX

Sin embargo, todavía había de surgir otra gran invención geométrica, el método de inversión, ideado por Steiner hacia 1830. Este método, de la más pura Geometría Sintética, permite resolver por esta vía, de manera fácil, muchos problemas geométricos, de otro modo más complicados, como el citado de Apolonio, o el de las cadenas de circunferencias tangentes inscritas entre otras dos, consideradas en [15]. Por la invención de este método, Steiner es considerado por algunos como "el Apolonio de los tiempos modernos".

1.7 Organización axiomática de la Geometría en el siglo XIX

Desde que Euclides estableciera su V postulado (el de las paralelas), son muchos los vanos intentos que tratan de probar su dependencia, hasta que, también hacia 1830, tiene lugar el descubrimiento de las geometrías no euclidianas, llevado a cabo independientemente por Lobatchevski, Bolyai y Gauss. Ya se puede, pues, construir una geometría en la que por un punto puede trazarse más de una paralela a una recta dada. Poco después es ideada otra geometría (de Riemann) en la que no puede trazarse ninguna paralela.

Ello hace resurgir un enorme interés por revisar la axiomática de la Geometría. Hacia 1870, Dedekind establece el axioma de continuidad, necesario para asegurar la intersección de recta y circunferencia. En 1882, Pasch propone una nueva axiomática, [8], en la que el concepto de segmento sustituye al de recta como figura básica primaria de dimensión uno. Y en 1899 Hilbert propone, [5], sus cinco grupos fundamentales de axiomas: de enlace, de ordenación, de congruencia, de las paralelas y de continuidad.

Por otra parte, Félix Klein introduce la idea de las distintas geometrías (isométrica, métrica, afín, proyectiva y topológica) como estudio de propiedades invariantes por cada uno de los grupos fundamentales de transformaciones (isometrías, semejanzas, afinidades, proyectividades y homeomorfismos).

1.8 Influencia del revisionismo del XIX en la geometría elemental del siglo XX

Félix Klein escribió en 1908 un tratado, [6], que es quizás el libro que más ha trascendido en la Matemática Elemental de los dos primeros tercios del siglo XX.

Todo esto tiene claras repercusiones didácticas. En los textos de Geometría se empieza a notar la influencia de estos descubrimientos, abandonando poco a poco el dogmatismo de la obra de Euclides. En 1947 Puig Adam publica su Geometría Métrica, [10], en la que se propone una elegante axiomática con los cinco grupos de Hilbert, pero donde los axiomas de congruencia se basan en el concepto de movimiento. En muchos textos españoles de geometría elemental, como [14], se hace sentir la influencia de las obras de Hilbert, Klein y Puig Adam.

La elaboración de modelos geométricos axiomático-deductivos, como [3], sigue teniendo interés para los matemáticos, pero tiene poca repercusión en el aspecto geométrico de la Educación Matemática actual, en que se trata de poner los rudimentos de esta ciencia al alcance de una gran mayoría de la población.

En la enseñanza de la Geometría Elemental actualmente se observa una mayor atención a las ideas que proporcionan técnicas constructivas que facilitan la resolución de problemas, abandonando el predominio del estructuralismo en el sentido de construcción axiomático-deductiva.

Pese a este abandono, conviene insistir en el interés de la Historia de la Geometría en sus orígenes como recurso didáctico, del que hemos querido mostrar algunos ejemplos en los apartados 1.1 y 1.2 de este artículo. Para más información sobre el tema, sugerimos consultar [7] y [9].

2 Explotación del juego como recurso didáctico

Por otra parte, una mayor tendencia a explotar el juego como recurso didáctico, invita a cambiar la manera de presentar algunos temas, tratando de aprovechar su faceta lúdica.

Por ejemplo, hoy solemos presentar el problema de la equivalencia de polígonos, tratado en [14], como "juegos de cortar y pegar (sin desechar ni agregar nada)", para terminar formalizando posteriormente las actividades previamente desarrolladas.

De modo análogo, introducimos los conceptos relativos a movimientos en el plano a través de la generación de frisos tratada en [16], considerando las isometrías que dejan invariantes a los frisos de cada uno de los siete grupos.

3 Aprovechamiento de avances computacionales

También se observa una tendencia cada vez mayor a aprovechar los avances de la tecnología computacional en la enseñanza de la Geometría.

Hoy existen numerosos *programas de simulación*, que permiten presentar cómodamente y explorar rápidamente problemas geométricos diversos.

Por otra parte, los actuales *sistemas de Geometría Dinámica* (Sketchpad, Cabri, Inventor, ...) permiten elaborar construcciones geométricas de modo tan agradable y rápido, que estos sistemas están jubilando a la regla y el compás, del mismo modo que la calculadora jubiló hace unos años a las tablas de logaritmos.

Además, los *paquetes geométricos* que hoy incluyen algunos sistemas de cálculo simbólico permiten manipular cómodamente las ecuaciones de los objetos geométricos, cambiando el modo de trabajar en Geometría Analítica Elemental.

Por último, la sencillez de manejo de las actuales técnicas de *demostración automática* de problemas geométricos, comentada en [11], comienzan a abrirse paso en algunos paises a niveles preuniversitarios. De todas estas técnicas puede encontrarse una amplia descripción en [17].

Por otra parte, algunos algoritmos sencillos de la nueva ciencia denominada *Geometría Computacional* también son aprovechables en Geometría Elemental, como puede verse en [1].

4 Explotación de la competitividad

Los alumnos españoles tienen hoy ocasión de participar en varios concursos de problemas de Matemáticas, en los que tradicionalmente predominan los de carácter geométrico, por requerir pocos conocimientos previos para ser resueltos.

Para alumnos de nivel de COU, cada año se celebra la *Olimpíada Matemática Española*, organizada por la Real Sociedad Matemática Española. Comienza con una Fase Regional en cada distrito universitario y los tres mejor clasificados de cada distrito concurren a la Fase Nacional. Entre los ganadores de ésta son elegidos los representantes de nuestro país en la Olimpíada Matemática Internacional y en la Olimpíada Matemática Ibero-

Americana. Una amplia reseña de ellas, así como los problemas propuestos, fueron publicados en el núm. 49 del Boletín.

Para alumnos de tercero y cuarto de ESO y primer curso del nuevo bachillerato (y niveles equivalentes de FP), se celebra en junio de cada año el *Concurso de Resolución de Problemas*, que convocan la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas y el Colegio Oficial de Doctores y Licenciados de Madrid. Los concursantes mejor clasificados son invitados a participar en la prestigiosa Olimpíada Matemática Rioplatense, que se celebra en Argentina. Una amplia reseña, así como los problemas propuestos, pueden verse en el número 50 del Boletín.

Para alumnos de Educación Primaria, también se organizan concursos de problemas. Por ejemplo, en abril se celebra el *Concurso de Primavera* en la Fac. de Educación de la Univ. Complutense de Madrid, comentado en el núm. 49 del nuestro Boletín.

La proliferación de estos concursos supone un reto para alumnos y profesores, que pueden encontrar amplia información sobre fechas y lugares de celebración de olimpíadas matemáticas, y sobre los problemas propuestos en ellas, en las revistas y boletines de algunas de las Sociedades Matemáticas Federadas y en la recientemente creada Sociedad Ibero-Americana de Generación de Problemas de Matemáticas (Siproma) [19].

5 Conclusiones

En general, puede decirse que, como en toda actividad humana, la moda imperante tiene influencia decisiva hasta en qué y en cómo estudiar Geometría.

Las tendencias actuales en la enseñanza de esta ciencia apuntan en varias direcciones: mejor aprovechamiento de las grandes ideas geométricas en sus orígenes (tal como las concibieron sus descubridores), explotación del aspecto lúdico como recurso didáctico, incorporación de los nuevos programas computacionales de los varios tipos citados y participación en los concursos de problemas.

Todo ello debe animar al profesor de Matemáticas que desee estar al día, a interesarse por la Historia de la Geometría, por los juegos en relación con la actividad geométrica, por los programas computacionales de índole

geométrica (cuya utilización no exige de prerrequisitos informáticos) y por los concursos de problemas.

Entre ellas, la incorporación del ordenador a la clase de Matemáticas es la que, posiblemente, va a tener más influencia en un futuro para la clase de Geometría. La razón de ello es simple, sólo una pequeña proporción de alumnos van a seguir una carrera directa o indirectamente relacionada con la Geometría, pero casi todos van tener que utilizar el ordenador, al menos, como herramienta de un futuro trabajo, cada vez más creativo y menos rutinario.

Referencias

[1] Abellanas, M., *La Geometría contra reloj*, Bol. de la Soc. Puig Adam, 41 (11-32), 1995.

