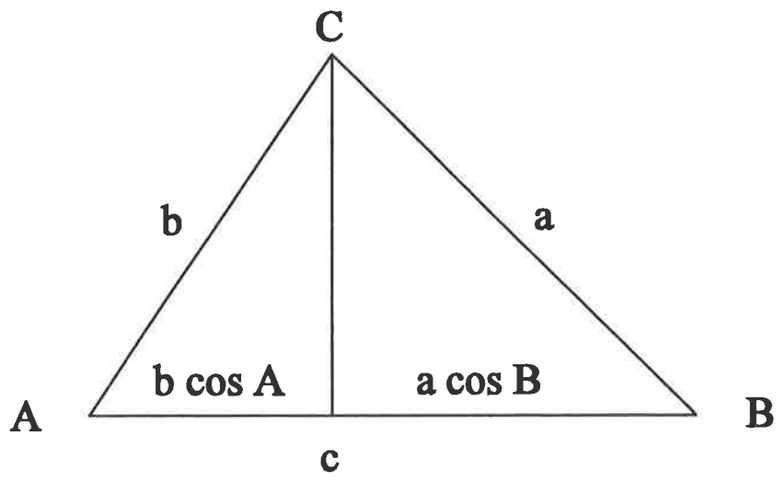
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS



BOLETIN N.° 47
OCTUBRE DE 1997

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS
DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura del artículo titulado "Una demostración del teorema del coseno", contenido en este número 47 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

ÍNDICE

Págs.

XV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas 5
XXXVIII Olimpiada Matemática Internacional 10
Recensiones en Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 11
Anuncios de Congresos de Educación Matemática 12
Technology gets Polytechnics closer: a collaboration in the European Union between Spain and Italy
por *María Mascarello, José L. Hueso, Alicia Roca* y *Juan R. Torregrosa* 13
Demostración del teorema de Tales por métodos elementales
por *Pedro Pescador Díaz* 22
Los espacios de Lorentz y la Geometría del Triángulo
por *Juan Bosco Romero Márquez* 30
Una demostración del teorema del coseno
por *Juan Carlos Cortés López* 45
Presencia de la Matemática Discreta en las Competiciones Deportivas
por *María Candelaria Espinel Febles* 47
Aplicación de las matrices al estudio de sucesiones numéricas
por *María Azucena Méndez Domínguez* 58
Unidades de medida antiguas de Castilla y León (Valladolid)
por *María Ortiz Vallejo* 70
Problemas propuestos 84
Problemas resueltos 86
Índice de soluciones publicadas 94
Como socio, deseo me envíen gratuitamente 95
Boletín de inscripción 96

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS (Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ (Castilla-León)
SALVADOR HERRERO PALLARDO (Castilla-La Mancha)

Vocales:
JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE (Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO (Actividades y concursos)

Secretario:
FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:
MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

Adjunta a la presidencia:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

XV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

El XV Concurso de Resolución de Problemas, convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, se celebró en la mañana del sábado 21 de junio de 1997.

Las pruebas tuvieron lugar en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid y la entrega de premios y diplomas, ese mismo día por la tarde, en los de la Facultad de Educación.

Concurrieron a él 108 participantes, algunos más que en los años precedentes. Varios de ellos procedían de Comunidades Autónomas distintas de la de Madrid. Según establecían las normas de la convocatoria, concursaron distribuidos en tres niveles: Los del primero, cursaban 3° de ESO o 1° de BUP; los del segundo, 4° de ESO o 2° de BUP y los del tercero, 3° de BUP o 1° del nuevo Bachillerato.

Se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 10 puntos. A continuación de esta crónica damos sus enunciados, con datos estadísticos que reflejan sus dificultades relativas.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable. En él, nuestro Presidente pronunció unas breves palabras de felicitación a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a las firmas y entidades que proporcionaron los valiosos premios distribuidos entre los ganadores, especialmente a *Texas Instruments*, que regaló magníficas calculadoras, a *Coca-Cola*, a *Editorial S.M.*, a *Librería Rubiños*, a *Editorial Euler*, al Colegio de Doctores y Licenciados y a la Universidad Complutense, que además cedió amablemente los locales para la celebración de los actos.

Estos han sido los alumnos premiados en cada nivel:

NIVEL I

1. **D. Roberto RUBIO NUÑEZ,** *de 1° de B.U.P. del I. B. Font Sant Lluis (Valencia)*
2. **D. Julio LORENTE SERRANO,** *de 3° de E.S.O. del I.B. Ignacio Ellacuría de Alcalá de Henares (Madrid)*
3. **D. José Luis PRIETO GAJARDO,** *de 3° de E.S.O. del I.E.S. Dr. Fernández Santana de Los Santos de Maimona (Badajoz)*

4. **D. Rubén BAUTISTA TAPIAS,** *de 1º de B.U.P. del Colegio Santa María del Pilar (Madrid)*
5. **D. Ismael AGUADO DOMINGUEZ,** *de 3º de E.S.O. del I. B. San Juan Bautista (Madrid)*

NIVEL II

1. **D. Alvaro NAVARRO TOVAR,** *de 2º de B.U.P. del Colegio El Prado (Madrid)*
2. **Dña. Beatriz SANZ MERINO,** *de 2º de B.U.P. del Colegio San Viator (Madrid)*
3. **D.Carlos DOMINGO MAS,** *de 2º de B.U.P. del IES Luis Buñuel de Alcorcón (Madrid)*
4. **D. José Manuel DELFA DE LA MORENA,** *de 4º de E.S.O. del IES de Alcorcón (Madrid)*
5. **D. Oscar MORENO DIAZ,** *de 2º de B.U.P. del Colegio Nª Sª de Loreto (Madrid)*

NIVEL III

1. **D. Nelo Alberto MAESTRE BLANCO,** *de 3º de B.U.P. del Colegio Retamar (Madrid)*
2. **D. Iñaki ARMENDARIZ BENITEZ,** *de 3º de B.U.P. del I. B. Avda. de los Toreros (Madrid)*
3. **D. Borja GUARDIOLA DEL CORRAL,** *de 3º de B.U.P. del Colegio del Prado (Madrid)*
4. **D. Victor REQUENA TRUJILLO,** *de 3º de B.U.P. del I.B. Mixto de Utiel (Valencia)*
5. **D. Manuel CARRANZA GARCIA,** *de 3º de B.U.P. del Colegio Agustiniano (Madrid)*

Nos complace señalar que los alumnos **Navarro Tovar , Domingo Más** y **Moreno Díaz,** premiados en el Segundo Nivel, lo fueron también el año pasado, en el Primero. Igualmente, **Mestre Blanco, Armendáriz Benítez** y **Guardiola del Corral,** premiados en el Tercer Nivel, lo fueron en el Segundo en 1996 y los dos últimos, junto con **Carranza García,** en el Primer Nivel en 1995. Se confirma así en todos ellos una trayectoria muy prometedora para el futuro.

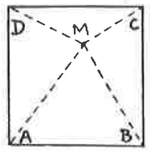
También debemos resaltar la sistemática repetición, año tras año, de éxitos obtenidos por alumnos de los mismos centros, lo que prueba la tenaz y eficaz labor formativa de algunos de sus profesores, a los que queremos felicitar.

Como el año pasado, los mejor clasificados de cada Nivel podrán participar (si se consiguen los fondos necesarios para financiar el importe de los pasajes) en la VI Olimpiada Rioplatense, que se celebrará en Mendoza (Argentina) el próximo mes de diciembre.

Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en este concurso, señalando, para cada uno, las calificaciones medias obtenidas por la totalidad de los participantes y por los premiados de cada nivel.

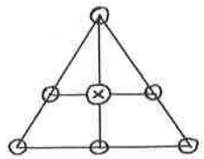
PRIMER NIVEL

Problema 1°: M es un punto interior al cuadrado ABCD. Sean P, Q, R y S los baricentros de los triángulos ABM, BMC, CMD y DMA. Demostrar que son vértices de un cuadrado.



Puntuación media de todos: 1,6; de los 5 premiados: 2,0.
Puntuación máxima: 6 (alcanzada por un alumno).

Problema 2°: Se pretende colocar en los círculos los dígitos 1, 2, ..., 7, de modo que la suma de los tres colocados en cada línea sea constante. ¿Para qué valores de x no es posible esa colocación?



Puntuación media de todos: 4,9; de los 5 premiados: 9,0.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 3 alumnos).

Problema 3°: Calcular la razón entre las áreas de las dos regiones, conociendo la relación entre los radios.

Puntuación media de todos: 1,0; de los 5 premiados: 4,0.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por un alumno).

Problema 4°: Dados cuatro números, las sumas de los de cada una de las seis parejas que se pueden formar con ellos son (de menor a mayor) 20, 32, 40, 46, 54 y 66. Determinar esos cuatro números. Obtener todas las soluciones posibles.

Puntuación media de todos: 1,8; de los 5 premiados: 3,8.
Puntuación máxima: 7 (alcanzada por un alumno).

SEGUNDO NIVEL

Problema 1°: Probar que dados cinco números naturales, siempre es posible elegir tres de ellos cuya suma sea múltiplo de 3.

Puntuación media de todos: 2,1; de los 5 premiados: 7,4.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 2 alumnos).

Problema 2°: C y C' son dos circunferencias de centros respectivos O y O', de modo que C' pasa por O, y O' es interior a C. Sea PQ la cuerda común. El diámetro de C' que pasa por P vuelve a cortar a C en M y la recta de los centros corta a C en A y en B (el punto O' está entre O y B).

Hallar la relación entre las longitudes de los arcos AM y PB, tomando para cada uno el menor de los posibles.

Puntuación media de todos: 0,7; de los 5 premiados: 4,0.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por un alumno).

Problema 3°: Decir, razonadamente, con qué exponente figurará el factor 2 en la descomposición en factores primos de 63!. Utilizando el resultado, comprobar si el número $\binom{63}{32}$ es par o impar.

Puntuación media de todos: 2,5; de los 5 premiados: 8,2.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 4 alumnos).

Problema 4°: Sea un rectángulo de lados 8 cm y 9 cm. Se dibujan dos circunferencias de igual radio tangentes entre sí y tangentes una a dos lados contiguos del rectángulo y la otra a los otros dos. ¿Cuál es el radio?

Puntuación media de todos: 0,8; de los 5 premiados: 5,0.
Puntuación máxima: 9 (alcanzada por un alumno).

TERCER NIVEL

Problema 1°: Un cubo de 1 dm de arista se corta con un plano que pasa por uno de sus vértices y por los puntos medios de dos aristas de las que concurren en el vértice opuesto.

Calcular el área de la sección (que es un pentágono irregular).

Puntuación media de todos: 1,7; de los 5 premiados: 7,0.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por dos alumnos).

Problema 2°: En una tómbola se compran sobres cerrados en los que se incluye una de las frases siguientes:

- Inténtalo otra vez.
- Has ganado 8 puntos.
- Has ganado 13 puntos.

Se ofrece un teléfono móvil a quien reúna exactamente 250 puntos y ya se han entregado algunos. También se ofrece un viaje al Caribe a quien reúna exactamente 75 puntos, pero para eso aún no hay ganador.

¿Lo podrá haber antes de que termine la tómbola?
¿Hay números que no se pueden conseguir?
¿Cuál es el mayor de los números que no se pueden conseguir?

Puntuación media de todos: 3,6; de los 5 premiados: 6,4.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por un alumno).

Problema 3°: Dado un hexágono regular, averiguar dónde se debe situar un punto sobre cada uno de sus lados, para que estos puntos sean vértices de otro hexágono regular cuya área sea 7/9 de la del dado.

Puntuación media de todos: 3,9; de los 5 premiados: 9,4.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 7 alumnos).

Problema 4°: Encontrar el mayor número natural n para el que el número de ternas que se pueden formar con $2n$ elementos sea múltiplo del número de ternas que se pueden formar con n elementos.

Puntuación media de todos: 1,4; de los 5 premiados: 6,4.
Puntuación máxima: 10 (alcanzada por 2 alumnos).

XXXVIII Olimpiada Matemática Internacional

Argentina 1997

La XXXVIII Olimpiada Internacional de Matemáticas se ha celebrado en Mar del Plata (República Argentina) , entre los días 21 y 31 de julio del presente año.

Han sido 84 los países participantes. ¡Todo un récord! Cabe destacar la incorporación de países Iberoamericanos, como Bolivia, Guatemala, Paraguay, Perú, Uruguay y Venezuela, que han realizado un gran esfuerzo por estar presentes en esta Olimpiada Internacional.

Como es habitual, la prueba se hizo en dos sesiones de cuatro horas y media; los problemas propuestos pueden verse en la sección de Problemas Propuestos de este mismo número del Boletín.

Cuatro estudiantes (de Irán, Rumania, Estados Unidos y Vietnam) obtuvieron puntuación perfecta (42 puntos). Se otorgó Medalla de Oro a los 39 estudiantes con 35 o más puntos; Medalla de Plata a 70 estudiantes con 25 puntos o más, y los 122 estudiantes con más de 14 puntos obtuvieron Medalla de Bronce.

El equipo de China obtuvo 6 Oros; Hungría e Irán, 4 Oros y dos Platas; Ucrania, 3 Oros y 3 Platas; Rusia, 3 Oros, 2 Platas y 1 Bronce, y Estados Unidos 2 Oros y 4 Platas.

Los resultados de los estudiantes españoles fueron los siguientes:

	PR1	PR2	PR3	PR4	PR5	PR6	TOT
Anatoli Segura Vélez	1	0	0	0	3	0	4
Miguel Lobo López	2	2	0	4	5	0	13
Max Bernstein Obiols	0	1	0	5	0	0	6
Mario Andrés Montes García	4	0	0	0	1	0	5
Joseba Villate Bejarano	0	2	0	1	0	0	3
Xavier Pérez Jiménez	4	0	0	4	0	0	8

Estuvieron acompañados por los profesores Francisco Bellot Rosado (Valladolid) y Juan Manuel Conde Calero (Alicante).

La próxima Olimpiada se celebrará en julio de 1998 en Taiwan.

Estos datos han sido facilitados por la prof. María Gaspar Alonso-Vega, Adjunta a la Presidencia de nuestra Sociedad y miembro del Comité Organizador de esta Olimpiada Internacional.

Recensiones en Zentralblatt Für Didaktik der Mathematik

Como ya indicamos en números anteriores de nuestro Boletín, la dirección de Zentralblatt für Didaktikder Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL. 29 (3) DE 1997

#1805 (sección G90). Triangulación de la Superficie Esférica, por Julio Fernández Biarge, Bol. Soc. Puig Adam 44 (1996), págs. 15-23.

#1934 (sección M50). La ecuación de Cauchy-Euler: ¿un caso límite de la ecuación de Friedmann?, por Benito Hernández Bermejo, Bol. Soc. Puig Adam 44 (1996), págs. 24-33.

#1833 (sección H50). Unos ejemplos de interés didáctico de Algebras de Boole finitas: divisores de un producto de primos distintos dos a dos, por Luis M. Laita de la Rica, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías, Bol. Soc. Puig Adam 44 (1996), págs. 34-44.

#1834 (sección H60). Una aplicación geométrica del método de los mínimos cuadrados, por Julio Benítez López, Bol. Soc. Puig Adam 44 (1996), págs. 45-50.

#1584 (sección D44). La biblioteca del monasterio de El Escorial como recurso didáctico en la clase de Matemáticas de Secundaria, por M. M. Garbayo Moreno, Charo Morata Sebastián y J. M. Sordo Juaneda, Bol. Soc Puig Adam 44 (1996), págs. 51-62.

#1668 (sección F30). Divisores de un número grande, por Fernando Lisón Martín, Bol. Soc. Puig Adam 44 (1996), págs. 63-73.

Copias de estas recensiones están en nuestra Sociedad, a disposición de los interesados.

Anuncios de Congresos de Educación Matemática

3es JORNADES DE DIDACTICA DE LES MATEMATIQUES A LES COMARQUES MERIDIONALS

(Reus, 13-15 noviembre 1997)

Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales

Universitat Rovira i Virgili

Información: Apartat 1306 REUS (Baix Camp)-43200
Fax: (977) 559710 - 701712
e-mails: lgirondo@etse.uvr.es jrovira4@pie.xtec.es

INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICS

(Samos, Grecia, 3-6 julio 1998)

Información: Prof. José Ramón Vizmanos Buelta
I.S. Santamarca
C/ Puerto Rico, 36 - 28016 Madrid
(El prof. Vizmanos forma parte del Program Committee de este congreso.)

III CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

(Caracas, 26-31 julio 1998)

Universidad Central de Venezuela

Información: Apartado Postal 54087 UCV. 1053-A Caracas (Venezuela)
Tel: (58-2)-6053084, 6054080, 6054081
Fax: (58-2)-6054086
e-mail: iiicibem@sagi.ucv.edu.ve

NOTA NECROLOGICA

Después de cerrar este número, hemos tenido noticia del fallecimiento del padre de nuestro compañero Martín Garbayo Moreno, vocal de Actividades y Concursos de nuestra Junta Directiva. Deseamos expresar, en nombre de todos los miembros de la Sociedad, nuestro más sentido pésame.

Technology gets Polytechnics closer: a collaboration in the European Union between Spain and Italy*

María Mascarello†, José L. Hueso, Alicia Roca y Juan R. Torregrosa††

Introduction

The authors of this note met for the first time during the International Conference on "Technology in Mathematics Teaching 1993" at the University of Birmingham when presenting the papers [5] and [14]. This represented the beginning of a fruitful collaboration during the years 1994, 1995 and 1996.

In the following a short description of the use of the technology in the teaching of Mathematics at the respective Polytechnics.

1. At the Torino Polytechnic

1.1. The past

Since the late 70ies, in the basic mathematics courses at the Faculty of Engineering of the Polytechnic of Torino we have been using informatic instruments. At that time in Italy, prepared software suitable for teaching mathematical subjects within our curricula studiorum was rather scarce, thus we felt the need to have programs specifically developed for our mathematics courses. We began by observing that the traditional teaching of Mathematics in our Engineering Schools seemed to be too abstract and far from the applications,

* This work was financially supported by M.U.R.S.T. Funds of the Italian Government, C.N.R. of Italy Contratti n. 93.00327.CT01, n. 94.00117.CT01 and n. 95.00699.CT01, ERASMUS Grant STV-93-I-2013/I and ERASMUS-SOCRATES Grant STV-95-T-2005.

† Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino, Corso Duca degli Abruzzi 24-10129 Torino, Italy. email: mascarello@polito.it

†† Departamento de Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera 14 - 46071 Valencia, Spain. email: jlhueso@mat.upv.es, aroca@mat.upv.es, jrtorre@mat.upv.es

for most students. It was therefore necessary to introduce in the "curricula" some examples of actual construction of mathematical models which could be of some interest for students in Engineering.

At the beginning, the basic ideas of calculus (limits, derivatives, integrals) are introduced; the fundamental problem is to give the students a correct method of approaching mathematics. This applies also to the use of computers; first a programming language and some fundamental notions such as algorithm, flow diagram, floating point computations were introduced; then problems were solved using a method divided into three steps: conjecture, proof, refutation. With the help of a computer the students make a numerical conjecture about the solution of a problem; then they prove the result in a rigorous way; eventually they go back to the numerical result they got. In this way we can emphasize that numerical conjectures may be wrong and that a global analysis of all errors intervening in the numerical process is necessary.

In the exercise-sessions of the Mathematical Analysis I course, it was studied on the micro computers the graph of a real valued function of one real variable, underlying local and global properties.

In the exercise-sessions of the Mathematical Analysis II course, we had several examples of "computerized solutions" for the calculation of definite integrals, for the integration of simultaneous differential equations, for the representation of a function in Fourier series, all prepared by the students themselves [15], [16] and [22]. In this kind of project, the students work on the assigned task by means of both the proposed methodologies of the course and by expanding on personal research.

As for the defined integrals, we would like to recall an exercise developed in the Mathematical Analysis II course on the calculus of Elliptic Integrals [18]. For a long time the study, or at least the definition, of the complete elliptic integrals of the first and second kind has been part of our program of Mathematical Analysis II. We used these integrals to calculate the length of an ellipse and to study the period of motion (without friction) of a simple pendulum whose oscillations are not considered infinitely small. This topic is particularly suited to numerical elaboration and computer application. It is obvious that for the treatment of other subjects, traditional theoretical lessons satisfy completely the didactical aims, while for other ones the use of prepared software can still be useful.

Regarding the Fourier series, a valid didactic experience was acquired from proposing some applications, which were not part of the regular program, such as studying the Gibbs phenomenon and some sampling problems [17], [20] and [8]. Digressing from the traditional required preparatory material towards application to engineering problems had the effect of stirring up interest in the study on the whole.

One of the most important experiments concerned the study of the dynamical systems. Precisely, we have begun in the Mathematical Analysis I course with the study of discrete dynamical systems, which was introduced after the study of sequences defined by recurrent formulae [21] and [19]. As a natural continuation, in the Mathematical Analysis

II course we considered continuous dynamical systems, giving a formal expression of the qualitative results. Finally we returned to the use of micro computers to find numerical results; this was done in order to check the known results of the theory, and also to conjecture new results, concerning open problems [16] and [22].

For details about these topics you can see also [4].

We would like to emphasize the following cognitive values peculiar to the experience of having the students engaging in programming.

The learning goal of improving mathematics knowledge is reached when the teacher suggests an exercise that leads to probe critically a concept, through a possible refutation of what had been learned in the preceding lessons.

It is of course necessary that the students master a language well: the preparation of software is in fact, even from a mathematical standpoint, an occasion for investigation of the topic at hand. However, it was noticed a certain tendency towards the computer itself to the detriment of time devoted to mathematical reflection.

