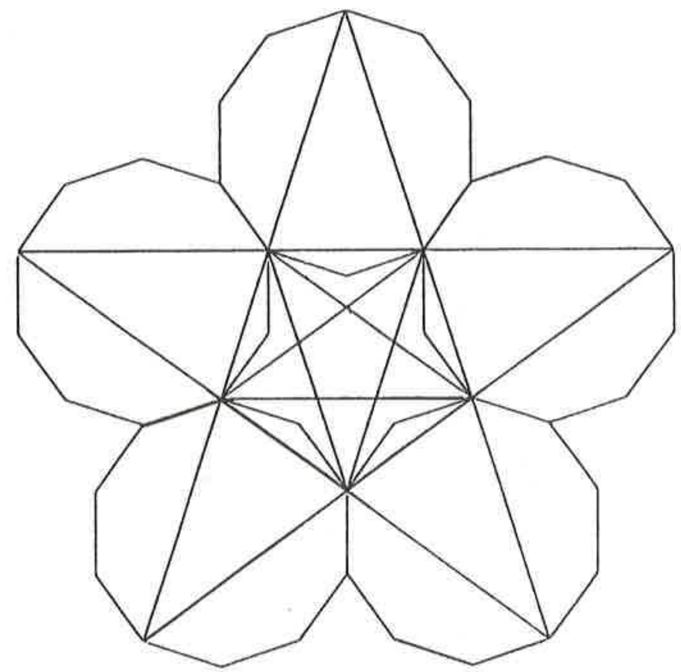
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS



BOLETIN N.° 46
JUNIO DE 1997

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura 26 del artículo titulado "El geoplano áureo", contenido en este número 46 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juán XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:
JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:
EUGENIO ROANES MACÍAS (Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ (Castilla-León)
SALVADOR HERRERO PALLARDO (Castilla-La Mancha)

Vocales:
JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE (Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO (Actividades y concursos)

Secretario:
FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:
MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:
ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:
JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

Adjunta a la presidencia:
MARÍA GASPAR ALONSO-VEGA

Acta de la Asamblea General Ordinaria de 1977 de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la U.C.M., sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día veintiseis de abril de 1997, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. José Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria de mil novecientos noventa y siete.

Se desarrolló con arreglo al siguiente

ORDEN DEL DIA

Punto primero. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior. Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad.

Punto segundo. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad. El Presidente informa sobre las actividades realizadas y a realizar:

a) Se informa que desde la Asamblea anterior se han publicado los números 43, 44 y 45 del *Boletín* siguiendo con el formato iniciado en el número 39, con la calidad y número de artículos habitual. Desde el *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* se han ido haciendo periódicamente las correspondientes recensiones de los artículos publicados en nuestro Boletín, destacándose que los comentarios han sido favorables en todos los casos.

b) Se recuerda la celebración del Congreso de Sevilla del ICMI, al que asistió D. Alberto Aizpún en representación de la Sociedad.

c) Se informa que el 22 de junio de 1996 se celebró el XIV Concurso de Resolución de problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados, última ocasión en la que se cuenta con el patrocinio de Coca-Cola. Los ejercicios tuvieron lugar en la Facultad de Matemáticas y la entrega de premios en el Edificio "Pablo Montesino". También se informa que, una vez convocado el XV Concurso, se están realizando gestiones para encontrar algún nuevo patrocinador.

d) Sobre las relaciones con Suma se destaca la progresiva mejoría observada a todos los niveles: regularidad en los envíos, formato, contenidos, etc., y se hace constar la recepción por los socios de los números pendientes de envío desde hace algunos años.

e) Se constata la participación personal de un importante número de miembros de la Sociedad en el "Concurso de primavera de resolución de problemas" que se está celebrando en estos momentos en la Facultad de Educación de la U.C.M. organizado por el Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

f) Se recuerda con pesar el fallecimiento en fechas recientes de tres socios: Pascual Ibarra, Isidoro Salas y Juan Ochoa, sentir que se quiere hacer explícito.

g) Se informa, haciendo constar el agradecimiento, del patrocinio por parte de la Comunidad Autónoma de Madrid del viaje de los concursantes a la celebración de la Olimpiada Rioplatense.

Punto tercero. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos. D. Alberto Aizpún reparte entre los asistentes la documentación relativa a los movimientos de tesorería: ingresos y gastos. A continuación explica detalladamente las gestiones realizadas con los socios cuyos recibos han sido devueltos, y con aquellos que reciben el Boletín pero a los que, por diversas razones, no se les emitía recibo, gestiones que han permitido la recuperación para la Sociedad de un apreciable número de ellos.

Punto cuarto. Elección de nuevos cargos directivos, si procede. Aunque no ha lugar al no existir ceses, el Presidente, tras exponer la conveniencia de que se le ayude en su tarea, pide autorización a la Asamblea para nombrar "Adjunta a la Presidencia" a nuestra socia Dª. María Gaspar Alonso-Vega, quien venía desarrollando una intensa labor de colaboración (enlace con Sociedades Iberoamericanas, etc.) sin una acreditación institucional. Los socios autorizan unánimemente al Presidente y agradecen a Dña. María Gaspar su desinteresada colaboración.

Punto cinco. Asuntos de trámite. No hay.

Punto seis. Ruegos y preguntas.

a) D. Eugenio Roanes recuerda la situación de aquellos socios que pertenecen simultáneamente a dos sociedades federadas, y, por tanto, pagan doblemente la cuota federativa. Se acuerda gestionar con la Federación la solución de este problema.

b) D. Javier López de Elorriaga apunta la situación actual de las transferencias a la Comunidad Autónoma de Madrid de nuevas competencias, tal como ya existe en otras comunidades limítrofes, y sugiere que la Sociedad se dirija a ella solicitando apoyo institucional, subvenciones, etc. para el mejor desarrollo de nuestras actividades.

c) D. Alberto Aizpún recuerda que la Sede de la Sociedad, tal como consta en los Estatutos, sigue siendo la E.T.S. de Ingenieros Industriales de la U.P.M., por lo que convendría dirigirnos al Ministerio del Interior para modificar el punto correspondiente de modo que conste el actual en el despacho 3517 de la Facultad de Educación.

d) D. Miguel Angel Gallardo informa de la existencia de un dominio en Internet que él gestiona, ofreciéndolo a la Sociedad para que las actividades de ésta se den a conocer más generalizadamente aún que en la actualidad. Los presentes agradecen el ofrecimiento y se inicia un animado estudio de las posibilidades, contenidos, formato, etc. de lo que puede ser incluido en dicho dominio.

Llegados a este punto, el Presidente levanta la sesión a las doce horas y cincuenta y seis minutos de la fecha arriba indicada.

El Secretario

VºBº El Presidente

XXXIII Olimpiada Matemática Española

Fase final

La Fase Nacional de la **XXXIII Olimpiada Matemática Española** se ha celebrado en **Valencia,** durante los días 7 y 8 de marzo de 1997. Como es sabido esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española,* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.*

En ella han participado los 82 seleccionados en los distritos en los que tuvo lugar la Primera Fase y además el alumno **Sergi Elizalde Torrent,** de Barcelona, que ya obtuvo la primera medalla de oro en la XXXII O.M.E., pero que todavía cumple los requisitos para participar en la próxima XII Olimpiada Matemática Iberoamericana. Concursó ya en la precedente XI, obteniendo una medalla de bronce y en la XXXVII Olimpiada Internacional de Matemáticas, en la que consiguió una mención honorífica. En esta ocasión ha confirmado su valía, obteniendo otra vez la máxima puntuación entre todos los participantes y siendo merecedor de dos menciones especiales del Tribunal por la calidad de sus soluciones a los problemas números 5 y 6.

Los alumnos ganadores de medallas de **ORO** son los siguientes:

1. **ANATOLI SEGURA VÉLEZ** (Granada),
2. **MIGUEL LOBO LÓPEZ** (Jaen),
3. **MARIO ANDRÉS MONTES GARCÍA** (Salamanca),
4. **MAX BERNSTEIN OBIOLS** (Cataluña),
5. **JOSEBA VILLATE BEJARANO** (País Vasco),
6. **XAVIER PÉREZ GIMÉNEZ** (Cataluña).

Los ganadores de las medallas de PLATA fueron:

1. **IKER ALMANDOZ GARCÍA** (Madrid),
2. **YOLANDA ANTÓN PÉREZ** (País Vasco),
3. **ALBERTO MÍNGUEZ ESPALLARGAS** (Sevilla),
4. **MIGUEL ÁNGEL INGELMO BENITO** (Salamanca),
5. **DAVID GONZÁLEZ RODRÍGUEZ** (Santiago),
6. **GERARDO GARCÍA DE BLAS** (Madrid).

Obtuvieron medalla de **BRONCE:**

1. **DIEGO JOSÉ GONZÁLEZ BARROSO** (Cádiz),
2. **PABLO ANGULO ARDOY** (Madrid),

3. **DANIEL MIQUEL IBARRA CALABUIG** (Murcia),
4. **JORGE LÓPEZ JIMÉNEZ** (Valencia),
5. **ANTONIO MANUEL GUTIÉRREZ FERNÁNDEZ** (Sevilla),
6. **FRANCISCO PÉREZ VARGAS** (Cádiz).

Como se ve, de los nueve seleccionados en los distritos de Madrid, dos han obtenido plata y otro bronce. El nombre de éste ha aparecido repetidas veces en nuestro Boletín, como ganador de premios en nuestros **Concursos de Resolución de Problemas** (ver el nº 45).

Damos a continuación los enunciados de los seis problemas propuestos en la Fase Nacional de esta Olimpiada. No los incluimos en nuestra sección de **PROBLEMAS PROPUESTOS,** ya que los organizadores de la Olimpiada Matemática Española publican una memoria en la que aparecen las soluciones. Junto a cada enunciado damos las medias de las calificaciones obtenidas por todos los seleccionados de la primera fase, por los que recibieron medallas y por los que obtuvieron medalla de oro, así como el número de alumnos cuyas calificaciones fueron superiores a 8 en ese problema. Como puede apreciarse, algunos problemas resultaron muy difíciles para los alumnos, especialmente el 2º y el 5º. No obstante, el Sr. Elizalde obtuvo calificaciones máximas (no contabilizadas para las medias) en todos, excepto en el 2º.

Problemas propuestos en la Fase Nacional de la XXXIII Olimpiada Matemática Española

(Valencia, marzo de 1997)

Problema 1.

Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una prograsión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1 y que la suma de los términos de lugar par vale $+1$.

Media de las calificaciones obtenidas:

- *Por todos: 3,1.*
- *Por los 18 premiados con medallas: 6,2.*
- *Por los 6 premiados con medalla de oro: 7,3.*

Número de notas de 9 ó 10: 8.

Problema 2.

Un cuadrado de lado 5 se divide en 25 cuadrados unidad por rectas paralelas a los lados. Sea A el conjunto de los 16 puntos interiores, que son vértices de los cuadrados unidad, pero que no están en los lados del cuadrado inicial. ¿Cuál es el mayor número de puntos de A que es posible elegir de manera que TRES cualesquiera de ellos NO sean vértices de un triángulo rectángulo isósceles?

Media de las calificaciones obtenidas:

- *Por todos: 0,9.*
- *Por los 18 premiados con medallas: 1,8.*
- *Por los 6 premiados con medalla de oro: 2,3.*

No hubo notas superiores a 7.

Problema 3.

Se consideran las parábolas $y = x^2 + px + q$ que cortan a los ejes de coordenadas en tres puntos distintos, por los que se traza una circunferencia. Demostrar que todas las circunferencias trazadas al variar p y q en R pasan por un punto fijo, que se determinará.

Media de las calificaciones obtenidas:

- *Por todos: 2,7.*
- *Por los 18 premiados con medallas: 7,0.*
- *Por los 6 premiados con medalla de oro: 8,5.*

Número de notas de 9 ó 10: 10.

Problema 4.

Sea p un número primo. Determinar todos los enteros $k \in Z$ tales que $\sqrt{k^2 - pk}$ es entero postivo.

Media de las calificaciones obtenidas:

- *Por todos: 1,9.*
- *Por los 18 premiados con medallas: 3,2.*
- *Por los 6 premiados con medalla de oro: 4,0.*

Número de notas de 9 ó 10: 2.

Problema 5.

Demostrar que en un cuadrilátero convexo de área unidad, la suma de las longitudes de todos los lados y diagonales no es menor que $2(2 + \sqrt{2})$.

Media de las calificaciones obtenidas:

- *Por todos: 0,8.*
- *Por los 18 premiados con medallas: 0,9.*
- *Por los 6 premiados con medalla de oro: 0,9.*

No hubo notas superiores a 5.

Problema 6.

Para dar una vuelta completa en un coche a un circuito circular, la cantidad exacta de gasolina está distribuida en depósitos fijos situados en n puntos distintos cualesquiera del circuito. Inicialmente el depósito el coche está vacío. Demostrar que cualquiera que sea la distribución del combustible en los depósitos, siempre existe un punto de partida de manera que se puede dar la vuelta completa.

Aclaraciones:

- Se supone el consumo uniforme y proporcional a la distancia.
- El depósito del coche tiene capacidad suficiente para contener toda la gasolina.

Media de las calificaciones obtenidas:

- *Por todos: 1,3.*
- *Por los 18 premiados con medallas: 2,6.*
- *Por los 6 premiados con medalla de oro: 5,3.*

Número de notas de 9 ó 10: 2.

Comentarios sobre la organización

Esta 33 fase final de la Olimpiada Matemática Española a pesar de las dificultades que ello representaba, ha igualado, si no mejorado, en organización a la de anteriores ediciones desde que esta fase se celebra fuera de Madrid. La Escuela de Arquitectura Técnica de la Universidad Politécnica de Valencia, que celebra a lo largo de este curso su 25 aniversario, se hizo cargo de la organización de esta edición de nuestra Olimpiada. Vaya por delante nuestra más efusiva felicitación tanto a Teófilo Navarro como a Juana Cerdán, Presidente y Secretaria del Comité Organizador, por la perfección que han alcanzado en la organización. El alojamiento en la residencia "Tiempo libre El Puig" fue de lo más acogedor que se puede ofrecer, con unas instalaciones perfectas para nuestros olímpicos. El estar pegadita al mar es un valor añadido y muy de agradecer por los que llegamos de tierras adentro.

Las pruebas se llevaron a cabo en las instalaciones de la Escuela antes citada, estando las aulas y salas de reunión que pusieron a nuestra disposición, perfectamente equipadas para desarrollar nuestra labor de selección y corrección de problemas con total comodidad. Los actos sociales a los que fuimos invitados fueron del agrado de toda la comunidad olímpica, especialmente la "mascletá", y sobre todo, el bocadillo de tortilla que nos fue ofrecido en el I.B. Luis Vives: inolvidable por unanimidad. Los acompañantes de los participantes gozaron de diversas excursiones y visitas turísticas, todas ellas patrocinadas por el Comité Organizador. No sería justo terminar esta breve reseña sin mostrar nuestro agradecimiento a todos los restantes miembros del Comité Organizador, a los voluntarios, al Director de la Escuela, al Rector de la Universidad así como a todas las autoridades que de un modo u otro participaron en hacer cuanto de agradable ha resultado este evento. Del mismo modo, nuestro recuerdo para el Profesor Aroca, que continua destilando día a día comentarios cada vez más agudos, charlas más interesantes y una carga de humanidad y saber matemático que hace que nos sintamos orgullosos de su amistad.

Olimpiadas Matemáticas Argentinas

En el número 45 de este Boletín fueron comentadas la V Olimpiada Matemática Rioplatense y la II Olimpiada de Mayo, celebradas en 1996. En este número 46 se incluyen los enunciados de los problemas propuestos en ellas. Los de niveles inferiores son sencillos en general, pero pueden ser de interés en clases de bachillerato, por lo que se incluyen a continuación. Los del Tercer Nivel se incluyen más adelante, en la sección de problemas propuestos.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA V OLIMPIADA MATEMÁTICA RIOPLATENSE

NIVEL A

En cada nivel se propusieron tres problemas cada día en sesiones de tres horas y media.

Problema 1.

En el siguiente cuadro las letras representan números. Cada letra tiene siempre el mismo valor, independientemente de su posición en el cuadro. Los números que están a la derecha del cuadro corresponden a la suma de cada fila. Los números que están debajo del cuadro corresponden a la suma de cada columna. Encontrar el valor de N.

U	Z	T	U	Y	–3
X	X	X	X	X	–10
V	U	T	Z	Y	–6
Z	Y	Z	Y	X	–6
N	V	T	W	Y	0
W	U	Y	V	X	6
–9	–7	–7	1	3	

Problema 2.

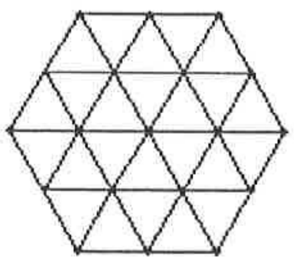
Se escriben 2000 dígitos, uno después de otro, de modo que todo par de dígitos consecutivos forme un número de dos cifras que sea el producto de cuatro primos (no necesariamente distintos), es decir, que el primer y segundo dígitos formen un número de dos cifras que sea el producto de cuatro primos, el segundo y tercer dígitos formen un número de dos cifras que sea el producto de cuatro primos y así sucesivamente. ¿Qué dígito ocupa la posición 1996?

Nota: El número 1 no es primo.

Problema 3.

Considere piezas como la que se muestra en la gráfica, donde AB = 1, BC = 1 y el ángulo ABC mide 120°.

¿Es posible armar, con 21 de estas piezas, la siguiente figura formada por triángulos equiláteros de lado 1? Si tu respuesta es afirmativa indica cómo armar la figura. Si tu respuesta es negativa, explica por qué.



Problema 4.

Los equipos nacionales de Alemania e Italia llevan jugados 13 partidos entre sí, jugando alternadamente en uno y otro país. En 7 partidos el ganador fue el equipo local. El

equipo alemán ganó 9 partidos en total. No hubo ningún empate. ¿Es posible saber, con esta información, en qué país se jugará el próximo partido? En caso afirmativo, diga en qué país será. En cualquier caso, justifique la respuesta.

Problema 5.

En una urna se colocan 900 tarjetas numeradas del 100 al 999 y se mezclan perfectamente. Le pedimos a Julia que saque una tarjeta, anote la suma de los dígitos del número que sacó y rompa la tarjeta. ¿Cuál es el menor número de veces que debemos pedirle a Julia que repita esa operación para estar seguros de que anotará al menos tres veces la misma suma?

Problema 6.

En una circunferencia de centro O, se traza una cuerda AB que no pasa por O. Se traza la recta tangente a la circunferencia en el punto B y se toma el punto C sobre esta recta de manera que el triángulo BAC sea rectángulo en A. Demuestre que la recta tangente a la circunferencia en el punto A pasa por el punto medio de BC.

Nota: Si P es un punto de una circunferencia de centro O, la recta tangente a la circunferencia en P es perpendicular al radio OP.

PRIMER NIVEL

Problema 1.

Escribir el mayor número natural que verifique simultáneamente:

- Sus dígitos son sólo 1, 2, 3 y 4 (se pueden repetir).
- Siempre que en dos posiciones distintas (*i* y *j*) figure el mismo dígito, en las dos posiciones inmediatamente a la derecha de ellas (*i + 1*, *j* + 1) figuran dígitos distintos entre sí.

Explica por qué no hay un número natural mayor que el que tú has escrito, con las condiciones anteriores.

Problema 2.

Dos polígonos regulares de lado 1 se llaman *amigos* si:

- Tienen un lado en común que los deja en semiplanos opuestos y
- Los dos lados, uno de cada polígono, que concurren en un vértice del lado común, son lados de un triángulo equilátero.

Hallar todos los pares de polígonos amigos.

Problema 3.

Ana y Celia juegan de la siguiente manera:

Ana debe colorear todos los puntos de una circunferencia en rojo y azul. Celia debe elegir tres puntos en la circunferencia coloreada que determinen un triángulo cuyos ángulos midan 30°, 50° y 100°.

Celia gana si ese triángulo tiene los tres vértices del mismo color (rojo o azul). Ana gana en caso contrario.

¿Puede Ana colorear la circunferencia de modo que Celia no pueda ganar?
En caso negativo explica por qué. En caso afirmativo muestra una coloración.

Problema 4.

Con dos pirámides iguales de base cuadrada y todas las aristas (lados) iguales se forma un octaedro regular, pegando entre si las dos bases.

En cada arista del octaedro se marcan dos puntos que la dividen en tres segmentos iguales. Los 24 puntos marcados son los vértices de un nuevo poliedro, que resulta de recortar seis pequeñas pirámides iguales, una por cada vértice del octaedro.

¿Cuántas diagonales interiores tiene el nuevo poliedro?

Nota: Llamamos diagonal interior de un poliedro a todo segmento que une dos vértices y no está contenido en ninguna cara.

Problema 5.

Una circunferencia tiene pintados de rojo tres puntos A, B, C, en el sentido de las agujas del reloj. Pintaremos de rojo otros 1996 puntos de la siguiente manera:

Recorremos la circunferencia en el sentido de las agujas del reloj, saliendo de C.

Pasamos por un punto pintado (A) y pintamos P_1 en el punto medio del arco AB; seguimos recorriendo la circunferencia en el mismo sentido, pasamos por dos puntos pintados (B y C), y pintamos P_2 en el punto medio del arco CA; a continuación pasamos por tres puntos pintados (A, P_1 y B) y pintamos P_3 en el punto medio del arco BC; y así sucesivamente hasta que, después de haber pintado P_{1995}, pasamos por 1996 puntos pintados y pintamos P_{1996} en el punto medio del arco que corresponda.

Determinar cuántos de los 1996 puntos se pintaron en cada uno de los arcos AB, BC y CA.

Problema 6.

En un rectángulo ABCD, el punto medio del lado CD es F, y E es un punto del lado BC tal que AF es bisectriz del ángulo EAD.

Demostrar que AF es perpendicular a EF.

SEGUNDO NIVEL

Problema 1.

Líneas Aéreas Rioplatenses conecta todas las ciudades del país de "La Plata" de manera no necesariamente directa. Se denomina *capacidad* de una ciudad al número de empleados de Líneas Aéreas Rioplatenses que hay en ella, y *trucha* a cada ciudad cuya capacidad es inferior a la parte entera del promedio de las capacidades de las ciudades con las que está conectada directamente.

Para mejorar el servicio, Líneas Aéreas Rioplatenses contrata un inspector cuyo trabajo consiste en elegir cada día una ciudad trucha y aumentar su capacidad para que sea igual a la parte entera arriba indicada.

El inspector sabe que conservará su empleo mientras queden ciudades *truchas*. Demostrar que algún día será despedido.

Problema 2.

Sea z un número entero. Se define la sucesión x_n de la siguiente manera:

$$x_1 = z$$
$$x_{n+1} = \frac{x_n + 19}{96} \quad \text{si } n \geq 1$$

Encontrar el menor entero positivo z para el cual $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{1996}$ son todos números enteros.

Problema 3.

Un círculo S se encuentra inscrito en un cuadrilátero $ABCD$, con el lado AB paralelo al lado CD. Sean M y N los puntos de tangencia de S con AB y CD, respectivamente. Si X es el punto de intersección de AN con DM e Y el de BN con MC, encontrar el cuadrilátero $ABCD$ para el cual el área del cuadrilátero $MXNY$ es máxima.

