SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS

BOLETIN N.° 49
JUNIO DE 1998

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS
DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura 3 del artículo titulado "La geometría de la tortuga en la esfera con Maple", contenido en este número 49 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

José Javier Etayo Gordejuela

Vicepresidentes:

Eugenio Roanes Macías (Madrid)

Juan Bosco Romero Márquez (Castilla-León)

Salvador Herrero Pallardo (Castilla-La Mancha)

Vocales:

Julio Fernández Biarge (Redacción de publicaciones)

José Vicente García Sestafe (Relaciones Institucionales)

Eugenio Roanes Lozano (Gestión de publicaciones)

Martín Garbayo Moreno (Actividades y concursos)

Secretario:

Francisco González Redondo

Vicesecretario:

Miguel Ángel Gallardo Ortiz

Tesorero:

Alberto Aizpún López

Bibliotecario:

Joaquín Hernández Gómez

Adjunta a la presidencia:

María Gaspar Alonso-Vega

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 1998 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la UCM, sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día dieciocho de abril de 1998, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria de mil novecientos noventa y ocho.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DÍA

Punto primero. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior. Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

Punto segundo. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad. El Presidente informa sobre las actividades realizadas y a realizar:

a) Se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 46, 47 y 48 del Boletín siguiendo con el formato iniciado en el número 39, con la calidad y número de artículos habitual. Desde el *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* se han ido haciendo periódicamente las correspondientes recensiones de los artículos publicados en nuestro *Boletín,* destacándose que los comentarios no han sido nunca desfavorables.

b) Se informa que el 27 de junio de 1997 se celebró el XV Concurso de Resolución de problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados. Los ejercicios tuvieron lugar en la Facultad de Matemáticas y la entrega de premios en la Facultad de Educación. Por otro lado, ha sido convocado el XVI Concurso, que se celebrara el 20 de junio de 1998. Acerca de los patrocinadores D. Victor Manuel Sánchez recuerda las contribuciones pasadas de Coca Cola, Editorial SM y Texas Instruments, así como las buenas perspectivas presentes y futuras. Se destaca, también, la labor informativa de Telemadrid, Magisterio Español y Escuela Española, así como de las direcciones en Internet tanto de la Sociedad (a través del Vicesecretario) como del Colegio de Licenciados.

c) Se recuerdan los trámites seguidos en el Ministerio del Interior para cambiar la dirección de la Sociedad que constaba en nuestros estatutos por la actual en la Facultad de Educación.

d) Sobre las relaciones con la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas se destaca la progresiva mejoría observada tanto en los contenidos de *Suma* como en las relaciones institucionales. A estas últimas se refiere D. Joaquín Hernández Gómez, quien representó a la Sociedad en dos Seminarios (Jaca y El Escorial), de los que se ha informado ampliamente en *Suma* y otros medios. Además, se comentan las relaciones entre la Federación y la Real Sociedad Matemática Española, a las que también se refiere Dña. María Gaspar.

e) Se informa de que el 25 de abril de 1998 se celebrará el II Concurso de Primavera de Resolución de Problemas en la Facultad de Educación, y que han llegado a la Sociedad las bases de sendos concursos organizados por la Sociedad Thales, uno sobre Investigación Matemática y otro de Renovación Pedagógica.

f) Se recuerda la presencia de la Sociedad en Internet a través de D. Miguel Angel Gallardo, quien informa de la actividad de difusión desarrollada en este medio y de algunos de los resultados obtenidos.

Punto tercero. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos. D. Alberto Aizpún reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería: ingresos y gastos. A continuación explica detalladamente el número de recibos emitidos y las gestiones realizadas con los socios cuyos recibos han sido devueltos, para concluir constatando el equilibrio final entre ingresos y gastos.

Punto cuarto. Elección de nuevos cargos directivos. Se renueva en sus cargos hasta 2002 a cuatro miembros de la Junta Directiva elegidos en 1994: José Javier Etayo Gordejuela (Presidente), Eugenio Roanes Macías (Vicepresidente por Madrid), Miguel Ángel Gallardo Ortiz (Vicesecretario) y Alberto Aizpún López (Tesorero). Por otro lado, la Asamblea autoriza a la Junta Directiva a confirmar la sustitución, a petición propia por enfermedad, de Salvador Herrero Pallardó (Vicepresidente por Castilla-La Mancha) por Vicente Mendiola.

Punto cinco. Asuntos de tramite. No hay.

Punto seis. Ruegos y preguntas.

a) D. Eugenio Roanes recuerda la situación de aquellos socios que pertenecen simultáneamente a dos sociedades federadas, y, por tanto, pagan doblemente la cuota federativa. D. Joaquín Hernández transmite que la Federación aduce la "imposibilidad técnica" de la resolución de dicho problema. Se barajan varias propuestas: suscripciones a nuestro **Boletín,** que la Federación subvencione el viaje de nuestros representantes a la Olimpiada Rioplatense, etc.

b) D. Joaquín Hernández plantea el calendario de reuniones de la Federación (Seminarios y Asambleas) para los próximos meses, así como la conveniencia de determinar los representantes de nuestra Sociedad.

c) D. Víctor Manuel Sánchez recuerda que el libro en el que se recogen los enunciados y resolución de los problemas del Concurso está a punto de ser editado.

d) D. Joaquín Hernández pregunta si la Sociedad debiera invitar a nuestro Concurso a los ganadores del Concurso de Primavera.

e) Doña María Gaspar sugiere se busquen vías de financiación para el viaje de los concursantes a la Olimpiada Rioplatense.

Llegados a este punto, el Presidente levanta la sesión a las trece horas y veinticinco minutos de la fecha arriba indicada.

El Secretario

V° B° El Presidente

XXXIV Olimpiada Matemática Española

Fase final

La fase final de la **XXXIV Olimpiada Matemáatica Española** se ha celebrado en Tarazona, durante los días 13 y 14 de marzo de 1998. Como siempre, esta Olimpiada ha sido organizada por la Real Sociedad Matemática Española, contando con el patrocinio de la Subdirección General de Becas y Ayudas del Estado. Cabe reseñar como novedad, la entrada en funcionamiento del nuevo Comité Organizador, recientemente creado tras el relanzamiento de la RSME y que será, a partir de ahora, y de forma reglamentada, el encargado de organizar este evento. No debemos olvidar en este momento manifestar nuestro agradecimiento a los Profesores Aroca y Bellot por la labor llevada a cabo estos últimos años.

En esta fase han participado 86 seleccionados además de dos estudiantes invitados y fuera de concurso.

Los alumnos ganadores de medallas de **ORO** han sido los siguientes:

1. **MONTES GARCÍA, MARIO ANDRÉS** (Salamanca)
2. **ALIAGA VAREA, RAMÓN JOSÉ** (Valencia)
3. **MARTÍN CALVO, DAVID** (Zaragoza)
4. **PE PEREIRA, MARÍA** (Burgos)
5. **SANZ MERINO, BEATRIZ** (Madrid)
6. **VINUESA DEL RÍO, JAIME** (Valladolid)

Los ganadores de medalla de PLATA han sido:

1. **CORRAL PÉREZ, ROBERTO** (Burgos)
2. **NAVARRO TOVAR, ÁLVARO** (Madrid)
3. **MIR PIERAS, JUAN** (Baleares)
4. **LÓPEZ JIMÉNEZ, JORGE** (Valencia)
5. **RUIZ RUIZ DE VILLA. JOSÉ MANUEL** (Cantabria)
6. **RECIO URIA, PEDRO** (País Vasco)

Los ganadores de medalla de BRONCE han sido:

1. **VILLAFRAÑE ROCA, HUGO** (Asturias)
2. **MAESTRE BLANCO, NELO ALBERTO** (Madrid)
3. **TRIGO CONDE, ISAAC** (Zaragoza)
4. **ARMENDÁRIZ BENÍTEZ, IÑAKI** (Madrid)

5. **DOMINGO MÁS, CARLOS** (Valencia)
6. **FAUS TOMÁS, ÁNGEL** (Cataluña)

De los alumnos participantes fuera de concurso, el alumno PÉREZ VARGAS, FRANCISCO (Sevilla) alcanzó la puntuación suficiente para alcanzar una medalla de BRONCE. Obsérvese cómo los ganadores de medallas del distrito de Madrid han sido participantes en nuestros **Concursos de Resolución de Problemas.**

Damos a continuación los enunciados de los seis problemas propuestos en esta Fase Final, no incluyéndolos en nuestra sección de **PROBLEMAS PROPUESTOS** ya que ha partir de la Olimpiada celebraba en Castellón, los organizadores publican una memoria en la que aparecen las soluciones de dichos problemas.

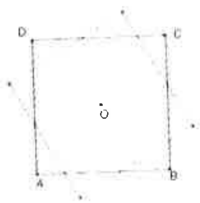
Para cada problema, damos las medias de las calificaciones obtenidas por todos los participantes, la media de los 18 ganadores de medalla así como el número de alumnos que obtuvieron calificación superior a 5 (en esta ocasión se calificó sobre 7).

Problemas propuestos en la Fase Nacional de la XXXIV Olimpiada Matemática Española

(Tarazona, marzo de 1998)

Problema n° 1:

Un cuadrado ABCD de centro O y lado 1, gira un ángulo α en torno a O. Hallar el area común a ambos cuadrados



Media de calificaciones obtenidas:

– Por todos: 2,8.
– Por los 18 premiados con medalla: 4,2.
– Por los 6 premiados con medalla de oro: 4,8.

Número de notas 6 ó 7: 9

Problema n° 2:

Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

Media de calificaciones obtenidas:

– Por todos: 5,4.
– Por los 18 premiados con medalla: 6,6.
– Por los 6 premiados con medalla de oro: 6,7.

Número de notas 6 ó 7: 69.

Problema n° 3:

Se considera el triángulo ABC y su circunferencia circunscrita. Si D y E son los puntos sobre el lado BC tales que AD y AE son, respectivamente, paralelas a las tangentes en C y en B a la circunferencia circunscrita, demostrar que:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$$

Media de calificaciones obtenidas:

– Por todos: 0,6.
– Por los 18 premiados con medalla: 2,1.
– Por los 6 premiados con medalla de oro: 4.

Número de notas 6 ó 7: 3.

Problema n° 4:

Hallar las tangentes de los ángulos de un triángulo sabiendo que son números enteros positivos.

Media de calificaciones obtenidas:

– Por todos: 2,7.
– Por los 18 premiados con medalla: 4,67.
– Por los 6 premiados con medalla de oro: 5,17.

Número de notas 6 ó 7: 7.

Problema n° 5:

Hallar todas las funciones de f: N $\rightarrow$ N estrictamente crecientes y tales que:

$$f(n + f(n)) = 2f(n)$$

para n = 1, 2, 3,...

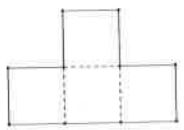
Media de calificaciones obtenidas:

Por todos: 1,1.
Por los 18 premiados con medalla: 1,9.
Por los 6 premiados con medalla de oro: 2.

Número de notas 6 ó 7: 0.

Problema n.° 6:

Determina los valores de n para los que es posible construir un cuadrado de $n \times n$ ensamblando piezas del tipo:



Media de calificaciones obtenidas:

– *Por todos: 2,6.*
– *Por los 18 premiados con medalla: 3,9.*
– *Por los 6 premiados con medalla de oro: 4,3.*

Número de notas 6 ó 7: 3.

Comentarios sobre la organización

Con los últimos fríos polares que han afectado a nuestra Península y a los pies del Moncayo se ha celebrado en Tarazona esta fase final de la XXXIV Olimpiada Matemática Española. El Prof. Dorda ha conseguido de diversos organismos oficiales, pero muy especialmente del Excmo. Ayuntamiento de Tarazona, toda la infraestructura precisa para que esta fase se desarrollase con todo tipo de comodidades. El alojamiento para participantes, acompañantes y demás fue el Seminario Episcopal, siendo alojados los que allí no cupieron, en un hotel muy próximo, con lo que la convivencia entre todos quedaba garantizada.

Las pruebas se desarrollaron en las instalaciones del citado Seminario, contando los miembros del Tribunal con las salas necesarias para desarrollar su labor con toda comodidad.

Para los acompañantes y para aprovechar los tiempos libres de los participantes, estaban organizadas gran cantidad de visitas turísticas y culturales, que consiguieron de forma muy efectiva que la estancia discurriera sin tiempos de espera. Las visitas a la ciudad, al Palacio Episcopal, Mirador de San Prudencio, Conservatorio de Música Raquel Meyer, exposiciones de fotografía mudéjar... fueron tan constantes como interesantes. El Concierto de pulso y púa de la Sinfonietta Laudalia fue espectacular. No podremos olvidar la excursión que se desarrolló el último día al Monasterio de Santa María de Veruela y al Parque Natural de la Dehesa del Moncayo.

En la cena de entrega de premios, además de los organizadores, tomó la palabra el nuevo Presidente de la RSME, Prof. Martínez Naveira, poniéndose de manifiesto la realidad de esta nueva época de la Real Sociedad. La participación del grupo folklórico Rondalla los Amigos fue auténticamente espectacular. Con todo ello, el momento más emotivo fue el homenaje que se rindió al Prof. Etayo Miqueo por su inestimable aportación al desarrollo de nuestra disciplina en los últimos años.

No queremos finalizar sin desear al nuevo Comité Organizador nuestros mejores deseos para que esta Olimpiada alcance año a año una altura mayor. Hasta Granada 1999.

Olimpiada de Mayo

La Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas empezó a organizar la Olimpiada de Mayo en 1995. Esta es una competición para jóvenes iberoamericanos que se realiza por correspondencia en dos niveles: Primer Nivel, para estudiantes menores de 13 años, y Segundo Nivel, para estudiantes menores de 15 años. El Concurso se basa en el modelo de la Olimpiada de la Cuenca del Pacífico.

La IV Olimpiada de Mayo se ha celebrado simultáneamente en los países participantes –Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, España, Guatemala, Méjico, Panamá, Paraguay, Perú, Uruguay y Venezuela– el pasado 9 de mayo. Lo interesante de esta competición es que permite, con muy bajo costo, la participación en una Competición Internacional a estudiantes muy jóvenes, que entran así en contacto con la resolución de problemas.

Los participantes madrileños –50 de cada nivel– fueron seleccionados a través del Segundo Concurso de Primavera de Matemáticas. Entre ellos había 15 niños de 5.° y 15 de 6.° de Primaria, que agotaron las tres horas de duración de la prueba.

Los resultados de la Olimpiada se conocerán a finales de junio. Como en los dos últimos años, los ganadores de medalla de Oro están invitados a participar en un Campamento Matemático que se celebrará en la primera semana de agosto en la República Argentina.

María Gaspar

IV Olimpiada de Mayo

Primer nivel - Mayo de 1998

Problema n.° 1:

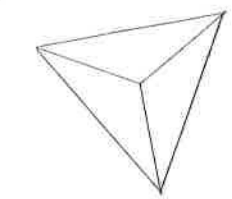
Con seis varillas se construye una pieza como la de la figura

Las tres varillas exteriores son iguales entre sí. Las tres varillas interiores son iguales entre sí.

Se desea pintar cada varilla de un solo color, de modo que en cada punto de unión las tres varillas que llegan tengan distinto color.

Las varillas sólo se pueden pintar de azul, blanco, rojo o verde.

¿De cuántas maneras se puede pintar la pieza?



Problema n.° 2:

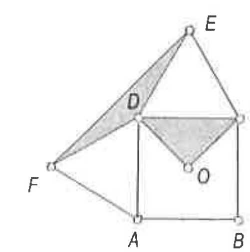
Se tienen 1.998 piezas rectangulares de 2 cm de ancho y 3 cm de largo y con ellas se arman cuadrados (sin superposiciones ni huecos). ¿Cuál es la mayor cantidad de cuadrados diferentes que se pueden tener al mismo tiempo?

Problema n.° 3:

Hay cuatro botes en una de las orillas del río; sus nombres son Ocho, Cuatro, Dos y Uno, porque esa es la cantidad de horas que tarda cada uno de ellos en cruzar el río. Se puede atar un bote a otro, pero no más de uno, y entonces el tiempo que tardan en cruzar es igual al del más lento de los dos botes. Un solo marinero debe llevar todos los botes a la otra orilla. ¿Cuál es la menor cantidad de tiempo que necesita para completar el traslado?

Problema n.° 4:

ABCD es un cuadrado de centro O. Sobre los lados DC y AD se han construido los triángulos equiláteros DAF y DCE. Decide si el área del triángulo EDF es mayor, menor o igual que el área del triángulo DOC.



Problema n.° 5:

Elige un número de cuatro cifras (ninguna de ellas cero) y comenzando con él construye una lista de 21 números distintos, de cuatro cifras cada uno, que cumpla la siguiente regla: después de escribir cada nuevo número en la lista se calculan todos los promedios entre dos cifras de ese número, se descartan aquellos promedios que no dan un número entero, y con los restantes se forma un número de cuatro cifras que ocupará el siguiente lugar en la lista. Por ejemplo, si en la lista se escribió el 2.946, el siguiente puede ser 3.333 o 3.434 o 5.345 o cualquier otro número armado con las cifras 3, 4 ó 5.

IV Olimpiada de Mayo

Segundo nivel - Mayo de 1998

Problema n.° 1:

Inés eligió cuatro dígitos distintos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Formó con ellos todos los posibles números de cuatro cifras distintas y sumó todos esos números de cuatro cifras. El resultado es 193.314. Halla los cuatro dígitos que eligió Inés.

Problema n.° 2:

ABC es un triángulo equilátero. N es un punto del lado AC tal que $\overline{AC} = 7 \cdot \overline{AN}$, M es un punto del lado AB tal que MN es paralelo a BC y P es un punto del lado BC tal que MP es paralela a AC. Halla la fracción

$$\frac{\text{área } (MNP)}{\text{área } (ABC)}.$$

Problema n.° 3:

Dado un tablero cuadriculado de 4×4 con cada casilla pintada de un color distinto, se desea cortarlo en dos pedazos de igual área mediante un solo corte que siga las líneas de la cuadrícula. ¿De cuántas maneras se puede hacer?

Problema n.° 4:

En el suelo del patio hay dibujado un octógono regular.

Emiliano escribe en los vértices los números del 1 al 8 en cualquier orden. Pone una piedra en el punto 1.

Camina hacia el punto 2; habiendo recorrido 1/2 del camino se detiene y deja la segunda piedra.

Desde allí camina hacia el punto 3, habiendo recorrido 1/3 del camino se detiene y deja la tercera piedra.

Desde allí camina hacia el punto 4, habiendo recorrido 1/4 del camino se detiene y deja la cuarta piedra.

Así sigue hasta que, después de dejar la séptima piedra, camina hacia el punto 8 y habiendo recorrido 1/8 del camino deja la octava piedra.

La cantidad de piedras que quedan en el centro del octógono depende del orden en que escribió los números en los vértices.

¿Cuál es la mayor cantidad de piedras que pueden quedar en dicho centro?

Problema n.° 5:

En el planeta X31 hay sólo dos tipos de billetes. Sin embargo el sistema no es tan malo, porque hay solamente quince precios enteros que no se pueden pagar exactamente (se paga de más y se recibe cambio). Si 18 es uno de esos precios que no se pueden pagar exactamente, halla el valor de cada tipo de billete.

II Concurso de Primavera: Seguimos en la línea que nos habíamos marcado

Hace poco menos de un año, en el número 46 de esta revista, reflejabamos nuestra ilusión, nuestra relativa sorpresa por el éxito y nuestras preocupaciones por el Concurso de Primavera, que acababa de nacer. Hoy, cuando ya se ha celebrado la segunda edición, es hora de que hagamos un pequeño repaso a todo lo que ha pasado y una pequeña reflexión sobre todo lo que queda por hacer.

Para empezar, bueno es que demos datos. En esta segunda edición, se ha extendido la participación a los alumnos de 1.° de Bachillerato LOGSE ó 3.° de BUP; es decir, todos los alumnos de Secundaria salvo los de COU o su equivalente en FP o LOGSE, han podido participar en el II Concurso de Primavera de Problemas de Matemáticas. Y muchos de ellos lo han hecho. Mas de quince mil participantes en la 1.ª fase y 2.600 participantes el sábado 25 de abril en la Facultad de Educación, donde se volvió a celebrar la 2.ª fase del Concurso.

