



ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).  
Teléf.: 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura relativa a la "Comprobación de un Problema Olímpico con un Sistema de Geometría Dinámica", contenida en este número 48 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS  
Facultad de Educación (despacho 3517)  
Paseo Juan XXIII, s/n  
Ciudad Universitaria  
28040 - Madrid  
Telf. (91) 394 6248

## ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
Convocatoria de la Asamblea General .....	5
XVI Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas .....	6
XII Olimpiada Ibero-Americana de Matemática .....	8
XXXIV Olimpiada Matemática Española .....	10
Olimpiada Matemática en Argentina .....	12
II Concurso de Primavera de Matemáticas .....	14
Nota Informativa .....	14
Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik .....	15
Anuncios de Congresos de Educación Matemática .....	16
Sobre automatización de la reducción de matrices a su forma canónica de Jordan	
por <i>E. Roanes Macías</i> y <i>E. Roanes Lozano</i> .....	17
Ciclo de vida de la familia	
por <i>J. V. García Sestafe</i> y <i>M. E. Amo Saus</i> .....	41
Cálculo de la inversa de la matriz de Vandermonde	
por <i>E. Defez Candel</i> .....	51
Algunas aplicaciones de un teorema de Peano	
por <i>J. C. Cortés López</i> .....	60
Tendencias y repercusiones del Algebra actual	
por <i>C. Romo Santos</i> .....	67
Comprobación de un Problema Olímpico con un Sistema de Geometría Dinámica	
por <i>G. Catalina Hernansanz</i> .....	80
Reseña de libros .....	82
Problemas propuestos .....	83
Problemas resueltos .....	90
Índice de soluciones publicadas .....	93
Instrucciones para el envío de originales para su publicación en este Boletín	94
Como socio, deseo me envíen gratuitamente .....	95
Boletín de inscripción .....	96

## JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS (Madrid)  
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ (Castilla-León)  
SALVADOR HERRERO PALLARDO (Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)  
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE (Relaciones Institucionales)  
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)  
MARTÍN GARBAYO MORENO (Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

Adjunta a la presidencia:

MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

## Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 1998

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1998 para el día 18 de abril de 1998, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (edificio nuevo), Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente

### ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

!!Esperamos tu asistencia!!

# XVI Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

convocado por

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas  
y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras

## BASES

**Primera:** Podrán participar en el Concurso los alumnos de BUP, ESO y FP en tres niveles:

- a) Primer nivel: alumnos de 1º BUP, 3º ESO y FP I.
- b) Segundo nivel: alumnos de 2º BUP, 4º ESO y 1º de FP II.
- c) Tercer nivel: alumnos de 3º BUP, 1º Bachillerato y 2º y 3º de FP II.

**Segunda:** Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles) y se realizarán en Madrid, en un solo día, el sábado 20 de junio de 1998 a partir de las 10 horas.

**Tercera:** Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

**Cuarta:** Los Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del día 21 de Mayo de 1998, dirigiéndose por carta al presidente de nuestra sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela  
Departamento de Álgebra  
Facultad de Ciencias Matemáticas  
Ciudad Universitaria  
28040-Madrid

En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

**Quinta:** Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento

en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 1997-98.

**NOTA IMPORTANTE:** Los dos primeros clasificados de cada nivel están invitados a participar en la VII Olimpiada Rioplatense, que está previsto celebrar en diciembre de 1998 en Argentina. Ello en el supuesto de que se consigan becas para pagar los billetes hasta Buenos Aires. De la pasada edición de la Olimpiada Rioplatense se hace una reseña más adelante, en este mismo número del Boletín.

## XII Olimpiada Ibero-Americana de Matemáticas

México 1997

La XII Olimpiada Ibero-americana de Matemática se celebró en la ciudad de Guadalajara (Jalisco - México), en los días 10 al 21 de Septiembre de 1997, y como en el año precedente, a continuación del Simposio Iberoamericano de Matemáticas en Educación Media y de la Reunión Anual del SIPROMA (Sociedad Iberoamericana para la Promoción de la Matemática).

La delegación española estaba compuesta por su jefe, prof. Francisco Bellot Rosado, (que nos ha facilitado amablemente estos datos), el jefe adjunto, prof. Miguel Amengual Covas y los cuatro estudiantes citados más adelante.

Los estudiantes participantes quedaron alojados en las excelentes instalaciones del Hotel Villa Primavera, de la Universidad de Guadalajara, situado a 25 km de la ciudad.

Las pruebas de la Olimpiada se realizaron los días 16 y 17 de Septiembre y el 18 se realizó una competición por equipos formados por cuatro estudiantes de países diferentes, elegidos por sorteo.

Se propusieron, como de costumbre, seis problemas, cuyos enunciados pueden verse en la sección de **PROBLEMAS PROPUESTOS** de este Boletín, para resolverlos en dos sesiones, de cuatro horas y media cada una. Entre los problemas propuestos al Jurado Internacional, figuraban varios procedentes del I Concurso de Problemas de SIPROMA.

Cada problema fue calificado con una puntuación de 0 a 7, como en la Internacional, por lo que cada alumno podía obtener un máximo de 42 puntos. Se acordó conceder 7 medallas de oro (a partir de 36 puntos), 9 de plata (entre 28 y 35) y 15 de bronce (entre 19 y 27).

Entre los cuatro estudiantes españoles figuraba **Sergi ELIZALDE** que ya participó brillantemente en la anterior Ibero-americana, pero todavía cumplía los requisitos reglamentarios para concurrir a ella. Los otros tres fueron escogidos por haber conseguido medalla de oro en la última Olimpiada Matemática Española y haber obtenido notables puntuaciones en la XXXVIII Olimpiada Internacional de Matemáticas. Los cuatro han merecido medallas, con las puntuaciones siguientes:

**Sergi ELIZALDE TORRENT:** 34 puntos. **MEDALLA DE PLATA**

De Barcelona. Fue el primero en la XXXII O.M.E. (1996), obtuvo Mención Honorífica en la XXXVII O.Internacional y medalla de bronce en la XI O.Ibero-Americana (1996) y consiguió la máxima puntuación en la XXXIII O.M.E.(1997).

**Xavier PÉREZ GIMÉNEZ.** 26 puntos. **MEDALLA DE BRONCE**

De Cataluña. Fue sexto en la XXXIII O.M.E. (1997).

**Miguel LOBO LÓPEZ.** 24 puntos. **MEDALLA DE BRONCE**

De Jaén. Fue segundo en la XXXIII O.M.E. (1997).

**Mario ANDRÉS MONTES.** 24 puntos. **MEDALLA DE BRONCE**

De Salamanca. Fue tercero en la XXXIII O.M.E.(1997).

La Copa Puerto Rico, que premia al país con mayor progresión en los dos últimos años, fue ganada por Brasil. España quedó en tercer lugar.

En el Concurso por Equipos, el de Xavier Pérez Giménez recibió el primer premio y el de Mario Andrés Montes, el segundo.

En la sesión de clausura, se hizo público el fallo del "I Concurso de Creación de Problemas de SIPROMA" (Ver nuestro Boletín nº 45, pág. 22). El tercer premio fue adjudicado al español **Cristóbal Sánchez Rubio, de Castellón de la Plana.**

La próxima Olimpiada Iberoamericana (XIII), tendrá lugar en la República Dominicana, en Septiembre de 1998.

# XXXIV Olimpiada Matemática Española

## Primera fase - Madrid

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la "XXXIV Olimpiada Matemática Española" correspondientes al curso 1997-98 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 16 y 17 de Enero de 1998.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española*, bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio*. Podían participar en ella los alumnos matriculados en COU, primero o segundo curso del bachillerato LOGSE en el último de Formación Profesional de segundo grado o en tercero de BUP. Excepcionalmente, otros de cursos inferiores, si son avalados por sus profesores.

Como es sabido, esta Olimpiada se desarrolla en dos fases: la Primera tiene lugar en los distintos distritos; este año, tres de ellos corresponden a la Comunidad de Madrid, que cuenta con cinco Universidades estatales, además de las privadas; los tres ganadores de cada distrito son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio, a través de la R. S. M. E., para la concesión de un premio en metálico (este año, de 50.000, 35.000 y 25.000 pesetas para los tres ganadores de cada Distrito) y son invitados a participar en la Segunda Fase. Los mejores clasificados en ésta, además de recibir los premios correspondientes, podrán integrarse en los equipos que representarán a España en las próximas olimpiadas internacionales.

La mencionada Segunda Fase se realizará en **Tarazona (Zaragoza)** los días 12 al 15 de Marzo de 1998.

Como de costumbre, las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de cuatro horas de duración cada una, en las que se propusieron ocho problemas, cuyos enunciados damos a continuación de esta crónica. Estos problemas son los mismos que se propusieron simultáneamente en la mayor parte de los distritos españoles. Las pruebas de los tres distritos que corresponden este año a todas las Universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurren 175 alumnos de los 199 inscritos, muchos más que en años anteriores.

Cada problema se calificó con un máximo de **10 puntos**, por lo que había una posibilidad teórica de obtener **80 puntos**. Al igual que otros años, el nivel medio de preparación de los asistentes fue bastante bajo, debido a la presencia de un buen número de alumnos que mostraron desconocer lo que son unas pruebas olímpicas, no consiguiendo ni un solo punto en los ocho problemas. Unos pocos, no obstante, destacaron claramente sobre ese nivel medio.

Damos a continuación los nombres de los alumnos premiados en los distritos de Madrid A, B y C, ordenados por puntuaciones decrecientes:

1° A	D. José Luis RUBIO GUIVERNAU, del COU del Colegio San Patricio del Soto (Madrid) .....	55 puntos
1° B	D. Nelo Alberto MAESTRE BLANCO, del COU Colegio Retamar, de Madrid .....	41 puntos
1° C	D. Alvaro NAVARRO TOVAR, de 3° de B.U.P. del Colegio del Prado de Madrid .....	39 puntos
2° A	D. Pedro JIMÉNEZ MOLINA, del COU del IES Ignacio Ellacuría de Alcalá de Henares .....	35 puntos
2° B	D. Iñaki ARMENDÁRIZ BENÍTEZ, del COU del IES Avenida de los Toreros de Madrid .....	34 puntos
2° C	D. Borja GUARDIOLA DEL CORRAL, del COU del Colegio del Prado de Madrid .....	30 puntos
3° A	D. Carlos Jesús HUERTA VILLEGAS, del COU del Colegio JOYFE de Madrid .....	29 puntos
3° B	D. Manuel AMOSA DELGADO, de 3° de BUP del IES Arq° Pedro Gumiel de Alcalá de Henares .....	27 puntos
3° C	Dña. Beatriz SANZ MERINO, de 3° de BUP del Colegio San Viator de Madrid .....	26 puntos

Debemos señalar en primer lugar la presencia entre ellos de tres alumnos de 3° de BUP. También es muy notable el hecho de que la mayor parte de los premiados lo fueron antes en el **Concurso de Resolución de Problemas** de nuestra Sociedad, en la última convocatoria y en las anteriores, lo que confirma una vez más el excelente papel de este concurso como estímulo y como preparación para las Olimpiadas.

De estos alumnos premiados, D. Nelo Alberto Maestre Blanco, participó en nuestro Concurso y fue 4° del segundo nivel en 1996 y 1° del tercero en 1997. D. Álvaro Navarro Tovar, de 3° de B.U.P. fue 3° del primer nivel en 1996 y 1° del segundo en 1997. D. Iñaki Armendáriz Benítez fue 1° del primer nivel en 1995, 1° del segundo nivel en 1996 y 2° del tercer nivel en 1997. D. Borja Guardiola del Corral fue 2° del primer nivel en 1995, 2° del segundo en 1996 y 3° del tercero en 1997. Dña. Beatriz Sanz Merino fue 2ª del segundo nivel en 1997. Se confirma así que el éxito de estos alumnos es fruto de una prolongada labor.

También este año puede comprobarse que los Centros de procedencia de los alumnos premiados son, en su mayoría, los mismos que en los anteriores, lo que es prueba de que en ellos se realiza una encomiable labor de estímulo y preparación. Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

Los problemas propuestos resultaron en general difíciles para los alumnos. De los 175 presentados, 106 no llegaron a alcanzar los 4 puntos (de los 80 posibles). No aparecieron soluciones aceptables del problema 4°. Sólo dos alumnos encontraron la solución del 5°. La primera parte del problema 8° resultó muy fácil, pero la segunda parte sólo la hicieron cuatro. Damos a continuación las puntuaciones medias alcanzadas (sobre un máximo de 10 puntos) en cada uno de los problemas por TODOS los participantes y por los 9 PREMIADOS, así como el número de alumnos que obtuvieron soluciones calificadas de 8 a 10, que consideramos ACEPTABLES:

Problema núm	1	2	3	4	5	6	7	8
TODOS	0,8	1,2	0,5	0,1	0,2	0,9	0,5	1,5
PREMIADOS	2,4	6,9	6,0	0,4	3,4	5,1	4,6	6,1
ACEPTABLES	4	16	6	0	2	14	4	4

Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

En la sección de Problemas Propuestos de este mismo número del Boletín, damos los enunciados de estos problemas.

## Olimpiada Matemática en Argentina

El pasado 5 de diciembre a las 23.00 horas partíamos hacia Argentina para participar en la VI Olimpiada Matemática Rioplatense (OMR). El equipo español lo formaban Roberto Rubio Núñez (IES Font Sant Lluís, 1º clasificado de 1º de BUP), Álvaro Navarro Tovar (Colegio El Prado, 1º clasificado de 2º de BUP), Beatriz Sanz Merino (Colegio San Viator, 2º clasificada de 2º de BUP), Nelo Alberto Maestre Blanco (Colegio Retamar, 1º clasificado de 3º de BUP) y como profesor acompañante Alberto Fernández-Pinilla Chamizo.

Atrás quedaban muchas gestiones dirigidas a conseguir dinero para los billetes de avión. Queremos agradecer muy sinceramente la colaboración de los Ayuntamientos de Valencia, Fuenlabrada y Tres Cantos, y de la Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas.

En el aeropuerto de Buenos Aires nos recibieron nuestros compañeros argentinos y empezaron a dispensarnos todas sus atenciones. Enseguida nos dimos cuenta de que las cosas funcionaban de una forma muy distinta a la que estábamos acostumbrados en España.

Nos presentaron a varios voluntarios, alumnos ex-olímpicos, que se ofrecieron a enseñarnos la ciudad, a contestar todas nuestras dudas y a solucionar los problemas que se presentaban. Después conocimos al equipo argentino. Estaba formado por doce chicos que llevaban una semana "concentrados" en una casa, preparando los exámenes. (En la OMR hay cuatro niveles y participan tres chicos de cada país por nivel. Con lo cual, a los españoles, nos faltaban ocho chicos).

El ambiente se fue haciendo cada vez mejor, aumentando el trato y la amistad entre los alumnos.

Antes de los exámenes propios de Olimpiada se realizaron diversos concursos por equipos en los que los chicos disfrutaron enormemente: Concurso de medida, Casino de matemáticas, Matemáticas con ordenador...

Los exámenes de la OMR se realizaron en dos mañanas. Me llamó muchísimo la atención la seriedad del jurado: ni los chicos, ni los profesores, hablan con ellos. Viven en un hotel distinto. Las posibles dudas en el examen, se formulan y responden por escrito...

Otro detalle llamativo fue que durante el examen les ofrecieron una botella de agua y algo ligero para comer.

En la entrega de premios dos cadenas de televisión, varias de radio y prensa escrita estuvieron presentes y nos realizaron varias entrevistas.

Sólo pudimos conseguir una medalla de bronce, la de Roberto Rubio.

Hablando con los chicos notaba cómo iban cambiando y cómo cada vez se sentían más comprometidos con las matemáticas. Querían ser monitores y ayudar a otros chicos a preparar los diversos concursos (muy pocos) que se realizan en España. Surgió la idea de crear una asociación de jóvenes científicos que pudieran gestionar, entre otras actividades, la consecución de más becas para poder realizar estas fases finales en otros países.

La despedida fue dolorosa, costaba dejar a la gente. Nos agradecieron (¡qué contradicción!, éramos nosotros los que debíamos dar gracias) el que hubiéramos viajado para participar.

Muchos chicos han seguido en contacto por correo ordinario y correo electrónico y en todas las comunicaciones hay un mensaje común: ¡Tenemos que volver a vernos!

\* María Gaspar me acaba de comunicar que Álvaro (3º BUP), Beatriz (3º BUP) y Nelo (COU) participarán en la fase nacional de la XXXIV OME. ¿No merece la pena?

**Alberto Fernández-Pinilla**

## II Concurso de Primavera de Matemáticas

Ya está en marcha el II Concurso de Primavera. Todos los profesores de Matemáticas de la Comunidad de Madrid, tanto de Primaria como de Secundaria y tanto de la Enseñanza Pública como Privada, habrán recibido ya en sus centros las bases de la convocatoria y una importante cantidad de ejercicios análogos a los que se propondrán en el Concurso, que podrán trabajar con sus alumnos si lo estiman conveniente. La primera fase tendrá lugar en cada uno de los Centros participantes el miércoles 4 de marzo. La segunda, en la Facultad de Educación, el sábado 25 de abril.

Como novedades respecto del año anterior, en este año –en el que hemos contado con la ayuda inestimable de la Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid– habrá tres niveles de participación y podrán asistir los alumnos de 1º de Bachillerato LOGSE o 3º de BUP, o equivalente.

Esperamos que el concurso que tantas esperanzas levantó en su primer año siga en esa línea de participación.

**Comité Organizador del Concurso de Primavera**

### Nota Informativa

Durante el primer trimestre del curso actual se han celebrado dos seminarios sobre actividades directamente relacionadas con la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria, convocados por la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y organizados por diversas sociedades de profesores.

El primero de ellos se celebró en Jaca durante los días 16, 17 y 18 de octubre, organizado por la Sociedad Aragonesa de Profesores de Matemáticas y versó sobre el tema "Estudio de los nuevos Bachilleratos y su coordinación con los nuevos planes de la Universidad".

El segundo, que trató sobre la "Implantación de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria: un análisis en el contexto internacional", tuvo lugar en El Escorial durante los días 27, 28 y 29 de noviembre, y lo organizó la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo.

En ambos seminarios hubo representación de todas las sociedades de profesores de Matemáticas del Estado español. La Sociedad Puig Adam estuvo representada por nuestro bibliotecario, Joaquín Hernández Gómez.

En el número de Suma correspondiente a febrero 98, que saldrá a la luz en los próximos días, aparecen informes muy completos de cada uno de ellos. Como todos nuestros socios reciben dicha revista y puesto que la reseña que aparecerá es muy exhaustiva, hemos creído conveniente limitarnos a citar en este número la celebración de dichos seminarios y remitir a la próxima "Suma" para un análisis de los mismos.

## Recensiones en Zentralblatt Für Didaktik der Mathematik

Como ya indicamos en números anteriores de nuestro Boletín, la dirección de Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

### RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 29 (4) DE 1997

- #2314 (sección G44). Una demostración del teorema de Tales, por R. Moreno Castillo, Bol. Soc. Puig Adam 45 (1997), págs. 54-55.
- #2343 (sección H30). Solución de algunas ecuaciones diofánticas por métodos elementales, por J.B. Romero Márquez, Bol. Soc. Puig Adam 45 (1997), págs. 56-65.
- #2388 (sección I70). Cálculo de integrales particulares de una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes trigonométricos, por A. Marlewski, S. Rawicki, E. Roanes Lozano y E. Roanes Macías, Bol. Soc. Puig Adam 45 (1997), págs. 42-53.
- #2497 (sección N30). Un algoritmo nuevo para una aplicación conocida, por L. Klingen, Bol. Soc. Puig Adam 45 (1997), págs. 28-41.

### RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 29 (5) DE 1997

- #2566 (sección A30). La Historia de la Matemática como recurso didáctico, por Mariano Martínez Pérez, Bol. Soc. Puig Adam 46 (1997), págs. 30-44.
- #3146 (sección G40). El geoplano áureo, por José Angel Dorta Díaz, Bol. Soc. Puig Adam 46 (1997), págs. 45-70.
- #3509 (sección M64). Una aplicación de DERIVE a la clase de Matemáticas, por Justo Cabezas Corchero, Bol. Soc. Puig Adam 46 (1997), págs. 71-78.

Copias de estas recensiones se encuentran en la Sede de Nuestra Sociedad, a disposición de los interesados.

## Anuncios de Congresos de Educación Matemática

### CONFERENCIA INTERNACIONAL DE LA ENSEÑANZA MATEMÁTICA

Samos (Grecia), 3-6 julio 1998

Universidad del Egeo, Universidad Capital,  
Universidad de Arizona, Universidad Estatal de Ohio

*Objetivo:* El objetivo de esta Conferencia Internacional es examinar nuevos métodos en la enseñanza de las matemáticas en las Universidades. Esta conferencia reunirá a miembros de facultades de diferentes países, que están comprometidos en la introducción y uso de métodos innovadores de enseñanza. La Conferencia será de gran interés tanto para profesores universitarios como para cualquier persona interesada en la enseñanza de las matemáticas y sus procesos de aprendizaje.

#### Temas:

1. Efectiva integración de la tecnología de los ordenadores, calculadoras. Sistemas de álgebra computarizada, WWW, fuentes de Internet, dentro de los planes de estudio de las matemáticas en las Universidades.
2. Métodos innovadores para la enseñanza de las matemáticas: Enseñanza cooperativa y estilos de aprendizaje.
3. Reformar temas relacionados con el cálculo y otros contenidos matemáticos. Valoración de los movimientos actuales de reforma y direcciones futuras.
4. Tecnologías para la enseñanza y el aprendizaje a distancia de las matemáticas. Actual distribución de hardware/software, material educativo, visión de futuro.
5. Aprendizaje de las matemáticas (métodos de investigación y valoración alternativa).
6. Efectos de los cambios en la enseñanza de las matemáticas en otras disciplinas.

Para más información contactar con:

JOSE RAMON VIZMANOS

IES "SANTAMARCA"

c/. Puerto Rico, 36

28028 MADRID

E-mail: jrvizmanos@riglesias.es

Los usuarios de Internet pueden consultar la página:

<http://icg.fas.harvard.edu/samos98/>

donde figura conferenciantes, Comité Internacional, talleres, inscripción, etc.

### Sobre automatización de la reducción de matrices a su forma canónica de Jordan

E. Roanes Macías \* y E. Roanes Lozano †

Dpto. de Álgebra, Fac. de Educación, Univ. Complutense

#### Abstract

Computer Algebra Systems can be excellent tools to calculate the Jordan canonical form of a matrix. Some of these systems contain commands which can automate such calculations (when they are able to solve the characteristic equation of the matrix). In this paper we describe a package that we have developed to calculate the Jordan canonical form. It has the following possibilities:

- i) calculate the Jordan canonical form when the eigenvalues have been previously calculated
- ii) show its calculation step by step (for didactic purposes)
- iii) choose the order of the Jordan blocks
- iv) obtain a simpler change matrix, by choosing some of its elements.