Later in the 80ies and now, we deem more important to use prepared software that allows an approach to mathematics through informatics without requiring any skill in programming. In order to work with prepared software, the students need informatic and mathematical prerequisites weaker than those necessary for programming.

From an informatic point of view, it's enough that the students know the simplest instructions of the operative system and the symbols used within the software, and they must be conscious that a computer can only work in a discrete environment, even though they are dealing with a continuous problem. All this takes only a short explanation.

From a mathematical point of view, the prerequisites depend on the type of work the students have to do and on the goals the teacher wants to reach; they range from simple definitions needed if a tutorial is used, to a good knowledge of the topic if an evaluation test is given [1].

Experiences with prepared software are usually carried out as follows:

– The subject is introduced by the teacher, the problem is singled out and basic concepts and mathematics terms are defined, in order to have a language common to students, teacher, text books and software.

– Afterwards the students are divided in groups, they get work-sheets prepared by the teacher and start to work with the computer. The number of students per group goes from 2 to 4 depending on the computers at hand. We believe work sheets are essential because they force the students to dwell upon the basic points until the appointed goal is reached. The didactical course should be very gradual, with many exercises repeated many times, to let everyone verify his own learning level, and in case probe the theory.

– Finally it comes the testing time; it can be a traditional test, or a report about what it has been done, or a paper.

We have been using prepared software since the first 80ies, as we noticed. Our earlier experiences had been carried out by LOTUS 123 and MICROCALC, and are reported in [4]

1.2. The present

Nowadays we are going on in using prepared software, but we devote our main attention to symbolic mathematical systems (SMS), that are systems providing integrated numeric, graphic and symbolic capabilities.

About general matter concerning the use of SMS in teaching mathematics, we refer to [10], [11], [23], [6], [5], [9], dwelling upon the following questions: what could be the specific innovations introduced in teaching by the use of symbols manipulation, and in which way the interplay of graphic, numerical and symbolic capabilities of the computer can improve the teaching and learning quality.

In particular we notice that we have been using symbolic software in research for about 11 years, from the appearance on the market of muMATH, but we could introduce it in teaching only six years ago, since the appearance on the market of DERIVE, because its user friendliness.

In this sense we have been maturing the belief that every educational tool has to be both easy to learn and user friendly, because students have to pay all attention to mathematics concerns, without any trouble due to the use of the tool.

The most evidence coming out from our experience is that SMS are powerful tools in making symbolic computations easier.

The first consequence is that it will be an important professional tool, above all for engineers; we remember that the evolution of professional tools of the engineers in the last decades passed from the slide rule through the hand-held calculators to personal computers. In this frame the Symbolic Mathematical Systems are a fact of life [8], therefore we have to teach our students how to use them for the best.

We have to notice an analogous trend in teaching integral calculus, where the symbolic software is becoming to be an important tool: early on we devoted very much work to teaching paper and pencil techniques, after we introduced tables of integrals, now we are trying with symbolic software systems [6].

The capabilities of the SMS offer some important advantages in mathematics teaching that are widely discussed in [9]; we limit ourselves to recall the following ones:

– The power of the SMS permits to reduce the emphasis on technical calculations skills and to increase the one on interpretative abilities (see [22], [6]).

– The interplay among graphic, numerical and symbolic capabilities, help the student to create different mathematic representations of a concept [2], so that it can be used to move forward the bounds of our teaching.

Some examples quite powerful on harmonics and Fourier analysis are reported respectively in [7] and [3].

2. At the Valencia Polytechnic

2.1. The past

In the last 80ies, in the framework of the "Plan de Innovación Educativa", an ambitious project of the Universidad Politécnica de Valencia, we proposed the introduction of new technologies in the teaching of Mathematics at the Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Telecomunicación (ETSIT). We considered that the introduction of technology strengthened the role of mathematics in technical studies and showed its applicability and its utility for the professional work of the engineer.

The experience begun in academic year 89-90 with the elaboration of mathematical lessons to be developed in the computer laboratory. The working sessions were voluntary for the students and took place out of the regular time schedule. The success of the experience suggested us the introduction of the Mathematics Laboratory in the curriculum of the subjects of first year university. Since then, the Laboratory is a significant part of the teaching and the assessment of the students of mathematical subjects at ETSIT.

The Mathematical Laboratory experience aimed to

- Let the student use computer software for scientific and technical computations.
- Focus on numerical aspects of mathematical problems and engineering applications.
- Let the student acquire problem solving skills, not only for 'paper and pencil' problems, but also for problems modeling real situations.
- Stimulate the student to 'do' mathematics, to question himself, to learn actively.

Some questions arose during the elaboration and the initial testing of the teaching materials. The answers to these questions are not unique and largely determine the development of the project.

Let us first state the questions, and then proceed to explain what we have done to answer them.

- What kind of software tools should we use?
- What mathematical subjects are the most suitable to be taught with the computer?
- What kind of problems are to be solved?
- How to promote critical thinking (here, analysis of computer outputs)
- How to exploit the computer capabilities in order to enforce mathematical understanding.

One of the aims of this experience was to find out the software features that better suited to the subjects to be dealt with and to the students the whole activity was addressed to. So we decided to experience a variety of software. We used a programming language to

implement mathematical algorithms in some cases, a symbolic and numerical mathematical system in some others and a spread sheet in others. The whole material was collected and published in a book [12].

The working sessions in the Mathematics Laboratory are organized as follows. At the beginning, some related engineering problems are posed. Then, the mathematical tools needed for the resolution are explained. Finally, the student solves one of the problems with the aid of the computer. The other problems can be assigned as homework. We complete the teaching material with an autoevaluable questionnaire and a few more problems.

The mathematical subjects covered in the Laboratory are the following:

1. Gaussian elimination.
2. Graphs of functions of one and two variables.
3. Iterative methods for linear systems.
4. Solution of nonlinear equations.
5. Least squares approximation.
6. Polynomial interpolation.
7. Matrix algebra with MATLAB.
8. Numerical integration. Romberg method.
9. Numerical solution of differential equations.
10. Fourier series.

When developing the Mathematics Laboratory materials, we have realized the students need of learning aids. So we have developed some software tools to reinforce the Laboratory activities.

One of them is a computer program called MATEMAT [13]. This menu driven program covers most of the numerical and graphical aspects practiced in the Laboratory. Whit this program, the students can check the correctness of their answers to the problems posed in the work sessions.

We have also developed a series of interactive questionnaires prepared in an hypertext frame that covers the mathematical subjects of the first course we previously mentioned. What has already been developed is a small part of a broader project on Computer Aided Teaching.

2.2. The present

The Mathematics Laboratory is now a established subject in the curriculum of first year university at ETSIT. But this doesn't mean that our work has finished. In fact, the project must be updated from time to time, in order to adapt it to the fast technological changes.

Although at the beginning we experienced several kinds of software (programming languages, worksheets, computer algebra systems), we found convenient the usage of a unique tool for the Laboratory sessions. This would ease the preparation of the units, minimize the time spent in learning the programming language and allow us to focus more on the mathematical models than on implementation details. In consequence, from now on, all the laboratory project are developed using the same software, MATLAB. We have chosen it because of its quality, ease of use and programming and interactivity. An important feature of MATLAB is that many of the incorporated functions are written in files that the user can read and even modify. So you can either use functions as black boxes,or analyze what they do and, eventually, customize them to better suit your needs.

At the same time, we continue working on the Computer Assisted Learning project that tries to make available to our present or future students the mathematical topics of first year university. The first goal of this project is to develop interactive learning units that cover what students are supposed to know about Linear Algebra and Calculus when they enter the university. We think that the improvements both in student learning and academical results will worth the work invested in this project.

3. Future Collaboration

In view of the didactical possibilities that computers offer we have undertaken a project in the Politecnico di Torino and in the Universidad Politécnica de Valencia. Our goal is to prepare a collection of mathematical theme units within the scope of first two years University needs, interrelated among them, in a multimedia frame, to be run via Internet.

This project means a starting point to a major and narrower collaboration between different European universities concerning teaching subjects and intends to make available to teachers all over a precious tool up to now fairly misused in this area.

At ETSIT all the students have an email count and full access to Internet. We suggest them to use email to ask us questions related to the subjects explained or to the proposed problems. We are now developing Web pages[1] with a lot of information that complements the presential sessions. In addition to bureaucratic information (timetables, adverts), there is the text of proposed exercises, examples of completely worked-out exams, the scheme of the lessons and the overhead projector slides of some of them. The documents are in HTML, MS Word or Power Point format, according their characteristics. We are currently developing interactive lessons, which will be distributed in CD-ROM. The student can access the Web materials from the computers laboratory in the practical sessions or even in the exams. Some students have Internet access at home and so, they can download the files at any time.

[1] http://www.etsi.upv.es/ depart/ dmat/ homepage.html

We have focused on the elaboration of learning units for the subjects that include computer practices, because the student is usually in front of a computer connected to the network during the learning session. Then, a lot of material of Laboratorio de Matem\'aticas is already available (see http://www.etsit.upv.es/ depart/ dmat/ asig/ labormat/ labormat.htm). This material will soon be made available to the students of Torino in Italian version.

There are also other possibilities that we are considering such as Laboratory remote working sessions that the student can develop at home, email tutoring and remote evaluation.

The Universidad Politécnica de Valencia, as many others, is very interested in developing its virtual face, based on teaching and learning throughout the net. We think of the virtual university as a complement, not opposed to the real university. In fact, the materials we have developed are mainly addressed to our presential students. Virtual university will provide a broader audience to our courses and have a great influence on the field of distance learning.

References

[1] A. Di Carlo, M. T. Galizia Angeli and G. Trentin (1989): "Come strutturare un contenuto matematico: gli studenti sviluppano un test diagnostico sulle relazioni d'ordine", *La matematica e la sua didattica,* Anno III, 2, pp. 6-11.

[2] T. Dreyfus (1991): "Advanced mathematical thinking processes", in *Advanced Mathematical Thinking,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

[3] M. Elia, M. T. Galizia and M. Mascarello (1995): "From Fourier coefficients to Fourier Transform and DFT: a computer-aided path with DERIVE", *The International DERIVE Journal,* Vol. 2, N. 1, pp. 83-97.

[4] M. T. Galizia, C. Marconi, M. Mascarello and A. R. Scarafiotti (1993): "Experiences of Computer Laboratory in Mathematics Teaching", *Advanced Educational Technologies for Mathematics and Science,* D. L. Ferguson, Ed., NATO ASI Series, Computer and System Sciences, vol. 107, Springer-Verlag, Berlin, pp. 585-615.

[5] M. T. Galizia, M. Mascarello (1993): "Symbolic Mathematical Systems in teaching integration and Fourier series", in Conference Proceedings *Technology in Mathematics Teaching,* TMT93, B. Jaworski ed., Birmingham, pp. 253-260.

[6] M. T. Galizia, M. Mascarello (1993): "Different kinds of software in teaching integration and Fourier series", *Collegiate Microcomputer,* Vol. XI, n. 4, pp.264-274.

[7] M. T. Galizia, M. Mascarello (1995): "Harmonics and periodic functions: a computer-aided path to introduce Fourier analysis", *Soc. "Puig Adam",* Bol. 41, pp. 33-49.

[8] M. T. Galizia, M. Mascarello (1995): "Esercitazioni sull'analisi di Fourier con l'aiuto dell'elaboratore", *Actas de las Jornadas sobre Nuevas Tecnologías en las Enseñanza de las Matemáticas en la Universidad,* A. Montes, J. M. Brunat eds., Barcelona, pp.143-152.

[9] A. García, A. Martínez, R. Miñano (1995): "Nuevas tecnologías en la enseñanza de la Matemática", *Soc. "Puig Adam",* Bol. 39, pp. 41-60.

[10] B. R. Hodgson (1987): "Symbolic and numerical computation: the computer as a tool in mathematics", IFIP 1987 "Informatic and the teaching of mathematics", D. C. Johnson and F. Louis eds., North Holland, pp. 55-60.

[11] B. R. Hodgson, E. R. Muller (1992): "The impact of Symbolic Mathematical Systems on Mathematics education", in *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching,* B. Cornu and A. Ralston eds., UNESCO, pp. 93-107.

[12] J. L. Hueso, A. Roca, J. R. Torregrosa (1992): "Matemática Aplicada: Prácticas con ordenador". Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia-92.674.

[13] L. Taroncher (1993): "MATEMAT Versión 1.0. Manual de Usuario". Departamento de Matemática Aplicada. E.T.S.I. Telecomunicación. Universidad Politécnica de Valencia.

[14] J. L. Hueso, A. Roca, J. R. Torregrosa (1993): "Mathematics + Spread Sheet = an Experience to Bear in Mind", in Conference Proceedings *Technology in Mathematics Teaching,* TMT93, B. Jaworski ed., Birmingham, pp. 273-280.

[15] M. Mascarello, A. R. Scarafiotti (1985): "Computers experiments on Mathematical Analysis teaching at the Politecnico of Torino, ICMI "The influence of Computers and Informatics on Mathematics and its Teaching", *Supporting Papers,* Strasbourg, pp. 265-267.

[16] M. Mascarello, B. Winkelmann (1986): "Calculus and the computer. The interplay of discrete numerical methods and calculus in the education of users of Mathematics: considerations and experiences", ICMI Study Series *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching,* Howson ed., Cambridge University Press, Cambridge, pp. 120-132.

[17] M. Mascarello, A. R. Scarafiotti (1987): "Sperimentazione didattica nel Politecnico di Torino: Supporto informatico ai corsi di Analisi Matematica nel biennio della Facolta' di Ingegneria", *L'Educazione Matematica,* VIII, II, 2, pp. 147-151.

[18] M. Mascarello, A. R. Scarafiotti (1988): Using computers in calculus examples-classes for engineers, ECM/87 "Educational Computing in Mathematics", Eds. T. F. Banchoff and oth., North- Holland Amsterdam, pp. 93-97.

[19] M. Mascarello, A. R. Scarafiotti (1988): Experiments in mathematical education at secondary school and Politecnico of Torino (Italy), ICME 6, Theme Group 2 "Computers and the teaching of mathematics", Working Group 2.5 "The effects of technology and of computer science on a maths curriculum for the future", preparatory papers, Budapest, pp. 88-93.

[20] M. Mascarello, A. R. Scarafiotti and G. Teppati (1989): Cultura e insegnamento: Esperienze significative appoggiate a metodi e strumenti informatici, Proceedings Conference "Cultura Matematica e Insegnamento", Universita di Firenze, CDO, pp. 253-260.

[21] M. Mascarello, F. Massobrio and A. R. Scarafiotti (1990): Computer Experiments in teaching discrete dynamical systems at the Polytechnic of Turin (Italy), Congreso "Computational Geometry and Topology and Computation in Teaching Mathematics" Sevilla 1987, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla, pp.98-106.

[22] M. Mascarello, B. Winkelmann (1992): "Calculus teaching and the computer. On the interplay of discrete numerical methods and calculus in the education of users of mathematics", in *The Influence of Computers and Informatics on Mathematics and Its Teaching,* B. Cornu and A. Ralston eds., UNESCO, pp. 108-116.

[23] E. Neuwirth (1987): *The impact of Computer Algebra on the teaching of Mathematics,* IFIP 1987 "Informatic and the teaching of mathematics", D. C. Johnson and F. Louis eds., North Holland, pp. 49-53.

Demostración del Teorema de Tales, por métodos elementales

Pedro Pescador Díaz

I.E.S. "Juana de Pimentel"

Abstract

In this article a proof of Tales' Theorem is given. It uses elemental resources and it also tries to avoid any matter related to irrationals.

1. Introducción

Respecto a la demostración clásica hay que mencionar la siguientes diferencias:

- Aunque es menos intuitiva, también es muy sencilla, lo que nos permite hacerla en el aula. La ventaja es que con el proceso de la demostración se puede aprender, por ejemplo, a dividir un problema, a ver si se cumplen las hipótesis, a saber para que conjunto se ha demostrado o es válida una tesis, etc.
- Es válida aunque la razón de semejanza sea un número irracional.

Quizás pueda sorprender el hecho de utilizar superficies para demostrar relaciones entre las longitudes de los lados de triángulos que tienen los mismos ángulos. No obstante cabe pensar que el Teorema de Tales también es deducible del Teorema de Pitágoras, que expresa claramente una relación entre los "cuadrados" de los lados de un triángulo rectángulo. Además, es la sencillez con la que se puede demostrar la proporcionalidad entre los catetos de triángulos rectángulos semejantes, como se ve en la figura 1 y la posibilidad de hacer lo mismo con las hipotenusas, sin recurrir al Teorema de Pitágoras, lo que inclina la balanza a favor de su uso.

2. En el aula

Interesa el proceso más que el resultado. Este es elemental, intuitivo y ya está aceptado por los alumnos.

Es en "El Taller de Matemáticas" o en 1° de Bachillerato antes de dar la trigonometría, donde se puede hacer con más provecho el estudio que se propone, debido a que los alumnos están especialmente motivados.

2.1. Los alumnos deben saber:

- La definición de triángulos semejantes. Conviene pulirla, para la semejanza de triángulos sólo es necesario exigir que dos ángulos de uno sean respectivamente iguales a los homólogos del otro triángulo.
- Que si en una proporción las razones tienen el mismo consecuente (denominador) deben tener el mismo antecedente (numerador).
- Las siguientes propiedades de las proporciones:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{a^2}{b^2}$$

Nota: En este artículo todos los números son siempre mayores que cero.

- Conocer la diferencia entre los números racionales y los irracionales. – En cuanto al método, deben tener una idea global del proceso, asumir la conveniencia de dividir la demostración y resolver cada una de las partes.

2.2. Objetivos:

Nos proponemos que los alumnos sean capaces de:

- Dividir un problema si lo ven oportuno.
- Utilizar las propiedades de las proporciones.
- Utilizar figuras y segmentos (alturas, particiones de la hipotenusa), algunos de los cuales, naturalmente, no aparecen en el enunciado y deben ponerse por propia iniciativa y a su conveniencia.
- Usar letras para señalar a los triángulos, los ángulos y los segmentos.
- Auxiliarse de los resultados previamente obtenidos.
- Observar si se cumplen las condiciones que nos permiten aplicar un teorema.
- Darse cuenta que el uso de una hipótesis crea en la tesis la natural dependencia de la misma. Idem al usar un teorema en la demostración de otro.

2.3. Actividades iniciales. El problema de la demostración clásica:

Para que los alumnos experimenten con la validez y la dificultad del método clásico, el profesor, tras utilizar éste para demostrar la proporcionalidad de los lados en un caso sencillo, sea por ejemplo $T \sim T'$, $a = 1$, $a' = 3$ les pide que hagan lo mismo con $T \sim T'$, $a = 2$, $a' = 3$. Resuelta esta cuestión, les pide de nuevo que utilicen el método clásico para intentarlo con $T \sim T'$, $a = 1$, $a' = \sqrt{5}$, advirtiéndoles que pueden tener dificultades.

Cuando se dan cuenta de lo que ocurre se les propone, como alternativa, la demostración que se expone en el artículo.

2.4. Idea global del proceso a seguir:

- Dividir el teorema en sus partes: ($\Rightarrow$) y ($\Leftarrow$).

($\Rightarrow$) Demostración de la proporcionalidad de los lados a partir de la igualdad de los ángulos. Se procede:

- Dividiendo a los triángulos en dos tipos, los rectángulos y el resto.
  - Para el caso de los rectángulos se subdivide la cuestión de la proporcionalidad viendo primero la que hay entre los catetos y luego la de las hipotenusas con éstos.
  - Una vez alcanzada la tesis para los triángulos rectángulos se demuestra la validez para un triángulo cualquiera dividiendo a éste en triángulos rectángulos.

($\Leftarrow$) Demostración de la semejanza a partir de la proporcionalidad de los lados. Se usa el recurso de:

- Valerse de un tercer triángulo T" especialmente diseñado, semejante a T y con un lado igual al homólogo de T'.

2.5. Indicaciones en las cuestiones pormenorizadas

– Para la proporcionalidad de los catetos se les presenta la figura 1 y la expresión que tienen que demostrar. La primera cuestión es que decidan si con la hipótesis se puede construir la figura. Después, según el nivel que tengan los alumnos, se les puede ayudar, sea pidiendo que quiten los denominadores sea pidiendo que calculen el área de los rectángulos.

– Para demostrar la proporcionalidad de las hipotenusas se les debiera ocurrir usar el Teorema de Pitágoras, habría que dejarles hacerlo y discutir sobre la dependencia creada motivándoles para evitarla. De cualquier forma conviene que realicen la demostración subdividiéndola en las siguientes partes:

– Poner las hipotenusas como bases y ver que son proporcionales a las alturas. Después de haber insistido en que es conveniente dividir, tienen aquí su oportunidad.

– Observar que hay dos maneras de calcular la superficie de cada triángulo, hacer el cociente de las expresiones.

– En el cociente obtenido, utilizar la proporcionalidad de las hipotenusas y las alturas para eliminar las alturas y la de los catetos para eliminar uno de ellos y encontrar la proporcionalidad de las hipotenusas y los catetos. Obsérvese que es un proceso de "simplificación" de una expresión con el concurso de otras.

3. Teoría

3.1. Definición

Dos triángulos T y T' son semejantes $T \sim T'$ si y sólo si tienen los ángulos respectivamente iguales.

$$T \approx T' \Leftrightarrow A = A',\ B = B',\ C = C'$$

Nota: En todos los triángulos $A + B + C = 180°$ por lo que es suficiente que dos ángulos sean respectivamente iguales para que los triángulos sean semejantes.