[2] Euclides, *Elements*, Dover, 1952.

[3] Higuera, F., *Una axiomática para el plano*, Bol. de la Soc. Puig Adam, 24 (51-64), 1990.

[4] Heath, T.L., *A History of Greek Mathematics*, Dover, 1963.

[5] Hilbert, D., *Fundamentos de Geometría*, Pub. del Instituto "Jorge Juan" del CSIC, 1953.

[6] Klein, F., *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, Biblioteca Matemática del CSIC, 1931.

[7] Martínez, M., *La Historia de la Matemática como recurso didáctico*, Bol. de la Soc. Puig Adam, 29 (67-77), 1995 y 46 (30-44), 1997.

[8] Pasch, M., *Lecciones de Geometría Moderna*, Junta de Ampliación de Estudios, 1913.

[9] Peralta, J., *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*, Huerga-Fierro, 1995.

[10] Puig Adam, P., *Geometría Métrica*, Biblioteca Matemática 1947.

[11] Recio T., *Cálculo simbólico y geométrico*, Síntesis, 1998.

[12] Roanes Lozano, E., *El problema de Apolonio*, Bol. de la Soc. Puig Adam, 14 (13-41), 1987.

[13] Roanes Lozano E., *Teoremas de Pappus-Guldin vía Geometría Sintética*, Bol. de la Soc. Puig Adam, 7 (41-60), 1986.

[14] Roanes Macías, E., *Introducción a la Geometría*, Anaya, 1980.

[15] Roanes M., E. y Roanes L., E., *Evaluación de la simplicidad y exactitud de dos construcciones de cadenas de Steiner*, Bol. de la Soc. Puig Adam, 33 (37-53), 1993.

[16] Roanes M., E. y Roanes L., E., *Geometría en la ornamentación periódica*, UNO (35-41), 1994.

[17] Roanes M., E. y Roanes L., E., *Nuevas Tecnologías en Geometría*, Complutense, 1995.

[18] Vieta. F., *Varia Responsa, IX, Apollonius Gallus*, Real Academia de Ciencias, 1965.

[19] *Siproma* Iberoamericana, núm. 0, 1997.

Criterios de condensación de Cauchy y de la integral con DERIVE

Juan José Armendáriz Viñuela

I.E.S. Isaac Peral de Torrejón de Ardoz (Madrid)
Departamento de Enseñanzas de la Ingeniería Naval de la U.P.M.

Abstract

In this article series in the plane are represented and the Cauchy's Condensation Criterion and the Integral Criterion for the character of a series study, are made evident with the help of Derive program.

Para muchos de nuestros alumnos de Cálculo Infinitesimal resulta cuando menos caprichosa la elección de las sucesiones que se emplean en la demostración del Criterio de Cauchy. Veamos cómo el programa DERIVE nos ayuda a visualizar y a comprender mejor esa demostración.

Como es sabido, dicho criterio prueba que las series

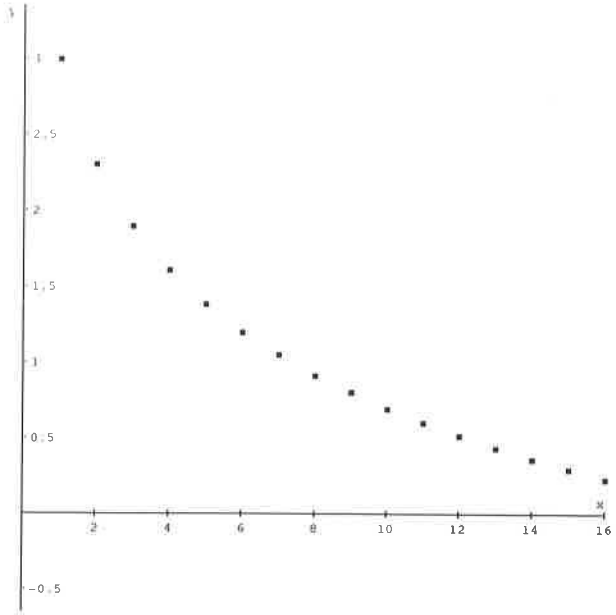
$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \quad y \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2^n a_{2^n}$$

tienen el mismo carácter siempre que la sucesión $\{a_n\}$ sea monótona no creciente y de términos positivos.

Con DERIVE en PLOT-OPTIONS-STATE-CONNECTED "visualizaremos" esas series definiendo una función decreciente y positiva con F(x):=.

Suponiendo que la sucesión $\{a_n\}$ verifique las condiciones del enunciado, al tratarse de una aplicación de **N** en **R** tiene una representación en el plano formada por una sucesión de puntos, la cual obtenemos mediante la sentencia:

SUCESION(p):=VECTOR([[n,F(n)],[n,F(n)]],n,1,p),

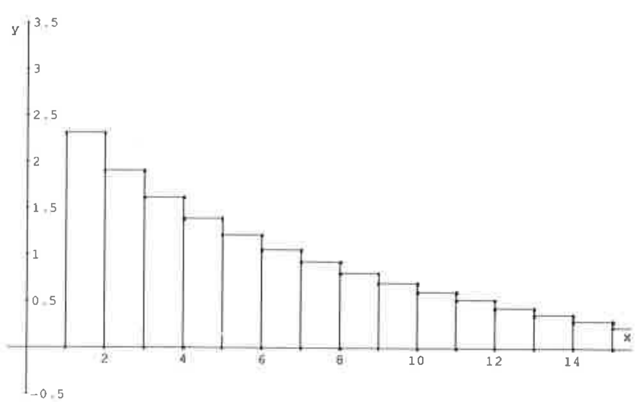


siendo ‘p’ el número de puntos de la sucesión $\{a_n\}$ que deseamos ver en pantalla.

A partir de ellos podemos dibujar la función escalonada $f(x) = \{a_n\}$ y los rectángulos que ésta determina con el eje de abscisas:

```
ESCALON_SUCESION(p):=VECTOR([[n,F(n)],[n+1,F(n)]],n,1,p)

RECTANGULO_SUCESION(p):=APPEND(APPEND(VECTOR([[n,0],[n,F(n)],
[n+1,F(n)]],n,1,p)),[[p+1,0]]),
```



la suma de las áreas de los rectángulos así obtenidos es precisamente

$$\sum_{n=1} a_n,$$

dado que la base de esos rectángulos es 1 y la altura a_n. Ahora bien, si en clase se ha introducido el concepto de integral de Riemann generalizada, también podremos decir que

$$\sum_{n=1} a_n = \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

De forma análoga definiremos la función g(x) = a_{2^n}, pero ésta sobre dos particiones de la semirrecta $[1,+\infty[$ que darán lugar a dos funciones escalonadas distintas.

Llamaremos π y θ a las particiones, caracterizadas por sus conjuntos de puntos $C_\pi = \{2^n \mid n \in \mathbf{N}\}$ y $C_\theta = \{2^{n-1} + 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$, las funciones escalonadas correspondientes son:

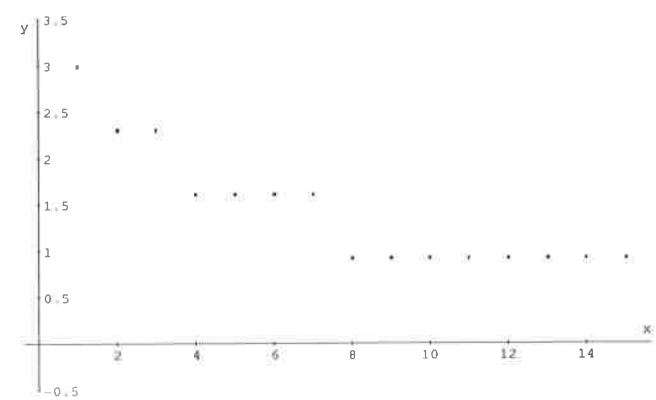
$$g_\pi(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ a_{2^n} & \text{si} \quad 2^n \leq x < 2^{n+1},\ n \in \mathrm{N} \end{cases}$$

y

$$g_\theta(x) = \begin{cases} a_1 & \text{si} \quad 1 \leq x < 2 \\ a_{2^n} & \text{si} \quad 2^{n-1} + 1 \leq x < 2^n + 1,\ n \in \mathrm{N} \end{cases}$$

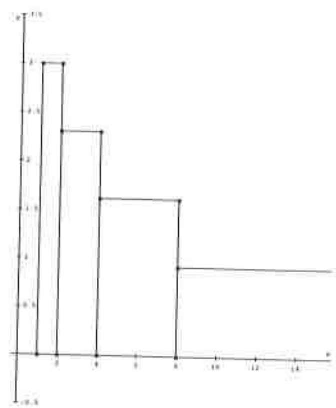
pudiendo visualizar las sucesiones y rectángulos correspondientes.