#### Introducción

El cálculo de la reducida de Jordan de una matriz requiere un proceso laborioso, que se presta a ser automatizado. Por ello, algunos Sistema de Cómputo Algebraico disponen de comandos que calculan la reducida de Jordan y para otros se han elaborado programas que automatizan dicho cálculo (caso de [4]). Precisamente la lectura de [4] motivó el presente trabajo.

Ahora bien, el uso de los referidos comandos presenta ciertos inconvenientes, entre otros: sólo son operativos si pueden resolver la ecuación característica, no permiten elegir el orden de las cajas de Jordan y no determinan la matriz de paso más sencilla. En este artículo se trata sobre cómo paliar esos inconvenientes, describiendo el desarrollo de un paquete que permite:

- obtener la reducida de Jordan cuando previamente se han calculado los autovalores
- justificar su cálculo, paso a paso, con fines didácticos
- elegir el orden de los bloques de Jordan
- ajustar la matriz de paso, eligiendo algunos de sus elementos

También se trata sobre la aplicación de la reducida de Jordan de una matriz al cálculo de su inversa. Comenzamos recordando el proceso de reducción de una matriz a su forma canónica de Jordan, lo que nos da ocasión a introducir la notación utilizada (que suele variar, según el autor). Por brevedad, se omiten las demostraciones, que pueden encontrarse en tratados de Álgebra Lineal o de Teoría de Matrices (en [6], por ejemplo, se presentan demostraciones breves y elegantes).

\* e-mail: roanes@eucmos.sim.ucm.es

† e-mail: eroanes@eucmos.sim.ucm.es

## 0 Planteamiento del problema

Dado un endomorfismo,  $f$ , del espacio vectorial  $V$  sobre el cuerpo  $K$ , se trata de determinar una base de  $V$  respecto de la cual la matriz de  $f$  sea lo más sencilla posible y única (determinada de modo único por  $f$ ). Ello se consigue determinando subespacios de  $V$  que sean invariantes por  $f$ , cuyas dimensiones sean lo más pequeñas posible y cuya suma directa sea  $V$ .

Supongamos que  $W_1, \dots, W_r$  son subespacios invariantes por  $f$  (esto es, que verifiquen  $f(W_i) \subseteq W_i$ ) y tales que  $W_1 \oplus \dots \oplus W_r = V$ . Si la restricción de  $f$  al subespacio  $W_i$ , respecto de una base  $B_i$  de  $W_i$ , tiene por matriz  $A_i$ ;  $i = 1, \dots, r$ , entonces la matriz de  $f$  respecto de la base  $\cup B_i$  de  $V$  es obviamente la matriz diagonal por cajas

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & A_i & & \\ & & & \dots & \\ & & & & A_r \end{pmatrix}$$

El problema esencial consiste en elegir las bases  $B_i$  de modo que las submatrices  $A_i$ ;  $i = 1, \dots, r$  sean lo más sencillas posible.

## 1 Autovalores y autovectores

Si para un vector no nulo  $w \in V$  y para un elemento  $\lambda \in K$  se verifica

$$f(w) = \lambda w \quad (1)$$

entonces se dice que  $w$  es un *autovector* y  $\lambda$  un *autovalor* de  $f$  (o, en lenguaje clásico, que  $w$  es un *vector propio* y  $\lambda$  un *valor propio* de  $f$ ). Por tanto, si  $w$  es un autovector, entonces el subespacio generado por  $w$  es un subespacio invariante de dimensión uno.

De acuerdo con (1), si  $w$  es un autovector cuyo autovalor es  $\lambda$ , entonces  $(f - \lambda \cdot Id)(w) = 0$ , donde  $Id$  es el automorfismo identidad. En consecuencia, los autovectores correspondientes al autovalor  $\lambda_i$  son los vectores no nulos de la variedad lineal  $\ker(f - \lambda \cdot Id)$ . Por tanto, si  $A$  es la matriz de  $f$  y  $m = \dim V$ , entonces los autovectores de  $f$  correspondientes a un autovalor,  $\lambda$ , son las soluciones (no nulas) del sistema lineal homogéneo

$$(A - \lambda \cdot I_m)(x_1, \dots, x_m)^t = (0, \dots, 0)^t \quad (2)$$

donde  $(x_1, \dots, x_m)$  es la matriz de coordenadas de  $w$ ,  $(x_1, \dots, x_m)^t$  su traspuesta, e  $I_m$  la matriz unidad de orden  $m$ . La condición de compatibilidad del sistema (2), viene dada por la ecuación

$$\det(x \cdot I_m - A) = 0 \quad (3)$$

cuyas soluciones son los autovalores de  $f$ . Se demuestra que el polinomio primer miembro de la ecuación (3) sólo depende de  $f$ , pero no de la base de  $V$  considerada.

La ecuación (3) se denomina *ecuación característica* de  $f$ , el polinomio  $\det(x \cdot I_m - A)$  se llama *polinomio característico* de  $f$  y la matriz  $x \cdot I_m - A$  se llama *matriz característica*.

Los coeficientes del polinomio característico sólo dependen de  $f$  (no de la base de  $V$  elegida). En particular  $\det(A)$  y la traza de  $A$  sólo dependen de  $f$ .

## 2 Caso diagonalizable

Si el polinomio característico tiene todas sus raíces  $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  en el cuerpo base  $K$ , entonces puede factorizarse en la forma

$$\det(x \cdot I_m - A) = (x - \lambda_1)^{m_1} \dots (x - \lambda_r)^{m_r}$$

siendo  $m_1 + \dots + m_r = m (= \dim V)$ .

Los autovectores de  $f$  correspondientes a un autovalor,  $\lambda_j$ , junto con el vector nulo, forman una variedad lineal de  $V$ , por ser las soluciones del sistema (2). La notaremos  $U_j$ , es decir,

$$U_j = \ker(f - \lambda_j \cdot Id); \quad j = 1, \dots, r$$

Se demuestra que las dimensiones de estos subespacios no superan a las respectivas multiplicidades de los autovalores, es decir,

$$\dim U_j \leq m_j; \quad j = 1, \dots, r$$

Y en caso de alcanzarse todas estas igualdades

$$\dim U_j = m_j; \quad j = 1, \dots, r \quad (4)$$

se demuestra que se tiene  $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$ . luego  $V$  admite una base formada exclusivamente por autovectores, y en consecuencia la matriz de  $f$ , respecto de dicha base, es la matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \dots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \lambda_r \\ & & & & & \dots \\ & & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Recíprocamente, si existe una base de  $V$  respecto de la cual la matriz de  $f$  es diagonal, entonces dicha base estará formada por autovectores, luego se verifica (4).

Un endomorfismo (o su matriz) se dice *diagonalizable*, si existe una base de  $V$  respecto de la cual su matriz es diagonal. En consecuencia,  $f$  es diagonalizable si se verifica (4). En particular, si el número de autovalores de  $f$  es igual a  $\dim V$ , entonces  $f$  es diagonalizable.

En conclusión, si  $f$  es diagonalizable, entonces  $V$  admite una base formada por autovectores y cada uno de los vectores de dicha base genera un subespacio de dimensión 1, pudiendo estos subespacios ser considerados como los subespacios invariantes  $W_i$ , que nos proponíamos encontrar en el apartado 0.

## 3 Subespacios nulos relativos a un autovalor

Si, por el contrario,  $f$  no es diagonalizable, entonces hay que considerar subespacios invariantes  $W_i$  de dimensión mayor que los  $U_i$ .

En adelante, por comodidad de notación y mientras no se indique lo contrario, designaremos por  $\lambda$  a un autovalor genérico de  $f$  (que puede ser cualquiera de entre ellos:  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ). Para el autovalor  $\lambda$ , denotaremos por  $\bar{f}$  al endomorfismo de  $V$

$$\bar{f} = f - \lambda \cdot Id$$

y notaremos  $N_j$  al núcleo o subespacio nulo del endomorfismo  $\tilde{f}^j$ , es decir,

$$N_j = \ker(\tilde{f}^j) = \ker(f - \lambda \cdot Id)^j ; j = 1, 2, \dots$$

En particular,  $N_0 = 0$ .

Los subespacios nulos  $N_j$  resultan ser invariantes por  $f$  y verifican

$$\tilde{f}(N_j) \subset N_{j-1}; s = 1, 2, \dots, s \quad (5)$$

Además, la sucesión de estos subespacios nulos resulta ser estrictamente creciente hasta que se estabiliza, es decir, verifica

$$0 \subsetneq N_1 \subsetneq N_2 \subsetneq \dots \subsetneq N_j \subsetneq N_{j+1} \subsetneq \dots \subsetneq N_s = N_{s+1} = N_{s+2} = \dots \quad (6)$$

Al subespacio  $N_s$ , en que se estabiliza la sucesión de subespacios nulos relativos al autovalor  $\lambda$ , lo notaremos  $N(\lambda)$ .

Se demuestra que esta estabilización es alcanzada cuando la dimensión del subespacio nulo llega a ser igual a la multiplicidad del autovalor, es decir

$$\dim N(\lambda) = \text{mult}(\lambda)$$

#### 4 Partición de la multiplicidad de un autovalor

Las inclusiones estrictas (6) invitan a considerar la descomposición siguiente de  $N(\lambda)$

$$N(\lambda) = (N_s/N_{s-1}) \oplus (N_{s-1}/N_{s-2}) \oplus \dots \oplus (N_j/N_{j-1}) \oplus \dots \oplus (N_2/N_1) \oplus (N_1/N_0) \quad (7)$$

Ahora bien, si  $w_1, \dots, w_t \in N_j$  son l.i. (linealmente independientes) como vectores de  $N_j/N_{j-1}$ , entonces  $\tilde{f}(w_1), \dots, \tilde{f}(w_t)$  resultan ser también l.i. como vectores de  $N_{j-1}/N_{j-2}$ , luego

$$\dim(N_j/N_{j-1}) \geq \dim(N_{j+1}/N_j) ; j = 1, 2, \dots, s$$

Por tanto, notando

$$p_j = \dim(N_j/N_{j-1}) = \dim N_j - \dim N_{j-1}$$

resulta

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_j \geq p_{j+1} \geq \dots \geq p_s > 0 \quad (8)$$

y, de acuerdo con (7), se tiene

$$p_1 + p_2 + \dots + p_j + p_{j+1} + \dots + p_s = \dim N(\lambda) = \text{mult}(\lambda) \quad (9)$$

lo cual, se expresa diciendo que los números  $p_j$  determinan la *partición de la multiplicidad* del autovalor  $\lambda$ . Se trata ahora de construir una *base canónica* de  $N(\lambda)$  ligada a la *partición* (9).

#### 5 Bases de bloques de Jordan

Dado un vector  $v_h \in N_h$ , tal que  $v_h \notin N_{h-1}$ , los vectores

$$v_h, v_{h-1} = \tilde{f}(v_h), v_{h-2} = \tilde{f}(v_{h-1}), \dots, v_2 = \tilde{f}(v_3), v_1 = \tilde{f}(v_2)$$

(en orden opuesto) determinan un conjunto ordenado, que notaremos  $J(v_h)$ , es decir,

$$J(v_h) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{h-2}, v_{h-1}, v_h\} \quad (10)$$

y se demuestra que estos  $h$  vectores de  $J(v_h)$  son l.i.

De acuerdo con lo indicado anteriormente, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{f}(v_h) = v_{h-1} &\Rightarrow (f - \lambda I)(v_h) = v_{h-1} &\Rightarrow f(v_h) = \lambda v_h + v_{h-1} \\ \tilde{f}(v_{h-1}) = v_{h-2} &\Rightarrow (f - \lambda I)(v_{h-1}) = v_{h-2} &\Rightarrow f(v_{h-1}) = \lambda v_{h-1} + v_{h-2} \\ \dots &\dots &\dots \\ \tilde{f}(v_3) = v_2 &\Rightarrow (f - \lambda I)(v_3) = v_2 &\Rightarrow f(v_3) = \lambda v_3 + v_2 \\ \tilde{f}(v_2) = v_1 &\Rightarrow (f - \lambda I)(v_2) = v_1 &\Rightarrow f(v_2) = \lambda v_2 + v_1 \\ \tilde{f}(v_1) = 0 &\Rightarrow (f - \lambda I)(v_1) = 0 &\Rightarrow f(v_1) = \lambda v_1 \end{aligned} \right\}$$

En consecuencia, la variedad lineal generada por  $J(v_h)$  es invariante por el endomorfismo  $f$  y la matriz de la restricción de  $f$  a dicha variedad lineal es de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (11)$$

Una matriz cuadrada de la forma (11) se denomina un *bloque de Jordan*. La notaremos  $BJ(\lambda, h)$ , donde  $h$  es su orden (número de filas o columnas). El conjunto ordenado de vectores  $J(v_h)$ , indicado en (10), se dice que es la *base del bloque de Jordan generado por  $v_h$* .

Notemos que si se eligen los vectores de  $J(v_h)$  en orden opuesto al indicado en (10), entonces en la matriz (11) la banda de unos aparece debajo (en vez de encima) de la diagonal principal de  $\lambda$ 's.

#### 6 Bases canónicas relativas a un autovalor

Vamos a describir el proceso de construcción de una base canónica del subespacio  $N(\lambda)$  respecto de la cual la matriz de la restricción a  $N(\lambda)$  del endomorfismo  $f$  sea una matriz diagonal por cajas, cuyas cajas son bloques de Jordan.

**6.1 Construcción de una base de  $N(\lambda)$ .** De acuerdo con la notación indicada anteriormente, el proceso consiste en:

(1) elegir en  $N_s$  un conjunto de  $p_s = \dim N_s - \dim N_{s-1}$  vectores que sean l.i. módulo  $N_{s-1}$ :

$$C_s = \{v_{s,1}, \dots, v_{s,p_s}\}$$

(2.1) pasar de los vectores de  $C_s$  a sus imágenes en  $\tilde{f}$ , que serán vectores de  $N_{s-1}$  l.i. módulo  $N_{s-2}$ :

$$v_{s-1,1} = \tilde{f}(v_{s,1}), \dots, v_{s-1,p_s} = \tilde{f}(v_{s,p_s})$$

(2.2) como  $p_s \leq p_{s-1} = \dim(N_{s-1}/N_{s-2})$ , en caso de que esta última desigualdad sea estricta, elegir  $p_{s-1} - p_s$  nuevos vectores en  $N_{s-1}$ , que junto con los de  $\tilde{f}(C_s)$  completen una base de  $N_{s-1}/N_{s-2}$

$$C_{s-1} = \{v_{s-1,1}, \dots, v_{s-1,p_s}, v_{s-1,p_s+1}, \dots, v_{s-1,p_{s-1}}\}$$



Respecto de esta base canónica global, la matriz del endomorfismo, que denotaremos  $J$ , es una matriz diagonal por cajas, cuyas celdas son las matrices  $J(\lambda_j); j = 1, \dots, r$

$$J = \begin{pmatrix} J(\lambda_1) & & \\ & \dots & \\ & & J(\lambda_r) \end{pmatrix} \quad (15)$$

Esta matriz es única (salvo el orden de bloques), por depender sólo de los autovalores y de los números (14). Se llama *matriz reducida o forma canónica de Jordan* del endomorfismo.

## 8 Cálculo de la forma canónica de Jordan y de la matriz de paso a partir de una base canónica

Dado un endomorfismo  $f$  del espacio vectorial  $V$ , se trata de determinar su forma canónica de Jordan, construyendo una base canónica global de  $V$  relativa a  $f$ . Siendo  $A$  la matriz de  $f$  respecto de una base arbitraria de  $V$  y denotando  $P$  a la matriz de paso de dicha base a una base canónica global, se tiene

$$A = PJP^{-1}$$

lo que permite calcular  $J$ , determinando la matriz de paso  $P$ .

8.1 Algoritmo de cálculo de la forma canónica de Jordan y de la matriz de paso a partir de una base canónica.- El proceso consiste en:

- calcular los autovalores de la matriz  $A$
- para cada autovalor,  $\lambda_j$ , calcular los subespacios nulos  $N_i(\lambda_j)$  y completar la tabla 6.2, ordenando sus vectores por columnas, para formar una base canónica de  $N(\lambda_j)$
- unir (ordenadamente) dichas bases canónicas de los subespacios  $N(\lambda_j)$ , para formar una base canónica global de  $V$  relativa al endomorfismo  $f$
- formar la matriz de paso  $P$ , cuyas columnas son los vectores de la base canónica global
- calcular la forma canónica de Jordan  $J = P^{-1}AP$

8.2 Descripción de comandos que automatizan los cálculos.- El cálculo a mano del polinomio característico, así como de los autovalores y autovectores, es incómodo, por lo que se recomienda hacer uso de un SCA (Sistema de Cómputo Algebraico). En particular, el sistema Maple dispone de comandos que permiten calcular automáticamente la matriz característica, su determinante (polinomio característico), los autovalores (con sus multiplicidades) y una base del subespacio de autovectores (para cada autovalor). Su sintaxis, de acuerdo con la notación que venimos utilizando, es la siguiente:

- > charmat(A,x);  $\rightarrow x \cdot I_m - A$
- > charpoly(A,x);  $\rightarrow \det(x \cdot I_m - A)$
- > eigenvals(A);  $\rightarrow \lambda_1, \dots, \lambda_1^{(m_1)}, \dots, \lambda_r, \dots, \lambda_r^{(m_r)}$
- > eigenvecs(A);  $\rightarrow [[\lambda_1, m_1, \text{base } \ker(\lambda_1 \cdot I_m - A)], \dots, [\lambda_r, m_r, \text{base } \ker(\lambda_r \cdot I_m - A)]]$

Además de estos comandos, Maple dispone de otros, que permiten calcular automáticamente los subespacios nulos  $N_i$ , las matrices de tipo bloque de Jordan e incluso la matriz reducida de Jordan y una matriz de paso. Su sintaxis es la siguiente:

- > kernel(M);  $\rightarrow$  núcleo del endomorfismo de matriz  $M$
- > JordanBlock( $\lambda, h$ );  $\rightarrow$  bloque de Jordan  $BJ(\lambda, h)$
- > jordan(A);  $\rightarrow$  forma canónica de Jordan,  $J$ , de la matriz  $A$
- > jordan(A, 'P');  $\rightarrow J$ , quedando alojada en la variable  $P$  la matriz de paso

8.3 Cálculo automático de autovalores y autovectores - Una vez que se entra en Maple, para operar con los comandos indicados a continuación, es preciso cargar el paquete *linalg* (linear algebra):

> with(linalg);

Definición de una matriz, A, usando el comando *matrix*:

> A:=matrix([[5,2,19,-1,29,-27,55],[-3,21,7,-24,5,43,-39],[0,1,24,0,29,-29,57],[0,-16,-1,29,-2,-46,45],[1,-15,-13,22,-18,-21,9],[1,-17,-12,25,-12,-33,18],[0,-1,-9,1,-9,7,-20]]);

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 2 & 19 & -1 & 29 & -27 & 55 \\ -3 & 21 & 7 & -24 & 5 & 43 & -39 \\ 0 & 1 & 24 & 0 & 29 & -29 & 57 \\ 0 & -16 & -1 & 29 & -2 & -46 & 45 \\ 1 & -15 & -13 & 22 & -18 & -21 & 9 \\ 1 & -17 & -12 & 25 & -12 & -33 & 18 \\ 0 & -1 & -9 & 1 & -9 & 7 & -20 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz característica de A, denotando x a la variable:

> charmat(A,x);

$$\begin{bmatrix} x-5 & -2 & -19 & 1 & -29 & 27 & -55 \\ 3 & x-21 & -7 & 24 & -5 & -43 & 39 \\ 0 & -1 & x-24 & 0 & -29 & 29 & -57 \\ 0 & 16 & 1 & x-29 & 2 & 46 & -45 \\ -1 & 15 & 13 & -22 & x+18 & 21 & -9 \\ -1 & 17 & 12 & -25 & 12 & x+33 & -18 \\ 0 & 1 & 9 & -1 & 9 & -7 & x+20 \end{bmatrix}$$

Cálculo del polinomio característico como determinante de la matriz precedente:

> det("");

$$40000 - 2000x - 6900x^2 + 545x^3 + 404x^4 - 42x^5 - 8x^6 + x^7$$

Cálculo directo del polinomio característico de la matriz A, denotando x a la variable:

> charpoly(A,x);

$$40000 - 2000x - 6900x^2 + 545x^3 + 404x^4 - 42x^5 - 8x^6 + x^7$$

Cálculo de los autovalores de la matriz A, resolviendo la ecuación precedente:

> solve("");

$$-4, -4, -4, 5, 5, 5, 5$$

Cálculo directo de los autovalores de la matriz A (con sus multiplicidades):

> eigenvals(A);

$$-4, -4, -4, 5, 5, 5, 5$$

Cálculo de bases de los subespacios de autovectores de la matriz A:

> eigenvecs(A);

$$[-4, 3, \{[0, 1, 0, -1, -2, 0, 1], [-1, -1, -1, 1, 2, 1, 0]\}],$$

$$[5, 4, \{[0, 0, 0, 2, 1, 1, 0], [-4, 0, -3, -2, 0, 0, 1]\}]$$

El resultado que se acaba de obtener debe interpretarse así:

- el autovalor  $-4$  tiene multiplicidad 3 y su subespacio de autovectores admite la base formada por  $(0, 1, 0, -1, -2, 0, 1)$ ,  $(-1, -1, -1, 1, 2, 1, 0)$
- el autovalor  $5$  tiene multiplicidad 4 y su subespacio de autovectores admite la base formada por  $(0, 0, 0, 2, 1, 1, 0)$ ,  $(-4, 0, -3, -2, 0, 0, 1)$

8.4 Cálculo automático de la reducida de Jordan a partir de una base canónica - Se trata de aplicar el proceso indicado en 8.1, al comienzo de esta sección, a la matriz A definida en 8.3.