La principal diferencia con respecto al año anterior, además de la inclusión de los alumnos de 1.° de Bachillerato ó 3.° de BUP, ha estado en la división en tres niveles diferentes, uno para Primaria, otro para 1.°, 2.° y 3.° ESO y el tercer nivel para los estudiantes de cursos superiores. No creemos, en ningún caso, que fuera razonable una división en tantos niveles como cursos participantes, siete en total, y no porque la elaboración de las pruebas nos resultara, ciertamente, más compleja sino, fundamentalmente, porque uno de los fines del Concurso es animar a los estudiantes a tomarlo como un ensayo, un ensayo que refleje su progreso: dentro de un nivel, por ejemplo, 1.°-2.°-3.° ESO, el primer año respondí correctamente a 10 cuestiones, el segundo me marcaré como meta hacer quince o más.

Otro punto importante que queremos destacar es la colaboración de algunas instituciones. Creemos que en el acto de entrega de premios, dimos las gracias a todos los que habían colaborado, pero queremos aprovechar este artículo para repetir nuestro agradecimiento fundamentalmente a dos de ellas: la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid y la Facultad de Matemáticas de la Universidad Complutense.

El Comité Organizador había hecho este año un esfuerzo importante, preparando 300 pruebas análogas a las del Concurso, 100 por nivel, que podrían servir como preparación del mismo y fundamentalmente iban a servir para que los estudiantes que las trabajaran disfrutaran pensando, haciendo y aprendiendo Matemáticas, que es de lo que se trata. Esas pruebas deberían llegar a todos los estudiantes de la Comunidad de Madrid, y la Consejería de Educación las ha hecho llegar. Por otra parte, a los chicos y chicas que mejores resultados obtienen, les hace ilusión que se tenga algún detalle con ellos. Y además de algún diploma, siempre se agradece algún regalo, y no era cuestión de premiar sólo a los diez mejores, sino a muchos más, y los hemos conseguido gracias a la Facultad de Matemáticas.

Para terminar, querríamos hacer una defensa del formato de la prueba. Conocemos a algunos compañeros de la Comunidad, profesores como nosotros, convencidos que la resolución de problemas está en el corazón de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, y que no animan a sus alumnos a participar en el Concurso porque estiman que el desarrollo de capacidades tan importantes como conjeturar, analizar, buscar información o generalizar, no se ve favorecido con pruebas de este tipo. Nuestro propósito, desde el principio, fue involucrar a una gran cantidad de estudiantes y, para ello, es necesaria una prueba de opción múltiple, pero además, pruebas como éstas, benefician a aquéllos que son prudentes en la eliminación y firmes en las conjeturas. Y éste también es un talento maravilloso, aunque no específicamente matemático.

A aquellos otros compañeros que no se han animado por cierta desidia, cierta repulsión a la "competición" o alguna creencia de que sus alumnos no lo iban a hacer bien, desde aquí les animamos a que abandonen esa idea, que los estudiantes, en concursos de este tipo, compiten únicamente contra ellos mismos, que nuestros alumnos, muchas veces saben mucho más de lo que nos creemos y que merece la pena hacer un pequeño esfuerzo que siempre será agradecido, por lo menos por nuestros alumnos.

Y finalmente, sobre aquellos, que también sabemos que los hay, que no se dignan a participar por otras razones, no merece la pena hacer ningún comentario.

Joaquín Hernández Gómez
Del Comité Organizador del Concurso de Primavera

Falta: Coca-cola
Texas
SM

Anuncios de congresos

3.rd International Derive/TI-92 Conference
Gettysburg, Pennsylvania (USA) 14-17 julio 1998
leinbach@cs.gettysburg.edu

EACA-98
Cuarto encuentro de Álgebra Computacional y Aplicaciones
Sigüenza, 14-16 septiembre 1998
Organizadores: M. E. Alonso y J. R. Sendra
eaca98@eucmos.sim.ucm.es

Octavo encuentro de Geometría Computacional
Castellón, 7-9 julio 1999
Departamento de Informática
Universitat Jaume I

ERME
Primer encuentro del grupo europeo de
Investigación en Educación Matemática
erme@mathematik.uni-osnabrueck.de
lrico@goliat.ugr.es

Curso de Maple V

Durante el próximo mes de septiembre (las fechas exactas están por determinar) se impartirá un curso de Maple V en la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid (en colaboración con Add-Link, importadores de Maple V). Los miembros de la sociedad "Puig Adam" podrán beneficiarse de un descuento sobre el precio de inscripción. Los interesados pueden pedir más información por correo a la sociedad o por e-mail a: eroanes@eucmos.sim.ucm.es

Nota necrológica

Después de cerrar este número, hemos tenido noticia del fallecimiento de nuestro compañero Salvador Herrero Pallardó, vicepresidente de Castilla-La Mancha de nuestra Junta Directiva. Deseamos expresar, en nombre de los miembros de nuestra sociedad, nuestro más sentido pésame.

Recuerdo de José Gil Peláez

En el año 1950 apareció en España una magnífica obra de José Gil Peláez titulada *Análisis Matemático con aplicaciones a la Economía*, prologada por Rey Pastor, el cual dice, entre otras cosas: "Basta hojear el excelente libro para descubrir que su autor ha estudiado a fondo, completándolo y mejorándolo, nuestro viejo tratado de funciones reales".

Gil Peláez era un matemático puro, licenciado y doctor en esta disciplina por la Universidad de Madrid. Pero tambiné era licenciado en Ciencias Económicas y orientó su tarea en este campo hacia la Estadística y la Economía, en las cuales desarrolló importantes investigaciones.

Tenía, ante todo, un poderoso cerebro analizador. Incorporó a la Estadística las funciones tomadas en valor absoluto, o bien con argumentos tomados en valor absoluto (a las que el profesor Barinaga llamó funciones valoradas). La tesis doctoral de Gil Peláez extrae jugosas consecuencias de esta incorporación.

Junto a Fermín de la Sierra, fundador de la Escuela de Organización Industrial, fue uno de los pioneros del estudio de la productividad en la industria española. Participó en la creación y formación de especialistas instructores de Productividad. Para ello fue enviado a Londres en el año 1950, y a partir de 1953 a los Estados Unidos en varias ocasiones, donde amplió sus conocimientos en el tema de la organización empresarial.

Cuando la Comisión de Productividad fue incorporada al Ministerio de Industria y Energía, Gil Peláez desarrolló desde dicho Ministerio una labor ininterrumpida, incansable y fecunda, asomando a los medios de comunicación (televisión incluida) la problemática de los tiempos y movimientos en la economía de la empresa.

A los setenta y cinco años de edad, y sin aviso de enfermedad previa alguna, murió Jos Gil Peláez en Madrid. Descanse en paz.

Vicente Fraile

Título propio de Experto en Educación Matemática

La Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid continúa ofreciendo el título propio de EXPERTO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA. Las materias que está previsto impartir en el curso 1998-99 son:

1. Sistemas computacionales en Educación Matemática [40 horas, 4 créditos], por Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano.
2. Las matemáticas en la eduación obligatoria. Los talleres de Matemáticas, [20 horas, 2 créditos], por María Paz Bujanda Jáuregui.
3. La utilización en la enseñanza no universitaria de algunos resultados no elementales [30 horas, 3 créditos], por Joaquín Hernández Gómez.
4. Actitudes, afectividad y motivación en Educación Matemática [20 horas, 2 créditos], por Inés M. Gómez Chacón.
5. Geometría [20 horas, 2 créditos], por Juan Tarrés Freixenet.
6. Una visión panorámica del Análisis [15 horas, 15 créditos], por Baldomero Rubio.
7. Introducción a los fundamentos de la Matemática [30 horas, 3 créditos], por Mariano Martínez Pérez.
8. La evolución de la noción de integral [15 horas, 15 créditos], por Fernando Bombal.
9. Probabilidad y Estadística [30 horas, 3 créditos], por Eusebio Gómez Sánchez-Manzano, Javier Montero, Luis Sanz y Juan A. Tejada.
10. Orígenes de la Geometría. Quinto postulado de Euclídes. Geometrías no euclídeas [15 horas, 15 créditos], por Raquel Mallavibarrena.
11. Introducción a la teoría general de la Relatividad, [15 horas, 15 créditos], por Eduardo Aguirre.
12. Algoritmos: el corazón de la Informática [15 horas, 15 créditos], por David de Frutos.
13. Sistemas Dinámicos [20 horas, 2 créditos], por José Manuel Vegas Montaner y Carlos Fernández Pérez.
14. Introducción a la modelización en Matemática Aplicada [15 horas, 15 créditos], por Rodolfo Bermejo y Juan Francisco Padial.
15. Simetrías y grupos [15 horas, 15 créditos], por Carlos Andradas.
16. Topología "Fuzzy" [20 horas, 2 créditos], por Francisco Gallego Lupiañez.

Se otorgará el título de experto a quien complete 25 créditos, pero es posible matricularse en asignaturas sueltas. La matrícula ha de realizarse en la semana habilitada al efecto, durante el mes de septiembre próximo. Para más detalle, en la oficina de información de la Facultad (tel. 394 46 16).

Carlos Fernndez Pérez
Director del Curso

La geometría de la tortuga en la esfera con Maple

Juana Núñez García
Departamento de Geometría y Topología
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

An overview of the turtle geometry in the sphere, is enough to realize the big differences between the Euclidean geometry and the spherical geometry. Some of these differences, with emphasis in some cartographic problems, are shown in this paper. An implementation in Maple of the basic commands of the turtle in the sphere is also given.

1 Introducción

Analizar la geometría de la tortuga en la esfera, nunca ha sido una idea descabellada: somos tortugas que viven en una esfera. Una revisión de la geometría esférica nos haría ver que la intuición a veces nos engaña, que localmente la geometría euclídea es un modelo del espacio donde vivimos, pero que globalmente, si queremos que un barco vaya de Lisboa a Río de Janeiro por el camino más corto, o más globalmente todavía, si queremos poner en órbita un satélite, la geometría euclídea se queda pequeña. La geometría esférica, además de desarrollar la capacidad espacial, introduce en un plano abstracto el concepto euclídeo por excelencia: la distancia entre dos puntos, deja de ser la longitud del segmento que los une. Por estos motivos, en este artículo, con la ayuda de una tortuga, analizamos la geometría esférica y comentamos aquellas características que la hacen tan distinta de la geometría plana.

En [2], se utiliza una implementación en Logo de la tortuga en la esfera para presentar conceptos como latitud, longitud, círculos máximos, paralelos,

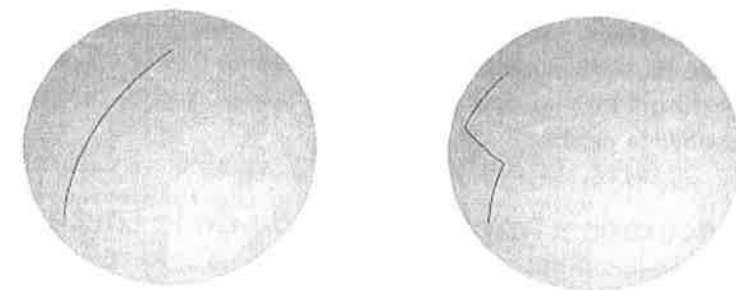


Figura 1: A la izquierda, `avanza(Pi/2)`, y a la derecha `avanza(Pi/6); gira(Pi/2); avanza(Pi/6); gira(-Pi/2); avanza(Pi/6)`

meridianos, ... Nosotros damos una implementación de la tortuga en la esfera con Maple [3] y comentamos algunas peculiaridades de la esfera. En la última sección, describimos un método para representar en el plano, mediante cualquier proyección, el trayecto de la tortuga en la esfera. Este último problema ni siquiera se aborda en [1], fuente clásica de la geometría de la tortuga.

1.1 Órdenes de la tortuga en la esfera

Las órdenes básicas con que debe contar cualquier tortuga son: *avanza, gira_derecha, gira_izquierda, sube_lápiz, baja_lápiz* y *borra_pantalla.* En nuestra implementación, vamos a llamar a estas órdenes *avanza, gira* (giramos sólo en sentido directo), *sube, baja* y *empieza,* respectivamente. Además, debido a la organización de los gráficos en Maple, necesitamos una función, *dibuja,* que *dibuje* el recorrido de la tortuga.

Cuando le pedimos a la tortuga que *avance* una cantidad, tendrá que recorrer esa cantidad a lo largo de un círculo máximo, ya que los círculos máximos son las geodésicas de la esfera, es decir, la forma más corta de viajar sobre esta superficie. En un punto determinado de la esfera, podemos identificar cada círculo máximo que pasa por el punto, con un vector del plano tangente a la esfera en dicho punto. La tortuga se acuerda de la dirección que tiene, y por tanto sabe qué círculo máximo tiene que elegir. Si queremos cambiar esta direccion, usamos la orden *gira*

Con *sube,* conseguimos que la tortuga pueda avanzar sin dejar huella de su paso y con *baja*, lo contrario.

La orden *empieza*, consigue que la tortuga se olvide de todo lo que ha recorrido y dibujado, y vuelva a la posición inicial, que es una posición arbitraria fija sobre la esfera.

2 Ecuaciones e implementación de la tortuga básica

En esta sección describimos simultáneamente las ecuaciones del movimiento de la tortuga en la esfera y una posible implementación en Maple de las órdenes básicas de la tortuga.

Sumergimos la esfera planeta de la tortuga en el espacio euclídeo tridimensional, haciendo coincidir su centro con el origen de coordenadas y su radio con uno. A continuación fijamos el polo norte de la esfera y el origen de longitudes en los puntos de corte de ésta con la parte positiva de los ejes OZ y OX respectivamente. De esta forma podemos conocer el lugar que ocupa la tortuga a partir de sus coordenadas esféricas (latitud y longitud) o de sus tres coordenadas cartesianas.

La posicion inicial de la tortuga es el punto $(1, 0, 0)$, su dirección de avance es la $(0, 0, 1)$, y está preparada para dibujar. Por tanto, tenemos a la tortuga parada en el ecuador, mirando al polo norte, con lo que en caso de avance, dibujaría un trozo del meridiano principal (origen de longitudes).

Ante cualquier orden de giro, avance o subida-bajada del lápiz, el estado de la tortuga cambia. Por eso es necesario almacenar todos los estados intermedios en una variable que se llamará `estado`. Como esta variable contiene una serie de valores heterogéneos, es conveniente crear un nuevo tipo que los agrupe. Los valores de este tipo se construyen con la función indefinida `tortuga`, de cuatro argumentos. La variable `estado` será de tipo `tortuga`.

El primer argumento de la función `tortuga` representa los arcos que la tortuga ha dibujado hasta el momento actual. Todos estos arcos están agrupados en una lista y cada arco es, a su vez, una lista que contiene, en este orden, la posición de inicio del arco, la dirección de avance del arco y la longitud del arco.

El segundo argumento de la función `tortuga` representa la posición actual de la tortuga. El tercero, la dirección de avance, y el cuarto la disposición de la tortuga a dejar huella de su paso.

Definimos las variables globales `estado_inicial` y `estado`. La primera contiene el estado inicial de la tortuga; la segunda, que se inicia con el valor de `estado_inicial`, contiene el estado de la tortuga.

```
estado_inicial := tortuga([], [1,0,0], [0,0,1], true):
estado := estado_inicial
```

Para no tener que recordar el orden de los argumentos de la función `tortuga`, definimos las variables globales:

```
trayecto_tortuga := 1:
posicion_tortuga := 2:
direccion_tortuga := 3:
lapiz_tortuga :=  4:
```

Con estos preparativos ya podemos implementar las órdenes básicas de la tortuga.

2.1 El procedimiento gira

El argumento de este procedimiento es un ángulo medido en radianes. Trabajamos con radianes y no con grados, porque en el procedimiento **avanza** en más conveniente el uso de radianes.

La única parte de la variable `estado` que cambia es la que indica la dirección actual de avance de la tortuga. Por tanto, hay que calcular la nueva dirección y sustituirla en la variable `estado`.

Si el vector p representa la posición de la tortuga y el vector d su dirección de avance (recordamos que p y d han de ser perpendiculares), podemos calcular un vector unitario auxiliar, que llamaremos *perpendicular*, que forma triedro directo con los dos anteriores. De esta forma, si α es el ángulo de giro, el vector que indica la nueva dirección de avance será

$$d_2 = \cos\alpha \cdot d + \operatorname{sen}\alpha \cdot \mathit{perpendicular}.$$

```
gira := proc(a)
  local p, d, d2, perpendicular; global estado;
  p := op(posicion_tortuga, estado) ;
  d := op(direccion_tortuga, estado);
  perpendicular := array([p[2]*d[3]-p[3]*d[2],
```

```
                        p[3]*d[1]-p[1]*d[3],
                        p[1]*d[2]-p[2]*d[1]]);
  d2 := cos(a)*d+sin(a)*perpendicular;
  estado := subsop(direccion_tortuga = evalm(d2), estado);
  NULL
end:
```

2.2 Los procedimientos sube y baja

Estos procedimientos no tienen argumentos y la única modificación que hacen sobre la variable `estado` es actualizar la variable booleana que indica si la tortuga dibujará en un avance o no. Como son prácticamente idénticos, solo damos la implementación de `sube`.

```
sube := proc()
  global estado;
  estado :=  subsop(lapiz_tortuga = false, estado);
  NULL
end:
```

2.3 El procedimiento avanza

Dado que el radio de la esfera donde vive la tortuga mide una unidad, las longitudes de los arcos de círculos máximos coinciden con el ángulo que abarcan. Por este motivo el argumento de avanza es un número real que puede ser interpretado como una longitud o como un ángulo en radianes.

Cuando hacemos una llamada a avanza, calculamos a partir de la posición actual p_1, la dirección de avance d_1 y su argumento que llamaremos m, una nueva posición p_2 y una nueva dirección de avance d_2, que son sustituidas por las antiguas en la variable `estado`. Las ecuaciones de estos vectores son las siguientes:

$$p_2 = \cos m \cdot p_1 + \operatorname{sen} m \cdot d_1$$
$$d_2 = -\operatorname{sen} m \cdot p_1 + \cos m \cdot d_1.$$

Si la tortuga está preparada para dibujar, añadimos el arco $[p_1, d_1, m]$ a la lista de arcos de `estado`.

```
avanza := proc(m)
  local p1,d1,p2,d2, trayecto; global estado;
  p1 := op(posicion_tortuga, estado);
```



```
  d1 := op(direccion_tortuga, estado);
  p2 := cos(m)*p1+sin(m)*d1;
  d2 := -sin(m)*p1+cos(m)*d1;
  if op(lapiz_tortuga, estado) then
    trayecto := op(trayecto_tortuga, estado);
    estado := subsop(trayecto_tortuga =
                     [op(trayecto),[evalm(p1), evalm(d1), m]],
                     estado);
  fi;
  estado := subsop(posicion_tortuga = evalm(p2),
                   direccion_tortuga = evalm(d2), estado);
  NULL
end:
```

2.4 El procedimiento empieza

Para desechar todo el trayecto dibujado por la tortuga, sólo hay que iniciar la variable `estado` con `estado_inicial`.

```
empieza := proc()
  global estado, estado_inicial;
  estado := estado_inicial;
  NULL
end:
```

2.5 El procedimiento dibuja

Gracias al paquete de gráficos de Maple, los problemas fundamentales que aparecen a la hora de dibujar el camino que describe la tortuga, se resuelven con bastante soltura. El primer inconveniente consiste en representar una curva alabeada en el plano, pero la solícita función `plots` acude en nuestra ayuda. Más complicado aún es dibujar superficies en un tiempo razonable, con luces ambientales y eliminación de partes ocultas. La función `plot3d` será quien resuelva este problema.

Para dibujar la secuencia de arcos que componen el recorrido de la tortuga, vamos a utilizar una función auxiliar llamada `arco`, que debería quedar oculta al usuario, y que se encarga de la representación de un arco.