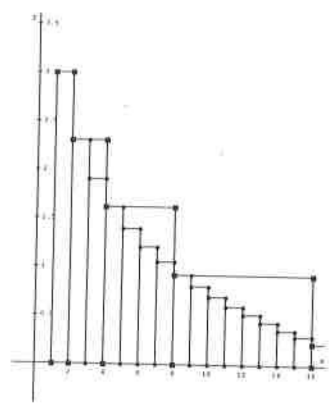
```
SUCESION_MAYORANTE(q):=VECTOR(VECTOR([[2^n+k-1,F(2^n)],
[2^n+k-1,F(2^n)]],k,1,2^n),n,0,q-1)
```



ESCALON_MAYORANTE(q):=VECTOR([[2^(n−1),F(2^(n−1))],[2^n,F(2^(n−1))]], n,1,q)

RECTANGULO_MAYORANTE(q):=APPEND(APPEND(VECTOR([[2^(n−1),0], [2^(n−1),F(2^(n−1))],[2^n,F(2^(n−1))]],n,1,q)),[[2^q,0]])



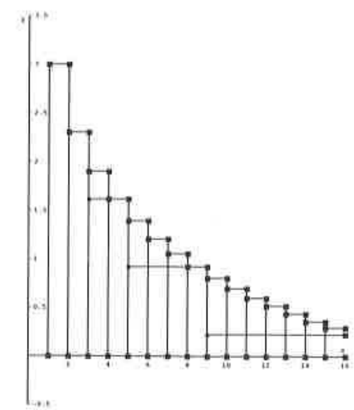


Aquí se comparan la serie dada y la mayorante, análogamente se puede hacer con la minorante o con las tres juntas.

SUCESION_MINORANTE(r):=[[[1,F(1)],[1,F(1)]],VECTOR(VECTOR([[2^n+k,F(2^(n+1))],[2^n+k,F(2^(n+1))]],k,1,2^n),n,0,r−1)]

ESCALON_MINORANTE(r):=VECTOR([[IF(n=0,1,2^(n−1)+1),F(2^n)], [2^n+1,F(2^n)]],n,0,r)

RECTANGULO_MINORANTE(r):=APPEND(APPEND(VECTOR([[IF(n=0,1,2^(n −1)+1),0],[IF(n=0,1,2^(n−1)+1),F(2^n)],2^n+1,F(2^n)]],n,0,r)), [[2^r+1,0]])



La relación entre las tres funciones o conjuntos de rectángulos es:

intervalos	**1-2**	**2-3**	**3-4**	**4-5**	**5-6**	**6-7**	**7-8**	**8-9**	**...**
f(x) $g_\pi((x)$ $g_\theta((x)$	a_1 a_1 a_1	a_2 a_2 a_2	a_3 a_2 a_4	a_4 a_4 a_4	a_5 a_4 a_8	a_6 a_4 a_8	a_7 a_4 a_8	a_8 a_8 a_8	sucesión mayorante minorante

es decir, $0 \le g_\theta(x) \le f(x) \le g_\pi(x)$ “$x \in [1,+\infty[$

El área encerrada por cada una de las funciones escalonadas con el eje OX será

$$a_1 + \sum_{n=1} a_n(2^n - 2^{n-1}) \le \sum_{n=1} a_n \le a_1 + \sum a_{2^n}\left(2^{n+1} - 2^n\right).$$

Luego

$$a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1} 2^n a_{2^n} \le \sum_{n=1} a_n \le a_1 + \sum 2^n a_{2^n}.$$

De donde se deduce el criterio de condensación de Cauchy, ya que por la regla del sanwiches si

$$\sum_{n=1} 2^n a_{2^n}$$

converge o diverge también lo hace

$$\sum_{n=1} a_n.$$

Por otro lado, como f(x) es mayorante de $g_0(x)$ y ambas son de términos positivos, si

$$\sum_{n=1} a_n$$

converge también la hará

$$\sum_{n=1} 2^n a_{2^n}$$

y comparando con $g_\pi(x)$, si

$$\sum_{n=1} a_n$$

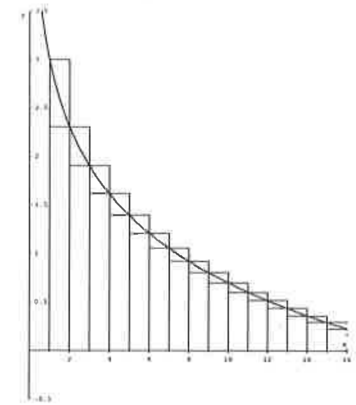
diverge,

$$\sum_{n=1} 2^n a_{2^n}$$

también diverge.

De forma semejante, representando la función F(x):=, definida al principio, los rectángulos dados por RECTANGULO_SUCESION(p) y los rectángulos dados por:

RECTANGULO2_SUCESION(p):=APPEND(APPEND(VECTOR([[n,0],[n,F(n+1)],[n+1,F(n+1)]],n,1,p)),[[p+1,0]]) visualizamos la demostración que hizo Cauchy del criterio de la Integral.



Bibliografía

[1] Tom M. Apóstol: *Calculus*, Ed. Reverté, S.A., Barcelona, 1973.
[2] J. Fernández Biarge y F. Robledo de Miguel: *Curso de Cálculo Infinitesimal*, Ed. Dossat, 1991.
[3] Miguel de Guzmán: *El rincón de la pizarra*, Ed. Pirámide, 1996.
[4] Michael Spivak: *CALCULUS Calculo Infinitesimal*, Ed. Reverté, S.A., Barcelona, 1970.

Revisión de una cuestión clásica: Las funciones seno y coseno

Manuel Suárez Fernández

Fac. de CC. Económicas y Empresariales
U.C.L.M. (Albacete)
e-mail: Msuarez,@ecem-ab.uclm.es

Abstract

A didactic introduction of sin and cos function and their inverses, based on calculus, is developed in this paper.

Los libros de análisis matemático que he consultado, introducen las funciones seno y coseno (a la vez que las demás funciones fundamentales) sólo intuitivamente, del mismo modo que gran parte de los estudiantes universitarios ya conocían de la enseñanza secundaria. No encontré, pues, en libro alguno de los referidos (ni en otro lugar, lo cual, claro está, sólo es mi experiencia personal) una introducción de dichas funciones (reales, de una variable real) seno y coseno mediante definiciones que (inspiradas en una intuición geométrica) estén basadas en el cálculo [1].

Y usualmente encontré que, una vez introducidas intuitivamente dichas funciones, se consideran sus respectivas derivadas e integrales indefinidas y definidas (tambien a la vez que las de las demás funciones fundamentales) y, después, se define la longitud de un arco de curva y, en particular, la de un arco de circunferencia, como función del seno o del coseno, mediante una integral definida y el número *p* mediante una integral impropia. Así, paradógicamente, se llega, por fin, a definir las funciones arco-seno y arco-coseno y las funciones seno y coseno, cuando estas funciones habían sido utilizadas desde un principio.

Todo lo referido me animó a pensar sobre cómo proceder para introducir las referidas funciones seno y coseno, en un orden más lógico que el referido y mis conclusiones sobre el particular (las cuales, claro está, son resultados clásicos, si bien la manera de "hacer las

[1] Un motivo para que unas tales definiciones de las funciones seno y coseno no se den, es que ello resulte más complicado que introducir dichas funciones sólo intuitivamente, como, estimo, usualmente se hace.

cosas" es original, en el sentido de que sólo es fruto de mi personal reflexión), son las siguientes:

No se consideren las funciones seno y coseno (y, en consecuencia, no se considere función trigonométrica alguna) ni sus respectivas inversas, cuando se definan las otras funciones fundamentales. Después, considérense las derivadas de dichas otras funciones fundamentales (antes definidas) sus respectivas funciones primitivas, las integrales definidas, las integrales impropias, defínase "longitud de un arco de curva" (todo ello, pues, sin haber mencionado las funciones seno y coseno ni sus respectivas funciones inversas) y, una vez llegado a este punto, se puede continuar, por ejemplo, así:

Definición 1

Decimos que a = arcsen(y) es una función de [0,1] en R, tal que si $y \in [0,1[$ entonces

$$\operatorname{arcsen}(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

(lo cual significa que definimos

$$\alpha = \int_0^{\operatorname{sen}\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt)$$

y

$$\operatorname{arcsen}(1) = \int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \lim_{y\to 1^-} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt. \qquad (2).$$

[2] Dicho límite existe, pues si $0 \le t < 1$, entonces $t^2 \le t$ y, en consecuencia,

$$\frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \le \frac{1}{\sqrt{1-t}}.$$

Luego, si $0 \le y < 1$ entonces

$$\int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \le \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = -2\sqrt{1-t}\Big|_{t=0}^{t=y} = -2\sqrt{1-y+2},$$

de donde

$$\int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \le \int_0^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt = \lim_{\Delta y\to 1^-}(-2\sqrt{1-y}+2) = 2.$$

Definición 2

π es el número real tal que $\pi/2=\text{arcsen}(1)$ (y, en consecuencia, $\alpha = \text{arcsen}(y)$ es la función biyectiva de $[0,1]$ en $[0,\pi/2]$ tal que si $y \in [0,1[$ entonces

$$\text{arcsen}(y) = \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

y si $y = 1$ entonces $a = \pi/2$).