3.2. Teorema de Tales

Dos triángulos son semejantes si y sólo si tienen los lados proporcionales.

$$T \sim T' \Leftrightarrow \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Demostración:

$T \sim T' \Leftrightarrow \dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b} = \dfrac{c'}{c}$ Los triángulos semejantes tienen los lados proporcionales.

* Si uno de los ángulos es recto, sea A = A' = 90°

La semejanza de los triángulos nos permite colocarlos como se encuentran en la siguiente figura.

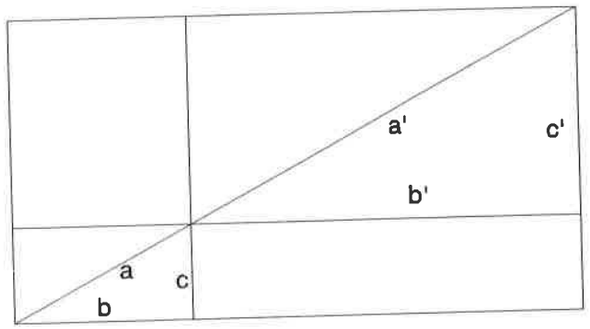


Figura 1

Al considerar que los tres triángulos que se encuentran por encima de la diagonal son respectivamente iguales a los que se encuentran por debajo de ella, resulta que los rectángulos que hay a ambos lados de la diagonal tienen la misma área. Luego:

$$b \cdot c' = b' \cdot c \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} \qquad (1)$$

Queda demostrado que en triángulos rectángulos semejantes, los catetos son proporcionales.

La tentación ahora, es usar el teorema de Pitágoras para demostrar que las hipotenusas también lo son. Sin embargo ello crearía una dependencia que puede evitarse de la siguiente forma.:

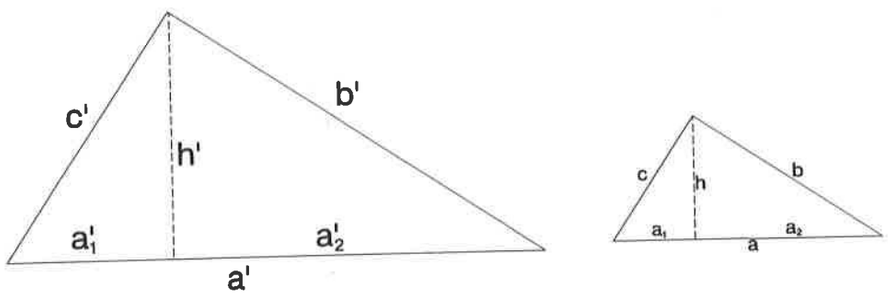


Figura 2

De la semejanza de los triángulos rectángulos interiores

$$\frac{a'_1}{a_1} = \frac{h'}{h} \qquad \text{y} \qquad \frac{a'_2}{a_2} = \frac{h'}{h}$$

de donde, por ser $a'_1 + a'_2 = a'$ y $a_1 + a_2 = a$

resulta:

$$\frac{a'}{a} = \frac{h'}{h} \qquad (2)$$

Hay dos maneras de calcular la superficie de cada triángulo, lo que nos da

$$\frac{a' \cdot h'}{2} = \frac{b' \cdot c'}{2} \qquad \text{y} \qquad \frac{a \cdot h}{2} = \frac{b \cdot c}{2}$$

y por tanto:

$$\frac{a' \cdot h'}{a \cdot h} = \frac{b' \cdot c'}{b \cdot c} \qquad (3)$$

Utilizando en esta ecuación las expresiones (2) y (1) resulta

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \left(\frac{b'}{b}\right)^2$$

y finalmente:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \qquad (4)$$

Por consiguiente, los triángulos rectángulos semejantes tienen sus lados proporcionales.

* Si no hay ángulo recto.

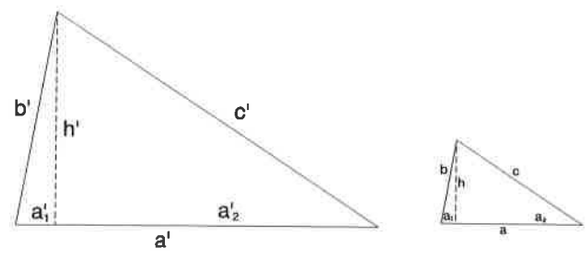


Figura 3

Entonces, utilizando el resultado anterior en los triángulos rectángulos que aparecen al construir la altura

$$\frac{a'_1}{a_1}=\frac{b'}{b}=\frac{h'}{h} \qquad \text{y} \qquad \frac{a'_2}{a_2}=\frac{c'}{c}=\frac{h'}{h}$$

también es obvio que

$$\frac{a'_1+a'_2}{a_1+a_2}=\frac{a'}{a}$$

y por lo tanto:

$$\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

Así queda demostrado que si dos triángulos son semejantes sus lados son proporcionales.

$$T \sim T' \Leftarrow \frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$$

T y T' son semejantes si tienen los lados proporcionales.

Para la demostración se construye un triángulo T" semejante a T y se ve que tiene los lados iguales a T'.

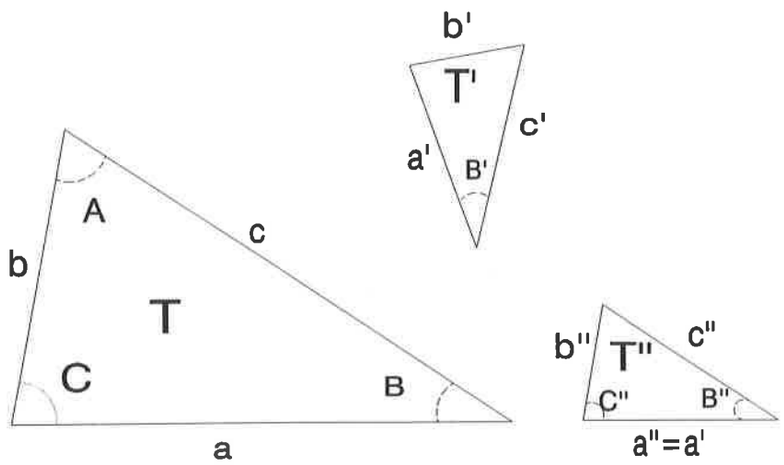


Figura 4

Construimos pues, un triángulo T" tal que $C" = C$, $B" = B$, $a" = a'$. Al ser $T \sim T"$ se tiene

$$\frac{a"}{a}=\frac{b"}{b}=\frac{c"}{c}$$

y como se ha tomado $a" = a$ queda

$$\frac{a'}{a}=\frac{b"}{b}=\frac{c"}{c}$$

que, junto a la hipótesis, nos da $b" = b'$, $c" = c'$, por lo que $T" = T'$ y finalmente $T \sim T'$.

Los espacios de Lorentz y la geometría métrica del triángulo

Juan Bosco Romero Márquez

I. B. Isabel de Castilla. Ávila

Abstract

In this paper some metric inequalities are presented which relate to different metric elements of a pair of triangles ABC and A'B'C' such as: (a,b,c), and (a',b',c') sides lengths ;semiperimeters (s,s'); inradius (r,r'); circumradius (R,R'), etc, of the two triangles, respectively from the point of view of the Lorentz Spaces.

1. Introducción, terminología y resultados básicos

Muchos de los resultados que vamos a establecer aquí pueden ser probados por métodos algebraicos elementales de cálculo. Otros resultados se demostrarán utilizando, entre otras, las siguientes desigualdades:

La desigualdad de las medias geométrica-aritmética, las desigualdades de Aczel, Bellman, Oppenheim, Cauchy, Chebisev y Minkowski, respectivamente.

1.1. La fórmula de Chapple-Euler y el teorema de Poncelet

En esta sección algunas proposiciones y sobre todo el resultado principal que vamos a demostrar aquí, se basan en su prueba en la fórmula de Euler-Chapple. Esta nos sirve como la relación unificadora para todos los triángulos en el sentido que veremos.

Además, esta fórmula está ligada. En una primera aproximación se la puede considerar como una primera versión del Teorema de Poncelet para los polígonos inter-inscritos, entre dos cónicas.

J. V. Poncelet, en su *Traité sur les propiertés projetives de figures,* incluye el interesante e importante teorema que es ahora llamado "Teorema de la clausura de Poncelet's y que concierne a los polígonos inter-inscritos entre dos cónicas.

Diremos que un polígono K, de n lados $L_0, L_1, \ldots, L_{n-1}$, y vértices $P_0 = L_{n-1} \cap L_0$, $P_1 = L_0 \cap L_1, \ldots, P_{n-1} = L_{n-2} \cap L_{n-1}$, es llamdo inter- inscrito a las dos cónicas C y D si todos los P_i estan sobre C y todos los L_i son tangentes a D.

Teorema 1. De la Clausura de Poncelet

Sean C y D dos cónicas lisas. Si existe un polígono de n lados inter-inscrito entre C y D, entonces para cada punto P sobre C hay un polígono inter-inscrito de n lados que tiene a P como uno de sus vértices.

El resultado más antiguo que tiene relación con el teorema de Poncelet es la fórmula de Euler-Chapple de la geometría del triángulo y que es la siguiente:

Sea ABC un triángulo cuyos lados son x, y, z, y circunscrito al círculo C con radio R, e inscrito al círculo D con radio r. Sea d la distancia entre los centros de C y D, entonces tenemos:

$$d^2 = R^2 - 2rR \qquad (1).$$

Existen númerosas demostraciones de este resultado. Ver, por ejemplo, [10], [17], [19] y [20].

Lo importante de (1) es que nos sugiere el teorema de la clausura de Poncelet para triángulos inter-inscritos entre círculos. Como sabemos que R y r son dados como funciones de los lados x, y, z del triángulo, por las relaciones R = R(x,y,z) y r = r(x, y, z) (2).

Si ahora fijamos R, r en (1) vemos que existe al menos un triángulo inter-inscrito entre los círculos C y D; entonces las ecuaciones (2) determinan una variedad de dimensión uno –una curva– para los valores, x, y, z; y, con los cuales, determinamos una familia de triángulos de dimensión uno. Ver [8], pp. 5-6, para unas acotaciones "las mejores" entre los perímetros de dos de tales triángulos. Y mirar [17], Chapple, Euler, Fuss, Lhuiller y otros, Poncelet, Steiner, pp. 291-7 para completar el marco de investigación histórica del teorema de Poncelet para polígonos.

Veamos ahora a la fórmula de Chapple-Euler como unificadora de cualquier tipo de triángulo ABC no equilátero según las siguientes interpretaciones en términos de triángulos rectángulos:

Comenzamos con el siguiente teorema:

Teorema 2. Sea ABC un triángulo rectángulo $a > b \geq c$, y sean R, r, los radios de los círculos circunscrito e inscrito respectivamente. Entonces se verifica

$$\frac{r}{R} \leq \sqrt{2} - 1, \qquad \text{o} \qquad b + c \leq \sqrt{2}a \qquad (3)$$

con la igualdad alcanzada en estas dos desigualdades equivalentes, si y sólo si b = c.

Hay distintas demostraciones sencillas de este resultado:

1) Si b y c > 0 , entonces

$$b + c \leq \sqrt{2(b^2 + c^2)}$$

que se obtiene por cálculo directo. Después se calcula r/R, sabiendo que en todo triángulo rectángulo se prueba que

$$R = \frac{a}{2} \quad y \quad r = \frac{b + c - a}{2}.$$

2) Como un ejercicio de máximos y de mínimos.

De nuevo, y como una aplicación del teorema 2, y usando como clave unificadora la fórmula de Chapple-Euler tenemos que si ABC es un triángulo no equilátero siendo R, r los radios de los círculos circunscrito e incrito respectivemente al triángulo, ponemos:

a) $d^2 = R(R - 2r), \quad R^2 = d^2 + 2rR \quad (4)$

y de aquí construimos el triángulo rectángulo T_1 siguiente:

$$a_1 = R, \quad b_1 = \sqrt{2rR}, \quad c_1 = d, \quad R_1 = \frac{a_1}{2}, \quad r_1 = \frac{b_1 + c_1 - a_1}{2} \qquad (5).$$

Aplicando a T_1, el teorema 2 obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{2r} + \sqrt{R - 2r} \leq \sqrt{2R} \qquad (6),$$

b) Esta interpretación es la más interesante, ver [23].

Tenemos que $d^2 = R^2 - 2rR$ se escribe como $(R - r)^2 = r^2 + d^2$ (7), a la que asociamos el triángulo rectángulo T_2 siguiente:

$$a_2 = R - r, \quad b_2 = r, \quad c_2 = d, \quad R_2 = \frac{a_2}{2}, \quad r_2 = \frac{b_2 + c_2 - a_2}{2} \qquad (8).$$

Aplicando el teorema 2 al triángulo T_2 obtenemos:

$$r + d \leq \sqrt{2}(R - r).$$

1.2. Las formas cuadráticas. Espacios de Lorentz

En todo lo que sigue es utilizada la teoría elemental de las formas cuadráticas. Ver [1], [16], [21] y [22].

Comenzamos con las siguientes definiciones.

Definición 1.1. Sea Q una matriz de orden *n* de números reales. La ecuación de autovalores o valores propios es det $(Q - \lambda I) = 0$. Las raíces de esta ecuación son llamadas los autovalores o valores propios de la matriz Q.

Definición 1.2. El espace $\Re^n$ $(n \geq 1)$ es llamado un espacio de Lorentz, si es un espacio vectorial con un producto escalar que es simétrico y que está dado por $< x, y > = x^T Q$ y donde $x,y \in \Re^n$ y Q es una forma cuadrática que tiene un autovalor positivo y n–1 autovalores negativos.

Comentario. En [16], en su capitulo IV, y en la sección de las funciones permanentes de matrices, a los espacios de Lorentz también se les llama los espacios de Minkowski dentro del siguiente contexto.

Todo espacio vectorial E que tiene definida una forma bilineal Q, que es simétrica, se llama espacio métrico y le denotamos, (E, Q).

Se llama signatura de Q a la terna (k_1, k_2, k_3), donde k_1 es el número de valores propios positivos, k_2, el número de valores propios negativos, y k_3, el número de valores propios nulos de la matriz de la forma Q, en cualquier base de E. Pero el teorema de Sylvester (la ley de inercia) afirma que dicha terna no depende de la base. Se dice que el espacio métrico (E, Q), de dimensión n, es de Minkowski, si la signatura de Q es igual a (1, n–1, 0).

Tenemos la siguiente caracterización:

Lema. Un espacio métrico (E, Q) es de Minkowski, si y sólo si cumple la siguiente condición:

Existe un vector $a \in L$ tal que $Q(a, a) > 0$, y para cualquier $b \in L$ de $Q(a, b) = 0$, $b \# 0$, se deduce que $Q(a, b) < 0$.

En todo lo que sigue, $\Re^n$, es un espacio de Lorentz con forma bilineal simétrica Q, y, que denotamos en la forma $<x,y>$, $x,y \in \Re^n$.

Definición 1.3. Diremos que un vector es positivo (negativo) e isótropo, si $<x,x> > 0$ es positivo ($<x,x> < 0$, negativo) y $<x,x> = 0$, respectivamente. Por el teorema del Silvester no existe un plano tal que sobre este plano tengamos un vector positivo, $(x \# 0)$. El lema siguiente es una consecuencia de este hecho.

Lema 1.4. Si x es un vector positivo en un espacio de Lorentz y si y es un vector arbitrario, entonces

$$<x,y>^2 \geq <x,x> <y,y> \qquad (1)$$

y se alcanza la igualdad si, y sólo si $y = \lambda x$ para cierta constante λ, real.

Demostración. Si y no es proporcional a x entonces el plano generado por x e y contiene un vector isótropo y un vector negativo. Consideramos ahora la forma cuadrática siguiente en λ, $< x + \lambda y , x + \lambda y >$. Ya que esta forma en λ es 0 o respectivamente negativa para valores convenientes de λ, ella tiene un discriminante positivo. De aquí, obtenemos el resultado enunciado en el lema. Ver, [16].

El modelo canónico de un espacio de dimensión n es, $\Re^n$ con una métrica de Lorentz usual es como sigue:

$$<x,y> = x_1y_1 - x_2y_2 - \ldots - x_ny_n, \; x,y \in \Re^n,$$

y donde denotamos por C al cono de luz ascendente definido por $x > 0$, $<x,x> > 0$.

Utilizando ahora el lema 1.4 tenemos el siguiente y bien conocido resultado elemental:

$$<x,y> \geq <x,x>^{1/2} <y,y>^{1/2}, \; x,y \in C.$$

La igualdad se verifica si, y sólo si, x e y son proporcionales. El significado geométrico de la desigualdad anterior es que el hiperboloide de una hoja $<x.x> = c$, $c > 0$, $x > 0$, está situado sobre el lado positivo de cualquiera de sus planos tangentes, es decir, el hiperboloide de una hoja es convexo.

Esta desigualdad es también conocida como desigualdad de Minkowski-Lorentz. Es la desigualdad análoga a la desigualdad de Cauchy-Schwarz de los espacios euclídeos.

1.3. Algunas desigualdades para demostrar otras desigualdades interesantes entre dos triángulos

Comenzamos esta parte enunciando una desigualdad equivalente a la desigualdad que se verifica en los espacios de Lorentz, y que ya hemos visto antes.

Lema 1 (Desigualdad de Aczel). Sean $a = (a_1, \ldots, a_n)$ y $b = (b_1, \ldots, b_n)$ dos sucesiones de números reales tales que

$$a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2 > 0 \quad \text{y} \quad b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2 > 0 \quad (1).$$

Entonces

$$(a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2) \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \ldots - a_nb_n)^2$$

con la igualdad alcanzada si y sólo si las sucesiones a y b son proporcionales.

Como una consecuencia de lo anterior obtenemos el siguiente e interesante teorema.

Teorema (Desigualdad de Neuberg-Pedoe). Denotamos por a_i, b_i, c_i los lados de los triángulos $A_iB_iC_i$ $(i = 1, 2)$ y con áreas F_i.

Entonces

$$H \geq 16F_1F_2$$

donde

$$H = \sum a_1^2(-a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) \quad \text{(suma cíclica)}$$

con la igualdad alcanzada si y sólo si los triángulos son semejantes.

Ver [6] y [8] (Chapter XII, "Inequalities with several triangles", pp. 340-84).

Lema 2 (Desigualdad de Bellman). Si a y b son dos sucesiones de números reales no negativos que satisfacen (1), entonces

$$(a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)^{1/2} + (b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq [(a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2)^2 - \ldots (a_n + b_n)^2]^{1/2}$$

con la igualdad realizada si y solo si a y b son proporcionales.

Nota. Tanto la desigualdad de Aczel como la desigualdad de Bellman pueden ser también probadas utilizando las desigualdades de Cauchy y de Minkowski, respectivamente.

Veamos ahora dos nuevos lemas que son, respectivamente, refinamientos de la desigualdad de Aczel y de Bellman, respectivamente, y que antes han sido probadas.

Lema 3. Si las condiciones del lema 1 se verifican, entonces

$$(a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2) \leq$$

$$\leq (a_1b_1 - (a_2^2 + \ldots a_n^2)^{1/2}[(b_2^2 + \ldots + b_n^2)^{1/2}]^2 \leq (a_1b_1 - a_2b_2 - \ldots a_nb_n)^2.$$

Lema 4. Si las condiciones del lema 2 son ciertas, entonces

$$(a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2)^{1/2} + (b_1^2 - b_2^2 - \ldots - b_n^2) \leq$$

$$((a_1 + b_1)^2 - ((a_2^2 + \ldots + a_n^2)^{1/2} + (b_2^2 + \ldots + b_n^2)^{1/2})^2)^{1/2} \leq$$

$$\leq ((a_1 + b_1)^2 - (a_2 + b_2) - \ldots - (a_n + b_n)^2)^{1/2}.$$

La demostración es similar a la que hace en el lema 3.

Teorema (A. Oppenheim). Supongamos que $A_i B_i C_i$ $(i = 1,2)$ son triángulos cuyos lados son a_i, b_i, c_i y de áreas F_i. Definamos los números $a_3 = (a_1^2 + a_2^2)^{1/2}$, etc., entonces a_3, b_3, c_3 son los lados de un triángulo con área F_3, y la siguiente desigualdad es válida

$$F_3 \geq F_1 + F_2,$$

con la igualdad alcanzada si y sólo si los triángulos son semejantes.

Comentario. Los teoremas de Neuberg-Pedoe, como también el teorema de A. Oppenheim, se pueden probar de una forma simple, utilizando todas las desigualdades enunciadas antes. Ver [8].

II. Algunos resultados sobre las desigualdades métricas con los elementos geométricos de dos triángulos

En esta sección vamos a dar diferentes resultados que son unas aplicaciones de todo lo dicho anteriormente, damos unas notaciones y resultados previos.

Sea ABC un triángulo de lados $a \geq b \geq c$, ángulos $(A \geq B \geq C)$, radio inscrito (r), radio circunscrito (R) y d es la distancia entre los centros del círculo inscrito y del círculo circunscrito del triángulo, respectivamente. Ver [6], [7] y [8].

Podemos adimitir en los resultados que vamos a exponer el que los triángulos a considerar puedan ser degenerados, tanto en los lados como en los ángulos. Esto es:

Es conocido que a, b, c son lados de un triángulo si y sólo si $a, b, c \geq 0$, $b + c \geq a$, $c + a \geq b$, $a + b \geq c$. Si en estas desigualdades admitimos la posible igualdad tenemos los triángulos degenerados.

Similarmente, A, B, C son ángulos de un triángulo si y sólo si $A, B, C \geq 0$, $A + B + C = \pi$, y con la igualdad alcanzada en las primeras condiciones en el caso de que el triángulo sea degenerado.