El argumento de `arco` es una lista que contiene dos vectores, *posición* y *dirección*, y un escalar, *longitud;* su valor es uno de los argumentos que necesita la función interna de Maple PLOT3D, para dibujar el arco que empieza en *posición*, apuntando hacia *dirección* y que mide *longitud*. El lugar geométrico de los puntos de este arco es el siguiente:

$$\{\cos s \cdot posicion + \operatorname{sen} s \cdot direccion \mid s \in [0, longitud]\}.$$

La precisión con que se dibuja cada arco, depende del número de puntos en los que Maple evalúa la función que lo determina. Podemos controlar esta precisión con la variable global **densidad**.

```
arco := proc(e)
  local posicion, direccion, longitud, x, s, puntos;
  global estado, densidad;
  posicion := op(1,e); direccion := op(2,e); longitud := op(3,e);
  puntos := evalm(cos(s)*posicion+sin(s)*direccion);
  x := plots[spacecurve](puntos, s=0..longitud,
         numpoints = max(2,round(evalf(densidad*longitud))));
  CURVES(op(1,op(1,x)),THICKNESS (0),COLOUR(RGB,0,0,0))
end:
```

El procedimiento dibuja hace una llamada a la función PLOT3D de Maple para que dibuje la esfera planeta y, encima de ella, todo el trayecto de la tortuga, arco por arco.

```
dibuja := proc()
  local y, esfera, s, t; global estado;
  esfera := plot3d([cos(s)*cos(t),sin(s)*cos(t),sin(t)],
                   s=0..2*Pi, t=Pi/(-2)..Pi/2 );
  y := map(arco, op(trayecto_tortuga, estado));
  PLOT3D(op(y), MESH(op(1,op(1,esfera)),STYLE(PATCHNOGRID)),
    SCALING(CONSTRAINED))
end:
```

3 Exploración de la esfera

—Un día vi ponerse el sol cuarenta y tres veces
El Principito de Antoine de Saint-Exupery.

Este es un buen momento para pararse a pensar lo que quería decir el principito. Maple y el pequeño paquete que acabamos de detallar son las herramientas para llevar a cabo nuestro propósito: repasar las características de la geometría esférica que la hacen tan diferente de la geometría euclídea.

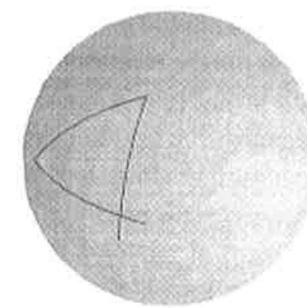


Figura 2: Triángulo plano dibujado en la esfera

3.1 La esfera está acotada

El primer experimento con el que podemos poner a prueba a nuestra tortuga consiste en pedirle que avance la cantidad 2π. A nadie le asombra que después de esto la tortuga se encuentre en la misma posición que al principio y haya dibujado un círculo máximo completo. Si la tortuga de la que disponemos es tan simple como la propuesta en la sección anterior, ante un avance de 6π, reaccionará dibujando tres veces el mismo círculo máximo. Es muy fácil modificar la implementación para conseguir que la tortuga sea perezosa y no repita cálculos innecesarios.

3.2 El exceso esférico

El siguiente paso podría ser dibujar un triángulo equilátero. Con una tortuga plana tendríamos que repetir tres veces un avance de la dimensión del lado y un giro de $\frac{2}{3}\pi$. Por eso es conveniente crear un procedimiento que repita varias veces un avance y un giro.

```
reitera := proc(lado, angulo, veces)
  local i;
  for i to veces do avanza(lado); gira(angulo) od;
end:
```

Así, si le pedimos a la tortuga de la esfera lo mismo que a la tortuga del plano,

```
reitera(Pi/3, 2*Pi/3, 3); dibuja();
```

más de uno se llevará una sorpresa al ver la figura 3, ya que lo que ha dibujado la tortuga en la esfera más bien parece el intento de hacer un triángulo en un plano untado de jabón, donde la pobre tortuga plana siempre gira más de lo que se le pide. Y es que ya nos lo advirtió Gauß en su artículo *Disquisiciones generales circa superficies curvas* [4]: la suma de los ángulos interiores de un triángulo cuyos lados son arcos de círculos máximos, es igual a π más el área del triángulo. Por tanto, si en los triángulos esféricos los ángulos interiores son más grandes que en los planos, los ángulos exteriores, que son precisamente los ángulos que la tortuga tiene que girar, son más pequeños.

Ante nuestros ojos tenemos el problema del exceso esférico. Si intentamos dibujar cualquier polígono en la esfera con las mismas órdenes que daríamos en el plano, el resultado es tan lamentable como en el caso del triángulo. Al acabar el dibujo, la tortuga no se encuentra en la misma posición que al principio y parece que los giros que le pedíamos eran mayores de lo necesario.

Cuando dibujamos un polígono regular, la tortuga rota sobre sí misma exactamente 2π radianes, al mismo tiempo que avanza. Si estamos en el plano, todos estos radianes se consumen bruscamente en los giros, ya que en los avances no se produce ningún cambio de dirección. Sin embargo, en la esfera sí que se produce una pequeña rotación de la tortuga al mismo tiempo que se avanza. Por este motivo, la suma de los ángulos exteriores es menor que 2π.

El teorema de Gauß–Bonet asegura que, en una esfera, la suma de los ángulos exteriores de un polígono que encierra una región homeomorfa a un disco y cuyos lados son arcos de círculo máximo es igual a 2π menos el área del polígono. Esto nos disuade de encontrar una representación para polígonos regulares tan fácil como la del caso plano.

3.3 Polígonos regulares

Proponemos la siguiente solución para dibujar un polígono regular. Sea n el número de lados y *radio* la distancia del centro del polígono a cualquiera de los vértices. A partir de estos datos, podemos calcular la medida de un ángulo exterior (π menos el ángulo interior), a la que llamaremos *ángulo*, y la longitud del lado, a la que llamaremos *lado*. Para esto necesitamos la primera

ecuación de Bessel:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

donde a, b, c son los lados de un triángulo geodésico (los lados han de ser arcos de círculos máximos) y A es el ángulo comprendido entre b y c.

Aplicando dos veces la primera ecuación de Bessel, obtenemos que:

$$\mathit{lado} = \arccos(\cos^2 \mathit{radio} + \operatorname{sen}^2 \mathit{radio} \cos 2\pi/n)$$

$$\mathit{\acute{a}ngulo} = \pi - 2 \arccos\left(\frac{\cos \mathit{radio}\,(1 - \cos \mathit{lado})}{\operatorname{sen} \mathit{radio} \operatorname{sen} \mathit{lado}}\right).$$

Con estas ecuaciones, la implementación del procedimiento `poligono_regular` queda así:

```
poligono_regular := proc(n, radio)
  local lado, angulo;
  if n>2 then
    lado := evalf(arccos((cos(radio))^2+
                         (sin(radio))^2*cos(2*Pi/n)));
    angulo := evalf(Pi-2*arccos((cos(radio)*(1-cos(lado)))/
                               (sin(radio)*sin(lado))));
    gira(angulo/2);
    reitera(lado, angulo, n);
    gira(-angulo/2);
  fi;
end:
```

Con los procedimientos `reitera` y `poligono_regular`, podemos pedir a la tortuga dibujos caprichosos como el de la figura 4, que se obtiene con el procedimiento `ojos`.

```
ojos := proc(n,precision)
  local i;
  for i to n do poligono_regular(precision, evalf(i*Pi/(n+1))) od;
end:
```

El papel que juegan en la esfera los arcos de círculo máximo es el mismo que el de las rectas en el plano: son las líneas geodésicas. Por tanto no hay que extrañarse si, al igual que con la tortuga del plano, aproximamos

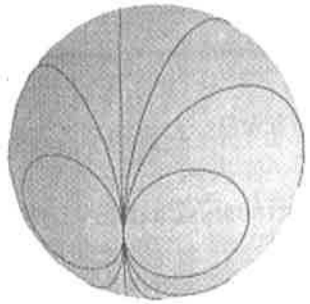


Figura 3: `ojos(6,30)`

cualquier tipo de curva con geodésicas. Por ejemplo, si queremos dibujar un paralelo (o cualquier círculo menor), podemos aproximarlo con polígonos regulares de un número alto de lados y con el mismo radio que el paralelo.

Se deja como ejercicio hacer un procedimiento que dibuje tantos paralelos equiespaciados como queramos.

4 Mapas del recorrido de la tortuga en la esfera

Cuando intentamos representar en el plano el recorrido de la tortuga en la esfera, todos los problemas de la Cartografía acuden a nuestro encuentro.

Parece razonable que un mapa entre dos superficies (en nuestro caso una esfera y una región del plano) sea al menos un difeomorfismo. Es bien sabido que no existen aplicaciones continuas e inyectivas de la esfera en el plano. Afortunadamente, basta quitar un punto a la esfera para conseguir un difeomorfismo con el plano: la proyección estereográfica. Existen otras formas de transformar regiones de la esfera en regiones del plano mediante difeomorfismos: proyecciones cilíndricas, proyecciones cónicas, proyecciones azimutales, etcétera.

Lo más deseable sería tener un mapa que conservara las distancias y los ángulos. El siguiente argumento prueba que esto no es posible. Un mapa de estas características, por ser una isometría, transformaría triángulos geodésicos esféricos en triángulos planos (como el recorrido más corto entre dos puntos es la geodésica que los une, una isometría ha de convertir

geodésicas en geodésicas). Si además conserva ángulos, las sumas de los ángulos interiores de un triángulo geodésico esférico y de su imagen mediante el mapa coinciden, lo cual es obviamente falso, en virtud de los teoremas de Gauß–Bonet y de Tales.

Es más, por el teorema egregium de Gauß, que dice que la curvatura de Gauß es invariante frente a isometrías locales, tenemos que renunciar a un mapa que conserve las distancias ya que la curvatura de Gauß de la esfera unidad es uno y la del plano es cero. Sin embargo, sí son factibles mapas que conserven ángulos (proyecciones conformes) o que conserven áreas (proyecciones equivalentes).

4.1 Implementación

Vamos a servirnos de la proyección de Mercator, para estudiar los inconvenientes que aparecen a la hora de dibujar en el plano el recorrido de la tortuga esférica.

La proyección de Mercator es una proyección cilíndrica conforme. Se construye proyectando la esfera (salvo los polos) en un cilindro tangente al ecuador, y después cortando el cilindro por una línea vertical (la que corta al ecuador en la longitud π) para obtener un plano. Así conseguimos proyectar toda la esfera, salvo el meridiano de longitud π.

Las ecuaciones de la proyección de Mercator son:

$$x = \lambda$$
$$y = \log(\tan(\pi/4 + \varphi/2))$$

donde (φ, λ) representan la latitud y longitud esféricas (por razones de implementación, el rango de λ es $[-\pi, \pi]$).

Pretendemos implementar un procedimiento, **`dibuja_Mercator`**, que dibuje en el plano el trayecto de la tortuga en la esfera, mediante la proyección de Mercator. Pero en lugar de centrarnos en esta proyección, vamos a resolver el problema de una forma más general, creando un procedimiento llamado **`dibuja_mapa`**, a partir del cual sea trivial producir **`dibuja_Mercator`**.

Está claro que tenemos que aislar en la implementación de **`dibuja_mapa`** la parte en la que aparecen las ecuaciones de la proyección. Necesitamos una función, **`Mercator`**, que convierta coordenadas esféricas en coordenadas planas, a partir de las ecuaciones de la proyección de Mercator. Como todos los

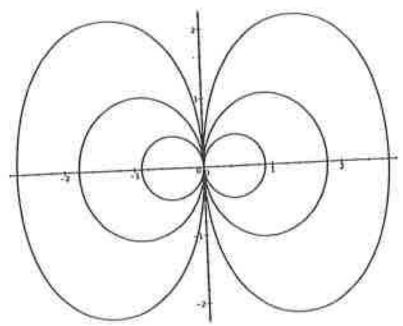


Figura 4: ojos(6,30), con la proyección de Mercator

datos del trayecto de la tortuga en la esfera están en coordenadas cartesianas, necesitamos otra función, pasa_geo, que pase de coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas. La implementación de estas funciones es muy sencilla: basta con escribir con la sintaxis de Maple las ecuaciones matemáticas.

Al igual que en el procedimiento **dibuja**, creamos primero una función auxiliar, **arco_mapa**, que dibuje cada uno de los arcos de la variable global **estado**. Los argumentos de **arco_mapa** son, en este orden, un arco y una función del tipo **Mercator**, que transforme coordenadas esféricas en coordenadas planas, mediante una proyección arbitraria.

```
arco_mapa := proc(e, proyeccion)
  local posicion, direccion, longitud, x, s, puntos;
  global estado,densidad;
  posicion := op(1,e); direccion := op(2,e); longitud := op(3,e);
  puntos := proyeccion(pasa_geo(evalm(cos(s)*posicion+
                                      sin(s)*direccion)));

  x := plot([puntos[1], puntos[2], s=0..longitud]);
  CURVES(op(1,op(1,x)),THICKNESS (0),COLOUR(RGB,0,0,0))
end:
```

Si utilizamos esta función en la implementación de **dibuja_mapa**, cada vez que un arco cruza el meridiano de longitud π, aparece en el mapa una línea horizontal que va de $-\pi$ a π, con la altura correspondiente a la latitud en la que el arco corta al meridiano. Esto es debido a que la función **plot** dibuja curvas en el plano a partir de una lista de puntos, uniendo los puntos consecutivos mediante segmentos. Por tanto, si un arco atraviesa el meridiano

de longitud π, tendremos dos puntos consecutivos, uno con longitud negativa, próxima a $-\pi$ y otro con longitud positiva, próxima a π.

Tenemos que transformar los arcos, de tal forma que el procedimiento **arco_mapa** sólo actúe sobre arcos que no corten al meridiano de longitud π. Para esto dividimos cada arco en varios trozos, de forma que ninguno de ellos corte al meridiano de longitud π. Por simetría de las ecuaciones, resulta muy cómodo que los arcos tampoco corten al meridiano de longitud cero. Teóricamente, bastaría quitar una cantidad finita de puntos al arco para obtener los arcos deseados, pero a nivel de implementación, esto no es posible. Simulamos este efecto haciendo disminuir los arcos teóricos una pequeña cantidad.

No damos la implementación del procedimiento que divide cada arco adecuadamente, al que llamaremos **desdobla_meridiano**, porque se aleja de nuestro objetivo, pero sí la de **dibuja_mapa**, por simetría con la de **dibuja**.

```
dibuja_mapa := proc(proyeccion)
  local y; global estado;
  y := map(desdobla_meridiano, op(trayecto_tortuga, estado));
  y := map(arco_mapa, y, proyeccion);
  PLOT(op(y))
end:
```

De esta forma, **dibuja_Mercator** nos queda así:

```
dibuja_Mercator := proc()
  dibuja_mapa(Mercator);
end:
```

Si después de pedirle a la tortuga que dibuje la figura 4, le pedimos que haga este dibujo en el plano con **dibuja_Mercator**, el resultado será el que aparece en la figura 5.

4.2 Estudio de diversas proyecciones

En la proyección de Mercator, se proyecta la esfera sobre un cilindro al que le falta el meridiano de longitud π. La función **desdobla_meridiano** sirve exclusivamente para partir los arcos que atraviesan el círculo máximo de longitudes 0 y π. Si en lugar de recortar por el meridiano de longitud π lo hacemos por el de longitud $\frac{\pi}{2}$ (como se ha hecho en la parte izquierda de la figura

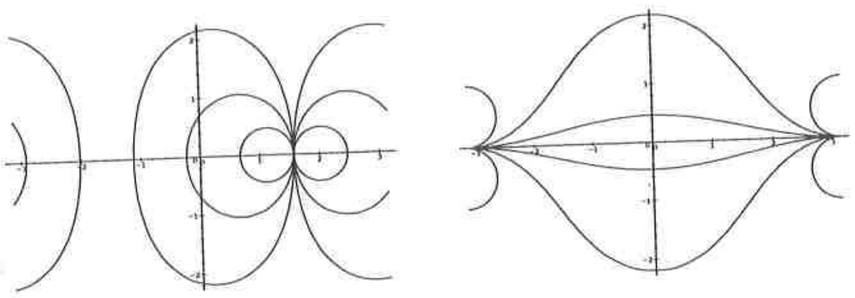


Figura 5: ojos(6,30) con dos variaciones de la proyección de Mercator

6 con ojos(6,30)), tenemos una proyección diferente, Mercator', y parece que necesitamos una función desdobla_meridiano' para partir los arcos que atraviesan el nuevo meridiano conflictivo. No obstante, podemos reutilizar desdobla_meridiano y dibuja_Mercator. Si lo primero que pedimos a la tortuga es que se sitúe en el ecuador, con longitud $\frac{3}{2}\pi$ y que apunte al polo norte, el aspecto del recorrido posterior de ésta en la esfera va a ser el mismo que si hubiera empezado en la posición habitual. Sin embargo, el dibujo que produce ahora dibuja_Mercator es el equivalente al de dibuja_Mercator' empezando en la posición habitual.

Otra variación que podemos hacer es la proyección transversal de Mercator. Consiste en proyectar la esfera sobre un cilindro tangente a un meridiano cualquiera. Si proyectamos ojos(6,30) sobre un cilindro tangente al meridiano de longitudes 0 y π, y lo recortamos por la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ (latitud cero y longitud cero), nos queda el dibujo de la parte derecha de la figura 6. Este dibujo se consigue situando la tortuga en el punto de longitud π del ecuador, con una dirección de avance paralela al ecuador, antes de ejecutar ojos(6,30) y dibuja_Mercator.

La proyección de Mercator, no es la única proyección cilíndrica. Dependiendo de cómo se proyecte la esfera sobre el cilindro, podemos obtener distintos mapas. Por ejemplo, las ecuaciones

$$x = \lambda$$
$$y = \operatorname{sen}\varphi,$$

son las de una proyección cilíndrica equivalente. Si queremos un procedimien-

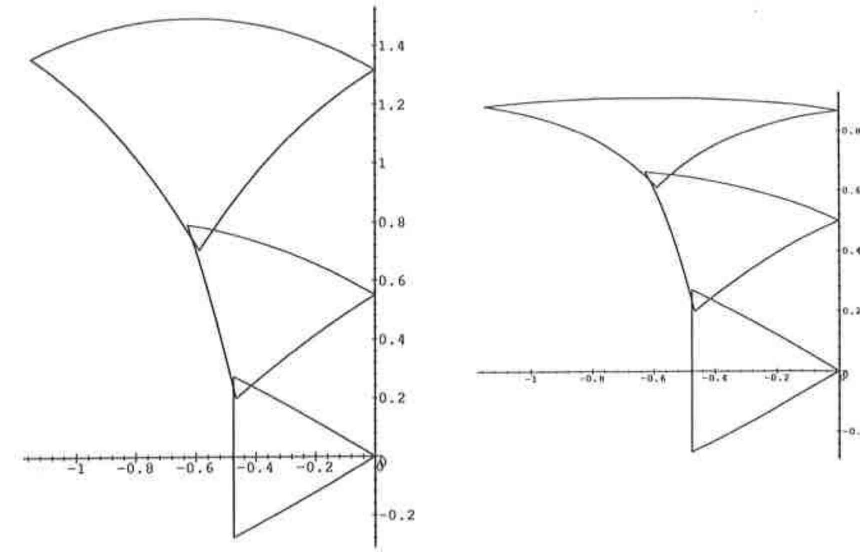


Figura 6: Triángulos equiláteros esféricos representados en el plano mediante una proyección cilíndrica conforme (izquierda) y otra cilíndrica equivalente

to que dibuje con esta proyección (dibuja_cil_equivalente), tendremos que crear una función (cil_equivalente) que implemente las ecuaciones anteriores, para alimentar a dibuja_mapa, al igual que se hizo en dibuja_Mercator con Mercator.

Para comparar las dos proyecciones, le pedimos a la tortuga que dibuje tres triángulos equiláteros en la esfera:

```
for i from 1 to 3 do
  poligono_regular(3,Pi/10); sube(); avanza(Pi/6); baja()
od;
```

Obsérvese en la figura 7, cómo la proyección conforme deforma el área del triángulo superior para que los ángulos sean constantes, mientras que la proyección equivalente hace lo contrario.

Como se dijo al principio de la sección, hay que quitar al menos un punto a la esfera, para poder hacer un mapa. Cada vez que la tortuga pase por uno de los puntos que hemos quitado, aparecerá una línea cruzando por el mapa. Hemos resuelto el problema con desdobla_meridiano para el caso de proyecciones cilíndricas, pero en realidad, podemos utilizar esta función para todas aquellas proyecciones que se obtengan quitando a la esfera parte de un círculo máximo, para después estirarla y convertirla en una sección del plano. Este es el caso de las proyecciones cónicas y de algunas azimutales.

Las proyecciones cónicas se obtienen al proyectar la esfera (menos un punto) sobre un cono tangente a un círculo menor, que después se recorta por una recta. Por tanto, hay que proceder igual que en las cilíndricas, situando a la tortuga en la posición adecuada para que `desdobla_meridiano` actúe convenientemente.

Las proyecciones azimutales del estilo de la estereográfica, se construyen pinchando a la esfera en un punto y después estirándola hasta dejarla plana. Por tanto, producen un mapa de la superficie total de la esfera, salvo de un punto. Si colocamos a la tortuga en una posición adecuada, la función `desdobla_meridiano` partirá los arcos que atraviesen este punto y no aparecerán líneas molestas.