Determinación de una base canónica del subespacio  $N(-4)$ , relativo al autovalor  $-4$ :

Matriz unidad de orden 7, notándola I7:

> I7:=diag(1,1,1,1,1,1,1);

$$I7 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz  $B=A-(-4)I7$ :

> B:=evalm(A-(-4)\*I7);

$$B := \begin{bmatrix} 9 & 2 & 19 & -1 & 29 & -27 & 55 \\ -3 & 25 & 7 & -24 & 5 & 43 & -39 \\ 0 & 1 & 28 & 0 & 29 & -29 & 57 \\ 0 & -16 & -1 & 33 & -2 & -46 & 45 \\ 1 & -15 & -13 & 22 & -14 & -21 & 9 \\ 1 & -17 & -12 & 25 & -12 & -29 & 18 \\ 0 & -1 & -9 & 1 & -9 & 7 & -16 \end{bmatrix}$$

Base del subespacio nulo  $N1$ , núcleo de la matriz B:

> kernel(B);

$$\{[-1, -1, -1, 1, 2, 1, 0], [0, 1, 0, -1, -2, 0, 1]\}$$

Base del subespacio nulo  $N2$ , núcleo de la matriz  $B2=B^2$ :

> B2:=evalm(B^2); kernel(B2);

$$\{[-1, 0, -1, 0, 1, 0, 0], [1, -1, 1, 1, 0, 1, 0], [-2, 1, -2, -1, 0, 0, 1]\}$$

Base del subespacio nulo  $N3$ , núcleo de la matriz  $B3=B^3$ :

> B3:=evalm(B2\*B); kernel(B3);

$$\{[-1, 0, -1, 0, 1, 0, 0], [1, -1, 1, 1, 0, 1, 0], [-2, 1, -2, -1, 0, 0, 1]\}$$

Se ha estabilizado, por ser  $N3=N2$  (o, de otro modo, por haber llegado a la multiplicidad, 3, de  $-4$ ).

El primero de estos tres últimos vectores no pertenece a  $N1$ , luego es válido para la base de  $N2/N1$ :

> v2:=vector([-1, 0, -1, 0, 1, 0, 0]);

$$v2 := [-1, 0, -1, 0, 1, 0, 0]$$

Definamos  $v1$  como imagen de  $v2$  por B (que será un vector de  $N1$ ):

> v1:=evalm(B\*v2);

$$v1 := [1, 1, 1, -1, -2, -1, 0]$$

Como  $\dim N1=2$ , hay que tomar otro vector para completar una base de  $N1$ . Por ejemplo, el último de los obtenidos como base de  $N1$ :

> u1:=vector([0, 1, 0, -1, -2, 0, 1]);

$$u1 := [0, 1, 0, -1, -2, 0, 1]$$

Se ha completado así la base canónica  $\{v1, v2, u1\}$  del subespacio  $N(-4)$ .

Determinación de una base canónica del subespacio  $N(5)$ , relativo al autovalor 5:

Base del subespacio nulo  $N1$ , núcleo de la matriz  $B=A-5I7$ :

> B:=evalm(A-5\*I7); kernel(B);

$$\{[0, 0, 0, 2, 1, 1, 0], [-4, 0, -3, -2, 0, 0, 1]\}$$

Base del subespacio nulo  $N2$ , núcleo de la matriz  $B2=B^2$ :

> B2:=evalm(B\*B); kernel(B2);

$$\{[-4, 3, -3, 0, 0, 0, 1], [0, \frac{3}{2}, 0, 1, 0, 0, 0], [0, -3, 0, 0, 1, 1, 0]\}$$

Base del subespacio nulo  $N3$ , núcleo de la matriz  $B3=B^3$ :

> B3:=evalm(B2\*B); kernel(B3);

$$\{[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 3, -3, 0, 0, 0, 1], [0, \frac{3}{2}, 0, 1, 0, 0, 0], [0, -3, 0, 0, 1, 1, 0]\}$$

Ya se ha estabilizado, por haber llegado a la multiplicidad, 4, del autovalor 5. El último de estos cuatro vectores no pertenece a  $N2$ , luego es válido para la base de  $N3/N2$ :

> w3:=vector([1, 0, 0, 0, 0, 0, 0]);

Definamos  $w2$  como imagen de  $w3$  por B (que será un vector de  $N2$ ):

> w2:=evalm(B\*w3);

$$w2 := [0, -3, 0, 0, 1, 1, 0]$$

Como  $\dim(N2/N1)=1$ , no hay que tomar más vectores de  $N2$ .

Definamos  $w1$  como imagen de  $w2$  por B (que será un vector de  $N1$ ):

> w1:=evalm(B\*w2);

$$w1 := [-4, 0, -3, 0, 1, 1, 1]$$

Como  $\dim N1=2$ , hay que tomar otro vector para completar una base de  $N1$ . Por ejemplo, el primero de los obtenidos como base de  $N1$ :

> z1:=vector([0, 0, 0, 2, 1, 1, 0]);

$$z1 := [0, 0, 0, 2, 1, 1, 0]$$

Se ha completado así la base canónica  $\{w1, w2, w3, z1\}$  del subespacio  $N(5)$ .

En consecuencia, una base canónica del espacio vectorial relativa al endomorfismo de matriz A es

$$\{v1, v2, u1, w1, w2, w3, z1\}$$

La matriz de paso, P, a esta base canónica es la traspuesta de la matriz cuyas filas son estos vectores:

> P:=transpose(stack(v1, v2, u1, w1, w2, w3, z1));

$$P := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(notemos que el comando stack permite "apilar" vectores, esto es, formar la matriz cuyas filas son los vectores considerados, y el comando transpose transforma una matriz en su traspuesta).

La reducida de Jordan de A es la matriz  $J=P^{-1}AP$ :

> J:=evalm(P^(-1) &\*A&\*P);

$$J := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

(notemos que el orden de los bloques de Jordan depende del orden elegido en la base canónica).

Veamos que el cálculo ha sido correcto, comprobando que  $PJP^{(-1)} - A$  es la matriz nula:

> evalm(P&\*J&\*P^(-1) - A);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.5 Cálculo automático de la matriz reducida de Jordan y de la matriz de paso. - Si no interesa el proceso de construcción, para obtener una reducida de Jordan, basta aplicar el comando *jordan*:

> J2:=jordan(A);

$$J2 := \begin{bmatrix} -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Repitamos el cálculo de  $J2$ , obteniendo también la matriz de paso, alojada en otra variable,  $Q$ :

> J2:=jordan(A, 'Q'): evalm(Q);

$$\begin{bmatrix} 3 & \frac{135}{104} & 72 & -4 & \frac{-540}{13} & \frac{135}{104} & \frac{-306}{13} \\ 3 & \frac{343}{104} & 0 & 54 & -3 & \frac{31}{104} & 0 \\ 3 & \frac{135}{104} & 54 & -3 & \frac{-459}{26} & \frac{135}{104} & \frac{-459}{26} \\ -3 & \frac{-343}{104} & 0 & 0 & \frac{80}{3} & \frac{-31}{104} & \frac{68}{3} \\ -6 & \frac{-187}{52} & -18 & -17 & \frac{1577}{78} & \frac{-31}{52} & \frac{1343}{78} \\ -3 & \frac{-447}{104} & -18 & -17 & \frac{1577}{78} & \frac{-135}{104} & \frac{1343}{78} \\ 0 & -1 & -18 & 1 & \frac{153}{26} & -1 & \frac{153}{26} \end{bmatrix}$$

Veamos que el cálculo ha sido correcto, comprobando que  $QJ2Q^{(-1)} - A$  es la matriz nula:

> evalm(Q&\*J2&\*Q^(-1) - A);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8.6 Programa para calcular la matriz reducida de Jordan conocidos los autovalores. - Acabamos de ver como la matriz reducida de Jordan puede calcularse automáticamente con el comando *jordan*, pero conviene saber que si al aplicar dicho comando Maple no consigue resolver la ecuación característica, entonces la reducida de Jordan no es calculada.

Ahora bien, si por otros medios se consigue resolver la ecuación característica, entonces Maple si podría ayudar a calcular la reducida de Jordan y la matriz de paso. Por ello, hemos desarrollado un procedimiento, que hemos denominado *MatJor*, que permite automatizar dicho cálculo.

El citado procedimiento se incluye, junto con otros procedimientos, en un programa denominado *matjor*, que hemos de comenzar cargando:

[ > read('matjor.map') ;

(al cargar *matjor*, queda cargado automáticamente el paquete *linalg*). El procedimiento *MatJor* requiere dos argumentos: la matriz y la lista de sus autovalores (sin multiplicidades).

Por ejemplo, para la misma matriz  $A$  de 8.3, cuya lista de autovalores es  $[-4, 5]$ , se tiene:

> J:=MatJor(A, [-4, 5]);

$$J := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Respecto del orden en que aparecen los bloques de Jordan, depende del orden en que se introduzcan los autovalores, y para un mismo autovalor, el orden de los bloques es creciente. Así, cambiando el orden en que se introducen los dos autovalores de la matriz anterior, se tiene:

> J:=MatJor(A, [5, -4]);

$$J := \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

## 9 Cálculo abreviado de la reducida de Jordan a partir de autovalores, sus multiplicidades y particiones de multiplicidad

Los resultados (6), (8) y (14) conducen al siguiente algoritmo, que permite calcular la forma canónica de Jordan sin necesidad de construir una base canónica.

### 9.1 Algoritmo para el cálculo abreviado de la matriz reducida de Jordan

*Entrada:* matriz  $A$  (del endomorfismo, respecto de la base de  $V$  considerada)

- (1) calcular la matriz característica,  $x \cdot I_m - A$
- (2) resolver la ecuación característica  $\det(x \cdot I_m - A) = 0$ , cuyas raíces son los autovalores
- (3) para cada uno de los autovalores,  $\lambda$ , hacer:
  - (3.1) sustituir  $x$  por  $\lambda$  en la matriz  $A - x \cdot I_m$ , denotandola  $B = A - \lambda \cdot I_m$
  - (3.2) hallar los sucesivos rangos de las potencias de la matriz  $B$

$$r_j := \text{rango}(B^j); j = 1, 2, \dots$$

hasta que se estabilicen:

$$r_1 > r_2 > \dots > r_j > r_{j+1} > \dots > r_{s-1} > r_s = r_{s+1}$$

- (3.3) hallar las dimensiones de los subespacios nulos relativos al autovalor  $\lambda$ :

$$d_j = \dim N_j = \dim \ker(B^j) = \dim V - \text{rango}(B^j) = \dim V - r_j; j = 1, 2, \dots, s+1$$

los cuales, de acuerdo con (6), han de verificar:

$$0 < d_1 < d_2 < \dots < d_j < d_{j+1} < \dots < d_{s-1} < d_s = d_{s+1} \quad (16)$$

- (3.4) en la sucesión (16), restar de cada término el anterior, para obtener la partición de multiplicidad, calculando las dimensiones,  $p_j$ , de los subespacios  $N_j/N_{j-1}$ :

$$p_j = \dim(N_j/N_{j-1}) = d_j - d_{j-1}$$

las cuales, recordando (8), habrán de verificar

$$p_1 \geq p_2 \geq \dots \geq p_j \geq p_{j+1} \geq \dots \geq p_{s-1} \geq p_s > 0 \quad (17)$$

- (3.5) en la sucesión (17), restar de cada término el siguiente, para obtener el número,  $n_j$ , de bloques de Jordan de orden  $j$ , dado por (14):

$$n_j = p_j - p_{j+1}; j = 1, 2, \dots, s-1, s$$

- (3.6) para cada  $\lambda$ , formar  $n_j$  bloques de Jordan  $BJ(\lambda, j); j = 1, 2, \dots, s-1, s$

- (4) formar la matriz diagonal por cajas,  $J$ , cuyas cajas son los todos los bloques de Jordan anteriormente indicados.

*Salida:* matriz  $J$  (forma canónica de Jordan de  $A$ ).

9.2 Programa para calcular el número de bloques y elegir su orden de disposición - Dada una matriz cuadrada, su reducida de Jordan es única, salvo el orden en que los bloques de Jordan quedan dispuestos diagonalmente. Sin embargo, al ejecutar el comando *jordan*, para obtener la reducida de Jordan, no puede elegirse el orden en que aparecen los bloques de Jordan. Por ello, hemos elaborado un procedimiento, denominado *NumBlo*, que calcula el número de bloques de Jordan de cada tipo, implementando el algoritmo descrito en 9.1. El proceso a realizar consiste en:

- i) obtener los números de bloques de Jordan con el procedimiento *NumBlo*
- ii) formar las cajas de Jordan con el comando *JordanBlock* de Maple
- iii) enristrar estos bloques en el orden deseado con el comando *diag* de Maple.

El procedimiento *NumBlo* está incluido en nuestro programa *matjor*, citado en 8.6, por lo que hemos de comenzar cargándolo:

```
> read(`matjor.map`);
```

*NumBlo* requiere dos argumentos: la matriz y la lista de sus autovalores (sin multiplicidades).

Por ejemplo, para la matriz  $A$  de 8.3, comenzamos por calcular los números de bloques de cada tipo:

```
> NumBlo(A, [-4, 5]);
```

Con autovalor, -4, hay, 1, bloques de Jordan orden, 1

Con autovalor, -4, hay, 1, bloques de Jordan orden, 2

Con autovalor, 5, hay, 1, bloques de Jordan orden, 1

Con autovalor, 5, hay, 1, bloques de Jordan orden, 3

a continuación, formar los bloques de Jordan correspondientes:

```
> J1:=JordanBlock(-4, 1);
```

$$J1 := [-4]$$

```
> J2:=JordanBlock(-4, 2);
```

$$J2 := \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

```
> J3:=JordanBlock(5, 1);
```

$$J3 := [ 5]$$

```
> J4:=JordanBlock(5, 3);
```

$$J4 := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

y, finalmente, enristrar diagonalmente los cuatro bloques anteriores, en el orden deseado:

```
> J:=diag(J4, J3, J2, J1);
```

$$J := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

pudiendo cambiar dicho orden, si se desea:

```
> diag(J4, J2, J3, J1);
```

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

9.3 Programa para calcular razonadamente los bloques de Jordan.- El procedimiento *NumBlo* descrito en 9.2 permite calcular los números de bloques de Jordan de cada tipo, pero no informa de cómo se han calculado. Por ello hemos desarrollado un procedimiento, denominado *BloJ*, que calcula los números de bloques de Jordan de cada tipo correspondientes a un autovalor dado, ofreciendo previamente la justificación de dichos números, lo cual tiene un indudable valor didáctico. Este procedimiento también está incluido en nuestro programa *matJor* y requiere dos argumentos: la matriz y el autovalor.

Por ejemplo, para la matriz *A* de 8.3, podemos calcular justificadamente los bloques de Jordan para el autovalor 5:

> BloJ(A, 5);

Rangos de las sucesivas potencias de la matriz  $B = A - \lambda Id$

$$r_i = \text{rango}(B^i); i=0,1,2,\dots:$$

$$7, 5, 4, 3, 3$$

Dimensiones de los subespacios nulos  $N_i = \ker(B^i)$

$$d_i = \dim N_i = \dim V - r_i; i=0,1,2,\dots:$$

$$0, 2, 3, 4, 4$$

Partición de la multiplicidad (diferencias primeras de  $\{d_i\}$ )

$$p_i = \dim(N_{i+1}/N_i) = d_{i+1} - d_i; i=1,2,\dots:$$

$$2, 1, 1, 0$$

Num vectores que complementan bases (diferencias segundas de  $\{d_i\}$ )

$$\text{numero de bloques de Jordan } n_i = p_i - p_{i+1}; i=1,2,\dots:$$

$$1, 0, 1$$

Bloques de Jordan para el valor propio, 5

$$[ 5], \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

( $r_i, d_i, \dots$  deben entenderse como  $r_{sub i}, d_{sub i} \dots$ ). Análogamente para el autovalor -4:

> BloJ(A, -4);

Rangos de las sucesivas potencias de la matriz  $B = A - \lambda Id$

$$r_i = \text{rango}(B^i); i=0,1,2,\dots:$$

$$7, 5, 4, 4$$

Dimensiones de los subespacios nulos  $N_i = \ker(B^i)$

$$d_i = \dim N_i = \dim V - r_i; i=0,1,2,\dots:$$

$$0, 2, 3, 3$$

Partición de la multiplicidad (diferencias primeras de  $\{d_i\}$ )

$$p_i = \dim(N_{i+1}/N_i) = d_{i+1} - d_i; i=1,2,\dots:$$

$$2, 1, 0$$

Num vectores que complementan bases (diferencias segundas de  $\{d_i\}$ )

$$\text{numero de bloques de Jordan } n_i = p_i - p_{i+1}; i=1,2,\dots:$$

$$1, 1$$

Bloques de Jordan para el valor propio, -4

$$[-4], \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

9.4 Programa para ajustar la matriz de paso.- Como se habrá observado en 8.4 y 8.5, la matriz *P* no está determinada de modo único. En particular, la matriz de paso que proporciona el comando *jordan* no siempre es la que nos parecería más sencilla. De hecho, es posible elegir algunos de los elementos de la matriz de paso, de modo que resulte más sencilla o verifique ciertas condiciones.

El método que utilizamos para calcular la matriz de paso *P*, tal que

$$A = P J P^{-1}$$

consiste en resolver la ecuación matricial  $A P = P J$ .

Hemos desarrollado un procedimiento al efecto, denominado *PasJor*, que permite calcular *P* del modo más general posible, dejando, en principio, sin asignación al mayor número posible de elementos.

Posteriormente, podemos asignar valores numéricos a dichos elementos, de modo que el determinante de *P* no sea nulo. Otro procedimiento, denominado *AjuPas*, permite automatizar el proceso consistente en efectuar dichas asignaciones.

Ambos procedimientos, *PasJor* y *AjuPas*, están incluidos en nuestro programa *matJor*. El procedimiento *PasJor* requiere dos argumentos: la matriz *A* y matriz *J*. El procedimiento *AjuPas* requiere otros dos argumentos: la matriz *P* y la lista *Su* de asignaciones (sustituciones) a efectuar. Aclaremos su uso a la luz de un par de ejemplos.

Ejemplo 1.- Cálculo de las matrices *J* y *P* para la matriz *A* siguiente:

> A:=matrix([[5,1,-2,4],[0,5,2,2],[0,0,5,3],[0,0,0,4]]);

$$A := \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

> charpoly(A, x);

$$(x-5)^3(x-4)$$

Cálculo de su matriz de Jordan con el procedimiento *MatJor*:

> J:=MatJor(A, [5,4]);

$$J := \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz de paso, *P*, de la matriz *A* a la matriz *J*, con el procedimiento *PasJor*:

> P:=PasJor(A,J);

$$P := \begin{bmatrix} 2p_{3,3} & p_{2,3} - 2p_{3,3} & p_{1,3} & -14p_{4,4} \\ 0 & 2p_{3,3} & p_{2,3} & 4p_{4,4} \\ 0 & 0 & p_{3,3} & -3p_{4,4} \\ 0 & 0 & 0 & p_{4,4} \end{bmatrix}$$

Cálculo de su determinante:

> det(P);

$$4p_{3,3}^3 p_{4,4}$$

Asignación de valores numéricos a los elementos sin determinar, de modo que  $\det(P)$  sea no nulo:

> Su:=[p[3,3]=1/2,p[2,3]=0,p[4,4]=1,p[1,3]=0]:

Sustitución de estos valores numéricos (de la lista Su) en la matriz P con el procedimiento AjuPas:

> P:=AjuPas(P,Su);

$$P := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nuevo cálculo de su determinante:

> det(P);

$$\frac{1}{2}$$

Observemos que el cálculo es correcto, comprobando que  $PJP^{(-1)}-A$  es la matriz nula:

> evalm(P&#\*J&#\*P^(-1)-A);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para elegir la matriz P de otro modo, basta hacer otra asignación distinta (naturalmente, comenzando por volver a calcular P con valores indeterminados):

> P:=PasJor(A,J);

$$P := \begin{bmatrix} 2p_{3,3} & p_{2,3} - 2p_{3,3} & p_{1,3} & -14p_{4,4} \\ 0 & 2p_{3,3} & p_{2,3} & 4p_{4,4} \\ 0 & 0 & p_{3,3} & -3p_{4,4} \\ 0 & 0 & 0 & p_{4,4} \end{bmatrix}$$

> Su:=[p[3,3]=1,p[2,3]=1,p[4,4]=1,p[1,3]=-1]:

> P:=AjuPas(P,Su);

$$P := \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & -14 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> evalm(P&#\*J&#\*P^(-1)-A);

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2.- Cálculo de las matrices J y P para la matriz A siguiente:

> A:=matrix([[17/3,1/3,0,0,1/3,0,-8/3],[4/3,11/3,0,0,-1/3,0,-1/3],[25/6,1/3,1,-1/2,-2/3,1,-8/3],[-1,1,0,4,-1,0,2],[5/3,1/3,0,0,13/3,0,-8/3],[9/2,1,-4,-1/2,-2,5,-1],[5/3,1/3,0,0,1/3,0,4/3]]);

$$A := \begin{bmatrix} \frac{17}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{25}{6} & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{2}{3} & 1 & -\frac{8}{3} \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{13}{3} & 0 & -\frac{8}{3} \\ \frac{9}{2} & 1 & -4 & -\frac{1}{2} & -2 & 5 & -1 \\ \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

> eigenvals(A);

3, 3, 3, 4, 4, 4, 4

> J:=MatJor(A,[3,4]);

$$J := \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Cálculo de la matriz de paso, P, de la matriz A a la matriz J, con el procedimiento PasJor:

> P:=PasJor(A,J);

$$P := \begin{bmatrix} p_{4,1}, & 0, & p_{4,3}, & p_{4,4} - 2p_{6,4}, & 0, & p_{6,5}, & p_{7,7} + p_{6,5} \\ -p_{4,1}, & 0, & -p_{4,3}, & p_{4,4} - 2p_{6,4}, & 0, & 2p_{6,5}, & p_{7,7} - 2p_{6,5} + p_{6,6} \\ p_{3,1}, & p_{3,2}, & p_{3,3}, & 0, & 0, & p_{6,5}, & p_{6,6} \\ p_{4,1}, & 0, & p_{4,3}, & 2p_{4,4} - 4p_{6,4}, & 0, & p_{6,5}, & 2p_{7,7} - p_{6,6} \\ 2p_{3,1}, & 2p_{3,2}, & 2p_{3,3} + p_{3,2}, & p_{6,4}, & p_{6,5}, & p_{6,6}, & p_{6,7} \\ p_{4,1}, & 0, & p_{4,3}, & p_{4,4} - 2p_{6,4}, & 0, & p_{6,5}, & p_{7,7} \end{bmatrix}$$

Cálculo de su determinante:

> det(P);

$-6p_{3,2}^2 p_{4,1} p_{6,5}^3 (-p_{4,4} + 2p_{6,4})$

Ajuste de algunos valores de elementos indeterminados, de modo que sea  $\det(P)=1$

```
> Su:=[p[3,2]=1,p[4,1]=1/6,p[6,5]=1,p[4,4]=1,p[6,4]=0]:
> P:=AjuPas(P,Su);
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & p_{4,3} & 1 & 0 & 1 & p_{7,7}+1 \\ \frac{-1}{6} & 0 & -p_{4,3} & 1 & 0 & 2 & p_{7,7}-2+p_{6,6} \\ p_{3,1} & 1 & p_{3,3} & 0 & 0 & 1 & p_{6,6} \\ \frac{1}{6} & 0 & p_{4,3} & 1 & 2 & -3+2p_{6,6} & p_{7,7}+5-4p_{6,6}+2p_{6,7} \\ \frac{1}{6} & 0 & p_{4,3} & 2 & 0 & 1 & 2p_{7,7}-p_{6,6} \\ 2p_{3,1} & 2 & 2p_{3,3}+1 & 0 & 1 & p_{6,6} & p_{6,7} \\ \frac{1}{6} & 0 & p_{4,3} & 1 & 0 & 1 & p_{7,7} \end{bmatrix}$$

Nuevo ajuste de valores de los elementos aún indeterminados, de modo que  $P$  resulte sencilla:

```
> Su:=[p[4,3]=0,p[3,1]=0,p[3,3]=0,p[6,6]=0,p[7,7]=0,p[6,7]=0]:
> P:=AjuPas(P,Su);
```

$$P := \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ \frac{-1}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> det(P);
```

```
> evalm(P&*J&*P^(-1)-A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comparación con la solución que para la misma matriz  $A$  proporciona el comando jordan de Maple:

```
> J2:=jordan(A,'P2');
```

$$J2 := \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

```
> op(P2);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{7}{15} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{17}{15} & -1 \\ 0 & \frac{-7}{15} & 0 & 2 & \frac{-5}{3} & \frac{-17}{15} & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{793}{60} & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{833}{60} & 0 \\ 0 & \frac{7}{15} & 2 & \frac{-5}{3} & \frac{119}{15} & \frac{17}{15} & \frac{109}{15} \\ 0 & \frac{7}{15} & 0 & 1 & \frac{-4}{3} & \frac{17}{15} & -2 \\ 5 & \frac{434}{15} & 1 & \frac{2}{3} & \frac{89}{30} & \frac{833}{30} & \frac{62}{15} \\ 0 & \frac{7}{15} & 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{17}{15} & -1 \end{bmatrix}$$

```
> det(P2);
```

$$\frac{-85}{2}$$

```
> evalm(P2&*J2&*P2^(-1)-A);
```

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comparando la matriz de paso,  $P$ , obtenida con nuestro programa, con la matriz de paso,  $P2$ , obtenida con el comando jordan de Maple, se hace palpable la conveniencia de usar el método propuesto aquí para ajustar la matriz de paso.