En todo lo que sigue admitimos las siguientes notaciones: A, B, C son los vértices o ángulos de un triángulo; a, b, c, son los lados del mismo BC, CA, AB, respectivamente; h_a, h_b, h_c, denotan las alturas; m_a, m_b, m_c, las medianas; w_a, w_b, w_c, las bisectrices; O, I, H, G, son respectivamente, el circuncentro, incentro, ortocentro y baricentro del triángulo; $x = s - a$, $y = s - b$, $z = s - c$, los segmentos determinados por los puntos de contacto del círculo inscrito al triángulo; $\Sigma f(a) = f(a) + f(b) + f(c)$, y $\Sigma f(b, c) = f(b, c) + f(c, a) + f(a, b)$, $\Pi bc = bc \cdot ca \cdot ab$, etc., sumas y productos cíclicos.

Se llama geometría de la dualidad en el triángulo ABC, a las relaciones duales métricas que se pueden establecer entre los lados, a, b, c de un triángulo y los segmentos x, y, z, definidos como antes, y que verifican las relaciones lineales entre ellos siguientes:

$$a = y + z,\ b = z + x,\ c = x + y;\ x = s - a,\ y = s - b,\ z = s - c,$$

donde $2s = a + b + c$, es el semiperímetro del triángulo. De aquí, podemos obtener, x, y, z en función de los lados del triángulo.

Ejercicio

Si denotamos por $T_1 = \Sigma x = x + y + z$, $T_2 = \Sigma xy = xy + yz + zx$, $T_3 = x\,y\,z$, son las funciones simétricas elementales en las variables, x, y, z. Probar que:

a) $T_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\Sigma a = s;\ T_2 = r(4R + r);\ T_3 = r^2 s;\ S = rs;\ abc = 4Rrs.$

b) $Q = \Sigma(b - c)^2 = \Sigma(y - z)^2 = 2(T_1^2 - 3T_2).$

c) $\Sigma a^2 = sT_1^2 - 2T_2;\ \Sigma bc = T_1^2 + T_2;\ abc = \Pi(y + z) =$

$= T_1 T_2 - T_3;\ 16S^2 = 2\Sigma a^2 b^2 - \Sigma a^4 = 16r^2 s^2 = 16T_1 S$

d) $R = \dfrac{T_1 T_2 - T_3}{4\sqrt{T_1 T_3}};\ r = \sqrt{\dfrac{T_3}{T_1}}$

El siguiente resultado que proponemos como ejercicio es una recopilación de resultados interesantes que caracterizan a los triángulos. Ver, para su demostración, [8].

Problema 1

a) Desigualdad fundamental: Una condición necesaria y suficiente para la existencia de un triángulo con elementos R, r y s, es

$$s^4 - 2\,(2R^2 + 10Rr - r^2)\,s^2 + r\,(4R + r)^3 \leq 0.$$

b) Sea S el área del triángulo OIH y sea $a > b > c$; entonces

i) $S = 2R^2 \operatorname{Sen}\dfrac{B - C}{2} \operatorname{Sen}\dfrac{A - C}{2} \operatorname{Sen}\dfrac{A - B}{2};$

ii) $S = \dfrac{(b - c)(a - c)(a - b)}{8r};$

iii) $16S^2 = -s^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)s^2 - r(4R + r)^3.$

Veamos ahora un tópico interesante que nos permitirá establecer identidades y desigualdades entre los elementos geométricos de un triángulo que llamamos duales y las transformaciones que con estos elementos duales se pueden construir.

Transformaciones para la geometría de la dualidad del triángulo

Hemos dicho que la geometría de la dualidad de un triángulo se basa en la equivalencia que hay, a la hora de obtener fórmulas y desigualdades, entre las ternas (a, b, c) y (x, y, z). Este hecho también se puede generalizar a las ternas, (A, B, C) y (R, r, s).

La representación lineal de la terna (x, y, z) en función de los lados de un triángulo es más idónea a la hora de hacer una transformación que conserve una desigualdad. Si $F(x, y, z) \geq 0$ es una desigualdad válida para todos los números $x, y, z \geq 0$, entonces también lo es $x' = F_1(x, y, z)$, $y' = F_2(x, y, z)$, $z' = F_3(x, y, z)$ y donde $F_1, F_2, F_3 \geq 0$. Una muy particular e interesante y completa transformación es la que se obtiene al poner $F_1 = 1/x$, $F_2 = 1/y$, $F_3 = 1/z$, que nos da:

$$T_1' = \frac{T_2}{T_3}, \quad T_2' = \frac{T_1}{T_3}, \quad T_3' = \frac{1}{T_3}.$$

Ver [8].

Resultados

Comenzamos esta parte de este trabajo probando nuestro teorema fundamental por métodos elementales y utilizando los espacios de Lorentz, que se utilizarán en otros resultados que probaremos y propondremos al lector.

Teorema. Sean ABC y A'B'C' dos triángulos dados, no equiláteros, tales que R,r,d, y R',r',d' son los radios circunscritos, radios inscritos y distancia entre los centros de los círculos circunscritos e inscritos a los triángulos, respectivamente. Entonces, se verifica:

$$\mathbf{R\,R' - (R\,r' + R'\,r) \geq d\,d'} \qquad (1)$$

con la igualdad alcanzada, si y sólo si, R'/R = r'/r.

Demostración

Primer método. Cálculo directo elemental utilizando la fórmula de Euler-Chapple. En efecto:

$$[R\,R' - (R\,r' + R'\,r)]^2 - R\,R'\,(R - 2r)\,(R' - 2r') = (R\,r' - R'\,r)^2 \geq 0,$$

y, con la igualdad alcanzada, si y sólo si, $R'/R = r'/r$.

Segundo método. Los espacios de Lorentz.

Para ello consideremos $\Re^2$, el espacio vectorial de los vectores del plano con el siguiente producto escalar:

$$< p, q >= x\,x' - x\,y' - x'\,y = p\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} q^t,$$

donde $p = (x,y)$ y $q = (x', y')$ son dos vectores de $\Re^2$.

Ahora bien, a cada triángulo, $T = \Delta ABC$ le asociamos el vector $t = (R,r)$. Es claro, por la fórmula $d^2 = R(R - 2r)$ de Euler-Chapple que el conjunto de todos los triángulos, es decir, los vectores asociados a ellos son o bien positivos o, bien isótropos (equiláteros), ya que $<t,t> = d^2 = R(R - 2r) \geq 0$.

Hallando los autovalores de la matriz anterior obtenemos:

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0.$$

De aquí tenemos que $\Re^2$ con la métrica anterior es un espacio de Lorentz. Y el resultado se sigue de forma inmediata de la desigualdad de Minkowski, es decir, el lema 1.4.

Consecuencias, observaciones y comentarios

a) La fórmula (1) del teorema anterior puede ser escrita de distintas formas equivalentes:

$$R\,R' - d\,d' \geq R\,r' + R'\,r \qquad (2),$$

o también

$$(R - r)\,(R' - r') \geq r\,r' + d\,d' \qquad (3).$$

b) En el caso en que uno de los dos triángulos sea equilátero, entonces la (1), se reduce a:

$$R\,R' - (R'\,r + R\,r') \geq 0.$$

Ejercicios:

1) Demostrar por cálculo directo la fórmula (1) para los siguientes casos:

a) Los triángulos T y T' son ambos rectángulos.
b) Los triángulos T y T' son ambos isósceles.
c) El triángulo T es rectángulo y el triángulo T' es isósceles.

2) Caracterizar todos los pares de triángulos T y T', tales que se verifique:

$$R\,R' - (R\,r' + R'\,r) = d\,d', \qquad (4)$$

y concluir que no son necesariamente semejantes. Ver [8].

Sin embargo, la (4) para dos triángulos rectángulos es equivalente a la relación $R'/R = r'/r$. Y, en este caso, los dos triángulos son semejantes.

Vamos ahora a probar otros resultados interesantes sobre ternas de elementos geométricos de dos triángulos y que se prueban fácilmente con la técnica de los espacios de Lorentz.

En efecto: en [2] tenemos una generalización del problema 1.836 propuesto por mí, en la revista Gaceta Matemática, en 1.979, y que, en [3] se da como un resultado más general en el problema 55, p. 31; ambos me sugieren la siguiente proposición.

Proposición 2.1. Sean T y T' dos triángulos obtusos con lados $a > b \geq c$ y $a' \geq b' \geq c'$, respectivamente. Entonces

$$(a\,a' - b\,b' - c\,c')^2 \geq (a^2 - b^2 - c^2)\,(a'^2 - b'^2 - c'^2)$$

y con la igualdad alcanzada sii $t' = (a',b',c') = \lambda\,(a,b,c) = \lambda t$ (proporcionales o colineales), siendo t y t' los vectores que están asociados a los triángulos dados, respectivamente.

Demostración. Consideremos en el espacio vectorial $\Re^3$, el producto escalar simétrico que está definido como sigue: $\langle x,y\rangle = x^T\,Q\,y$, con $x,y \in \Re^3$ y donde Q es la siguiente matriz:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La ecuación de autovalores es:

$$\det(Q - \lambda I) = (1 - \lambda)\,(1 + \lambda)^2 = 0,$$

cuyos autovalores son $\lambda_1 = -1$ (doble) y $\lambda_2 = 1$.

De aquí, como T es un triángulo obtuso por hipótesis, estamos en las condiciones de aplicar el lema 1.4 al espacio de Lorentz $(\Re^3,Q)$ para así obtener el resultado propuesto en la proposición.

De otra parte, veamos ahora otra forma de resolver el problema 1.461 de Crux:

Sean a, b, c, r, R, s los lados, el radio inscrito, el radio circunscrito, y el semiperímetro de un triángulo y, denotamos de forma similar por a', b', c', r', R', s' para un segundo triángulo. Demostrar que

$$(4\,s\,s' - \Sigma a\,a')^2 \geq 4(s^2 + r^2 + 4Rr)\,(s'^2 + r'^2 + 4\,R'r')$$

donde la suma es cíclica, con la igualad alcanzada cuando $a/a' = b/b' = c/c'$, esto es, cuando los triángulos son semejantes.

Este problema es la base de la siguiente proposición:

Proposición 2.2. Sean ABC y A'B'C' dos triángulos con lados $a \geq b \geq c$, y $a' \geq b' \geq c'$, respectivamente. Entonces

$$(ab' + a'b + ac' + a'c + bc' + b'c)^2 \geq (ab + ac + bc)\,(a'b' + a'c' + b'c')$$

y con la igualdad alcanzada si y sólo si los vectores asociados $t = (a,b,c)$ y $t' = (a',b',c')$ a los triángulos ABC y A'B'C', respectivamente, son proporcionales, es decir, $t' = \lambda t$, para algún λ real.

Demostración. En el espacio vectorial $\Re^3$ definimos el siguiente producto escalar simétrico como sigue:

$$\langle x, y\rangle = x^T Q y, \text{ con } x, y \in \Re^3$$

donde Q en la base canónica tiene asociada la siguiente matriz:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La ecuación de autovalores para Q, es:

$$\det(Q - \lambda I_3) = (\lambda + 1)\,(-\lambda^2 + \lambda + 2) = -(\lambda + 1)^2\,(\lambda - 2) = 0,$$

y sus autovalores son ahora los siguientes: $\lambda_1 = -1$ (doble) y $\lambda_2 = 2$. Por consiguiente, $(\Re^3, Q)$ es de nuevo un espacio de Lorentz. Aplicando el lema 1.4, una vez más obtenemos el resultado propuesto en la proposición.

De todo lo anterior y como conclusión podemos demostrar muchas de las relaciones entre dos triángulos que aparecen en [8] y en la extensa bibliografía que se cita, o bien empleando la técnica de los espacios de Lorentz, o bien los espacios euclídeos, según convenga al caso de la desigualdad propuesta entre los elementos geométricos de los dos triángulos dados: (a,b,c) (lados); (x,y,z); (R,r,s), etc., o combinación de éstas u otras.

Por ejemplo, para todo triángulo son ciertas las relaciones siguientes:

a) $GH = 2/3\ OH$.
b) $OI^2 = R^2 - 2rR,\ R \geq 2r$.
c) $IH^2 = 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - s^2$.
d) $OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2s^2$.
e) $IG^2 = 1/9\ (s^2 - 16Rr + 5r^2)$.

Donde O (circumcentro), G (baricentro), I (incentro), H (ortocentro).

De las relaciones anteriores, tenemos para triángulos no equiláteros

$$9(GH^2 - IG^2 - IH^2) = 12r(R - 2r), \text{ etc.}$$

En particular la fórmula de Leibniz y sus generalizaciones permite demostrar las relaciones anteriores de forma simple en muchos casos, introduciendo para ello las coordenadas baricéntricas de los puntos notables de un triángulo. Ver [8].

Aquellas relaciones y otras pueden ser utilizadas para probar nuevas proposiciones entre los elementos geométricos de dos triángulos.

Veamos, para finalizar unos ejemplos más.

El problema 46 del magazine *Mathematical Spectrum,* Volume 4, 1971/1972, es el siguiente:

Si x, y, z denotan las longitudes de los lados de un triángulo, demostrar que

$$3(yz + zx + xy) \leq (x + y + z)^2 < 4(yz + zx + xy).$$

Proposición 2.3. Si x, y, z, y x', y', z' denotan las longitudes de los lados de dos triángulos, respectivamente, entonces

a) $(xy' + x'y + xz' + x'z - xx' - yy' - zz')^2 \geq (2xy + 2xz + 2yz - x^2 - y^2 - z^2)\ (2x'y' + 2x'z' + 2y'z' - x'^2 - y'^2 - z'^2)$

con la igualdad verificándose sii $x/x' = y/y' = z/z'$, esto es, los dos triángulos son semejantes.

b) $[xx' + yy' + zz' + (1/2)xy' + (1/2)x'y + (1/2)yz' + (1/2)y'z + (1/2)yz' + (1/2)y'z] \leq (x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz)\ (x'^2 + y'^2 + z'^2 + x'y' + x'z' + y'z')$ con la igualdad alcanzada sii $x/x' = y/y' = z/z'$, esto es los dos triángulos son semejantes.

Para probar *a*) utilizar una métrica de Lorentz y para demostrar *b*) construir una métrica Euclidea, respectivamente, y proceder de la misma forma, que lo hemos hecho en todos los ejemplos de antes.

Como conclusión final de este artículo podemos afirmar que tanto los espacios de Lorentz como los espacios Euclideos permiten estudiar sistemáticamente muchas de las desigualdades que se pueden establecer como ciertas entre los elementos geométricos de dos triángulos. En bastantes ocasiones estas técnicas serán más simples que las que se basan en otras desigualdades clásicas, antes citadas .Y, sobre todo, las desigualdades que se obtienen como consecuencia de emplear desigualdades que se prueban por los métodos de máximos y mínimos en varias variables.

Este artículo puede también servir para que bastantes docentes se adentren y profundicen desde una nueva óptica en la emocionante, e interesante y sorprendente aventura del estudio de la geometría del triángulo a través de la creación de nuevas proposiciones y de conjeturas entre los elementos geométricos de dos triángulos.

Bibliografía

[1] J. H. Van Lint: "The Van der Waerden conjecture". *Annals of Discrete Mathematics,* 18, 1983.
[2] J. B. Romero Márquez y M. A. López: *El teorema de Pitágoras y Tolomeo en el Bachillerato.* R. B., N 22, Madrid, 1982.
[3] V. Gusev, V. Litvinenko and A. Mordkovic: "Solving Problems in Geometry", *Mir,* Moscú, 1988.
[4] J. S. Mackay: "Formulae connected the Radii of the Incircle and the Excircles of a triangle". *Proceeding of the Edimburgh Mathematical Society.*
[5] O. Bottema and others: "Geometric Inequalities". *Wolters-Noordhoff,* Groninge, 1969.
[6] D. S. Mitrinovic: "Analytic Inequalities", *Springer-Verlag,* Heidelberg, 1970.
[7] D. S. Mitrinovic: *Elementary Inequalities,* Noordhoff, Groningen, 1964.
[8] D. S. Mitrinovic, J. E. Pecaricc and V. Volonec: "Recent Advanced in Geometric Inequalities", *Kluwer Academic Publishers,* Dordrecht, 1989.
[9] B. E. Merseve: *Fundamental concepts of geometry,* Dover, New York, 1983.
[10] I. et R. Sortais: *La geometrie du triangle,* Hermann, Paris, 1987.
[11] C. Tisseron.: Geometries affine, projective et euclidienne, Hermann, Paris, 1988.
[12] F. Klein: "Le programme d'Erlangen", Gauthier Villars, Paris, 1974.
[13] S. Rabinovitz: "Index to Mathematical Problems, 1980-1984", *Math. Pro. Press,* Wesford, Massachusetts, 1992.
[14] R. Deltheil y D. Caire: *Geometrie et Complements,* Ed. Jacques Gabay, Paris, 1989.
[15] T. Lalesco: *La geometrie du triangle,* Ed. Jacques Gabay, Paris, 1989.
[16] K. Ribnikov: *Análisis Combinatorio,* Mir, Moscú, 1988.
[17] H. J. M. Bos, C. Kers, F. Oort y D. W. Raven: "Poncelet s Closure theorem", *Expositiones Mathematicae,* pp. 289-364, Zurich, 1987.
[18] M. S. Klamkin: *Duality in Triangle Inequalities*" AMS, 1971.
[19] V. Lidski y otros: *Problemas de Matemáticas Elementales,* problema núm. 358, p. 57 y pp. 239-40, Mir, Moscú, 1978.

[20] I. SHARIGUIN: *Problemas de Geometría*, Mir, Moscu, 1986.
[21] O. T. O. MEARA: "Introduction to Quadratic Forms", *Springer-Verlag*, NY, 1973.
[22] W. SCHARLAU: "Quadratic and Hermitians forms", *Springer-Verlag*, Berlin, 1978.
[23] J. BOSCO ROMERO MÁRQUEZ: "Problem 80G", *The Mathematical Gazette, Problem corner*, pp. 131-3, Leicester, 1996.

Una demostración del teorema del coseno

Juan Carlos Cortés López

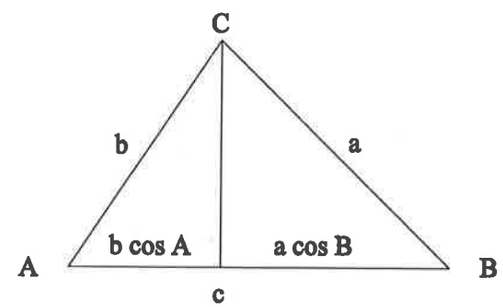
I.E.S. Bonifacio Sotos. Casas Ibáñez (Albacete)

Abstract

In this note, Pythagoras' Generalized theorem or the better known Cosinus theorem is proved. The proof developed here is interesting because it is completely different to the usual one. Cramer's rule is used in this work.

En este breve trabajo se demuestra el *Teorema Generalizado de Pitágoras* o más conocido por *Teorema del Coseno*. La demostración que aquí desarrollamos es interesante porque difiere notablemente de la que comúnmente conocemos. La prueba que aquí presentamos hace uso de la Regla de Cramer.

Consideremos el triángulo



Comencemos observando que, descomponiendo el lado c como suma de las proyecciones de los lados a y b sobre el lado c, se deduce que

$$b \cos A + a \cos B = c$$

Razonando análogamente, pero intercambiando los papeles de a, b y c, llegamos a las tres relaciones siguientes

$$\left.\begin{array}{lll} c\cos A & & +a\cos C = b \\ b\cos A & +a\cos B & = c \\ & c\cos B & +b\cos C = a \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Consideramos el sistema de tres ecuaciones (1) tomando cos A, cos B y cos C como incógnitas. Como se cumple que

$$\begin{vmatrix} c & 0 & a \\ b & a & 0 \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = 2abc \neq 0$$

pues, a, b y c son no nulos por representar los lados del triángulo, el sistema (1) es de Cramer, por lo que aplicando la regla de Cramer podemos resolverlo, obteniendo

$$\cos A = \frac{\begin{vmatrix} b & 0 & a \\ c & a & 0 \\ a & c & b \end{vmatrix}}{2abc} = \frac{a(b^2+c^2-a^2)}{2abc} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \qquad (2)$$

Ahora basta despejar y obtenemos el teorema del coseno en una de sus tres versiones

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

Del mismo modo que en (2), pero despejando las incógnitas cos B y cos C, podemos deducir las otras dos versiones del teorema del coseno:

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{array}\right\}$$

Presencia de la matemática discreta en las competiciones deportivas

María Candelaria Espinel Febles

Univ. de La Laguna (mespinel@ull.es)

Abstract

This paper presents three graphs in sporting events: 1. Graph in tree that specifies how the teams or players can be compared to choose a winner. In a knockout tournament games are played until all but one player have been eliminated. 2. Complete graph for scheduling the matches in a round robin tournament. A league is a partition of graph in rounds. 3. Digraph known as a tournament for the ranks of the players.

Introducción

Es bien sabido lo poco atrayentes que resultan las matemáticas para muchos alumnos. Uno de los problemas didácticos en la enseñanza obligatoria es llegar al alumno. Conseguir que se vea la matemática como una herramienta útil en diversos ámbitos de la vida diaria. Los eventos deportivos y las competiciones estilo torneo proporcionan excelentes oportunidades para construir modelos matemáticos y utilizar la metodología básica de la matemática discreta desde un punto de vista práctico. En concreto la teoría de grafos resulta muy útil para modelizar la organización de eventos deportivos y para establecer jerarquías entre los que compiten. Aquí abordamos estos temas de una forma somera y sin la profundidad que el complejo problema requiere. Sólo se pretende dar una primera aproximación al tema.