Nota: Los lados del cuadrilátero $ABCD$ son AB, BC, CD y DA.

Problema 4.

Determinar la cifra de las unidades del número $\dfrac{10^{1996}}{10^{499} + 1997}$

Problema 5.

En un tablero cuadrado que tiene un número par de casillas y está pintado como un tablero de ajedrez, se coloca un número en todas las casillas de acuerdo con las siguientes reglas:

– En cada casilla blanca se escribe 0 ó 1, de modo que haya la misma cantidad de casillas blancas con 0 que con 1.

– En cada casilla negra se escribe la suma de los números que hay en las casillas blancas vecinas.

Si se ponen los números en el tablero de modo que la suma de todos los números escritos sea la menor posible, la suma es m. Si se ponen los números en el tablero de modo que la suma de todos los números escritos sea la mayor posible, la suma es m + 1996. Hallar las dimensiones del tablero.

Problema 6.

Dado un tetraedro $ABCD$, determinar todos los puntos interiores P tales que el producto de las distancias de P a cada una de las caras de $ABCD$ sea máximo.

PROBLEMAS PROPUESTOS EN LA II OLIMPIADA DE MAYO SEGUNDO NIVEL

Problema 1.

En un rectángulo $ABCD$, AC es una diagonal.

Una recta r se mueve paralelamente a AB, formando dos rectángulos opuestos por el vértice, interiores al rectángulo

Prueba que la suma de las áreas de dichos triángulos es mínima cuando r pasa por el punto medio del segmento AD.

Problema 2.

Uniendo $15^3 = 3375$ cubitos de 1 cm³ se pueden construir cuerpos de 3375 cm³ de volumen. Indica cómo se construyen dos cuerpos A y B con 3375 cubitos cada uno y tales que la superficie de B sea 10 veces la superficie de A.

Problema 3.

Natalia y Marcela cuentan de 1 en 1 empezando juntas en 1, pero la velocidad de Marcela es triple de la de Natalia (cuando Natalia dice su segundo número, Marcela dice el cuarto número). Cuando la diferencia de los números que dicen al unísono es alguno de los múltiplos de 29, entre 500 y 600, Natalia sigue contando normalmente y Marcela empieza a contar en forma descendente de tal forma que, en un momento, las dos dicen al unísono el mismo número. ¿Cual es ese número?

Problema 4.

Sea $ABCD$ un cuadrado y F un punto cualquiera del lado BC. Se traza por B la perpendicular a la recta DF que corta a la recta DC en Q. ¿Cuánto mide el ángulo FQC?

Problema 5.

Se tiene una cuadrícula de 10×10. Un "movimiento" en la cuadrícula consiste en avanzar 7 cuadros a la derecha y 3 cuadros hacia abajo. En caso de salirse por un renglón, se continúa por el principio (izquierda) del mismo renglón, y en caso de terminarse una columna se continúa por el principio de la misma columna (arriba). ¿Dónde se debe empezar para que después de 1996 movimientos terminemos en una esquina?

I Concurso de Primavera de Problemas de Matemáticas
(86 CENTROS, 9.700 PARTICIPANTES: UN CAMINO ACERTADO)

Cuando a finales de enero del presente curso nos reunimos por primera vez en la Facultad de Matemáticas de la U.C.M. los diez o doce profesores que pusimos en marcha lo que luego dimos en llamar el 1er Concurso de Primavera de Matemáticas, ninguno de nosotros creía que, tres meses más tarde, íbamos a juntar en la Facultad de Educación más de 1.000 alumnos provenientes de una primera fase que consiguió reunir a casi 10.000 estudiantes de la Comunidad de Madrid que cursaran hasta 4.° de ESO o equivalente.

Algunos sabíamos que, concursos de este tipo, celebrados en otros países, estaban teniendo respuestas que no eran imaginables en nuestro país. Por otra parte, en algunos de nuestros centros, en los que habíamos planteado algo parecido, habríamos observado que la respuesta de los estudiantes era muy positiva. Pero, de ahí a juntar 10.000 alumnos, había un paso.

Sea como fuere, empezamos a andar y, con el soporte del Departamento de Matemáticas de la Facultad de Educación de la U.C.M., escribimos cartas a todos los centros de la Comunidad de Madrid que impartieran enseñanza secundaria –tanto públicos como privados o concertados– en las que planteábamos lo que buscábamos: Motivar y estimular a los alumnos de las etapas de educación obligatoria , haciéndoles ver que es posible disfrutar pensando, haciendo y aprendiendo Matemáticas. La respuesta fue la que apuntaba al principio de esta crónica: 86 centros celebraron el 9 de abril, en sus aulas, la 1.ª fase del Concurso de Primavera. 10.000 estudiantes estaban participando en un concurso de matemáticas cuyo ámbito se restringía la Comunidad de Madrid.

Esto ha sido el principio. O esto ha sido sólo el principio. Pero no somos unos ingenuos y, por tanto, no nos vamos a creer que, con estos comienzos, ciertamente espectaculares, según gente ajena a la organización del Concurso, todo, a partir de ahora, va a ir sobre ruedas.

Porque, dos cosas, por lo menos, nos preocupan:

Primera: con este Concurso se pretende motivar y estimular a los alumnos de las etapas de educación obligatoria, haciéndoles ver que es posible disfrutar pensando, haciendo y aprendiendo matemáticas. Y eso no se consigue porque un día al año, en su centro , participen en el Concurso de Primavera, y un 10% de ellos, acuda, posteriormente, a la 2.ª fase. Lo que pretendemos se conseguirá si involucramos a los profesores, si los profesores pueden disponer de material con el que trabajar este tipo de pruebas que –por lo que parece– enganchan a los alumnos y si el trabajo de estos profesores en sus centros es, de alguna manera, reconocido por quien corresponda. Y si el Comité Organizador puede aportar este material, no es a él a quien corresponde hacerlo llegar a los centros. Y no es el Comité Organizador del Concurso de Primavera quien tiene que reconocer el trabajo de los profesores.

Y *segunda:* ha habido casi 100 centros participantes en la primera fase: 86, que mandaron estudiantes a la 2.ª fase y algunos que, habiendo realizado la 1.ª fase, posteriormente no enviaron alumnos. Son bastantes, pero hemos observado ausencias muy significativas.

Y ahí sí que nos gustaría que las cosas quedaran meridianamente claras. En primer lugar, este Concurso no pretende competir con la Olimpiada Matemática para alumnos de 8.ª de E.G.B. o de 2.ª de E.S.O. organizada por la Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo –de la que algunos miembros del Comité Organizador somos socios–, ni con el Concurso de Problemas de la Sociedad Puig Adam, a quien agradecemos, entre otras muchas cosas, su colaboración con la publicación en su revista de este artículo. Y no pretende competir por una razón muy simple: Porque ningún Concurso de Matemáticas, en ningún lugar del mundo, compite con ningún otro. Ninguno le resta participación a otros. Todo lo contrario, los estudiantes trabajan con más entusiasmo, si tienen más oportunidades donde participar. Y esto se consigue haciendo que las fechas de celebración no coincidan. Y es trivial no hacerlas coincidir. Eso en cuanto a algunas ausencias.

Y respecto a otras: Este Concurso no es la versión para los pequeños de la Olimpiada Matemática de COU. Este Concurso pretende una participación masiva. Y pretende eso, porque estamos convencidos que muchos de nuestros estudiantes tienen más capacidades y disfrutan con las Matemáticas más de lo que nos tienen acostumbrados en clase. Y a ellos va dirigido. Y, naturalmente que también va dirigido a los "cerebros" de la clase. Pero cuanto mayor sea la base, más alta será la pirámide. Eso ocurre, exactamente así, en otros países que obtienen resultados mucho mejores que nosotros en la Olimpiada Internacional. No quisiera, en cualquier caso, terminar este artículo sin agradecer a todos los participantes su entusiasmo y recordarles tanto a ellos, como a los que no se han animado este año pero seguro que lo harán en el futuro, que estamos abiertos a cualquier sugerencia para mejorar esto. De nosotros, los profesores de Matemáticas, depende, en gran parte, que nuestros alumnos dejen de ver nuestra asignatura como exclusiva para unos cuantos.

Joaquín Hernández Gómez
Del Comité Organizador del 1er Concurso de Primavera de Matemáticas

Recuerdo de Juan Ochoa Mélida

La muerte de nuestro querido compañero Juan Ochoa el pasado 6 de abril es una triste noticia para esta Sociedad "Puig Adam" con la que tan activamente colaboró.

Fue un hombre bueno, para decirlo con toda la sencillez y toda la profundidad que él puso siempre en su vida, quizá el rasgo más destacado de sus cualidades fue la generosa ayuda a todo el que lo necesitara.

Así lo recuerdo desde que lo conocí, hace casi medio siglo, cuando en 1951, comenzábamos ambos los estudios de Matemáticas. Bien pronto se distinguían, por su procedencia, dos tipos de alumnos entre los recién llegados a la Facultad: unos, que venían directamente del Bachillerato, y otros, con más conocimientos, por haber preparado el ingreso en las Escuelas de Ingeniería. Él pertenecía a estos últimos y yo a los primeros, y con frecuencia los unos recurríamos a los otros para que nos explicaran cualquier problema o demostración difícil. Desde entonces supe que uno de sus rasgos característicos era el de prestar la ayuda que se le solicitara, por mas molestias o esfuerzos que le costara. Y este conocimiento se ha ido confirmando a lo largo de los años.

Juan Ochoa Mélida nació el 3 de julio de 1927 en Urdiain (Navarra). Estudió como alumno libre los primeros años del Bachillerato en el Instituto de Pamplona y los últimos como alumno oficial en el "Cardenal Cisneros" de Madrid.

Hombre de gran capacidad intelectual y de trabajo, hizo la Licenciatura de Matemáticas en Madrid, en tres cursos, de 1951 a 1954.

En el año 1960 obtiene la Cátedra de Matemáticas del Instituto de Calatayud. Desde allí pasa a Albacete, luego al de Segovia, donde estuvo los cursos 1965 a 1968. Viene después a Madrid, al Instituto "Quevedo" de San Blas, y finalmente, su último destino es en el Instituto "Ortega y Gasset" de Madrid. Con la salud muy quebrantada pide la jubilación (anticipada en unos meses) el 31 de diciembre de 1991.

Como profesor sacó todo el partido posible de sus alumnos, despertando el gusto y el interés por los estudios matemáticos, con notable brillantez en algunos de ellos. Con los menos dotados, dedicó horas y horas en clases de recuperación, incluso fuera de horario o de época lectiva.

En el funeral que por su eterno descanso encargó el Instituto "Ortega y Gasset", sus antiguos discípulos y compañeros dieron buenas muestras del cariño y la admiración que se supo ganar.

Por los años 60 la Real Sociedad Matemática Española creaba la Olimpiada Matemática Española. En los años 80, ante la posibilidad de presentar un grupo de alumnos en la Olimpiada Internacional se le encarga a Ochoa, durante cinco años, que prepare a los seleccionados. Cada año es una semana de labor intensa que requiere una cuidadosa y largamente meditada selección de temas y problemas. Con un reducido grupo de profesores comparte esta labor en la que pone todo su tiempo, todas las energías, afecto e ilusión. Cumplido el plazo de cinco años y viendo disminuir sus fuerzas, deja su papel como "motor", pero sigue colaborando en las tareas e interesándose por la marcha de las Olimpiadas.

Persuadido de que este tipo de competiciones es un excelente acicate para los alumnos de Bachillerato, es decidido partidario de que la Sociedad "Puig Adam" organice también concursos en tres niveles para abarcar los tres cursos de Bachillerato. Coherente con estas ideas trabaja activamente en la preparación y calificación de problemas.

Algún tiempo después de terminada la carrera me decía que había dos temas que despertaban su interés: la Relatividad y la Teoría de Números. Sobre lo primero publicó un artículo (relacionado con el espacio de Minkowsky) en la Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.

Finalmente su interés se decantó hacia la Teoría algebraica de Números. Fue decisiva en este sentido su asistencia a unas conferencias que dio el Prof. Helmut Hasse en Madrid. Puesto en contacto con él y más tarde con la Prof. Olga Taussky-Todd, mantuvo con ambos una perseverante correspondencia.

He aquí una relación de artículos con recensión en Mathematical Reviews o Zentralblat:

1. Cotas de momentos. Actas de la Segunda Reunión de Matemáticos Españoles. Seminario Mat. de Zaragoza, 1961.
2. Cotas para momentos. Revista de la Academia de Ciencias de Zaragoza. 1961
3. Matrices de segundo orden con elementos enteros. Actas de la cuarta Reunión de Matemáticos Españoles. Universidad de Salamanca. 1965.
4. Un modelo elemental para las clases de ideales de un anillo algebraico. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Vol 68 (1974).
5. Una ecuación diofántica. Gaceta Matemática. Vol 30 (1978).
6. Algunas cuestiones relacionadas con la semejanza de matrices enteras. Memorias de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid núm. 13 (1980).
7. Un modelo matemático para las clases de ideales de un anillo algebraico. Rev. de la Real Academia de Ciencias Exactas... Vol 74 (1980).
8. Matrices simétricas en clases de matrices de enteros. Rev. de la Real Academia de Ciencias Exactas... Vol 80 (1986).

En cuanto al tema de sus trabajos, él mismo resume así el correspondiente al marcado con el número 4:

> "Mediante la definición de una forma reducida para las matrices nxn con elementos enteros racionales, semejantes a una matriz dada, se establece el teorema de Latimer-Mac Duffee sobre la correspondencia entre las clases de matrices enteras semejantes y de polinomio mínimo $P(x)$ y las clases de ideales del anillo $Z(y)$, $(P(y) = 0)$. La definición del conjunto de descomposición completo del polinomio $P(x)$ permite construir el modelo para las clases de ideales del anillo $Z(y)$. La linealidad del modelo

hace que el propio algoritmo de definición permita calcular el número de clases de ideales y las unidades del anillo".

En cuanto a la correspondencia con Olga Taussky, ella misma escribe hablando del volumen de su correo:

"...Some of these activities bring me pleasure and even additional knowledge. One of the most pleasing duties of this kind is my correspondence with J. Ochoa from Madrid. His interest is in integral matrices and he has very original ideas and seem entirely selftrained..."

Ochoa, por su parte, en (4), en una llamada a pie de página, al comienzo del artículo "agradece la generosa solicitud, enseñanza y estímulo recibidos de la Prof. Olga Taussky-Todd y del Prof. Helmut Hasse".

También se encargó de traducciones del alemán, entre ellas el libro de Wolfgang Franz "Topología general y algebraica". Selecciones científicas. Madrid, 1968.

Hombre desinteresado, ni buscó beneficios ni satisfacer vanidades. No poco trabajo le costó a D. German Ancoechea, a quien siempre estuvo muy unido afectivamente, convencerle para que leyera su tesis doctoral. Así lo hizo el 10 de enero de 1977 mereciendo la calificación de Sobresaliente cum laude y posteriormente Premio extraordinario.

Esta es en breves líneas la vida de un hombre bueno, que con su obra, tanto en el campo humano como en el profesional, nos da ejemplo a seguir a todos los que tuvimos la suerte de conocerle, unos como compañeros, otros como amigo entrañable.

Fidel Oliveros

Adiós a Isidoro Salas Palenzuela

Isidoro fue miembro de nuestra sociedad desde su fundación. El pasado febrero, cuando ya estaba impreso el número anterior de nuestro boletín, recibimos la triste noticia de su repentino fallecimiento. Para quienes no le conocieran, trataré de hacer una breve descripción de su vida profesional, en la que cabe señalar cuatro etapas.

En su primera etapa enseñó Matemáticas en diversos centros de Valladolid: Escuela de Magisterio, Escuela de Peritos, Escuela de Comercio, Facultad de Ciencias... De ella no tengo referencias directas, por no conocer yo aún a Isidoro.

La segunda etapa la dedicó a coordinar los Estudios de Magisterio en toda España, desde su puesto de Inspector General de Escuelas Normales. No se limitaba a quedarse en su despacho del Ministerio resolviendo asuntos burocráticos. Asistía a congresos internacionales sobre Educación Matemática, que proyectaba organizando cursos de formación y

reciclamiento para profesores de Escuelas Normales, impartidos por los más prestigiosos matemáticos españoles del momento. Fue el artífice del Plan 67 de Estudios de Magisterio. En la tercera etapa fue el coordinador del profesorado español en Guinea Ecuatorial. Su labor fue doble, tratando de llevar a Guinea a los mejores profesores españoles que se prestaron a ello, así como de formar en España a varias promociones de profesores guineanos.

En la cuarta etapa, ya jubilado, se dedicó a la Asociación de Profesores Jubilados de Escuelas Universitarias, de la que era presidente y cuya sede era su propio domicilio. En ella se ocupó de organizar actividades diversas, desde viajes de estudios por varios distritos universitarios, hasta los ciclos de conferencias de los jueves en la Escuela Universitaria de Empresariales UCM de Plaza de España, logrando la participación de prestigiosos conferenciantes.

Conocí a Isidoro siendo él Inspector General de Escuelas Normales en el Ministerio de Educación y yo profesor de la Escuela Normal de Badajoz. Ante mi deseo de compatibilizar mi docencia en Magisterio con la continuación de mis estudios de doctorado en Madrid, Isidoro me ofreció la solución, sustituyéndole temporalmente en su cátedra de la Escuela "Pablo Montesino", mediante una Comisión de Servicio.

Posteriormente tuve ocasión de tratar personalmente a Isidoro en varios viajes que hicimos juntos a Congresos Internacionales de Educación Matemática, en una época en que no se prodigaban las ayudas económicas para viajes de estudios, que debiamos costearnos de nuestro propio pecunio. Nació así una profunda amistad que duraría para siempre.

Su vida estuvo presidida por tres rasgos característicos: su espíritu emprendedor, su capacidad de organización y su interés por ayudar a los demás. Puede pensarse que es esta la opinión apasionada de quien fue uno de sus muchos y buenos amigos. Si, es cierto, pero no conozco a nadie que conociendo a Isidoro hablara de él sin hacer elogios de su persona. Recuerdo la época en que siendo yo ya catedrático de Pablo Montesino y él coordinador de Educación con Guinea, se preocupaba con regularidad por la marcha de los alumnos guineanos que nos enviaba para su formación en España, solicitándonos personalmente informes del aprovechamiento de cada uno de ellos. Los profesores guineanos le querían.

Creo que al éxito de Isidoro en cuantas empresas se embarcó también contribuía su excelente carácter y buen humor, que parece había heredado de su padre. Contaré como anécdota que, a veces, cuando las relaciones de Guinea Ecuatorial con España se enturbiaban, la única persona admitida como interlocutor español en aquel país ecuatorial era Isidoro.

El plan de Estudios de Magisterio que bajo su dirección se gestó en su época de Inspector General, conocido como Plan 67 o Plan Salas, e inspirado en el Plan Profesional de los años treinta, fue para muchos de nosotros el mejor plan de Formación de Maestros que hemos conocido. En mi opinión pocas personas han contribuido de modo tan eficaz a una enseñanza de calidad en nuestro país y en Guinea.

Fue gran admirador de "Pablo Montesino". Quienes disfrutamos de su amistad, también le admirabamos a él, como profesional y como persona. Su partida ha sido un duro golpe.

Descanse en paz.

Eugenio Roanes Macías

Una visión actual de la matemática y su enseñanza

Curso de la Universidad Internacional Menéndez Pelayo (UIMP), dirigido al Profesorado de Enseñanza Secundaria, que está previsto impartir en Santander del 15 al 19 de septiembre de 1997.

Se trata de un Curso organizado por la UIMP en cooperación con el Ministerio de Educación y Cultura, Secretaría General de Educación y Formación Profesional, Subdirección General de Formación del Profesorado. El curso va dirigido a profesores de Enseñanza Secundaria, en ejercicio o en formación. Es un curso acreditado por el Ministerio de Educación y Cultura para profesores de enseñanzas no universitarias.

Ha sido estructurado de forma que sus contenidos incidan, por un lado, en la Matematica propia del curriculum de la LOGSE, ocupándose especialmente de algunas cuestiones novedosas y de su proyección didáctica, y, por otro lado, sobre varios temas cientificos de actualidad, de interés para un Profesor de Matemática de Secundaria.

El director del curso es el profesor F. Javier Peralta, catedrático de E.U. de Matemática Aplicada de la Universidad Autonoma de Madrid, siendo su secretario el profesor José Ramón Vizmanos, catedrático del I.E.S. "Santamarca" de Madrid.

PROGRAMA DEL CURSO

Lunes 15

10:30 *El infinito,* por Emma Castelnuovo (Profesora de Escuela Secundaria de Roma)
12:00 *La teoría de números y sus aplicaciones en el aula,* por F. Javier Peralta
16:30 *Taller de calculadoras gráficas,* por José Ramón Vizmanos

Martes 16

10:00 *Transformaciones afines y sombras,* por Emma Castelnuovo
12:00 *Enseñar Matemáticas para el futuro,* por Tomás Recio (Catedrático de Algebra de la Universidad de Cantabria)
16:30 *Taller de Matemáticas, por Luis Balbuena* (Catedrático del I. B. "Viera y Clavijo" de La Laguna)

Miércoles 17

10:00 *La inferencia estadística en el nuevo bachillerato,* por José Ramón Vizmanos
12:00 *Desarrollo de las nociones de función y continuidad en la Matemática ilustrada,* por Javier Ordoñez (Profesor Titular de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la Universidad Autónoma de Madrid)
16:30 Mesa redonda *"La enseñanza de la Matemática a partir de la LOGSE"*, con Luis Balbuena, José Antonio Cagigas (Catedrático del I.E.S. "Santa Clara" de Santander y Director Provincial del Ministerio de Educación y Cultura en Cantabria), Maria Luz Callejo (Departamento de Didáctica de la Matematica del Instituto de Estudios Pedagógicos Somosaguas de Madrid) y Alberto Perez de Vargas (Catedrático de Matemática Aplicada de la Universidad Complutense). Moderador: F. Javier Peralta

Jueves 18

10:00 *Números primos y mensajes secretos,* por Adolfo Quirós (Profesor Titular de Algebra de la Universidad Autónoma de Madrid)
12:00 *Biomatemática,* por Alberto Perez de Vargas
16:30 *Taller de resolución de problemas,* por María Luz Callejo

Viernes 19

10:00 *Nuevas Tecnologías en Geometría,* por Eugenio Roanes (Catedrático de E.U. de Algebra de la Universidad Complutense de Madrid)
12:00 *Una correspondencia difícil,* por José Javier Etayo (Catedrático de la Universidad Complutense y Secretario General de la Real Academia de Ciencias)

Para *información o matrícula,* dirigirse a la Secretaría de alumnos de la Universidad Internacional Menéndez Pelayo (UIMP):

Isaac Peral, 23 MADRID-28040, tel (91) 5920631, 5920633, 5430897, 5920640
Avda. de los Castros, s/n. (Las Llamas) SANTANDER-39005, tel (942) 360055
A partir 23 junio, Palacio de la Magdalena SANTANDER-39005, tel (942) 200810
Plazo de solicitud de matrículas: desde 5 de mayo de 1997 (plazas limitadas)
Internet: http://www.uimp.es/unimp

Título Propio de Experto en Educación Matemática

La Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid continúa ofreciendo el título propio de EXPERTO EN EDUCACION MATEMATICA que se anunciaba en el Boletín n.º 39 de febrero de 1995. Las materias que se impartirán el curso 1997-98 serán:

1. Resolución de problemas, 20 horas [2 créditos], por María Luz Callejo de la Vega.
2. Sistemas computacionales en Educación Matemática, 40 horas [4 créditos], por Eugenio Roanes Macías y Eugenio Roanes Lozano.
3. Las matemáticas en la educación obligatoria, 20 horas [2 créditos], por María Paz Bujanda.
4. La utilización en la enseñanza no universitaria de algunos resultados no elementales, 15 horas [1'5 créditos], por Joaquín Hernández Gómez.
5. Geometría, 20 horas [2 créditos], por Juan Tarrés Freixenet.
6. El juego, creador de Matemáticas e impulsor de su aprendizaje, 20 horas [2 créditos], por Miguel de Guzmán.
7. Una visión panorámica del Análisis, 15 horas [1'5 créditos], por Baldomero Rubio.
8. Introducción a los fundamentos de la matemática II. Análisis no standard, 40 horas [4 créditos], por Mariano Martínez Pérez.
9. La evolución de la noción de integral, 15 horas [1'5 créditos], por Fernando Bombal.
10. Probabilidad y Estadística, 30 horas [3 créditos], por Eusebio Gómez Sánchez-Manzano, Javier Montero, Luis Sanz y Juan A. Tejada.
11. Algunos problemas clásicos de la teoría de curvas algebraicas, 15 horas [1'5 créditos], por Raquel Mallavibarrena.
12. Introducción a la teoría general de la Relatividad, 15 horas [1'5 créditos], por Eduardo Aguirre.
13. Algoritmos: el corazón de la Computación, 15 horas [1'5 créditos], por David de Frutos y Ricardo Peña.
14. Sistemas Dinámicos, 30 horas [3 créditos], por José Manuel Vegas Montaner y Carlos Fernández Pérez.
15. Introducción a la modelización en Matemática Aplicada, 15 horas [1'5 créditos], por Rodolfo Bermejo y Juan Francisco Padial.
16. Simetrías y grupos, 15 horas [1'5 créditos], por Carlos Andradas.