Otras proyecciones azimutales, como la gnómica o la ortográfica, son el resultado de aplastar un solo hemisferio. Por tanto, antes de dibujar, hay que eliminar el trayecto de la tortuga que pasa por el hemisferio que no se representa. Por este motivo, `desdobla_meridiano` deja de ser efectivo. Sin embargo, no es muy difícil implementar una función que primero parta los arcos que crucen por el límite entre los dos hemisferios (con la ayuda de `desdobla_meridiano`) y después seleccione aquellos que se queden del lado que nos interese.

5 Conclusiones

Hemos presentado una implementación en Maple de las órdenes básicas de la tortuga en la esfera. Maple ya cuenta con un paquete, cuyo funcionamiento se explica en [5], que implementa la tortuga en el plano. Curiosamente, las soluciones encontradas en ambos casos son semejantes; creemos que esto es debido a la disposición de los gráficos en Maple.

Hemos estudiado además varias representaciones del trayecto de la tortuga esférica: tridimensionalmente y en el plano mediante distintas proyecciones.

Agradecimientos

Eugenio Roanes Lozano ha leído cuidadosamente las primeras versiones de este trabajo y me ha asesorado en la organización del mismo. A Pedro Palao Gostanza le agradezco su ayuda con TeX, con las figuras y con todo.

Observación

Si alguien está interesado en obtener la implementación aquí descrita, puede escribir a `juanin@eucmos.sim.ucm.es`, y con mucho gusto, se la mandaré.

Referencias

[1] H. Abelson y A. diSessa. *Geometría de tortuga.* Anaya Multimedia, 1986.

[2] Justo Cabezas Corchero y Luis Hernández Encinas. Geometría esférica en logo. *Gaceta Matemática Vol. 1 N. 1 Segunda serie*, páginas 13–24.

[3] B.W. Char, K.O. Geddes, G.H. Gonnet, B.L. Leong, M.B. Monagan, y S.M. Watt. *Maple V Language Reference Manual.* Springer-Verlag, 1991.

[4] K. F. Gauß. Disquisiciones generales circa superficies curvas. *Comm. Soc. Göttingen Bd 6*, páginas 1823–1827.

[5] Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías. An implementation of "turtle graphics" in Maple V. *Maple Tech. Birkhäuser Special Issue*, 1994.

Estudio de una sucesión de funciones con Derive

Luis Miguel Lestón López
Manuel José Fernández Gutiérrez

E.U.I.T. Informática de Oviedo
Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo
E-mail : mjfg@pinon.ccu.uniovi.es

Abstract

In the teaching of mathematics the practical work has traditionally resorted to blackboard and chalk. More recently the use of computer tool is making an inroad into its teaching.

This paper presents, by means of a typical example, the advantages that a computer tool for mathematics such as Derive offers in the study of the functional sequences and series.

Introducción

Con la introducción de los nuevos planes de estudio se ha generalizado, en algunas universidades, la impartición de prácticas de laboratorio en las asignaturas de Matemáticas. A esto ha contribuido la aparición de programas de cálculo simbólico de sencillo manejo, pocos requerimientos de hardware y suficientes prestaciones.

En nuestro caso, desde el curso 94-95, venimos realizando las prácticas de ordenador de la asignatura Complementos de Matemáticas (perteneciente al plan de estudios de la Ingeniería Informática de Sistemas de la Universidad de Oviedo) con apoyo del programa Derive que reúne los requisitos mencionados anteriormente.

El estudio de las series de potencias y series de Fourier, inevitablemente presente en la mayoría de las carreras técnicas, ha de estar acompañado de un conocimiento previo sobre los aspectos teóricos relacionados con la convergencia puntual y uniforme de una sucesión de funciones. El abordar estas cuestiones de la manera "tradicional" conlleva, salvo en ejemplos muy sencillos, una serie de limitaciones como son: la complejidad de los cálculos a realizar y la dificultad de conseguir representaciones gráficas fiables.

Un programa como Derive ayuda a paliar estos inconvenientes, ya que ofrece una representación gráfica rápida y fácil de llevar a cabo, a partir de la cual se pueden extraer

las primeras conclusiones u orientar el estudio en el sentido adecuado. Además se requiere la realización de varias operaciones del cálculo: límites , derivadas, integrales, etc., que son resueltas, casi siempre, de manera eficaz. Esta diversidad y potencia de cálculo permite que se puedan seguir distintos caminos para llegar a las conclusiones finales: métodos gráficos, empíricos y analíticos.

Ejemplo de una sucesión de funciones

Se va a realizar el estudio de la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $f_n(x) = nx(1-x)^n \quad x \in \Re$, para lo cual se propone dar respuesta a las siguientes cuestiones:

a) Dibujar las graficas de las funciones correspondientes a $n = 1, 2, 3, 4, 5, 100$, y a la vista de tales representaciones ¿Cuál parece ser la función f límite puntual y en qué dominio aproximado?

b) Calcular los valores de f_n en los puntos $x = -0.01$, $x = 0.01$, $x = 1.99$, $x = 2$, para $n = 10, 1000, 10000...$ y comparar estos resultados con la respuesta dada en el apartado anterior. Obtener, de manera formal, la función límite puntual para los distintos valores de la variable x. ¿Qué deficiencias muestra el programa (versión 3) en el cálculo de dicha función? ¿Cómo se pueden solventar?

c) Realizar los cálculos pertinentes para determinar si existe convergencia uniforme en los intervalos $[0,1]$, $[0.4,1]$, $[a,1]$ $0 < a < 1$, $[0.1,1.5]$, $[0.1,1.99]$. ¿En qué intervalos existe convergencia uniforme?

Resolución

a) A la vista del término general de esta sucesión de funciones, todas las funciones generadas pasarán por el origen, debido al factor multiplicativo x.

En principio se definirá n como entera positiva y x como real (todos los reales) aunque esta última se tendrá que redefinir en el cálculo de algunos límites.

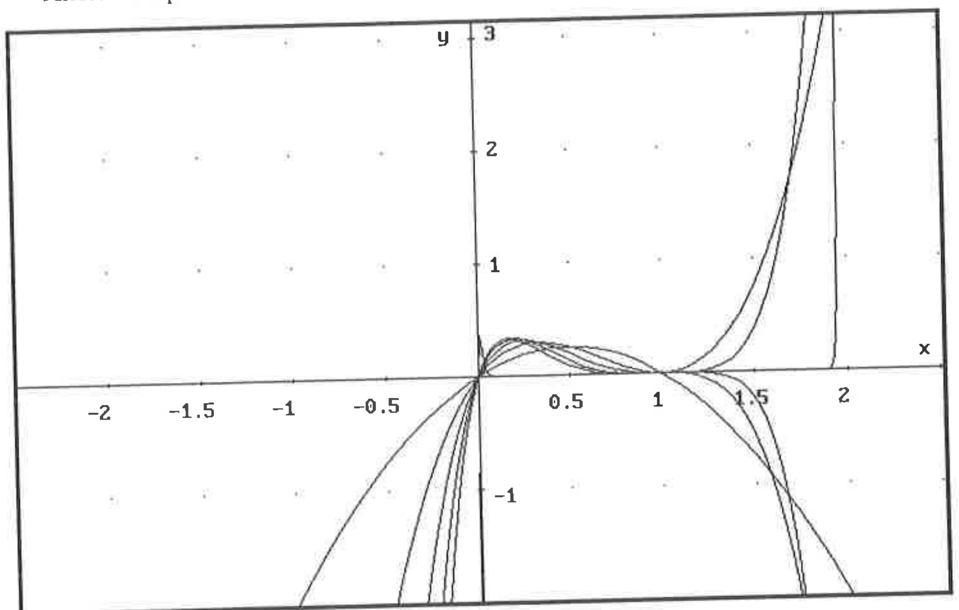
En primer lugar, tras haber declarado el rango y tipo de las variables e introducido el término general de la sucesión, se van a generar algunos términos consecutivos, de $n = 1$ a $n = 5$, para ver su evolución:

```
#1: x :∈ Real
#2: n :∈ Integer (0, ∞)
#3: n·x·(1 - x)ⁿ
#4: VECTOR(n·x·(1 - x)ⁿ, n, 5)
#5: [x·(1 - x), 2·x·(x - 1)², 3·x·(1 - x)³, 4·x·(x - 1)⁴, 5·x·(1 - x)⁵]
```

Y también se genera un término con n elevado, en este caso $n = 100$, para ver la tendencia de la sucesión:

$$\#6:\quad 100\cdot x\cdot(1 - x)^{100}$$

Ahora se representan las seis funciones juntas.



Ya se puede empezar a sacar conclusiones. Es claro que para $x < 0$ no va a haber convergencia puntual, pues las funciones parecen tender a menos infinito. Para los valores no negativos de la variable x la función límite puntual parece ser $f(x) = 0$, si la variable está comprendida entre 0 y 1, aunque las funciones se mantienen pegadas al eje de abcisas para valores algo mayores que 1, sobre todo cuanto mayor sea el valor de n, por lo que se puede pensar que habrá convergencia puntual también a $f(x) = 0$ para valores de x mayores de 1, aunque nunca por encima de $x = 2$, como puede verse en la gráfica. Para $x \geq 2$ parece que la sucesión de los valores absolutos de $f_n(x)$ converge a $+\infty$; más concretamente si n es par la subsucesión correspondiente convergerá a $+\infty$, y si n es impar lo har a $-\infty$.

b) Se puede ver cómo evolucionan las funciones en algunos puntos representativos a medida que se aumenta el valor de n. Para ello se sustituirá en #3 a las variables por valores, tomando distintos valores de x y evaluándolos en $n = 10$, $n = 1000$, $n = 10000$. Se comienza con $x = -0.01$.

$$\#7:\quad 10\cdot(-0.01)\cdot(1 - -0.01)^{10}$$

$$\#8:\quad -0.110462$$

$$\#9:\quad 10^{3}\cdot(-0.01)\cdot(1 - -0.01)^{10^{3}}$$

$$\#10:\quad -2.09590\cdot 10^{5}$$

$$\#11:\quad 10^{4}\cdot(-0.01)\cdot(1 - -0.01)^{10^{4}}$$

$$\#12:\quad -1.63574\cdot 10^{45}$$

De igual forma se hace sucesivamente para $x = 0.01$, $x = 1.99$, $x = 2$.

$$\#13:\quad 10\cdot 0.01\cdot(1 - 0.01)^{10}$$

$$\#14:\quad 0.0904382$$

$$\#15:\quad 10^{3}\cdot 0.01\cdot(1 - 0.01)^{10^{3}}$$

$$\#16:\quad 4.31710\cdot 10^{-4}$$

$$\#17:\quad 10^{4}\cdot 0.01\cdot(1 - 0.01)^{10^{4}}$$

$$\#18:\quad 2.24864\cdot 10^{-42}$$

$$\#19:\quad 10\cdot 1.99\cdot(1 - 1.99)^{10}$$

$$\#20:\quad 17.9971$$

$$\#21:\quad 10^{3}\cdot 1.99\cdot(1 - 1.99)^{10^{3}}$$

$$\#22:\quad 0.0859102$$

$$\#23:\quad 10^{4}\cdot 1.99\cdot(1 - 1.99)^{10^{4}}$$

#24: $4.47481\cdot 10^{-40}$

#25: $10\cdot 2\cdot (1-2)^{10}$

#26: 20

#27: $10^{3}\cdot 2\cdot (1-2)^{10^{3}}$

#28: 2000

#29: $10^{4}\cdot 2\cdot (1-2)^{10^{4}}$

#30: 20000

Como se ve en el segundo y tercer punto ($x = 0.01$, $x = 1.99$) sí habrá convergencia puntual, no así para los otros dos, por lo que la función límite puntual será $f(x) = 0$ si x pertenece al intervalo [0,2). Esto se calcula de manera formal tomando límite:

#31: $\lim_{n\to\infty} n\cdot x\cdot (1-x)^{n}$

#32: ?

Derive no puede calcularlo, y esto es debido a que el valor del límite depende del rango de la variable x, ya que si la expresión entre paréntesis, en valor absoluto, es menor que 1 la sucesión convergerá, no así en otro caso (salvo por supuesto si $x = 0$). Se puede calcular para que valores se da esto introduciendo la inecuación y ejecutando *solve:*

#33: $|1 - x| < 1$

#34: $-1 < x - 1 < 1$

El resultado $-1 < x - 1 < 1$ es equivalente a $0 < x < 2$. Ahora para calcular el límite en estos puntos se vuelve a declarar el rango de la variable x.

Una vez hecho esto, se calcula el límite de igual manera que antes, y sorprendentemente se obtiene el resultado *?*, lo cual resulta más extraño si se ve que si se declara la variable en los intervalos (0,1], [1,2), y se calculan los límites en ambos se obtiene el valor 0 en los dos casos.

#35: x :∈ Real (0, 2)

#36: $\lim_{n\to\infty} n\cdot x\cdot (1-x)^{n}$

#37: ?

#38: x :∈ Real (0, 1]

#39: $\lim_{n\to\infty} n\cdot x\cdot (1-x)^{n}$

#40: 0

#41: x :∈ Real [1, 2)

#42: $\lim_{n\to\infty} n\cdot x\cdot (1-x)^{n}$

#43: 0

Se ha de tener cuidado con estos resultados "extraños" proporcionados por Derive, que pueden llevar a equívoco si no se contrastan con nuestros propios resultados.

Nota: Si se usa el Derive para Windows (versión 4) ya no se tiene el "problema" anterior.

Por último, en la semirrecta real negativa:

#44: x :∈ Real (−∞, 0)

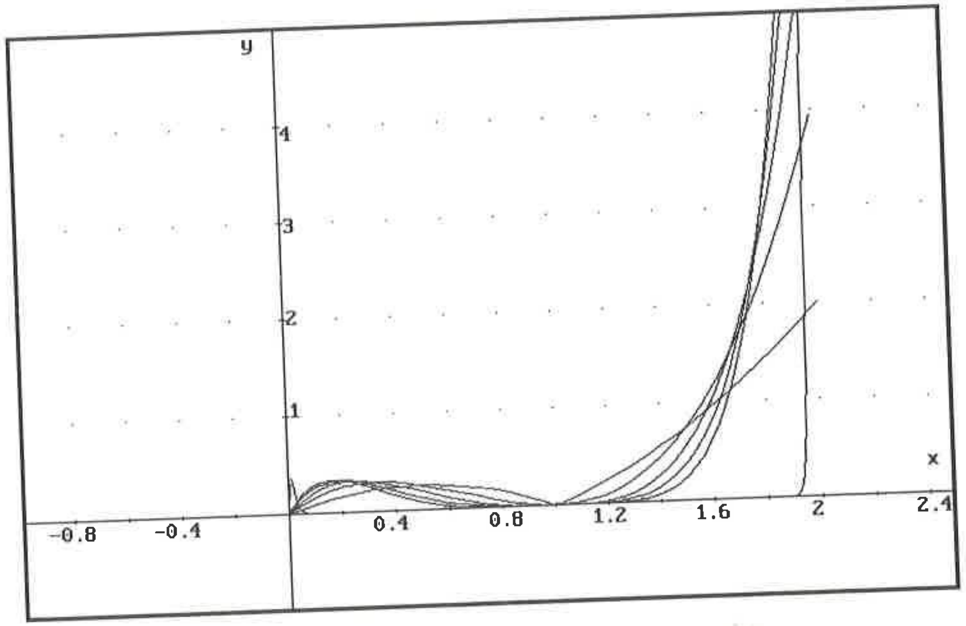
#45: $\lim_{n\to\infty} n\cdot x\cdot (1-x)^{n}$

#46: −∞

Así la función límite puntual es:

$$f(x) = 0 \qquad x \in [0,2)$$

c) En cuanto a la convergencia uniforme, a la vista de la representación gráfica siguiente (las sucesiones en valor absoluto limitadas al intervalo [0,2)) no parece que vaya a darse en todo el intervalo, pues la tendencia de los valores supremos de las funciones en valor absoluto ($2n$) es a crecer alejándose de 0.



Se va a realizar el estudio por intervalos empezando en [0,1] donde las funciones toman valores no negativos. Primero se va a calcular el valor supremo alcanzado por las funciones en este intervalo. Para ello se halla su derivada y se resuelve con *SOLVE* para conseguir los puntos donde dicho valor supremo se alcanza:

#47: $x :\in \text{Real } [0, 1]$

#48: $\left| n \cdot x \cdot (1 - x)^n \right|$

#49: $n \cdot x \cdot (1 - x)^n$

#50: $\frac{d}{dx} (n \cdot x \cdot (1 - x)^n)$

#51: $n \cdot (1 - x \cdot (n + 1)) \cdot (1 - x)^{n - 1}$

#52: $x = \frac{1}{n + 1}$

Ahora se sustituye el valor #52 en la expresión #49 y se toma límite.

#53: $n \cdot \frac{1}{n + 1} \cdot \left[1 - \frac{1}{n + 1}\right]^n$

#54: $n^{n + 1} \cdot (n + 1)^{-n - 1}$

#55: $\lim_{n \to \infty} n^{n + 1} \cdot (n + 1)^{-n - 1}$

#56: $\hat{e}^{-1}$

Por lo tanto no hay convergencia uniforme en este intervalo. Como se ve el punto donde alcanzan el supremo se aproxima a 0 a medida que n crece. Luego si se trabaja en el intervalo [0.4,1], a partir de un determinado valor de n, el punto $x = 1/(n + 1)$ no se encontrará en dicho intervalo, por lo que el supremo se alcanzará en el punto $x = 0.4$. El valor de n a partir del cual esto ocurre es $n = 2$, pues $x = 1/(n + 1) = 1/(2 + 1) = 0,\hat{3}$ ya no se encuentra en el intervalo en cuestión. Con esto, para todo valor $n > 1$, se tiene:

$$\sup_{x \in [0.4,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [0.4,1]} f_n(x) = f_n(0.4)$$

Si se calcula esto y se toma límite:

#57: $n \cdot 0.4 \cdot (1 - 0.4)^n$

#58: $2 \cdot 3^n \cdot 5^{-n - 1} \cdot n$

#59: $\lim_{n \to \infty} 2 \cdot 3^n \cdot 5^{-n - 1} \cdot n$

#60: 0

Por consiguiente en este intervalo la convergencia sí será uniforme. Visto esto se puede generalizar para un intervalo de la forma $[a, 1]$, con $0 < a < 1$, donde se aplican las conclusiones del caso anterior. En éste se pueden diferenciar dos situaciones. Primero, si

$$a > \frac{1}{1 + 1},$$

entonces

$$a > \frac{1}{n+1}$$

para todo n, y en este caso:

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,1]} f_n(x) = f_n(a)$$

```
#61: a :∈ Real (0, 1)

                  n
#62: n·a·(1 - a)

                      n
#63: lim n·a·(1 - a)
     n→∞

#64: 0
```

Segundo, si

$$0 < a \le \frac{1}{1+1},$$

entonces para un n suficientemente grande se verifica que $1/(n+1)$ no pertenece al intervalo $[a,1]$, y para este n y todos los siguientes se tiene que:

$$\sup_{x\in[a,1]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[a,1]} f_n(x) = f_n(a) = na[1-a]^n$$

$$\lim_{n\to inf} an(1-a)^n = 0$$

Así pues, en los dos casos de este intervalo la convergencia será uniforme.