Teorema 1

La función $\alpha = \text{arcsen}(y)$, de $[0,1]$ en $[0,\pi/2]$, es biyectiva, continua, derivable en $[0,1[$ y si $y \in [0,1[$ entonces,

$$(\text{arcsen}(y))' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Demostración

Es trivial que la función $\alpha = \text{arcsen}(y)$, de $[0,1]$ en $[0,\pi/2]$, es biyectiva y continua. Y si $y \in [0,1[$ entonces,

$$(\text{arcsen}(y))' = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \int_y^{y+\Delta y} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Definición 3

Decimos que $y = \text{sen}(\alpha)$ es la función de $[0,\pi/2]$ en $[0,1]$, inversa de la $\alpha = \text{arcsen}(y)$ (la cual existe puesto que la función $\alpha = \text{arcsen}(y)$, de $[0,1]$ en $[0,\pi/2]$, es biyectiva).

Teorema 2

La función $y = \text{sen}(\alpha)$ es derivable en $[0,\pi/2[$ y si $a \in [0,\pi/2[$ entonces

$$(\text{sen}(\alpha))' = \sqrt{1-y^2}.$$

Demostración trivial.

Definición 4

Decimos que $x = \cos(\alpha)$ es una función de $[0,\pi/2]$ en $[0,1]$, tal que si $a \in ([0,\pi/2]$ entonces

$$\cos(\alpha) = \sqrt{1-\text{sen}^2(\alpha)}.$$

Teorema 3

"Si $\alpha \in [0,p/2]$ entonces

$$\text{sen}(\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(\alpha)}\text{''},$$

"si $\alpha \in [0,\pi/2[$ entonces $(\text{sen}(\alpha))' = \cos(\alpha)$" y la función $x = \cos(\alpha)$, de $[0,\pi/2]$ en $[0,1]$, es biyectiva, es derivable en $[0,\pi/2[$ y si $\alpha \in [0,\pi/2[$ entonces $(\cos(\alpha))' = -\text{sen}(\alpha)$.

Demostración trivial.

Definición 5

Decimos que $\alpha = \arccos(x)$ es la función de $[0,1]$ en $[0,\pi/2]$, inversa de la $x = \cos(\alpha)$ (la cual existe, puesto que la función $x = \cos(\alpha)$, de $[0,\pi/2]$ en $[0,1]$, es biyectiva).

Teorema 4

La función $\alpha = \arccos(x)$ es biyectiva de $[0,1]$ en $[0,\pi/2]$, tal que si $x \in [0,1[$ entonces

$$\arccos(x) = \int_x^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$$

(lo cual significa que

$$\alpha = \int_{\cos\alpha}^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt)$$

y si x = 1 entonces arccos (x) = 0. Es derivable en [0,1[y si x∈[0,1[entonces

$$(\arccos(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demostración

Es trivial que la función $\alpha = \arccos(x)$ es biyectiva de [0,1] en [0,π/2]. Se verifica que

$$\alpha = \int_0^{\operatorname{sen}\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt \text{ (Definición 1).}$$

Luego, haciendo el cambio de variable

$$t = \sqrt{1-v^2}$$

(y, en consecuencia,

$$v = \sqrt{1-t^2}),$$

resulta que

$$\alpha = \int_0^{\operatorname{sen}\alpha} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_{1^-}^{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\alpha)}} \frac{1}{v}\cdot\frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}\,dv =$$

$$= \int_{\cos(\alpha)}^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\,dv = \int_{\cos(\alpha)}^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_x^{1^-} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Y si x∈[0,1[y $\alpha = \arccos(x)$ entonces

$$(\arccos(x))' = \frac{1}{(\cos(\alpha))'} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(\alpha)} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Teorema 5

Si a∈[0,p/2[, b∈[0,p/2[y a > b entonces

$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen}(a)\cdot\cos(b) - \cos(a)\cdot\operatorname{sen}(b).$$

Demostración

Si entonces $s = \operatorname{sen}(\alpha)$, $u = \operatorname{sen}(\beta)$, $y = s\,.\,\sqrt{1-u^2} - \sqrt{1-s^2}\cdot u$, $F(y) = \operatorname{arcsen}(y)$ y derivamos F(y) respecto de la variable u (considerando a la variable s como un parámetro), entonces resulta que,

$$\frac{\partial F\left(s\cdot\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-s^2}\cdot u\right)}{\partial u} = F_x'\left(s\cdot\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-s^2}\cdot u\right)\cdot\left(\frac{-s\cdot u}{\sqrt{1-u^2}}-\sqrt{1-s^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(s\cdot\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-s^2}\cdot u}}\cdot\left(-\frac{s\cdot u+\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{1-u^2}}\right) =$$

$$= -\sqrt{\frac{\left(s\cdot u+\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{1-u^2}\right)^2}{1-\left(s\cdot\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-s^2}\cdot u\right)^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{s^2\cdot u^2+(1-s^2)\cdot(1-u^2)+2\cdot s\cdot u\cdot\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{1-u^2}}{1-\left(s\cdot\sqrt{1-u^2}\right)^2-\left(\sqrt{1-s^2}\cdot u\right)^2+2\cdot s\cdot\sqrt{1-u^2}\cdot\sqrt{1-s^2}\cdot u}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{s^2\cdot u^2+1-u^2-s^2+s^2\cdot u^2 2\cdot s\cdot u\cdot\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{1-u^2}}{1-s^2+s^2\cdot u^2-u^2+s^2\cdot u^2+2\cdot s\cdot u\cdot\sqrt{1-s^2}\cdot\sqrt{1-u^2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Luego,

$$F\left(s\cdot\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-s^2}\cdot u\right) = -F(u)+K(s) \qquad (3)$$

[3] Siendo K(s) "la constante de integración", la cual es función del parámetro s.

y, en consecuencia, si u = 0 entonces F(s) = –F(0) + K(s) = –0 + K(s) = K(s), puesto que arcsen (0) = 0. Luego,

$$F\left(s\cdot\sqrt{1-u^2}-\sqrt{1-s^2}\cdot u\right)=-F(u)+F(s),$$

de donde, arcsen (sen (α) · cos (β) – cos (α) · sen (β)) = -arcsen (u) + arcsen (s) = –β + α. Así, pues, sen (α – β) = sen (α) · cos (β) – cos (α) · sen (β).

Teorema 6

Si $\alpha\in[0,\pi/2[$, $\beta\in[0,\pi/2[$ y α > β entonces, cos (α – β) = sen (α) · cos (α) + cos (α) · sen (β).

Demostración

Entonces

$$\cos(\alpha-\beta)=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\alpha-\beta)}=\sqrt{1-(\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta))^2}=$$

$$=\sqrt{1-\operatorname{sen}^2(\alpha)\cdot\cos^2(\beta)-\cos^2(\alpha)\cdot\operatorname{sen}^2(\beta)+2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)}=$$

$$=\sqrt{\operatorname{sen}^2(\alpha)\cdot\operatorname{sen}^2(\beta)+\cos^2(\alpha)\cdot\cos^2(\beta)+2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)}=$$

$$=\sqrt{(\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta))^2}=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta).$$

Teorema 7

Si $\alpha\in[0,\pi/2[$, $\beta\in[0,\pi/2[$ y $\alpha+\beta\in[0,\pi/2[$ entonces cos (α + ν) = cos (α) · cos (β) – sen (α) · sen (β).