Algunas cuestiones se pueden encontrar de forma separada en la bibliografía que se cita al final del artículo. El libro *Mathematic and Sports* [5], presenta algunos modelos matemáticos sobre varios aspectos deportivos. En concreto, dedica un capítulo a la organización de competiciones donde trata: el sistema olímpico o de eliminatorias, el sistema de todos contra todos y los cuadrados latinos para la planificación de estos últimos torneos. El texto de Ore [4], pretende divulgar algunas de las aplicaciones de los grafos, es un clásico en su edición inglesa. En el capítulo de emparejamientos en grafos, el autor describe un

método para planificar un torneo con cualquier número de equipos. En la publicación [2] se recogen distintos métodos para emparejar equipos o jugadores. En varios libros de teoría de grafos se estudian los grafos torneo dentro del capítulo dedicado a grafos orientados o digrafos, éste es el caso de [6] ó [7]. Por otro lado, los grafos torneo es una línea de investigación, como se refleja en [1], primordialmente porque estos grafos encuentran amplias aplicaciones en distintos campos. Así en Sociología se utilizan para el estudio de preferencia de productos, en Biología para el estudio de dominancia entre animales.

Nuestro trabajo aporta un material unificado de tres clases de grafos que se muestran muy útiles para modelizar algunos de los muchos problemas que se presentan en las competiciones deportivas, en especial, secuenciar por etapas, planificar los emparejamientos de los equipos o de los jugadores y asignar puntuaciones.

En los deportes se acostumbra a utilizar los términos juego, competición, disputa o contienda indistintamente. Similarmente, los términos equipos, jugadores, competidores y contrincantes también son aquí intercambiables. Los torneos se acostumbran a emplear en eventos deportivos para seleccionar al campeón, ya sea el mejor equipo o el mejor jugador a elegir entre un conjunto de equipos o de jugadores. Una liga o un campeonato de liga es una competición en la que cada equipo juega contra todos los demás una sola vez. Las competiciones se suelen organizar mediante rondas, vueltas, etapas o jornadas. Tanto en el torneo, como en la liga, aquí supondremos que cada partido tiene un resultado definido, es decir siempre hay un ganador y un perdedor, no se permiten los empates.

1. Sistema de eliminatorias

En un torneo por sistema de eliminatorias (*knockout tournament*) la competición se juega hasta que todos menos uno de los jugadores o equipos han sido eliminados o "knocked out". Los partidos han de jugarse en un orden específico porque los resultados de los primeros juegos designan los contrincantes en los juegos posteriores; un jugador o equipo eliminado no repite de nuevo.

En la prensa deportiva aparecen con frecuencia esquemas del estilo que se muestra en el gráfico 1.

De estos ocho equipos (A, B, ...,H) sale un equipo que se enfrentará en la final con otro equipo que ha salido elegido de la misma forma. Estos esquemas (gráfico 1), acompañado de otro árbol simétrico, se utilizan para mostrar, por ejemplo, la organización de los mundiales de fútbol o cuando se enfrentan los conjuntos de la NBA americana en "playoff" para elegir el mejor equipo de baloncesto. Para la presentación se recurre a una configuración en árbol.

Tenemos la idea de árbol genealógico, árbol sintáctico... Los árboles son una poderosa herramienta para organizar información y buscar regularidades. Un árbol es un grafo no dirigido donde cada par de vértices está conectado por exactamente una cadena. A las aris-

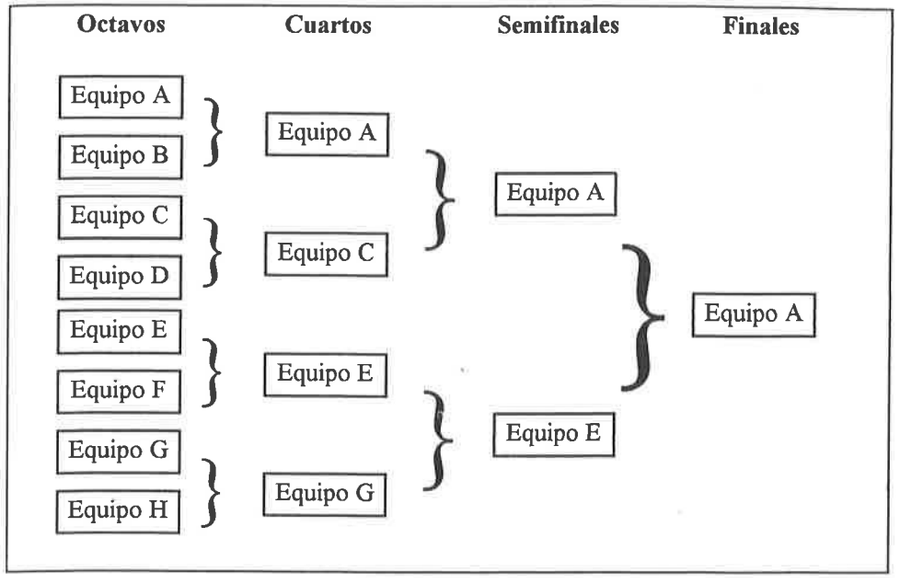


Gráfico 1

tas de un árbol se les llama ramas y a los vértices que no tienen hijos se les llama hojas, diferenciando los vértices terminales de los vértices internos y del vértice raíz o padre. Si cada padre tiene p hijos, se tiene un árbol con raíz p-ario, si $p = 2$ se le llama árbol binario y si $p = 3$ árbol ternario. Para estudiar los árboles se disponen los vértices por niveles. El nivel de un vértice en un árbol es el número de aristas por el que hay que desplazarse para llegar al vértice raíz.

La estructura del gráfico 1 queda esquematizada mediante el árbol binario que se muestra en el gráfico 2 y permite organizar la eliminatoria entre 8 contrincantes en tres vueltas. Con 4 encuentros en la primera vuelta, 2 en la segunda y 1 en la tercera, o sea, 7 encuentros en total.

Una planificación de un torneo para un conjunto de jugadores es una regla que genera una secuencia de juegos con los partidos a ser jugados o la terminación de la secuencia dependiendo de los resultados de los juegos precedentes. Si hay n jugadores, una planificación consta de $n - 1$ juegos, ya que en cada juego un jugador es eliminado. El plan se puede describir por un árbol binario que consta de $2n - 1$ vértices, siendo n de ellos vértices raíz que representan a los jugadores y los $n - 1$ vértices restantes representan los juegos entre

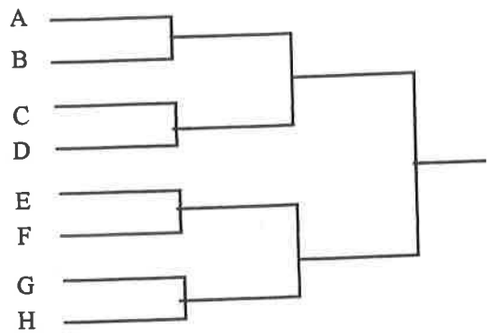


Gráfico 2

los jugadores, bien porque han sido designados directamente o porque han resultado ganadores en los juegos anteriores. El vencedor ha de estar conectado por una cadena con cualquier otro jugador. Todos los perdedores se retiran en cada ronda, y se empareja a los ganadores que van quedando, dando eventualmente descanso a un jugador si es que queda un número impar de jugadores. Para evitar el descanso o "bye" la estructura de torneo más conocida y utilizada es la de torneos de tamaño 2^k, esto es, el número de equipos participantes es una potencia de dos. Y en general la estrategia que se suele seguir es la siguiente:

– (i) Si el número de contrincantes es $n = 2^k$ (potencia de 2, esto es, 4, 8, 16, ...) entonces todos los contrincantes participan en la primera vuelta. El campeonato necesita de k vueltas para encontrar al campeón. El número de juegos a celebrar en cada vuelta serían:

Vuelta primera: 2^{k-1} juegos
Vuelta segunda: 2^{k-2} juegos

.
.
.

Vuelta k–1: 2 juegos
Vuelta k: 1 juego.

El número total de partidos que se jugarían sería la suma de los términos de una progresión geométrica de razón 2:

$$1+2+2^2+\ldots+2^{k-2}+2^{k-1}=\frac{2^{k-1}\cdot 2-1}{2-1}=2^k-1=n-1.$$

– (ii) Si el número de contrincantes es $n \neq 2^k$ (el número de jugadores no es una potencia de 2), algunos de los contrincantes no entran en la competición en la primera vuelta.

Por ejemplo con 6 contrincantes ($6 \neq 2k$) el gráfico 3 muestra cómo organizar la eliminatoria. En él 2 contrincantes entran después de la primera vuelta, en concreto, según el gráfico 3, se incorporan a la eliminatoria en la segunda vuelta.

Si llamamos m al número de contrincantes que entran en la competición después de la primera vuelta, este número se determina en la práctica utilizando el mayor entero k tal que $2^k < n$, por tanto, $m = 2^k - n$. Y el número total de partidos que se jugarían sigue siendo $n - 1$.

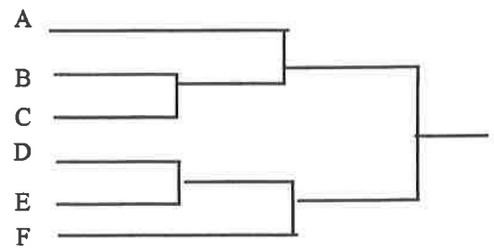


Gráfico 3

Hay dos hechos esenciales en un torneo por el sistema de eliminatorias que cada jugador excepto el campeón pierde exactamente un partido y que el campeón gana exactamente k partidos y no pierde ninguno. Ahora bien, el jugador que se ha enfrentado al campeón en la última vuelta no siempre merece el segundo puesto. Así con 8 contrincantes hay tres jugadores que sólo fueron vencidos por el campeón. Hace falta por tanto un torneo adicional, de sólo dos partidos, para determinar el mejor de los tres. En general, para determinar los dos mejores jugadores de entre n participantes son suficientes $n - 1 + \log_2 n - 1$ encuentros, como se demuestra en [3].

En el sistema de eliminatorias, también llamado sistema olímpico, un rival sale fuera, se retira, después de la primera derrota, por tanto es de eliminatoria única. Esta es la forma más simple, ya que un equipo queda eliminado cuando pierde.

En un torneo de doble eliminatoria se continúa hasta que cada equipo pierde dos veces, acumula dos pérdidas, excepto el campeón. El campeón debe tener 0 ó 1 partidos perdidos. Por lo tanto, el número total de juegos con n equipos en un torneo de doble eliminatoria es:

$$2(n-1) = 2n-2 \text{ ó}$$
$$2(n-1)+1 = 2n-1 \text{ juegos.}$$

En un torneo de triple eliminatoria el juego continúa hasta que cada equipo pierde tres veces, acumula 3 pérdidas, excepto el campeón. El campeón puede perder 0, 1 ó 2 partidos. El total de juegos con n equipos es:

$$3(n-1) = 3n-3,$$
$$3(n-1)+1 = 3n-2 \text{ ó}$$
$$3(n-1)+2 = 3n-1 \text{ juegos.}$$

2. Sistema de todos contra todos

En un sistema "todos contra todos" (*round robin tournament*) cada jugador ha de enfrentarse con cada uno de los demás jugadores. Un torneo jugado por un sistema de "todos contra todos" también se le llama sistema de liguilla, [4].

En general un campeonato en el que participan n equipos y en el que cada equipo juega contra cada uno de los restantes exactamente una vez supone que cada equipo juega $n-1$ partidos con los otros participantes y es lo que se suele llamar campeonato de liga. Por ejemplo, en el Campeonato de Liga Española de Primera División con 22 equipos, cada equipo jugó 21 partidos de ida y 21 partidos de vuelta, en total 42 jornadas. En adelante nos fijaremos sólo en los partidos de ida para estructurar las rondas o jornadas.

El objetivo primordial es planificar el torneo de antemano fijando las parejas de oponentes en cada una de las jornadas o rondas. Si hay muchos equipos el proceso de planificación es muy laborioso, por ello las normas de las distintas federaciones suelen incluir tablas que dan los modelos de calendarios a seguir. Por ejemplo para cinco y seis equipos las normas específicas para las competiciones organizadas por la Federación Española de Baloncesto proponen los emparejamientos que se muestran en el gráfico 4.

De las normas para competiciones de la Federación Española de Baloncesto para la temporada 1995/96 tomamos el siguiente sistema:

PARA CINCO Y SEIS PARTICIPANTES:

Primera Jornada	6-3	4-2	5-1
Segunda Jornada	1-6	2-5	3-4
Tercera Jornada	6-4	5-3	1-2
Cuarta Jornada	6-2	3-1	4-5
Quinta Jornada	5-6	1-4	2-3

Gráfico 4

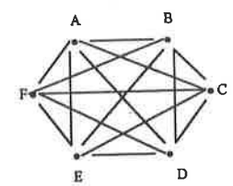
La situación puede interpretarse convenientemente en términos de grafos. Supongamos que hay n jugadores o equipos, de modo que cada uno juega $n-1$ partidos con los otros participantes. Cada jugador o equipo se representa mediante un vértice y cada partido por una arista del grafo.

El grafo que resulta al representar todos los partidos es un grafo completo de n vértices, esto es, un grafo en el que cualquier par de vértices está unido por una arista.

Los emparejamientos por jornadas o rondas corresponden a aristas del grafo que sean disjuntas, esto es, que no tengan vértices en común. Trazar todas las aristas disjuntas en un grafo se llama factorización del grafo.

La cuestión de planificar una liga también se puede abordar como un problema de coloración de aristas. En realidad colorear las aristas de un grafo completo de n vértices con el menor número de colores posibles es la misma cosa que planificar un torneo con n equipos. Los equipos son los vértices del grafo y las rondas son los colores de las aristas. El índice cromático o menor número de colores de un grafo completo con n vértices es n si n es impar y $n-1$ si n es par.

Tomemos la tabla de baloncesto del gráfico 4 para ilustrar los términos anteriores, pero cambiamos la notación nombrando a los seis equipos participantes por A, B, C, D, E y F.



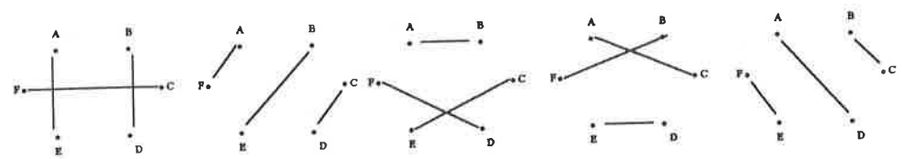


Gráfico 5

Como se puede observar en el gráfico 5, con 6 equipos (vértices) tenemos 15 partidos (aristas) que se organizan en 5 rondas (factorización o número de colores) y cada ronda consta de 3 partidos (factores o colores).

En general, con n equipos, tenemos $1/2n(n-1)$ aristas o partidos, que se han de organizar en $n-1$ rondas, y cada ronda consta de $n/2$ factores.

El número de factores distintos en un grafo de n vértices es:

$$(n-1)\,(n-3)\,(n-5)\,\ldots\,5.3.1$$

Así en el gráfico 5 se muestran 5 factorizaciones de las 15 posibles en un grafo de 6 vértices. Estas cinco factorizaciones son los mismos emparejamientos de la tabla que propone la F.E.B. (Gráfico 4):

CF	BD	AE
AF	BE	CD
DF	CE	AB
BF	AC	DE
EF	AD	BC

La cuestión esencial está en buscar algún método sistemático para elegir factorizaciones o rondas que den lugar a ligas. Existen varias estrategias que se pueden encontrar en [2] Espinel (1995):

Método de Lucas,
Rectángulos grecolatinos,
A partir de cuadrados latinos.

En la práctica cada federación tiene su método, por ejemplo la Federación de Baloncesto en España fija un modelo, teniendo en cuenta el número de participantes, se designan "cabezas de serie", de forma que los enfrentamientos de estos entre sí y con los demás equipos, se produzcan al menos con tres jornadas de separación. Se sortea qué grupo se toma teniendo en cuenta si entre los cabezas hay equipos que no deban coincidir. Estos cabezas de serie pueden tomarse tanto para los mejores como para los peor clasificados en la temporada anterior, en grupos diferentes para un mismo calendario.

El número de jornadas distintas (factorizaciones) que se podrían planificar con 22 equipos, pensando en la Liga Española de fútbol, da la friolera de:

$$21.19.17\,\ldots\,5.3.1 = 13\,749\,310\,575$$

3. Puntuación de los equipos

Una cuestión primordial en las competiciones deportivas es la búsqueda de criterios para clasificar a los equipos. Por ejemplo, en el fútbol español tradicionalmente se venía

asignando dos puntos por cada partido ganado, un punto por empate y cero puntos si se pierde. En la actualidad por cada partido ganado se asignan tres puntos. Evidentemente la calificación de un equipo en una competición depende del baremo utilizado.

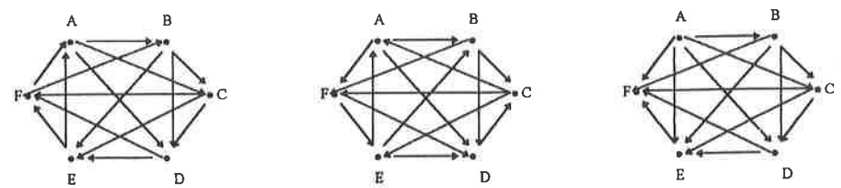
Una cuestión más delicada de resolver son los empates. Todos recordamos finales de mundiales de fútbol que se han resuelto ampliando el tiempo de juego o con tiros a portería. Quizás nos han parecido métodos poco justos.

En general las normas de las distintas competiciones deportivas establecen una clasificación en función del número de partidos ganados por cada equipo, resolviéndose los empates según distintos criterios.

Supongamos un campeonato de liga con n equipos donde no se admiten los empates. Convenimos en asignar un punto por cada partido ganado y cero puntos por los perdidos. Después de jugar los $n(n-1)/2$ partidos, anotamos las puntuaciones de los equipos en orden creciente, y le llamaremos "secuencia de tanteos" del campeonato o torneo.

Tal situación la representaremos por un grafo dirigido u orientado donde los vértices representan los equipos o jugadores y los arcos indican el equipo que ganó el partido. Si la flecha apunta desde A hacia B, esto indica que el jugador A venció al jugador B.

En el gráfico 6 se muestran tres ejemplos de grafos dirigidos para indicar las victorias en un campeonato de 6 jugadores con las respectivas secuencias de tanteos:



(2,2,2,3,3,3) (1,2,3,3,3,3) (0,1,2,3,4,5)

Gráfico 6

Precisamente a un grafo orientado en el que todo par de vértices están unidos por un único arco se le llama grafo "torneo". Aunque un grafo torneo no permite siempre decidir los méritos de cada equipo, ya que puede ocurrir que A gane a B, B gane a C, pero C gane a A. En este caso se tiene un ciclo entre estos 3 vértices. Esto ocurre porque la relación de ganar o dominar no es una relación transitiva.

Si el grafo del torneo es transitivo los equipos quedan clasificados y la secuencia de tanteos es $(0, 1, 2, \ldots, n-1)$. Cuando el torneo no es transitivo resulta más difícil establecer un "ranking" entre los equipos. Aunque ocurre que en cualquier torneo siempre hay un

camino dirigido que pasa por todos los vértices. Este hecho, unido a los distintos sistemas de puntuación, permite en la práctica clasificar a los equipos.

4. Conclusiones

Conocer algunas aplicaciones a la vida cotidiana contribuye a que el ciudadano tenga una mejor imagen de las matemáticas. Los deportes han adquirido un auge fuerte en los últimos tiempos motivados por diversas razones.

Pensando en el profesor de matemáticas creemos que las competiciones deportivas le ofrecen la oportunidad de "hacer matemáticas en el aula". Puede contar con las publicaciones de la prensa deportiva y con la información que aportan los propios alumnos, primordialmente los que estén federados.

El problema de organizar una liga de fútbol como la española supone tener en cuenta un gran número de variables. Básicamente , hay que decidir la fecha en la que se llevarán a cabo los partidos entre 22 equipos, teniendo en cuenta que cada equipo jugará 21 jornadas como visitante y 21 como local, buscar tiempo entre partidos para que los equipos se puedan desplazar, observar la prohibición de jugar en ciertas fechas por la existencia de otros eventos, distribuir los juegos lo más uniformemente posible. Así que sólo fijar un calendario implica un gran número de discusiones y cambios.

Pero si la liga a organizar fuese con un menor número de equipos, como es el caso de las competiciones escolares, la modelización mediante grafos supone una gran ayuda como hemos mostrado en este trabajo.

Además los temas tratados sugieren algunos cuestiones que el profesor puede proponer como problemas abiertos para que los alumnos investiguen. Así, para un torneo por el sistema de eliminatorias, un problema interesante es encontrar todos los árboles distintos cuando se tienen que enfrentar 3, 5, 6, 7, 9 ó 10 equipos. Ello incentiva la búsqueda de estrategias de enumeración y conteo. La enumeración de árboles tiene un sentido más profundo en ciencias de la computación.

El sistema todos contra todos ofrece una buena ocasión para conectar distintas partes de la matemática: combinatoria, geometría finita, diseño de experimentos estadísticos, juegos, además de los grafos.

Asignar puntuaciones a equipos es uno de los problemas más difíciles. En la práctica se suele tener en cuenta la "trayectoria del equipo"; ello supone tener en cuenta caminos sobre el grafo dirigido y asignar pesos a las aristas; ello lleva a las matrices torneo, que ya se sale de una primera aproximación a deportes y grafos.

Bibliografía

[1] I. Charon, A. Germa y O. Hudry (1996): "Random generation of tournaments and aymmetric graphs with given out-degrees", *European Journal of Operational Research*, 95, pp. 411-9.