Se otorgará el título de experto a quien complete 25 créditos, pero es posible matricularse en cualquier número de materias del programa y obtener acreditaciones de asistencia y aprovechamiento en materias sueltas cuando ello proceda a juicio de los correspondientes profesores. La matrícula habrá de realizarse del 15 al 22 de Septiembre próximo. Para una información más detallada, dirigirse a la oficina de información de la Facultad (Teléfono 394 46 16).

Carlos Fernández Pérez
Director del Curso

Noticias breves

PUBLICACIÓN DE UNA PÁGINA EN INTERNET

La Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas ha publicado una página en la red Internet que puede encontrarse en:

http://www.cita.es/Sociedad_Puig_Adam/index.htm

Estamos preparando una biografía del profesor Puig Adam para publicarla en Internet, la historia resumida y los fines de la Sociedad, y una relación de artículos y referencias del boletín que podrán ser consultadas desde nuestra página Web.

Agradeceremos colaboraciones, comentarios y sugerencias.

El vicesecretario, Miguel Angel Gallardo
E-mail:iberoeka@lix.intercom.es

CONTESTADOR AUTOMÁTICO

Nuestro contestador automático, conectado al teléfono 394 6248, que ha estado un mes fuera de servicio por avería, recientemente ha sido reparado, estando de nuevo operativo.

VIII JORNADAS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas
(Salamanca, 8-11 septiembre 1997)

Inscripciones: Modesto Sierra Vázquez. Dpto. de Didáctica de la Matemática (Facultad de Educación). P.º de Canalejas, 169. 37008 SALAMANCA. Tel. 923 29440 ext. 3356. Fax 923 294703 email: mosiva@gugu.usal.es

SOCIEDAD ESPAÑOLA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

I Simposio de la SEIEM
Zamora, 12-13 septiembre 1997

Inscripciones: Modesto Sierra Vázquez. Dpto. de Didáctica de la Matemática (Facultad de Educación). P.º de Canalejas, 169. 37008 SALAMANCA. Tel. 923 29440 ext. 3356. Fax 923 294703 email: mosiva@gugu.usal.es

La historia de la Matemática como recurso didáctico
(Segunda parte)

Mariano Martínez Pérez

Profesor de la Univ. Complutense

3. El continuo

Si hay una idea verdaderamente compleja, profunda y central para la matemática, las tres cosas a la vez, ésta es la del "continuo", estrechamente ligada a su pariente próxima, la del "infinito" (que le sigue a continuación en nuestras reflexiones). Ya hemos advertido (y lo haremos las veces que haga falta), que las ideas matemáticas más importantes están tan articuladas entre sí y son tan interdependientes, que es imposible disociarlas completamente y estudiarlas por separado, pero estamos intentando hacer todo lo posible en esa dirección sin excesivas violencias ni repeticiones.

La percepción de la idea de "continuidad" y de "continuo" se nos presenta como inseparable de la de espacio geométrico y de la de tiempo. Lo *primero y más perceptible* de nuestra intuición del espacio es que *se extiende de una manera continua,* y eso nadie se atrevería a cuestionarlo (¡hasta ahí podíamos llegar!).

Pero, ¿qué es ese "ser continuo" del espacio, en qué consiste exactamente esa "continuidad"?. Y por ahí empiezan ya las dificultades, por el lenguaje mismo. Y uno rompe a decir cosas un tanto raras y misteriosas, como que continuo quiere decir "completamente liso", "sin hueco alguno", "todo seguido e igual a sí mismo", "sin ninguna irregularidad". Y al mismo tiempo uno junta las manos abiertas con las palmas hacia abajo y las va separando y juntando lentamente (¿por qué será lo de lentamente?) como si fuera a lanzarse a nadar en el aire. Y hablando de nadar y de agua, ¿no resultaría tentador suponer que fueron nuestros antepasados muchísimo más remotos que los homínidos, los que empezaron a *conocer* la "continuidad" en su propio mundo subacuático? ¡Qué larga historia para llegar a la "elaboración" final de una idea abstracta!

En resumen, lo que uno ha obtenido es un fracaso bastante escandaloso al intentar dar una definición, aunque sólo fuera "descriptiva" o "explicativa", de algo tan clarísimo como es nuestra intuición de lo que es "continuo". Y sin embargo, aún dejando de lado el

tiempo, por ahora, el hombre no ha podido menos de *saber* muy bien, desde sus primeros pasos, que *se movía en un espacio continuo,* aunque no lo pudiera expresar conscientemente ni de lejos (¡tampoco le hacía ninguna falta, claro está!, cosa en que poco se diferenciaría de los demás animales superiores, por supuestó).

Pero hay mucho más. Ciertamente no pudo ser sólo en la "extensión espacial" que lo rodeaba donde el hombre *sintió* la "continuidad" en su forma más clara y evidente. También desde sus primeros pasos se tuvo que ver rodeado de un mundo de *cualidades* que se presentan en "grados" o "intensidades" cambiantes, "variables" de modo muy sensible entre lo que podemos llamar, para entendernos, "extremos opuestos". Pondremos varios ejemplos de esas cualidades y sus extremos de variación (evitando en todo lo posible la terminología moderna, que nos confundiría por designar también a las correspondientes magnitudes físicas actuales, ¡horrible anacronismo para nuestro remoto antepasado!). Debe entenderse todo, pues, en un sentido puramente *cualitativo* ingenuo, y no *cuantitativo* (*todavía* no hay ninguna "medida")

extremos		**cualidad**
luz	oscuridad	luminosidad
calor	frío	temperatura
lejanía	proximidad	distancia
abundancia	escasez	cantidad de algo
duradero	breve	duración
pesado	ligero	peso
grande	pequeño	tamaño
muchos	pocos	cantidad de cosas

El hombre primitivo no tuvo más remedio que enfrentarse todos los días a esas "cualidades variables" y a muchas otras análogas, siempre presentes en el mundo que lo rodeaba (y, casi no es necesario ni decirlo, a *sufrirlas* las más de las veces en su propia carne, ¡ya lo creo!).

Pues bien, la inmensa mayoría de estas cualidades que se presentan en "grados de intensidad" variables, muestran una variación de intensidad claramente *continua* con el paso del tiempo (esto será muy importante más tarde).

¿Qué quiere decir ésto? Pues algo así como que su variación no da *saltos repentinos* (evitemos el tentador *instantáneos,* porque ¿qué puede significar?) en su intensidad. O, mucho mejor aún, que en su variación, *pasan de un grado de intensidad a otro* (por muy "próximos" que ellos estén) *pasando por grados intermedios.*

Y, alternativamente, una cualidad variará de manera discreta, si pasa de un grado de intensidad a otro "de golpe", sin pasar por ninguno intermedio, porque sencillamente no los hay. En el pequeño cuadro anterior la única cualidad discreta es la última de la lista (¿habrá alguna más?). Volveremos sobre ello al hablar del problema de *La Medida*.

La "caracterización" que acabamos de hacer de lo continuo, hay que reconocer que suena muy bien; parece muy satisfactoria, dentro de su informalidad e imprecisión inevitables en este nivel. Sin embargo, no tardarían los griegos en descubrir que no es correcta, y que la *continuidad espacial* no se deja reducir a algo tan sencillo. Bástenos por ahora con recordar que hoy sabemos muy bien que la recta racional Q cumple perfectamente nuestra condición anterior de pasar de un "valor" a otro pasando por otros (¡infinitos!) "intermedios", y no es de ningún modo continua, como sí lo será ya R. Este mismo ejemplo nos muestra que tampoco es correcta otra variante de la versión anterior, que pretende caracterizar como "continuo" aquello que se puede dividir y dividir indefinidamente.

Este segundo intento fallido de caracterizar el continuo tuvo, sin embargo, consecuencias muy importantes en la matemática griega. Al abordar en serio el problema de la "medida" o "comparabilidad" o "razón" entre segmentos, los pitagóricos se vieron abocados al descubrimiento de los segmentos inconmensurables (ver más adelante). Una consecuencia de ello (aunque sólo sea accidental, como hoy sabemos) fue la de que el continuo es *indefinidamente divisible*.

¡Horrible situación! Pero, ¿por qué horrible? Pues porque si nos preguntásemos (¡y los hay muy preguntones, pero en Grecia más!) ¿de *qué* está hecho el continuo?, y nos fijamos en el caso que parece más simple, de un segmento de recta, lo más natural para llegar a contestar a la pregunta parece ser el empezar dividiendo y dividiendo en partes el segmento, a la búsqueda de las "piezas" últimas que lo constituyen, ellas mismas ya indivisibles. El resultado, sin embargo, no puede ser más inquietante. Si el segmento es divisible indefinidamente, no importa a qué partes hayamos llegado en un cierto número de etapas del proceso analítico, esas partes podrán seguirse dividiendo de nuevo, y *no nos encontramos con nada;* el segmento se nos esfuma en nada entre las manos. ¿Estará hecho el continuo de nada? ¡Parece decididamente absurdo!; y además, si no hay elementos últimos en los que pueda dividirse ¿cómo podríamos hacer ahí geometría?

Estos problemas están en el centro de la densa historia que va de los "puntos-átomos" extensos pitagóricos (pequeñísimos, pero extensos como es natural) a los increíbles "puntos inextensos" euclídeos, rechazados mucho antes con firmeza (¡casi con indignación!) por el mismísimo Zenón. Porque, veamos, veamos, si el espacio es *extenso,* que es su cualidad esencial, los puntos son inextensos y el espacio está formado por una multitud de puntos ¿de dónde sale la "extensión"?. Y, aún dejando la coherencia lógica a un lado, ¿cómo es posible que semejante "engendro" de espacio "funcione"?

Recordemos, siquiera sea de pasada, las profundas *aporías* de Zenón, ya mencionado, sobre el continuo, que siguen ahí sin ser resueltas, escándalo de la razón; y recordemos también la bella teoría de Aristóteles sobre el continuo, según la cual la recta no estaría "hecha" de puntos, ni siquiera contendría "de hecho" a esos puntos (sino sólo "en potencia") y así sólo podría descomponerse (indefinidamente, eso sí) en continuos como ella misma. Es una pena que tal teoría nunca se consiguiera "matematizar" seriamente.

Terminaremos estas breves consideraciones sobre la historia antigua de la idea de continuidad recordando que en la matemática puramente geométrica de los griegos, principalmente en las cumbres que suponen Euclides, Arquímedes y Apolonio, el tratamiento de la continuidad espacial es *correcto,* pero queda siempre *implícito.* Es bien sabido que no aparece por ningún lado axioma alguno que controle la continuidad, aunque ya en el mismísimo primer teorema del Libro I de Euclides se muestra necesario ¡vaya por Dios! (y también en importantes teoremas planos y espaciales, para demostrar la existencia de ciertas magnitudes que Euclides usa "por la cara"). Precisamente este estado de cosas, unido al hecho casi increíble de que se necesitase llegar a finales del siglo XIX para que se formulase, *por primera vez en términos matemáticos exactos* (aunque, obviamente, también discutibles) la propiedad esencial de la continuidad geométrica por Dedekind, Pasch y otros, vienen a "demostrar" hasta qué punto esta idea estaba tan profundamente arraigada en las intuiciones espaciales de los matemáticos y filósofos que nadie fue consciente de la necesidad de *explicitarla.* Hasta tal extremo se dió por descontado su carácter verdadero durante siglos, lo cual, a su vez, sólo se puede explicar por esa misma razón, por estar tan profundamente arraigada (por su antigüedad) en nuestra intuición de lo que es el espacio.

4. El infinito

Como viene a decir L. Zippin en su estupendo libro *Uses of Infinity* (hay traducción al español) hay tres profesiones que usan abundantemente del "infinito": los poetas (esos más bien abusan, como de costumbre), los filósofos, principalmente los teólogos, y por último los matemáticos, que son los que, según ellos, de verdad lo entienden.

¿Tendrá razón Zippin?. Los matemáticos ¿entienden "de verdad" lo que es el infinito, o sólo "lo usan", eso sí, con tanto "virtuosismo" al menos como atrevimiento?

Metidos ya en citas, recuérdese que el gran Hilbert decía el año 1925 (¡que no es la prehistoria, ciertamente!) en su artículo *Über das Unendliche* (o *Sobre el Infinito,* hay traducción al inglés): "...el significado del *infinito,* tal como este concepto se utiliza en matemáticas, nunca ha sido completamente clarificado". Y más adelante: "Las observaciones anteriores sólo tratan de establecer firmemente el hecho de que la clarificación definitiva de *la naturaleza del infinito,* lejos de pertenecer a la esfera de los estrictos intereses científicos especializados, es necesaria *para la dignidad del intelecto* humano en sí mismo. Desde tiempo inmemorial, el infinito ha excitado *las emociones* del hombre más que ninguna otra cuestión. Difícilmente se encontrará otra *idea* que haya estimulado las mentes de una manera tan fructífera. Y sin embargo, ningún otro concepto está más necesitado de *clarificación* que éste."

Ni la autoridad de Hilbert ni la claridad de sus palabras necesitan comentario.

¿Hasta dónde se pueden rastrear los orígenes más remotos de las intuiciones básicas en las que se apoya la idea de "infinito"? La respuesta en este caso no puede por menos que ser decepcionantemente negativa. Antes de los orígenes del pensamiento griego, tanto poético como filosófico (¿es que hay, *aquí,* diferencias?), apenas podemos arriesgarnos a interpretaciones serias. Precisamente Aristóteles nos puede ayudar en nuestras conjeturas. Como se sabe, Aristóteles rechaza como inexistente y ficticio todo tipo de "infinito" actual o "completo", "terminado", tanto en el sentido de una extensión espacial infinita como en el de una multitud infinita de cosas. Y a la inevitable pregunta: entonces ¿de dónde ha sacado el hombre la idea falaz, pero tan extendida, de lo "infinito"? Aristóteles viene a contestar que la gente (que es muy burra) ha visto cosas verdaderamente muy grandes, que parecen "no tener límites" (el complejo término griego *àpeiron* significa, entre otras cosas *ilimitado, indefinido, infinito* (o *no terminado*), que no son de ninguna manera lo mismo), la ilimitada extensión del mar o del cielo, etc., y que de ellas ha sacado la idea absurda y fantástica de que hay cosas infinitas, en un salto mental injustificado. En efecto, como es del todo evidente, *nadie ha tenido jamás la experiencia directa de algo infinito, en ninguno de sus sentidos.* La fantasía, la imaginación poética hacen aquí su papel. Parafraseando el "Deum nemo vidit unquam", se podría decir con la misma certeza que "Infinitum nemo vidit unquam".

Bien, pero ¿de qué manera nos puede ayudar la explicación aristotélica a aventurarnos (y arriesgarnos) hacia un pasado más remoto?

Pues bien, el hombre se encontró pronto, sin duda, con extensiones espaciales enormes, de las que *no se ve por ningún lado el fin, el límite,* hasta el punto de que *parecieran no tenerlo.* Y también ciertas multitudes (inmensas manadas de animales, arenas o piedras de un desierto, estrellas en la bóveda celeste), que parecieran *no tener fin ni límite* en su "cantidad". Lo que parece más probable es que todos estos tipos de experiencias llamaran al aspecto más emocional del pensamiento, (por tratar de decirlo en forma inteligible, a pesar de la terminología moderna utilizada). Si esto fue así, se explicaría sin dificultad la raíz poética y mítica de lo que, (degenerando degenerando, como se decía de aquél torero que llegó a gobernador civil), llegaría a la idea abstracta del "infinito".

En el campo de los mitos quizás se encuentra la muestra más clara de un antecedente "prerracional" de un infinito, en las respuestas a dos preguntas:

La primera es ¿cómo y cuándo tuvo su origen este mundo que nos rodea?. Una respuesta (no la única, por supuesto) consiste en hacer remontar indefinidamente hacia el pasado una serie de sucesos, confiando en que ese regreso "ad infinitum" solventa el problema al irlo alejando más y más lejos para que no moleste (¡algo es algo!). Que la cosa no va tan descaminada nos lo ilustra la famosa paradoja de los conjuntos numerables llamada del "Hotel de Hilbert", que casi todo matemático moderno asume sin que se le caiga la cara de vergüenza.

La otra pregunta "mítica" de los "fundamentos" podría formularse así: ¿en qué se apoya, dónde reposa este mundo que habitamos? Una respuesta de algunos pueblos orientales viene a decir: Este mundo se apoya en el lomo de un gran elefante, el cual se apoya a su vez en cuatro grandes tortugas, las cuales se apoyan a su vez en otras tortugas, y éstas en otras, etc.. De nuevo está clara la intención de "expulsar" la dificultad por medio de un regreso "ad infinitum".

Poco más que esto podemos encontrar acerca de los primeros atisbos probables del infinito.

Adentrándonos ya en el mundo griego la cosa se aclara y se concreta (a la vez que se complica endiabladamente), todo al mismo tiempo. En este contexto quisiera hacer solamente dos o tres observaciones que me parecen muy importantes.

Ya hemos visto la posición de Aristóteles al respecto. No hay ningún infinito "en acto", completo; sólo "en potencia", es decir, en proceso. En primer lugar conviene advertir el carácter netamente *negativo,* sin paliativo alguno, de lo "infinito" en el sentido de *no-finito* o *no terminado,* sin *límite* o *fin* bien determinado, en el pensamiento clásico griego (en la bella lengua del Dante, "quello che non è finito", "lo que no está terminado o acabado"). Es interesante observar que Plotino (c. 250 d. C.), en su *Eneada IV* es el primero en calificar a Dios de "infinito", considerando tal calificativo ya no como algo negativo, sino positivo (muy positivo, de hecho). Tal cosa hubiera resultado inconcebible en la Atenas anterior en seis o siete siglos. Y hoy, en cambio, casi es impensable una cualidad o calificativo teológico a lo divino que no se formule en términos de "infinitud", en un sentido o en otro.

Aristóteles sí aceptará, sin embargo, la existencia de infinitos *potenciales:* los propios de aquellas cosas que siempre *pueden* aumentar *más* o disminuir *más.* Un ejemplo, puramente matemático y muy claro es el de los números naturales. Yo puedo llegar a construir *cualquier* número natural *n,* por grande que sea (lo cual supone *ya* una idealización, es decir, que no hay ninguna limitación en el espacio ni en el tiempo, porque cualquier limitación tal sería lógicamente absurda, evidentemente), pero *nunca* puedo tenerlos *todos juntos* construidos, para meterlos en una caja. ¡Es algo tan obvio! ¿Cómo pudo escapársele a Galileo?

Desde otro punto de vista, apenas es necesario recordar las muchas dificultades lógicas que encontrará la filosofía medieval en la teoría aristotélica de un espacio físico finito, hasta que se imponga al fin el concepto newtoniano de espacio infinito, homogéneo, isótropo, etc., es decir, del *espacio moderno.* Resulta muy interesante, sin embargo, el hecho (completamente natural, por otra parte) de que en los *Elementos* de Euclides no se menciona nunca ni el plano ni el espacio tridimensional *en su totalidad, completos.* La geometría se hace en el "trozo" de plano o de espacio en el que "viven" las figuras geométricas. Si hace falta, se extiende un poco más allá y ya está. Desgraciadamente este confortable "localismo" tampoco basta: el paralelismo "compromete" a *todo* el plano o a *todo* el espacio; nunca es lo mismo en una región acotada. Pero ¡incluso en eso es genial Euclides, con sus rectas-segmentos "prolongables" según vaya siendo necesario!

Por otra parte, ¿dónde se presentan en la matemática-filosofía griega los primeros *procesos indefinidamente largos* o *interminables?* Una vez más en el problema de la medida o comparabilidad de segmentos, con los segmentos inconmensurables, y en las aporías de Zenón que hemos mencionado, pero a las que tendremos que volver sin remedio.

5. La medida

En el párrafo 2 anterior mencionábamos sólo unas cuantas de las muchas *cualidades variables* que el hombre no tuvo más remedio que observar (¡para su bien o para su mal!) en la realidad que lo rodeaba, desde sus primeros pasos caminando ya en dos pies (¡e incluso mucho antes!).

El problema de *controlar* el "grado de intensidad" de una de esas cualidades, para poder, por ejemplo, *comunicar* a otros esa información, es lo que llamamos el problema de la medida en toda su generalidad. Resolver este tipo de problemas se fue haciendo cada vez más necesario según las sociedades humanas se hacían más complejas. El final es bien conocido; la mayoría de esas cualidades variables son hoy *magnitudes medibles* de la física (no todas, sin embargo, por un motivo o por otro: ¡a veces sería útil poder "medir" la intensidad de un dolor de cabeza, para evitar discusiones del tipo de "el mío es más fuerte"!).

A pesar de nuestra ignorancia de los primeros pasos del proceso histórico de la medida, no parece arriesgado conjeturar que el primero debió limitarse a la simple constatación del contraste

menos ------- más

entre los diferentes grados de intensidad de la cualidad variable en cuestión. En términos modernos, el *orden* < en una magnitud sería entonces el elemento básico, previo al de *igualdad* y a las *operaciones*.

La relación de igualdad (sólo aproximada, por el momento) = sería claramente posterior a (y consecuencia de) la relación de orden básica, siguiendo el principio general que va "de los contrastes a las analogías".