Demostración

Entonces, sen (α) = sen ((α + β) – β) = sen (α + β) · cos (β) – cos (α + β) · sen (β) =

$$=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\beta).$$

Luego,

$$\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}\cdot\cos(\beta)=\operatorname{sen}(\alpha)+\cos(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{sen}(\beta),$$

de donde, (1 – cos² (α + β)) · cos² (b) = sen² (α) + cos² (α + β) · sen² (β) + 2 · sen (α) · sen (β) · cos (α + β). Luego, cos² (α + β) + 2 · sen (α) · sen (β) · cos (α + β) + sen² (α) – cos² (β) = 0, de donde, considerando que la expresión anterior es una ecuación de segundo grado y cos (α + β) la incógnita, resulta,

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{-2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\pm\sqrt{4\cdot\operatorname{sen}^2(\alpha)\cdot\operatorname{sen}^2(\beta)-4\cdot\left(\operatorname{sen}^2(\alpha)-\operatorname{sen}^2(\beta)\right)}}{2}=$$

$$=-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\pm\sqrt{\left(1-\cos^2(\alpha)\right)\cdot\left(1-\cos^2(\beta)\right)-\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\beta)}=$$

$$=-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\pm\sqrt{1-\cos^2(\alpha)-\cos^2(\beta)+\cos^2(\alpha)\cdot\cos^2(\beta)-\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\beta)}=$$

$$=-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\pm\sqrt{\cos^2(\alpha)\cdot\cos^2(\beta)}.$$

Luego, puesto que ningún seno ni coseno de los considerados son negativos, cos (α + β) = cos (α) · cos (β) – sen (α) · sen (β).

Teorema 8

Si $\alpha\in[0,\pi/2[$, $\beta\in[0,\pi/2[$ y $\alpha+\beta\in[0,\pi/2[$ entonces sen (α + β) = sen (α) · cos (β) + cos (α) · sen (β).

Demostración

Entonces,

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta)=\sqrt{1-\cos^2(\alpha+\beta)}=\sqrt{1-\left(\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)\right)^2}=$$

$$=\sqrt{1-\cos^2(\alpha)\cdot\cos^2(\beta)-\operatorname{sen}^2(\alpha)\cdot\operatorname{sen}^2(\beta)+2\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)}=$$

$$=\sqrt{\operatorname{sen}^2(\alpha)\cdot\cos^2(\beta)+\cos^2(\alpha)\cdot\operatorname{sen}^2(\beta)+2\cdot\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)}=$$

$$= \sqrt{(\operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta))^2} = \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta)\cdot\cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta).$$

Definición de las funciones seno y coseno en todo el conjunto **R.**

Definición 6

Decimos que sen (γ) y cos (γ) son funciones reales de variable real γ, tales que (siendo **R** el conjunto de los números reales),

- sen (γ) es prolongación a **R** y cos (γ) es prolongación a **R** de, respectivamente, la función seno y la función coseno que definimos en $[0,\pi/2]$ (y, por tanto, sen (0) = 0 y cos (0) = 1).
- Si a es un número real cualquiera entonces $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.
- Si α, β son números reales cualesquiera entonces,

$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta).$$

El siguiente teorema 9 expresa que las condiciones referidas en la definición 6 se complementan y el teorema 10 expresa sen ($\alpha+\beta$) y cos ($\alpha+\beta$) en función de sen (α), cos (α), sen (β), cos (β), siendo α, β números reales cualesquiera.

Teorema 9

Si para cualesquiera números relales a, β se verifica que

$$\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1,\ \operatorname{sen}^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1,$$
$$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \cos(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta),$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\cdot\operatorname{sen}(\beta)$$

entonces, si a, b, c, d son números reales cualesquiera tales que a – b = c – d entonces,

- sen (a) · cos (b) – cos (a) · sen (b) = sen (c) · cos (d) – cos (c) · sen (d)
- cos (a) · cos (b) + sen (a) · sen (b) = cos (c) · cos (d) + sen (c) · sen (d). (4).

[4] Así resulta que, dado un número real cualquiera α_0, si x, u son números reales tales que α_0 = x – u entonces los números reales sen (α_0) = sen (x – u) = sen (x) · cos (u) – cos (x) · sen (u) y cos (α_0) = cos (x – u) = cos (x) · cos (u) + sen (x) · sen (u), ambos son independientes de cómo x, u hayan sido elegidos (y que para ello es nece-

Demostración

Si, entonces, a, b, c, d son números reales cualesquiera tales a – b = c – d y r = c – a entonces a = c – r, b = d – r y, en consecuencia,

- sen (a) · cos (b) – cos (a) · sen (b) = sen (a – b)= sen((c – r) – (d – r)) = sen (c – r) · cos (d – r) – cos (c – r) · sen (d – r) = (sen (c) · cos (r) – cos (c) · sen (r)) · (cos (d) · cos (r) + sen(d) · sen (r)) – (cos (c) · cos (r) + sen (c) · sen (r)) · (sen (d) · cos(r) – cos(d) · sen(r)) = (sen(c) · cos (d) – cos (c) · sen (d)) · (sen2 (r) + sen² (r)) = (sen (c) · cos (d) – cos (c) · sen (d)) · 1 = sen (c) · cos (d) – cos (c) · sen (d).
- cos (a) · con (b) + sen (a) · sen (b) = cos (a – b) = cos ((c – r) – (d – r)) = cos (c – r) · cos (d – r) + sen (c – r) · sen (d – r) = (cos (c) · cos (r) + sen (c) · sen (r)) · (cos (d) · cos (r) + sen (d) · sen (r)) + (sen (c) · cos (r) – cos (c) · sen (r)) · (sen (d) · cos (r) – cos (d) · sen (r)) = (cos (c) · cos (d) + sen (c) · sen (d)) · (sen² (r) + cos² (r)) = (cos (c) · cos (d) + sen (c) · sen (d)) · 1 = cos (c) · cos (d) + sen (c) · sen (d).

Teorema 10

Para cualesquiera números reales α, β se verifica (considerando la definición 6) que sen ($\alpha+\beta$) = sen (α) · cos (β) + cos (α) · sen (β) y cos ($\alpha+\beta$) = cos (α) · cos (β) – sen (α) · sen (β).

Demostración

Si α, β son números reales cualesquiera entonces,

- sen (–β) = sen (0 – β) = sen (0) · cos (β) - cos (0) · sen (β) = 0 · cos (β) – 1 · sen (β) = –sen (β).
- cos (–β) = cos (0 – β) = cos (0) · cos (β) + sen (0) · sen (β) = 1 · cos (β) + 0 · sen (β) = cos (β).

Luego, entonces,

- sen ($\alpha+\beta$) = sen (α – (–β)) = sen (α) · cos (–β) – cos (α) · sen (–β) = sen (α) · cos (β) – cos (α).(–sen (β)) = sen (α) · cos (β) + cos (α) · sen (β).

sario y suficiente que, como hemos supuesto, si r es un número real cualquiera entonces sen² (r) + cos² (r) = 1), condición que ha de cumplirse para que, siendo α una variable en **R,** sen (α) y cos (α) sean, en efecto, funciones.

• $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos(\alpha) \cdot \cos(-\beta) + \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(-\beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \text{sen}(\alpha) \cdot (-\text{sen}(\beta)) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta)$.

Las funciones sen (α), cos (α), arcsen (α), arccos (α) son derivables en todo punto real y las expresiones de las respectivas derivadas son las mismas que cuando el punto pertenece al intervalo $[0,\pi/2[$, lo cual se puede razonar para cada una de las referidas funciones, como, por ejemplo, hacemos a continuación con una de ellas:

Si α_0 es un punto (es decir, un número) real cualquiera, sea, entonces, a_1 un número real tal que α_1 (α_0 y $\alpha_0 - \alpha_1([0,\pi/2[$. Luego, si b es una variable tal que $\beta = \alpha - \alpha_1$ y β_0 es un número real tal que $\beta_0 = \alpha_0 - \alpha_1$ entonces

$$\beta_0([0,\pi/2[\text{ y } \text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta + \alpha_1) = \text{sen}(\beta) \cdot \cos(\alpha_1) + \cos(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha_1),$$

de donde, considerando que a_1 es una constante y variando β en $[0,\pi/2[$, resulta que,

$$(\text{sen}(\alpha))' = (\text{sen}(\beta))' \cdot \cos(\alpha_1) + (\cos(\beta))' \text{ sen}(\alpha_1) = \cos(\beta) \cdot \cos(\alpha_1) - \text{sen}(\beta) \cdot \text{sen}(\alpha_1).$$

Luego, la derivada de sen (α) en el punto α_0 es

$$(\text{sen}(\alpha_0))' = \cos(\beta_0) \cdot \cos(\alpha_1) - \text{sen}(\beta_0).\text{sen}(\alpha_1) = \cos(\beta_0 + \alpha_1) = \cos(\alpha_0).$$

Superficies y Teorema de Tales

Pedro Pescador Díaz

I.E.S. Juana Pimentel

Abstract

This article proves that the proposition 'Area of the triangle is a constant equal to divide base multiplied by height into two', is equivalent to Tales' Theorem.