[2] M. C. Espinel (1995): "Algunas cuestiones de conteo en un sistema de liga", *Aula*, 44, pp. 65-9.

[3] D. E. Knuth (1987): "Clasificación y búsqueda", *El arte de programar ordenadores*, vol. 3, Reverté.

[4] O. Ore (1995): *Grafos y sus aplicaciones*, La Tortuga de Aquiles, 6.

[5] L. E. Sadovskii y A. L. Sadovskii (1993): "Mathematics and Sports", *American Mathematical Society*.

[6] R. J. Wilson (1983): *Introducción a la teoría de grafos*, Alianza Universidad.

[7] R. J. Wilson y J. J. Watkins (1990): *Graphs. An introductory approach*, John Wiley & Sons. Inc.

Aplicaciones de las matrices al estudio de sucesiones numéricas

M.ª Azucena Méndez Domínguez

E.U. Educación de Soria. Universidad de Valladolid

Abstract

The objective of the present work is to utilize operations elementary with matrixes to study numeric successions. In particular, to calculate the general term and the properties of some recurrent successions, like they are the Fibonacci's and Lucas', where each term is obtained adding the two anterior.

1. Introducción

El objetivo de este trabajo es utilizar operaciones matriciales elementales, a nivel de COU y 2º de Bachillerato LOGSE, para estudiar sucesiones numéricas.

Un tipo interesante de sucesiones de enteros es el de aquellas que vienen expresadas en forma recurrente, es decir, que cada término se obtiene a partir de términos anteriores por una fórmula lineal

$$a_{n+1} = \alpha_n a_n + \alpha_{n-1} a_{n-1} + \ldots + \alpha_{n-r} a_{n-r}$$

con $\alpha_n, \ldots, \alpha_{n-r}$ enteros. De este modo, la construcción de una sucesión de este tipo se puede hacer observando que si M es la matriz de tamaño $(r + 1) \times (r + 1)$ siguiente

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & K & 0 & 0 \\ . & . & . & K & . & . \\ 0 & 0 & 0 & K & 1 & 0 \\ \alpha_{n-r} & \alpha_{n-r+1} & \alpha_{n-r+2} & K & \alpha_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}$$

tenemos que

$$\begin{pmatrix} a_{n-r+1} \\ a_{n-r+2} \\ K \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} a_{n-r} \\ a_{n-r+1} \\ K \\ a_n \end{pmatrix} = M^2 \cdot \begin{pmatrix} a_{n-r-1} \\ a_{n-r} \\ K \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = L = M^{n-r+1} \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ K \\ a_r \end{pmatrix}$$

De esta forma, calcular el término general en función del lugar que ocupa –no a partir de términos anteriores– se reduce a construir M^n, para todo n.

Desde un punto de vista formal, esto se puede hacer utilizando la forma canónica de Jordan de la matriz M y la matriz de paso P, de manera que

$$M = P \cdot J \cdot P^{-1} \Rightarrow M^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1}$$

y calcular J^n es un ejercicio inmediato a partir del binomio de Newton, teniendo en cuenta que la forma de Jordan J descompone en:

$$J = D + N, \text{ D diagonal y N nilpotente tales que } DN = ND$$

$$J^n = (D+N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot N^k \cdot D^{n-k}$$

$$D^{n-k} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{n-k}, K, \lambda_{r+1}^{n-k}), \text{ y existe t con } N^{t+1} = (0), \text{ luego}$$

$$J^n = \sum_{k=0}^{t} \binom{t}{k} \cdot D^{t-k} \cdot N^k$$

donde $t \leq r$ es el orden de la mayor caja de Jordan que aparece en J.

La matriz M es la matriz "compañera" del polinomio $-\alpha_{n-r} - \alpha_{n-r+1} \cdot x - \ldots - \alpha_n \cdot x^r + x^{r+1}$, que es precisamente el polinomio característico de M.

2. Sucesiones recurrentes de orden 2. Forma de Jordan de una matriz 2×2

Para una clase sencilla e interesante de sucesiones numéricas, la fórmula de recurrencia tiene dos términos, y el problema se reduce a hallar la forma de Jordan de una matriz 2×2 del tipo

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & B \end{pmatrix}$$

Como hemos indicado, este caso simple incluye sucesiones muy interesantes, como las de Fibonacci y Lucas:

Fibonacci: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...
Lucas: 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, ...

que se pueden estudiar a partir de la misma matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Podemos plantearnos las preguntas siguientes:

a) ¿Por qué no calcular

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

descomponiéndola en

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y aplicando la fórmula del binomio de Newton? La respuesta es clara: porque las matrices no conmutan, y entonces, por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y, sin embargo,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

b) ¿Por qué no se calcula

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$$

por recurrencia? Obviamente porque se obtienen los términos de la sucesión de Fibonacci, cuyo término general es lo que tratamos de calcular.

c) Calculemos la forma de Jordan de la matriz real

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Queremos hallar una matriz de paso P tal que $P^{-1} \cdot M \cdot P = J$.
¿Se puede conseguir P para que J sea diagonal?

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Veamos que para esta matriz M sí se puede: si P es la matriz

$$P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con determinante 1, es decir, $ad - bc = 1$; entonces, la matriz inversa de P será

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

y la ecuación matricial que hemos de resolver es

$$P^{-1} \cdot M \cdot P = J$$

$$\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a & \beta b \\ \alpha c & \beta d \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\text{Como } \det(P) = 1 \Rightarrow \alpha \neq \beta \Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}, J = D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Para calcular las sucesivas potencias de exponente natural de M, procedemos con su forma diagonal:

$$M = P \cdot J \cdot P^{-1} \Rightarrow M^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1}$$

$$J = D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix}$$

$$M^n = P \cdot J^n \cdot P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\alpha^n \cdot \beta + \beta^n \cdot \alpha & \alpha^n - \beta^n \\ -\alpha^{n+1} \cdot \beta + \beta^{n+1} \cdot \alpha & \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \end{pmatrix}$$

y entonces

$$\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

Nota: Los números α y β son las raíces del polinomio característico de la matriz M, es decir, del polinomio $p_M(x) = x^2 - Bx - A$

3. Sucesión de Fibonacci

Fibonacci (1180-1250) es el seudónimo de Leonardo de Pisa, importante matemático italiano, autor del "Liber Abaci", que curiosamente defendía nuestro actual sistema de numeración indo-arábigo en oposición al ábaco. Debe su sobrenombre a su padre, comerciante que negociaba con los árabes (por lo que mandó a su hijo a aprender matemáticas con ellos), y era tan honesto que le llamaban "Bonaccio", el de buen corazón.

Se llama sucesión de Fibonacci a una sucesión numérica en la que, a partir de 1 y 1, cada término se obtiene sumando los dos anteriores.

Origen y apariciones en diversos campos

Dicha sucesión tiene un posible origen en la B con el problema de los conejos: suponiendo que cada pareja de conejos al cabo del segundo mes de vida produce una nueva

pareja de conejos cada mes, que a su vez puede reproducirse a partir de su segundo mes de vida, saber cuántas parejas de conejos habrá cada mes. Fibonacci dio la solución:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...

Una cuestión similar es la del número de descendientes en cada generación de una abeja macho o zángano: después de ser inseminada la abeja reina por un macho de otro enjambre, ella no sale más de su colmena, dedicándose a la puesta de huevos, que ella misma va fecundando o no, dando origen a abejas obreras o reinas en el primer caso, y a machos o zánganos en el segundo. El número total de abejas de cada generación forma la sucesión de Fibonacci.

Se encuentra también en **Botánica:** ciertas flores tienen un número de pétalos que es miembro de dicha sucesión, por ejemplo con 3 pétalos la flor de lis, con 5 y 8 algunos ranúnculos, azucenas y delphiniums, y las margaritas y girasoles suelen tener 13, 21, 34, 55 u 89 pétalos.

A su vez, la parte de la Botánica que estudia la disposición de las hojas a lo largo de los tallos de las plantas, la **Filotaxia,** descubre la sucesión. Generalmente, esta disposición es de tal forma que permita a las hojas una captación uniforme de luz y aire, siguiendo normalmente una trayectoria ascendente y en forma de hélice.

Si nos fijamos en una hoja de un tallo y contamos el número de hojas consecutivas (n) hasta encontrar otra hoja con la misma orientación, este número es, en general, un término de la sucesión. Si al contar además vamos girando el tallo, el número de vueltas (m) que debemos dar para llegar a otra hoja con la misma orientación, es también otro término de la sucesión, llamándose divergencia de dicho tallo a la razón m/n, que multiplicada por 360° nos da el ángulo de divergencia, ángulo que forman las medianas de dos hojas consecutivas, y que es constante. Así, se tiene la serie principal de Shimper-Braun:

1/2	(180°)	en el Olmo y poáceas
1/3	(120°)	en las ciperáceas
2/5	(144°)	Álamo, Rosa, Corylus, Betula
3/8	(135°)	Sauce llorón, Aster, Brassica, Plántago
5/13	(138°27')	Siempreviva, piñas de Pinus strobus
8/21	(137°8'34")	piñas de Pinus sylvestris, Pinus nigra, y de Picea abies
13/34	(137°38')	compuestas
21/55	(137°27')	compuestas
34/89	(137°31')	compuestas

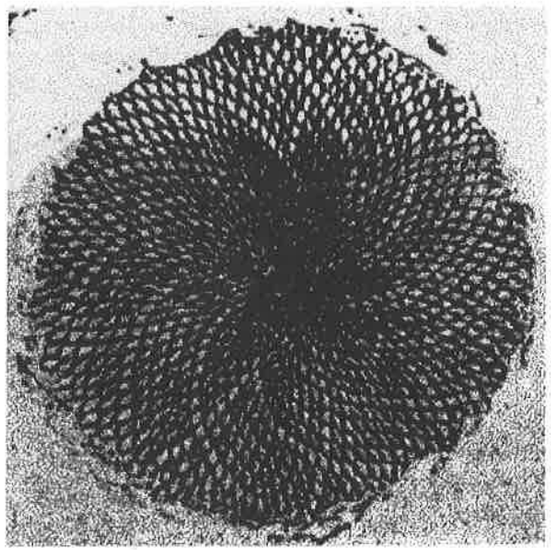
Además, los valores angulares de las fracciones de divergencia, al pasar a términos superiores de la serie, tienden al valor límite 137° 30' 27.95058..." = ÁNGULO DE DIVERGENCIA LÍMITE (medido experimentalmente por Wiersner y Zeysing) que divi-

de la circunferencia según la sección áurea, de la que más adelante hablaremos. Como el ángulo de Fibonacci divide la circunferencia de manera irracional, la disposición de las hojas según la divergencia límite facilita a cada hoja el mejor aprovechamiento posible de la luz y el aire.

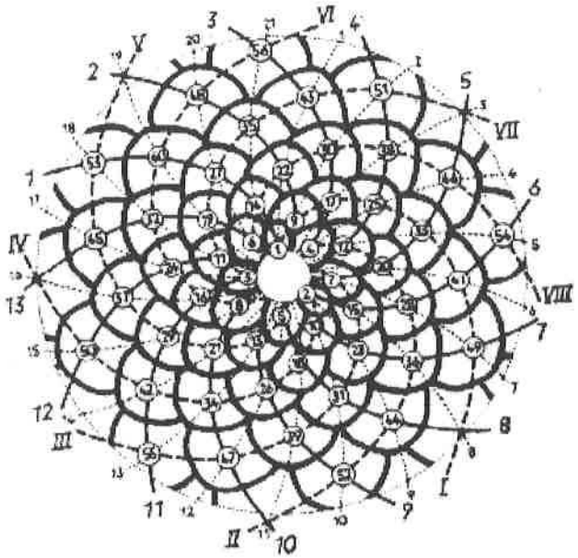
A menudo, la secuencia oscila con la edad de la planta. En las primeras hojas 1/2, después la divergencia pasa a 1/3, 2/5, 3/8, 5/13... y, finalmente, a una ordenación helicoidal según la divergencia límite.

De forma similar, la sucesión aparece en el número de líneas helicoidales llamadas parásticos, muy aparentes en el girasol , en las piñas de las coníferas y en las piñas tropicales:

Girasol: se aprecian claramente 55 parásticos dirigidos hacia la izquierda y 89 hacia la derecha.



Dibujo semiesquemático de una piña de pino albar vista por la base. Las escamas se disponen según la divergencia límite (numeración correlativa 1-56). Unen escamas en amplio contacto lateral (parásticos de contacto) las líneas continuas 1 a 13 –que giran en sentido positivo(contrario a las agujas del reloj)– y las líneas a trazos I a VIII –que giran en sentido negativo–. Las líneas de puntos 1 a 21 unen escamas superpuestas.



Construcción del término general

Para las sucesiones de Fibonacci y Lucas el término general se obtiene a partir de la misma matriz asociada:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Podemos definir $u_0 = 0$, y entonces

$$\begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Como $\Delta = b^2 + 4a = 5 > 0$, entonces

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[(-\alpha^{n+1}\beta + \beta^{n+1}\alpha) \cdot u_0 + (\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}) \cdot u_1 \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right], \forall n \in N$$

fórmula descubierta por **Moivre** en 1718.

Pese a la expresión del término general, todos los números así obtenidos son naturales. Para demostrarlo, basta utilizar el binomio de Newton:

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^k \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^k \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1-k} \right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1-k} \cdot \left(\frac{1-(-1)^k}{2} \right) \right]$$

Cuando k es par, el sumando vale cero. Luego $\sqrt{5}$ sólo aparece cuando k es impar; la parte irracional se cancela con la del divisor, y el resto es múltiplo de 2^k, luego u_{n+1} es un número natural.

Valores propios de M. Número áureo

Los elementos que aparecen en la diagonal de J, α y ß, resultan también del cálculo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0-\alpha & 1 \\ 1 & 1-\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \beta \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0-\beta & 1 \\ 1 & 1-\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y dichos sistemas tienen solución no trivial si α y ß son las raíces de la ecuación

$$\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - x - 1 = 0$$

que es el polinomio característico de la matriz M.

El primero de estos números,

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

el **número áureo,** tiene su origen al tratar de dividir un segmento en dos partes distintas, de manera que la parte mayor *a* es a la menor *b* como el segmento total c es a la mayor *a*. La división del segmento así obtenida ha sido denominada "extrema y media razón" (Euclides), "sección áurea" (Leonardo Da Vinci), "divina proporción" (Fray Luca di Pacioli). Como debe cumplirse que

$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a}$$

llamando x = a/b se obtiene la relación $x^2 - x - 1 = 0$, cuyas raíces son

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339...$$

$$\Phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.6180339...$$

denotadas con la letra griega Φ (phi) en honor de Phidias, escultor griego que utilizaba habitualmente este número en las proporciones de sus esculturas.

El número áureo lo podemos obtener también como:

a) Límite del cociente de dos términos alternos de la sucesión de Fibonacci:

$$\lim \frac{u_{n+2}}{u_n} = \lim = \frac{u_{n+1} + u_n}{u_n} = 1 + \lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

$$\lim \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \cdot \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Luego $L^2 = 1 + L$ y $L \geq 0 \Rightarrow L = \Phi$

b) Límite de raíces cuadradas:

Φ es la raíz positiva de $x^2 - x - 1 = 0$, luego

$$x^2 = x + 1 \Rightarrow x = \sqrt{1+x} = \sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+x}}} \ldots \Rightarrow$$

$$\Phi = \lim \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}$$

c) Límite de fracciones continuas:

$$x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = x + 1 \underset{(x \neq 0)}{\Rightarrow} x = 1 + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}} \Rightarrow$$

$$\Phi = \lim\ 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$$

4. Sucesión de Lucas

En la sucesión de Lucas, como en la de Fibonacci, la matriz asociada es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tomando ahora como condiciones iniciales $v_1 = 1$, $v_2 = 3$. El término (n+1)-ésimo se obtendrá de la igualdad

$$\begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = M^{n-1} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = M^n \cdot \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \text{ tomando } v_0 = 2$$

luego

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\alpha^n - \beta^n\right) \cdot v_0 + \left(\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}\right) \cdot v_1 \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \right], \forall n \in N$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\Phi^n \cdot (2+\Phi) - \Phi'^n \cdot (2+\Phi') \right], \forall n \in N.$$

5. Conclusiones didácticas

Para los estudiantes y la sociedad en general, una de las dificultades principales en el aprendizaje de las matemáticas es su aparente falta de conexión con la vida diaria y con la naturaleza. Por ello es importante que nos esforcemos por ayudarles a descubrir la belleza que encierran, y a disfrutar del entorno que nos rodea. Desde este punto de vista, la sucesión de Fibonacci conecta rápidamente con la naturaleza, y su estudio por medio de operaciones elementales con matrices ayuda a ver éstas como una forma de acercamiento a la realidad, no como un mero instrumento algebraico sin significado.

Por otra parte, es necesaria la interdisciplinariedad, no sólo como argumento de enseñanza-aprendizaje, sino como motivación y despertar de la curiosidad científica: que nuestros alumnos desarrollen el gusto por investigar y aprender. Y uno de los temas que más ayuda nos aportan en este sentido es el del número áureo. Por un lado, su aparición en la naturaleza para optimizar recursos (luz, aire...) y minimizar superficies (huevo, conchas en espiral logarítmica...) y, por otro, su invasión en el arte (esculturas griegas, cuadros renacentistas...) y en las ciencias (estudio del cuerpo humano, proporciones...).

Por lo tanto, es positivo mostrar una cara menos formalista de las matemáticas para conseguir que pierdan el miedo a pensar, y que descubran que, como decía Galileo, "el libro de la naturaleza está escrito en el lenguaje de las matemáticas".

6. Bibliografía

[1] G. H. HARDY y E. M. WRIGHT: *An Introduction to the Theory of Numbers,* Oxford at the Clarendon Press, Oxford,1979.

[2] K. JACOBS: *Invitation to Mathematics,* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1992.

[3] E. STRASBURGER y otros: *Tratado de Botánica,* Ed. Marín, Barcelona, 1923.

Unidades de medida antiguas de Castilla y León (Valladolid)

María Ortiz Vallejo

Dpto. Análisis matemático y Didáctica de las Matemáticas
Universidad de Valladolid

Abstract

Equivalents of units of length, surface, volume and weight, commonly used two hundred years ago in several places of the Castile Kingdom (a part of Spain), are described.

1. Sistemas de medida

La necesidad de medir ha sido una constante a lo largo de toda la historia de la humanidad. Todo lo que debía cuantificarse requería de forma inmediata una unidad y que al mismo tiempo ésta pudiera reproducirse fácilmente. Por ello todos los pueblos han empleado millares de unidades de medida en distintas partes del mundo y en diferentes épocas lo que no siempre ha facilitado el mutuo entendimiento en las transacciones que el comercio ha ido imponiendo a lo largo de los años. A cada unidad correspondía un utensilio que servía para materializar esa magnitud: longitud, volumen, peso...

Para facilitar ese comercio, las autoridades, en cada una de sus zonas de influencia, fueron definiendo estas unidades con mayor o menor rigor al mismo tiempo que eran seguidas también con mayor o menor fidelidad en las distintas zonas de influencia; nótese que la tradición es un elemento conservador o de inercia que sirve como base de conservación del conocimiento pero también frena de algún modo la evolución o al menos la modera sin que ello suponga juicio de valor. Para la calidad de la evolución es necesario un equilibrio armónico entre innovación y tradición; todo cambio de unidades suponía el abandonar la tradición de sus padres, aprender a contar y calcular de otra forma con la dificultad que eso suponía introduciendo nuevos conceptos y al mismo tiempo abandonar los utensilios de medida de uso corriente que con tanto esfuerzo y esmero habían realizado y que muchas pasaban de padres a hijos.

Después de más de siglo y medio de la entrada en vigor del sistema métrico decimal (SMD), todavía países como los anglosajones, que no son sospechosos de atrasados, mantienen en la actualidad unidades como la milla, la pinta, el acre..., lo que refleja claramente las dificultades que han existido siempre para estandarizar y hacer respetar sus valores.

En cuanto a su denominación, muchas de las unidades de medida que han sido o son empleadas constituyen expresiones claras del tamaño de objetos comunes. El pie tiene su origen en la longitud del pie humano; la yarda era la distancia de la nariz a la punta del brazo extendido; la pulgada era la longitud de la parte central del pulgar. Una milla eran mil pasos; un acre, la superficie de tierra que un hombre podía arar con una yunta de bueyes en un día; la vara era la anchura de cuatro bueyes de frente. A causa de las variaciones de estas medidas fueron unificadas arbitrariamente y, en la mayoría de los casos, se ha olvidado su origen primitivo.

Como consecuencia natural de la mundialización progresiva de este mismo comercio se hizo necesario abandonar las unidades de carácter local, regional y nacional con las dificultades que hemos apuntado, para llegar hasta el SMD actual; no obstante este paso no supuso automáticamente el rigor en su utilización. Durante todo este siglo y sobre todo en su parte final, el desarrollo mundial, la liberalización del comercio, el incremento del consumo, la mejora tecnológica, el aumento de la capacidad de producción y finalmente las mayores exigencias del consumidor con la consiguiente "primacía del cliente" ha llevado consigo la explosión, a nivel mundial, de la calidad; en el campo de la medida esta explosión ha llevado consigo una demanda de rigor y precisión en la propia medida y por tanto en sus medios y patrones lo que ha supuesto el desarrollo de la metrología hecho que podría considerarse como la segunda revolución en este terreno después del de la introducción del SMD. Muchos de nosotros recordamos todavía en España la venta de pan de kilo que pesaba legalmente 800 grs. como fruto de la política de no subida de precios.