Hay que reconocer que, pese a su vaguedad, la información "menos - más" sobre el grado de intensidad de una cualidad variable continua, puede ser ya bastante valiosa.

Por fijarnos en un ejemplo sencillo y muy matemático (pero representativo de otros), consideremos la "distancia" o "alejamiento" entre dos posiciones distintas. Tratando de imitar lo que ocurre en el caso discreto, en el que hay una "multitud de cosas mínima posible", que se reduce a una sola cosa, la cual se repite, en cuanto "unidad", tantas veces como indique precisamente el *número* de cosas de la multitud, tratando pues de imitar en lo *continuo* el sencillo comportamiento de lo *discreto,* el hombre paleolítico debió encontrarse, hace varias decenas de miles de años, con la primera dificultad. En el caso de la distancia no aparece por ninguna parte una *unidad natural* como en el caso discreto (una

cosa), sino que, al contrario *todo parece indicar* que no hay una distancia mínima posible. Bueno, ningún problema; los tiempos no estaban todavía maduros, ni mucho menos para plantearse problemas demasiado *teóricos.* Una distancia concreta lo bastante pequeña u (bajo la forma de un trozo de palo más o menos recto) podía servir de unidad convencional, repetible sin alteración por transporte de un sitio a otro.

Así pues, si una distancia AB contiene a la unidad u k veces, pero no k + 1 veces, entonces se tiene, en general

$$\mathrm{k}\,u < \mathrm{AB} < (\mathrm{k}+1)\,u$$

o, con más precisión

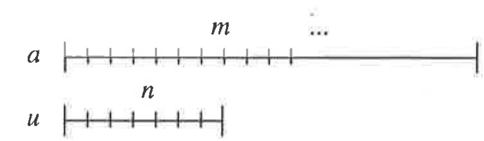
$$\mathrm{AB} = \mathrm{k}\,u + \mathrm{r} \quad \text{con } \mathrm{r} < u$$

Si hay suerte y no hay resto r, la cosa marcha perfectamente, pero lo normal es que no sea así. En todo caso, lo importante ahora es que r < u y, *a efectos prácticos,* si la unidad u es lo bastante pequeña, el resto r puede considerarse despreciable y quedarnos con

$$\mathrm{AB} = \mathrm{k}\,u$$

Todo esto es suficiente a efectos prácticos, de acuerdo, pero *no a efectos teóricos.* A los griegos les tocará descubrir el esencialísimo papel que desempeña ese resto "despreciable" r.

Efectivamente, los pitagóricos generalizarán un poco el problema de la medida con su teoría de *razones* o de *comparabilidad* entre segmentos. Por lo que se refiere a la medida "sensu stricto", la concepción pitagórica del espacio *implicaba* (no entraremos aquí en los detalles del por qué), que dada una unidad de medida u y un segmento arbitrario a, siempre se podía dividir u en n > 1 partes iguales, de manera que la n-ésima parte de u cupiese exactamente un número m > 1 de veces en a, con m y n primos entre sí (es decir, con n el menor número posible). Entonces escribían los pitagóricos



$$\frac{a}{u} = \frac{m}{n}$$

o bien

$$a = \frac{m}{n} u$$

que se lee: "*a* es igual a m veces la n-ésima parte de *u*". Por lo tanto, el problema de la medida siempre tenía solución. El *continuo* quedaba así completamente *aritmetizado* (por primera vez) sin excepciones ni patologías. Hoy diríamos nosotros: todo segmento a es *conmensurable con la unidad u.*

Por suerte o por desgracia las cosas no eran tan bonitas ni mucho menos. Pero, antes de nada, ¿cómo se podía encontrar esa *nueva unidad,* igual a la n-ésima parte de *u,* que mide exactamente a *a* y a *u?* Pues usando el algoritmo geométrico de "antiphairesis" o de la "resta mutua" o del "máximo común divisor": Se lleva el segmento más pequeño (supongamos que es el u) sobre el mayor *a;* supongamos que cabe k_1 veces y sobra un resto $r_1 < u$; se lleva entonces r_1 sobre *u;* supongamos que cabe k_2 veces y sobra un resto $r_2 < r_1$, etc.

$$\begin{aligned} a &= k_1\, u + r_1 \\ u &= k_2\, r_1 + r_2 \\ r_1 &= k_3\, r_2 + r_3 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Como hemos dicho, la idea del continuo espacial de los pitagóricos *implicaba* que este proceso algorítmico conduciría siempre, *en un número concreto y limitado de pasos,* a un resto r_{n+1} nulo, y ahí se terminaba el proceso; entonces el resto inmediato anterior r_n era *la mayor* de las partes iguales de u que medía exactamente a a.

Hacia el año –450, los mismos pitagóricos *descubrirán* (que no es lo mismo que *demostrarán*) que hay segmentos *inconmensurables* con cualquier unidad dada *u;* es decir, segmentos *b* tales que

$$b \neq \frac{m}{n} u$$

cualesquiera que sean los números naturales m y n.

Tal descubrimiento debió hacerse, casi con toda seguridad, descubriendo un "mal día" que, en ciertos casos, el algoritmo de antiphairesis aplicado a *b* y a *u* era *interminable* o *indefinidamente largo,* en el sentido preciso de que, después de cada etapa había otra posterior (de manera que los restos r_n nunca se anularían). La consecuencia inmediata era el hecho casi inimaginable de que hubiera segmentos (¡y muchísimos!) que *no tenían medida numérica* ninguna ¡se dice pronto!

La geometría, pues, *no es* aritmética.

Es bien sabido que, ante tan sorprendente comportamiento del continuo espacial, los griegos decidieron una separación estricta y definitiva de la aritmética y la geometría. Y la geometría sería precisamente eso, lo que tenía que ser: *geometría pura,* sin números. Muchos matemáticos ignoran el hecho importante de que en los *Elementos* de Euclides, por ejemplo, no se habla *nunca,* a lo largo de sus XIII libros, de la longitud de un segmento, ni de áreas ni volúmenes en el sentido de su *medida numérica.*

Uno de los muchos aspectos importantes de este descubrimiento de los segmentos inconmensurables, conecta con el párrafo 4 anterior.

Hemos dicho que los pitagóricos *descubrieron* la existencia de tales segmentos, pero no *pudieron demostrarla.* Esto requiere seguramente alguna explicación.

El descubrimiento (por primera vez) de que hay procesos interminables o indefinidamente largos, puede llegar a *verse con una claridad deslumbrante,* pero ¿cómo puedo convencer de una manera lógica, irrefutablemente, a alguien de que un proceso es indefinidamente largo *si de verdad lo es?* Por su propia definición, no puedo recorrerlo *todo, de principio a fin* (por la contumaz y dura razón de que no hay tal fin) *y comprobar de modo efectivo y completo* que es interminable. Una *buena demostración,* ha de tener, por supuesto, su comienzo, su desarro llo (todo lo largo que haga falta, eso sí) y su *final.* Otra cosa será otra cosa, pero *no una demostración.*

Los griegos le cogieron un respeto muy saludable a estos procesos indefinidamente largos (exactamente como el de ir generando los números naturales 0, 1, 2, 3,..., n,...) y algo más tarde aprenderían a "cerrarlos en términos finitos", de su adversario filosófico Zenón, por medio de las llamadas "demostraciones indirectas" o por "reducción al absurdo".

Volveremos más adelante a estos dramáticos procesos indefinidamente largos o interminables. Obsérvese que evitamos cuidadosamente llamarlos simplemente "infinitos" o "infinitamente largos", porque es totalmente incorrecto llamarlos así: nada tienen que ver con ningún infinito actual o completo. Sólo podría admitirse esa incorrección si tenemos bien claro que la estamos cometiendo (¡al contrario que en la ética, vaya!), pero mucho mejor no hacerlo.

Terminaremos recordando las grandes dificultades que encontró el hombre durante muchos siglos hasta llegar a *medir* la mayoría de las magnitudes físicas actuales: velocidad, temperatura, luminosidad, energía, fuerza, etc. En ese largo camino merece un recuerdo especial el tratamiento de las cualidades o *formas* por N. Oresme en la segunda mitad del siglo XIV. Volveremos sobre ello en el párrafo siguiente.

6. Funciones

Ante la pregunta por los orígenes más remotos de la idea de función, probablemente muchos matemáticos contestarían que se trata de una idea decididamente moderna, desarrollada a lo largo de los siglos XVIII, XIX y XX, y de manera casi exclusiva en los dominios del análisis infinitesimal. Algunos sabrían que el primero en usar la palabra *función* fue Leibniz a finales del siglo XVII (aunque en un sentido bastante distinto del que tendría posteriormente ¡también es casualidad!).

Una vez más, los verdaderos orígenes de la idea hay que buscarlos mucho más atrás.

Es bien sabido que las "funciones" más antiguas que nos han llegado vienen dadas por las numerosas tablas numéricas egipcias y (sobre todo) mesopotámicas. Se trata de funciones muy rudimentarias, lógicamente, ya que nos dan sólo unos cuantos valores de la "variable" y los correspondientes de la "función", de entre los infinitos posibles, dando grandes saltos (la idea central, sin embargo, ya está ahí bastante explícita). Este mismísimo "accidente" inevitable en cualquier tabla, nos muestra ya un problema que va a ser permanente a lo largo de toda la historia de la matemática: el de *dar nombre* a la función misma (como objeto matemático distinto de unos y otros valores numéricos) por medio de una *fórmula lingüística general* que nos permita calcular algorítmicamente (¡si ello es posible!) sus valores, o aproximaciones suficientes, uno por uno. Si este importante problema fuera impracticablemente difícil o no tuviera solución (como sabemos hoy que ocurre con la mayoría de las funciones, las "no-computables") entonces no hay escapatoria, la mejor y la única solución es la de nuestros viejos colegas mesopotámicos: las tablas de valores.

Bien, pero incluso esas rudimentarias tablas numéricas representan ya un estadio relativamente sofisticado de la historia de la idea informal de función. ¡Basta con decir que ya se practica sobre esas tablas hasta la "interpolación lineal" y todo!.

Mucho antes de que se iniciara en el progresivo control de los números y, por supuesto, de cualquier intento de medida, el hombre primitivo no tuvo más remedio que observar (de una manera más o menos consciente, eso lo remediará el paso del tiempo) que las cualidades variables que se manifestaban en la realidad que lo rodeaba, que mencionamos en el párrafo 3, no eran en absoluto "independientes" unas de otras. Entre algunas de ellas había una relación de dependencia muy clara. Por ejemplo, entre la intensidad de la luz a lo largo del día y la intensidad del calor ambiental; entre el tamaño de los cuerpos y su peso (con las, precisamente sorprendentes, excepciones a la regla general: cuerpos muy grandes y muy ligeros o muy pequeños y muy pesados; días luminosos y fríos o noches cálidas), la distancia recorrida caminando y el tiempo necesario para ello, etc.

La mayoría de estas "dependencias" son simples correlaciones o dependencias "flojas", y no funciones en el sentido moderno, pero lo importante es que la semilla de la idea estaba ya sembrada. Pero hay algo más: mucho después de irse concretando las intuiciones básicas anteriores, el hombre no pudo dejar de observar un tipo de "dependencia", esta vez muy estricta, de gran importancia para el futuro de la matemática. Esta vez sí se trataba de una función de verdad, y de las más importantes: las proporcionalidades o "funciones lineales" ¿Cuál es la importancia real de que dos magnitudes sean proporcionales? Pues, evidentemente, que se puede medir una de ellas midiendo la otra, incluso la medida será la misma si tomamos las unidades adecuadamente para que la constante de proporcionalidad sea 1.

Bien, pues el hecho, por ejemplo, de que muchas tribus primitivas hayan "medido" la distancia recorrida en "días" o "lunas" (meses lunares) nos muestra una fuerte evidencia lingüística a favor de este temprano descubrimiento. Hay razones para pensar, incluso, que el hombre pudo haber creído descubrir "falsas" proporcionalidades: tamaño y peso de cuerpos como pedruscos y rocas; mucho más tarde, diámetro y superficie de un círculo, etc. ¡En el primer caso al menos, contundentes experiencias lo pudieron sacar sin duda de su error!

La representación de las funciones por tablas numéricas sobrevivirá durante muchos siglos en astronomía, mientras que la representación puramente geométrica de la mayoría de las cualidades variables, antes de que se consiguiera medirlas numéricamente (¡larga y accidentada historia a su vez!) y se convirtieran así en *magnitudes,* alcanza un grado de generalidad sorprendente en la interesante teoría de N. Oresme (1323-1382) de la *latitud de las formas*, auténtica anticipación excesivamente "moderna" para su época.

El análisis de la idea de *variable continua* y de su manera de variar, llevado a cabo por Newton y Leibniz (ver párrafo 8), así como, de nuevo, de la dependencia mutua entre varias variables, nos presenta, a finales del siglo XVII y comienzos del XVIII, como dominio de funciones disponibles los polinomios, las fracciones racionales y las raíces, ampliado recientemente por el prometedor invento de Newton, Gregory y Mercator de las series de potencias o "polinomios de grado infinito". A mediados del siglo XVIII, el gran Euler será el responsable de fundamentar al fin (usando para ello las series de potencias de Newton) las funciones trascendentes elementales: circulares y sus inversas, logaritmos y exponenciales.

Las funciones son el alimento del nuevo cálculo infinitesimal durante los siglos XVIII y XIX, y con la introducción de nuevas funciones trascendentes en forma de integrales, se irá extendiendo el campo del cálculo hasta desembocar en el alta mar del análisis matemático de finales del siglo XIX.

7. Límites

En los orígenes de la idea moderna de *límite* está la de las aproximaciones sucesivas y cada vez mejores de algo desconocido por cosas conocidas. No hay rastro alguno de un proceso de este tipo antes del periodo clásico de la matemática griega, que es donde aparece, y el ejemplo prototípico (entre muchos otros que nos encontramos en Euclides y en Arquímedes) es el de la cuadratura del círculo. Se trata de construir un polígono de la misma extensión que un círculo dado.

Es inmediato que la sucesión P_n de los polígopos regulares de n lados inscritos en un círculo C van aproximándose al círculo cada vez mejor según n va aumentando (por ejemplo, tomando $n = 4, 8, 16, ..., 2^n, ...$) pero... El pero, el gran *pero,* es que nunca agotan el círculo C completamente. ¿Qué se puede hacer? Sólo sabemos una cosa cierta: según va aumentando n, la diferencia $C - P_n$ va estando formada por segmentos circulares que *son cada vez más pequeños,* pero *cada vez son más.* ¿Qué dominará "al final", su pequeñez o su número descontrolado? Si es su número el que se lleve el gato al agua, la aproximación no llegará a ser muy buena, sino que tendrá un tope máximo que no se podrá mejorar; mientras que si es la pequeñez la dominante, entonces la aproximación será realmente *buena* y superará cualquier diferencia de C posible.

Bueno, el problema no es trivial, y exigió el genio de un Eudoxo (c. –350) para demostrar el *Teorema de Exhauscíón* (Euclides X–1) que es el que nos garantiza que se trata de un proceso de aproximación realmente bueno. Este poderoso teorema, equivalente al *Axioma de Eudoxo-Arquímedes*, abre la puerta grande al futuro cálculo integral.

Los mismos problemas que el círculo plantearon todas las figuras curvilíneas, planas o espaciales, como cabía esperar.

Después de algunas consideraciones interesantes pero demasiado vagas durante la Edad Media y el Renacimiento, vuelve a surgir durante el siglo XVII la necesidad de una idea de límite, de la mano de Fermat y de Newton, si bien en un contexto completamente diferente que va a conducir al concepto de derivada de una función y que comentaremos en el párrafo 8 siguiente. Permítasenos solamente adelantar que la profunda idea *dinámica* de Newton de las "razones últimas" y las "razones primeras" se acercaba ya mucho a la intuición básica de la idea de límite. La definición precisa (aunque no fuese su matematización estricta) no podía estar ya muy lejos en el futuro. Esta novedad de la interferencia en el proceso de las "fluxiones" de Newton y de las "diferenciales" de Leibniz, tan fecundas, iba a retrasar un poco la evolución de la idea de límite hasta comienzos de la segunda mitad del siglo XVIII, con D'Alembert y su artículo sobre *Límite* en la *"Enciclopedia"* de Diderot.

La definición de D'Alembert es ya prácticamente idéntica a la moderna, pero tiene una dificultad importante: es descriptiva e informal, y con ella no era posible demostrar verdaderos teoremas sobre límites.

Lo demás es ya historia moderna, en la que no vamos a entrar. A lo largo del siglo XIX (Cauchy, Bolzano, Weierstrass, Dedekind) se terminará de poner a punto la vieja y escurridiza idea de límite, matematizada "definitivamente" y lista para ser utilizada en la fundamentación de los conceptos básicos del análisis.

Hay un aspecto histórico de la idea de límite, muy importante para su entendimiento correcto y, por lo tanto, para su enseñanza. permítasenos indicarlo muy brevemente, sin entrar en la discusión de su importancia. El peligroso "rodillo" igualitario-pedagógico hace suponer que límites como los cuatro elementales siguientes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^2}{x-1} \quad \text{no existe}$$

$$\lim_{n\to\infty} A(P_n) = A(C)$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

son "la misma cosa".Craso error conceptual. En los dos primeros casos el uso de los límites puede considerarse trivial o irrelevante, en el sentido de que no sirven para introducir o *crear* ningún objeto nuevo. Completamente distintos son los casos tercero y cuarto, en los que *precisamente el proceso del límite* nos permite *introducir* objetos nuevos a partir de otros ya conocidos: el área del círculo C o el número irracional e. La fecundidad de la idea de límite radica, claro está, en esta capacidad creativa. Cuando los matemáticos han necesitado un objeto, número, función etc. del que no disponían, que no lo había, vamos, normalmente lo han creado a partir de otros ya conocidos por un proceso de "paso al límite".

8. La derivada

Como es bien sabido, los antecedentes remotos del cálculo integral se encuentran en los problemas de cuadraturas de figuras curvilíneas en la matemática griega. Utilizando el Teorema de Exhauscíón (ya mencionado) de Eudoxo, Euclides y Arquímedes consiguen grandes éxitos, y todo ello en un marco puramente geométrico.

La idea de la *derivada,* en cambio, está totalmente ausente de la matemática griega, en la que los problemas de tangentes a curvas se tratan sólo en casos sencillos (circunferencias, cónicas y espirales), y caracterizando la tangente por condiciones ajenas a la futura idea de la derivada. La única lejana anticipación a ésta puede rastrearse en los problemas filosóficos del *cambio* o *movimiento* en general, al considerar la *rapidez* (para nosotros "velocidad") del cambio en algo que está cambiando. Y esta va a ser ya la intuición básica subyacente *siempre* en la idea de derivada, hasta su formalización por Bolzano y Cauchy a comienzos del siglo XIX.

El inventor moderno de la deivada, en su sentido matemático, es Fermat, en su método para hallar máximos y mínimos y tangentes a curvas. En Fermat queda muy clara ya la cuestión de la "rapidez de variación", a pesar de que el lenguaje, muy geométrico aún, oculta algo la idea básica. Menos de 40 años más tarde, será Newton el encargado de introducir directamente la derivada como un concepto primitivo que representa la *velocidad de variación* o *fluxión* $\dot{x}$ de una variable continua o *fluente x.* Con la profunda intuición de un gran físico, Newton considera una variable continua cualquiera o *fluente,* como variando con el tiempo, y su velocidad de variación en un instante dado es su fluxión (la cual es, por cierto, a su vex, otra fluente).

Dos dificultades se le plantean a Newton con sus fluxiones. La primera es la de que, al ser en este caso la fluente tiempo privilegiada por un tratamiento especial, siendo aquella cuyo "cambio" rige el de todas las demás, ¿cuál será la fluxión o velocidad de variación del tiempo? Podría tomársela convencionalmente como la unidad constante (¡a pesar de que, como todo el mundo sabe, el tiempo pasa mucho más lentamente cuando uno espera el autobús que cuando uno va en un taxi a "perder" un tren o un avión!). En cualquier caso, Newton no encuentra ninguna dificultad en "demostrar" que, en nuestro simbolismo actual para la derivada, si y = f(x) entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

La segunda dificultad es de un tipo menos técnico y más filosófico. El sentido crítico de Newton no puede sentirse satisfecho con todo lo anterior. ¿Qué es realmente esa *velocidad instantánea?* (¡Piénsese en la fuerte paradoja de que la velocidad instantánea sea una velocidad que *nunca* lleva un móvil que se mueva con movimiento no uniforme! Es muy fuerte constatar esto, ¡como para descreer en toda la física, sí señor!).

Newton trata de explicárnoslo por medio de sus ideas de las *razones últimas* y de las *razones primeras,* también insatisfactorias ellas desde un punto de vista lógico, pero en cambio cargadas de un sólido significado intuitivo que apunta ya directamente a la idea formal de límite.

Si Δx y Δy se anulan simultáneamente, Newton considerará la velocidad instantánea de y con respecto a x, como la razón última de las cantidades evanescentes Δx y Δy o, alternativamente, como la razón primera de las cantidades nascentes Δx y Δy. Es decir, a la última (primera) razón posible $\Delta y/\Delta x$ "justamente antes" de que Δx y Δy se "desvanezcan" y se hagan las dos cero ("justamente después" de surgir Δx y Δy de cero a valores no nulos). La futura caracterización "indirecta" $(\varepsilon - \delta)$ de la idea de límite está servida de una manera intuitivamente luminosa.

El concepto "discretizador" de la diferencial de una variable, de Leibniz, con su facilísimo algoritmo de cálculo, y la sencilla y tentadora relación

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

(¡también insatisfactoria de arriba abajo, en sus orígenes!) arrinconará a la derivada de Fermat y Newton prácticamente durante todo el siglo XVIII. A finales de siglo reaparecerá con Lagrange y adoptará su nombre actual, para instalarse, desde Cauchy y Bolzano, de una manera definitiva en el análisis de los siglos XIX y XX.

El Geoplano Aureo

José Angel Dorta Díaz *
Universidad de La Laguna (TENERIFE)
Islas Canarias - España

Abstract

In this paper we are going to present an original material for the teaching of the Geometry, which name is "El Geoplano Aureo". This study has been made because of previous research on pentagonal's constructions by using folding paper. We are going also 27 programs at MAPLE V related to each figure in this study.

1 Introducción.

La idea del "geoplano áureo" surge como consecuencia de una investigación realizada en el año 1989 sobre "El Pentágono" con motivo de presentarla al Premio de la Academia Canaria de Ciencias (La Laguna, Tenerife, Islas Canarias, ESPAÑA). En la citada investigación, uno de los capítulos se ha dedicado a la construcción de pentágonos, tanto convexos como cóncavos, mediante plegados de papel.

Como se sabe, en la literatura habitual sobre el tema existen dos métodos conocidos para la construcción de pentágonos regulares haciendo uso de la papiroflexia:

a) - El del nudo de la corbata, y

b) - El método basado en la sección áurea de un segmento,

pero no existía, al menos en los textos consultados no encontramos un método que generara todo tipo de pentágonos mediante plegamientos de papel; en este trabajo expondremos las líneas generales de un método original

*Departamento de Análisis Matemático

para generar una amplia gama de pentágonos: cóncavos, convexos, regulares, singulares, etc., y usaremos el paquete informático MAPLEV para programar todas las figuras que se representarán (incluiremos en el Anexo 4 los programas de estas figuras).