1. Introducción

En el anterior artículo sobre el Teorema de Tales, se basó la demostración en el uso de superficies. En éste veremos la equivalencia entre el mencionado teorema y que la superficie de un triángulo sea una constante.

2. Preliminares

Observación

Sean a y b dos segmentos que forman un ángulo C.

La altura h que determina el extremo libre de a sobre b depende de la longitud a y del ángulo C:

$$h = h(a, C).$$

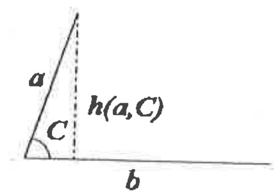


Figura 1

Proposición 1

En un triángulo

$$S = \frac{base \cdot altura}{2}$$

es una constante.

Puesto que base puede ser cualquier lado y altura es la que determina el vértice opuesto sobre él, esto significa que:

$$S = \frac{b \cdot h(a,C)}{2} = \frac{a \cdot h(b,C)}{2}.$$

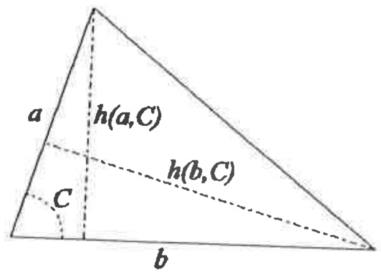


Figura 2

Proposición 2. En las condiciones enunciadas en la observación se tiene:

$$h(a,C) = a \cdot s(C).$$

La altura depende linealmente del lado a y de una función de C, a la que llamamos $s(C)$.

Proposición 3

Teorema de Tales:

$$T' \sim T \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}.$$

3. Demostraciones

Se demuestra que las tres proposiciones son equivalentes.

P1 ⇒ P2.

$$2S = b \cdot h(a,C) = a \cdot h(b,C)$$

$$\frac{h(a,C)}{a} = \frac{h(b,C)}{b}$$

Y por ser a, b y C independientes, estos cocientes sólo pueden ser una función de C.

$$\frac{h(a,C)}{a} = \frac{h(b,C)}{b} = s(C)$$

P1 ⇐ P2.

$$S = \frac{b \cdot h(a,C)}{2} = \frac{b \cdot a \cdot s(C)}{2} = \frac{a \cdot b \cdot s(C)}{2} = \frac{a \cdot h(b,C)}{2}$$

P2 ⇒ P3.

$$T' \sim T \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

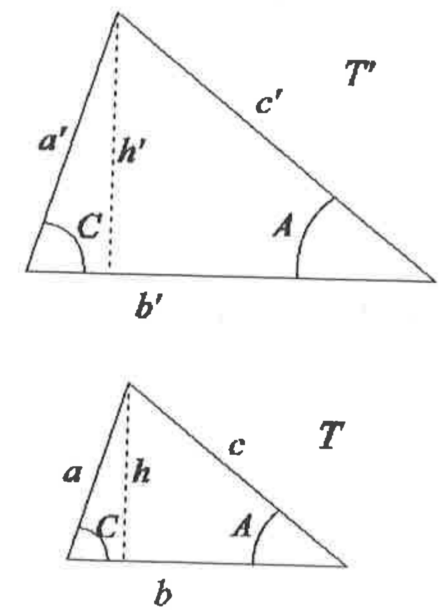


Figura 3

En efecto

$$T' \sim T \Rightarrow A' = A \text{ y } C' = C$$

y por la hipótesis P2

$$\left.\begin{aligned} h' = a' \cdot s(C) = c' \cdot s(A) \\ h = a \cdot s(C) = c \cdot s(A) \end{aligned}\right\},$$

de donde, al dividir miembro a miembro

$$\frac{h'}{h} = \frac{a'}{a} = \frac{c'}{c}$$

Análogamente, considerando al lado c como base, resulta

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

$$T' \sim T \Leftarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

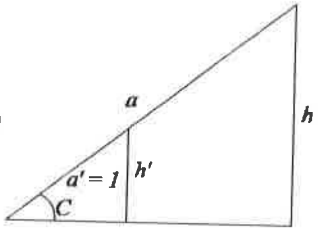
Demostración

Véase boletín N.° 47 de octubre de 1997.

P2 $\Leftarrow$ P3.

Según se observa en la figura 4, se tiene:

$$\frac{h(a,C)}{h'(a',C)} = \frac{a}{a'}$$



Al tomar $a' = 1$ resulta

$$h(a,C) = a \cdot h(1,C) = a \cdot s(C)$$

Observamos que $s(C) = h(1,C)$

Se puede abreviar el proceso haciendo

P1 => P2 => P3 => P1,

siendo fácil la última implicación.

Reseña de libros

JUAN MANUEL DE OLAZÁBAL: *Procedimientos simbólicos en Álgebra Lineal,* Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cantabria, 1998. Contiene 287 páginas.

Existen numerosos tratados de Álgebra Lineal, pero éste no es uno más, pues ha sido concebido con un planteamiento original y actual, atendiendo especialmente al aspecto constructivo y algorítmico de esta disciplina.

El profesor Olazábal fue uno de los primeros en España en darse cuenta de que la aparición de los Sistemas de Cómputo Algebraico (también llamados Sistemas de Cálculo Simbólico o de Cálculo Formal) iba a influir notoriamente en adelante en el Álgebra y en su enseñanza. Y no fuimos pocos quienes recorrimos nuestros primeros pasos por tales sistemas de su mano en la Universidad de Cantabria en los años ochenta.

Con la implementación de estos sistemas en programas de ordenadores personales, se ha puesto al alcance de los alumnos la automatización del cálculo simbólico. Ello está llevando a un abandono del modo abstracto tradicional de enseñar Álgebra Lineal, sustituyéndolo por un modo más constructivo e interactivo.

Por otra parte, Manolo Olazábal (como es conocido entre los algebristas españoles) ha desarrollado una gran actividad investigadora de los últimos años en el campo del Álgebra Lineal, según se desprende de sus publicaciones.

No es, pues, de extrañar que haya concebido un libro muy original, en cuanto a organización de contenidos se refiere, y totalmente actualizado, en cuanto al modo constructivo de presentar los conceptos se refiere. Lo presenta dividido en cuatro capítulos.

En el capítulo I, titulado "Matrices y sistemas", se introducen las operaciones matriciales, para llegar rápidamente y de modo constructivo al concepto de rango de una matriz, determinante y su aplicación a resolver sistemas lineales.

El capítulo II, titulado "Semejanza de matrices", se dedica a la diagonalización. Después de introducir el concepto de polinomio mínimo, se presenta el teorema de Hamilton-Cayley, terminando con la forma canónica de Jordan y su aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes.

En el capítulo III, titulado "Espacios vectoriales", se introducen los conceptos abstractos de espacio vectorial, subespacios, bases, dimensión y aplicaciones lineales, llegando a las formas canónicas de un endomorfismo.

El capítulo IV, titulado "Espacios métricos", se dedica a las formas bilineales y los espacios vectoriales euclídeos, para terminar con los teoremas de Moore y Penrose, y un apartado sobre cónicas y cuádricas.

Siempre que es posible, se dan demostraciones constructivas, que al final del libro se traducen en procedimientos (escritos en seudocódigo), que el lector puede implementar en el sistema de cálculo simbólico que utilice.

Finalmente, la elegancia en el uso del lenguaje y el rigor matemático se ponen de manifiesto a lo largo de toda la obra.

En mi opinión, este libro no puede faltar en la biblioteca del profesor de Álgebra Lineal, que desee estar actualizado al final de los años 90.

E. Roanes M.

TOMÁS RECIO: *Cálculo simbólico y geométrico,* editorial Síntesis, 1998. Contiene 271 páginas.

En este libro pueden encontrarse respuestas a preguntas muy concretas planteadas en un estudio sobre el tema "Matemáticas Escolares de los años 90" abordado por la Comisión Internacional sobre Educación Matemática (ICMI), hace más de una década (Kuwait, 1986). Se refería este estudio, al aprovechamiento de la tecnología computacional en la Educación Matemática, con especial énfasis en los cambios en los contenidos a enseñar, como consecuencia de la incorporación de las computadoras a nuestra sociedad.

Para ilustrar tales cambios, el autor ha elegido cuatro temas actuales y muy atractivos, que ha desarrollado en cuatro capítulos, en cada uno de los cuales se proponen, plantean y desarrollan problemas que introducen al lector de modo agradable en esta manera novedosa de hacer matemáticas.