Se va a dar un paso más y se pasa a trabajar en un intervalo [a,1.5] con a > 0. Ya no está tan claro que el valor máximo de $|f_n(x)|$ en este intervalo, a partir de un n suficientemente grande, se alcance en el punto $x = a$ pues ahora también puede ser en el punto $x = 1.5$. Por ejemplo, si $a = 0.1$ se consiguen los siguientes valores en los extremos y en $x = 1/(n+1)$, sustituyendo en #48:

n = 1	$\lvert f_n(0.1)\rvert = 0.09$	**$\lvert f_n(1.5)\rvert = 0.75$**	$\lvert f_n(1/2)\rvert = 0.25$
n = 4	$\lvert f_n(0.1)\rvert = 0.26$	**$\lvert f_n(1.5)\rvert = 0.37$**	$\lvert f_n(1/5)\rvert = 0.3276$
n = 5	$\lvert f_n(0.1)\rvert = 0.29$	$\lvert f_n(1.5)\rvert = 0.23$	**$\lvert f_n(1/6)\rvert = 0.3348$**
n = 6	$\lvert f_n(0.1)\rvert = 0.318$	$\lvert f_n(1.5)\rvert = 0.140$	**$\lvert f_n(1/7)\rvert = 0.339$**
n = 7	$\lvert f_n(0.1)\rvert = 0.334$	$\lvert f_n(1.5)\rvert = 0.082$	**$\lvert f_n(1/8)\rvert = 0.343$**
n = 8	$\lvert f_n(0.1)\rvert = 0.344$	$\lvert f_n(1.5)\rvert = 0.046$	**$\lvert f_n(1/9)\rvert = 0.346$**
n = 9	$\lvert f_n(0.1)\rvert = 0.348$	$\lvert f_n(1.5)\rvert = 0.026$	**$\lvert f_n(1/10)\rvert = 0.348$**

Para n > 9 el punto $x = 1/(n+1)$ ya no se encuentra dentro del intervalo en estudio, por lo que para $n \ge 9$ el supremo se alcanzar en el punto $x = 0.1$. Por lo visto anteriormente en dicho intervalo sí habrá convergencia uniforme. Si se cambia el intervalo de trabajo al [0.1,1.99] y se evalza la sucesión $|f_n(x)|$ en el extremo derecho del intervalo se tiene:

n=1	$\lvert f_n(1.99)\rvert = 1.9701$
n=4	$\lvert f_n(1.99)\rvert = 7.64634$
n=5	$\lvert f_n(1.99)\rvert = 9.46234$
n=6	$\lvert f_n(1.99)\rvert = 11.2412$
n=7	$\lvert f_n(1.99)\rvert = 12.9836$
n=8	$\lvert f_n(1.99)\rvert = 14.6900$
n=9	$\lvert f_n(1.99)\rvert = 16.3610$
n=500	$\lvert f_n(1.99)\rvert = 6.5376$
n=1000	$\lvert f_n(1.99)\rvert = 0.0859$

En este caso para todo valor de n el supremo se alcanza en $x = 1.99$ y también se da la convergencia uniforme, como se comprueba en las expresiones #66-#69. Parece claro que cuanto más se acerquen las funciones a $x = 2$ mayor será su valor, mucho más que en cualquier otro punto.

```
                          n
#65: |n·1.99·(1 - 1.99) |

            2·n    - 2·(n + 1)   n      |    n|
#66: 199·3     ·10             ·11  ·n· |(-1) |

                2·n    - 2·(n + 1)   n      |    n|
#67: lim 199·3     ·10             ·11  ·n· |(-1) |
     n→∞

#68: 0
```

Así pues, se dará la convergencia uniforme en todo intervalo de la forma [a,b] con $0 < a < b < 2$.

Conclusiones

La principal conclusión que podemos extraer del trabajo es que, azí en el caso favorable de que el programa realice correctamente todos los cálculos, es el usuario el que debe guiar y controlar en todo momento los pasos a realizar y los resultados obtenidos, ya que el programa no es más que una herramienta de la que se puede sacar más o menos partido según el uso que se le dé.

Bibliografía

[1] SOFT WAREHOUSE: *User Manual DERIVE Versión 3. A Mathematical Assistant For Your Personal Computer*, Honolulu, Hawaii, USA, 1994.
[2] POBLACIÓN, A. J.: "Una practica con Derive", *Epsilon*, 27, 31-37, 1993.
[3] KUTZLER, B.: *Introduction to DERIVE FOR WINDOWS*, Austria. 1996.

La Matemática en Bagdad

Ricardo Moreno Castillo

I.E.S. Gregorio Marañón
Departamento de Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

We present here some of the contributions of three important arabian mathematicians during the Abbasi dinasty.

Introducción

La península de Arabia, extensa como seis veces España, está situada en el suroeste de Asia, entre el Mar Rojo y el Golfo Pérsico. En ella se gestó, en el siglo VII, un movimiento religioso que daría lugar, en poco más de cien años, a un imperio que se extendería desde los Pirineos hasta las fronteras de China.

A los árabes les sucedió con los pueblos conquistados lo que a los romanos con los griegos. Los invasores se enamoraron de la cultura de las civilizaciones invadidas, la asimilaron y la aprendieron, después la enseñaron y la transmitieron. Desde la India trajeron el sistema de numeración posicional de base diez y las ecuaciones algebraicas. El occidente europeo, alejado de sus raíces helénicas desde la división del imperio romano, recuperó el saber griego a través de traducciones árabes. Pero no sólo fueron traductores y mensajeros, también fueron creadores. Descubrieron nuevos teoremas matemáticos, hicieron progresar la astronomía y desarrollaron el álgebra indú con métodos procedentes de la geometría griega. La ciencia árabe es el punto de encuentro de distintas tradiciones científicas y, gracias a sus cultivadores, este encuentro fue extremadamente fecundo y fuente de resultados originales.

Centros de desarrollo de la ciencia árabe

En el año 632, sin dejar nada mandado sobre su sucesión, murió Mahoma. Los cuatro primeros califas, los llamados califas legítimos, fueron escogidos entre los miembros de su familia. Mantuvieron como capital a Medina, la ciudad del profeta, y conquistaron Siria, Persia, Egipto y parte del norte de África.

En el 661 se proclamó califa Mwaviya, gobernador de Siria, y con él comenzó la dinastía Omeya. Siria había pertenecido al imperio Bizantino y los Omeyas estaban relativamente helenizados. Centralizaron la administración, organizaron la burocracia según modelos bizantinos y transformaron la sucesión del califato en hereditaria. Durante su gobierno, sus ejércitos llegaron por el occidente hasta la Península Ibérica (que los árabes llamaban Al-Andalus) y por el oriente hasta la India. Fundaron un observatorio astronómico en Damasco, la nueva capital del imperio, que se convirtió así en el primer foco de ciencia árabe.

En el año 750 una revolución chiíta acabó con la dinastía de los Omeyas y entronizó a la de los Abbasíes, que se consideraron sucesores de los califas legítimos. El primero de ellos, Abu-Abbas, organizó la matanza sistemática de los Omeyas, de la cual tan sólo pudo escapar Abderramán, que se refugió en Al-Andalus. Allí implantó la dinastía Omeya, dando así el primer paso hacia la disgregación del imperio. El segundo califa Abbasí, al-Mansur, trasladó la capital a Bagdad, adoptó maneras persas, se apoyó en funcionarios persas y, siguiendo el ejemplo de los persas (que en el siglo V habían fundado una escuela de medicina y astronomía en Jundishapur), se rodeó de científicos y traductores. Entre ellos estaba el astrónomo Manka, procedente de la India, quien tradujo los *Siddhantas* y otras obras científicas indúes. El tercer califa, Harum al-Rashid (el más conocido en Occidente, gracias a *Las mil y una noches*), ordenó recolectar manuscritos griegos y durante su reinado fue traducida al árabe parte de la obra de Euclides. El cuarto, al-Mamun, fundó una "Casa de la Sabiduría", al estilo de la antigua biblioteca de Alejandría. Allí fueron traducidas las obras de Ptolomeo, Euclides, Galeno, Hipócrates y Dioscórides. Después hablaremos más detalladamente de algunos de los matemáticos de esta época.

En el año 833 muere al-Mamún y se inicia una lenta desmembración política del imperio con la proclamación de emiratos independientes. Esta desmembración se convertiría en religiosa al formarse el Califato Fatimí, que englobaba a los emiratos del norte de África, y el Califato de Córdoba. El poder en Bagdad fue pasando a los turcos selyúcidas, que habían entrado como mercenarios, en cuyas manos los califas Abbasíes eran simples títeres. Muchos estudiosos se sintieron incómodos bajo los turcos y emigraron. Unos, como al-Biruni, a la India musulmana y otros, la mayoría, al Cairo, donde el califa fatimí al-Hakím había fundado una "Casa del Saber". Hasta allí llegó, entre otros, Alhacén, notable por sus trabajos de óptica. En esta época también Córdoba, la capital del califato Omeya, es un centro cultural y científico importante.

Entretanto, un nuevo poder surgido en las estepas de Asia central amenazaba la estabilidad del Islam. Un caudillo nómada, llamado Gengis Khan, consigue reunificar las tribus guerreras de Mongolia y llegar por el Este hasta China, cuya civilización adoptaron íntegramente. En Pekín fundaron un observatorio astronómico, que pusieron en manos de musulmanes occidentales y chinos nativos. Por el Oeste llegaron hasta Persia. Hulagu

Khan, nieto de Gengis Khan, saqueó Bagdad en 1258 y dio muerte al califa. Así acabó la dinastía Abbasí. Hulagu Khan fundó un observatorio astronómico en Acerbaiján, que puso bajo la dirección de su visir Nasir al-Din al-Tusi, que también era astrónomo y matemático. Allí se reunió una gran biblioteca y llegaron científicos de lugares tan distantes como China y España. El último foco de ciencia tártara se encendió en 1420, cuando un nieto de Tamerlán estableció un observatorio en Samarcanda. En él trabajó al-Kasi, el último de los grandes matemáticos árabes. A partir de su muerte, ocurrida alrededor de 1436, el mundo islámico deja de tener interés para el historiador de la ciencia.

Centros de transmisión de la ciencia árabe a Occidente

España fue el más importante lugar de contacto entre las culturas árabe y cristiana. Una parte de sus habitantes, entre los mozárabes (cristianos asimilados por los musulmanes) y los mudéjares (musulmanes asimilados por los cristianos), era bilingüe, y algunos judíos eran trilingües. En 1085 el rey Alfonso VI tomó Toledo, llevando la frontera hasta el Tajo. Poco después el arzobispo Raimundo organizó allí una escuela de traductores, donde acudieron estudiosos de toda Europa deseosos de aprender la ciencia árabe. Gerardo de Cremona, Roberto de Chester y Juan de Sevilla son los más conocidos.

Sicilia fue otro punto de encuentro de Europa con el saber musulmán. En 1091 pasó a manos cristianas tras ciento treinta años de dominio árabe. Bajo el impulso del emperador de Alemania Federico II (señor de Sicilia por parte de su madre Constanza) se tradujeron las obras biológicas de Aristóteles y gran parte de la alquimia musulmana.

Al-Jwarizmi

Poco sabemos de la vida de Mohammed ibn-Musa al-Jwarizmi, tan sólo que vivió entre los años 780 y 850 aproximadamente y que fue miembro de la "Casa de la Sabiduría" fundada por al-Mamún. Cinco de sus obras se han conservado. Son tratados de aritmética, álgebra, astronomía, geografía y el calendario. Aquí sólo hablaremos de los dos primeros. Hay noticia de otras obras, sobre el cuadrante solar y el astrolabio, pero no han llegado hasta nosotros.

El tratado de aritmética de al-Jwarizmi lo conocemos a través de cuatro fuentes. La primera está en la biblioteca de la Universidad de Cambridge, y es una copia del siglo XIII de una traducción latina que posiblemente es del siglo anterior. Diversos errores y añadidos hacen pensar que no es una traducción fiel, pero ignoramos si proceden del traductor o del copista, el cual ni siquiera terminó su trabajo porque el manuscrito se interrumpe en medio de un ejemplo sobre la multiplicación de fracciones. Las otras fuentes son obras que se inspiran muy directamente en la de al-Jwarizmi. Una es el *Liber Algorismi de practica* *arismetrice,* atribuida con mucho fundamento a Juan de Sevilla. La segunda es *Alchorismi in artem astronomicam a magistri A. compositus.* No sabemos quién es el autor, pero la expresión "Magister A." muy bien pudiera designar al inglés Adelardo de Bath. La tercera es un tratado sobre la aritmética indú de al-Nasawi, matemático del siglo XI de la escuela de Bagdad.

Después de exponer en su aritmética el sistema de numeración posicional mediante las cifras indúes (que todavía hoy muchos llaman equivocadamente cifras arábigas) explica al-Jwarizmi cómo nombrar los grandes números usando los conceptos de unidad, decena, centena y millar que él acababa de definir. Se sirve como ejemplo del número: *1 180 703 051 492 863,* que se ha de leer de la manera siguiente:

> *Un mil de mil de mil de mil y de mil, y un ciento de mil de mil de mil y de mil, y ochenta de mil de mil de mil y de mil, y setecientos de mil de mil y de mil, y tres mil de mil y de mil, y cincuenta y uno de mil y de mil, y cuatrocientos mil, y noventa y dos mil, y ochocientos sesenta y tres.*

El autor describe detalladamente las operaciones del cálculo según el método indú. En los ejemplos, los números son dados en todas sus letras (como el ejemplo anterior), en números romanos, o mezclando las dos cosas. Después comienza el capítulo de las fracciones, anunciando que tratar más tarde de las raíces cuadradas. Desafortunadamente, el manuscrito de Cambridge se interrumpe antes de llegar a esta operación. Pero Juan de Sevilla, que sí les consagra un lugar importante en su obra, nos informa que al-Jwarizmi enseñaba la extracción de la raíz según el método indú. En el *Liber Algorismi* se describe también el cálculo aproximado de la raíz cuadrada de un número N con ayuda de una transformación que hoy escribiríamos así:

$$\sqrt{N} = \frac{1}{10^k}\sqrt{N\,10^{2k}}$$

El método será tanto más exacto cuanto mayor sea k. El autor se sirve del siguiente ejemplo, que da tres cifras exactas:

$$\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000} = \frac{1414}{1000} = 1{,}414$$

Más adelante indica Juan de Sevilla esta otra regla:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a}$$

que es una primera aproximación del procedimiento iterativo utilizado por los babilonios. La fórmula se hizo muy popular durante la Edad Media, y si a es grande frente a b, puede dar una aproximación aceptable, como lo demuestra el siguiente ejemplo:

$$\sqrt{10} = \sqrt{3^2 + 1} \cong 3 + \frac{1}{6} = 3{,}1666..$$

Lo más bonito de esta fórmula es que es un polinomio de Taylor de primer grado. En efecto, es muy fácil comprobar que puede ser escrita de esta manera:

$$f(b) \cong f(0) + \frac{f'(0)}{1!}b$$

donde

$$f(x) = \sqrt{a^2 + x}.$$

Al-Nasawi indica una fórmula parecida que da un valor aproximado por defecto:

$$\sqrt{N} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a+1}$$

El tratado de álgebra de al-Jwarizmi nos ha llegado en mejor estado que el de aritmética. La Universidad de Oxford posee un manuscrito árabe del siglo XIV y existen dos traducciones al latín (de las que se conservan muchas copias) hechas en el siglo XII: una en 1145 por el inglés Roberto de Chester y otra, algo posterior, por el italiano Gerardo de Cremona.

El título del tratado es *al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa-l-muqabala,* y se compone de tres partes. Una propiamente algebraica, la única que aparece en las traducciones latinas, otra muy somera sobre algunos temas de geometría elemental, y la tercera sobre cuestiones testamentarias. La palabra *jabr* significa insertar, restaurar, en el sentido médico de colocar en su lugar un miembro dislocado. En el contexto de las ecuaciones algebraicas significa transposición de términos, cambio de un término de un miembro de la ecuación al otro (con la consiguiente alteración del signo). De *al-jabr* procede la palabra álgebra, y hasta no hace mucho se llamaba algebrista al curandero que arreglaba los huesos rotos o fuera de sitio. La palabra *muqabala,* literalmente "comparación", se refiere a la reducción de términos semejantes. De este modo la ecuación:

$$2x^2 + 100 - 20x = 58$$

se transforma por medio de *al-jabr,* a esta otra equivalente:

$$2x^2 + 100 - 58 = 20x$$

la cual, mediante *al-muqabala,* se reduce a:

$$2x^2 + 42 = 20x$$

que luego se simplifica dividiendo todos sus sumandos por dos.

Al-Jwarizmi no trabaja con coeficientes negativos (ni tiene en cuenta soluciones negativas), de modo que tiene que estudiar por separado distintas clases de ecuaciones que hoy consideraríamos una sola. Los seis primeros capítulos del *Álgebra* están dedicados a cada uno de las formas canónicas de las ecuaciones de primero y segundo grado, según estén distribuidos los números, la cosa (que nosotros llamamos la incógnita) y el cuadrado de la cosa. Estas formas son las siguientes:

1. Cuadrado de la cosa igual a cosa: $ax^2 = bx$
2. Cuadrado de la cosa igual a número: $ax^2 = c$
3. Cosa igual a número: $bx = c$
4. Cuadrado de la cosa más cosa igual a número: $ax^2 + bx = c$
5. Cuadrado de la cosa más número igual a cosa: $ax^2 + c = bx$
6. Cosa más número igual a cuadrado de la cosa: $bx + c = ax^2$

En cada caso utiliza un procedimiento distinto, explicado siempre mediante un ejemplo concreto, basado en construcciones geométricas. De este modo, en el *Álgebra* de al-Jwarizmi converge la corriente algebraica indú con la geométrica griega. Veamos alguna de estas construcciones. Para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$ dibuja un cuadrado, y supone que la longitud de su lado es igual a la cosa. Despues prolonga cada uno de sus lados en ambas direcciones una longitud igual a 5/2, como indica la figura 1. De este modo se forman cuatro cuadrados en las

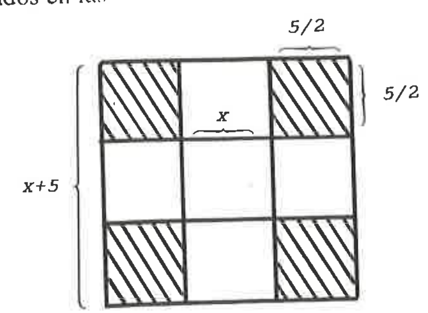


Figura 1

esquinas del cuadrado inicial, cuatro rectangulos sobre sus lados y un cuadrado final, formado por todas las figuras anteriores. Entonces sucede lo siguiente:

Cuadrados rayados de las esquinas = $\qquad$ = 25

Cuadrado central + Rectángulos = $x^2 + 4\left(\frac{5}{2}x\right) = x^2 + 10x = 39$

Sumando miembro a miembro, vemos que:

$$\text{Cuadrado grande} = 64 = (x + 5)^2$$

de donde se desprende que x + 5 = 8, y en consecuencia x = 3.

Esta demostración no es más que la representación gráfica de lo que hoy llamamos "completar el cuadrado", esto es, formar en el primer miembro un polinomio que sea cuadrado perfecto. En efecto, con notación actual la transformación anterior para la ecuación $x^2 + bx = c$ es la siguiente:

$$x^2 + 4\left(\frac{b}{4}x\right) + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2 = c + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2$$

cuyo primer miembro corresponde a:

Cuadrado central + Rectángulos + Cuadrados de las esquinas

Escribimos este primer miembro como un solo cuadrado, tanto en la expresión algebraica como en la geométrica y tenemos que:

$$\textit{Cuadrado grande} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 = c + 4\left(\frac{b}{4}\right)^2$$

Este resultado está ya a un paso de la célebre fórmula de la ecuación de segundo grado que todos sabemos desde la escuela.

Para resolver la ecuación $x^2 + 21 = 10x$ las cosas se complican un poco más. Dibujamos un rectángulo de base 10 y altura x, y lo dividimos en dos partes iguales. La de la izquierda la descomponemos en un cuadrado de lado x (punteado) y en un rectángulo de

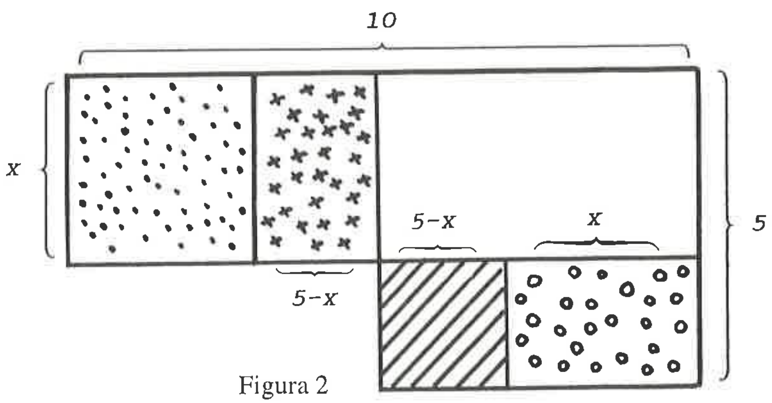


Figura 2

altura x y base $5 - x$ (con cruces), como se puede ver en la figura 2. El rectángulo que está en blanco se prolonga hasta formar un cuadrado de lado 5. El trozo que le tuvimos que añadir lo descomponemos en un cuadrado de lado $5 - x$ (rayado) y en un rectángulo de base x y altura $5 - x$ (con círculos). Sucede entonces que:

Rectángulo blanco + Rectángulo con círculos =
Rectángulo blanco + Rectángulo con cruces =
Rectángulo inicial – Cuadrado punteado =
$10x - x^2 = 21$

Sumamos miembro a miembro las igualdades:

Cuadrado rayado = $= (5 - x)^2$
Rectángulo blanco + Rectángulo con círculos $= 21$

y llegamos a esta otra:

$$(5 - x)^2 + 21 = 25$$

de la cual se deduce que $(5 - x)^2 = 4$, y por consiguiente $x = 3$.