2. Unidades antiguas de medida de Castilla

Un poco como añoranza del pasado de nuestros padres y otro poco conscientes de que es necesario partir siempre del pasado para comprender mejor el presente, vamos a intentar situarnos un poco en la realidad de la medida de Castilla y León de hace 200 años sin pretender ser exhaustivos; la realidad de esa época no era uniforme y tendríamos, y así lo hemos hecho a veces, ir de pueblo en pueblo, de región en región y no daríamos una realidad única porque no la había. Un intento de unificación viene recogido claramente en la Ley V de Carlos IV por orden de 26 de Enero de 1801 cuyo extracto decía:

"Llévese a efecto la igualación de pesas y medidas que ha sido mandada en diferentes tiempos; y para que se logre la utilidad real de esta uniformidad con la menor incomodidad posible de los pueblos, se tomen por normas las pesas y medidas que están en uso

más generalmente en estos Reinos, prefiriendo el evitar la confusión que de alterarlas resultaría, al darles cierto orden y enlace sistemático que se podría desear.

Estas normas son el patrón de la vara que se conserva en el archivo de la ciudad de Burgos; el patrón de la media fanega que se conserva en el archivo de la ciudad de Ávila; los patrones de medidas de líquidos que se custodian en el archivo de la ciudad de Toledo y el marco de las pesas que existen en el archivo del consejo.

Las pesas y medidas que deberán ser pues de uso general en todos mis Reinos y Señoríos y que en lo sucesivo se llamarán pesas y medidas Españolas, serán las siguientes.

La fanega se dividirá en dos medias fanegas y cuatro cuartillas y el celemín se dividirá en mitades sucesivas, según se acostumbra, con los nombres de medio celemín, cuartillo, medio cuartillo, ochavo, medio ochavo y ochavillo."

2.1. Medida de longitud:

Las medidas de longitud presentan una fácil uniformidad; sus proporciones son claras como puede apreciarse en la tabla que figura a continuación; las unidades se suelen subdividir en 3, 4 ó 12 partes. La unidad fundamental es la "vara" (ver Tabla I).

Legua: medida equivalente a 20.000 pies, 6.666,66 varas y por tanto a 5.572,7 m.

Estadal: equivale a 3,3436 metros y está dividido a su vez en cuatro varas.

Vara de Castilla o también llamada de Burgos. Era equivalente a 0,8359 m y estaba dividida en tres *pies* o cuatro *palmos*. (La vara de Aragón medía 0,772 m y estaba dividida en cuatro palmos y estos a su vez en 12 pulgadas.)

Pie: Usado en muchos países con distinta acepción; en Castilla es la tercera parte de la vara y equivale por tanto a 0,2786 m. A su vez el pie se subdivide en 12 pulgadas.

Palmo o *cuarta:* cuarta parte de la vara, dividida a su vez en 12 dedos, equivalente a 0,209 metros y se supone que es el largo de la mano de un hombre abierta y extendida desde el extremo del pulgar hasta el del meñique. También se llamaba *palmo menor o cuatro dedos* al ancho que dan unidos los cuatro dedos, índice, mayor, anular y meñique y equivalía a 7 cms.

Pulgada: Doceava parte del pie y equivalente por tanto a 23,22 mm.

Jeme: Distancia que hay entre la extremidad del dedo pulgar a la del dedo índice separados lo más posible; equivale aproximadamente a 15 cms.

Dedo: Doceava parte del palmo y equivalente por tanto a 17,4 mm.

Línea: Doceava parte de la pulgada que contiene, a su vez, doce puntos. Equivale a 1,935 mm.

Punto: Doceava parte de la línea y equivalía, por tanto, a 0,16125 mm.

Tabla I
Longitud

	Legua	Estadal	Vara	Pie	Palmo	Pulgada	Dedo	Línea	Punto	Metro
Legua	1	5.000/3	20.000/3	20.000	80.000/3	240.000	320.000	2.880.000		5.572,7
Estadal		1	4	12	16	144	192	1.728	20.736	3,3436
Vara			1	3	4	36	48	432	5.184	0,8359
Pie				1	4/3	12	16	144	1.728	0,2786
Palmo					1	9	12	108	1.296	0,209
Pulgada						1	4/3	12	144	0,02322
Dedo							1	9	108	0,0174
Línea								1	12	0,001935
Punto									1	0,000161

2.2. Medida de superficie:

La dificultad de medir este tipo de magnitud es mayor que en el caso anterior (Tabla II). Para productos de tamaño manejable (telas...), las unidades cuadráticas eran fácil de utilizar, pero no así cuando se trataba de terrenos, etc...; por eso el tipo de unidades utilizado puede clasificarse en dos grupos según su origen:

a Las que provienen de las unidades de longitud y que heredan de ellas su uniformidad. A pesar de su rigor tienen la dificultad de que no es fácil su utilización por parte del agricultor ya que los terrenos no son, en general, de forma regular. Son unidades del tipo cuadrático y para medir la superficie de un terreno tendrían que descomponerlo en formas de área conocida (triángulos, rectángulos...) para luego calcular el valor total; los terrenos accidentados acrecentarían el problema. La precisión de la medida era la justa recompensa a la dificultad de su utilización.

b) Las que provienen (b_1) de unidades del trabajo necesario para su explotación o (b_2) de la cantidad de grano que es necesario para su siembra. No proporcionan una medida muy precisa pero eran de fácil uso y comprensión y probablemente también de abuso y manipulación. Eran unidades sumamente específicas de las distintas zonas y condiciones

Tabla II
Superficie

	Legua²	Yugada	Fanega	Aranzada	Celemín	Estadal²	Vara²	Pie²	Áreas
Legua²	1	96,45	4.822,5		57.870	2.777.760			310.550
Yugada		1	50	70		28.800	460.800	4.147.200	3.219,8
Fanega			1	36/25	12	576	9.216	82.944	64,396
Aranzada				1	25/3	400	6.400	57.600	44,719
Celemín					1	48	768	6.912	5,366
Estadal²						1	16	144	0,111798
Vara²							1	9	0,006987
Pie²								1	0,000776

de explotación; no era lo mismo un campo de hierba que uno de cereal y éstos que fueran de la vega o del páramo, secano o regadío, de la zona del norte de Burgos y Palencia o de Tierra de Campos; por ello las unidades hacían referencia, en el primer caso al trabajo específico y en el segundo al tipo de grano. Citamos como ejemplos:

b_1) **Obrada:** que era "lo que alcanzaba una huebra en un día de obrar" siendo una huebra el terreno que podía ararse por un par de mulas en una jornada. Evidentemente dependería bastante del tipo y dureza del terreno, de la habilidad y esfuerzo del labrador, de la eficacia de las mulas, del tipo de arado... Así se explica que veamos equivalencias para esta unidad entre distintas poblaciones próximas de la misma provincia de Valladolid de 28,2988 áreas en Olmedo, 56,5976 en Medina del Campo y hasta 69,8738 en Villanubla. Valores próximos y del mismo origen es la *Yera* ó *Hiera* y la *Iguada.* En cada población se utilizaba una de las tres y con distintos valores. De un total 272 poblaciones, en la provincia de Valladolid de esta época, independientemente de su tamaño, 161 utilizaban la Obrada, 66 la Iguada y 6 utilizaban la Yera a las que hay que añadir 39 que utilizaban la Fanega cuyo origen veremos en el apartado siguiente. Hemos añadido unas tablas de la utilización de estas unidades de medida en la provincia de Valladolid para comprender mejor la dificultad existente en el comercio intra e intercomarcales (ver Tablas II, IV y V).

Yugada: también se denominaba "par de mulas" y equivalía a la superficie que podía arar una yunta de mulas en un año, o lo que es lo mismo, la cantidad de terreno que dispo-

Tabla III
1 Obrada

	N.º Poblac.	Cuartas²	Estadales²	Vara²	Pie²	Pies/estad	Áreas
Villanubla	1	4	900	10.000	90.000	10	69,8738
Medina del Campo	44	4	400	8.100	72.900	13,5	56,5976
Amusquillo, Cabezón...	8	4	600	8.066,66	72.600	11	56,3648
Mucientes	1	4	600	7.779,34	70.014	10,5	54,3572
Esguevillas	1	4	616	6.844,44	61.600	10	47,8247
Valladolid, Peñafiel	63	4	600	6.666,66	60.000	10	46,5825
Ataquines	1	4	400	6.400	57.600	12	44,7192
Lomoviejo	1	4	500	6.125	55.125	10.5	42,7977
Honcalada...	6	4	400	5.625	11,25	39,3037	
Tordesillas	1	4	266	5.390	48.510	13,5	37,6575
S. Miguel del Arroyo...	2	4	400	5.378	48.400	11	37,5765
Canillas, Villarmentero...	19	4	400	4.444,44	40.000	10	31,0550
Olmedo, Aguasal...	13	4	200	4.050	36.450	13,5	28,2988
Total poblaciones	161						

nía un agricultor se medía por el número de pares de mulas o yugadas que necesitaba tener para trabajar sus tierras. El valor que en esta zona se solía atribuir a esta unidad es de 50 fanegas de superficie, o lo que es lo mismo, 32,198 hectáreas; 100 hectáreas de terreno de Castilla equivalía aproximadamente a tres pares de mulas.

b_2) La principal es la **fanega** o **fanega de puño** que es la superficie de tierra en la que se podía sembrar una fanega de trigo y equivalía a 576 estadales cuadrados y por tanto a 64,396 áreas; de ella derivan todas las demás. No obstante bajo esta denominación, y dependiendo de las distintas comarcas, cabían diferentes interpretaciones no llegando en la provincia de Valladolid al valor reseñado en ninguna de sus poblaciones. Los valores oscilaban entre 50,51 áreas en Castronuño y 22,36 áreas en Mota del Marqués. Cabe también

Tabla IV
1 Yera

	N.º Poblac.	Cuartas²	Estadales²	Vara²	Pie²	Pies/estad	Áreas
Almaraz, Villanueva	3	12	1.200	10.800	97.200	9	75,4637
Villagarcía	1	8	800	7.200	64.800	9	50,3091
Castromembibre, Urueña	2	6	600	5.400	48.600	9	37,7318
Total poblaciones	6						

reseñar que tampoco la equivalencia en unidades derivadas de las lineales (estadales, varas, piés) eran uniformes como se observa en tabla posterior (ver Tabla VI).

Legua (cuadrada): Cuadrado de una legua de lado que equivalía a 4.822,5 fanegas y a 3.105,5 hectáreas.

Yugada: espacio de tierra de labor que necesita disponer de una yunta y es equivalente a 50 fanegas de superficie y por tanto a 32,198 hectáreas.

Carga: equivalía generalmente a 4 fanegas; en la zona de León tenía doce heminas y podía equivaler a 102,72 áreas.

Fanega: También sirve como medida de superficie y se denominaba "fanega de puño o de sembradura" y es la superficie de tierra en que se podía sembrar una fanega de trigo. La fanega de tierra, también llamada fanegada, como medida de superficie agraria en el marco de Castilla, contiene 576 estadales cuadrados y equivale a 64,396 áreas. Esta cifra varía según las regiones. Se usan por tanto las divisiones de la fanega (celemín y cuartillos) igualmente como unidades de superficie.

Obrada: Deriva de la superficie que es capaz de arar una yunta en un día. Esta medida agraria se utilizaba en Castilla con distintas equivalencias, a saber: en Palencia era 53,832 áreas, en Segovia era 39,303 áreas y en Valladolid 46,582 áreas. Se dividía en 4 cuartas.

Hiera o *Yera:* es equivalente a una obrada.

Iguada: También puede considerarse igual a la Hiera u obrada. Equivalía a 39,88 áreas.

Aranzada: medida agraria antigua de Castilla compuesta de 400 estadales y equivalía a 44,719 áreas.

Hemina: utilizada en León y estaba compuesto por 4 celemines y equivalía a 8,56 áreas.

Cuarta: medida de superficie equivalente a 1/14 de la carga e igual a 7,33 áreas aunque, como se verá en lasa tablas siguiientes tomaba también otros valores.

Tabla V
1 Iguada

	N.º Poblac.	Cuartas²	Estadales²	Vara²	Pie²	Pies/estad	Áreas
Bamba	1	4	900	10.000	90.000	10	69.8738
Montealegre	1	8	800	8.888,88	80.000	10	62.1100
Gatón	1	4	400	8.711,11	78.400	14	60,8678
Medina de Rioseco	9	4	400	8.100	72.900	13,5	56,5977
Villalba del Alcor	1	6	600	8.066,66	72.600	11	56.3648
Palacios de Campos	1	6	600	7.233,8	65.104	10,4166	50.5453
Cuenca de Campos	3	4	400	7.225	65.025	12,75	50,4838
S. Cebrián de Mazote	3	8	800	7.200	64.800	9	50,3091
Castroponce	2	4	400	6.944,44	62.500	12,5	48,5234
Castrodeza	1	6	600	6.666,66	60.000	10	46,5825
Matilla de los Caños	6	4	600	6.666,66	60.000	10	46,5825
Adalia	8	4	400	6.400	57.600	12	44,7192
Castromonte	3	6	600	6.016,66	54.150	9,5	42,0407
Barcial de la Loma	1	6	600	5.704	51.337	9,25	39,8568
Cabreros del Monte	5	6	600	5.400	48.600	9	37,7318
Morales de Campos	2	6	600	5.104	45.936	8,75	35,6647
Villalón	16	4	400	4.900	44.100	10,5	34,2381
Villabrágima	2	6	600	4.814,7	43.350	8,5	33,6558
Total poblaciones	66						

Tabla VI
1 Fanega

	N.º Poblac.	Celemines	Estadales²	Vara²	Pie²	Pies/estad	Áreas
Castronuño	3	12	450	7.229	65.058	12	50,5091
Alaejos	1	12	500	6.670	60.030	12,25	46,6019
Bolaños	1	6 (cuartas)	600	6.016,66	54.150	9,5	42,0407
Cubillas de Duero	1	12	300	5.086	45.776	12	33,5396
Barruelo	2	12	300	4.800	43.200	12	33,5394
Becilla de Valderad.	5	4	250	4.515	40.640	12,75	31,5523
Bercero	11	12	275	4.404	39.636	12	30,7744
Villacreces	1	12	350	4.287,5	38.587,5	10,5	29,9584
Castrobol	3	12	300	3.675	33.075	10,5	25,6786
Quintanilla del Molar	2	12	400	3.600	32.400	9	25,1545
Peñaflor de Hornija	6	12	208	3.328	29.952	12	23,2540
Benafarces	2	12	206	3.296	29.664	12	23,0304
Mota del Marqués	1	12	200	3.200	28.800	12	22,3596
Total poblaciones	39						

Celemín: como medida de superficie equivalía a 1/12 de fanega y a 5,37 áreas, superficie de terreno que se consideraba necesario para sembrar un celemín de trigo.

Estadal (cuadrado): es una medida superficial o agraria que contiene 16 varas² o 144 pies² y equivale a 1/576 fanegas y tiene por tanto 11,1798 m² o lo que es lo mismo 0,111756 áreas.

Vara (cuadrada): 1/9.216 de fanega: equivale a 0,698738 m².

Pie (cuadrado): 0,07763 m².

3.1. Medida de capacidad para áridos:

Esta unidad era esencial en el comercio de la zona agrícola castellana. Las denominaciones y múltiplos y submúltiplos eran bastante comunes en la zona; sin embargo, la uniformidad era bastante dispar. Téngase en cuenta que de nada servía una unidad si no podía materializarse en enseres para poder medir; de todas estas unidades o de sus submúltiplos, quedan muchos enseres que hoy día se guardan como respeto a la tradición y que nos hace comprender la dificultad de mantener un uniformidad al ir haciendo copias de copias durante generaciones. Recogiendo los valores que se utilizaban de forma más general y los de Valladolid (ver Tabla VIII):

Cahíz: Tenía 12 fanegas y en Castilla equivalía a 666,96 litros; en Valladolid, por el distinto valor de la fanega, equivalía a 657,48 litros.

Carga: equivalía a 4 fanegas y por tanto a 222 litros.

Fanega: que, según el marco de Castilla, tiene 12 celemines, equivale a 55,58 litros; sin embargo esta cabida es muy variable según las diversas partes de España. En Palencia sí tiene este valor y por el contrario en Valladolid vale 54,79 litros. (En Aragón la fanega medía 22,4 litros y se dividía en cuatro cuartales equivalentes a 5,6 litros.)

Hemina: utilizada en León. Equivalía a la tercera parte de la fanega y a 4 celemines.

Cuartilla (de fanega): equivalía a la cuarta parte de una fanega y por tanto a tres celemines; contenía 13,875 litros.

Celemín: en Castilla también se le llamó almud y equivale a 4,632 litros (una fanega = 12 × 4,625 = 55,5 litros), en Valladolid 4,458 litros. A su vez el celemín se subdivide en cuatro cuartillos.

Cuartillo (de celemín): equivale a 1,158 litros y 1,14146 en Valladolid

En la tabla siguiente (ver Tabla VII) damos los valores existentes en diversas provincias.

Tabla VII

Provincia	Capacidad de la fanega	Provincia	Capacidad de la fanega
Ávila	56,40	Segovia	54,60
Burgos	54,34	Soria	55,14
León	44,42	Valladolid	54,79
Palencia	55,50	Zamora	55,28
Salamanca	54,58		

Tabla VIII
Áridos

	Cahiz	Carga	Fanega	Cuartilla	Celemín	Cuartillo	Litros Cast.	Litros Vall.
Cahiz	1	3	12	48	144	576	666	657,48
Carga		1	4	16	48	192	222	219,16
Fanega			1	4	12	48	55,58	54,79
Cuartilla				1	3	12	13,875	13,697
Celemín					1	4	4,632	4,5658
Cuartillo						1	1,158	1,14146

Tabla IX
Líquidos

	Bota	Moyo	Cántara	Cuartilla	Azumbre	Cuartillo	Copa	Litros Cast.	Litros Vall.
Bota	1	2	32	128	256	1.024	4.096	516,16	500,48
Moyo		1	16	64	128	512	2.048	258,08	250,24
Cántara			1	4	8	32	128	16,137	15,64
Cuartilla				1	2	8	32	4,033	3,91
Azumbre					1	4	16	2,017	1,955
Cuartillo						1	4	0,504	0,4887
Copa							1	0,126	0,1221

3.2. Medida de capacidad para líquidos:

Parte como unidad fundamental de la cántara y por dobles o mitades o sus múltiplos (2, 4, 8, 16, 32...) se obtienen los demás; evidentemente el sistema de base dos es el permite una más sencillo subdividsión (ver Tabla IX).

Tabla X
Aceites

	Arroba	Libra	Cuarterón	Onza	Litros
Arroba	1	250	1.000	4.000	125,63
Libra		1	4	16	0,5025
Cuarterón			1	4	0,12563
Onza				1	0,031417

Bota: Equivalente a 32 cántaras y en función del valor de ésta equivale a 516,16 ó 500,48 litros.
Moyo: Es igual a media bota y equivale a 16 cántaras.
Cántara: Es la unidad fundamental y equivale en la mayor parte de Castilla a 16,137 litros, mientras que en Valladolid eran 15,64 litros; se divide en ocho azumbres.
Cuartilla (de cántara): cuarta parte de la cántara y en Castilla es 4,033 litros.
Azumbre: Octava parte de la cántara y compuesta a su vez de cuatro cuartillos. Equivale, en Castilla a 2,017 litros y en Valladolid a 1,955 litros.
Cuartillo (de azumbre): Cuarta parte del azumbre y equivale a 0,504 litros y 0,4877 en Valladolid.
Copa: Es la cuarta parte de un cuartillo y equivale a 0,126 y 1,1221 respectivamente.

3.3. Medida de capacidad para aceites (Tabla X):

Arroba: Tenía 250 libras de aceite y.equivalía a 125,63 litros.
Libra: Estaba formada por cuatro cuarterones y equivalía a 0,5025 litros.
Cuarterón: Milésima parte de la arroba y equivalía 0,12563 litros.
Onza: Es la cuarta parte de un cuarterón y equivale por tanto a 0,031417 litros.

4. Medida de pesos (Tabla XI):

Quintal: Peso que estaba formado por 100 libras o cuatro arrobas y que pesaba por tanto 46 kg.
Arroba: equivalente a 25 libras y 11,502 kgs. (En Aragón eran 36 libras y 12,5 kg.)
Cuartilla (de arroba): cuarta parte de la arroba y por tanto 2,875 kgs.

Tabla XI
Peso

	Quintal	Arroba	Libra	Marco	Onza	Castella	Dracma	Adarme	Escrúpulo	Tomín	Quilate	Grano	Gramo
Quintal	1	4	100	200	1.600	10.000	12.800	25.600	38.400	76.800	307.200	921.600	46.009
Arroba		1	25	50	400	2.500	3.200	6.400	9.600	19.200	56.000	230.400	11.502
Libra			1	2	16	100	128	256	384	768	2.240	9.216	460
Marco				1	8	50	64	128	192	384	1.120	4.608	230
Onza					1	25/4	8	16	24	48	140	576	28,756
Castellano						1	4/3	8/3	4	8	70/3	96	4,6
Dracma							1	2	3	6	35/2	72	3,594
Adarme								1	1,5	3	35/4	36	1,797
Escrúpulo									1	2	35/6	24	1,198
Tomín										1	35/12	12	0,599
Quilate											1	144/35	0,205
Grano												1	0,0499

Libra: en Castilla tenía 16 onzas y equivalía por tanto a 460 gramos. (En Aragón tenía 12 onzas, 17 en Vascongadas y 20 en Galicia.)

Marco (de oro o plata): equivalía a media libra y por tanto a 230 gramos. El de oro tenía 50 castellanos y el de plata ocho onzas.