Ello tiene interés no sólo desde un punto de vista estético, sino sobre todo en las aplicaciones en que se ha de operar con las matrices  $J$  y  $P$  (sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes, sucesiones de recurrencia lineal, ...) en las que interesa obtener matrices lo más sencillas posible.

## 10 Aplicación a la determinación de la matriz inversa

Dados un polinomio

$$G(x) = g_n x^n + g_{n-1} x^{n-1} + \dots + g_2 x^2 + g_1 x + g_0$$

y una matriz cuadrada,  $A$ , se denota por  $G(A)$  a la matriz

$$G(A) = g_n A^n + g_{n-1} A^{n-1} + \dots + g_2 A^2 + g_1 A + g_0$$

Se dice que el polinomio  $G(x)$  *anula a la matriz*  $A$ , si  $G(A)$  es la matriz nula.

El subconjunto de los polinomios en  $x$  que anulan a la matriz  $A$ , está formado por los múltiplos de un polinomio fijo (es un ideal principal del anillo  $K[x]$ ). Dicho polinomio es único, si se le exige la condición de ser mónico. El polinomio,  $p(x)$ , mónico y de grado mínimo, tal que  $p(A) = O$ , se llama *polinomio mínimo* de la matriz  $A$ . Se demuestra que el polinomio mínimo de la matriz cuadrada  $A$  es

$$(x - \lambda_1)^{t_1} \dots (x - \lambda_r)^{t_r} \quad (18)$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  son los autovalores de  $A$  y  $t_j$  es el máximo de los órdenes (o dimensiones) de los bloques de Jordan relativos al autovalor  $\lambda_j$ ;  $j = 1, \dots, r$ . Este resultado permite calcular el polinomio mínimo a partir de la forma canónica de Jordan.

Por otra parte, de la definición de  $t_j$  y de la igualdad indicada al final de la sección 3, se sigue que

$$t_j \leq \dim N(\lambda) = \text{mult}(\lambda) = m_j$$

luego el polinomio mínimo de una matriz es divisor de su polinomio característico. En consecuencia, una matriz anula a su polinomio característico (teorema de Cayley-Hamilton).

Sea

$$x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_1 x + c_0$$

un polinomio tal que la matriz  $A$  lo anula (por ejemplo, su polinomio mínimo o su polinomio característico). Si  $c_0 \neq 0$ , entonces la inversa de  $A$  es la matriz

$$A^{-1} = \frac{-1}{c_0} (A^{m-1} + c_{m-1} A^{m-2} + \dots + c_1 A^{m-1}) \quad (19)$$

Si, en particular, se trata del polinomio característico, entonces  $c_0 = \det(A)$ . Y, si el polinomio considerado es el polinomio mínimo, por ser divisor del polinomio característico,  $c_0$  ha de ser divisor de  $\det(A)$ , luego la condición  $\det(A) \neq 0$  implica  $c_0 \neq 0$ .

La expresión (19) permite calcular la inversa de una matriz como función polinómica de ella. Ello tiene sus ventajas frente al algoritmo usual de cálculo de la inversa, sobre todo para ciertos tipos de matrices de orden elevado.

En cuanto a la elección de polinomio, de entre los que anulan a la matriz, lo mejor es usar el polinomio mínimo, calculable mediante la expresión (18), por ser el de menor grado, si bien el polinomio característico es más cómodo de obtener. En todo caso, tanto el polinomio característico como el polinomio mínimo pueden obtenerse automáticamente usando Maple. Este último con la sintaxis:

> minpoly(A,x);  $\rightarrow$  polinomio mínimo de  $A$

Ejemplo.- Para la misma matriz  $A$  de 8.3, su polinomio mínimo y su polinomio característico son:

> G:=minpoly(A,x); Q:=charpoly(A,x);

$$G := -2000 + 200x + 235x^2 - 29x^3 - 7x^4 + x^5$$

$$Q = 40000 - 2000x - 6900x^2 + 545x^3 + 404x^4 - 42x^5 - 8x^6 + x^7$$

anulándose ambos al sustituir  $x$  por  $A$ :

> evalm(subs(x=A,G)), evalm(subs(x=A,Q));

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Factorizando se comprueba que el polinomio mínimo es divisor del polinomio característico:

> factor(Q), factor(G);

$$(x+4)^3(x-5)^4, (x+4)^2(x-5)^3$$

De acuerdo con (19), a partir del polinomio  $G$ , puede obtenerse la siguiente expresión polinómica para la inversa,  $M$ , de la matriz  $A$ :

> H:=(-1/(-2000))\*(200+235\*x-29\*x^2-7\*x^3+x^4);

$$H := \frac{1}{10} + \frac{47}{400}x - \frac{29}{2000}x^2 - \frac{7}{2000}x^3 + \frac{1}{2000}x^4$$

> M:=evalm(subs(x=A,H));

$$M := \begin{bmatrix} 21 & -7 & 1803 & -11 & 1257 & -601 & 5043 \\ 125 & 200 & 2000 & 400 & 1000 & 500 & 2000 \\ 3 & 49 & -121 & -123 & -49 & 83 & -1401 \\ 25 & 40 & 400 & 80 & 200 & 25 & 400 \\ -3 & 1 & 2171 & -27 & 1249 & -557 & 4851 \\ 125 & 200 & 2000 & 400 & 1000 & 500 & 2000 \\ 0 & -41 & 1 & 139 & 1 & -16 & 261 \\ -4 & 40 & 16 & 80 & 8 & 5 & 80 \\ -4 & -111 & -261 & 337 & -209 & -344 & 2459 \\ 125 & 100 & 1000 & 200 & 500 & 125 & 1000 \\ -4 & -197 & -647 & 599 & -293 & -1251 & 3793 \\ 125 & 200 & 2000 & 400 & 1000 & 500 & 2000 \\ 1 & 1 & -233 & -1 & -229 & 269 & -623 \\ 125 & 25 & 500 & 25 & 500 & 500 & 500 \end{bmatrix}$$

> evalm(M&#215;A);

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 11 Conclusiones

La reducción de matrices a su forma canónica de Jordan tiene diversas aplicaciones: resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, cálculo del término general de sucesiones de recurrencia lineal, determinación del polinomio más sencillo que anula a una matriz, etc.

Como el cálculo de la reducida de Jordan es laborioso, algunos Sistema de Cálculo Simbólico disponen de comandos que calculan la forma canónica de Jordan. Ahora bien, si el programa no es capaz de resolver la ecuación característica, entonces el comando no permite calcular la reducida de Jordan. Sin embargo, si aplicando otras técnicas puede resolverse dicha ecuación obtenerse los autovalores, entonces el procedimiento *MatJor*, descrito en 8.6, permite calcular la forma canónica de Jordan. E incluso puede elegirse el orden de los bloques de Jordan con ayuda del procedimiento *NumBlo*, descrito en 9.2.

Además, los comandos que automatizan el cálculo de la forma canónica de Jordan (como el comando *jordan* de Maple) no siempre proporcionan la matriz de paso más sencilla, lo que puede lograrse ajustándola con los procedimientos *PasJor* y *AjuPas*, como se describe en 9.4.

Por otra parte, los comandos o programas que conocemos al efecto se preocupan exclusivamente por devolver la reducida de Jordan, pero no entran en la justificación de dicho cálculo, lo cual tiene un indudable interés didáctico. El procedimiento *BloJ*, descrito en 9.3, permite visualizarlo paso a paso.

Finalmente, notemos que aunque a lo largo del artículo nos hemos referido a la implementación que hemos realizado sobre Maple, la descripción que se ha hecho sobre el proceso de determinación de la forma canónica de Jordan permite efectuar una implementación similar sobre otros sistemas de cálculo simbólico con facilidades de programación.

## Bibliografía

- [1] R.A. Brualdi, *The Jordan Canonical Form: an Old Proof*. Am. Math. Monthly, págs. 257-267, 1987.
- [2] R.A. Brualdi, S. Mellendorf, *Regions in the Complex Plane Containing the Eigenvalues of a Matrix*. Am. Math. Monthly, págs. 975-985, 1994.
- [3] R. Fletcher, D.C. Sorensen, *An algorithmic derivation of the Jordan canonical form*. Am. Math. Monthly, págs. 12-16, 1983.
- [4] Miguel de Guzmán, *Una demostración constructiva de la forma de Jordan de una matriz*. Delta, número 1, págs 1-10, 1997.
- [5] J.M. de Olazabal, *A unified method to determine the canonical forms of any matrix*. Pub. Univ. Cantabria, núm. 3, 1997.
- [6] M.J. Soto, J.L. Vicente, *Algebra Lineal con MatLab y Maple*. Prentice Hall, 1995.

## Ciclo de vida de la familia

José V. García Sestafe\*  
M.<sup>a</sup> Elisa Amo Saus\*\*

\* Universidad Antonio de Nebrija  
\*\* Universidad de Castilla-La Mancha

## Abstract

*In this paper we are going to present "The family life cycle", what is defined as the time period extending from the time of the first marriage to the time of the death of the surviving spouse. The World Health Organisation has made some studies on their health implications.*

## 1. Definiciones

Se denomina ciclo de vida de una familia (CVF), al intervalo de tiempo que transcurre desde el matrimonio de una pareja hasta el fallecimiento del cónyuge superviviente, esto es, del que muere el último. Los matrimonios que únicamente se consideran son los de primeras nupcias, para ambos contrayentes; tampoco se tendrán en cuenta los divorcios. El único final del CVF es, como ya se ha dicho, la defunción del cónyuge superviviente.

El modelo completo del CVF abarca varias fases, que se pueden resumir en formación, extensión, contracción y disolución, donde por extensión se entiende el nacimiento de los hijos y por contracción la salida de éstos del hogar paterno. En este trabajo sólo se tratará de la disolución del matrimonio y del fin del CVF.

La duración del CVF influye en la composición de la población y en el bienestar de un país. La Organización Mundial de la Salud ha realizado varios estudios demográficos que recogen sus implicaciones sobre las poblaciones humanas.

## 2. Notaciones

Se designarán, respectivamente, por  $u$  y  $v$  las edades del marido y de la mujer al contraer matrimonio; un matrimonio de tales edades, al casarse, se acostumbra representar por  $(u, v, 0)$ .

La tasa específica de mortalidad, a la edad  $y$ , se representará por  $m'_y$  para los varones y  $m_y$  para las esposas. Recuérdese que

$$q_y = \frac{m_y}{1 + (1 - a_y)m_y}$$

y, con suficiente aproximación  $a_y = 1/2, \forall y \geq u, v$ .

Las funciones biométricas se representarán por  $q'_y, l'_y, d'_y$  y  $e'_y$  para los varones y por  $q_y, l_y, d_y$  y  $e_y$  para el sexo femenino.

El suceso que tiene lugar si el marido muere en el año  $[x, x + 1)$  después del matrimonio, se designará por  $\bar{U}_x$ , mientras que el suceso consistente en que sobreviva en el instante  $x + 1$  se indicará por  $U_{x+1}$ . Análoga notación,  $\bar{V}_x$  y  $V_{x+1}$  se empleará para las esposas.

Por  $w$  se representará el menor número natural tal que, para  $x = w$ , bien  $l'_{u+x+1} = 0$  o bien  $l_{v+x+1} = 0$ .

Finalmente, la duración esperada para el matrimonio  $(u, v, 0)$  se denotará  $e_m$  y la de las respectivas viudedades por  $Z'$  para la del varón y por  $Z$  para la mujer.

### 3. Duración del matrimonio

Sea el matrimonio  $(u, v, 0)$  en el año  $[x, x + 1)$ , posterior al enlace y, en cuyo inicio, se supone que sobreviven ambos cónyuges.

Las cuatro posibles situaciones que se pueden presentar, al principio del año  $[x + 1, x + 2)$  son las siguientes:

- a) Ambos cónyuges sobreviven en el momento  $x + 1$ :

$$U_{x+1} \cap V_{x+1}$$

- b) Sobrevive la mujer, pero el marido murió en  $[x, x + 1)$ :

$$\bar{U}_x \cap V_{x+1}$$

- c) Sobrevive el marido, pero la mujer murió en  $[x, x + 1)$ :

$$U_{x+1} \cap \bar{V}_x$$

- d) Mueren ambos cónyuges a lo largo de  $[x, x + 1)$ :

$$\bar{U}_x \cap \bar{V}_x$$

Recordando el significado de las funciones biométricas  $l_y$  y  $d_x$  de una tabla de mortalidad, es fácil establecer las probabilidades de los sucesos descritos en cada situación. Ténganse en cuenta que los sucesos  $U$  y  $V$  se consideran independientes.

- a) Supervivencia de ambos cónyuges:

$$\Pr(U_{x+1} \cap V_{x+1}) = \Pr(U_{x+1}) \cdot \Pr(V_{x+1}) = \frac{l'_{u+x+1}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v}$$

- b y c) Supervivencia de uno y muerte del otro:

$$\Pr(\bar{U}_x \cap V_{x+1}) = \Pr(\bar{U}_x) \cdot \Pr(V_{x+1}) = \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v}$$

$$\Pr(U_{x+1} \cap \bar{V}_x) = \Pr(U_{x+1}) \cdot \Pr(\bar{V}_x) = \frac{l'_{u+x+1}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v}$$

- d) Mueren ambos cónyuges en  $[x, x + 1)$ :

$$\Pr(\bar{U}_x \cap \bar{V}_x) = \Pr(\bar{U}_x) \cdot \Pr(\bar{V}_x) = \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v}$$

A partir de los resultados anteriores, resulta que la probabilidad de disolución  $p'(D)$  de un matrimonio  $(u, v, 0)$ , a causa de la muerte del marido será:

$$p'(D) = \sum_{x=0}^w \left( \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v} + \frac{1}{2} \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right)$$

y la correspondiente probabilidad  $p(D)$ , para el fallecimiento de la esposa será:

$$p(D) = \sum_{x=0}^w \left( \frac{d_{v+x}}{l_v} \cdot \frac{l'_{u+x+1}}{l'_u} + \frac{1}{2} \frac{d_{v+x}}{l_v} \cdot \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \right)$$

donde  $w$  tiene la significación indicada anteriormente.

En lo que sigue, se admite que las muertes se distribuyen uniformemente dentro del intervalo que se considere. Si sólo uno de los cónyuges del matrimonio  $(u, v, 0)$  muere en el

año  $[x, x + 1)$  y el otro vive en  $x + 1$ , como la muerte ha podido acaecer en cualquier instante del año, se considera que el cónyuge fallecido, en media, ha sobrevivido medio año y, por tanto, la duración del matrimonio será  $x + (1/2)$ .

En caso de que ambos cónyuges fallecieran en  $[x, x + 1)$  se procedería como se indica a continuación. Se divide  $[x, x + 1)$  en  $n$  intervalos iguales:

$$\left[ x, x + \frac{1}{n} \right), \left[ x + \frac{1}{n}, x + \frac{2}{n} \right), \dots, \left[ x + \frac{h-1}{n}, x + \frac{h}{n} \right), \dots, \left[ x + \frac{n-1}{n}, x + 1 \right)$$

Si la muerte del cónyuge que muere primero acontece en el  $h$ -ésimo intervalo, la duración del matrimonio sería

$$\frac{\left( x + \frac{h-1}{n} + x + \frac{h}{n} \right)}{2} = x + \frac{h-1}{2n}$$

La probabilidad de este suceso sería  $1/n$  y la probabilidad de que el otro cónyuge falleciera posteriormente es

$$\frac{\left[ n - \left( h - \frac{1}{2} \right) \right]}{n}$$

y, como el que muere primero puede ser uno cualquiera de los dos, la duración esperada sería:

$$2 \cdot \sum_{h=1}^n \left( x + \frac{h-1}{2n} \right) \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{n-h+\frac{1}{2}}{n} = \sum_{h=1}^n \left( x + \frac{2h-1}{2n} \right) \frac{2n-2h+1}{n^2}$$

que, cuando el número de intervalos tiende a  $\infty$ , dicha duración es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n \left( x + \frac{2h-1}{2n} \right) \frac{2n-2h+1}{n^2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ x \cdot \sum_{h=1}^n \frac{2n-2h+1}{n^2} + \sum_{h=1}^n \frac{(2h-1)(2n-2h+1)}{2n^3} \right] = x + \frac{1}{3}$$

puesto que

$$\sum_{h=1}^n \frac{2n-2h+1}{n^2} = \frac{1}{n^2} [(2n-1) + (2n-3) + \dots + 3 + 1] = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2n^2}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n^3} \sum_{h=1}^n (2h-1)(2n-2h+1) &= \frac{1}{2n^3} \sum_{h=1}^n [2n(2h-1) - (2h-1)^2] = \\ &= 1 - \frac{4n^3 - n}{6n^3} = \frac{2n^3 - n}{6n^3} \end{aligned}$$

Por tanto, la duración esperada del matrimonio será la media ponderada de  $x + (1/2)$  y  $x + (1/3)$ , con sus respectivas probabilidades

$$\frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v} + \frac{l'_{u+x+1}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \quad \text{y} \quad \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v}$$

o sea:

$$\begin{aligned} e_{uv} &= \sum_{x=0}^w \left[ \left( x + \frac{1}{2} \right) \left( \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v} + \frac{l'_{u+x+1}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( x + \frac{1}{3} \right) \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right] \quad [I] \end{aligned}$$

Para simplificar la expresión de [I], basta observar que, como es evidente, la suma de las probabilidades de los sucesos descritos en b), c) y d) es la unidad. Para comprobarlo se parte de

$$d'_{u+x} \cdot l_{v+x+1} + l'_{u+x+1} \cdot d_{v+x} + d'_{u+x} \cdot d_{v+x} = l'_{u+x} \cdot l_{v+x} - l'_{u+x+1} \cdot l_{v+x+1} \quad [II]$$

Sumando de 0 a  $w$ :

$$\sum_{x=0}^w (d'_{u+x} \cdot l_{v+x+1} + l'_{u+x+1} \cdot d_{v+x} + d'_{u+x} \cdot d_{v+x}) =$$

$$= \sum_{x=0}^w (l'_{u+x} \cdot l_{v+x} - l'_{u+x+1} \cdot l_{v+x+1}) = l'_u \cdot l_v; \quad \text{c.q.d.}$$

La fórmula [I] se puede escribir

$$e_{uv} = \sum_{x=0}^w \left[ x \left( \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v} + \frac{l'_{u+x+1}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left( \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v} + \frac{l'_{u+x+1}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right) + \frac{1}{3} \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right] =$$

$$= \sum_{x=0}^w \left[ x \left( \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v} + \frac{l'_{u+x+1}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} + \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \left( \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v} + \frac{l'_{u+x+1}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} + \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right) - \frac{1}{6} \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right]$$

y teniendo en cuenta [II], la fórmula [I] se escribe

$$e_{uv} = \frac{1}{2} + \frac{1}{l'_u l_v} \left[ \sum_{x=0}^w l'_{u+x+1} l_{v+x+1} - \frac{1}{6} \sum_{x=0}^w d'_{u+x} d_{v+x} \right]$$

#### 4. Duración de la viudedad

Sea una mujer que enviuda en el año  $[x, x + 1)$ . Se pueden presentar dos situaciones:

- La mujer sobrevive en el instante  $x + 1$ ;
- La mujer muere, también, en el referido año.

En el caso a) la mujer vivirá medio año del año en que muera (en promedio); luego, la duración de la viudedad será  $e_{u+x+(1/2)}$ .

En el caso b), muerte en el año  $[x, x + 1)$  de ambos cónyuges, se divide, como antes, el año en  $n$  partes iguales,  $h = 1, 2, \dots, n$ ; la duración de su viudedad, si muere en el  $h$ -ésimo intervalo será  $(h - (1/2))/n$ , con probabilidad

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{n-h}{n}$$

o sea, la duración esperada sería:

$$\sum_{h=1}^n \frac{n-h}{n^2} \cdot \frac{h - \frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{h=1}^n \left( nh - \frac{1}{2} n - h^2 - \frac{1}{2} h \right) =$$

$$= \frac{1}{n^3} \left[ \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n^2}{2} - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} - \frac{1}{4} n(n+1) \right]$$

y haciendo  $n \rightarrow \infty$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{h=1}^n \frac{n-h}{n^2} \cdot \frac{h - \frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Teniendo en cuenta estos resultados, se obtiene para la esperanza de la duración de la viudedad femenina

$$Z = \sum_{x=0}^w \left[ \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{l_{v+x+1}}{l_v} \left( e_{v+x+1} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} \frac{d'_{u+x}}{l'_u} \cdot \frac{d_{v+x}}{l_v} \right] =$$

$$= \frac{1}{l'_u l_v} \sum_{x=0}^w \left[ d'_{u+x} \cdot l_{v+x+1} \left( e_{v+x+1} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} d'_{u+x} \cdot d_{v+x} \right]$$

y correlativamente, para los varones

$$Z' = \frac{1}{l'_u l_v} \sum_{x=0}^w \left[ d'_{v+x} \cdot l'_{u+x+1} \left( e_{u+x+1} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{6} d'_{u+x} \cdot d_{v+x} \right]$$

La esperanza de viudedad será  $Z + Z'$ .