Antes de comenzar recordemos brevemente los métodos clásicos:

1.1 Plegamiento del nudo de la corbata.

El plegamiento denominado "nudo de corbata" es original de Urbano D'Aviso y fue divulgado por Eduard Lucas quien le dio el nombre con el que hoy lo conocemos. Consiste sencillamente en tomar una tira de papel de bordes paralelos y realizar con ella un nudo simple. Una vez el nudo bien plegado y fruncido, y doblados los extremos sobrantes de la tira por AB y CD se obtiene un Pentágono regular (Figura 1).

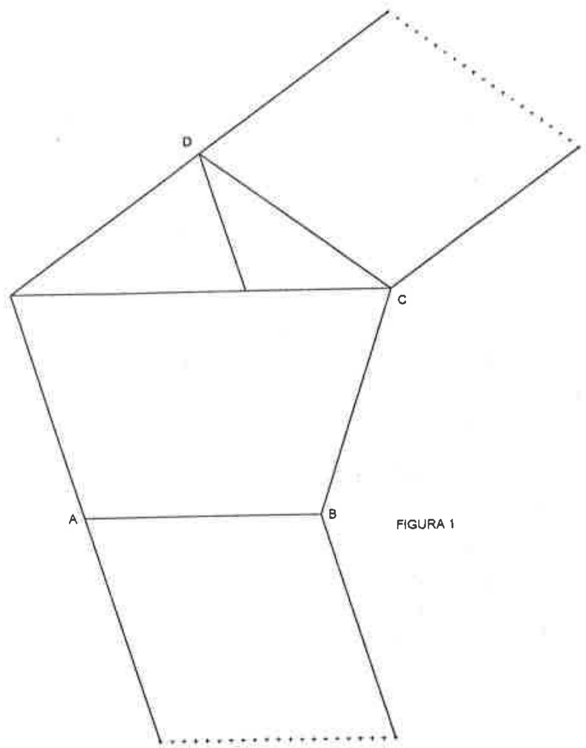


FIGURA 1

1.2 Plegamiento basado en la sección áurea

El segundo de los plegamientos conocidos para obtener un pentágono regular aparece en "Constructions geometriques" (E. Fourrey, París, 1924) y se obtiene por aplicación del método constructivo de la sección áurea (Figura 2).

Para conseguir por este tipo de plegamiento un Pentágono regular utilizaremos una hoja cuadrada de papel cuyo lado OM será la diagonal del mismo.[1]

Nuestro objetivo, en un principio, será determinar el punto J, de la nota al pie de página, y con la finalidad de que los pliegues auxiliares que tendremos que realizar para encontrarlo no se superpongan con los pliegues posteriores, supondremos la hoja de papel prolongada en un rectángulo OMNU de igual base que el cuadrado inicial OMFG y de lado menor la mitad del lado del cuadrado.

Formemos el pliegue diagonal UM, se toma MN sobre UM con lo que el punto N se superpone con el K (hemos realizado así el pliegue MH). Se dobla UN sobre UM (pliegue UL) y con ello conseguimos que el punto J' de UN que viene a coincidir con K, divida a este segmento (UN) en media y extrema razón.

Nótese que esta construcción reproduce el trazado clásico de la sección áurea de un segmento (véase [2] y [3]). El punto J se obtiene sin más que levantar una perpendicular por J' e intersecar con OM. En este momento podemos afirmar que OJ es el lado del Pentágono cuya diagonal es OM. Sólo nos resta centrarlo y determinar el resto de los vértices. Para ello procederemos de la siguiente manera :

Construimos la mediatriz RS de OM. Acto seguido fijamos B, punto medio de JM, y la distancia BM se toma en OA. AB es el lado del Pentágono y RS es un eje de simetría.

A continuación tomamos AB a partir de A, y formamos AC mediante el plegamiento AT, después tomamos AC a partir de C de forma que A incida

[1] Recordemos en este punto que el lado de un pentágono regular es el segmento mayor, OJ, que se obtiene al dividir la diagonal OM=CD en "media y extrema razón". (Figura 2) (Véase [2]).

sobre RS en un cierto punto E de esa mediatriz (pliegue CV). D se determina trazando una paralela a OM por C. Los puntos A, B, C, D y E son los vértices del Pentágono buscado (Figura 2).

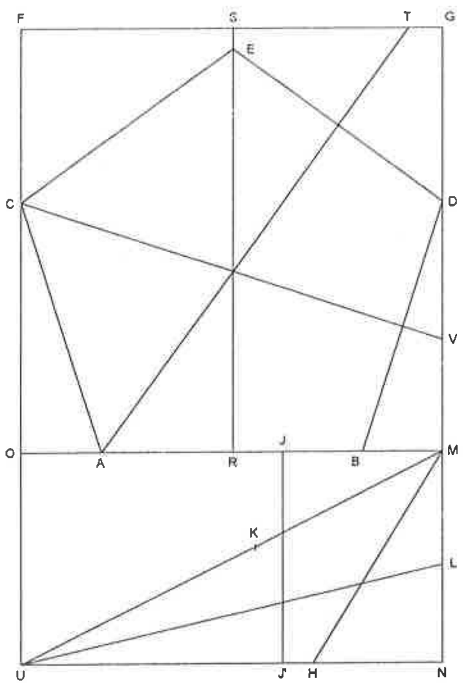


FIGURA 2

2 Plegamientos romboidales.

El procedimiento original que nosotros proponemos consiste, en síntesis, en lo siguiente:

Si elegimos un paralelogramo arbitrario, no equilátero y no equiángulo , es decir, un romboide (en particular podría ser rectángulo, e incluso cuadrado

o rombo) podemos definir, fundamentalmente, dos tipos de plegamientos:

2.1 Plegamientos del Tipo-A:

Son plegamientos tales que los vértices correspondientes a sus ángulos agudos se superpongan.

2.2 Plegamientos del Tipo-B:

Son plegamientos tales que los vértices correspondientes a sus ángulos obtusos se superpongan.

3 Plegamientos del Tipo-A.

Como puede constatarse en las Figuras 3, 4 y 5 al realizar con un romboide arbitrario un "plegamiento" del Tipo-A se obtienen, en todos los casos, PENTAGONOS CONVEXOS.

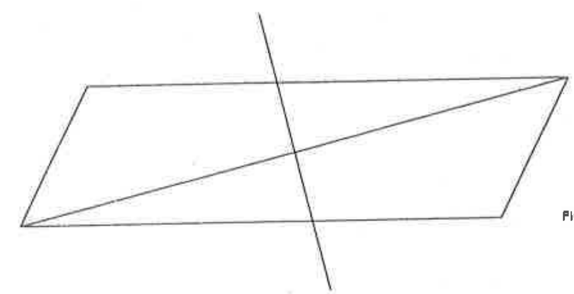


FIGURA 3

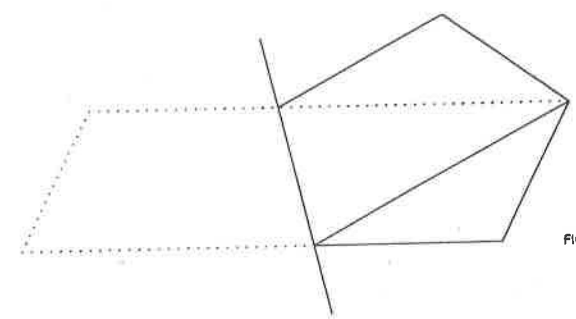
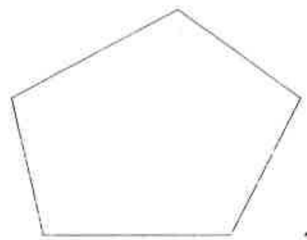


FIGURA 4



Por otra parte sabemos que un romboide siempre se genera mediante la unión de dos trapecios simétricos respecto del punto medio de uno de sus lados no paralelos; por esa razón el Pentágono Convexo que se obtiene por un plegamiento romboidal del Tipo-A se define como "La figura unión del trapecio de la derecha con el simétrico respecto de **e**, del trapecio de la izquierda" donde **e** es la perpendicular a la diagonal mayor del Romboide de partida por el punto de corte de sus diagonales (el pliegue obtenido es un segmento que pertenece al eje de simetría **e**).

Las diagonales del Pentágono P_g (ABCDE), obtenido por un "plegamiento" del Tipo-A, determinan un Pentágono Interior, P_p (A'B'C'D'E') (Fig. 6). Este P_p es congruente con el Pentágono P_p' (JKGHM) que se define en el Trapecio Izquierdo de generación del Romboide de la siguiente forma: La diagonal $\overline{LC}$ del Trapecio Izquierdo corta a la diagonal mayor del Romboide en M. La prolongación del segmento $\overline{BM}$ nos permite encontrar H; una paralela a **e** (o a $\overline{BC}$) por L determinan K y G, y por último, la intersección de las diagonales $\overline{LC}$ y $\overline{FB}$ definen J (Fig. 6).

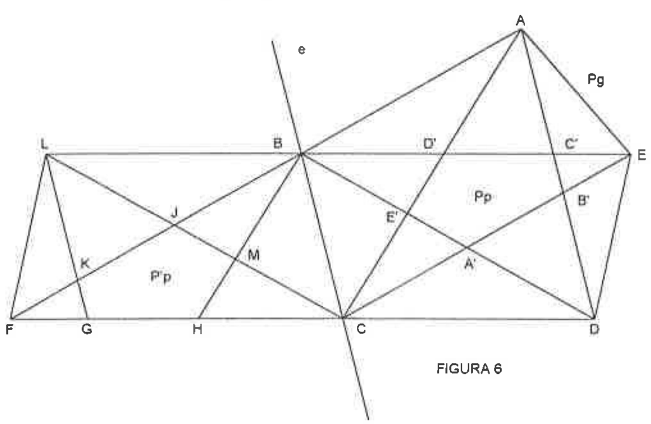


FIGURA 6

No es difícil comprobar, geométricamente, que los Pentágonos P_g y P_p no son, en general, regulares; de igual manera se comprueba que no existe siempre semejanza entre ellos (basta verificar las diferentes amplitudes de los ángulos correspondientes, a los vértices M y E, por ejemplo).

Ahora bien, si el romboide de partida es un ROMBOIDE AUREO (Figura 7) **el Pentágono obtenido mediante un plegamiento del Tipo-A es regular** (Figura 8) **y los PENTAGONOS CONVEXOS P_g, P_p y P_p' serán regulares y en consecuencia semejantes** (Fig. 9). [2]

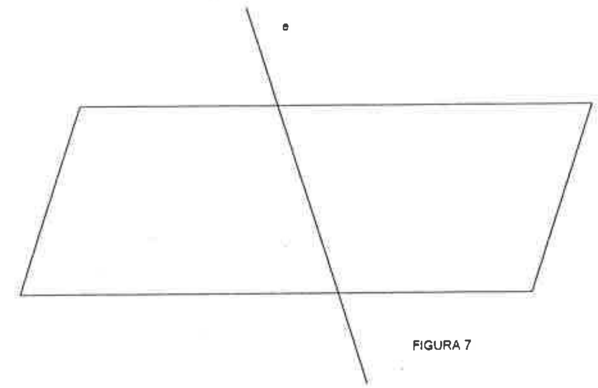


FIGURA 7

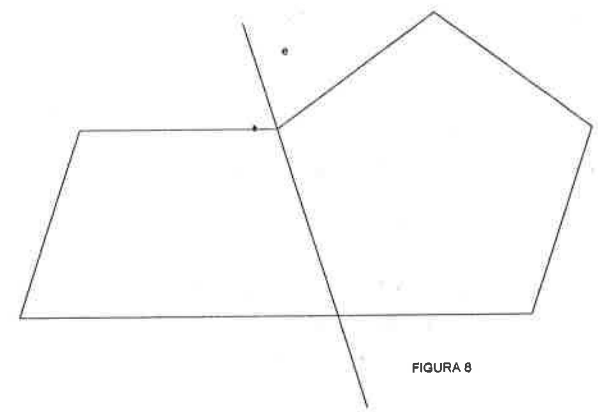


FIGURA 8

[2] Un romboide es áureo si sus lados son $x+y$, e y con $\frac{x}{y} = \phi$, ($\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = número de oro) y tal que sus ángulos agudos miden 72 grados sexsagesimales [la razón entre los lados del mismo es ϕ^2 puesto que $\frac{x+y}{y} = \frac{x}{y} + 1 = \phi + 1 = \phi^2$]

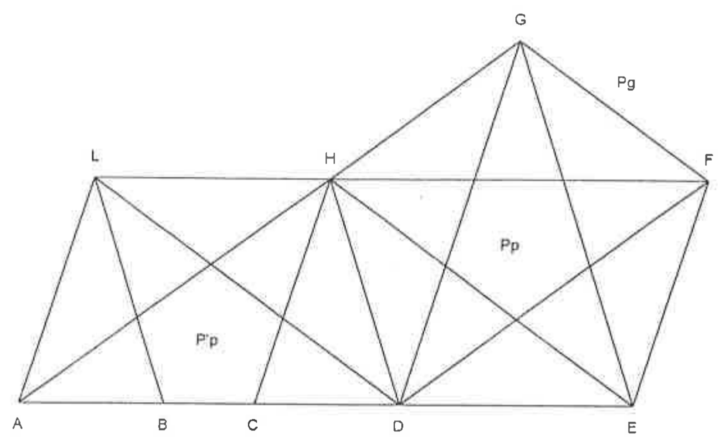


FIGURA 9

En este caso, se demuestra analítica o sintéticamente, que la razón de semejanza entre P_g y P_p es $-\frac{1}{\phi^2}$ (véase Apéndice 3) siendo el centro de la misma el punto intersección de las alturas, o centro de gravedad de P_g.

De igual forma puede demostrarse que entre el Pentágono del Trapecio de la Izquierda, $P_p^{'}$, y el P_g existe una semejanza de centro el punto A y razón ϕ^2 (véase Apendice, Tabla II).

3.1 Construcción del pentágono equiángulo.

Basándonos en las consideraciones del apartado anterior podemos concluir lo siguiente :

Para construir un Pentágono Regular mediante un "plegado de papel" se recorta un Romboide Aureo y se realiza con él un plegamiento del Tipo-A; el P_g obtenido es regular.[3]

[3]En la TABLA II del Apéndice hemos definido los vértices de la Figura 9 en función del lado menor del romboide áureo y del número de oro ϕ .

3.2 Sucesiones asociadas.

Para finalizar con estos plegamientos del Tipo-A digamos que si se realizan un cierto número de pruebas, con romboides arbitrarios de altura constante, y vamos disminuyendo la longitud de la base, poco a poco, hasta que la **"sucesión"** de romboides tienda a rombo, se constata que mientras los P_g tienen como caso límite un triángulo, los P_p van degenerando hacia segmento. Por otra parte, si vamos aumentando la longitud de la base, los P_g conservan forma de pentágono y la **sucesión** de los P_p tiende a deltoide o trapezoide bisósceles.

4 Plegamientos del Tipo-B.

Dependiendo de las longitudes de los lados y de la amplitud de los ángulos del romboide elegido los "plegamientos del Tipo-B" unas veces originarán pentágonos cóncavos, otras trapecios y otras pentágonos convexos. La figura obtenida, sea cual sea, se definirá como "la figura unión del trapecio de la izquierda con el simétrico, respecto de **e'**, del trapecio de la derecha", donde **e'** es la perpendicular a la diagonal menor del romboide de partida por el punto de corte de ambas diagonales (el pliegue realizado es un segmento del eje **e'**).

Si recurrimos a la Fig. 10 y realizamos sucesivos "plegamientos del Tipo-B" con la **sucesión de romboides ABCD, ABC'D', ABC"D", ...** , hasta que nos aproximemos al rombo **ABEF**, observamos que las figuras obtenidas por los mencionados plegamientos son, en un principio, pentágonos cóncavos (y que las intersecciones de sus cuatro diagonales interiores generan deltoides), tendiendo estos pentágonos, a medida que avanzamos en al **sucesión**, a trapecio (cosa que habrá sucedido cuando el "pliegue" sea paralelo al lado **AB**), y en este caso, la intersección de sus dos diagonales (del trapecio) sería, evidentemente, un punto.

En este apartado, convendría considerar el punto medio de la base mayor del trapecio obtenido por el plegamiento del Tipo-B, como un vértice, degenerado, de un pentágono que habría dejado de ser cóncavo para convertirse en convexo: **el trapecio sería, justo, la "figura de paso" de concavidad a convexidad.**

Si continuamos el proceso se observa que de los "plegamientos del Tipo-B" siguientes, se obtienen pentágonos convexos y sus diagonales generarán, igualmente, pentágonos convexos.

Cuando en la **"sucesión"** de romboides nos vayamos acercando a rombo, Figura 10, los correspondientes plegamientos proporcionarán pentágonos convexos, ya próximos a triángulos, y los pentágonos determinados por las diagonales se irán degenerando hasta convertirse, en el límite, en un segmento.

Finalmente, al realizar el "plegamiento" del rombo se obtiene un triángulo isósceles, y su base será, precisamente, el segmento en el que habrán degenerado los pentágonos convexos interiores de los plegamientos correspondientes.

Nota: Para comprobar las afirmaciones de este apartado, realícense varias fotocopias de la Fig. 10 y recórtense algunos romboides significativos. Los plegamientos del Tipo-B y los dibujos de las diagonales correspondientes corroborarán lo antedicho.

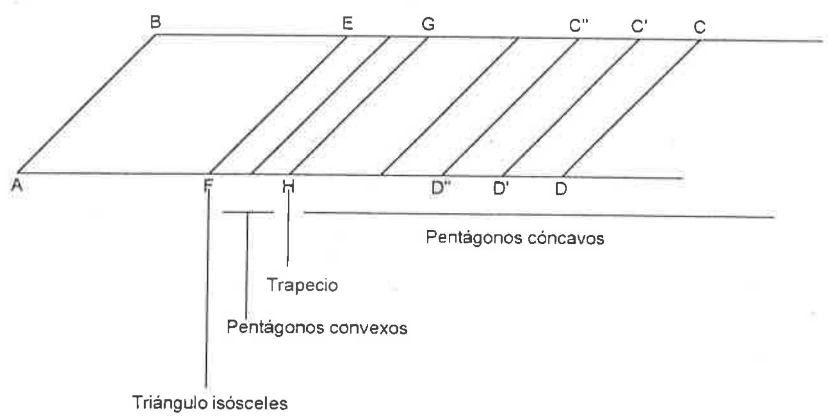


FIGURA 10

5 Geoplanos Tipo-Aureo.

Si se elige una pareja de romboides iguales, arbitrarios, y se superponen entrecruzándose de tal forma que los vértices agudos de ambos queden "unidos" dos a dos, se obtendrá la Fig. 11. (Se obtiene la Fig. 12 si se eligen dos rectángulos iguales, que podrían ser folios, [un rectángulo es un caso "singular" de romboide]). Si trazamos el eje de simetría que une los puntos A y B, la Fig. 11 queda dividida en dos pentágonos semejantes (y congruentes), cada uno de los cuales coincidirá, exactamente, con el pentágono que se habría generado por un plegamiento del Tipo-A con cada uno de los romboides de partida por separado.

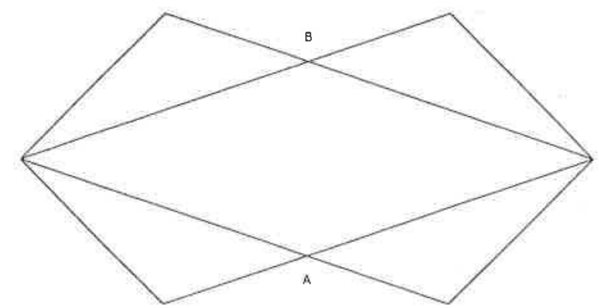


FIGURA 11

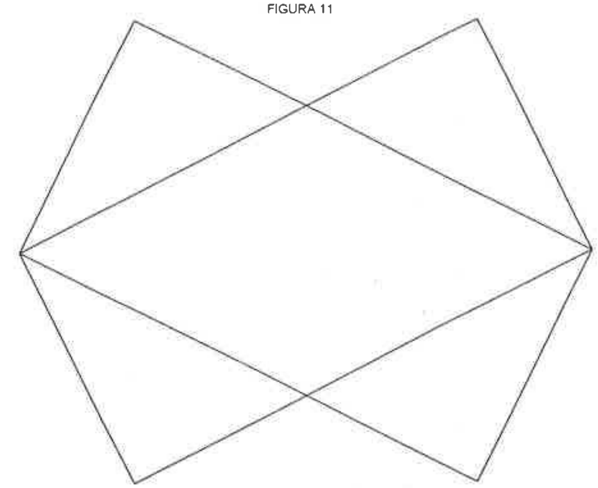


FIGURA 12

Estas Figuras 11, 12, y otras muchas análogas que se pueden construir fácilmente, tienen verdadera importancia a la hora de enseñar Geometría Elemental. Obsérvese que si se dibujan las diagonales de los dos pentágonos que las conforman, Figura 13, pueden extraerse una gran variedad de figuras, unas semejantes y otras no: polígonos estrellados de cinco puntas, triángulos, cuadriláteros (paralelogramos, trapecios y trapezoides), pentágonos,.....

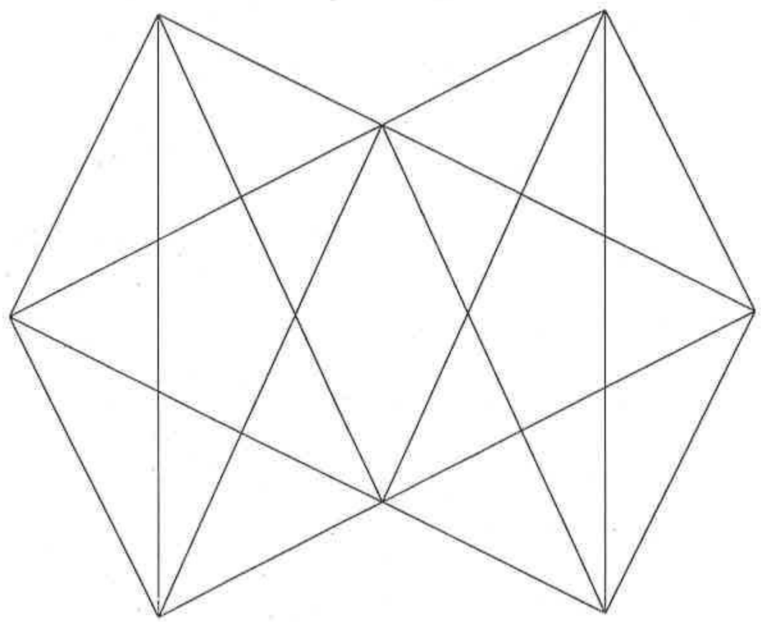


FIGURA 13

Todo ello nos sugiere la idea de diseñar diversos geoplanos originales, que hemos denominado Geoplanos Tipo-Áureo; bastaría con realizar las Figuras 12, 13,..., sobre una madera plana y "clavar" tachuelas en cada punto de intersección de las diagonales de los pentágonos; con elásticos se irán contruyendo las figuras geométricas aludidas.

A continuación presentamos tres ejemplos de estos geoplanos y algunas figuras sombreadas en ellos (Figura 14).