Cuarterón: cuarta parte de la libra e igual a 115 gr; medida de peso muy utilizada por Tabacalera Española durante una época.

Onza: tenía 16 adarmes y equivalía a 28,756 gramos.

Onza de plata: octava parte del marco de plata y equivalía a 28,75 gramos.

Castellano: equivale a ocho tomines y por tanto a 4,6 gramos.

Dracma de plata: octava parte de la onza; se dividía en tres escrúpulos y equivalía 3,594 gramos.

Adarme: se divide en tres tomines y equivale a 1,797 gramos.

Escrúpulo: se componía de 24 granos y equivalía a la tercera parte del dracma de plata y pesaba por tanto 1,198 gramos.

Tomín: tercera parte del adarme y octava del castellano. Se divide en 12 granos y equivale a 0,596 gramos.

Quilate: un ciento cuarentavo de la onza lo que equivale a 0,205 gramos.

Grano: doceava parte del tomín y que equivale a 0,0497 gramos.

Bibliografía

[1] Simón Aguilar y Claramunt (1904): *Nociones de Aritmética,* aplicada al sistema métrico decimal, Librería de Matías Real, Valencia.

[2] J. Gozález Torices y G. Díez Barrio (1991): *Aperos de madera,* Junta de Castilla y León, Valladolid.

[3] José Melgar (1854): *Sistema decimal de Pesas y Medidas,* acompañado de tablas de correspondencia de las de este sistema con las usadas en esta provincia (Valladolid), con especialidad las agrarias de cada pueblo, Imprenta de Don José Melgar y Compañía, Valladolid.

[4] E. Sastre y M. Rollén (1989): *Palabras para un paisaje,* Diputación provincial, Valladolid.

[5] José Mariano Vallejo (1855): *Compedio de Matemáticas puras y mixtas,* Imprenta de los herederos del autor, Madrid.

Problemas propuestos

Problemas propuestos
en la XXXVIII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMÁTICAS
celebrada en Mar de Plata (Argentina) los días 24-25 de julio de 1997

Problema nº 1:

En el plano, los puntos de coordenadas enteras son los vértices de cuadrados unitarios. Los cuadrados se colorean alternadamente de blanco y negro (como los del tablero de ajedrez).

Para cada par de enteros positivos m y n, se considera un triángulo rectángulo cuyos vértices tienen coordenadas enteras y cuyos catetos, de longitudes m y n, están sobre los lados de los cuadrados.

Sean S_1 el área total de la región del triángulo y S_2 el área total de su región blanca. Sea

$$f(m, n) = |S_1 - S_2|.$$

(*a*) Calcular $f(m, n)$ para todos los enteros positivos m y n que son, o bien ambos pares, o bien ambos impares.

(*b*) Probar que $f(m, n) \leq 1/2 \text{ máx}\{m, n\}$ para todo m y n.

(*c*) Demostrar que no existe ninguna constante C tal que $f(m, n) < C$ para todo m y n.

Problema n.° 2

El ángulo A es el menor de los ángulos del triángulo ABC.

Los puntos B y C dividen a la circunferencia circunscrita del triángulo en dos arcos. Sea U un punto interior del arco BC que no contiene a A.

Las mediatrices de AB y AC cortan a la recta AU en V y W, respectivamente. Las rectas BV y CW se cortan en T.

Demostrar que

$$AU = TB + TC.$$

Problema n.° 3

Sean $x_1, x_2, \ldots x_n$ números reales que verifican las condiciones:

$$|x_1 + x_2 + \ldots x_n| = 1$$

y

$$|x_i| \leq \frac{n+1}{2} \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Demostrar que existe una reordenación (o permutación) $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tal que

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leq \frac{n+1}{2}.$$

Problema n.° 4

Una matriz $n \times n$ (es decir, un tablero cuadrado de n filas y n columnas) se rellena con numeros del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$. Tal tablero se llama *matriz de plata* si, para cada $i = 1, \ldots, n$, la i-ésima fila y la i-ésima columna juntas contienen todos los números del conjunto S. Demostrar que:

(*a*) No existe ninguna matriz de plata para $n = 1997$;

(*b*) Existen matrices de plata para infinitos valores de n.

Problema n.° 5

Determinar todas las parejas (a, b) de enteros $a \geq 1$ y $b \geq 1$ que satisfacen la ecuación

$$a^{b^2} = b^a.$$

Problema n.° 6

Para cada entero positivo n, sea $f(n)$ el número de formas en que se puede representar a n como suma de potencias de 2 con exponentes enteros no negativos.

Las representaciones que difieren únicamente en el orden de sus sumandos se consideran iguales. Por ejemplo $f(4) = 4$ porque 4 puede ser representado en las cuatro siguientes formas: $4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1$.

Probar que, para todo entero $n \geq 3$,

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$

Problemas resueltos

Problema 13° (BOLETÍN N.° 31)

Si b, c ∈ R⁺, probar las desigualdades:

$$(1)\ \frac{1}{2} \le \sqrt{\frac{b^6+c^6}{(b^2+c^2)^3}},\quad (2)\ bc \le \sqrt{\frac{b^6+c^6}{b^2+c^2}},\quad (3)\ \frac{1}{2}bc \le \sqrt{\frac{b^6+c^6}{(b^2+c^2)^2}}$$

con la igualdad si y sólo si b = c.

Se sugiere un razonamiento algebraico para (1) y uno geométrico para (2).

Solución:

$$0 \le (b^2+c^2)(b^2-c^2)^2 = (b^4-c^4)(b^2-c^2) = b^6 - b^4c^2 - b^2c^4 + c^6$$

de donde concluimos que $\mathbf{b^4c^2 + b^2c^4 \le b^6 + c^6}$ (*)

Y resulta que $b^2c^2(b^2+c^2) \le b^6 + c^6$. Por tanto

$$b^2c^2 \le \frac{b^6+c^6}{b^2+c^2} \Rightarrow \mathbf{bc} \le \sqrt{\frac{\mathbf{b^6+c^6}}{\mathbf{b^2+c^2}}}\quad \mathbf{(2)}$$

De (*) deducimos $3b^4c^2 + 3b^2c^4 \le 3(b^6+c^6) \Rightarrow b^6 + 3b^4c^2 + 3b^2c^4 + c^6 \le 4(b^6+c^6) \Rightarrow (b^2 + c^2)^3 \le 4(b^6+c^6)$. Por tanto

$$\frac{1}{4} \le \frac{b^6+c^6}{(b^2+c^2)^3} \Rightarrow \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \le \sqrt{\frac{\mathbf{b^6+c^6}}{\mathbf{(b^2+c^2)^3}}}\quad \mathbf{(1)}$$

De (1) y (2) se deduce (3). Y es obvio que la igualdad ocurre si y sólo si b = c.

Jesús Granda (Madrid)

Problema 1° (BOLETÍN N.° 33)

Demostrar que el producto de 3 números naturales consecutivos no puede ser el cubo de un número natural.

Solución:

$$(1)\quad \forall x \in R,\ x > 1, \text{ se tiene que } x^3 - x > (x-1)^3$$

$$x^3 - x > (x-1)^3 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 > 0 \Leftrightarrow 3(x-1)\left(x - \frac{1}{3}\right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$$

$$(2)\quad f(x) = x^3 \text{ es creciente } \forall x \in R$$

Cualquier producto de tres números naturales consecutivos se escribe de la forma:

$$(k-1)\cdot k \cdot (k+1) \qquad k \in N$$

- Si $k = 1 \Rightarrow (k-1)\cdot k\cdot(k+1) = 0$ y no puede ser el cubo de un número natural
- Sea $k \in N$, $k > 1 \Rightarrow (k-1)\cdot k\cdot(k+1) = k^3 - k$

Supongamos que $k^3 - k = p^3$ con $p \in N \Rightarrow p^3 < k^3 \Rightarrow$ Por (2): $p < k$ $(p \le k-1)$

Ahora bien:

Por (1): $k^3 - k > (k-1)^3$

Por (2): $(k-1)^3 \ge p^3$

De donde resulta que $k^3 - k > p^3$. **Contradicción**

Jesús Granda (Madrid)

Problema 11° (BOLETÍN N.° 33)

Dados dos números reales positivos x_1 y x_2, se considera la sucesión $\{x_n\}$, dada por $x_{n+2} = 2/(x_{n+1} + x_n)$, $(n \ge 1)$. Demuestra que dicha sucesión es acotada.

Solución:

$$\text{Sea } a = \text{mín}\left\{x_1, x_2, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right\} \Rightarrow \text{máx}\left\{x_1, x_2, \frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right\} = \frac{1}{a}$$

$$\text{Obviamente: } a \le x_1 \le \frac{1}{a};\qquad a \le x_2 \le \frac{1}{a}$$

Sea $n \in N$ y supongamos $a \le x_m \le \frac{1}{a} \quad \forall m \le n+1$

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+2} = \dfrac{2}{x_{n+1}+x_n} \le \dfrac{2}{a+a} = \dfrac{1}{a} \\ x_{n+2} = \dfrac{2}{x_{n+1}+x_n} \ge \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{a}} = a \end{array}\right\} \Rightarrow a \le x_{n+2} \le \frac{1}{a}$$

Jesús Granda (Madrid)

Problema 9° (BOLETÍN N.° 35)

Sea $N^* = \{1, 2, 3, ...\}$. Halle todas las funciones $f : N^* \to N^*$ tales que:

(i) si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.
(ii) $f(yf(x)) = x^2f(xy)$, para todos x, y en N^*

Solución:

Sea $n \in N^*$; de la condición (ii) tenemos

$$f(f(n)) = n^2f(n); \quad f(nf(n)) = n^2f(n^2); \quad f(n^2f(n)) = f[f(f(n))] = [f(n)]^2f(f(n))$$
$$f(n^2f(n)) = n^2f(n^3)$$

De donde:

$$f(n^3) = \frac{[f(n)]^2f(f(n))}{n^2}$$

Supongamos $f(n) < n^2$. Entonces:

$$f(n^3) < f(n) \cdot f(f(n))$$

y como $n^3 > nf(n)$; $f(n^2) > f(f(n))$, la condición (i) implica $f(n^3) > f(nf(n)) = n^2f(n^2) > n^2f(f(n))$. En resumidas cuentas:

$$f(n) \cdot f(f(n)) > n^2f(f(n)) \Rightarrow f(n) > n^2. \text{ Contradicción.}$$

Supongamos $f(n) > n^2$. Entonces:

$$f(n^3) > f(n) \cdot f(f(n))$$

y como $n^3 < nf(n)$; $f(n^2) < f(f(n))$, la condición (i) implica $f(n^3) < f(nf(n)) = n^2f(n^2) < n^2f(f(n))$. En resumidas cuentas:

$$f(n) \cdot f(f(n)) < n^2f(f(n)) \Rightarrow f(n) < n^2. \text{ Contradicción.}$$

Conclusión: La única función que cumple las condiciones (i) y (ii) del problema es:

$$f(n) = n^2 \quad \forall\, n \in N^*$$

Jesús Granda (Madrid)

Problema 4° (BOLETÍN N.° 41)

Encontrar el valor máximo de x_0 para el cual existe una sucesión de números reales positivos $x_0, x_1, \ldots, x_{1995}$ que cumple las condiciones:

(i) $x_0 = x_{1995}$

(ii) $x_{i-1} + \dfrac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \dfrac{1}{x_i}$ para $1 \le i \le 1995$

Solución:

$$x_{i-1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i} \Rightarrow x_{i-1} - 2x_i = \frac{1}{x_i} - \frac{2}{x_{i-1}} \Rightarrow x_{i-1} - 2x_i = \frac{x_{i-1} - 2x_i}{x_ix_{i-1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_{i-1} - 2x_i = 0 \quad ó \quad x_ix_{i-1} = 1 \ (1 \le i \le 1995)$$

– Si $x_{i-1} - 2x_i = 0$

$$x_i = \frac{x_{i-1}}{2} \Rightarrow x_i = \frac{x_0}{2^i} \quad 1 \le i \le 1995 \Rightarrow x_{1995} = \frac{x_0}{2^{1995}}$$

$$\text{como } x_{1995} = x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{x_0}{2^{1995}} \Rightarrow x_0 = 0 \text{ absurdo}$$

– Si $x_ix_{i-1} = 1$.

$$x_i = \frac{1}{x_{i-1}} \Rightarrow \begin{cases} x_i = \dfrac{1}{x_0} & \text{si i impar} \\ x_i = x_0 & \text{si i par} \end{cases} \quad (1 \le i \le 1995) \Rightarrow x_{1995} = \frac{1}{x_0}$$

$$\text{como } x_{1995} = x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{1}{x_0} \Rightarrow x_0 = \pm 1 \Rightarrow \mathbf{x_0 = 1}$$

$x_0 = 1$ es el máximo valor de x_0 que cumple las condiciones del problema.

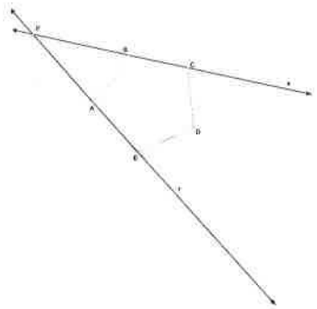
Jesús Granda (Madrid)

Problema 8° (BOLETÍN N.° 44)

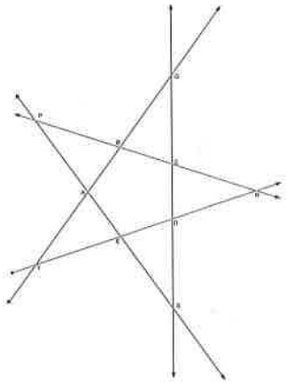
Cada cara de un dodecaedro nos da un punto hallando la intersección de los cinco planos que contienen a sus caras contiguas. Uniendo adecuadamente estos doce puntos obtenemos un icosaedro. Halla la razón entre las aristas de dichos dodecaedro e icosaedro.

Solución:

Consideramos una de las caras del dodecaedro y el plano que la contiene. La intersección de ese plano con el que contiene la cara contigua del dodecaedro en la arista BC es la recta *s* que contiene a la arista. La recta *r* es la intersección del mismo plano con el que contiene la cara contigua en la arista AE. Por lo tanto el punto P (intersección de *r* y *s*) es la intersección de los tres planos que contienen respectivamente a la cara considerada y a las caras contiguas en las aristas BC y AE.



Si consideramos ahora la cara contigua en la arista AB y buscamos el vértice del icosaedro asociado a esa cara, como que esos tres planos son tres de los cinco que contienen las caras contiguas, el punto *P* es el vértice buscado.



Repitiendo este proceso hallamos los cinco vértices, asociados a las cinco caras contiguas a nuestra cara inicial, que se encuentran en el plano. Si hacemos lo mismo con la cara opuesta a la inicial tenemos otros cinco vértices contenidos en un plano paralelo. Para conseguir los dos que nos faltan del icosaedro tendríamos que hallar los asociados a las dos caras consideradas, que se saldrían de estos planos. Por tanto los segmentos PQ, QR, RS, ST y TP son aristas del icosaedro así construido.

Con este razonamiento pasamos a considerar el problema como un problema de resolución de triángulos en el plano. Tenemos el siguiente esquema:

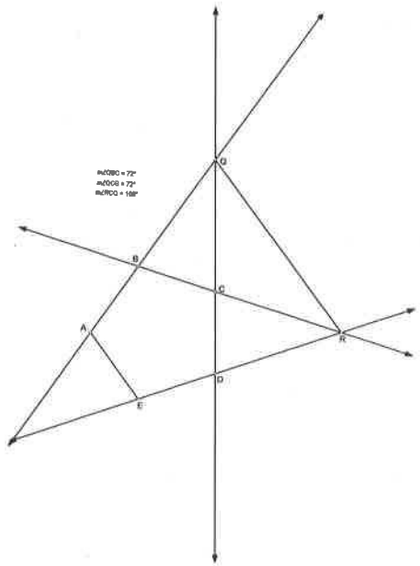
Triángulo QBC del que sabemos los tres ángulos. Si llamamos *d* a la longitud de la arista BC, la longitud del segmento QC es:

$$\mathbf{BC = d}$$

$$\frac{BC}{\text{sen } BQC} = \frac{QC}{\text{sen } QBC}$$

$$\frac{d}{\text{sen } 36°} = \frac{QC}{\text{sen } 72°}$$

$$\mathbf{QC = \left(\frac{sen\ 72°}{sen\ 36°}\right) d = CR}$$



Triángulo QCR

$$\frac{QR}{\text{sen } QCR} = \frac{QC}{\text{sen } QRC}$$

$$\frac{QR}{\text{sen } 108°} = \left(\frac{\text{sen } 72°}{\text{sen } 36°}\right)\frac{d}{\text{sen } 36°}$$

$$\mathbf{QR = \left(\frac{sen\ 108° sen\ 72°}{sen^2\ 36°}\right) d}$$

Por lo tanto la razón entre las aristas del icosaedro y el dodecaedro será

$$\mathbf{r = \frac{QR}{BC} = \left(\frac{sen\ 72°}{sen\ 36°}\right)^2}$$

Juan A. Martínez Calvete

Problema 7° (BOLETÍN N.° 45)

Demostrar que todo número complejo no nulo se puede escribir como suma de otros dos cuya diferencia y cuyo cociente sean imaginarios puros.

Solución:

Llamemos a nuestro número complejo $a + bi$. Es evidente que se puede escribir como suma de otros dos complejos que son $a/2 + di$ y $a/2+(b - d)i$. Además, por construcción la diferencia de estos dos números es $-2di$, luego imaginario puro. Veamos cuánto vale el cociente de estos dos números:

$$\frac{a/2+(b-d)i}{a/2+di}=\frac{[a/2+(b-d)i]\,(a/2-di)}{(a/2+di)\,(a/2-di)}$$

El denominador es $a^2/4+d^2$ que es un número real así que para que el cociente sea imaginario puro, debe serlo el numerador. Una vez operado éste obtenemos: $a^2/4 - adi/2 + bai/2 - dai/2 - (b - d)di^2$ que es igual a $a^2/4 + (b - d)d + (ab/2 - ad)i$. Por tanto, para que el cociente sea imaginario puro lo que debe pasar es $a^2/4 + (b - d)d = 0$ e interpretando esta relación como una ecuación de segundo grado en d y resolviendo obtenemos que:

$$d=\frac{b\pm\sqrt{b^2+a^2}}{2}$$

Así por ejemplo si nuestro número es $2 + 3i$ entonces

$$d=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

y la descomposición pedida es en los números:

$$1+\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)i \qquad y \qquad 1+\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)i$$

Alfredo Forcada

Problema 12° (BOLETÍN N.° 45)

Encontrar, razonadamente, todos los números naturales n tales que n^2 tenga solamente cifras impares.

Solución:

De entrada hay que quedarse únicamente con los n impares, puesto que si n fuera par, n^2 también lo sería y por lo tanto acabaría en cifra par. Si n tiene una sola cifra sólo son

válidos 1 y 3 porque tanto 25 como 49 y 81 contienen cifras pares. Si n tiene más de una cifra, supongamos que acaba en ab y escribamos la multiplicación de n por n de la manera tradicional:

$$\begin{array}{r} ...a\,b \\ ...a\,b \\ \hline ...c\,d \\ ...e\,f \\ \hline ...(c{+}f)\,d \end{array}$$

Como b tiene que ser impar, $b \times b$ también lo es; así que d termina en cifra impar. Además si b es 1 ó 3 no me llevo nada y si es 5, 7 ó 9 me llevo 2, 4 ú 8 respectivamente que en cualquier caso es par.

En el siguiente lugar c es la última cifra de ($b \times a$ más lo que me he llevado de $b \times b$) y f es la última cifra de $a \times b$. Si $b \times a$ es par, al sumar lo que me he llevado (que también es par) obtengo par y c es par. Como además f es par, la cifra de las decenas sale par. Si $b \times a$ es impar, al sumar lo que me he llevado obtengo impar y c es impar. Como además f es impar, la cifra de las decenas sale par. Luego en cualquier caso si n es impar de más de una cifra, n^2 tiene como cifra de las decenas una cifra par y por lo tanto no es válido, así que los únicos n que cumplen que n^2 tiene todas las cifras impares son 1 y 3.

Alfredo Forcada

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.°	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										
		1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°	9.°	10.°	
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	–	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	–	–	–	–	–	–	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	–	–	–	–	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	–	–	–	–	–	–	–	–	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	–	–	–	–	–	–	–	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	–	–	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	–	–	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	–	–	–	–	–	–	–	–	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	–	–	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	–	–	–	–	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	46	XX	33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	–	–	–	–	–	–	
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	XX	XX	XX	35	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	47	35	34	–	–	–	–	–	
32	OMI-92-MOSC'U/	35	XX	XX	XX	XX	XX	38	35	46	38	
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	–	–	–	–	–	–	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	47	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	
	/PNS	47	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	–	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	–	–	–	–	
35	OMI-93-Turq./	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	39	
	OI-93-Méjico/PNS	XX	XX	39	39	XX	XX	–	–	–	–	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	
37	OME-f2-94/PNS	40	XX	XX	40	XX	XX	45	45	40	–	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
39	OI-94-Brasil/OME-	43	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	
	f1-94/f1-94(v)	46	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	–	–	–	–	
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
43	OME-f-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
44	OMI-96-India/	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	47	45	XX	XX	XX	–	–	–	–	
45	OI-96-Costa Rica	XX	XX	XX	XX	XX	XX	47	XX	XX	XX	
	OME-96-f1	XX	47	XX	XX	–	–	–	–	–	–	
46	OMR-96	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. PNS = Propuesta por nuestros socios.