## 5. Duración esperada de CVF

Para la mujer se tiene,  $e_v = e_{uv} + Z$  y para el varón  $e'_u = e_{uv} + Z'$ , luego  $Z + Z' = e_u + e_v - 2e_{uv}$ , y como la duración del CVF es la suma de las duraciones del matrimonio y de la viudedad se tiene, en definitiva:

$$E[CVF] = e_{uv} + (e_u + e_v - 2e_{uv}) = e_u + e_v - e_{uv}$$

## 6. Aplicación a la población española

Primeramente se han elaborado unas tablas de mortalidad completas, utilizando el programa para la construcción de una tabla de vida completa de Chiang, referidas al Censo de Población de 1991. Del Movimiento Natural de la Población de dicho año se han tomado los datos de matrimonios de solteros con solteras, a partir de los cuales se han elegido las parejas de grupos de edad representativas; para las marcas de clase de cada pareja elegida, se han calculado  $e_{uv}$  y CVF, como figura en las tablas I y II.

Los indicadores sintéticos se han obtenido como las medias ponderadas de los  $e_{uv}$  y los CVF calculados, utilizando como factor de ponderación el número de matrimonios que corresponde a cada pareja del grupo de edades considerado.

## 7. Bibliografía.

- [1] J. LEGUINA: *Fundamentos de Demografía*, Siglo XXI de España, Madrid, 1981.
- [2] G. TAPINOS: *Elementos de Demografía*, Espasa, Madrid, 1988.  
En ambos libros se encuentra una detallada exposición de las funciones biométricas. Para una ampliación de los conceptos desarrollados y algunas aplicaciones, se pueden consultar:
- [3] G. FEICHTINGER y H. HANSLUWKA: *The impact of mortality on the life cycle and the family in Austria*, Technical Report Series 587, WHO, 1976.
- [4] N.B. RYDER: *Methods in measuring the family life cycle*, Conferencia de Méjico, 1976.
- [5] WHO: *Health and the Family. Studies in the Demography of FLC and their Health implications*, 1982.
- [6] C. L. CHIANG: *The life table and its applications*, Krieger Publishing, Florida, 1984.

TABLA I

$e_{uv}$

SOLTERAS SOLTEROS	<15	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	>60
15-19	53,61	52,83	50,61	47,68	44,23						
20-24	49,86	49,39	48,22	46,02	43,1	39,63					
25-29	45,87	45,58	44,9	43,76	41,53	38,21	35,12				
30-34		41,53	41,11	40,43	39,3	37,07	34,13	30,68			
35-39		37,23	36,99	36,59	35,93	34,8	32,57	29,66	26,26		
40-44		32,85	32,7	32,46	30,08	31,42	30,31	28,19	25,26	23,8	
45-49			28,4	28,26	28,07	27,66	27,02	25,95	23,8	20,99	15,66
50-54			24,19	24,11	23,98	23,76	23,4	22,8	21,79	19,68	14,75
55-59			20,14	20,09	20,02	19,9	19,7	19,36	18,81	17,86	13,88
>60			14,8	14,78	14,75	14,7	14,61	14,47	14,25	13,88	12,79

INDICADOR SINTÉTICO DE  $e(uv) = 44,1$ .

TABLA II

CVF

SOLTERAS SOLTEROS	<15	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	>60
15-19	71,2	69,06	66,41	64,46	63,08						
20-24	70,29	67,84	64,13	61,47	59,55	58,19					
25-29	69,72	67,09	62,9	59,17	56,55	55,04	53,33				
30-34		66,61	62,15	57,96	54,25	51,65	49,78	48,49			
35-39		66,3	61,68	57,21	53,03	49,33	46,75	44,91	43,66		
40-44		66,21	61,49	56,86	52,4	48,23	44,53	41,98	40,18		
45-49			61,2	56,47	51,85	47,4	43,23	39,56	37,05	35,31	
50-54			61,1	56,31	51,6	46,99	42,54	38,4	34,75	32,31	30,18
55-59			61,05	56,22	51,46	46,75	42,15	37,74	33,62	30,03	26,99
>60			61,09	56,24	51,43	46,65	41,93	37,33	32,89	28,71	23,65

INDICADOR SINTÉTICO DE CVF = 60,99.

## CALCULO DE LA INVERSA DE LA MATRIZ DE VANDERMONDE

Emilio Defez Candel

Departamento de Matemática Aplicada  
 Universidad Politécnica de Valencia  
 P.O.BOX 22012. Valencia, Spain  
 edefez@mat.upv.es

### Abstract

In this paper I apply block matrix operations and the Haar's condition of the theory of orthogonal polynomials to obtain an iterative method to compute the inverse of a Vandermonde's matrix.

### 1 La matriz de Vandermonde.

Las matrices de Vandermonde son un tipo especial de matrices que se utilizan en problemas de interpolación, en problemas de Cauchy de ecuaciones diferenciales, etc...

Definición 1.1 Sean  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ . Llamaremos matriz de Vandermonde de orden  $n$  a una matriz de la forma:

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

El siguiente resultado nos proporciona una condición para la invertibilidad de (1):

Proposición 1.1 ([2]) Sean  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ . La matriz de Vandermonde (1) verifica:

$$|V(a_1, a_2, \dots, a_n)| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \quad (2)$$

Notemos que si todos los  $a_i$  son diferentes, entonces el determinante de la matriz de Vandermonde (1) es no nulo y por tanto (1) es invertible. En el caso de tener una matriz de Vandermonde invertible, surge el problema del cálculo de su inversa. Veamos un método de cálculo recogido en [2]:

Sean  $A$  y  $B$  dos espacios vectoriales. Denotaremos por  $\mathcal{L}(A, B)$  al conjunto:

$$\mathcal{L}(A, B) = \{f : A \rightarrow B, f \text{ lineal}\}, \quad (3)$$

Consideremos

$$f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_{n-1}[x], \mathbb{K}^n),$$

definida por

$$f(P(x)) = (P(a_1), P(a_2), \dots, P(a_n)), \quad \forall P(x) \in \mathbb{K}_{n-1}[x].$$

Entonces si

$$C = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \quad C' = \{1, x, \dots, x^{n-1}\},$$

son las bases canónicas de  $\mathbb{K}^n$  y  $\mathbb{K}_{n-1}[x]$  respectivamente, como

$$f(x^i) = (a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i), \quad 0 \leq i \leq n-1,$$

se tiene

$$f_{C \times C'} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = V(a_1, a_2, \dots, a_n)^T$$

y teniendo en cuenta que

$$|V(a_1, a_2, \dots, a_n)^T| = |V(a_1, a_2, \dots, a_n)| \neq 0,$$

entonces  $f$  es un isomorfismo. La imagen inversa de  $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$  es el polinomio  $P(x)$  de grado menor o igual que  $n-1$  tal que verifica

$$P(a_i) = b_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Este polinomio viene dado por

$$P(x) = \sum_{j=1}^n \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{j-1})(x-a_{j+1})\dots(x-a_n)}{(a_j-a_1)(a_j-a_2)\dots(a_j-a_{j-1})(a_j-a_{j+1})\dots(a_j-a_n)} b_j$$

que es el polinomio interpolador de Lagrange. Si

$$f_{C \times C'}^{-1} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix},$$

y si  $P_i(x)$  es un polinomio de  $\mathbb{K}_{n-1}[x]$  tal que

$$P_i(x) = f^{-1}(e_i) = \alpha_{1i} + \alpha_{2i}x + \dots + \alpha_{ni}x^{n-1},$$

verificará

$$P_i(a_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (4)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. De (4) se tiene

$$P_i(x) = \frac{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\dots(x-a_n)}{(a_i-a_1)(a_i-a_2)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)},$$

entonces  $\alpha_{ji}$  es el coeficiente de  $x^{j-1}$  de  $P_i(x)$ . Así, ordenando en sentido creciente el polinomio  $P_i(x)$ , sus coeficientes se corresponden con la fila  $i$ -ésima de la matriz  $V(a_1, a_2, \dots, a_n)^{-1}$ . Dichos coeficientes los podemos obtener operando o mediante las relaciones de Cardano-Vieta, teniendo en cuenta que las raíces de  $P_i(x)$  son  $a_l$ ,  $1 \leq l \leq n$ ,  $l \neq i$  para  $1 \leq i \leq n$ .

Veamos un ejemplo de la utilización de este método:

**Ejemplo 1.1** Vamos a calcular la inversa de la matriz de Vandermonde de orden 3:

$$V(1, -1, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

En este caso

$$a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 3,$$

y

$$P_1(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(1+1)(1-3)}, \quad P_2(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(-1-1)(-1-3)}, \quad P_3(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(3-1)(3+1)}.$$

Operando, se obtiene:

$$P_1(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2, \quad P_2(x) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2, \quad P_3(x) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}x^2.$$

De esta forma:

$$V(1, -1, 3)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 3/8 & -1/2 & 1/8 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}.$$

El método descrito en la sección 1 presenta sin embargo algunos inconvenientes. Cuando el tamaño de la matriz de Vandermonde es grande y los datos vienen dados de forma aproximada, el cálculo del polinomio interpolador de Lagrange es bastante complicado. Además, los cálculos realizados para calcular la inversa de  $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$  no nos sirven para calcular la inversa de  $V(a_1, a_2, \dots, a_n, a_{n+1})$ . Vamos a ver ahora un método iterativo para calcular la inversa de  $V(a_1, a_2, \dots, a_n)$  utilizando la teoría de polinomios ortogonales.

## 2 Polinomios ortogonales. Condición de Haar.

Los polinomios ortogonales se utilizan en la resolución de ecuaciones diferenciales, en teoría de aproximación, fórmulas de cuadratura, [1]. Sea  $\mathbb{R}[x]$  el conjunto de los polinomios en la variable  $x$ ,  $\mathbb{R}_n[x]$  el conjunto de los polinomios de grado  $n$  y coeficiente director no nulo y sea  $W(x)$  una función no negativa en un intervalo  $[a, b]$  (no necesariamente acotado). A esta función  $W(x)$  se la denomina *función peso* si verifica las siguientes condiciones:

1.  $W(x) \geq 0$  es integrable sobre el intervalo finito o infinito  $[a, b]$ .
2. Todas las integrales  $\int_a^b x^k W(x) dx$ ,  $k = 0, 1, \dots$  existen y son finitas. Al valor

$$\mu_k = \int_a^b x^k W(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots$$

se le denomina *momento de orden  $k$* .

3. Para polinomios  $S(x)$  no negativos en el intervalo  $[a, b]$ ,

$$\int_a^b S(x)W(x)dx = 0 \implies S(x) \equiv 0$$

Dada una función peso  $W(x)$ , podemos definir el producto escalar

$$(f, g) = \int_a^b f(x)W(x)g(x)dx,$$

sobre el espacio vectorial  $L^2([a, b])$  de las funciones para las que la integral

$$(f, f) = \int_a^b f^2(x)W(x)dx,$$

existe y es finita. Se dice que una sucesión de polinomios  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}[x]$  es ortogonal con respecto a la función peso  $W(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  si se verifica:

$$\int_a^b P_n(x)W(x)P_m(x)dx = M_n \delta_{nm}, \quad M_n \neq 0, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (5)$$

En [3, pag.143] se demuestra el siguiente resultado sobre la estructura de los polinomios ortogonales para una función peso  $W(x)$ :

**Teorema 2.1** Existe una sucesión de polinomios  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$ ,  $P_n(x) \in \mathbb{R}_n[x]$ , tales que  $(P_i, P_j) = 0$  para  $i \neq j$ . Estos polinomios vienen dados por la fórmula de recurrencia de tres términos

$$\left. \begin{aligned} A_n P_n(x) &= (Ix - B_n) P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 1 \\ P_0(x) &= 1, \quad P_{-1}(x) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

donde  $A_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Al resultado recíproco se le conoce como el *teorema de Favard*.

**Teorema 2.2** Dada una sucesión de polinomios  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  tales que verifican una fórmula de recurrencia de tres términos

$$\left. \begin{aligned} A_n P_n(x) &= (Ix - B_n) P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 1 \\ P_0(x) &= 1, \quad P_{-1}(x) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Entonces existe una función peso  $W(x)$  en un intervalo de la recta real (no necesariamente acotado) y un producto escalar tal que  $(P_i, P_j) = 0$  para  $i \neq j$ .

Estos dos teoremas nos identifican las sucesiones de polinomios ortogonales respecto a una función peso  $W(x)$  en un intervalo de la recta real (no necesariamente acotado) con aquellas sucesiones de polinomios definidas de forma recurrente mediante una relación de tres términos.

Otro resultado muy utilizado en la construcción de fórmulas de cuadratura es el siguiente, [3, pag.145]:

**Teorema 2.3 (Condición de Haar)** Sea  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  una sucesión de polinomios ortogonales (que verifican una relación de recurrencia de tres términos (6)) y sea  $\{a_i\}_{i=1}^n$  una sucesión de números reales distintos. Entonces, la matriz definida por:

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} P_0(a_1) & P_0(a_2) & \dots & P_0(a_n) \\ P_1(a_1) & P_1(a_2) & \dots & P_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n-1}(a_1) & P_{n-1}(a_2) & \dots & P_{n-1}(a_n) \end{bmatrix} \quad (8)$$

es una matriz invertible para todo  $n \geq 1$ .

Nos proponemos ahora determinar la inversa de la matriz (8). Demostraremos el siguiente resultado:

**Teorema 2.4** Sea  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  una sucesión de polinomios ortogonales y sea  $\{a_i\}_{i=1}^n$  una sucesión de números reales distintos. Consideremos la matriz definida por (8) que por el teorema 2.3 es una matriz invertible para todo  $n \geq 1$ . Descomponemos esta matriz en bloques de la forma:

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} P_0(a_1) & P_0(a_2) & \dots & P_0(a_n) \\ P_1(a_1) & P_1(a_2) & \dots & P_1(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n-1}(a_1) & P_{n-1}(a_2) & \dots & P_{n-1}(a_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) & L \\ V & U \end{bmatrix} \quad (9)$$

donde

$$L = \begin{bmatrix} P_0(a_n) \\ P_1(a_n) \\ \vdots \\ P_{n-2}(a_n) \end{bmatrix}, \quad V = [P_{n-1}(a_1) \quad P_{n-1}(a_2) \quad \dots \quad P_{n-1}(a_{n-1})], \quad U = [P_{n-1}(a_n)]. \quad (10)$$

Si denotamos por

$$K(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) = -V [P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1} L + U, \quad (11)$$

entonces  $[P(a_1, a_2, \dots, a_n)]^{-1}$  viene dada por:

$$[P(a_1, a_2, \dots, a_n)]^{-1} = \begin{bmatrix} I & -[P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1} L \\ 0 & [K(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -V & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (12)$$

donde cada matriz identidad  $I$  en (12) tiene las dimensiones adecuadas para que cada una de estas cuatro matrices sea cuadrada.

**Demostración:** Veamos que  $K(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$  definido en (11) es distinto de cero. Este hecho es evidente pues se verifica la siguiente identidad:

$$\begin{bmatrix} P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) & L \\ V & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -L \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ V [P(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1} & K(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

tomando determinantes en (13), dado que la primera matriz es invertible por el teorema 2.3, se tiene

$$K(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \neq 0, \quad (14)$$

y de esta forma existe  $[K(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1}$ . Efectuando el producto de la matrices dadas en (12) por la matriz  $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$  escrita por bloques en (9) se obtiene de inmediato el resultado.  $\square$

Consideremos la sucesión de polinomios  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  definidos por:

$$\begin{bmatrix} P_n(x) = x P_{n-1}(x) ; n \geq 1 \\ P_0(x) = 1, P_{-1}(x) = 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

donde  $A_n = 1, B_n = C_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Por el teorema 2.2 esta sucesión  $\{P_n(x)\}_{n \geq 0}$  es una sucesión de polinomios ortogonales. Sea  $\{a_i\}_{i=1}^n$  una sucesión de números reales distintos. La matriz de Haar (8) asociada a estas sucesiones queda de la forma:

$$P(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = V(a_1, a_2, \dots, a_n), \quad (16)$$

Aplicando (12) se tiene

$$[V(a_1, a_2, \dots, a_n)]^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} I & -[V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1} L \\ 0 & [K(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -V & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [V(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})]^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad (17)$$

Denotando por:

$$\Lambda_n = [V(a_1, a_2, \dots, a_n)]^{-1},$$

podemos escribir (17) de la forma:

$$\Lambda_n = \begin{bmatrix} \Lambda_{n-1} + \Lambda_{n-1} L [K]^{-1} V \Lambda_{n-1} & -\Lambda_{n-1} L [K]^{-1} \\ -[K]^{-1} V \Lambda_{n-1} & [K]^{-1} \end{bmatrix} \quad (E),$$

donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ a_n \\ a_n^2 \\ \vdots \\ a_n^{n-2} \end{bmatrix}, V = [a_1^{n-1} \ a_2^{n-1} \ \dots \ a_n^{n-1}], U = [a_n^{n-1}], K = -V \Lambda_{n-1} L + U.$$

Esta fórmula permite el cálculo iterativo de la inversa de la matriz de Vandermonde.

**Ejemplo 2.1** Vamos a calcular simbólicamente las inversas de las matrices de Vandermonde hasta orden 3 utilizando (17):

(a)  $n=1$ . Tenemos  $V(x_1) = [1]$ , de donde

$$[V(x_1)]^{-1} = [1]$$

(b)  $n=2$ . Se tiene:

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{bmatrix},$$

de donde

$$L = [1], V = [x_1], U = [x_2],$$

$$K(x_1, x_2) = [x_2 - x_1] \Rightarrow [K(x_1, x_2)]^{-1} = \left[ \frac{1}{x_2 - x_1} \right].$$

Aplicando (E):

$$[V(x_1, x_2)]^{-1} = \frac{1}{x_2 - x_1} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix}$$

(c)  $n=3$ . Se tiene

$$V(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

de donde

$$L = \begin{bmatrix} 1 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad V = [x_1^2 \quad x_2^2], \quad U = [x_3^2]$$

$$K(x_1, x_2) = \left[ \frac{x_2^2 x_1 - x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3 + x_3^2 x_2 - x_3^2 x_1}{x_2 - x_1} \right]$$

$$\Rightarrow [K(x_1, x_2)]^{-1} = \left[ \frac{x_2 - x_1}{x_2^2 x_1 - x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3 + x_3^2 x_2 - x_3^2 x_1} \right]$$

Aplicando (E):

$$[V(x_1, x_2, x_3)]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{x_2 x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} & \frac{x_2 + x_3}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)} & \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} \\ \frac{x_1 x_3}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} & \frac{x_1 + x_3}{(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)} & \frac{1}{(x_1 - x_2)(x_3 - x_2)} \\ \frac{x_1 x_2}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} & \frac{x_1 + x_2}{(x_1 - x_3)(x_3 - x_2)} & \frac{1}{(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)} \end{bmatrix}$$

En el caso del ejemplo 1.1, para la matriz de Vandermonde:

$$V(1, -1, 3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

donde  $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 3$ , se obtiene:

$$V(1, -1, 3)^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & -1/4 \\ 3/8 & -1/2 & 1/8 \\ -1/8 & 0 & 1/8 \end{bmatrix}$$

## Bibliografía

- [1] T. S. CHIHARA, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [2] E. NAVARRO, E. PONSODA y R. COMPANY, *Algebra*, Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia, Ref: 97-824, 1997.
- [3] J. STOER y R. BULIRSCH, *Introduction to Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1980.

# ALGUNAS APLICACIONES DE UN TEOREMA DE PEANO

Juan Carlos Cortés López  
Departamento de Matemáticas  
I.E.S. Bonifacio Sotos. Casas Ibáñez (Albacete)

## Abstract

This work concentrates on a result gives by Giuseppe Peano which allows the obtention of the classical theorems about differential calculus by Lagrange and Cauchy. We shall also apply Peano's result in order to obtain a method which will generate new functional inequalities as well as calculate limits.

## 1 El teorema de Peano

Empezamos recordando un resultado que luego utilizaremos y que nos dice cómo derivar determinantes funcionales.

**Lema 1** . Dadas " $n^2$ " funciones derivables  $\{f_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq n}$  en un intervalo abierto  $]a, b[$ , consideremos la función

$$D : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$$

dada por el determinante

$$D(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

entonces la función  $D(x)$  es derivable en  $]a, b[$  y además su derivada viene dada por

$$D'(x) = \sum_{k=1}^n D_k(x)$$

donde

$$D_k(x) = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f'_{k1}(x) & \dots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Presentamos ya el teorema de Peano.

**Teorema 1.** Sean  $f$ ,  $g$  y  $h$  funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $]a, b[$ , entonces existe al menos un punto  $c \in ]a, b[$ , tal que

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

**Demostración.** A partir de las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$  definamos la función  $P : ]a, b[ \rightarrow R$ , dada por

$$P(x) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f(x) & g(x) & h(x) \end{vmatrix}$$

la cual cumple las hipótesis del teorema de Rolle:

- $P$  es continua en  $[a, b]$ , por serlo por hipótesis las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$ .
- $P$  es derivable en  $]a, b[$ , por serlo por hipótesis las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$ .
- $P(a) = P(b) = 0$ , ya que entonces el determinante tiene dos filas iguales.

Luego entonces existe al menos un punto  $c \in ]a, b[$ , tal que

$$P'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(c) & g'(c) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

donde para calcular la derivada de  $P$  hemos usado el *lema 1* y que el determinante de una matriz con una fila de ceros es nulo.

## 2 Los teoremas de Lagrange y de Cauchy generalizado

*Teorema de Lagrange*

Particularizando el teorema de Peano para las funciones  $g(x) = x$  y  $h(x) = 1$ , que obviamente cumplen sus hipótesis, se tiene que existe al menos un  $c \in ]a, b[$ , tal que

$$P'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & a & 1 \\ f(b) & b & 1 \\ f'(c) & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

esto es, desarrollando el determinante

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

que es teorema del valor medio o de Lagrange.

*Teorema de Cauchy*

Para deducirlo basta aplicar el teorema de Peano tomando  $h(x) = 1$ , de lo cual resulta que existe al menos un  $c \in ]a, b[$ , tal que

$$P'(c) = \begin{vmatrix} f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \\ f'(c) & g'(c) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

y desarrollando el determinante se tiene

$$f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a))$$

que es el teorema de Cauchy generalizado.