El capítulo 1 está dedicado al descubrimiento automático de teoremas geométricos, mediante técnicas algebraicas de muy sencilla utilización y ayudándose en los cálculos de un sistema computacional de cálculo simbólico. Tras ocuparse de la motivación didáctica, se analizan cuatro pasos en el proceso: establecimiento de las hipótesis (o datos de la construcción), establecimiento de la tesis (conjetura arbitraria), búsqueda de hipótesis complementarias y verificación de la veracidad de la tesis bajo nuevas hipótesis.

En el capítulo 2 se analiza el problema didáctico de la enseñanza de los números. El autor refiere una amplia bibliografía relativa a la confusión conceptual que produce en los alumnos el uso casi exclusivo de la expresión decimal de los números reales y, para evitarlo, propone modos de aprovechamiento de los programas de cálculo simbólico, que permiten trabajar en aritmética exacta. Es muy interesante la descripción que se hace de la codificación de raíces reales de una ecuación algebraica mediante el lema de Thom.

En el capítulo 3, titulado Rigidez y Flexibilidad, se plantean las isometrías o movimientos de un modo muy original y práctico, a través de los grados de libertad o parámetros libres en las ecuaciones de las figuras geométricas consideradas.

Y el capítulo 4 es una invitación a iniciarse en la nueva disciplina denominada Geometría Computacional, a través de algoritmos muy simples, que no requieren conocimientos previos. Buena muestra de ellos son los diagramas de Voronoi o la intersección de polígonos y semiplanos con el algoritmo de divide y vencerás.

A lo largo del libro se hace un análisis sobre el cambio en el modo de razonamiento matemático, influenciado por la aparición del ordenador y por descubrimientos matemáticos recientes.

Para animar a estos cambios a los detractores de la intromisión del ordenador en la enseñanza de la Matemática, Tomás Recio exhibe un brillante argumento, afirmando que el ajedrez no ha dejado de ser un juego intelectualmente atrayente por el hecho de que hoy existan formidables programas informáticos para ese juego. Muy al contrario, hoy tales programas son aprovechados por los ajedrecistas para aprender y analizar movimientos.

El libro no está dirigido al profesional de la investigación matemática de punta, sino más bien al profesional de la enseñanza de la Matemática. Su autor ha conseguido superar una díficil tarea. La de proyectar la Matemática que se hace hoy sobre su enseñanza en los niveles de bachillerato y primeros cursos universitarios.

Es este un libro muy recomendable para todo profesor de Matemáticas que desee estar actualizado.

E. Roanes M.

CLAUDI ALSINA: *Contar bien para vivir mejor,* Rubes Editorial, 1998. Contiene 143 páginas.

Claudi Alsina, catedrático de Matemáticas de la Universidad Politécnica de Cataluña, es un convencido divulgador de las virtudes cívicas y formativas de las Matemáticas.

En este libro el autor argumenta cómo vivir bien es, cada vez más, una compleja operación de cálculo. Cómo el mundo que nos rodea evoluciona constantemente y nos pone a prueba evaluándonos, tentándonos y desinformándonos, usando para ello la poderosa arma de los números.

El libro aparece estructurado en siete capítulos, cuyos títulos ya sugieren el modo divertido de expresar ideas a que nos tiene acostumbrados el profesor Alsina. Éstos son:

1. Consejos matemáticos muy personales.
2. Consejos matemáticos sobre familia, sociedad y entorno.
3. Consejos matemáticos para compras y viajes.
4. Consejos matemáticos para imagen y sonido.
5. Consejos matemáticos para ahorro e impuestos.
6. Consejos matemáticos para dejar de apostar
7. Consejos matemáticos para razonar.

Y, por último, "todos los consejos se resumen en uno".

Cada uno de estos siete capítulos consta de varios apartados, indepedientes entre sí, en cada uno de los cuales se plantea una cuestión de la vida cotidiana, que es resuelta con sencillas herramientas de matemática elemental, terminando con un consejo, a la vez práctico y divertido, en que suele aplicarse la formulación matemática desarrollada.

Las cuestiones aludidas (tema central de cada apartado) han sido elegidas de entre las que todo el mundo trata en su vida cotidiana, pero no se tenía una idea clara, hasta terminar de leer el apartado y gracias a la precisión que a ello puede aportar un poco de condimento matemático. He aquí, por ejemplo, los títulos de los apartados del capítulo cuarto:

- Fotocopias reducidas y ampliadas,
- La fotografía: secretos de la luz y los formatos.
- La digitalización de las imágenes.
- Cuando hablar (por teléfono) no es gratis.
- Codos, códigos y codificaciones.
- El discreto encanto de la publicidad.

El autor trata de hacer comprender al lector que las matemáticas pueden ser divertidas y pueden constituir una herramienta imprescindible en la difícil tarea de vivir mejor.

El texto está escrito en clave coloquial y salpicado de humor, en un intento de convencer al lector de la utilidad de las matemáticas en su vida y de la amenidad que las consideraciones matemáticas pueden tener (cuando son contadas por Claudi Alsina).

Es una pena que esta reseña no haya podido salir en el anterior número del Boletín, antes de las vacaciones, porque el libro es una excelente lectura de verano, para toda la familia.

E. Roanes M.

C. López, P. Montesinos y R. Ruiz: *Taller de Matemáticas*, editorial Mileto, 1998. Contiene 144 páginas y disquete adjunto con la programación didáctica y las soluciones a los ejercicios.

Este libro consta de diez unidades didácticas agrupadas en cuatro bloques temáticos: 1) Números, 2) Geometría, 3) Problemas y juegos y 4) Matemáticas del consumidor.

Los autores han preparado este libro para alumnos del 2.° ciclo de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO). El lenguaje utilizado es sencillo, dirigido al alumno, de forma que al leer el libro se tiene la sensación de estar oyendo al profesor en el aula. Las unidades didácticas se desarrollan adecuándose al nivel de conocimientos de los alumnos de 3.° y 4.° de ESO, basándose en la experiencia de los autores que durante varios cursos han estado impartiendo esta materia en sus Institutos.

Su enfoque es esencialmente práctico, basándose en el esquema: concepto, ejemplo, ejercicios. Destaca también el aspecto manipulativo de los contenidos. Por ejemplo, las

cuatro unidades didácticas del bloque Geometría son: Libro de espejos, Geoplanos y tramas, Tangram, Mosaicos.

El libro presenta temas novedosos como las «Matemáticas del consumidor», donde se le presentan al alumno situaciones de su entorno habitual para que entienda la utilidad de algunos conocimientos matemáticos en su vida diaria y la necesidad de manejarlos correctamente. Unas unidades se apoyan en otras, pues previamente se ha desarrollado la unidad «Calculadora y cálculo mental» para que el alumno desarrolle su capacidad de cálculo mental, comprobando con la calculadora si los cálculos mentales son correctos o no.

En el bloque de «Problemas y juegos» se ha recogido una amplia colección. En la unidad de «Problemas» se describen diversas estrategias para resolverlos y los juegos se presentan adaptados para su desarrollo en el aula, agrupados en: solitarios para dos jugadores y juegos para toda la clase.

El libro se completa con un disquete que contiene la programación didáctica y las soluciones a los ejercicios.

E. Roanes M.

Problemas propuestos

Problemas propuestos
en la 39ª OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS
celebrada en Taipéi los días 15-16 de julio de 1998

Problema nº 1:

En el cuadrilátero convexo $ABCD$, las diagonales AC y BD son perpendiculares y los lados opuestos AB y DC no son paralelos. El punto P intersección de las mediatrices de AB y DC está en el interior del cuadrilátero $ABCD$. Demuestre que los vértices de $ABCD$ están en una misma circunferencia si y sólo si los triángulos ABP y CDP tienen áreas iguales.

Problema n° 2:

En una competencia hay a concursantes y b jueces, con $b \geq 3$ un entero impar. Cada juez califica a cada concursante como "apto" o "no apto". Sea k un número tal que, para cada dos jueces, sus decisiones coinciden a lo más en k concursantes. demuestre que

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Problema n.° 3:

Para cada entero positivo n denotamos por $d(n)$ el número de divisores positivos de n (incluyendo 1 y n). Encuentre todos los enteros positivos k para los que existe algún n tal que

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = k.$$

Problema n.° 4:

Encuentre todas las parejas de enteros positivos (a,b) tales que $a^2b + a + b$ es divisible por $ab^2 + b + 7$.

Problema n.° 5:

Sea I el incentro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC. Esta circunferencia es tangente a los lados BC, CA y AB del triángulo en los puntos K, L y M, respectivamente.