Lo más interesante de este ejemplo es que tiene otra solución positiva que al-Jwarizmi no pasa por alto, pero para llegar a ella necesitará una construcción distinta de la que acabamos de hacer. Se habrá observado que el razonamiento anterior sólo es posible si suponemos que la solución buscada es más pequeña que cinco. Ahora supondremos lo contrario. Igual que antes, partimos de un rectángulo de base 10 y altura x, y sobre su izquierda tomamos un cuadrado de lado x. Despues dibujamos los cuadrados y rectángulos

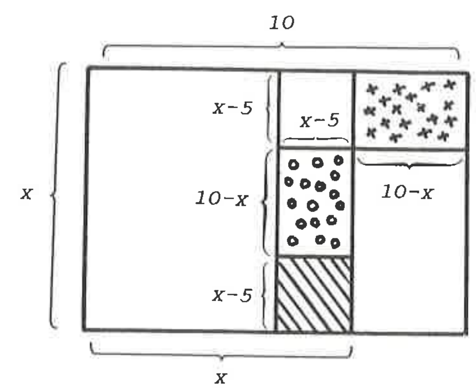


Figura 3

que se ven en la figura 3. Tenemos entonces lo que sigue:

Rectángulo en blanco + Rectángulo con círculos =
Rectángulo blanco + Rectángulo con cruces =
$10x - x^2 = 21$

Sumamos miembro a miembro las siguientes igualdades:

Cuadrado rayado = $= (x - 5)^2$
Rectángulo en blanco + Rectángulo con círculos $= 21$

y llegamos a lo siguiente:

$$(x - 5)^2 + 21 = 25$$

de donde se deduce que $(x - 5)^2 = 4$, y por lo tanto $x = 7$.

Después de resolver las formas canónicas de las ecuaciones, al-Jwarizmi trata los sistemas de ecuaciones, aunque nunca nombra explícitamente la segunda incógnita. De los sistemas lineales hace uso frecuente en la parte de su obra dedicada a las herencias y testamentos.

Tabit ben Qurra

Contemporáneo del anterior, aunque bastante ms joven, fue Abu al-Hasan Tabit ben Qurra. Es importante sobre todo como traductor, pero también se le deben varios resultados originales. Hablaremos tan sólo de los dos más conocidos.

El primero es una generalización del teorema de Pitágoras que funciona con cualquier clase de triángulos: si trazamos desde el vértice A de un triángulo dos rectas AD y AE tales que los ángulos ADB y AEC sean iguales al ángulo A, sucede lo siguiente:

$$AB^2 + AC^2 = BC(BD + EC)$$

Tabit ben Qurra no da ninguna demostración, pero es muy fácil generalizar la del "molino de viento" que aparece en el libro I de los *Elementos.* En efecto, repitiendo al pie de la letra el

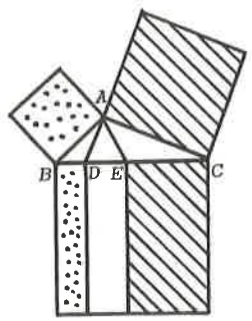


Figura 4

razonamiento de Euclides, se llega a las igualdades (figura 4):

Cuadrado punteado = Rectángulo punteado
Cuadrado rayado = Rectángulo rayado

las cuales, sumadas miembro a miembro, (suponiendo el ángulo A obtuso) proporcionan estas otras:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 - BC\,DE = BC^2 - BC(BC - BD - EC) = BC(BD + EC)$$

y ya tenemos la tesis del teorema. Si A es agudo, los rectángulos rayado y punteado se solapan y los papeles de los puntos D y E se invierten, pero el razonamiento es idéntico. Y si A es recto, D y E coinciden y tenemos el teorema de Pitágoras.

Dos números se llaman amigos si la suma de los divisores propios de cada uno de ellos es igual al otro. La más sencilla pareja de números amigos, ya conocida por los pitagóricos es la de 220 y 284. El siguiente teorema acerca de números amigos es debido a Tabit ben Qurra. Si para un cierto n natural son primos los números:

$$p = 3 \cdot 2^n - 1, \quad q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 \quad \text{y} \quad r = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1$$

entonces son amigos los números:

$$a = 2^n pq \quad \text{y} \quad b = 2^n r$$

La demostración es un cálculo muy elemental:

$$\sum divisores\ propios\ de\ b = \sum_{k=0}^{n} 2^k + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k r =$$

$$2^{n+1} - 1 + (2^n - 1)(3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1) = 2^n(3^2 \cdot 2^{2n-1} - 3^2 \cdot 2^{2n-1} + 1)$$

$$2^n(3 \cdot 2^n - 1)(3 \cdot 2^{2n-1} - 1) = 2^n pq = a$$

De modo muy parecido se puede demostrar que:

$$\Sigma divisores\ propios\ de\ a = b$$

Con esta descubrimiento de Tabit ben Qurra podemos fabricar una tabla de números amigos hasta donde la paciencia nos llegue:

n	p	q	r	a	b
2	11	5	71	220	284
3	23	11	287 = 7 × 41	–	–
4	47	23	1151	17296	18416
5	95 = 5 × 19	–	–	–	–
6	191	95	–	–	–
7	383	191	73727	9363584	9437056
8	767 = 13 × 59	–	–	–	–

Abu-l-Wefa

Abu-l-Wefa es un matemático del siglo X, interesado por la trigonometría, autor de un comentario sobre el *Álgebra* de al-Jwarizmi y de una traducción del griego de la *Aritmética* de Diofanto. Pero de lo que vamos a hablar ahora es de cómo trata las fracciones en una obra titulada *Libro sobre la aritmética necesaria a los escribas y mercaderes.* Distingue

Abu-l-Wefa dos tipos, las "expresables" y las "inexpresables" o "mudas". Las primeras las clasifica en tres grupos:

1. Fundamentales: $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}\right\}$

2. Repetición de las fundamentales: $\left\{\frac{n}{m} / 1 < n < m \leq 10\right\}$

3. Producto de las fundamentales: $\left\{\frac{1}{p} \cdot \frac{1}{q} \cdots \frac{1}{r} / 2 \leq p, q, \ldots r \leq 10\right\}$

Abu-l-Wefa no considera como grupo aparte las fracciones procedentes de la suma de fundamentales, cosa que otras aritméticas árabes sí hacen. Las fracciones mudas son aquéllas cuyo denominador es un número primo mayor que 10, y por consiguientes imposibles de obtener a partir de las fundamentales.

Para la contabilidad y las finanzas, los habitantes del Próximo y Medio Oriente procuraban escribir todas las fracciones como producto y suma de las fundamentales. Abu-l-Wefa propuso un gran número de reglas para expresar de esta manera una fracción cualquiera, regla que sólo podía ser aproximada si la fracción era muda. Veamos alguno de estos procedimientos. Uno, quizás el más rudimentario pero bastante usado por los escribas, es sumar un mismo número al numerador y al denominador de la fracción:

$$\frac{3}{17} \cong \frac{3+1}{17+1} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

Otro método, que puede ser prolongado indefinidamente, es el siguiente:

$$\frac{3}{17} = \frac{180/17}{60} = \frac{10+10/17}{60}$$

Ahora bien, 10/17 está más cerca de 1 que de 0, de modo que en un primer redondeo podemos poner que:

$$\frac{3}{17} \cong \frac{10+1}{60} = \frac{11}{60} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\frac{1}{10}$$

El error cometido es de una centésima. Si hacemos una segunda aproximación, se llega hasta tres cifras decimales exactas:

$$\frac{3}{17} = \frac{10+10/17}{60} = \frac{10+(600/17)/60}{60} =$$

$$= \frac{10+35/60+(5/17)/60}{60}$$

El último sumando del numerador se parece más a 0 que a 1, de manera que nos deshacemos de l y tenemos lo siguiente:

$$\frac{3}{17} \cong \frac{10+35/60}{60} = \frac{10+1/3+1/4}{60} =$$

$$= \frac{6+(3+1/3)+(1+1/4)}{60} = \frac{1}{10} + \frac{1}{2}\frac{1}{9} + \frac{1}{6}\frac{1}{8}$$

Existe otro procedimiento que encontré en un manuscrito árabe del siglo XIII de la biblioteca del Escorial. Consiste en sumar y restar un mismo número del denominador de la fracción y después hacer la media aritmética:

$$\frac{4}{19} \cong \frac{1}{2}\left(\frac{4}{20} + \frac{4}{18}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{9}\right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{9}$$

Si este método lo aplicamos a 3/17 y lo comparamos con el de aproximaciones sucesivas, vemos que da un resultado considerablemente mejor que el obtenido con la primera aproximación y ligeramente peor que el obtenido con la segunda.

Bibliografía

I. *Sobre ciencia árabe*

[1] GLICK, T. F.: *Tecnología, ciencia y cultura en la España Medieval,* Alianza Editorial, Madrid, 1992.

[2] JUSTEL, B.: *La Real Biblioteca de El Escorial y sus manuscritos árabes,* Instituto Hispano-Árabe de Cultura, Madrid, 1987.

[3] MASON, S. F.: *Historia de las Ciencias,* Alianza Editorial, Madrid, 1986.

[4] ROMO SANTOS, C.: "La aritmética árabe durante la Edad Media. Antiguos problemas aritméicos árabes", en Tarbiya, n. 15, págs. 57-64, 1977.

[5] SÁNCHEZ PÉREZ, J. A.: *Biografías de matemáticos árabes que florecieron en España,* Estanislao Maestre impr., Madrid, 1921.

[6] VERNET GINS, J.: *La cultura hispanoárabe en Oriente y Occidente,* Ariel, Barcelona, 1978.
[7] VERNET GINS, J.: "La Matemática árabe", en *Historia de la matemática hasta el siglo XVII,* Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1986.
[8] VERNET GINS, J. y otros: *Historia de la Ciencia Árabe,* Real Academia de Ciencia Exactas, Físicas y Naturales, Madrid, 1981.
[9] YOUSCHKEVITCH, A.: *Les Mathématiques Arabes,* Librairie Philosophique J. Vrin, París, 1976.

II. *Sobre el mundo islámico en general*

[1] ÁLVAREZ, J.: *Lawrence de Arabia,* Planeta, Barcelona, 1995.
[21] BURCKHARDT, T.: *La civilización hispano-árabe,* Alianza Editorial, Madrid, 1989.
[3] DÍAZ-PLAJA, F.: *La vida cotidiana en la España Musulmana,* EDAF, Madrid, 1993.
[4] DUFOURQ, C. E.: *La vida cotidiana de los árabes en la Europa medieval,* Ediciones Temas de Hoy, Madrid, 1990.
[5] GLICK, T. F.: *Cristianos y musulmanes en la España medieval (711-1250),* Alianza Editorial, Madrid, 1994.
[6] GRAVES, R.: Lawrence y los árabes, Seix Barral, Barcelona, 1991.
[7] HORRIE, C. y CHIPPINDALE, P.: *¿Qué es el Islam?,* Alianza Editorial, Madrid, 1990.
[8] LAWRENCE, T. E.: *Los Siete Pilares de la Sabiduría,* Huerga y Fierro, Madrid, 1977.
[9] MAALOUF, A.: Las cruzadas vistas por los árabes, Alianza Editorial, Madrid, 1996.
[10] MANDEL, G.: Cómo reconocer el arte islámico, EDUNSA, Barcelona, 1993.
[11] MARTÍNEZ MONTÁVEZ, P.: *El Islam,* Salvat, Barcelona, 1991.
[12] MUÑOZ MOLINA, A.: *La Córdoba de los Omeyas,* Planeta, Barcelona, 1994.
[13] SANTIAGO SIMÓN, E.: Las Claves del Mundo Islámico, Planeta, Madrid, 1991.
[14] SOREL, D.: Historia de los árabes, Fondo de Cultura Económica, México, 1989.
[15] VARELA, I. y LLANEZA, A.: *La Expansión del Islam,* Anaya, Madrid, 1992.
[16] WATT, W. M.: Historia de la España Islámica, Alianza Editorial, Madrid, 1994.

III. *Literatura histórica sobre el mundo islámico*

[1] CORRAL LAFUENTE, J. L.: *El Salón Dorado,* Alianza Editorial, Madrid, 1996.
(Trata sobre el mundo de la ciencia árabe en la España medieval y las escuelas de traductores.)
[2] FALCONER, C.: *Harem,* Emec, Barcelona, 1994.
(La historia de una esclava tátara que gobernó el imperio otomano junto a Solimán el Magnífico.)
[3] GUILADI, Y.: *Los cipreses de Córdoba,* Edhasa, Barcelona, 1977.
(Novela ambientada en la Córdoba del siglo X, donde un alquimista entra al sevicio de Abderramán III.)
[4] MAALOUF, A.: *Samarcanda,* Alianza Editorial, Madrid, 1994.
(Sobre la vida del matemático persa Omar Jayyam.)
[5] MAALOUF, A.: *León el Africano,* Alianza Editorial, Madrid, 1995.
(Sobre la caída del reino de Granada y la decadencia del poder islámico en Occidente y su emergencia en Oriente con el imperio Otomano.)

[6] MORRIS, R. C.: *Jem,* Península, Barcelona, 1996.
(Los hijos de Mohamed II se enfrentan al morir su padre.)
[7] PORRIER, H.: *El médico de Córdoba,* Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1995.
(Sobre el filósofo y médico Maimónides.)
[8] SCOTT, W.: El talismán, Anaya, Madrid, 1996.
(El rey Ricardo de Inglaterra y el sultán Saladino se encuentran en la tercera cruzada.)
[9] SÁNCHEZ-ALBORNOZ Y MENDUIÑA, C.: *Ben Ammar de Sevilla,* Espasa Calpe, Madrid, 1972.
(Una tragedia en la España de los Taifas.)
[10] STERN, H.: *El hombre de Apulia,* Seix Barral, Barcelona, 1987.
(El protagonista de esta novela es Federico II, admirador y protector de la ciencia árabe.)
[11] TARIQ ALI: *A la sombra del granado,* Edhasa, Barcelona, 1996.
(Otra novela sobre la caída de Granada.)
[12] WALTARI, M.: *Juan el Peregrino,* Grijalbo Mondadori, Barcelona, 1986.
(Un esclavo latino contempla los preparativos de Mohamed II para tomar Constantinopla.)

Sobre movimientos

Carmen Alonso Delgado (*)
Manuel Suárez Fernández (**)

(*) I.E.S. "Beatriz Galindo" de Madrid
(**) Fac. Ciencias Económicas de Albacete
msuarez@ecemab.uclm.es

Abstract

Using just the definition of isometry in an euclidean affine space E *of finite dimension (as a mapping from* E *to* E *that preserves distances), we prove below that it is a one-to-one affinity that preserves the inner product.*

Introducción

En todo lo que sigue suponemos que E es un espacio afín euclideo de dimensión finita n, asociado al espacio (vectorial) euclideo R^n, notamos + a la suma de vectores (de R^n) y

- si A B son puntos de E entonces,
  - notamos AB al vector asociado al par (ordenado) de componentes A B.
  - notamos $d(A,B)$ a la distancia entre A y B.
- si A B C D son puntos de E entonces notamos $AB \cdot CD$ al producto escalar de AB por CD.

Así, pues, si A B son puntos de E entonces, en virtud de la definición de distancia, $AB \cdot AB = (d(A,B))^2$.

Recordemos que,

- si A B son puntos de E entonces,
  - $AB \cdot AB \geq 0$.
  - $AB \cdot AB = 0$ si y sólo si $A = B$.

- si A B C D son puntos de E entonces,
  - $AB \cdot CD = CD \cdot AB$.
  - si λ es un escalar (es decir, un número real) entonces $\lambda(AB \cdot CD) = (\lambda AB) \cdot CD$ y, en consecuencia, se puede escribir $\lambda AB \cdot CD$ en lugar de $\lambda(AB \cdot CD)$ sin peligro de confusión.
- si A B C D H P son puntos de E entonces $(AB + CD) \cdot HP = AB \cdot HP + CD \cdot HP$ (entendiendo que $AB \cdot HP + CD \cdot HP = (AB \cdot HP) + (CD \cdot HP)$).

Definición 1

f es un movimiento sobre E si y sólo si f es una aplicación de E en E que conserva las distancias (es decir, si y sólo si, si A B son puntos de E entonces $d(f(A), f(B)) = d(A,B)$).

Teorema 1

Si f es un movimiento sobre E entonces f es una aplicación inyectiva.

Demostración. Si, entonces, A es un punto de E, B es un punto de E y $f(A) = f(B)$ entonces $d(f(A), f(B)) = 0$ (es decir, la distancia de $f(A)$ a $f(B)$ es igual a cero). Luego, $d(A,B) = 0$ y, en consecuencia, $A = B$. Así, pues, f es una aplicación inyectiva.

Teorema 2

Si f es un movimiento sobre E entonces f conserva los productos escalares (es decir, si A B C son puntos de E, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ y $f(C) = C'$ entonces $AB \cdot AC = A'B' \cdot A'C'$).

Demostración

Si, entonces, A B C son puntos de E, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ y $f(C) = C'$ entonces $(AB + BC + CA) \cdot (AB + BC + CA) = AA \cdot AA = 0$. Luego, $AB \cdot AB + BC \cdot BC + CA \cdot CA + 2AB \cdot BC + 2AB \cdot CA + 2BC \cdot CA = 0$ y, análogamente, $A'B' \cdot A'B' + B'C' \cdot B'C' + C'A' \cdot C'A' + 2A'B' \cdot B'C' + 2A'B' \cdot C'A' + 2B'C' \cdot C'A' = 0$.

Por conservarse las distancias, $AB \cdot AB = A'B' \cdot A'B'$, $BC \cdot BC = B'C' \cdot B'C'$ y $CA \cdot CA = C'A' \cdot C'A'$. Luego, $AB \cdot BC + AB \cdot CA + BC \cdot CA = A'B' \cdot B'C' + A'B' \cdot C'A' + B'C' \cdot C'A'$. Así, pues, $(CA + AB) \cdot BC + AB \cdot CA = (C'A' + A'B') \cdot B'C' + A'B' \cdot C'A'$. Luego, $CB \cdot BC$

$+ AB \cdot CA = C'B' \cdot B'C' + A'B' \cdot C'A'$, de donde, $BC \cdot BC + AB \cdot CA = -B'C' \cdot B'C' + A'B' \cdot C'A'$. En consecuencia (puesto que $BC \cdot BC = B'C' \cdot B'C'$ por conservarse las distancias y puesto que $AB \cdot CA = -AB \cdot AC$ y, análogamente, $A'B' \cdot C'A' = -A'B' \cdot A'C'$) resulta que $AB \cdot AC = A'B' \cdot A'C'$, como queríamos demostrar.

Teorema 3

Si f es un movimiento sobre E entonces f conserva los productos de escalares por vectores (es decir, si λ es un escalar A B C son puntos de E, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ y $AC = \lambda AB$ entonces $A'C' = \lambda A'B'$).

Demostración

Si, entonces, A B C son puntos de E, λ es un escalar, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, v es un vector (es decir, un elemento del espacio vectorial R^n) y $A'C' = \lambda A'B' + v$ entonces, $A'C' \cdot A'C' = (\lambda A'B' + v) \cdot (\lambda A'B' + v) = 2A'B' \cdot A'B' + 2\lambda A'B' \cdot v + v \cdot v = \lambda 2AB \cdot AB + 2\lambda A'B' \cdot v + v \cdot v$.

Y también, $A'C' \cdot A'C' = AC \cdot AC = \lambda AB \cdot \lambda AB = \lambda 2AB \cdot AB$.

Luego, $2\lambda A'B' \cdot v + v \cdot v = 0$.

Por otra parte, en virtud del Teorema 2, $A'C' \cdot A'B' = AC \cdot AB$.

Luego, $(\lambda A'B' + v) \cdot A'B' = AC \cdot AB = AB \cdot AB = \lambda A'B' \cdot A'B'$.

En consecuencia, $v \cdot A'B' = 0$.

Luego, recordando que $2 \cdot A'B' \cdot v + v \cdot v = 0$, resulta que $v \cdot v = 0$ y, en consecuencia, $A'C' = \lambda A'B'$, como queríamos demostrar.