## 3 Generación de nuevas desigualdades funcionales

Es bien sabido que tanto el teorema de Lagrange como el teorema de Cauchy permiten, entre sus múltiples aplicaciones, deducir desigualdades

funcionales: el teorema de Lagrange involucrando una función  $f(x)$  y el teorema de Cauchy relacionando dos funciones  $f(x)$  y  $g(x)$ . Así, por ejemplo, es sencillo probar usando el teorema del valor medio sobre la función  $f(x) = \ln x$  en  $[a, b]$  que

$$1 - (a/b) < \ln b/a < (b/a) - 1, \quad 0 < a < b. \quad (1)$$

y aplicando el teorema de Cauchy a las funciones  $f(x) = 2x \arctan x$  y  $g(x) = \ln(1+x^2)$  en  $[0, x]$  que

$$2x \arctan x > \ln(1+x^2)$$

En este apartado aplicaremos el teorema de Peano para deducir nuevas desigualdades involucrando tres funciones  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$ . Como este trabajo no pretende agotar toda la variedad de desigualdades que pueden interesar y deducirse a partir de esta técnica, sino abrir un nuevo método de trabajo, tan sólo mostraremos un ejemplo interesante de aplicación, dejando de esta forma una puerta abierta a una exploración futura.

**Ejemplo 1.** Consideremos las funciones  $f(x) = \sin x$ ,  $g(x) = \cos x$  y  $h(x) = x$  en el intervalo  $[x, y]$  con  $0 < x < y < \pi/2$ . Como  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  cumplen las hipótesis del teorema de Peano, sabemos que existe al menos un  $z$ :  $0 < x < z < y < \pi/2$ , tal que

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x & x \\ \sin y & \cos y & y \\ \cos z & -\sin z & 1 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante, para  $0 < x < z < y < \pi/2$  se tiene

$$[y \sin x - x \sin y] \sin z + [y \cos x - x \cos y] \cos z = \sin(y-x)$$

ahora teniendo en cuenta que

$$0 < \sin z < 1, \quad 0 < \cos z < 1 \text{ para } 0 < z < \pi/2$$

y la conocida desigualdad

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin y}{y}, \quad 0 < x < y < \pi/2$$

y que

$$\frac{\cos x}{x} > \frac{\cos y}{y}, \quad 0 < x < y < \pi/2$$

ya que

$$f(x) = \frac{\cos x}{x} \text{ es decreciente, } 0 < x < \pi/2,$$

pues

$$f'(x) = \frac{-(x \sin x + \cos x)}{x^2} < 0, \quad 0 < x < \pi/2$$

obtenemos una cota del seno de la diferencia de dos ángulos

$$0 \leq \sin(y-x) \leq y(\sin x + \cos x) - x(\sin y + \cos y)$$

## 4 Mejora de desigualdades funcionales y cálculo de límites

En (1) hemos visto que

$$1 - (x/y) < \ln y/x < (y/x) - 1, \quad 0 < x < y$$

Tomando  $x = 10$  e  $y = 12$  obtenemos la siguiente acotación del  $\ln 1.2$

$$0.1\hat{6} = 1/6 < \ln 1.2 < 1/5 = 0.2$$

A continuación y aplicando el teorema de Peano mejoraremos esta desigualdad. Aún más, daremos un método recurrente para mejorar cada vez más la desigualdad optimizada en el paso anterior. Para ello aplicaremos el resultado de Peano a las funciones  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$  y  $h(x) = 1$  en el intervalo  $0 < x < y$ . Por cumplirse las hipótesis del teorema de Peano sabemos que existe un punto  $z$ , con  $0 < x < z < y$ , tal que

$$\begin{vmatrix} \ln x & \sqrt{x} & 1 \\ \ln y & \sqrt{y} & 1 \\ 1/z & \frac{1}{2\sqrt{z}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante,

$$\frac{1}{2\sqrt{z}} (\ln y - \ln x) = \frac{1}{z} (\sqrt{y} - \sqrt{x})$$

como  $x < z < y$  y la función  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  es decreciente se tiene

$$\frac{2}{\sqrt{y}} < \frac{\ln y - \ln x}{\sqrt{y} - \sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{z}}{z} = \frac{2}{\sqrt{z}} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

en consecuencia obtenemos la siguiente cota de  $\ln(y/x)$

$$\frac{2(\sqrt{y} - \sqrt{x})}{\sqrt{y}} < \ln\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{2(\sqrt{y} - \sqrt{x})}{\sqrt{x}} \quad (2)$$

que aplicada para  $x = 10$  e  $y = 12$  nos da la siguiente acotación de  $\ln 1.2$ , que mejora la anteriormente dada

$$0.174258... < \ln 1.2 < 0.190890...$$

siendo el valor exacto  $\ln 1.2 = 0.182321...$

De hecho es fácil ver que (2) efectivamente constituye una mejora de (1), pues

$$1 - \frac{x}{y} < \frac{2(\sqrt{y} - \sqrt{x})}{\sqrt{y}}$$

y

$$\frac{2(\sqrt{y} - \sqrt{x})}{\sqrt{x}} < \frac{y}{x} - 1$$

como es sencillo demostrar, para ello basta probar las desigualdades que resultan de realizar previamente el cambio de variable  $t = \frac{y}{x}$ , las cuales son inmediatas.

Mejoramos aún más esta desigualdad. Aplicamos el teorema de Peano a las funciones  $f(x) = \ln x$ ,  $g(x) = \sqrt[n]{x}$  y  $h(x) = 1$  en el intervalo  $[x, y]$  con  $0 < x < y$  donde se cumplen las hipótesis pertinentes. Por tanto existe  $z$ , con  $0 < x < z < y$  de modo que

$$\begin{vmatrix} \ln x & \sqrt[n]{x} & 1 \\ \ln y & \sqrt[n]{y} & 1 \\ \frac{1}{z} & \frac{1}{n \sqrt[n]{z^{n-1}}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

operando se llega a que

$$\frac{1}{n \sqrt[n]{z^{n-1}}} [\ln y - \ln x] = \frac{1}{z} [\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}]$$

como  $x < z < y$  se tiene

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} > \frac{1}{\sqrt[n]{z}} > \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$$

por tanto

$$\frac{n}{\sqrt[n]{y}} < \frac{\ln y - \ln x}{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}} = \frac{n \sqrt[n]{z^{n-1}}}{z} = \frac{n}{\sqrt[n]{z}} < \frac{n}{\sqrt[n]{x}}$$

o equivalentemente

$$n \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} < \ln \frac{y}{x} < n \frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{x}} \quad (3)$$

que mejora la desigualdad (2). De hecho si aplicamos (3) para  $n = 5$ ,  $x = 10$  e  $y = 12$  obtenemos la siguiente cota de  $\ln 1.2$

$$0.179037... < \ln 1.2 < 0.185686...$$

Y la aproximación mejora al aumentar el valor de  $n$ .

Además observemos que (3) puede escribirse

$$n \left(1 - \sqrt[n]{\frac{x}{y}}\right) < \ln \frac{y}{x} < n \left(\sqrt[n]{\frac{y}{x}} - 1\right)$$

Así efectuando en esta última desigualdad el cambio de variable  $t = \frac{y}{x}$ , podemos reescribirla como

$$n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{t}}\right) < \ln t < n \left(\sqrt[n]{t} - 1\right)$$

esto es

$$n \left(\frac{\sqrt[n]{t} - 1}{\sqrt[n]{t}}\right) < \ln t < n \left(\sqrt[n]{t} - 1\right)$$

Tomando límites cuando  $n \rightarrow \infty$ , teniendo en cuenta que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{z} = 1$  y que  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{t} - 1\right)$  existe, se deduce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt[n]{t} - 1\right) = \ln t$$

# Tendencias y repercusiones del Álgebra actual

Concepción Romo Santos

*Departamento de Álgebra  
Universidad Complutense*

## Abstract

*In this article it's given a study of the grand importance and rôle of the Algebra in the present science. Also it's given a study of the didactics of Algebra.*

## 1. La gran importancia del Álgebra en la ciencia actual

El Álgebra es un elemento esencial para el desarrollo de las Matemáticas y de las Ciencias y por tanto, su estudio es siempre una cuestión de importancia vital para la sociedad.

Nos referimos brevemente al concepto del Álgebra. El Álgebra es una ciencia, en un proceso de elaboración constante, y, por consiguiente, como todo lo vital, no puede delimitarse con una definición. Cada conquista amplía sus límites, establece nuevas conexiones con otras ramas de la Matemática, hace por tanto más difusa la línea que las separa, y, como consecuencia, modifica el concepto que de ella puede formarse.

La palabra "álgebra" proviene del nombre de un tratado del matemático y astrónomo Mohammed al-Kharizmi, que vivió en el siglo IX. Su tratado sobre álgebra llevaba por título *al-jabr w'almugabala*, que significa: "transposición y eliminación". Por transposición se entiende la transferencia de términos al otro miembro de una ecuación, y por eliminación la cancelación de términos iguales en ambos miembros.

La palabra árabe *al-jabr* se convirtió en "álgebra" al transcribirla al latín, mientras que *al-mugabala* fue desechada, lo cual explica el término moderno "álgebra" para esta disciplina.

La palabra "álgebra" tiene también otra acepción (del árabe *jabr*; restituir a su lugar) con referencia a los huesos, aparece en la muestra de los barberos antiguos, que se decían:

“algebristas y sangradores”. Y hoy en día algunas consultas de traumatólogos se llaman “Álgebra médica”.

El origen del término “álgebra” responde muy bien al contenido real de la ciencia misma. El Álgebra es en esencia la doctrina de las operaciones matemáticas consideradas formalmente desde un punto de vista general, con abstracción, de los números concretos, y sus problemas están relacionados fundamentalmente con las reglas formales para la transformación de expresiones y la resolución de ecuaciones.

Más tarde, Omar Khayyam definió el Álgebra como la ciencia de resolver ecuaciones. Esta definición no tuvo su significado hasta finales del siglo XIX, cuando el Álgebra, junto con la teoría de ecuaciones, tomó nuevos derroteros, modificando esencialmente su carácter, pero no ese espíritu de generalidad que posee como ciencia de las operaciones formales.

El Álgebra contemporánea es el estudio de las operaciones, de las reglas de cálculo. Pero no se circunscribe como el Álgebra clásica, al estudio de las propiedades de las operaciones con números, sino que aspira a investigar propiedades de operaciones con elementos de una naturaleza mucho más general. Esta tendencia viene dictada por necesidades de orden práctico. Por ejemplo, en Mecánica sumamos fuerzas, velocidades, rotaciones, etc. Si para un conjunto dado de objetos se definen ciertas operaciones que satisfacen ciertas propiedades, se dice entonces que se ha definido una estructura algebraica. El actual punto de vista sobre el Álgebra consiste en considerarla como el estudio de las diferentes estructuras algebraicas. Puede considerarse que la noción de estructura aparece con la definición por Cayley en 1854 del concepto de grupo abstracto y se desarrolla hasta la teoría de categorías actual, desarrollada en los últimos cincuenta años, que proporciona el marco correcto para el desarrollo de técnicas de gran importancia como la homología, que reúnen aspectos aislados que habían ido apareciendo al profundizar en problemas de teoría de grupos, anillos, módulos, etc... El primer trabajo en el que se enfoca el Álgebra desde el punto de vista de las estructuras es el famoso libro de Van der Waerden: “Modern Algebra”, de importancia capital para el desarrollo algebraico posterior.

Hablaremos ahora un poco de la influencia del Álgebra en otras ramas de la Matemática, y en otras ciencias en general. El Álgebra no es una ciencia aplicada en el sentido que tienen estas hoy en día, sino una ciencia pura. Las ciencias aplicadas tienen, en su acepción usual, dos características que las definen, la de resolver problemas concretos del mundo que nos rodea y la de tomar prestado para este fin, un cuerpo de doctrina ya elaborado. El Álgebra no depende de nada, salvo de la teoría de conjuntos de la que, en última instancia depende la Matemática toda, y además es una ciencia pura porque tiene su propia problemática, independiente de los fenómenos de la vida real. Pero el Álgebra sí es una ciencia que se aplica. Ella presta a otras ramas de la Matemática y a otras ciencias en general, sus estructuras para lograr descripciones formales que las aclaren y potencien nuevos descubrimientos. Bien conocidas por ejemplo, las aplicaciones de la teoría de grupos y álgebras de Lie a la Física, de las formas cuadráticas a la teoría de los cuantos de Plank, del cálculo tensorial a la teoría de la relatividad y de la teoría de grupos a la cristalografía.

El Álgebra es fundamental para el desarrollo de teorías y técnicas científicas cuyo objeto es el diseño y el uso de los computadores electrónicos. Un ejemplo más de la interacción de la ciencia pura y la aplicada, ese debate secular entre el “saber” y el “saber hacer”.

Respecto de otras ramas matemáticas, el Álgebra es una fecunda auxiliar de su desarrollo. El ejemplo quizás más palpable es el de la simbiosis Álgebra Conmutativa- Geometría Algebraica, simbiosis tal que, de un lado, la Geometría Algebraica sería sin el Álgebra Conmutativa poco más que una colección de teoremas nebulosos (recuérdese la antigua geometría italiana), y del otro, aquella es la que determinó el desarrollo de ésta gracias a la problemática que le planteó y le sigue planteando. El Álgebra Conmutativa no es sino la herramienta de trabajo de la Geometría Algebraica, y no es sólo en este caso, sino que hay muchos más. Recuérdese, por citar algo, la aplicación cada vez más creciente de la teoría de semigrupos al análisis funcional y la gran importancia del Álgebra en el desarrollo de la Topología Algebraica.

Y es que en el fondo de todo objeto matemático o colección de objetos, se encuentra la estructura algebraica. Por eso la casi totalidad de las ramas matemáticas usan de los teoremas del Álgebra en su propio beneficio. Pero esta dependencia del Álgebra no es como la dependencia, por ejemplo, de la Lógica. La Lógica suministra el esquema de razonamiento verdadero pero ahí para su misión. El Álgebra en cambio, como ciencia positiva que es, suministra a otras partes de la matemática resultados positivos que ellas usan para sacar sus conclusiones, asimismo positivas.

## 2. Principales tópicos del Álgebra. Aplicaciones

Es un hecho que el Álgebra es muy amplia, no sólo considerada como un fin en sí misma, sino considerada desde el punto de vista de las aplicaciones, de la cantidad de materia que se necesita en otras disciplinas. Estudiaremos brevemente los tópicos más importantes del Álgebra: categorías, grupos, anillos, cuerpos y módulos.

### Categorías

Dado el gran desarrollo que han tenido las matemáticas en los últimos tiempos, se ha tratado de sistematizar su estudio, agrupando los casos particulares en ciertas estructuras algebraicas que engloban sus características comunes.

Si analizamos lo estudiado hasta ahora, vemos que el camino seguido en todos los casos, tiene muchos puntos en común.

Así, estudiamos primero los conjuntos, con sus aplicaciones, la ley de composición interna y el elemento identidad definido en dichas aplicaciones.

De la misma forma:

*Grupos*: homomorfismos, ley de composición, identidad.

*Anillos*: homomorfismos, ley de composición, identidad.

*Espacios topológicos*: aplicaciones continuas, ley de composición, identidad.

Parece lógico por tanto, intentar sistematizar el estudio de todas estas estructuras, al hacerlo se pierden algunas propiedades particulares en cada caso, pero se gana en comodidad de lenguaje. Luego desde el punto de vista metodológico se impone el estudio de la teoría de categorías.

La teoría de categorías es una de las ramas más jóvenes del Álgebra, pues cuenta poco más de cincuenta años de existencia, pero que, a pesar de esto, está enormemente desarrollada. El mundo de las categorías es fascinante para un matemático pues satisface una de sus ansias más primarias: el hablar de mucho con pocas palabras, el dar un teorema que resuma en él muchos otros anteriores.

La teoría de categorías y el lenguaje functorial, además de su valor intrínseco, representan un modo de expresión particularmente adecuado y un método de trabajo muy potente en la investigación matemática actual.

Eilenberg y Stenrod proponen una descripción axiomática de la teoría de homología y lo hacen ya en términos functoriales. Asimismo, el punto de vista functorial, domina la construcción de la obra de Cartan y Eilenberg, sobre el Álgebra Homológica.

Y en la introducción de sus "Elements de Geometrie Algebrique", Grothendieck señala el lenguaje functorial entre el material de partida indispensable para seguir su construcción de la Geometría Algebraica.

## Grupos

La teoría de grupos desempeña un papel particularmente importante en el Álgebra contemporánea. La teoría de grupos ha nacido de la necesidad de encontrar un método para estudiar propiedades tan importantes del mundo real como es, por ejemplo, la simetría.

El conocimiento de las propiedades simétricas de los cuerpos geométricos u otros objetos matemáticos o físicos nos da a veces la clave para determinar su estructura. Sin embargo, aunque el concepto de simetría es completamente intuitivo, para dar una descripción exacta y general de lo que es una simetría, y en particular una exposición cuantitativa de sus propiedades, es necesario hacer uso del aparato de la teoría de grupos.

La teoría de grupos nació a finales del siglo XVIII y comienzos del XIX. Al principio se desarrolló solamente como un método auxiliar en los problemas sobre la resolución de ecuaciones por radicales. Ello se debió a que fue precisamente en estos problemas donde

se observó por primera vez que las propiedades de simetría de las raíces de la ecuación son fundamentales para la resolución completa del problema. A lo largo de los siglos XIX y XX se puso de manifiesto en muchas otras ramas de la ciencia el importante papel de las leyes de la simetría: Geometría, Cristalografía, Física y Química. Esto llevó a una mayor propagación de los métodos y resulta dos de la teoría de grupos.

El siglo XIX, más que ningún otro de la Historia, ha sido rico en matemáticos de primer orden. Gauss llegó a establecer en esencia lo que en lenguaje moderno, es una ley de grupo abeliano. Galois fue el iniciador de la teoría de las ecuaciones algebraicas, representación lineal de grupos. Sin embargo fue mucho más tarde, con la aparición del famoso libro de Jordan cuando la teoría de grupos empezó a desarrollarse y a ser conocida. Hoy la teoría de grupos es una disciplina matemática bien consolidada debido a que el concepto de grupo se ha extendido a la geometría, al cálculo, al análisis funcional, a la topología, a la física teórica, etc. No hay más que mirar las publicaciones registradas en el *Mathematical Reviews* para asegurarse de que la investigación actual en teoría de grupos es vigorosa y extensa.

Como curiosidad citaremos la siguiente: En muchos ornamentos y mosaicos de la Alhambra de Granada se han hallado, en su esencia, los diecisiete grupos cristalográficos que fueron descubiertos por E. Fedorov en 1891 e, independientemente, por G. Polya en 1924.

## Anillos

En la teoría de anillos juega un papel fundamental el estudio de los anillos conmutativos y con unidad, lo que se conoce con el nombre de "Álgebra Conmutativa". El Álgebra Conmutativa se desarrolló a partir de dos fuentes: 1) la geometría algebraica y 2) la teoría de números.

En 1) el prototipo de anillos estudiado es el anillo  $k[X_1, \dots, X_n]$  de polinomios en varias variables sobre un cuerpo  $K$ . En 2) es el anillo  $Z$  de los números enteros. El Álgebra conmutativa es una de las piedras fundamentales de la moderna Geometría Algebraica. Proporciona los instrumentos para esta rama de las Matemáticas, de forma más o menos análoga a como el Análisis Diferencial proporciona los instrumentos para la Geometría Diferencial.

La noción central en Álgebra Conmutativa es el ideal primo. Éste proporciona una generalización común de los números primos de la Aritmética y de los puntos de la Geometría. La noción geométrica de concentrar la atención en el entorno de un punto, tiene su análogo algebraica en el importante proceso de localización de un anillo en un ideal primo.

Hablemos ahora de la relación Álgebra Conmutativa-Geometría Algebraica. Tomemos un texto de Álgebra Conmutativa, podemos elegir cualquiera entre los dos volúmenes de Zariski-Samuel o también el de Matsumura. Esos textos contienen tópicos dirigidos

hacia el estudio de la teoría de números. Pero la inmensa mayoría de los temas tratados en ellos tienen otro objetivo: La Geometría Algebraica. La mayor parte de los teoremas interesantes del Álgebra Conmutativa tienen una traducción directa e inmediata a la Geometría Algebraica. Pero hay mucho más, justamente lo más importante: el desarrollo del Álgebra Conmutativa ha venido condicionado por la Geometría Algebraica en el sentido de que la problemática de ésta ha sido la que indujo la de aquélla. Así es que una gran parte del Álgebra Conmutativa tiene como única y exclusiva misión servir de basamento a la Geometría Algebraica. Esto establece la relación en un sentido. Veamos el otro. ¿Existe hoy día la Geometría Algebraica tal como se concebía hace 50 años? La respuesta es casi radicalmente que no. Sólo quedan unos pocos cultivadores esporádicos de la vieja Geometría italiana. Y es que Oscar Zariski primero y Grothendieck después convirtieron a la Geometría italiana en una rama del Álgebra. Cuando un matemático de hoy piensa en una variedad algebraica piensa automáticamente en un álgebra finitamente generada sobre un cuerpo, su anillo de funciones polinómicas; cuando piensa en una subvariedad de una variedad, piensa en un ideal de este anillo; cuando piensa en un punto simple, piensa en un anillo local regular, etc. Simplificando la cuestión, Zariski hizo que un texto de Álgebra Conmutativa y otro de Geometría Algebraica sean prácticamente una misma cosa: estudian los mismos puntos sólo que usando palabras diferentes, de las cuales todo especialista tiene *in mente* un diccionario en los dos sentidos.

Pondremos ahora más ejemplos demostrativos de la gran relación entre el Álgebra y la Geometría. Una vez elegido un sistema de coordenadas, cada punto viene representado por dos números, si nos ceñimos al plano, o por tres si lo consideramos en el espacio. Estos números son las coordenadas del punto respecto del sistema de referencia adoptado. La identificación de cada punto con sus coordenadas, permitirá operar aritméticamente en el campo geométrico.

De esta relación entre la Geometría y el Álgebra, triunfa el Álgebra, y ya Descartes, creador, juntamente con Fermat, de la Geometría Analítica, concibe la Matemática en su unidad esencial y considera el Álgebra como la ciencia matemática fundamental.

Las figuras geométricas vendrán caracterizadas por relaciones numéricas que verifican todos sus puntos y sólo ellos. Estas relaciones numéricas son las "ecuaciones de la figura dada". Así, una recta es el conjunto de puntos  $(x, y)$  que verifican una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

$$ax + by + c = 0$$

De esta concepción, surge la idea de clasificar las curvas según el grado de la ecuación que las representa. Una recta es una curva de primer grado; las cónicas son curvas de segundo grado; las curvas de tercer grado son las cúbicas; etc. Esta clasificación es de carácter estrictamente algebraico y, en general, no refleja bien lo que pudiéramos llamar peculiaridades geométricas de la figura. Los problemas clásicos de construcciones de figu-

ras, intersecciones, lugares geométricos, etc., quedan reducidos al estudio de las ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Ya que estamos metidos en Geometría Algebraica hablaremos un poco de la teoría de esquemas y del importante problema de la resolución de singularidades.