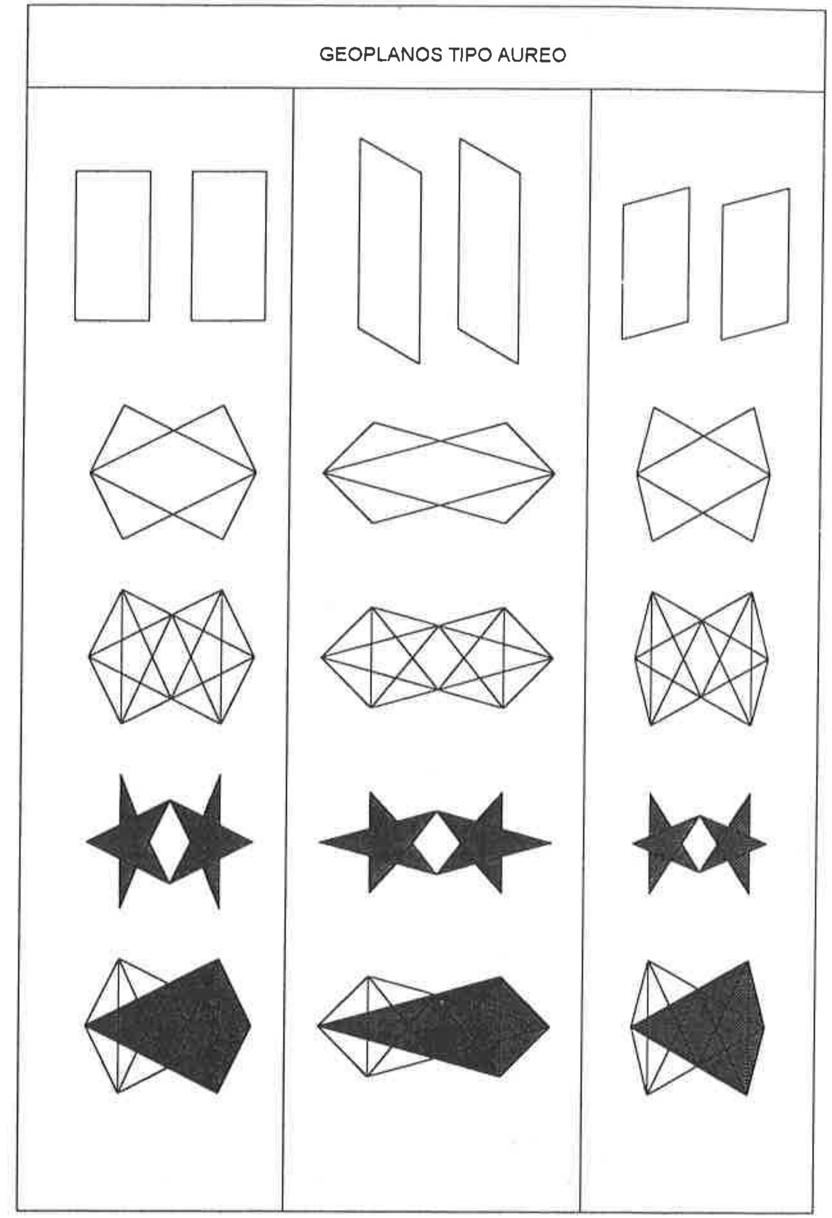


FIGURA 14

6 El Geoplano Aureo.

Definición. Un geoplano Tipo-Áureo que esté generado por dos ROMBOIDES AUREOS lo denominaremos GEOPLANO AUREO (Figura 15).

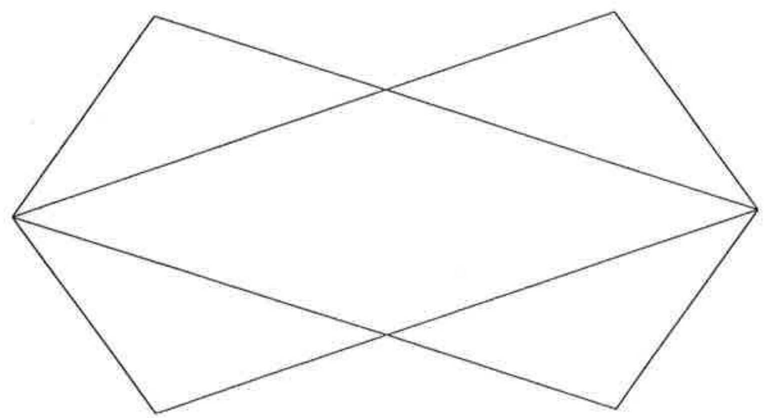


FIGURA 15

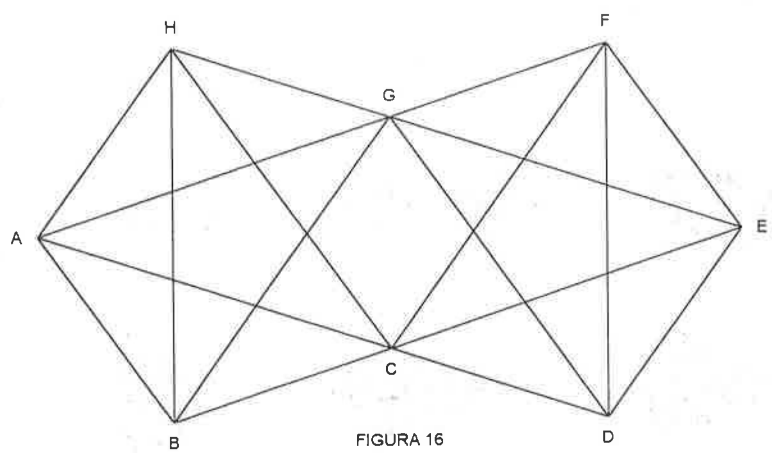


FIGURA 16

Un Geoplano de este tipo se caracteriza por su **cualidad áurea,** es decir: con él se podrán realizar una gran variedad de **figuras áureas** (calificadas de esa manera por estar todas ellas relacionadas con el número de oro ϕ: **triángulos, trapecios, rombos, romboides, deltoides, pentágonos,**

polígonos estrellados,..., áureos (Véase: Apéndice 1). La Figura 16 nos suministra una idea del mismo. Además en la TABLA III del Apéndice puede verse cada uno de los vértices de nuestro Geoplano en función del lado menor del romboide y de ϕ.

Este GEOPLANO AUREO se podría enriquecer si lo complementamos con los dos decágonos correspondientes a cada uno de los pentágonos que lo definen (Figura 17) y todo ello representado dentro de un **rectángulo áureo** (Figura 18).

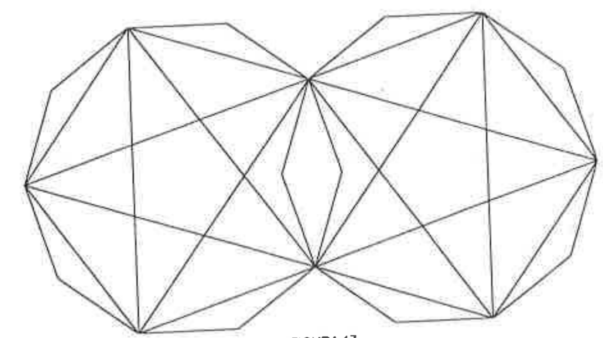


FIGURA 17

GEOPLANO AUREO

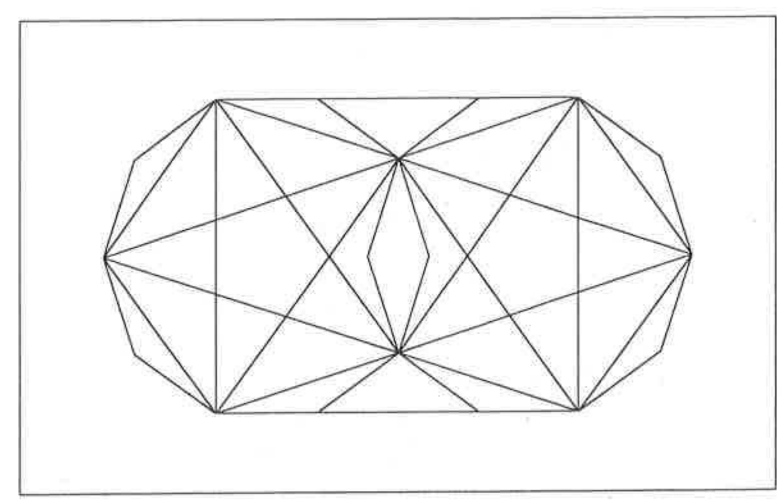


Figura 18

Si dibujamos sobre madera esta última figura, y colocamos tachuelas en cada uno de los vértices e intersecciones de la misma, obtendremos un **"material didáctico"** de interés geométrico por las diversas connotaciones áureas que conlleva.[4]

7 Características.

7.1 Reproductividad.

Una de las propiedades más acentuadas de este Geoplano Aureo es su reproductividad. De igual manera que el pentágono regular y el polígono estrellado regular de cinco puntas son figuras áureas que se reproducen indefinidamente hacia los macro y micromundos (prolongando lados o trazando diagonales), un Geoplano Aureo puede considerarse sumergido "muchas veces" dentro de otro Geoplano Aureo concreto, y éste último pertenecer a su vez a un "Super-Geoplano Aureo" (Fig. 19).

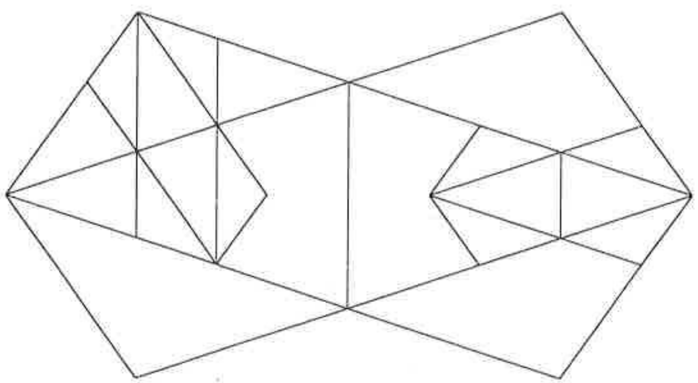


FIGURA 19

[4]Algunas ideas relacionadas con este trabajo fueron presentadas en Abril de 1990, en un taller en el aula, con motivo de las III Jornadas Didácticas de la Universidad de las Palmas de Gran Canaria celebradas en homenaje al Profesor D. José Martel. Igualmente, en el ICME-7 (Julio de 1992) celebrado en Quebec (Canadá) se presentaron tres Posters con las ideas básica de este artículo.

7.2 Utilidad

7.2.1 Preplantilla del dodecaedro.

Si representamos los 10 geoplanos áureos (simples) siguiendo el proceso iniciado en la Figura 19 obtenemos la Figura 20 y consecuentemente la Figura 21 que define la "preplantilla" del dodecaedro

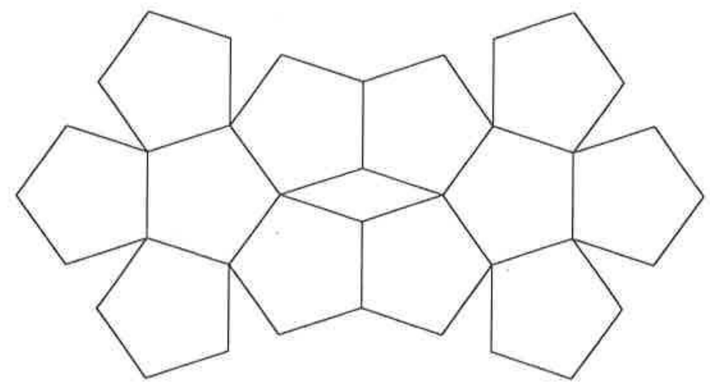


FIGURA 20

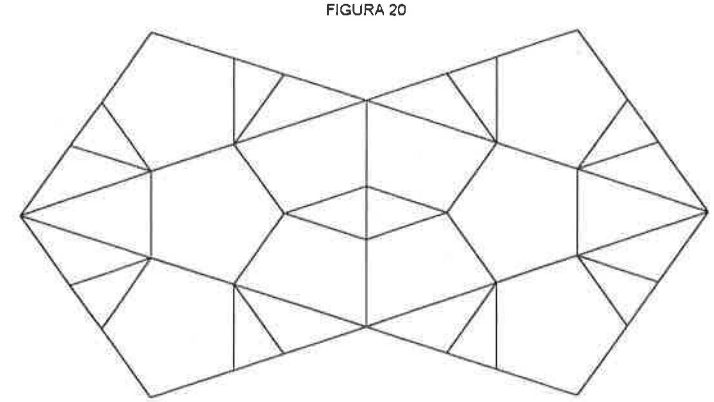


FIGURA 21

El hecho de denominarla preplantilla del dodecaedro estriba en que habrá que modificarla posteriormente para que con ella se pueda construir el sólido mencionado.

Para su representación gráfica con MAPLE V hemos cofeccionado los programas números 20 y 21 (Apéndice 4) dando, esquemáticamente, los siguientes pasos:

1) A las raíces quintas de la unidad las hemos multiplicado por $\frac{1}{\phi^2}$ para obtener los vértices de un pentágono semejante al regular, pero homotéticamente "más pequeño".

2) Seguidamente el pentágono resultante se ha trasladado según los vectores

$$\tfrac{1}{\phi}e^{i(\frac{2m\pi}{5})}, m = 1,..,5.$$

para así obtener los sies pentágonos de la derecha.

3) Los pentágonos de la izquierda se obtienen trasladando el pentágono

$$\tfrac{1}{\phi^2}e^{i(\frac{2\pi K}{5}+\pi)}, k = 0,..,4,$$

según los vectores:

$$(-\phi,0) + \tfrac{1}{\phi}e^{i(\frac{2m\pi}{5}+\pi)}, m = 1,..,5.$$

Así pues para dibujar esta "preplantilla" hemos trasladado a lengüaje MAPLE V (véase Apéndice 4, programa 20) la expresión matemática siguiente:

$$\left\{\left\{\tfrac{1}{\phi}e^{i(\frac{2m\pi}{5})} + \tfrac{1}{\phi^2}e^{i(\frac{2k\pi}{5})}, k = 0,...,4\right\} m = 0,...,4\right\} \cup$$
$$\left\{\left\{(-\phi,0) + \tfrac{1}{\phi}e^{i(\frac{2m\pi}{5}+\pi)} + \tfrac{1}{\phi^2}e^{i(\frac{2k\pi}{5}+\pi)}, k = 0,...,4\right\} m = 0,...,4\right\}$$

7.2.2 Plantilla del dodecaedro (Método I).

La Figura 22 representa la PLANTILLA DEL DODECAEDRO

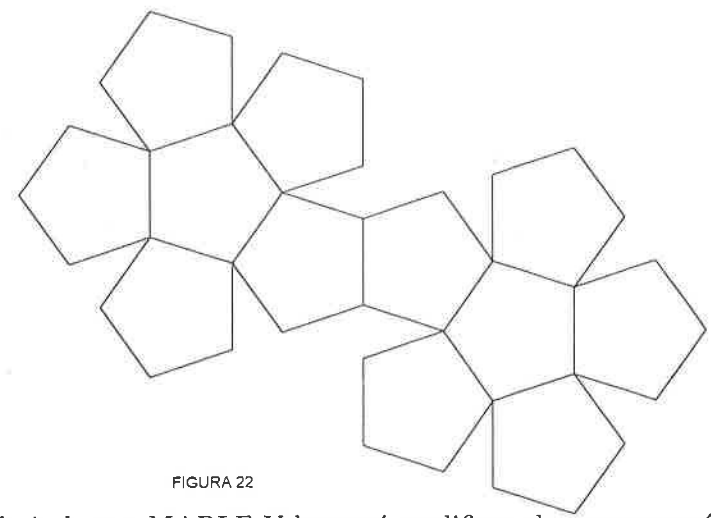


FIGURA 22

Para dibujarla con MAPLE V bastará modificar el programa número 20, en el sentido de "trasladar" los seis pentágonos de la derecha de la Figura 20 mediante el vector

$$(0, -\tfrac{\sqrt{3-\phi}}{\phi})$$

La expresión matemática para la plantilla del dedecaedro quedaría como sigue:

$$\left\{\left\{(0, -\tfrac{\sqrt{3-\phi}}{\phi}) + \tfrac{1}{\phi}e^{i(\frac{2m\pi}{5})} + \tfrac{1}{\phi^2}e^{i(\frac{2k\pi}{5})}, k = 0,...,4\right\} m = 0,...,4\right\} \cup$$
$$\left\{\left\{(-\phi,0) + \tfrac{1}{\phi}e^{i(\frac{2m\pi}{5}+\pi)} + \tfrac{1}{\phi^2}e^{i(\frac{2k\pi}{5}+\pi)}, k = 0,...,4\right\} m = 0,...,4\right\}$$

7.2.3 Plantilla del dodecaedro (Método II).

Otro método para construir la plantilla del dodecaedro vendría dado por la secuencia siguiente:

1) Las raíces quintas de la unidad se giran un ángulo de 18 grados sexagesimales ($\frac{\pi}{10}$) de donde se obtienen los vértices del pentágono de la derecha de la Figura 24, es decir:

$$e^{i(\frac{2\pi k}{5}+\frac{\pi}{10})}, k = 0,..,4.$$

Nótese que este pentágono regular estará centrado en el origen de coordenadas.

2) Se contruye un segundo pentágono regular resultante de girar el del apartado anterior 180 grados y trasladarlo según el vector $(-\frac{3}{2}\sqrt{3-\phi}, \frac{\phi}{2})$: se obtiene así el pentágono de la izquierda de la Figura 24: sus vértices quedarían definidos por:

$$(-\tfrac{3}{2}\sqrt{3-\phi}, \tfrac{\phi}{2}) + e^{i(\frac{2\pi k}{5}+\frac{\pi}{10}+\pi)}, k = 0, .., 4.$$

Nótese que este segundo pentágono estaría centrado, precisamente, en el punto

$$(-\tfrac{3}{2}\sqrt{3-\phi}, \tfrac{\phi}{2})$$

3) A partir de cada uno de los pentágonos regulares anteriores se construyen sus seis pentágonos homotéticos de razón $\frac{1}{\phi^2}$ (para cada uno de ellos) y situados adecuadamente.

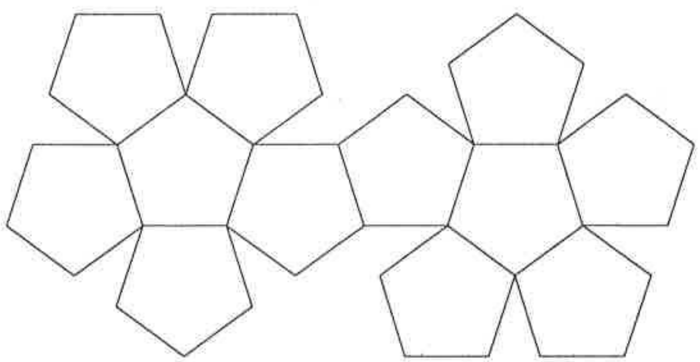


FIGURA 23

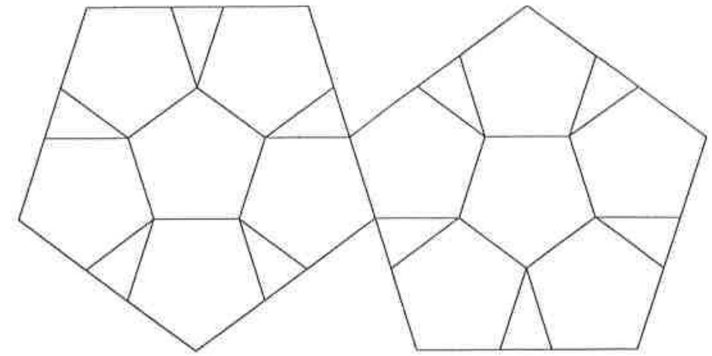


FIGURA 24

La expresión matemática completa, y que ha sido utilizada para programar las figuras 23 y 24, (véase Apendice 4, programa 23) es la siguiente:

$$\left\{\left\{\tfrac{1}{\phi}e^{i(\frac{(4m-3)\pi}{10})} + \tfrac{1}{\phi^2}e^{i(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{10})}, k = 0, ..., 4\right\} m = 0, ..., 4\right\} \cup$$
$$\left\{\left\{(-\tfrac{3}{2}\sqrt{3-\phi}, \tfrac{\phi}{2}) + \tfrac{1}{\phi}e^{i(\frac{(4m-3)\pi}{10}+\pi)} + \tfrac{1}{\phi^2}e^{i(\frac{2k\pi}{5}+\frac{\pi}{10}+\pi)}, k = 0, ..., 4\right\} m = 0, ..., 4\right\}.$$

7.2.4 Otras figuras.

A partir de las consideraciones de los párrafos anteriores, el lector podrá construir otro tipo de figuras provistas de cierta armonía por estar relacionadas con ϕ; como ejemplos presentamos las figuras 25, 26 y 27.