Teorema 4

Si f es un movimiento sobre E, A B C D son puntos de E, $AB = CD$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$ y $f(D) = D'$ entonces $A'B' = C'D'$.

Demostración

Si, entonces, v es un vector tal que $C'D' = A'B' + v$ entonces $C'D' \cdot C'D' = (A'B' + v) \cdot (A'B' + v) = A'B' \cdot A'B' + 2A'B' \cdot v + v \cdot v$ y también $C'D' \cdot C'D' = CD \cdot CD = AB \cdot AB = A'B' \cdot A'B'$. Luego, $2A'B' \cdot v + v \cdot v = 0$. Por otra parte, $AB \cdot AD = AB \cdot (AC + CD) = AB \cdot AC + AB \cdot CD$ y, análogamente, resulta que $A'B' \cdot A'D' = A'B' \cdot A'C' + A'B' \cdot C'D'$.

Luego (puesto que, en virtud del teorema 2, $AB \cdot AD = A'B' \cdot A'D'$ y $AB \cdot AC = A'B' \cdot A'C'$), $AB \cdot CD = A'B' \cdot C'D'$, de donde (recordando que, por hipótesis, $AB = CD$ y $C'D' = A'B' + v$), $AB \cdot AB = AB \cdot CD = A'B' \cdot C'D' = A'B' \cdot (A'B' + v) = A'B' \cdot A'B' + A'B' \cdot v$. Luego, (puesto que $AB \cdot AB = A'B' \cdot A'B'$), $A'B' \cdot v = 0$, de donde (puesto que $2A'B' \cdot v + v \cdot v = 0$), $v \cdot v = 0$ y, en consecuencia, $A'B' = C'D'$, como queríamos demostrar.

Teorema 5

Si f es un movimiento sobre E entonces f conserva las sumas de vectores (es decir, si A B C D H P son puntos de E, $HP = AB + CD$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$, $f(H) = H'$ y $f(P) = P'$ entonces $H'P' = A'B' + C'D'$).

Demostración

Si, entonces, A BC D H P son puntos de E, $HP = AB + CD$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$, $f(H) = H'$, $f(P) = P'$ y D_1 es un punto de E tal que $BD_1 = CD$ y $f(D_1) = D_1'$ entonces $HP = AB + CD = AB + BD_1 = AD_1$. Y, en virtud del Teorema 4, $B'D_1' = C'D'$, de donde, $A'B' + C'D' = A'B' + B'D_1' = A'D_1'$. Luego, en virtud del Teorema 4, $H'P' = A'D_1'$ y, en consecuencia, $H'P' = A'B' + C'D'$, como queríamos demostrar.

Teorema 6

Si f es un movimiento sobre E, λf son escalares, A B C D H P son puntos de E, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$, $f(H) = H'$, $f(P) = P'$ y $HP = \lambda AB + \mu CD$ entonces $H'P' = \lambda A'B' + \mu C'D'$.

Demostración

Trivial, considerando el Teorema 3 y el Teorema 5.

Teorema 7

Si f es un movimiento sobre E entonces f es una afinidad.

Demostración

Trivial, considerando el Teorema 6 (ver Apéndice).

Teorema 8

Si $A_0\,A_1 \ldots A_n$ son puntos de E tales que $(A_0\,A_0A_1 \ldots A_0A_n)$ es un sistema de referencia de E (lo cual equivale a decir que $(A_0A_1 \ldots A_0A_n)$ es una base del espacio vectorial R^n, asociado al espacio afín E), $f(A_0) = A_0'$, $f(A_1) = A_1'$,... y $f(A_n) = A_n'$ entonces $(A_0', A_0'A_1', \ldots, A_0'A_n')$ es un sistema de referencia de E.

Demostración

Si, entonces, no fuese $(A_0'A_1' \ldots A_0'A_n')$ una base del espacio vectorial R^n entonces uno de los n vectores $A_0'A_1' \ldots A_0'A_n'$, por ejemplo el $A_0'A_n'$, sería combinación lineal de los restantes. Luego, existirían $n-1$ escalares $\lambda_1 \ldots \lambda_{n-1}$ tales que $A_0'A_n' = \lambda_1A_0'A_1' + \ldots + \lambda_{n-1}A_0'A_{n-1}'$.

Por otra parte, si A es un punto de E tal que $A_0A = \lambda_1A_0A_1 + \ldots + \lambda_{n-1}A_0A_{n-1}$ y $A' = f(A)$ entonces, en virtud del Teorema 6, $A_0'A' = \lambda_1A_0'A_1' + \ldots + \lambda_{n-1}A_0'A_{n-1}'$. Luego, $A' = A_n'$, de donde, por ser f una aplicación inyectiva en virtud del Teorema 1, habría de ser $A = A_n$ y, en consecuencia, A_0A_n sería un vector combinación lineal de los vectores $A_0A_1 \ldots A_0A_{n-1}$, contra lo supuesto.

Así, pues, $(A_0'\ A_0'A1' \ldots A_0'A_n')$ es un sistema de referencia de E, como queríamos demostrar.

Teorema 9

Si f es un movimiento sobre E entonces f es una afinidad biyectiva de E en E.

Demostración

f es una afinidad en virtud del Teorema 7 y es biyectiva en virtud del Teorema 1 y del Teorema 8.

Apéndice

Si E es un espacio afín asociado al espacio vectorial real R^n de dimensión finita igual a n y f es una aplicación de E en E entonces los enunciados siguientes son equivalentes dos a dos:

f es una afinidad sobre E.

Si $A\ B\ C\ D$ son puntos (cualesquiera) de E, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$, $\lambda\ \mu$ son escalares y $AD = \lambda AB + \mu AC$ entonces $A'D' = \lambda A'B' + \mu A'C'$.

Si $A\ B\ C\ D$ son puntos (cualesquiera) de E, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$, λf son escalares y $AD = \lambda AB + fAC$ entonces $AD' = AA' + \lambda A'B' + fA'C'$.

Si $A\ B\ C\ D$ son puntos (cualesquiera) de E, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$, $f(C) = C'$, $f(D) = D'$, $\lambda\ \mu$ son escalares, $\lambda + \mu = 1$ y $AD = \lambda AB + \mu AC$, entonces $AD' = \lambda AB' + \mu AC'$.

Si $(A_0\,A_0A_1 \ldots A_0A_n)$ es un sistema de referencia de E, $f(A_0) = A_0'$, $f(A_1) = A_1'$, ... , $f(A_n) = A_n'$, A es un punto (cualquiera) de E, $f(A) = A'$, $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ son escalares y $A_0A = \lambda_1A_0A_1 + \ldots + \lambda_nA_0A_n$ entonces $A_0'A' = \lambda_1A_0'A_1' + \ldots + \lambda_nA_0'A_n'$.

Si $(A_0\,A_0A_1 \ldots A_0A_n)$ es un sistema de referencia de E, $f(A_0) = A_0'$, $f(A_1) = A_1'$, ... , $f(A_n) = A_n'$, $f(A) = A'$, $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ son escalares y $A_0A = \lambda_1A_0A_1 + \ldots + \lambda_nA_0A_n$ entonces $A_0A' = A_0A_0' + \lambda_1A_0'A_1' + \ldots + \lambda_nA_0'A_n'$.

Si $(A_0\,A_0A_1 \ldots A_0A_n)$ es un sistema de referencia de E, $f(A_0) = A_0'$, $f(A_1) = A_1'$, ... , $f(A_n) = A_n'$, A es un punto (cualquiera) de E, $f(A) = A'$, $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ son escalares, $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$ y $A_0A = \lambda_1A_0A_1 + \ldots + \lambda_nA_0A_n$ entonces $A_0A' = \lambda_1A_0A_1' + \ldots + \lambda_nA_0A_n'$.

Si $(A_0\,A_0A_1 \ldots A_0A_n)$ es un sistema de referencia de E, $f(A_0) = A_0'$, $f(A_1) = A_1'$, ... , $f(A_n) = A_n'$, $a_1 \ldots a_n$ son escalares y para cada $j = 1, \ldots, n$, $a_{j1} \ldots a_{jn}$ son escalares tales que $A_0A_0' = a_1A_0A_1 + \ldots + a_nA_0A_n$ y $A_0A_j' = a_{j1}A_0A_1 + \ldots + a_{jn}A_0A_n$, A es un punto (cualquiera) de E, $f(A) = A'$, $x_1 \ldots x_n$ son escalares, $A_0A = x_1A_0A_1 + \ldots + x_nA_0A_n$, $x_1' \ldots x_n'$ son escalares y $A_0A' = x_1'A_0A_1 + \ldots + x_n'A_0A_n$ entonces

$$(x_1' \ldots x_n') = (a_1 \ldots a_n) + (x_1 \ldots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Así, pues, cualquiera de los referidos enunciados puede servir como definición de afinidad f sobre E.

Un problema de variable compleja

Emilio Defez Candel

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia
P.O. BOX 22.012. Valencia. Spain.
edefez@mat.upv.es

Abstract

In this note a solution of a complex variable problem established incorrectly in the J. Dieudonn's book "Cálculo infinitesimal" is given.

Introducción y preliminares

En [1] se encuentra planteado el siguiente problema (problema 8, pág. 235):

Si f es una función analítica en D *y si hacemos* F(x, y) = |f(x + iy)|², *demostrar que se tiene*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=4|f'(z)|^2. \tag{1}$$

Deducir que no existe ningún par de funciones analíticas no contantes f,g tales que

$$\Re(g(z)) = |f(z)| \tag{2}$$

En el planteamiento de este problema se encuentran algunos errores. Uno de ellos es tipográfico. En efecto, para aplicar la primera parte del problema a la resolución de la segunda, la ecuación (2) debe escribirse de la forma:

$$\Re(g(z)) = |f(z)|^2 \tag{3}$$

Hay otro error que no es tipográfico. Vamos a ver en esta nota que en la resolución completa de este problema es necesario considerar que el subconjunto $D \subset \mathbb{C}$ es *abierto conexo* y no simplemente abierto, como se supone en el enunciado del problema.

Necesitaremos recordar algunos resultados elementales de variable compleja, que resumimos a continuación. Identificaremos D tanto como subconjunto de $\mathbb{R}^2$ como subconjunto de $\mathbb{C}$.

Toda función compleja f (analítica o no) definida en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{C}$ puede escribirse en la forma:

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y), \tag{4}$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$, son dos funciones reales definidas en D e inversamente, para todo par de funciones reales definidas en un abierto D de $\mathbb{R}^2$, la fórmula (4) define una función compleja en D.

Teorema 1.1 (Identidades de Cauchy-Riemann)

Supongamos que f *es una función analítica en el conjunto abierto* $D \subset \mathbb{C}$ *(y así* f *puede escribirse como en (4). Entonces se verifican las siguientes identidades conocidas como identidades de Cauchy-Riemann:*

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y},\quad \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{\partial Q}{\partial x},\quad (x,y)\in D, \tag{5}$$

y entonces

$$f'(z_0)=\frac{\partial P}{\partial x}(x_0,y_0)+i\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0,y_0)=$$

$$=\frac{\partial Q}{\partial y}(x_0,y_0)-i\frac{\partial P}{\partial y}(x_0,y_0),\quad \forall z_0=x_0+iy_0\in D. \tag{6}$$

Recíprocamente, supongamos que las funciones P(x, y) *y* Q(x, y) *admiten derivadas parciales de primer orden continuas en el abierto* $D \subset \mathbb{C}$ *y que estas derivadas verifican en* D *las identidades (5), entonces la función* f *definida en* D *como*

$$f(x+iy) = P(x,y) + iQ(x,y),$$

es analítica en D.

Cuando las funciones reales $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ derivables continuamente verifican en D las condiciones de Cauchy-Riemann, se deduce del teorema 1.1 y del hecho de que una función analítica es derivable infinitamente que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son infinitamente derivables en D y que se tiene en particular, para la derivada primera:

$$f'(x+iy)=\frac{\partial P}{\partial x}(x,y)+i\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)=(-i)\left(\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)+i\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\right)$$

Como por otra parte f' es analítica, se siguen verificando las identidades (5) para las funciones

$$\frac{\partial P}{\partial x}(x,y) \text{ y } \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$$

(respectivamente $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ y $\frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)$), por lo que se verifica :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right),\quad (x,y)\in D.$$

y puesto que

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right),$$

se obtiene para $P(x, y)$ la ecuación:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y)=0,\quad (x,y)\in D. \tag{7}$$

Análogamente se obtiene para $Q(x, y)$:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}(x,y)=0,\quad (x,y)\in D, \tag{8}$$

por lo que $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son soluciones de la ecuación de Laplace en D.

2. Resolución del problema

Si escribimos la función f del enunciado de la forma (4) podemos escribir la función F de la forma:

$$F(x,y) = |f(x + iy)|^2 = P(x, y)^2 + Q(x, y)^2. \tag{9}$$

Dado que f es analítica, existen las parciales de las funciones P y Q de todos los órdenes y además se verifica (5). Calculemos el valor de $\partial^2F/\partial x^2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P(x,y)^2+Q(x,y)^2}{\partial x}\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(2P(x,y)\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+2Q(x,y)\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)=$$

$$=2\left\{\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right)^2+P(x,y)\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)^2+Q(x,y)\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial x^2}\right\}, \tag{10}$$

y de forma análoga:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\left\{\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)^2+P(x,y)\frac{\partial^2 P(x,y)}{\partial y^2}+\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)^2+Q(x,y)\frac{\partial^2 Q(x,y)}{\partial y^2}\right\}. \tag{11}$$

Sumando (10) y (11) y aplicando (7)-(8), se obtiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=2\left[\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial y}\right)^2\right]. \tag{12}$$

Aplicando (5) a esta última expresión, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=4\left[\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)^2\right]. \tag{13}$$

Ahora, por (6) se verifica que:

$$\left[\left(\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right)^2\right]=\left|\frac{\partial P(x,y)}{\partial x}+i\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\right|^2=|f'(x+iy)|^2, \tag{14}$$

de donde, por (13) y (14) se tiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=4|f'(x+iy)|^2=4|f'(z)|^2.$$

y de este modo la identidad (1) queda demostrada.

Veamos ahora la segunda parte del problema. Supongamos que existen funciones analíticas no constantes f, g tales que

$$\Re(g(z))=|f(z)|^2. \tag{15}$$

Si suponemos que g viene dada por (4) como:

$$g(x+iy)=P(x,y)+iQ(x,y), \tag{16}$$

entonces por (15) se tiene:

$$\Re(g(z))=P(x,y), \tag{17}$$

y aplicando ahora la primera parte del problema a $F(x, y)$ definida como $F(x, y) = |f(z)|^2$, se tiene:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=4|f'(z)|^2. \tag{18}$$

Pero P verifica (7), y por tanto de (18) se tiene

$$4|f'(z)|^2=0 \Rightarrow |f'(z)|=0 \Rightarrow |f'(z)|=0, \quad \forall z\in D. \tag{19}$$

El siguiente paso sería afirmar que $f(z)$ es constante, con lo que se tendría la contradicción buscada y resuelto el problema planteado. Sin embargo esta conclusión sería errónea. Vamos a dar un simple ejemplo de dos funciones f,g, analíticas no constantes en un abierto $D \subset \mathbb{C}$ tales que

$$\Re(g(z))=|f(z)|^2.$$

Consideremos $D = A \cup B$, donde A es el disco abierto de centro (0,0) y radio 1, $A = D(0,1)$ y B es el disco abierto de centro (3,0) y radio 1, $B = D(3,1)$. Es evidente que $A \cap B = \emptyset$, y por tanto D es abierto (no conexo) de $\mathbb{C}$.

Consideremos las funciones definidas en D por:

$$f(z)=\begin{cases}1+i, & z\in A\\ 1-i, & z\in B\end{cases}, \quad g(z)=\begin{cases}2, & z\in A\\ 2+i, & z\in B\end{cases}.$$

Las funciones f y g no son constantes en D, son constantes (y por tanto analíticas) en cada componente conexa de D, y por tanto son analíticas en D, y además

$$|f(z)|^2=2, \quad \Re(g(z))=2, \quad \forall z\in D,$$

por lo que verifican

$$\Re(g(z))=|f(z)|^2, \quad \forall z\in D.$$

Si en el enunciado del problema, sustituimos la hipótesis de que D es abierto por la de que D es abierto conexo, entonces (19) significa que $f(z)$ es constante en D, lo que contradice la hipótesis de que tanto f y g no son constantes y demuestra la inexistencia de estas funciones.

Referencias

[1] JEAN DIEUDONNÉ: *Cálculo infinitesimal,* Ediciones Omega S. A., 1971.

Nota de la redacción del Boletín: En el libro original francés (JEAN DIEUDONNÉ: *Calcul infinitésimal,* Hermann, Paris, 1968), aparece el problema, en la pág. 225, en la misma forma. El error señalado en el artículo no es, por tanto, imputable a la traducción española.

Reseña de libros y Sistemas de Matemática Computacional

P. SANZ; F. J. VÁZQUEZ; P. ORTEGA: *Problemas de Álgebra Lineal (Cuestiones, ejercicios y tratamiento en Derive),* Prentice Hall, 1998. Contiene 545 págs. y disquete adjunto.

Este libro consta de 7 capítulos en que se desarrollan los clásicos temas de Álgebra Lineal: espacios vectoriales, matrices y aplicaciones lineales, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales, autovalores y autovectores (diagonalización), formas cuadráticas y temas complementarios (forma canónica de Jordan, derivación matricial y generalización de la inversa de una matriz).

Cada capítulo incluye cuatro apartados: un primer apartado con cuestiones teórico-prácticas de tipo test, un segundo apartado dedicado a la resolución de problemas diversos, un tercer apartado en que se muestra cómo abordar y resolver con Derive ejercicios relativos al tema y, por último, una colección de problemas propuestos.

Contiene además tres apéndices: el primero de introducción al manejo de Derive, el segundo de equivalencia de nombres inglés-castellano de los comandos de Derive (actualmente coexisten ambas versiones) y el tercero sobre los archivos incluidos en el disquete adjunto al libro.

El libro termina con la relación de soluciones a los problemas propuestos en el cuarto apartado de cada uno de los capítulos.

Su enfoque es esencialmente práctico, desde dos puntos de vista. De una parte, orientado a proporcionar a los estudiantes de esta disciplina una colección de ejercicios cuidadosamente seleccionados, que ayuden a poner en práctica los conceptos adquiridos en la clase teórica. Y, de otra parte, permitiendo resolver los cálculos rutinarios e incómodos con ayuda del sistema de cómputo algebraico Derive.

La presentación del libro es excelente. Sus autores son profesores de la Universidad Autónoma de Madrid. Aunque el libro está, en principio, dirigido a estudiantes de Álgebra Lineal, también puede ser de gran utildad a todos aquellos interesados en automatizar cálculos relativos a esta disciplina.

E. Roanes M.

MAPLE V. RELEASE 5.

Recientemente ha aparecido la versión 5 del sistema Maple V. Este sistema de cálculo simbólico, desarrollado en la universidad canadiense de Waterloo y utilizado en todo el mundo, se caracteriza por su comodidad de manejo, con notación coincidente con la notación matemática usual.

La versión 5 contiene más de 2.500 funciones, que permiten automatizar casi todos los cálculos matemáticos imaginables: manipulación de expresiones polinómicas, representación de funciones en el plano y en el espacio, cálculo de límites, derivadas e integrales, cálculo matricial, resolución exacta (no aproximada) de ecuaciones y de sistemas lineales y no lineales, resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias y entre derivadas parciales, manipulación de objetos geométricos en dimensiones dos y tres...

En la versión 5 se han incorporado nuevos comandos y se han mejorado varios de los paquetes de que consta el sistema. También se han incorporado paletas de símbolos matemáticos, lo que lo hace aún más cómodo y agradable de manejar.

Su utilización es cada vez más general, habiendo sido adoptado con licencia de campus por muchas universidades de todo el mundo, entre ellas la Complutense y la Politécnica de Madrid.

Por otra parte, la incorporación de las hojas de trabajo o "worksheets", que facilitan el uso interactivo de este sistema informático de cálculo matemático, ha sido determinante para su difusión en el ámbito de la Educación Matemática a niveles universitario y de bachillerato.

En España y Portugal es distribuido por la casa de software científico Addlink, calle Rosellón 205, Barcelona-08008, tel. (93) 415 49 04, fax (93) 415 72 68, e-mail info@addlink.es, http://www.addlink.es

E. Roanes L.

VÍCTOR MANUEL SÁNCHEZ GONZÁLEZ (coordinador), MARCO CASTRILLÓN LÓPEZ, JOSÉ TOMÁS BAEZA OLIVA y DANIEL ALMAGRO MOLINA: *Matemáticas ocurrentes (Concurso Puig Adam),* Editorial Euler, col. "La Tortuga de Aquiles", núm. 13.