La generalización del concepto de variedad algebraica, lleva a la actual construcción de la Geometría Algebraica, utilizando el lenguaje de los esquemas.

En esta construcción, el Álgebra y la Topología, intervienen tan estrechamente unidas, que es con frecuencia difícil deslindar sus campos. La teoría de haces proporciona el lenguaje indispensable para interpretar en términos geométricos las nociones esenciales del Álgebra Conmutativa, y para "globalizarlas" y desempeña un papel fundamental en la elaboración actual de la Geometría Algebraica. Y en su base, está el concepto de haz, donde aparecen íntimamente ligados el aspecto algebraico y el topológico.

La gran importancia del método de la resolución de singularidades está en que una gran parte de los teoremas de la Geometría Algebraica "global" se prueban para variedades lisas, desconociéndose qué pasa con ellos en el caso de variedades con puntos singulares. Así, poseyendo un teorema de desingularización, es decir un proceso que permita pasar de una variedad con singularidades a una lisa que sea "muy semejante a la primera" (es decir, brracionalmente equivalente a la primera), se pueden extender los teoremas de variedades lisas a cualquier variedad.

## Cuerpos

La teoría de cuerpos cubre los tópicos más usuales con un énfasis marcado en llegar a la teoría de Galois y sus grandes aplicaciones a la teoría algebraica de números. También para ilustrar la profundidad de la teoría de cuerpos, plantearemos el antiguo problema de la constructibilidad de figuras geométricas empleando solamente la regla y el compás, lo cual es un claro ejemplo del traslado de un problema geométrico al álgebra. Éstos son los llamados problemas clásicos de la geometría griega. Como es sabido son los tres siguientes: realizar con regla y compás la trisección del ángulo, la duplicación del cubo y la cuadratura del círculo.

El proceso del intento de resolución de cada uno de ellos, que ha durado muchos siglos, ha invadido otras partes de la matemática, en apariencia muy alejadas, que han debido desarrollarse para tratar de realizar los problemas planteados inicialmente. Así, los dos primeros —la trisección del ángulo y la duplicación del cubo— desembocaron en la resolución analítica de ecuaciones de tercer grado con coeficientes racionales y, el tercero en la demostración de la trascendencia de  $\pi$ , no conseguida hasta el siglo XIX. Del estudio de estos nuevos problemas, equivalentes a los propuestos por los griegos mucho antes, se ha llegado, como es conocido, a la irresolubilidad de los mismos.

Es de destacar la costumbre de los autores del siglo XVI, que mantenían en secreto sus descubrimientos científicos con el objeto de resaltar y prevalecer sobre sus adversarios en competiciones públicas donde se planteaban problemas. Así sucedió en la primera mitad de ese siglo, en que los algebristas italianos impulsaron la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado en desafíos públicos de ese tipo, consistentes en el planteamiento de problemas entre dos matemáticos rivales como ya se ha dicho.

Tras el descubrimiento de la resolución de las ecuaciones algebraicas de tercer y cuarto grado por los matemáticos italianos del siglo XVI, no hubo prácticamente matemático importante que no intentara resolver las ecuaciones de grado mayor o igual que cinco, dando de esa forma un gran impulso a la teoría de ecuaciones.

Hasta 1824 no se encontró la respuesta a este problema, cuando el joven genio noruego Abel demostró que no existe expresión radical de los coeficientes de dichas ecuaciones, que sea raíz de las mismas; es decir, que no hay fórmulas para la resolución de una ecuación general de grado mayor o igual que cinco. Con ello quedó definitivamente zanjada la cuestión.

La imposibilidad de cuadrar el círculo utilizando regla y compás fue probada por Ferdinand Lindemann (1882) al demostrar la trascendencia de  $\pi$ .

### Módulos

La tendencia a la linealización, ha hecho del estudio de los módulos un tema central del Álgebra. La intervención del Álgebra Homológica ha reforzado esta tendencia, puesto que esta rama del Álgebra se ocupa esencialmente de cuestiones de naturaleza lineal.

El Álgebra Homológica tiene muchas aplicaciones al Álgebra Conmutativa. Es indudable a estas alturas la influencia que el Álgebra Homológica ha tenido en el resto del Álgebra, tanto en el planteamiento de problemas como en la resolución de los mismos. Esta influencia es ineludible en muchos casos, especialmente llamativa en aquellos enunciados que aún no siendo de tipo homológico requieren de estas técnicas para su demostración. Como ejemplo citaremos la aplicación de los complejos de Koszul a los sistemas lineales de formas cuadráticas.

### 3. Didáctica del Álgebra

El punto de arranque de los actuales sistemas de enseñanza en la civilización occidental, hoy sujetos a profundas renovaciones, se sitúa a finales del siglo XVIII y principios del XIX, momento en que toman cuerpo y configuración las distintas disciplinas científicas. La armonía unitaria del saber clásico, se vio entonces rota con la aparición de especialidades autónomas a nivel de investigación y enseñanza media y así, al programa clásico de las

humanidades, se añadió por yuxtaposición un conjunto enciclopédico que tenía como función primordial el servir de puente y base para el acceso a la Universidad y al progreso de la ciencia.

La dinámica de la evolución cultural impuso así un planteamiento de la enseñanza epistemológico, en el cual el hombre, más que sujeto y fin intencional, es objeto y medio de la transmisión de los saberes científicos. En el progreso mismo de la ciencia pusieron su esperanza de paz y bienestar muchos hombres de los primeros años de nuestro siglo.

Los hechos que se han sucedido, han puesto de manifiesto la unilateralidad de este enfoque y la necesidad de un planteamiento antropológico y sociológico, en el cual los derechos de la ciencia quedan integrados en la perspectiva más general de lo humano. La actitud humanista en la enseñanza de hoy, implica la primacía de lo humano y el sentido de lo humano. Dentro de este marco general, situamos la enseñanza del Álgebra, cuyos métodos, como los de cualquier otra materia, estarán condicionados por estos dos puntos fundamentales:

- El alumno, que recibe la formación.
- La ciencia y sus posibilidades específicas, para contribuir a esta formación.

Ambos aspectos deben ser tenidos en cuenta con ponderación en todos los niveles de la enseñanza. Los distintos niveles marcarán el peso que se ha de conceder a cada uno de los dos pilares, pero en ninguno de ellos, podrá prescindirse de la consideración de uno u otro.

Considerando ya particularmente la enseñanza del Álgebra notamos que esta materia puede considerarse como una continuación de la aritmética, y como tal debe ser enseñada. Implica indudablemente un cambio metodológico al pasar del cálculo con números de la aritmética al cálculo literal del Álgebra, lo que significa un gran avance en el campo de la abstracción y la generalización.

Se requiere por tanto un especial cuidado didáctico para que quede patente el nexo entre ambas materias, y que el alumno perciba que el simbolismo algebraico es sólo una manera de generalizar ciertas propiedades aritméticas.

Este cambio no es nada fácil y son numerosos los ejemplos de la historia del álgebra que nos muestran cómo la búsqueda de ese lenguaje específico constituye un largo y complejo proceso.

Como ejemplo de ello haremos notar que el desarrollo de la simbología matemática fue muy lento. Los primeros ejemplos conocidos de uso regular de los signos + y - aparecen en el siglo XV, en el libro de Johannes Widman "Mercantile Arithmetic" (Leipzig, 1489).

El Álgebra simbólica se debe principalmente a Francois Viète (1540-1603) quien, en su "In Artem Analyticam Isagoge", introdujo el uso de letras para representar cantidades y el empleo de la notación  $A$  quadratus,  $A$  cubus... para representar  $x^2$ ,  $x^3$ , ... Por último dire-

mos que la costumbre de usar las primeras letras para representar cantidades conocidas y las últimas para las desconocidas, así como el empleo de exponentes, se debe a Descartes (1637) [Rouse Bael, W. W. "A Short Account of the History of Mathematics (1960) Dover Publications].

### La historia del álgebra y su gran importancia en la didáctica

Entre todas las materias a enseñar, posiblemente la matemática sea la que tenga un aspecto más inhumano, debido a su formalismo, su modo de razonamiento lógico y esquemático, y su organización de forma hipotético-deductiva a partir de una axiomática.

La historia de la matemática puede contribuir a que se presente algo más humana, constata la cooperación entre distintos matemáticos para llegar a buenos resultados, y dejar constancia de que los descubrimientos no son siempre fruto de mentes deslumbrantes de personas aisladas. Por el contrario, han sido obtenidos con frecuencia como consecuencia de la colaboración de muchos, y como fruto de avances sucesivos a lo largo de los siglos.

La historia del álgebra, además, puede ayudar a dar una idea de cuándo apareció el concepto que se está estudiando, por qué causa, qué tipo de problemas permitía y permite resolver, etc. Precisamente en la actualidad hay una cierta reacción para reencontrar el sentido de lo que se enseña, y uno de los apoyos para ello radica en acudir a ciertos pasajes de la historia de la matemática.

Es conveniente también que el profesor conozca la historia del Álgebra, pues de esta manera al empezar un nuevo tema podrá hacer una introducción histórica que tranquilizará al alumno pues comprenderá que es muy difícil asimilar en quince días los conceptos que los matemáticos han tardado cientos de años en descubrir y poder utilizar.

Son importantes también los problemas históricos, por ejemplo que conozcan la historia de su ciudad a partir de las informaciones de tipo matemático que cada época ha legado. Citaremos como ejemplo el problema siguiente del libro "Historia de Madrid a través de las Matemáticas" de M. P. Bujanda y C. Romo.

#### Doña Leoncia la salinera

En tiempos de la dominación árabe, Madrid poseía las salinas de Espartinas, pero además hubo una mujer y en aquellos tiempos no era muy frecuente la mujer empresaria, dedicada al negocio de la sal. Esa fue Doña Leoncia.

Doña Leoncia era una buena comerciante, pero tenía un defecto: le gustaba mucho el dinero que (honradamente) ganaba con su sal. Guardaba en una caja unos ducados de oro y por la noche los contaba amorosamente. Si los colocaba en montones de tres, le quedaba

un ducado sin colocar. Lo mismo le ocurría cuando los colocaba en montones de cuatro y en montones de cinco. Cuando los colocaba de siete en siete no sobraba ningún ducado.

- a) ¿Qué ocurría cuando los colocaba de dos en dos? ¿Y cuándo hacía montones de seis?
- b) ¿Cuál era el menor número de ducados que podía tener Doña Leoncia? (Había quien decía que tenía 301 ducados).

#### Solución

a) Cuando colocaba las monedas de dos en dos, le sobraba un ducado porque el número de monedas era un múltiplo de cuatro más uno. También le sobraba un ducado al colocarlos de seis en seis porque el número de monedas era igual a uno más un múltiplo de tres y de cuatro.

b) El número de monedas menos uno debía ser múltiplo común de tres, cuatro y cinco; o sea, múltiplo del mínimo común múltiplo de 3, 4 y 5: 60. De entre los múltiplos comunes a 60 (más 1) hay que tomar el que sea divisible por 7: 61, 121, 181, 241, 301.

301 es el menor número que cumple esas condiciones. Luego Doña Leoncia tenía por los menos 301 ducados.

### 4. Desarrollo actual del Álgebra

Un brevísimo esbozo histórico del desarrollo de la investigación matemática española nos mostraría, situándonos en los finales del pasado siglo, un panorama anquilosado y anclado en un pasado remoto. Sólo insólitos esfuerzos personales, como el de Reyes y Prosper, y la visión de futuro de algunos prohombres de la matemática que empiezan a remover el terreno hacen vislumbrar posibles cosechas futuras. Hombres como Echegaray, Eduardo Torroja, o García de Galdeano conectan con la ciencia europea, comienzan a enseñar la matemática de su tiempo y no la de siglos pasados, fundan revistas matemáticas, crean la Real Sociedad Matemática Española, llegan a interesar y comunicar su entusiasmo a los estudiosos y envían a éstos al extranjero a formarse en las mismas fuentes. Fruto y al mismo tiempo continuidad de estos esfuerzos es Rey Pastor que en su Laboratorio Matemático de la Junta de Ampliación de Estudios consigue ya formar un equipo de investigadores.

Rey Pastor ingresó en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, el 14 de noviembre de 1920. En el discurso de ingreso presenta un panorama de una actividad anclada en el pasado, de tal modo que la matemática de la segunda mitad del siglo XIX, la de Riemann, Klein, Poincaré, Cantor, etc. era desconocida en la docencia universi-

taria, permaneciendo limitada al Cálculo Infinitesimal como la más alta cuestión accesible a la Matemática universitaria.

Sin embargo gracias a la labor de Rey Pastor se puede asegurar que en los años treinta existe ya en España una cultura matemática contemporánea con aportaciones originales a nivel europeo, ya que Rey Pastor y sus discípulos publican trabajos importantes en las principales revistas internacionales; esto se va a traducir también en el campo de la enseñanza de las Matemáticas, gracias a la labor de un discípulo de Rey Pastor, Pedro Puig Adam durante el periodo siguiente a la Guerra Civil Española.

Como ya hemos dicho, terminada la guerra surgen unos cuantos jóvenes matemáticos, que trabajan individualmente con notables aportaciones y que poco a poco empiezan a constituir a su alrededor grupos de investigación. El escaso número de matemáticos que salía de nuestras universidades, de las que únicamente las de Madrid, Barcelona y Zaragoza, y bastante después la de Santiago, impartían esos estudios, se ve luego altamente incrementado al crearse nuevas secciones y facultades de Matemáticas. Esto favorece el número de los que se dedican a la investigación y empieza ya a realizarse ésta de un modo continuado y en mayor escala.

Este proceso de formación de investigadores ha llevado en ocasiones a la constitución de auténticas escuelas: un primer maestro, dedicado a una determinada rama de su ciencia, la va desarrollando con sus discípulos, que a su vez prosiguen la tarea formadora de nuevos investigadores incipientes.

Muchos departamentos universitarios publican sus trabajos. Asimismo, las revistas de las Academias de Madrid, Barcelona, Zaragoza, Galicia y Canarias dedican parte de sus números a artículos de investigación matemática. Finalmente, como revistas matemáticas de carácter general hay que destacar "Collectanea Mathematica" editada por la Universidad de Barcelona, "Revista Matemática Iberoamericana" publicada por la Real Sociedad Matemática Española en colaboración con CSIC, el boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, la revista Suma, etc.

El desarrollo de la investigación en Álgebra en España se centra alrededor de cuatro grandes polos que pueden ser recogidos con las denominaciones de:

- 1) Geometría algebraica.
- 2) Teoría de grupos.
- 3) Teoría de categorías.
- 4) Teoría de números. Estos bloques de trabajo han nacido de cuatro grupos o escuelas que se localizan en Madrid, Zaragoza, Santiago y Barcelona, respectivamente y que han dado lugar a nuevos núcleos al desplazarse algunos de sus componentes a otros centros del país.

La escuela de Geometría Algebraica radicada en Madrid, en la Universidad Complutense ha producido nuevos grupos localizados en las Universidades de Valladolid, Sevilla,

Santander, La Laguna. Independientemente, hay grupos de trabajo en las Universidades de Barcelona, Salamanca y Badajoz que tocan los mismos temas. La teoría de grupos cultivada en la Universidad de Zaragoza se ha extendido después, a través de sus miembros, a las de Santander y Valencia. La teoría de categorías y Álgebra Homológica de Santiago, tiene, igualmente, su ramificación en las Universidades de Granada y Murcia. Y los grupos de trabajo sobre teoría de números se encuentran en Barcelona, Bilbao y Madrid. Lo anterior es una simplificación suficientemente contundente que no excluye el hecho de que también se trabaje algo sobre grupos en Valladolid o sobre categorías en Zaragoza.

Como conclusión observamos con orgullo que la producción matemática española es prometedora, siendo ya un hecho consolidado el cultivo de ella en sus distintas ramas.

## Comprobación de un Problema Olímpico con un sistema de Geometría Dinámica

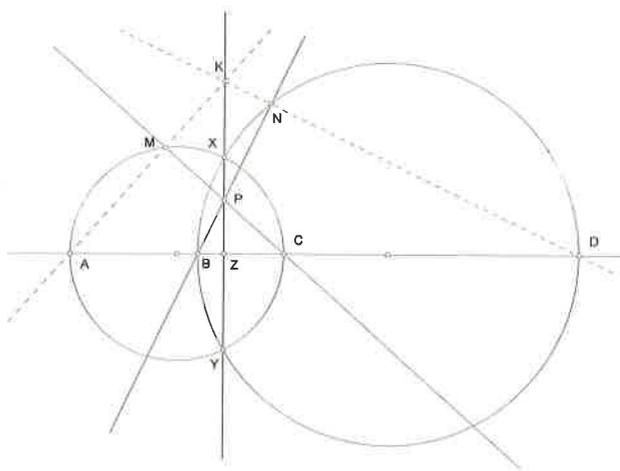
Gonzalo Catalina Hernansanz

Colegio "Maravillas" de Madrid

Si una buena figura ayuda muchas veces a idear la solución de un problema geométrico, una simulación gráfica por ordenador realizada con sobre un Sistema de Geometría Dinámica puede ayudar incluso a visualizar las condiciones de degeneración del problema ante los alumnos.

En nuestro caso, se ha utilizado el sistema "The Geometer's Sketchpad" para efectuar una comprobación experimental por ordenador de la construcción geométrica relativa a un problema propuesto en la XXXVI Olimpiada Matemática Internacional celebrada en Canadá en julio de 1995 y propuesto en el núm. 41 de octubre de 1995 de nuestro Boletín, cuyo enunciado se recuerda a continuación.

*Problema:* Sean  $A, B, C, D$  cuatro puntos distintos sobre una recta, en ese orden. Las circunferencias de diámetros  $AC$  y  $BD$  se cortan en los puntos  $X$  e  $Y$ . La recta  $XY$  corta a  $BC$  en el punto  $Z$ . Sea un punto  $P$  de la recta  $XY$ , distinto de  $Z$ . La recta  $CP$  corta a la circunferencia de diámetro  $AC$  en los puntos  $C$  y  $M$ , y la recta  $BP$  corta a la circunferencia de diámetro  $BD$  en los puntos  $B$  y  $N$ . Demuestre que las rectas  $AM$ ,  $DN$  y  $XY$  son concurrentes.



Al ir arrastrando con el ratón la posición del punto  $P$ , se observa que las rectas  $AM$ ,  $DN$  y  $XY$  continúan siendo concurrentes en  $K$ . Pueden así visualizarse las situaciones degeneradas: si  $P$  se aleja hacia el infinito, entonces  $K$  se aproxima a  $Z$ , las rectas  $BN$  y  $CM$  tienden a ser paralelas entre sí (paralelas a la recta  $XY$ ) y las rectas  $AM$  y  $DN$  también tienden a ser paralelas entre sí (paralelas a la recta  $AD$ ).

## Reseña de libros

EDUARDO WAGNER, PATRICIA FAURING, CARLOS GUSTAVO MOREIRA, FLORA GUTIÉRREZ, ANA WYKOWSKI: 10 Olimpiadas iberoamericanas de Matemáticas. ISBN 84-7666-076-6, 277 páginas, 4.500 pesetas. Ed. O.E.I., Madrid 1996.

La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura es la entidad que, juntamente con los Ministerios de Educación respectivos, organiza actualmente las Olimpiadas Iberoamericanas de Matemáticas desde 1985. Ahora, aprovechando la undécima edición del acontecimiento (San José de Costa Rica, septiembre de 1996) ha presentado el libro que recoge todos los problemas propuestos en las diez primeras Olimpiadas, junto con 56 problemas suplementarios, una serie de notas con resultados útiles para la resolución de problemas y una Bibliografía (recopilada por el Prof. Antonio Luiz Santos) con 67 citas, muy útil para quienes preparamos a los estudiantes de Olimpiadas.

En algunos casos se incluye más de una solución para determinados problemas, una prueba de la versatilidad de algunos de los elegidos para la competición.

El libro sigue los pasos de publicaciones europeas similares (búlgaras y rumanas) sobre competiciones semejantes (la Olimpiada Balcánica, por ejemplo), y creemos que constituye uno de los primeros eslabones en lengua española, de una cadena de libros con buenos problemas de Matemáticas Elementales: del mismo estilo se pueden considerar las publicaciones colombianas *10 años de Colombia en las Olimpiadas Internacionales de Matemáticas*, de E. Arrieta, D. Berenstein y María Falk de Losada (Bogotá 1991); *Un recorrido por la Geometría*, de Germán Rincón (Bogotá 1994), y las españolas *100 Problemas de Matemáticas: Algebra, Combinatoria y Geometría*, de quien esto escribe y María Ascensión López Chamorro (Valladolid, 1994) —perdón por autocitarme—, así como varios volúmenes de la Colección La Tortuga de Aquiles, recientemente publicados.

La edición ha sido muy cuidada y el papel es excelente. Posiblemente su precio es elevado, pero esto no debería ser un inconveniente. La colección de problemas es de gran calidad, y tendría que ser un libro de obligada lectura y utilización por todos los profesores de Matemáticas. La difusión del libro en los países de habla española y portuguesa contribuirá, sin duda, al mejor desarrollo matemático de los estudiantes preuniversitarios.

No quisiera terminar este comentario sin hacer notar algo (probablemente lo único) que he echado en falta: no se cita el país que propuso cada problema, ni se hace indicación alguna de autoría de la solución publicada. Seguramente muchas de las soluciones corresponden a los estudiantes que participaron en las Olimpiadas Iberoamericanas, y otras serán de los miembros del Jurado respectivo, que hallaron soluciones alternativas a las oficiales. Entiendo que es importante reconocer expresamente su esfuerzo, además de ser un acto de estricta justicia. Pero esto, que puede sin duda subsanarse fácilmente en posteriores ediciones, no debe empañar en absoluto el magnífico trabajo de los autores.

Francisco Bellot Rosado

## Problemas propuestos

**Problemas propuestos**  
en la XII OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS  
celebrada en Guadalajara (Méjico) en septiembre de 1997

### Problema n° 1:

Sea  $r \geq 1$  un número real que cumple la siguiente propiedad:

Para cada pareja de números enteros positivos  $m$  y  $n$ , con  $n$  múltiplo de  $m$ , se tiene que  $[nr]$  es múltiplo de  $[mr]$ .

Probar que  $r$  es un número entero.

*Nota:* Si  $x$  es un número real, denotamos por  $[x]$  el mayor entero menor o igual que  $x$ .