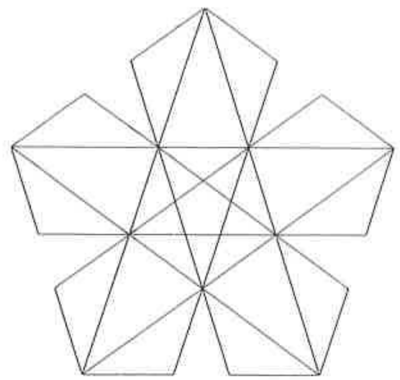


FIGURA 25

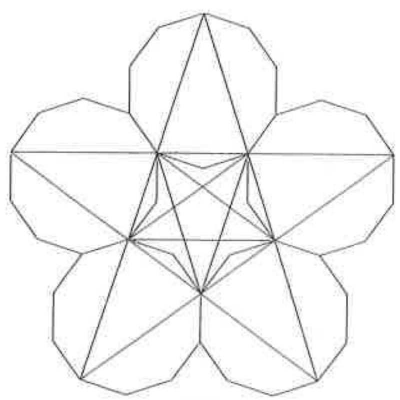


FIGURA 26

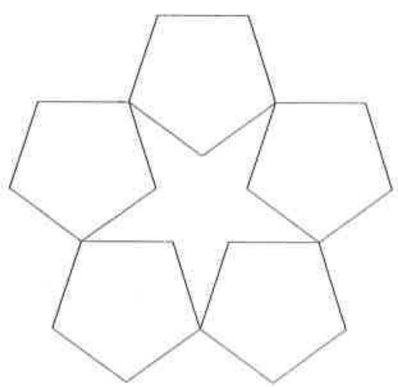
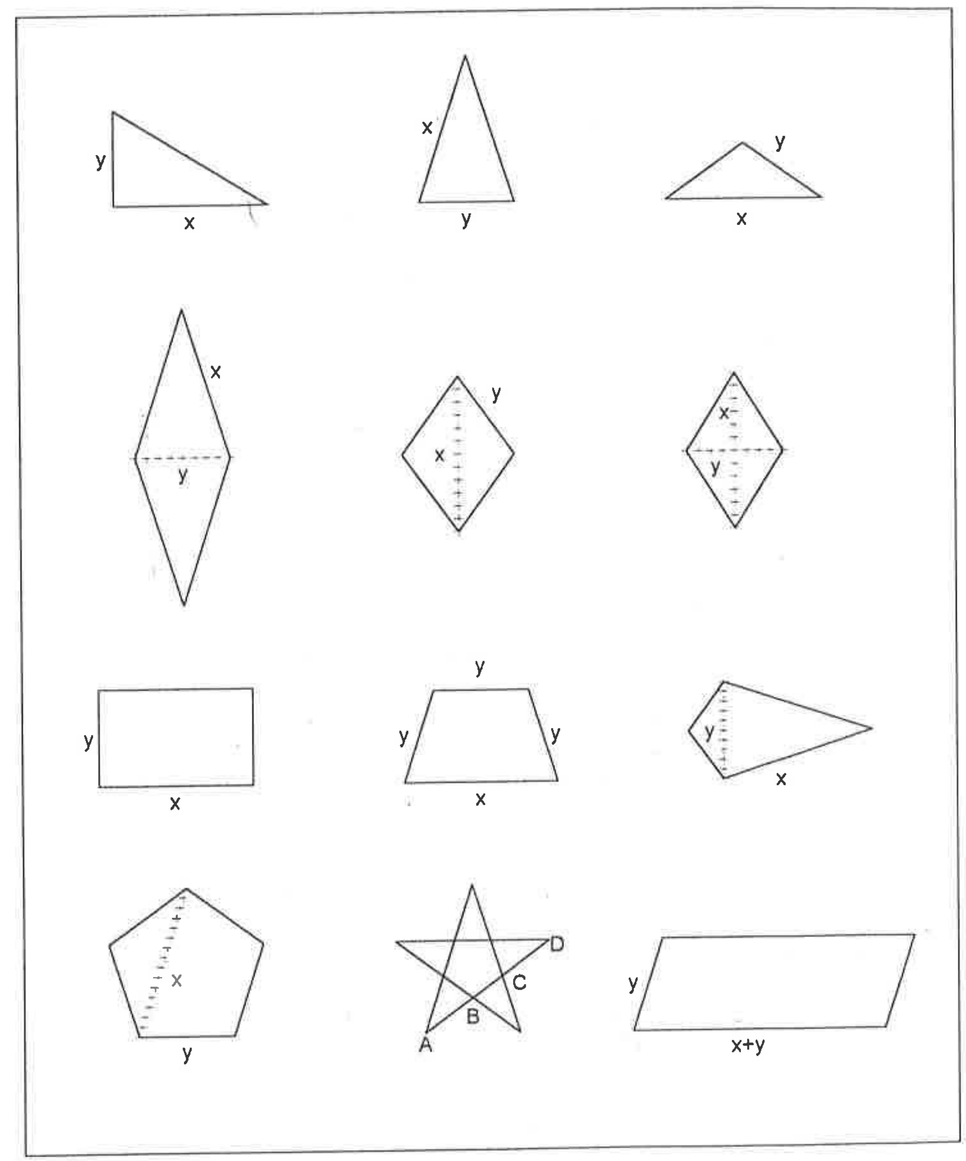


FIGURA 27

8 Apéndice.

8.1 Figuras áureas.



En todos los casos se verifica: $\frac{x}{y} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Además, para la estrella áurea se tiene: $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \phi$

8.2 Tablas.

8.2.1 Tabla I.

Tabla I

Tabla de las razones trigonométricas más usuales utilizadas en este trabajo.

(En función del número áureo $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$)

	$9^o = \frac{\pi}{20}$	$18^o = \frac{\pi}{10}$	$36^o = \frac{\pi}{5}$	$54^o = \frac{3\pi}{10}$	$72^o = \frac{2\pi}{5}$	$108^o = \frac{3\pi}{5}$
sen	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\phi}}}{2}$	$\frac{\phi-1}{2}$	$\frac{\sqrt{3-\phi}}{2}$	$\frac{\phi}{2}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}}{2}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\phi}}}{2}$	$\frac{\sqrt{\phi+2}}{2}$	$\frac{\phi}{2}$	$\frac{\sqrt{3-\phi}}{2}$	$\frac{\phi-1}{2}$	$\frac{1-\phi}{2}$

8.2.2 Tabla II.

Tabla II

Vértices de la Figura 9 en función de ϕ.

(ℓ representa el lado menor del "romboide áureo", o lo que es lo mismo del pentágono equiángulo, Pg, generado por el plegamiento del Tipo A del romboide)

A	B	C
$(0,0)$	$(\ell[\phi-1],0)$	$(\ell,0)$
D	E	F
$(\ell\phi,0)$	$(\ell\phi^2,0)$	$(\frac{\ell}{2}[3\phi+1],\frac{\ell}{2}\sqrt{\phi+2})$
G	H	L
$\left(\frac{\ell}{2}\phi^3,\frac{\ell}{2}\sqrt{4\phi+3}\right)$	$\left(\frac{\ell}{2}\phi^2,\frac{\ell}{2}\sqrt{\phi+2}\right)$	$\frac{\ell}{2}(\phi-1),\frac{\ell}{2}\sqrt{\phi+2})$

Observación: De la tabla anterior, y teniendo presente la Figura 9, se desprende que la razón de semejanza entre Pp y Pg es ϕ^2 lo que puede comprobarse computando algunas razones:

$$\frac{AE}{AC} = \frac{\ell\phi^2}{\ell} = \phi^2.$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\ell\phi}{\ell(\phi-1)} = \frac{\phi\phi}{\phi(\phi-1)} = \frac{\phi^2}{\phi^2-\phi} = \frac{\phi^2}{\phi+1-\phi} = \phi^2.$$

De esta manera podemos concluir que entre Pp y Pg existe una semejanza de centro A y razón ϕ^2, o lo que es lo mismo, que existe una aplicación φ_{A,ϕ^2} definida de la forma siguiente:

$$\varphi_{A,\phi^2} : \pi \longrightarrow \pi \text{ donde Pp} \longrightarrow \varphi_{A,\phi^2}(\text{Pp})=\text{Pg}.$$

8.2.3 Tabla III.

Tabla III

Vértices de la Figura 16 en función de ϕ.

A	B	C
$(0,0)$	$(\frac{\ell}{2}\sqrt{3-\phi},-\frac{\ell\phi}{2})$	$\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{4\phi+3},-\frac{\ell}{2}\right)$
D	E	F
$\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{11\phi+7},-\frac{\ell\phi}{2}\right)$	$(\ell\sqrt{4\phi+3},0)$	$(\frac{\ell}{2}\sqrt{11\phi+7},\frac{\ell\phi}{2})$
G	H	
$\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{4\phi+3},\frac{\ell}{2}\right)$	$\left(\frac{\ell}{2}\sqrt{3-\phi},\frac{\ell\phi}{2}\right)$	

8.3 Demostración usando MAPLE V.

Demostración de que: $\varphi_{0,-\frac{1}{\phi^2}}(P_g) = P_p$. donde $\varphi_{0,-\frac{1}{\phi^2}} : \pi \longrightarrow \pi$ es una semejanza de centro "el centro de gravedad de P_g" y razón $-\frac{1}{\phi^2}$.

9 Bibliografía

[1] ALSINA C. y TRILLAS E. : "Lecciones de Algebra y Geometría", Ed. G.G. Barcelona 1984.

[2] CARRILLO, A. y LLAMAS, I.: "MAPLE V, Aplicaciones matemáticas para PC". RA-MA Editorial. Madrid, 1995.

[3] FOURREY, E. :"Constructions geometriques", París 1924.

[4] GHYKA, MATILA C.: "El Número de Oro I y II", Poseidon. Barcelona 1984.

[5] GHYKA, MATILA C : "Estética de las Proporciones en la Naturaleza y en las Artes". Poseidon. Barcelona. 1983.

[6] HAROLD R.JACOBS :"Mathematics, A Human Endeavor", W.H. Freman and Company. Nueva York.

[7] PHARES G.O'DAFFER y STANLEY R.CLEMENS : "Geometry: An investigative approach", Addison-Wesley Publishing Company. California.

[8] RINCON, F., GARCIA, A. y MARTINEZ, A. : "Cálculo científico con MAPLE". RA-MA Editorial. Madrid, 1995.

[9] PLASENCIA I. y DORTA J.A. : "Algunas consideraciones sobre la sección áurea", Revista de La Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de Melilla. Junio de 1989.

Una aplicación de DERIVE a la clase de matemáticas

Justo Cabezas Corchero

I.E.S. Rodríguez-Moñino de Badajoz
Departamento de Matemáticas de la Universidad de Extremadura
e-mail: jcabeza@alcazaba.unex.es

Abstract

An experience with seventeen years old pupils using a Computer Algebra System (CAS) is described. Several selected examples from differents subjects, that are mathematized towards a unique mathematical expression, are treated through their analysis, graphing and solving with a CAS.

1. Introducción

Es claro que el aprendizaje significativo de contenidos matemáticos no puede relegarse al simple cálculo. Debe entrar en los procesos de generalización y concreción que conforman todo el proceso matemático.

Hay circunstancias en las que una vez adquiridos los procedimientos por el alumno, la reiteración de un procedimiento se hace necesaria como medio para cubrir otros objetivos. Tal puede ser el caso de cálculo de límites o del cálculo de derivadas en diversos lugares de la física o de la geometría. Otras veces es aconsejable repetir un mismo procedimiento para lograr sacar una conclusión que generalice diversas situaciones.

El ordenador permite rescatar parte del tiempo dedicado a estos menesteres. En el primer caso porque es más rápido y seguro, al tiempo que clarifica el contenido que se desea estudiar sin que se vea cubierto por el aparato de cálculo empleado. En el segundo porque es un medio para resolver en breve espacio de tiempo muchos problemas análogos pero con parámetros diferentes que ayuden a que el modelo matemático se desprenda de las experiencias realizadas con mayor facilidad y en menor tiempo.

Finalmente y sobre todo permite, dentro del ámbito del quehacer del alumno, técnicas de trabajo, de descubrimiento, de establecimiento de conclusiones que son complicadas o poco rentables, cuando no imposibles, sin su ayuda.

En el uso de los ordenadores en el aula puede aparecer un sesgo: la sobrada atención a la herramienta, volviendo a caer en el defecto que tratamos de evitar, dedicando tiempo excesivo ahora al conocimiento de los medios informáticos. Por ello, creemos que el uso de programas de matemáticas en Secundaria ha de tener como característica el que el conocimiento del medio no sea un objetivo en sí, entendiendo, de todas formas, que sus contenidos específicos han de tener un desarrollo suficiente como para no entorpecer los fines que pretenda la matemática. Desde luego un desarrollo mayor del estudio de la herramienta prestará mayores posibilidades, aunque a la larga, terminará en un esfuerzo no rentable. El equilibrio lo ha de buscar el profesor.

La experiencia que se describe a continuación intenta ser un reflejo de lo apuntado anteriormente. En ella el modelo matemático se extrae del análisis de un ejemplo concreto. Se estudia someramente el modelo y se buscan otros ejemplos que puedan reflejarse en el mismo, analizándose con el ordenador. Con el mismo medio se resuelven problemas en el modelo construido y finalmente se aplican a nuevas situaciones en diversos contextos.

Creemos por otro lado que la experiencia podría ser, al mismo tiempo, un paradigma de aplicación del principio de unidad en la enseñanza secundaria, propiciado sustancialmente en este caso por el uso de medios informáticos.

2. Descripción

La experiencia ha consistido en el estudio contextual de la función exponencial negativa. Hemos tomado diversas situaciones pertenecientes a distintas áreas de conocimiento y se ha estudiado el fenómeno común de decremento de algunas poblaciones que lo hacen con la ley "disminuir cada unidad de tiempo en un número proporcional a la población que quede en el momento".

Después de una pequeña introducción a partir del ejemplo del decremento del poder adquisitivo por una inflación constante, se han utilizado textos extraídos de Farmacología, Fisiología, Ecología, Química, Física y Bibliometría, en los que una magnitud disminuye según una exponencial negativa; se han estudiado las gráficas de los fenómenos y se han resuelto problemas en ellos. Hemos intentado una metodología de descubrimiento dirigido.

3. Objetivos

- Conocer casos de la exponencial negativa y detectarlos en distintos contextos.
- Representar la función que se obtiene de los casos anteriores, describir sus características y obtener datos de la misma.
- Resolver problemas algebraicos a partir de las ecuaciones que se pueden obtener en distintos casos concretos, devolviendo los resultados en el contexto del problema.

- Conocer y valorar las matemáticas como lenguaje común expresivo de fenómenos de distinto enunciado ocurridos en distintos contextos y pertenecientes a diferentes áreas del conocimiento.
- Mostrar al alumnado la matemáticas como herramienta para resolver problemas concretos e interpretar los resultados obtenidos.

4. Alumnos y medios

El Instituto de Educación Secundaria Rodríguez-Moñino está situado en una barriada de nivel social heterogéneo, aunque entre sus alumnos predomina la clase social y cultural media-alta.

La experiencia se realizó con alumnos de la asignatura de informática, con una media de calificaciones académicas algo superior a la media del Instituto.

Se han prestado a la misma 54 alumnos de tercero de BUP, todos de la opción de ciencias, utilizando el horario de la EATP de informática. El programa utilizado ha sido DERIVE, ver. 3.13.

La tercera parte de los alumnos habían trabajado un día con DERIVE en clase de matemáticas y otros ocho tenían una ligera iniciación al uso del programa por su profesor de física. El resto no conocían DERIVE, pero todos tienen dos cursos de utilización de otros programas de ordenador.

Se contó con un aula de ordenadores heterogéneos (386 o superior salvo uno) suficiente como para que en todos los grupos los alumnos puedan trabajar en parejas.

5. Diseño del trabajo

El nivel de conocimientos de la herramienta necesario para el desarrollo de la unidad se consiguió con una hoja de trabajo previa que inicia a los comandos editar, representar, resolver y aproximar con los contenidos mínimos para el desarrollo del resto de la experiencia.

Luego se pasó a ver la siguiente hoja de trabajo, de adquisición de contenidos de matemáticas mediante los siguientes ejemplos, además del de introducción citado que se construyó a partir de la inflación constante.

5.1. Absorción de un fármaco

En este apartado los alumnos deducen la expresión de la exponencial negativa en general,

$$y = ce^{-rt}$$

a partir de un análisis del suceso citado y del paso al límite cuando el número de divisiones del tiempo tiende a infinito, que resuelven con DERIVE. Utilizan el comando representar de DERIVE para dibujar en la pantalla diversas gráficas cambiando c y r y obtener, finalmente, las características de la función que se está estudiando.

5.2. Eliminación de un fármaco

En este apartado se refuerzan los contenidos anteriores mediante la aplicación por el alumno del comando de representación de gráficas a este nuevo caso, muy parecido al ejemplo precedente.

5.3. Pervivencia de muchas especies de animales

Si la mortalidad es muy elevada en los individuos jóvenes de una especie, caso muy frecuente en la naturaleza, la pervivencia de un grupo se puede representar satisfactoriamente por una exponencial inversa,

$$N_t = N_0 e^{-rt}$$

donde r se obtiene experimentalmente. Por ejemplo, para la melospiza melodia se determina que es 0.43.

Los alumnos utilizan este ejemplo para resolver cinco problemas, ahora algebraicos, con datos de una población de pájaros y de un hayedo. Reciben una sugerencia sobre un procedimiento de resolución, más extensa en los primeros problemas que en los últimos, algo más complicados éstos dentro de la sencillez. Se introduce con un ejemplo el semiperíodo de desintegración, que se verá en el siguiente apartado.

5.4. Desintegración de un elemento radiactivo

La desintegración es proporcional al número de átomos en una proporción constante que se llama constante de desintegración y se representa por λ.

Ahora se resuelven problemas tanto de representación gráfica como algebraicos. Se introduce el semiperíodo de desintegración y se resuelve un problema típico del C-14.

5.5. La información científica

Algunos de los estudios realizados sobre la influencia de la antigüedad de un texto científico en la demanda que del mismo se hace, por ejemplo, en las bibliotecas, indican que nuevamente nos encontramos con una exponencial negativa si se obvia el primer año,

que puede ser atípico. Ello se utiliza para resolver nuevamente problemas, debiendo el alumno extraer los datos, que no se expresan directamente.

6. Desarrollo

Se informó a los alumnos de que las tres sesiones eran una experiencia, de los objetivos de la misma y de que al final se evaluarían sus conocimientos con una prueba. Los alumnos se mostraron dispuestos a colaborar y se agruparon por parejas, en casi todos los casos coincidentes con las que tenían en clase de informática

En la primera sesión se entregó la hoja previa, que los alumnos hicieron sin demasiados problemas en un tiempo de 50 minutos de media. No se detectaron diferencias dependiendo de la experiencia previa con el programa. El profesor apenas intervino.

La segunda hoja (para dos sesiones), a petición de los alumnos se hizo en dos horas consecutivas. Al final de la misma se observaron síntomas de cansancio (no de abandono del trabajo) en algunos alumnos.

En el transcurso de la sesión se detectaron algunas dificultades: un buen número de alumnos no entendían bien las preguntas basadas en la interpretación geométrica de la derivada y la mayoría no entendían las preguntas sobre la derivada segunda. Por otra parte la adaptación del modelo a datos reales originó desconcierto en algunos alumnos, que no comprendían cómo podía obtenerse como resultado un número decimal cuando se trataba de seres vivos, por ejemplo.

En todo momento el clima de la clase fue distendido y entre los alumnos hubo un claro clima de colaboración y trabajo en equipo. Solamente un grupo de dos alumnos se saltó algunos ejercicios de la hoja de trabajo y otro no se adaptó a ella, intentando por su cuenta ampliar sus conocimientos sobre el programa.

Las intervenciones del profesor a demanda de los alumnos que solicitaban alguna aclaración fueron más abundantes en esta sesión que en la preparatoria. La velocidad de trabajo de los alumnos presenta una mayor dispersión que en la sesión precedente. No hubo ningún caso de grupo que se perdiera en el trabajo.

7. Evaluación

7.1. Diseño

Se han evaluado el grado de logro de los objetivos de conocimiento y de actitudes, la marcha del proceso y los medios (hojas de trabajo, ordenadores y programa) y el grado de satisfacción de los alumnos mediante una pregunta indirecta. El profesor hace finalmente algunas consideraciones.

– *Evaluación de los objetivos:*

• De adquisición de conocimientos por los alumnos.

Se repartieron tres cuestiones, precedidas de la siguiente introducción:

a) En la primera intentarás resumir algunos aspectos generales de la función que has estado estudiando.
b) Luego deberás resolver ejercicios sencillos a partir de un texto, del que habrás de obtener los datos.
c) Finalmente haréis un resumen de un párrafo de un texto, intentando describir matemáticamente una situación.

En la primera se le preguntó sobre las características de la función que acababan de estudiar. En la segunda se les proponía que, a partir de un texto de Fisiología donde se estudia sin notación matemática la eliminación de un gas inerte del pulmón, encontrasen los parámetros que definen la función, la representaran y resolviesen algún sencillo problema algebraico. En la tercera parte, más difícil tanto por el contenido y expresión del texto como por ser pregunta abierta, aunque se hace en equipo, se propone la interpretación de una página de electricidad.

• Otros objetivos

Se preguntó por escrito a cada alumno si se habían alcanzado los objetivos que pretende la experiencia mediante una encuesta cerrada. También se les preguntó su opinión sobre la proporción de teoría y práctica que a su juicio se debería emplear en clase de matemáticas y sobre la utilización de sistemas de cómputo algebraico u otros programas de ordenador en clase, igualmente en pregunta cerrada.

– *De los medios*

Solamente una pregunta se hizo al alumnado. Se les pidió que expresasen simplemente, utilizando preferentemente calificativos las ventajas e inconvenientes del programa para el desarrollo de las sesiones.

7.2. Resultado

La evaluación de adquisición de contenidos arrojó unos resultados dispares en función de la cuestión. La primera cuestión fue contestada por la mayoría de los alumnos. La

correlación de la calificación con otras pruebas de matemáticas fue normal (0.65). En cuanto a las otras cuestiones, las contestaciones correctas se circunscribieron a alumnos con buenas calificaciones. Los alumnos expresaron que habría sido necesario extenderse algo más en los ejercicios propuestos.

Por lo que respecta a la consecución de los objetivos actitudinales las contestaciones son claras. La mayor parte de los alumnos (89%) consideran que el objetivo de valorar las matemáticas como lenguaje común a muchas otras ciencias se ha alcanzado, quedando más claro después de las sesiones. El porcentaje desciende al 65% al preguntar si con las clases tenidas quedaba más claro que antes que las matemáticas tienen un interés práctico. En ningún caso se niegan las actitudes que se han evaluado: el resto de las respuestas indican que ya habían adquirido estas actitudes en clases anteriores.

En cuanto a la proporción de tiempo dedicado a la teoría, la mayor parte (59%) de los alumnos opinan que las matemáticas en Secundaria deberían ser una equilibrada mezcla de razonamiento abstracto y de aplicaciones a problemas concretos. Un 84% piensan que el ordenador es útil en la clase de matemáticas y el 14% restante que todas las clases de matemáticas deberían hacerse con ordenador.

La evaluación de los medios se ha circunscrito a preguntar calificativos sobre el programa y muestra un resultado altamente positivo para el sistema de cómputo algebraico utilizado. Sintetizando las contestaciones podríamos decir que son:

Rápido, claro, sencillo, fácil, bueno	30
Se gana en tiempo y seguridad	7
Hemos comprendido conceptos que no teníamos claro antes.	.3
Se obtiene una mejor idea de los problemas	3
Ayuda a razonar, a memorizar, a concretar	4
Divertido	5

En cuanto a los aspectos negativos la respuesta más frecuente es que ninguno. Algunos alumnos (todos los del ordenador más antiguo) se quejaban de alguna lentitud en las representaciones gráficas. Pero lo que más llama la atención es el miedo a que su excesivo uso impida el cálculo y el desarrollo de la capacidad de razonamiento, que tienen seis alumnos.

Finalmente, a la pregunta si desearían desarrollar otro tema de forma análoga, el 86% contesta afirmativamente. Seis alumnos añaden “si se puede”.

8. Conclusiones

La experiencia hay que considerarla positiva en cuanto a los logros de objetivos actitudinales, medios, ambiente de trabajo y motivación. Se logran además objetivos no previstos en algunos alumnos, que aclaran los contenidos previos de matemáticas. La adquisición de contenidos por los alumnos puede considerarse normal, y su correlación con las calificaciones de matemáticas también. Creemos que esta adquisición de contenidos debe potenciarse con el aumento del tiempo dedicado a las aplicaciones.

Bibliografía

BERKELEY PHYSICS COURSE (1969). *Electricidad y magnetismo.* Reverté. Barcelona.

CABEZAS CORCHERO (1993). "Aproximación a la historia local..." En: *En memoria de López-Arenas.* Alfar. Sevilla.

DAJOZ (1974). *Tratado de ecología.* Mundi-prensa. Madrid.

DREUX(1981). *Introducción a la ecología.* Alianza editorial. Madrid.

FERREIRO ALÁEZ (1993). *Bibliometría.* Madrid: EYPASA.

FLÓREZ, ARMIJO Y MEDIAVILLA (1980). *Farmacología humana.* Universidad de Navarra.

GUYTON (1976). *Tratado de fisiología médica.* Importécnica. Madrid.

KUTZLER (1997). "El impacto de DERIVE en la enseñanza y evaluación de matemáticas". En *Delta,* n. 1. Valencia.