La recta paralela a MK que pasa por el punto B interseca a las rectas LM y LK en los puntos R y S, respectivamente. Demuestre que el ángulo $\angle RIS$ es agudo.

Problema n.° 6:

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los enteros positivos. Se consideran todas las funciones f de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ que satisfacen

$$f\left(t^2 f(s)\right) = s\left(f(t)\right)^2,$$

para todo s y t de $\mathbb{N}$. Halle el menor valor posible de $f(1998)$.

Problema n° 4 (BOLETÍN N.° 48)

Sea n un entero positivo. Consideremos la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ donde los valores que pueden tomar las variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, son únicamente 0 y 1. Sea $I(n)$ el número de 2n-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ para los cuales el valor de la suma es impar y sea $P(n)$ el número de las 2n-adas $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ para los cuales la suma toma un valor par. Probar que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$$

Solución:

Denotemos por S_n a la suma $x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$ y argumentemos por inducción sobre n. Para $n = 1$, los posibles valores de $S_1 = x_1y_1$ son 0 y 1, y además:

- La suma es 0 en los casos: $x_1 = 0, y_1 = 0$; $x_1 = 0, y_1 = 1$; $x_1 = 1, y_1 = 0$; por lo que $P(1) = 3$
- La suma es 1 para $x_1 = y_1 = 0$, y entonces $I(1) = 1$.

De esta forma se tiene que $\dfrac{P(1)}{I(1)} = \dfrac{3}{1} = \dfrac{2^1 + 1}{2^1 - 1}$. Supongamos ahora el resultado cierto para $n = k$, es decir $S_k = \dfrac{2^k + 1}{2^k - 1}$, y veamos que también se verifica para $n = k + 1$. Para ello pongamos $S_{k+1} = S_k + x_{k+1}y_{k+1}$ y

estudiemos su paridad o imparidad en función del valor de S_k y del producto $x_{k+1}y_{k+1}$. Los ocho casos posibles los podemos detallar en la siguiente tabla:

	S_k par	S_k impar
$x_{k+1} = 0, y_{k+1} = 0$	$S_{k+1} = S_k$ par	$S_{k+1} = S_k$ impar
$x_{k+1} = 0, y_{k+1} = 1$	$S_{k+1} = S_k$ par	$S_{k+1} = S_k$ impar
$x_{k+1} = 1, y_{k+1} = 0$	$S_{k+1} = S_k$ par	$S_{k+1} = S_k$ impar
$x_{k+1} = 1, y_{k+1} = 1$	$S_{k+1} = S_k + 1$ impar	$S_{k+1} = S_k + 1$ par

por lo que $P(k+1) = 3P(k) + I(k)$ y $I(k+1) = 3I(k) + P(k)$, y entonces:

$$\frac{P(k+1)}{I(k+1)} = \frac{3P(k) + I(k)}{3I(k) + P(k)} = \frac{3\dfrac{P(k)}{I(k)} + 1}{3 + \dfrac{P(k)}{I(k)}} = \frac{3\dfrac{2^k+1}{2^k-1} + 1}{3 + \dfrac{2^k+1}{2^k-1}} =$$

$$= \frac{3(2^k + 1) + 2^k - 1}{3(2^k - 1) + 2^k + 1} = \frac{4 \cdot 2^k + 2}{4 \cdot 2^{+} - 2} = \frac{2^{k+1} + 1}{2^{k+1} - 1}$$

José María Lorenzo Magán (Madrid)

Problema n° 18 (BOLETÍN N.° 48)

Calcular la suma

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{999^2} + \frac{1}{1000^2}}.$$

Solución:

Expresemos esta suma como

$$S = \sum_{n=2}^{999} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}} = \sum_{n=2}^{999} a_n$$

y observemos primeramente que:

- para $n = 2$, $a_2 = \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} = \sqrt{\frac{2^2 3^2 + 3^2 + 2^2}{2^2 3^2}} = \sqrt{\frac{49}{2^2 3^2}} = \frac{7}{6}$

- para $n = 3$, $a_3 = \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} = \sqrt{\frac{3^2 4^2 + 4^2 + 3^2}{3^2 4^2}} = \sqrt{\frac{169}{3^2 4^2}} = \frac{13}{12}$

por lo que podemos conjeturar que para cada n natural, el número a_n es racional, conjetura que demostramos a continuación:

$$a_n^2 = 1 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^2 + n^2}{n^2(n+1)^2} =$$

$$= \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1}{n^2(n+1)^2} = \frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}$$

y por lo tanto $a_n = \dfrac{n^2+n+1}{n(n+1)}$. De esta forma

$$S = \sum_{n=2}^{999} \frac{(n^2+n+1)}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{999} \left(1 + \frac{1}{n(n+1)}\right) = 998 + \sum_{n=2}^{999} \frac{1}{n(n+1)}$$

y como

$$\sum_{n=2}^{999} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=2}^{999} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1000} = \frac{499}{1000}$$

el valor de la suma es $S = 998 + \frac{499}{1000} = 998,499$

José María Lorenzo Magán (Madrid)

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.°	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números 1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°	9.°	10.°	
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83-París	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	–	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	–	–	–	–	–	–	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	–	–	–	–	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	–	–	–	–	–	–	–	–	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	–	–	–	–	–	–	–	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	–	–	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	–	–	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	–	–	–	–	–	–	–	–	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	–	–	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	–	–	–	–	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	46	XX	33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	–	–	–	–	–	–	
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	48	XX	XX	35	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	47	35	34	–	–	–	–	–	
32	OMI-92-MOSC'U/	35	48	XX	XX	XX	XX	38	35	46	38	
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	–	–	–	–	–	–	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	47	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	
	/PNS	47	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	–	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	–	–	–	–	
35	OMI-93-Turq./	XX	46	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	39	
	OI-93-Méjico/PNS	XX	XX	39	39	XX	XX	–	–	–	–	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	
37	OME-f2-94/PNS	41	49	49	41	49	49	45	45	41	–	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
39	OI-94-Brasil/OME-	43	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	
	f1-94/f1-94(v)	46	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	–	–	–	–	
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
43	OME-f-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
44	OMI-96-India/	XX	XX	49	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	47	45	XX	XX	XX	–	–	–	–	
45	OI-96-Costa Rica	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	XX	XX	XX	
	OME-96-f1	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	–	–	
46	OMR-96	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
47	OMI-97-Argentina	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
48	OI-97-México	XX	XX	XX	50	XX	XX	–	–	–	–	
	OMEf1-98	–	–	–	–	–	–	XX	XX	XX	XX	
		49	XX	49	XX	–	–	–	–	–	–	
	OMR-97	–	–	–	–	XX	XX	XX	50	XX	XX	
		XX	XX	XX	XX	XX	XX					
50	OMI-98	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVIO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACION EN EL BOLETIN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente

Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4. Si se utiliza LATEX, el formato debe ser 17cm × 12,8 cm en 11 puntos (para ser aprovechado directamente en la imprenta).
Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el Boletín).
Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además,si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.
Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.
Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo dos archivos:

a) archivo del documento para el procesador de texto utilizado.
b) archivo del documento en código ASCII

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.
Las figuras se captarán por escaneado, por lo que es innecesario incluirlas en el disquete (en archivos de extensión TIF o similares).

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín (no al apartado, que ya no está operativo).

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen grauitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

35 ☐	38 ☐	39 ☐	40 ☐	41 ☐	42 ☐
43 ☐	44 ☐	45 ☐	46 ☐	47 ☐	48 ☐
49 ☐	50 ☐				

Envío adjuntos sellos para el franqueo (35 pts. por cada número del boletín).

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1 al 34, 36 y 37 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid
Tel. (91) 394 62 48

OCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION

D. ....

Dirección particular .... Teléf. (....) ....

Ciudad ....

Centro de trabajo .... Cod.° Postal ....

....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....

Sucursal o Agencia .... en ....

Dirección de la misma ....

para que cargue en la cuenta: .... / .... / .... / .... /.

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1996-97 y siguientes.

Fecha .... de .... de 1997

Fdo.:

Aquellos centros que prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria CAJA DE MADRID, núm.: 2038/1076/72/6000589561. La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (de ellas, 3.000 ptas. en concepto de cuota de la Sociedad "Puig Adam" y 2.000 pts. en concepto de cuota por la que se recibe la revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas). Remítanse ambas partes a **Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517). Tel. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.**

Fecha .... BANCO: ....

Sucursal o Agencia ....

Dirección de ésta .... en ....

....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta: .... / .... / .... / .... /.

los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....

Dirección ....