### Problema n° 2:

Con centro en el incentro  $I$  de un triángulo  $ABC$  se traza una circunferencia que corta en dos puntos a cada uno de los tres lados del triángulo: al segmento  $BC$  en  $D$  y  $P$  (siendo  $D$  el más cercano a  $B$ ); al segmento  $CA$  en  $E$  y  $Q$  (siendo  $E$  el más cercano a  $C$ ), y al segmento  $AB$  en  $F$  y  $R$  (siendo  $F$  el más cercano a  $A$ ).

Sea  $S$  el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero  $EQFR$ . Sea  $T$  el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero  $FRDP$ . Sea  $U$  el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero  $DPEQ$ .

Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos  $FRT$ ,  $DPU$  y  $EQS$  tienen un único punto común.

### Problema n° 3:

Sean  $n \geq 2$  un número entero y  $D_n$  el conjunto de puntos  $(x, y)$  del plano cuyas coordenadas son números enteros con  $-n \leq x \leq n$  y  $-n \leq y \leq n$ .

- (a) Se dispone de tres colores; cada uno de los puntos de  $D_n$  se colorea con uno de ellos. Demostrar que sin importar cómo se haya hecho esta coloración, siempre hay dos puntos de  $D_n$  del mismo color tales que la recta que los contiene no pasa por ningún otro punto de  $D_n$ .

- (b) Encontrar una forma de colorear los puntos de  $D_n$  utilizando 4 colores de manera que si una recta contiene exactamente dos puntos de  $D_n$ , entonces esos dos puntos tienen colores distintos.

**Problema n° 4:**

Sea  $n$  un entero positivo. Consideremos la suma

$$x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$$

donde los valores que pueden tomar las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$  son únicamente 0 y 1. Sea  $I(n)$  el número de  $2n$ -adas  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$  para las cuales el valor de la suma es un número impar y sea  $P(n)$  el número de las  $2n$ -adas  $(x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$  para las cuales la suma toma valor par. Probar que

$$\frac{P(n)}{I(n)} = \frac{2^n + 1}{2^n - 1}$$

**Problema n° 5:**

En un triángulo acutángulo  $ABC$  sean  $AE$  y  $BF$  dos alturas, y sea  $H$  el ortocentro. La recta simétrica de  $AE$  respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en  $A$  y la recta simétrica de  $BF$  respecto de la bisectriz (interior) del ángulo en  $B$  se intersecan en un punto  $O$ . Las rectas  $AE$  y  $AO$  cortan por segunda vez a la circunferencia circunscrita al triángulo  $ABC$  en los puntos  $M$  y  $N$ , respectivamente.

Sean:  $P$  la intersección de  $BC$  con  $HN$ ;  $R$ , la intersección de  $BC$  con  $OM$ ; y  $S$  la intersección de  $HR$  con  $OP$ .

Demostrar que  $AHSO$  es un paralelogramo.

**Problema n° 6:**

Sea  $P = \{P_1, P_2, \dots, P_{1997}\}$  un conjunto de 1997 puntos en el interior de un círculo de radio 1, siendo  $P_1$  el centro del círculo. Para cada  $k = 1, \dots, 1997$  sea  $x_k$  la distancia de  $P_k$  al punto de más próximo a  $P_k$  y distinto de  $P_k$ . Demostrar que

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1997}^2 \leq 9.$$

**Problemas propuestos**  
**en la I FASE DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA (OME)**  
**16-17 de enero de 1998**

**Problema n° 7:** (1° de la O.M.E.)

Los puntos  $A = (a, 11)$  y  $B = (b, 37)$  determinan, junto con el origen de coordenadas, un triángulo equilátero.

Determinar el producto  $ab$ .

**Problema n° 8:** (2° de la O.M.E.)

Se consideran los puntos del plano  $P_1 = (1, 1000), P_2 = (2, 1000), \dots, P_{1998} = (1998, 1000)$  y el punto  $O = (0, 0)$ , origen de coordenadas.

Para cada punto  $P_k$  de los anteriores, se traza el segmento  $OP_k$  únicamente si no contiene más puntos con ambas coordenadas enteras que  $O$  y  $P_k$ .

¿Cuántos segmentos se dibujan?

**Problema n° 9:** (3° de la O.M.E.)

Determinar el menor valor de  $k$  para el que no existe ningún real  $x$  verificando

$$k < \frac{2x-7}{2x^2-2x-5} < 1$$

**Problema n° 10:** (4° de la O.M.E.)

Sea  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Se consideran las funciones  $f$  de  $A$  en  $A$ . ¿Cuántas verifican  $f^2(x) = x$ , para todo  $x$  de  $A$ ? ¿Cuántas verifican  $f^3(x) = x$ , para todo  $x$  de  $A$ ?

$$[f^2(x) = f(f(x)); f^3(x) = f(f^2(x)) = f(f(f(x)))].$$

**Problema n° 11:** (5° de la O.M.E.)

Un polinomio  $p(x)$  tiene coeficientes enteros, y para cierto entero  $a$ , se verifica  $p(a) = p(a+1) = p(a+2) = 1$ .

¿Existe algún entero  $k$  tal que  $p(k) = 8$ ?

**Problema n° 12:** (6° de la O.M.E.)

En el triángulo  $ABC$ , de área 100,  $M$  es el punto medio del lado  $AC$  y  $P$  es un punto del lado  $AB$  tal que el triángulo  $AMP$  tiene área 36. La paralela a  $PM$  por  $B$  corta al lado  $AC$  en  $Q$ .

Determinar el área del triángulo  $MPQ$ .

**Problema n° 13:** (7° de la O.M.E.)

Se considera  $f(x) = x^{1997} - x + 1$ . Sea  $n$  un entero positivo mayor que 1.

Demostrar que, para todo número entero  $x$ , los números  $f(x)$  y  $f^n(x)$  son primos entre sí.

[ $f^2(x) = f(f(x))$ ;  $f^3(x) = f(f(f(x)))$ ], y en general  $f^n(x) = f(f^{n-1}(x)) = f(f(\dots f(f(x))\dots))$   $n$  veces .

**Problema n° 14:** (8° de la O.M.E.)

(a) Los vértices de un polígono regular de 8 lados se emparejan y se trazan los segmentos –lado o diagonal– que cada pareja determina. ¿Es posible emparejarlos de forma que los cuatro segmentos determinados tengan distintas longitudes?

(b) Demostrar que si se emparejan los vértices de un polígono regular de 12 lados y se trazan los segmentos que cada pareja determina, siempre habrá al menos dos con la misma longitud.

**Problemas propuestos  
en la VI OLIMPIADA MATEMÁTICA RIOPLATENSE  
Mendoza, 10 de diciembre de 1997**

**Problema n° 15:** (1° de nivel 2)

Sea  $n$  un entero,  $n \geq 2$ . Cada uno de los cuadros de un tablero  $n \times n$  se colorea de blanco, amarillo o verde, de acuerdo con los siguientes criterios:

- 1) Los cuadros en las posiciones  $(i, i)$  para  $1 \leq i \leq n$  se colorean de blanco;
- 2) Los cuadros en las posiciones  $(i, j)$  para  $i \neq j$  se colorean de amarillo o verde;
- 3) Para cualesquiera  $i, j, k$  tales que los cuadros en las posiciones  $(i, j)$  y  $(j, k)$  son del mismo color, el cuadro en la posición  $(i, k)$  también es de ese mismo color.

- a) Muestre que existe una fila que posee  $n - 1$  cuadros amarillos.
- b) Muestre qué filas distintas poseen cantidades distintas de cuadros amarillos.

*Aclaración:* el cuadro en la posición  $(i, j)$  es el que está en la  $i$ -ésima fila y en la  $j$ -ésima columna.

**Problema n° 16:** (2° de nivel 2)

Demostrar que existe un único conjunto no vacío  $S$  de enteros con las siguientes propiedades:

- 1) Si  $998x + 999y \in S$  para algún par de enteros  $x, y$ , entonces  $998y + 999x \in S$ .
- 2) Si  $1 \leq |c| \leq 998$ , entonces  $c \notin S$ .

**Problema n° 17:** (3° de nivel 2)

Sean  $ABCD$  un tetraedro regular,  $P$  y  $Q$  puntos distintos en los planos  $BCD$  y  $ACD$  respectivamente. Demostrar que existe un triángulo cuyos lados miden  $AP$ ,  $PQ$  y  $QB$ .

**Problema n° 18:** (4° de nivel 2)

Calcular la suma

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}} + \dots + \sqrt{1 + \frac{1}{999^2} + \frac{1}{1000^2}}$$

**Problema n° 19:** (5° de nivel 2)

Sea  $S$  un conjunto infinito de puntos del plano con la siguiente propiedad: Si  $A, B, C$  son puntos distintos de  $S$ , entonces la distancia desde  $A$  hasta la recta  $BC$  es un número entero. Demostrar que todos los puntos de  $S$  están en una misma recta.

**Problema n° 20:** (6° de nivel 2)

Dada una sucesión infinita de dígitos  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ , se intercalan infinitos signos  $\uparrow$  en la sucesión y para cada par de signos  $\uparrow$  consecutivos se considera el número formado por los dígitos comprendidos entre ambos signos  $\uparrow$ .

- Sea  $\mathcal{N}$  el conjunto de los números naturales. Demostrar que cualesquiera sean los conjuntos  $A$  y  $B$  tales que  $A \cup B = \mathcal{N}$  y  $A \cap B = \emptyset$ , siempre es posible intercalar los signos  $\uparrow$  de tal manera que los números así obtenidos pertenezcan todos a  $A$  o pertenezcan todos a  $B$ .
- Demostrar que cualesquiera sean los conjuntos  $A, B$  y  $C$  tales que  $A \cup B \cup C = \mathcal{N}$ , donde  $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset$  y  $B \cap C = \emptyset$ , siempre es posible intercalar los signos  $\uparrow$  de tal manera que los números así obtenidos pertenezcan todos a  $A$  o pertenezcan todos a  $B$  o pertenezcan todos a  $C$ .

*Aclaración:* Puede haber términos de la sucesión a la izquierda del primer signo  $\uparrow$ . Éstos no están comprendidos entre dos signos  $\uparrow$ .

**Problema n° 21:** (1° de nivel 3)

Hallar todos los enteros positivos  $n$  con la siguiente propiedad: existe un polinomio  $P_n(x)$  de grado  $n$ , con coeficientes enteros, tal que  $P_n(0) = 0$  y  $P_n(x) = n$  para  $n$  valores enteros y distintos de  $x$ .

**Problema n° 22:** (2° de nivel 3)

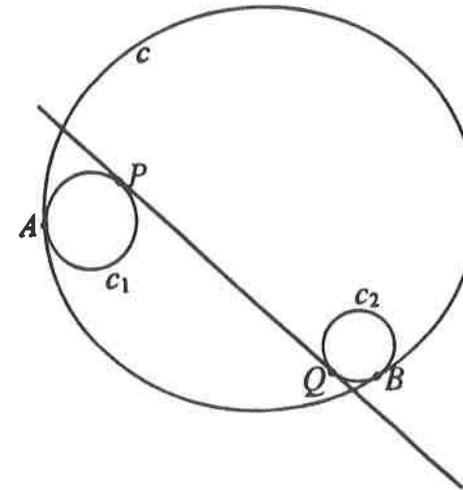
Considerar un prisma, no necesariamente recto, cuya base es un rombo  $ABCD$  con lado  $AB = 5$  y diagonal  $AC = 8$ . Una esfera de radio  $r$  es tangente al plano  $ABCD$  en  $C$  y tangente a las aristas  $AA_1, BB_1$  y  $DD_1$  del prisma. Calcular  $r$ .

**Problema n° 23:** (3° de nivel 3)

Demostrar que hay infinitos enteros positivos  $n$  tales que la cantidad de divisores positivos que tiene  $2^n - 1$  es mayor que  $n$ .

**Problema n° 24:** (4° de nivel 3)

Las circunferencias  $c_1$  y  $c_2$  son tangentes interiormente a la circunferencia  $c$  en los puntos  $A$  y  $B$ , respectivamente, como se ve en la figura. La tangente interior común a  $c_1$  y  $c_2$  toca a estas circunferencias en  $P$  y  $Q$ , respectivamente. Demostrar que las rectas  $AP$  y  $BQ$  intersecan a la circunferencia  $c$  en puntos diametralmente opuestos.



**Problema n° 25:** (5° de nivel 3)

Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  números no negativos,  $n \geq 3$ , tales que  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ . Determinar el máximo valor posible de la expresión  $x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$ .

**Problema n° 26:** (6° de nivel 3)

Sea  $\mathcal{N}$  el conjunto de los números enteros positivos. Determinar si existe una función  $f: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  tal que  $f(f(n)) = 2n$ , para todo  $n \in \mathcal{N}$ .

## Problemas resueltos

### Problema 7° (BOLETÍN N.º 31)

Se denota con  $h(n)$  el número de cincos que aparecen en la representación del entero positivo  $n$ . Así, por ejemplo,  $h(5203) = 1$ ,  $h(37) = 0$ ,  $h(555) = 3$ ,  $h(4711) = 0$ , etc.

Halla el valor  $s$  de la suma siguiente:

$$5^{h(1)} + 5^{h(2)} + 5^{h(3)} + \dots + 5^{h(1991)}$$

**Solución:**

$h(n)$  sólo puede tomar los valores 0, 1, 2, 3.

Sea  $f(k)$  el número de enteros positivos menores que 1992, tales que en su representación aparecen exactamente  $k$  cincos ( $k = 0, 1, 2, 3$ ).

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 - 7 = 2 \cdot 9^3 - 7 = 1451 \\ f(1) &= 3 \cdot (2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1) - 1 = 6 \cdot 9^2 - 1 = 485 \\ f(2) &= 3 \cdot (2 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1) = 6 \cdot 9 = 54 \\ f(3) &= 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Así pues } s = 1451 \cdot 5^0 + 485 \cdot 5^1 + 54 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^3 = \mathbf{5476}$$

Jesús Granda (Madrid)

### Problema 2° (BOLETÍN N.º 32)

Sea  $R$  el conjunto de los números reales. Hallar todas las funciones  $f: R \rightarrow R$  tales que para todos  $x, y$  en  $R$  se verifica que

$$f(x^2 + f(y)) = y + [f(x)]^2$$

**Solución:**

Supongamos  $f(0) = a \in R$

$$f(a) = f(0^2 + f(0)) = 0 + [f(0)]^2 = a^2$$

$$f(a^2) = f(0^2 + f(a)) = a + [f(0)]^2 = a + a^2$$

$$f(a^2 + a) = f(a^2 + f(0)) = 0 + [f(a)]^2 = a^4$$

$$\left. \begin{aligned} f(a^4 + a^2) &= f((a^2)^2 + f(a)) = a + [f(a^2)]^2 = a + a^2 + 2a^3 + a^4 \\ f(a^2 + a^4) &= f(a^2 + f(a^2 + a)) = a^2 + a + [f(a)]^2 = a + a^2 + a^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(0) = 0$$

$$\text{Sea } y \in R \Rightarrow f(f(y)) = f(0^2 + f(y)) = y + [f(0)]^2 = y \Rightarrow f(f(y)) = y \quad \forall y \in R$$

Sea  $x \in R$

$$\left. \begin{aligned} f(x^2) &= f(x^2 + f(0)) = [f(x)]^2 \\ f((-x)^2) &= f((-x)^2 + f(0)) = [f(-x)]^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(-x) = \pm f(x)$$

$$\text{Si } f(-x) = f(x) \Rightarrow f(f(-x)) = f(f(x)) \Rightarrow -x = x \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Luego } f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in R$$

$$\text{Sea ahora } x \in R, x > 0 \Rightarrow f(x) = f((\sqrt{x})^2 + f(0)) = [f(\sqrt{x})]^2 > 0$$

Así pues  $x > 0 \Rightarrow f(x) > 0$ ; y puesto que  $f(-x) = -f(x)$  resulta que  $x < 0 \Rightarrow f(x) < 0$

Sea  $x \in R, x > 0$  y supongamos  $f(x) = t$

$$f(x - t) = f((\sqrt{x})^2 + f(-x)) = -x + [f(\sqrt{x})]^2 = -x + f(x) = t - x$$

Si  $t > x \Rightarrow x - t < 0, f(x - t) = t - x > 0$  **Absurdo**

Si  $t < x \Rightarrow x - t > 0, f(x - t) = t - x < 0$  **Absurdo**

Por tanto si  $x \in R, x > 0$  se tiene que  $f(x) = x$

Si  $x \in R, x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow f(-x) = -x \Rightarrow f(x) = f(-(-x)) = -f(-x) = -(-x) = x.$

**Conclusión:**

La única función  $f: R \Rightarrow R$  que satisface la condición del problema es la identidad

$$f(x) = x \quad \forall x \in R$$

**Jesús Granda (Madrid)**

**Índice de soluciones publicadas**

Propuestos en el n.º	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números												
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º			
1	Varios	4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	-	-	-	-	-	-	-
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	-	-	-	-	-
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	-	-	-	-	-	-	-
5	Varios	8	7	12	7	7	8	-	-	-	-	-	-	-
6	Varios	7	7	16	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	-	-	-	-	-	-	-
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	-	-	-	-	-	-	-
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	-	-	-
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	20	-	-	-
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	-	-	-	-
12	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	-	-	-	-	-	-	-	-	-
13	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	-	-	-
14	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	-	-	-	-	-	-	-
15	Varios	15	15	15	15	-	-	-	-	-	-	-	-	-
16	OME-f1-87	18	18	18	21	21	21	-	-	-	-	-	-	-
17	OME-f2-88	22	22	21	18	22	22	22	22	-	-	-	-	-
18	OI-88-Perú	25	23	23	23	23	23	-	-	-	-	-	-	-
19	OMI-88-Australia	23	23	23	23	25	25	-	-	-	-	-	-	-
20	OME-f1-88/Putnam	23	26	24	24	23	26	-	-	-	-	-	-	-
21	OME-f2-89/	24	26	24	25	24	26	24	26	26	26	24	-	-
22	OMI-89-R.F.A./	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	-	-	-
23	Oposiciones	26	27	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
24	OME-f1-90	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	-	-	-
25	OME-f2/f1-90	31	30	29	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	OMI-90-China/	27	27	28	28	29	31	31	30	31	-	-	-	-
27	OI-90-Valladolid	30	31	31	30	31	30	31	30	31	-	-	-	-
28	OME-f1-91	34	31	29	29	31	32	32	32	32	32	33	-	-
29	OME-f2-91	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	-	-	-
30	OI-91-Suecia	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
31	OME-f1-91	XX	XX	33	33	XX	35	XX	XX	-	-	-	-	-
32	OME-f2-92/	32	32	XX	XX	33	33	-	-	-	-	-	-	-
33	OME-f1-91/PNS	38	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-
34	OME-f2-92/PNS	XX	XX	33	33	38	46	XX	33	33	33	-	-	-
35	OME-f1-92/PNS	33	34	34	34	-	-	-	-	-	-	-	-	-
36	OME-f1-92/PNS	33	XX	36	36	36	XX	48	XX	XX	35	-	-	-
37	OME-f1-92/MOSC-U/	36	XX	47	35	34	-	-	-	-	-	-	-	-
38	OME-f1-92/f1-92(v)	35	48	XX	XX	XX	XX	38	35	46	38	-	-	-
39	OME-f1-92/f1-92(v)	38	38	38	38	-	-	-	-	-	-	-	-	-
40	OME-f2-93	47	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	-	-	-
41	OME-f2-93	47	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-	-
42	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	XX	XX	47	39	-	-	-
43	OME-f2-93	XX	46	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-
44	OME-f2-93	XX	XX	39	39	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-
45	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	-	-	-
46	OME-f2-94/PNS	40	XX	XX	40	XX	XX	45	45	40	-	-	-	-
47	OME-f2-94/PNS	XX	40	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-
48	OME-f2-94/PNS	XX	40	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	-	-	-
49	OME-f2-94/PNS	43	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-
50	OME-f2-94/PNS	46	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-
51	OME-f2-94/PNS	42	XX	XX	42	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-
52	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	47	XX	XX	-	-	-	-	-	-	-
53	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
54	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
55	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
56	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
57	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
58	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
59	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
60	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
61	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
62	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
63	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
64	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
65	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
66	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
67	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
68	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
69	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
70	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
71	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
72	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
73	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
74	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
75	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
76	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
77	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
78	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
79	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
80	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
81	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
82	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
83	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
84	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
85	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
86	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
87	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
88	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
89	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
90	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
91	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
92	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
93	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
94	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
95	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
96	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
97	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
98	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
99	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-
100	OME-f2-94/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	-	-	-

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = OI. Mat. Internac. OI = OI. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. PNS = Propuesta por nuestros socios.

## INSTRUCCIONES PARA EL ENVIO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACION EN EL BOLETIN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente

### Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4. Si se utiliza LATEX, el formato debe ser 17cm x 12,8 cm en 11 puntos (para ser aprovechado directamente en la imprenta).

Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el boletín).

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

### Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo dos archivos:

- archivo del documento para el procesador de texto utilizado.
- archivo del documento en código ASCII

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.

Si se desea, las figuras pueden incluirse en archivos de extensión TIF (en otro caso se captarán por escaneado)

### Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín (no al apartado, que ya no está operativo).

### Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

3	34	35	37	38	39
<input type="checkbox"/>					
40	41	42	43	44	45
<input type="checkbox"/>					
46	47	48			
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>			

Envío adjuntos sellos para el franqueo (35 pts. por cada número del boletín).

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 4, 5 al 33 y 36 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

**Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas**

**Facultad de Educación (despacho 3517)**

**Paseo Juan XXIII, s/n**

**Ciudad Universitaria**

**28040 Madrid**

**Tel. 394 62 48**

**SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS  
BOLETIN DE INSCRIPCION**

D. .... Teléf. (....) .....  
Dirección particular .....  
Ciudad ..... Cod.º Postal .....  
Centro de trabajo .....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco .....  
Sucursal o Agencia ..... en .....  
Dirección de la misma .....  
para que cargue en la cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... / .....  
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1996-97 y siguientes.

Fecha ..... de ..... de 1997

Fdo.:

Aquellos centros que prefieran abonar la cuota mediante transferencia pueden hacerlo a al c.c. de nuestra Sociedad, domiciliada en la entidad bancaria CAJA DE MADRID, núm.: 2038/1076/72/6000589561. La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (de ellas, 3.000 ptas. en concepto de cuota de la Sociedad "Puig Adam" y 2.000 pts. en concepto de cuota por la que se recibe la revista SUMA de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas). Remítanse ambas partes a **Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517). Tel. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.**

Fecha ..... BANCO: .....  
Sucursal o Agencia ..... en .....  
Dirección de ésta .....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta: ..... / ..... / ..... / ..... / .....  
los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos .....  
Nombre de la cuenta .....