El Concurso de problemas que anualmente organiza la Sociedad de Profesores de Matemáticas Puig Adam se ha consolidado en nuestro país y en los últimos años ha adquirido proyección internacional al poder participar sus ganadores en la Olimpiada del Río de la Plata.

Los profesores de Matemáticas que llevamos algún tiempo preparando a nuestros estudiantes para este concurso, echábamos en falta un libro como éste. No solamente porque refleje exactamente los problemas allí planteados, sino porque era el eslabón que faltaba entre libros de problemas para una gran cantidad de alumnos, por ejemplo, los libros de problemas sobre los AHSME publicados por esta misma editorial, y los libros sobre problemas de Olimpiadas Internacionales, Olimpiadas Iberoamericanas o los libros de problemas de Ross Honsberger, de la M.A.A. que, ciertamente, son excesivamente complicados para todos nuestros estudiantes.

Todos los problemas están resueltos con detalle y si, en alguno de ellos, utiliza herramientas como el método de inducción, desconocidas por nuestros alumnos de hoy, la culpa, obviamente no hay que buscarla en los autores del libro sino, en todo caso, en la inoportunidad de esos problemas para nuestros actuales estudiantes.

Las diez últimas páginas del libro son un pequeño homenaje a los estudiantes ganadores del concurso así como a los centros de donde procedían.

Lo menos acertado del libro creo que es su título. En una portada en la que aparecen conceptos como "tesón", "cimientos", "creatividad" y que todos estamos de acuerdo en que un aprendizaje razonable de las Matemáticas debe fortalecerlos, el título, que parece querer resumirlos, "Matemáticas ocurrentes", parece, por el contrario, contradecirlos y podría confundir al lector pensando que los problemas que dentro aparecen son de los de "idea feliz" y nada más lejos de la realidad.

Joaquín Hernández Gómez

ROBERT M. YOUNG: *Excursions in Calculus (An interplay of the continuous and the discrete)*, Mathematical Association of America (Dolciani Mathematical Exposition núm. 13).

Una de las colecciones más interesantes de la Mathematical Association of America, la Dolciani; Mathematical Expositions, de la que han aparecido recensados en esta revista por el profesor Bellot algunos libros de problemas de Ross Honsberger, como uno de los últimos de la serie, From Erdos to Kiev, publicó hace unos tres años, *Excursions in Calculus,* un libro creo que poco conocido en nuestro país y del que, si se tiene acceso fácil a la ingente cantidad de bibliografía, fundamentalmente revistas, que cita como ayuda, se podrá disfrutar y sacar partido como a pocos.

El propósito de este libro es insistir en la relación que existe en las Matemáticas entre lo continuo y lo discreto. Cuestiones de la Matemática discreta como inducción, combinatoria, o teoría de números, son estudiadas desde la perspectiva del cálculo. El libro puede servir fundamentalmente a profesores de un primer curso de análisis como complemento al curso tradicional.

A lo largo de 417 páginas, desarrolla, en seis lecciones, temas que van desde el descenso infinito de Fermat hasta la suma de los inversos de los cuadrados por citar algunas.

Pero la parte central del libro la constituye la impresionante colección de problemas que trae. Si no cuento mal, 413 problemas, que cada uno constituye casi un trabajo de investigación y de los que se dan referencias absolutamente precisas. Muchas de estas referencias son fáciles de encontrar en las revistas que dispone, por ejemplo, la Facultad de Matemáticas de la UCM.

Afortunadamente, éste y muchos otros libros de la MAA ya no tenemos que pedirlos directamente a la editorial y podemos hojearlos antes de adquirirlos. En Madrid en ADI, Martín de los Heros 66, se puede encontrar la mayor colección de libros de Matemáticas que yo, al menos, he visto.

Joaquín Hernández Gómez

ANTONIO LEDESMA LÓPEZ (Colectivo Frontera de las Matemáticas): *IX Open Matemático.*

El libro es la memoria de la Octava Edición del Open Matemático, Torneo abierto de resolución de problemas que el Colectivo Frontera de las Matemáticas organiza anualmente en la comarca de Utiel-Requena.

En palabras de los autores en la introducción, el libro, resumen de esta interesante actividad de popularización de las Matemáticas, "...está dirigido a los alumnos, padres, profesores y a todas aquellas personas que disfrutan enfrentándose a rompecabezas, puzzles, juegos de ingenio, de estrategia o de azar, poniendo a prueba su capacidad de razonamiento y su inventiva, afrontando todo tipo de reto intelectual, en una palabra, resolviendo todo tipo de problemas".

María Gaspar Alonso-Vega

Problemas resueltos

Problema 2° (BOLETÍN N.° 37)

Sea O.XYZ un triedro trirrectángulo de vértice O y aristas X, Y, Z. Sobre la arista Z se fija un punto C, tal que sea OC = c . Sobre X e Y se toman, respectivamente, dos puntos variables, P y Q, de modo que la suma OP + OQ sea una constante dada, k. Para cada par de puntos P y Q, los cuatro puntos O, C, P y Q determinan una esfera, cuyo centro, W, se proyecta sobre el plano OXY. Razonar cuál es el lugar geométrico de esa proyección. Razonar también cuál es el lugar geométrico de W.

Solución:

La circunferencia determinada por los puntos O, P y Q pertenece a la esfera determinada por O, C, P y Q, y está incluida en el plano OXY. El centro de esta circunferencia, W', será la proyección del centro de la esfera, W, sobre OXY. En el plano OXY, las coordenadas de P y Q son, respectivamente (t, 0) y (0, k–t), con $0 \leq t \leq k$. Puesto que POQ es rectángulo en O, el centro de la circunferencia por O, P y Q (circunscrita) es el punto medio de PQ, de coordenadas $(t/2,(k-t)/2)$. Esta ecuación de parámetro t equivale a $2x + 2y - k = 0$, recta que pasa por $(k/2, 0)$ y $(0, k/2)$.

En el caso degenerado en que O coincide con P, el centro de la circunferencia se encuentra en la mediatriz de OQ contenida en el plano OXY. Cuando O coincida con Q, el lugar geométrico de W' es la mediatriz de OP contenida en OXY. Así pues, el lugar geométrico de la proyección de W sobre OXY es el segmento P'Q' más la recta paralela a OY por P', más la recta paralela a OX por Q' (donde P' y Q' están situados respectivamente sobre OX y OY tales que OP' = OQ' = k/2).

Para hallar el lugar geomtérico de W, consideramos que WO = WC. Dado que OC es perpendicular a OXY y que OC = c, el punto W se encuentra a distancia $c/2$ del plano OXY. Esto no depende de P y Q; la distancia de W a OXY es constante para cualesquiera P y Q. Por tanto, el lugar geométrico de W es la traslación del lugar geométrico de W' en la dirección de OC, de forma que WW' = $c/2$.

David Sevilla (Madrid)

Problema 3° (BOLETÍN N.° 37)

Una Oficina de Turismo va a realizar una encuesta sobre el número de días soleados y número de días lluviosos que se dan en el año. Para ello recurre a seis regiones, que le transmiten los datos de la tabla siguiente

Región	Soleados o lluviosos	Inclasificados
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encargada de la encuesta no es imparcial y tiene esos datos más detallados. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de esas regiones, la observación da un número de días lluviosos que es la tercera parte del de días soleados. Razonar cuál es la región de la que prescindió.

Solución:

Si tanto el número de días lluviosos como el de soleados son números naturales, entonces el número de días soleados es múltiplo de tres y la suma de éstos con los días lluviosos es múltiplo de cuatro. Puesto que la suma de las seis regiones es de la forma $4m + 2$ y la de las cinco buscadas es de la forma $4p$, la región suprimida debe tener una suma de la forma $4q + 2$. El único número que cumple esto es el 330, correspondiente a la región F, que es de la que prescindió.

David Sevilla (Madrid)

Problema 5° (BOLETÍN N.° 37)

Con 21 fichas de dama, unas blancas y el resto negras, se forma un rectángulo de 3 × 7. Demostrar que siempre hay cuatro fichas del mismo color situadas en los vértices de un rectángulo.

Solución:

Intentemos colocar siete columnas de tres fichas cada una, blancas o negras, sin formar rectángulos con vértices del mismo color. Consideremos dos casos: que haya alguna columna con tres fichas iguales o que no la haya.

Supongamos, por ejemplo, que hay una columna de tres fichas blancas (el razonamiento es válido también con fichas negras). Para no formar esos rectángulos, en ninguna de las otras seis columnas debe haber más de una ficha blanca. Entonces, las únicas columnas posibles son:

B	N	N	N
N	B	N	N
N	N	N	N

Pero de esta forma es seguro que al menos dos de las seis columnas serán iguales, formándose así vértices de rectángulos que tienen el mismo color.

Si, por el contrario, ninguna columna tiene tres fichas iguales, los tipos de columnas posibles son:

B	N	N	B	B	N
N	B	N	B	N	B
N	N	B	N	B	B

y es seguro que habrá dos columnas iguales, de forma que habrá cuatro fichas iguales que sean vértices de rectángulo.

Por tanto, en imposible construir un rectángulo de 3×7 sin formar rectángulos de vértices del mismo color.

David Sevilla (Madrid)

Problema 6° (BOLETÍN N.° 37)

Un polígono convexo de n lados se descompone en m triángulos, con interiores disjuntos, de modo que cada lado de esos triángulos lo es también de otro triángulo contiguo o del polígono dado.

Probar que $m + n$ es par. Conocidos n y m, hallar el número de lados distintos que quedan en el interior del polígono y el número de vértices distintos que quedan en ese interior.

Solución:

Si hay m triángulos, todos sus lados son $3m$. Por otra parte, de esta forma contamos dos veces los lados interiores, i, y sólo una vez los exteriores, n. Por tanto, $3m = 2i + n$; o sea:

$$i = \frac{3m-n}{2}.$$

Para que i sea entero, $3m$ y n deben tener la misma paridad. Puesto que $3m$ y m tienen igual paridad, también la tienen los números m y n. Es decir, son ambos pares o ambos impares. En los dos casos, $m + n$ es par.

Para hallar el número v de vértices interiores, consideraremos un poliedro convexo formado por dos mitades, ambas iguales al polígono dado y unidas entre sí por sus n lados. Según la fórmula de Euler, C + V = A + 2, donde C, V y A son los números de caras, vértices y caras del poliedro. Entonces:

C es el número de triángulos contados una vez en cada mitad.

V es la suma de vértices de cada mitad más los n de unión.

A es la suma de los lados interiores a cada mitad, más los n de unión.

Sustituyendo, queda:

$$(2m) + (n + 2v) = (n + 2i) + 2$$

o sea:

$$2v = m - n + 2$$

y en definitiva

$$v = \frac{m-n+2}{2}.$$

David Sevilla (Madrid)

Problema 6° (BOLETÍN N.° 41)

Sea p un número primo impar. Encuentre el número de subconjuntos A del conjunto $\{1, 2, ..., 2p\}$ tales que

(i) el número de elementos de A es p;

(ii) la suma de todos los elementos de A es divisible por p.

Solución:

Sea A un subconjunto de $\{1, 2, ..., 2p\}$ con p elementos. Sea $S(A)$ la suma de todos los elementos de A. Se tiene que:

$$\frac{p(p+1)}{2} = S(\{1, 2, ..., p\}) \le S(A)(\{p, p+1, ..., 2p\}) = \frac{p(p+1)}{2} + p^2$$

Como p es primo impar

$$\Rightarrow \frac{p(p+1)}{2}$$

es múltiplo de p. Por consiguiente $S(A)$ es múltiplo de

$$p \Leftrightarrow S(A) = \frac{p(p+1)}{2} + pk \qquad \forall k = 0, 1, 2, \ldots p$$

Existe

$$1 = \binom{n}{0}$$

subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ con p elementos, tal que la suma de todos sus elementos es

$$\frac{p(p+1)}{2};$$

dicho subconjunto es $\{1, 2, \ldots, p\}$.

Para $k = 1, 2, \ldots, p$ existen

$$\binom{n}{k}$$

subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ con p elementos, tal que la suma de todos sus elementos es

$$\frac{p(p+1)}{2} + pk.$$

Estos subconjuntos se obtienen sustituyendo k $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ elementos del subconjunto $\{1, 2, \ldots, p\}$ por $(p + i_1, p + i_2, \ldots, p + i_k)$.

Así pues, el número de subconjuntos A del conjunto $\{1, 2, \ldots, 2p\}$ que cumplen las condiciones (i) y (ii) del problema es:

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} = 2^p$$

Jesús Granda (Madrid)

Problema 3° (BOLETÍN N.° 44)

Sea $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ el conjunto de los enteros no negativos. Hallar todas las funciones f, definidas en S y que toman valores en S, tales que

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

cualesquiera que sean $m, n \in S$.

Solución:

$f(f(0)) = f(0 + f(0)) = f(f(0)) + f(0) \Rightarrow \mathbf{f(0) = 0}$
$\forall m \in S$: $f(m) = f(m + f(0)) = f(f(m)) + f(0) = f(f(m))$

- Si f es nula ($f(a) = 0\ \forall$ a $\in$ S) es obvio que cumple la condición
- Si f no es nula ($\exists a, b \in S / f(a) = b \neq 0$) $\Rightarrow$ f tiene un punto fijo no nulo:

$$f(b) = f(f(a)) = f(a) = b$$

Por otra parte es obvio (por inducción) que $f(pb) = pb\ \forall\ p \in S$.
Sea b el primer punto fijo no nulo de f y sea $r \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$
Si $f(r) = p_r b + q$ con $p_r \in S \quad q \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$ resulta que

$$p_r b + q = f(q + f(p_r b)) = f(q) + p_r b \Rightarrow f(q) = q \text{ Absurdo (el primer punto fijo es b)}$$

En consecuencia $f(r) = p_r b$ con $p_r \in S$. Así pues:

Si f es no nula y b es el primer punto fijo de f se tiene:

$f(0) = 0$; $f(r) = p_r b$ con $p_r \in S$, $r \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$; $f(b) = b$; y $\forall m \in S$ con $m > b$

o bien $\exists p \in S / m = pb\ f(m) = pb$
o bien $\exists p \in S / m = pb + r$, $r \in \{1, 2, \ldots, b-1\} \Rightarrow f(m) = f(r) + pb = (pr + p)b$

Jesús Granda (Madrid)

Problema 11° (BOLETÍN N.° 48)

Un polinomio $p(x)$ tiene coeficientes enteros, y para cierto entero a, se verifica que $p(a) = p(a + 1) = p(a + 2) = 1$.

¿Existe algún entero k tal que $p(k) = 8$?

Solución:

La respuesta es que no necesariamente.

Sea $p(x) = -x^4 + x^2 + 1$, polinomio de coeficientes enteros que cumple la hipótesis del enunciado para $a = -1$, es decir, $p(-1) = p(0) = p(1) = 1$.

La derivada de dicho polinomio es $p'(x) = -4x^3 + 2x$. Igualándola a cero y resolviendo queda:

$$-4x^3 + 2x = 0$$
$$2x(-2x^2 + 1) = 0$$

Entonces $x = 0$ ó $-2x^2 + 1 = 0$

Así pues la derivada se anula en

$$x = 0, \text{ en } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y en } x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Estudiando el crecimiento y decrecimiento del polinomio se llega a que la función crece en el intervalo

$$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

decrece en el intervalo

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right),$$

crece en el intervalo

$$\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

y decrece en el intervalo

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\right).$$

Luego el polinomio presenta en

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

un máximo relativo, en $x = 0$ un mínimo relativo y en

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

otro máximo relativo. En ningún caso el polinomio va a tomar un valor mayor que el máximo entre

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{4} \text{ y } f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{5}{4},$$

por lo que

$$p(x) \leq \frac{5}{4} \; \forall x \in \Re$$

y por supuesto no existe ningún k con $p(k) = 8$.

José Antonio Blázquez Hernández (Fuenlabrada)

Problema 13° (BOLETÍN N.° 48)

Se considera $f(x) = x^{1997} - x + 1$. Sea n un entero positivo mayor que 1.

Demostrar que, para todo número entero x, los números $f(x)$ y $f^n(x)$ son primos entre sí.

[$f^2(x) = f(f(x))$; $f^3(x) = f(f(f(x)))$, y en general $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(f(\ldots f(f(x))\ldots))$ n veces].

Solución:

Sea $f(x) = a$. Veamos que $f^n(x) = aP_n(x) + 1$ $\forall n \in N$ y $n \geq 2$.

Donde $P_n(x)$ es un polinomio en x.

Demostrémoslo por inducción matemática:
Si $n = 2, f^2(x) = a^{1997} - a + 1 = a(a^{1996} - 1) + 1 = aP_2(x) + 1$, luego se cumple.
Supongámoslo cierto para $n - 1$, es decir: $f^{n-1}(x) = aP_{n-1}(x) + 1$.
Veámoslo entonces para n:

$$f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = (aP_{n-1}(x) + 1)^{1997} - (aP_{n-1}(x) + 1) = aP_n(x) + 1 = f(x)P_n(x) + 1.$$

De donde se deduce que $f(x)$ y $f^n(x)$ son primos entre sí para todo x entero.

José Antonio Blázquez Hernández (Fuenlabrada)

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.°	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números 1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°	9.°	10.°	
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	–	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	–	–	–	–	–	–	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	–	–	–	–	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	–	–	–	–	–	–	–	–	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	–	–	–	–	–	–	–	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	–	–	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	–	–	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	–	–	–	–	–	–	–	–	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	–	–	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	–	–	–	–	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	46	XX	33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	–	–	–	–	–	–	
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	48	XX	XX	35	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	47	35	34	–	–	–	–	–	
32	OMI-92-MOSC'U/	35	48	XX	XX	XX	XX	38	35	46	38	
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	–	–	–	–	–	–	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	47	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	
	/PNS	47	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	–	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	–	–	–	–	
35	OMI-93-Turq./	XX	46	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	39	
	OI-93-Méjico/PNS	XX	XX	39	39	XX	XX	–	–	–	–	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	
37	OME-f2-94/PNS	41	49	49	41	49	49	45	45	41	–	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
39	OI-94-Brasil/OME-f1-94/f1-94(v)	43	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	
		46	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	–	–	–	–	
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
43	OME-f-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
44	OMI-96-India/	XX	XX	49	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	47	45	XX	XX	XX	–	–	–	–	
45	OI-96-Costa Rica	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	XX	XX	XX	
	OME-96-f1	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	–	–	
46	OMR-96	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
47	OMI-97-Argentina	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
48	OI-97-México	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	OMEf1-98	–	–	–	–	–	–	XX	XX	XX	XX	
		49	XX	49	XX	–	–	–	–	–	–	
	OMR-97	–	–	–	–	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
		XX	XX	XX	XX	XX	XX					

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = OI. Mat. Internac. OI = OI. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVIO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACION EN EL BOLETIN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente

Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4. Si se utiliza LATEX, el formato debe ser 17cm × 12,8 cm en 11 puntos (para ser aprovechado directamente en la imprenta).

Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el Boletín).

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además,si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el Boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo dos archivos:

a) archivo del documento para el procesador de texto utilizado.
b) archivo del documento en código ASCII

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.

Las figuras deben ser de buena calidad, ya que se captarán por escaneado.

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín (no al apartado, que ya no está operativo).

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen grauitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

35	38	39	40	41	42
☐	☐	☐	☐	☐	☐
43	44	45	46	47	48
☐	☐	☐	☐	☐	☐
49					
☐					

Envío adjuntos sellos para el franqueo (35 pts. por cada número del boletín).

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1 al 34, 36 y 37 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid
Tel. 394 62 48

OCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION

D. .... Teléf. (....) ....
Dirección particular ....
Ciudad .... Cod.° Postal ....
Centro de trabajo ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de la misma ....
para que cargue en la cuenta: .... / .... / .... / ..../.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1996-97 y siguientes.

Fecha .... de .... de 1997

Fdo.:

Aquellos centros que prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a la c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria CAJA DE MADRID, núm.: 2038/1076/72/6000589561.
La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (de ellas, 3.000 ptas. en concepto de cuota de la Sociedad "Puig Adam" y 2.000 pts. en concepto de cuota por la que se recibe la revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas). Remítanse ambas partes a
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517). Tel. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.

Fecha .... BANCO: ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de ésta ....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta: .... / .... / .... / ..../.
los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....
Nombre de la cuenta ....