LLINARES Y SÁNCHEZ (1990). *Teoría y práctica en educación matemática.* Alfar. Sevilla.

LÓPEZ-BARAJAS (1988). *Fundamentos de metodología científica.* UNED.

MACÍAS, BUREO, YUSTE (1992). *Problemas de química general,* Badajoz.

ROANES MACÍAS Y ROANES LOZANO (1996). *Primeros pasos en DERIVE y en Maple.* Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid.

Reseña de libros y revistas

E. GRAHAM, J. S. BERRY, A. J. P. WAKINS (editores): *Mathematical Activities with DERIVE.* Chartwell-Bratt, 1997. 210 páginas (inglés).

Nos encontramos ante una excelente recopilación de artículos (veintidos) de diferentes autores. Están todos enfocados a la realización de actividades con DERIVE para la clase de Matemáticas. DERIVE es uno de los Sistemas de Cómputo Algebraico (SCA) más utilizados en la actualidad.

Cada uno de ellos comienza con un resumen inicial, seguido de una descripción de las actividades propuestas y un desarrollo pormenorizado de las mismas. La mayor parte de ellos proceden de artículos presentados en congresos internacionales sobre DERIVE, aunque se ha desarrollado su componente de aplicación en el aula y se han estructurado de modo similar.

No hay una homogeneidad en el nivel de los temas tratados. Ello, a mi modo de ver, no es un defecto sino una virtud del libro, al haberse podido seleccionar los temas con total libertad por su adecuación a ser tratados con DERIVE y no estar constreñida tal elección por una adecuación curricular (en todo caso dependiente del país de aplicación).

No obstante, la mayoría de ellos son utilizables en los últimos cursos de las Enseñanzas Medias, aunque se cubrirían temas desde los primeros cursos de las mismas hasta primer curso de Universidad. Por ejemplo hay tres artículos de autores españoles y son profesores de Escuelas Universitarias.

Muchos de los artículos tratan cuestiones muy trilladas, como la utilización de SCA en la enseñanza de temas como límites, desarrollos de Taylor, ceros de un polinomio,... (lo cual no limita en modo alguno su interés) y también otros mucho menos frecuentes, como Mecánica, modelización de problemas, vectores en R , fractales...

Finalmente señalar que el libro no contiene disquete, pero se pueden obtener de forma gratuita los programas pidiéndolos por e-mail o enviando un disquete en blanco a uno de los editores.

Un libro, pues, de recomendada lectura (¡y aplicación en el aula!) para aquellos profesores deseosos de introducir o ensayar la introducción de DERIVE como auxiliar en la enseñanza de la Matemática.

E. Roanes Lozano

T. ETCHELLS, J. BERRY: *Learning Numerical Analysis through DERIVE.* Chartwell-Bratt, 1997. 239 páginas (inglés).

Este es un libro de muy agradable lectura de introducción al Análisis Numérico usando como herramienta el ordenador. Esta integración supone una gran ventaja sobre la ya habitual de realizar ejercicios con calculadora.

En enseñanza secundaria en Gran Bretaña se estudia Análisis Numérico en Secundaria como parte del GCE Advanced Level. Según los autores se cubren en este libro los contenidos de un curso básico. Entiendo que el nivel del libro correspondería al del último año de enseñanza preuniversitaria o primer año de enseñanza universitaria.

Se le supone al lector cierto grado de manejo del programa DERIVE (solamente se incluyen al final unos resumen de comandos para DERIVE para DOS y el nuevo DERIVE para Windows). No obstante lo claro y detallado del texto permite al lector no experto en DERIVE realizar los ejemplos con el ordenador sin dificultad.

El primer tema está dedicado a sucesiones recurrentes (aprovechando el comando ITERATES). Ejercicios bien elegidos van ilustrando el desarrollo del tema (hasta llegar a soluciones analíticas y mal condicionamiento).

El segundo está dedicado a la aproximación de raíces. Se tratan los métodos de bisección, interpolación lineal e iterativos.

El tercero está dedicado a la aproximación de funciones por polinomios (desarrollos de Taylor, polinomios interpoladores de Lagrange) y estudio de la longitud de curvas.

El cuarto está dedicado al análisis del error cometido en algunos de los procesos estudiados hasta aquí.

Los temas quinto y sexto están dedicados, respectivamente, a la diferenciación e integración numéricas (métodos de los trapecios, de los rectángulos, regla de Simpson...).

En el último tema (séptimo) se introducen las ecuaciones diferenciales.

Es importante hacer notar que el uso de DERIVE no está limitado al de calculadora algebraico/numérica, sino que se explotan continuamente sus posibilidades gráficas.

Acaba el libro con la solución de los ejercicios propuestos. En resumen: un trabajo muy pensado y recomendable, que puede utilizarse en el aula de un modo global o selectivo.

E. Roanes Lozano

JOHN BERRY, JOHN MONAGHAN (editores): *The State of Computer Algebra in Mathematics Education.* Chartwell-Bratt, 1997. 216 páginas (inglés).

Se trata de un resumen del Simposio Internacional sobre Sistemas de Cómputo Algebraico en Educación Matemática, celebrado en Hawai en 1995.

Los autores de los resúmenes de las comunicaciones que incluye son líderes en la enseñanza de Matemáticas con apoyo de SCA, procedentes de once países. Entre ellos, el prestigioso profesor austriaco Mag. Josef Böhm, autor de un artículo publicado en el número 39 de este Boletín. En cuanto al nivel, abarca un amplio espectro sobre enseñanza de Matemáticas para alumnos de entre 14 y 21 años.

En este libro se trata con profundidad el problema de la revisión de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en cursos orientados a Matemáticos, Ingenieros y Científicos, como consecuencia de la aparición de los CAS, como Derive, Macsyma, Maple, Mathcad, Mathematica, MathView, TI-92. Está dividido en cinco partes. La primera está dedicada al curriculum en la era de los CAS. Aunque el uso de CAS en educación matemática está en sus albores, se reconoce que son muchos los profesores que ya han integrado el uso de CAS en sus asignaturas. Se trata de responder a cuestiones esenciales al respecto, como las siguientes: ¿qué lugar deben ocupar los algoritmos? ¿qué reordenación de cuestiones a tratar conviene? ¿qué extensión en el curriculum es deseable o posible?

La segunda parte trata sobre igualdad de oportunidades para todos los alumnos. Se reconoce que aunque el acceso a los CAS es hoy tan fácil como a una calculadora, unos alumnos disponen de un sistema CAS y otros no.

La tercera parte se dedica el desarrollo de material soporte escrito para uso de CAS en Educación Matemática, tratando de responder a cuestiones como las siguientes: ¿por qué usamos CAS en Educación Matemática?, ¿se ayuda a los alumnos sólamente usando CAS?, ¿qué tipo de usos puede darse a dicho material soporte escrito?

En la cuarta parte se trata sobre estrategias convenientes para atraer a más profesores a usar CAS en sus clases, facilitando su iniciación al uso de estos sistemas y al acceso a "worksheets" desarrolladas por los más expertos en su uso.

En la quinta parte se trata la cuestión de ¿cómo afecta el uso de CAS a que los estudiantes entiendan?

No se propugna en el libro una revolución en los programas como consecuencia de la aparición de los CAS, sino más bien una evolución los mismos a medida que se van difundiendo los CAS entre profesores y alumnos y en la sociedad, en general.

E. Roanes Macías

TERENCE ETCHELLS, MARK HUNTER, JOHN MONAGHAN, STEFANO POZZI, ANDREW ROTHERY: *Mathematical Activities with Computer Algebra (a photocopiable resource book).* Chartwell-Bratt, 1997. 128 páginas (inglés).

Este libro de actividades nace de la creencia, basada en la práctica, de que hay muchos modos en los que los sistemas de cómputo algebraico pueden mejorar la enseñanza de Matemáticas y de que algunas ideas sobre "workseets" (hojas de trabajo) pueden ayudar a los profesores a apreciar los referidos modos.

Las "worksheets" están desarrolladas en estilo general, sin ceñirse a un determinado sistema de cómputo algebraico, por dos razones: para evitar enfatizar en la pura tecnología de apretar esta o aquella tecla para conseguir un resultado y porque tales sistemas mejoran constantemente, cambiando la sintaxis y apareciendo nuevos sistemas.

El libro contiene 23 "woorksheets" relativas a ocho áreas de trabajo. Sobre funciones, gráficas y cálculo hay cuatro "worksheets": multiplicación de líneas rectas, ecuación de una tangente, funciones de tasación y fábricación de mosaicos periódicos. Sobre diferenciación y optimización hay seis: visualización de funciones y derivadas, aproximación a la función derivada, diseño de gráficas, población y polución, cono de volumen máximo y optimización de costos de transporte. Sobre integración hay cuatro: área bajo una curva, áreas encerradas, una función cuya derivada es ella misma y diseño de vasos de vino. Sobre sucesiones y series hay dos, el límite de una sucesión y visualización de aproximaciones de Taylor. Sobre vectores y matrices hay otras dos: visualización de transformaciones matriciales y grupos sanguíneos. Sobre mecánica hay tres: movimiento circular, balanceo con seguridad y no volviendo atrás. Además, hay una sobre trigonometría, titulada modelando la función seno, y otra sobre métodos numéricos, titulada resolviendo ecuaciones con tangentes.

Cada una de estas 23 actividades contiene una hoja de trabajo fotocopiable para el estudiante, una hoja de ayuda fotocopiable para el estudiante, notas detalladas para el profesor, soluciones y una orientación para facilitar su implementación sobre un sistema de cómputo algebraico. Algunas de ellas contienen ademas' sugerencias que invitan a extender el trabajo. Su nivel de dificultad es variable, con objeto de mostrar su utilidad en distintos niveles de enseñanza.

Termina el libro con la descripción de una lista de comandos útiles para implementar estas "worksheets" en los sistemas de cómputo algebraico de más difusión en Educación Matemática en la actualidad: Derive (vesión 3), MathPlus/Theorist (versión 2), Maple V (release 4), TI-92, Mathematica (versión 2) y Macsyma (versión 2).

E. Roanes Macías

Boletín SEIEM de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Acaba de salir el número 1 del Boletín de esta Sociedad.
Editores: Luis Rico y Eduardo Lacasta.
Dpto. de Didáctica de la Matemática.
Universidad de Granada.

Revista de la Asociación de Usuarios de DERIVE.

Acaba de salir el número 1 de la revista DELTA de la "Asociación Española de Usuarios de Derive".
E.U. de Ingeniería Técnica Agrícola
Universidad Politécnica de Valencia
Dpto. de Matemática Aplicada
Av. Blasco Ibáñez, 21. 46010 VALENCIA
e-mail: llorens@mat.upv.es

Problemas propuestos

Problemas propuestos
en la V OLIMPIADA MATEMÁTICA RIOPLATENSE
celebrada en Costa Rica en septiembre de 1996

Problema n° 1:

Dada una familia C de círculos del mismo radio R, que cubre completamente el plano (es decir, todo punto del plano pertenece al menos a un círculo de la familia), demuestre que existen dos círculos de la familia tales que la distancia entre sus centros s menor o igual que $R\sqrt{3}$.

Problema n° 2:

Un cuadrado mágico es una tabla

a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}

en la cual figuran todos los números naturales del 1 al 16 y tal que:

- todas las filas tienen la misma suma s
  ($s = a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + a_{i4}$ para i=1,2,3,4),
- todas las columnas tienen la misma suma s
  ($s = a_{1i} + a_{2i} + a_{3i} + a_{4i}$ para i = 1,2,3,4) y
- ambas diagonales tienen la misma suma s
  ($s = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44} = a_{14} + a_{23} + a_{32} + a_{41}$).

Se sabe que $a_{22} = 1$ y $a_{24} = 2$. Calcule a_{44}.

Problema n° 3:

Los números reales x, y, z, distintos dos a dos, satisfacen

$$x^2 = 2 + y, \qquad y^2 = 2 + z, \qquad z^2 = 2 + x.$$

Halle los posibles valores de $x^2 + y^2 + z^2$.

Problema n° 4:

Sea S la circunferencia de centro O y radio R, y sean A, A' dos puntos diametralmente opuestos en S. Sea P el punto medio de OA' y l una recta que pasa por P, distinta de AA' y de la perpendicular a AA'. Sean B y C los puntos de intersección de l con y sea M el punto medio de BC.

a) Sea H el pie de la altura desde A en el triángulo ABC. Sea D el punto de intersección de la recta $A'M$ con AH. Determine el lugar geométrico de los puntos D al variar l.

b) La recta AM intersecta a OD en I. Pruebe que $2OI = ID$ y determine el lugar geométrico de los puntos I al variar l.

Problema n° 5:

Se dispone de un tablero de n filas y 4 columnas, y de fichas de color blanco, amarillo y celeste. El jugador A coloca cuatro fichas en la primera fila del tablero y las tapa para que el jugador B no las conozca. ¿Cómo debe hacer el jugador B para llenar el mínimo número de filas con fichas que le aseguren que en alguna de las filas tendrá al menos tres aciertos?

(*Nota:* Un acierto del jugador B se produce cuando coloca una ficha del mismo color y en la misma columna en que lo hizo A).

Problema n° 6:

Halle todos los enteros k para los cuales existe una función $f\colon N \to Z$ que satisface:

(i) $f(1995) = 1996$.

(ii) $f(xy) = f(x) + f(y) + kf(m_{xy})$ para todos los naturales x, y; donde m_{xy} denota el máximo común divisor de los números x, y.

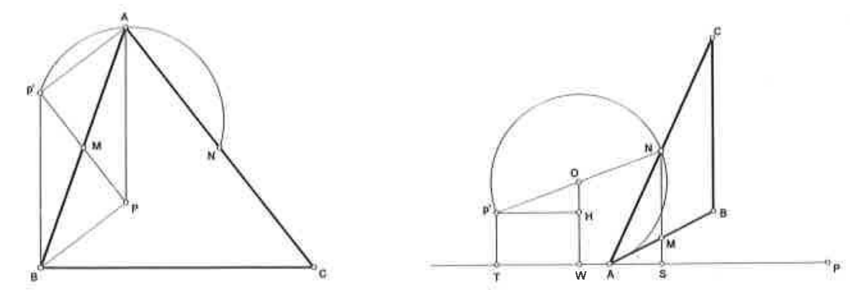
Nota: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $Z = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.

Problemas resueltos

Problema 6° (BOLETÍN N.° 30)

Dados tres puntos no alineados, M,N,P, sabemos que M y N son puntos medios de dos lados de un triángulo y que P es el punto de intersección de las alturas de dicho triángulo. Construir el triángulo.

Solución:



Sea ABC el triángulo pedido y M,N,P, los puntos dados. Tomando P', simétrico de P respecto a M, se deduce que el cuadrilátero APBP' es paralelogramo, porque las diagonales se cortan en sus puntos medios. Luego AP' es paralela a BP y por tanto perpendicular al lado AC. Así, el ángulo P'AN es recto y el vértice A pertenece a la circunferencia de diámetro P'N. Con razonamiento análogo se deduce que también pertenece a la circunferencia de diámetro P" M, siendo P" el simétrico de P respecto a N. Es inmediato que A pertenece también a la perpendicular a MN trazada por P. Con todo ello, se deducen estas dos construcciones:

1) Se halla P', simétrico de P respecto a M.
2) Se traza la circunferencia de diámetro P'N.
3) Se traza por P la perpendicular a MN.

O bien, después de 1) y 2) se pasa a

3') Se traza la circunferencia de diámetro P"M.

Las intersecciones de 2) y 3) o de 2) y 3') dan el vértice A y sus simétricos respecto a M y N son los B y C correspondientes.

Discusión:

Al ser un problema de segundo grado, puede tener dos soluciones, una o ninguna, según sean las posiciones de los datos iniciales.Llamamos π a la perpendicular por P al segmento MN.

Si el punto P es interior a la banda determinada por las perpendiculares en los extremos del segmento M y N hay dos soluciones, porque los puntos P' y N se encuentran en distintos semiplanos de los determinados por π; por tanto, la recta 3) es secante a la circunferencia 2).

Si π pasa por M, la circunferencia 2) pasa por M y P' coincide con A; el triángulo ABC es rectángulo en B.

Si π corta al segmento en la prolongación de éste (fig. 2) la condición para que exista solución es que el radio de la circunferencia de diámetro P'N, sea mayor que la distancia del centro a π.Esa condición se traduce en la figura por OW < OP'. Poniendo PS = d, MS = s, y MN = d, teniendo en cuenta que OW es la base media del trapecio STP'N y OP' la hipotenusa del triángulo rectángulo P'HO, se llega a $2s(s + a) < (d/2)^2$. Se puede hacer la siguiente traducción gráfica: la diagonal del cuadrado cuyo lado sea la media proporcional de s y $s + a$, ha de ser menor que la mitad de la distancia PS, condición comprobable fácilmente con la regla y el compás.

Alberto Aizpún

Problema 2° (BOLETÍN N.° 35)

Sea ABC un triángulo acutángulo y D un punto en su interior tal que AC.BD = AD.BC y < ADB = < ACB + 90°.

a) Calcule el valor de la razón

$$\frac{AB.CD}{AC.BD}$$

b) Demuestre que las tangentes en C a las circunferencias circunscritas a los triángulos ACD y BCD son perpendiculares

Solución:

Como es habitual , designaremos por a, b, c, a los lados del triángulo dado, opuestos, respectivamente, a los vértices A, B, C. Determinación del punto D: la primera condición dada se puede escribir

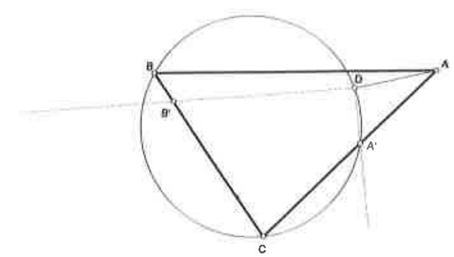
$$\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB} = \frac{b}{a}$$

y D pertenece a la circunferencia lugar de los puntos cuya relación de distancias a los puntos fijos A y B es una constante dada. Además, por la segunda condición, D pertenece al arco capaz del ángulo C + 90 construido sobre el segmento AB. Uno y otro lugares son secantes y el punto D existe.

Demostración b):

Basta hacer una inversión de polo C y poyencia CD = k. Sea A' el inverso de A y B' el inverso de B. Como D es inverso de sí mismo, las rectas DA' y DB' son inversas, respectivamente, de las circunferencias F_1 y F_2. Por las propiedades de la inversión las rectas AB y A'B' son antiparelelas en el ángulo BCA, lo que significa ang(CAB) =A = ang(CB'A'). Igualmente, BD y B'D son antiparalelas en el ángulo BCD , luego ang(CDB) = ang(CB'D). Restando miembro a miembro las dos igualdades resulta ang(BD'A') = ang(CDB) – A. Del mismo modo se llega a ang(DA'B') = ang(CDA) – B y sumando estas dos últimas igualdades se obtiene ang(DB'A') + ang(DA'B') = ang(CDB) + ang(CDA) – A – B . Pero ang(CDB) + ang(CDA) = 360 – ang(ADB) = 270 – C. Por tanto , queda ang(DB'A') + ang(DA'B') = 270 – (A + B + C) = 90. Eso significa que el triángulo A'DB' es rectángulo en D y, como la inversión conserva los ángulos , F_1 y F_2 son ortogonales.

Cálculo a):



Las propiedades de la inversión permiten escribir

$$DA' = DA\cdot\frac{k}{CD.CA};\quad DB' = DB\cdot\frac{k}{CD.CB};\quad A'B' = AB\frac{k}{CA.CB}$$

que, por ser k = CD quedan en

$$DA' = DA\cdot\frac{DA}{b};\quad DB' = \frac{DB}{a};\quad A'B' = \frac{c}{ab}\cdot CD$$

de donde sale

$$(DA')^2 = (DB')^2 = \left(\frac{DA}{b}\right)^2 + \left(\frac{DB}{a}\right)^2 = 2\left(\frac{DB}{a}\right)^2$$

En el triángulo rectángulo A'DB', es

$$\left(\frac{c}{ba}\cdot CD\right)^2 = 2\left(\frac{DB}{a}\right)^2,$$

es decir,

$$\left(\frac{DC}{DB}\right)^2 = 2\cdot\frac{b^2}{c^2}$$

Por tanto la relación pedida es

$$\frac{AB.CD}{AC.BD} = \sqrt{2}$$

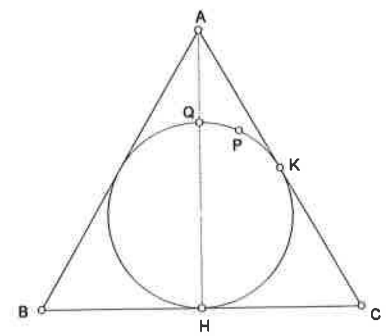
Alberto Aizpún

Problema 9° (BOLETÍN N.° 32)

En un triángulo equilátero ABC cuyo lado tiene longitud 2 se inscribe la circunferencia Γ.

a) Demostrar que para todo punto P de Γ la suma de los cuadrados de sus distancias a los vértices A, B y C es 5.

b) Demostrar que para todo punto P de Γ es posible construir un triángulo cuyos lados tienen las longitudes de los segmentos AP, BP y CP, y que su área es $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



Solución:

a) En la figura designaremos por r la longitud,conocida, del radio de Γ. Tomando H como origen de coordenadas, son A(0; 3r) , B(–1; 0), C(1; 0), P(x; y). Las coordenadas de P cumplen $x^2 + y^2 - 2ry = 0$. (I).

Con ello, son $PA^2 = x^2 + (y - 3r)^2 = -4ry + 9r^2 = -4ry + 3$

$PB^2 = (x + 1)^2 + y^2 = 2ry + 1 + 2x$ (II)

$PC^2 = (x - 1)^2 + y^2 = 2ry + 1 - 2x$

Sumando miembro a miembro y teniendo en cuenta (I) y el valor de r, se llega a $S = 5$.

b) Por la simetría de la figura basta estudiar el caso de que P recorra el arco QM, en el que el segmento de mayor longitud es PB y el de menor es PA. Las coordenadas de P cumplen las condiciones $0 < x < 1/2$; $2r > y > (3r)/2$ además de la ecuación (I).

Eso supone las limitaciones

$$r \le PA \le 1;\ \sqrt{7}r \le PB \le 3r;\ 1 \le PC \le \sqrt{7}r$$

que hacen, en todo caso, PB < PA + PC.

Para calcular el área que se pide, pongamos PA = a, PB = b, PC =c, ang (b; c) = α y llamemos S el área pedida. Será S = (b.c.sen α) : 2 . Como $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos\alpha$, será

$$sen^2\,\alpha = 1 - cos^2\,\alpha = 1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2$$

y por tanto

$$S^2 = \frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{16}$$

Teniendo en cuenta (II) y (I) , resulta

$$S^2 = \frac{3}{16}$$

Alberto Aizpún

Problema 11° (BOLETÍN N.° 39)

Un subconjunto $A \subseteq M = \{1, 2, 3, ..., 10, 11\}$ es *majo* si tiene la siguiente propiedad:

"Si $2k \in A$, entonces $2k-1 \in A$ y $2k+1 \in A$".

(El conjunto vacío y M son majos). ¿Cuántos subconjuntos majos tiene M?

Nota: La solución publicada en el número 43 (pág. 91) de este Boletín era incorrecta. Damos a continuación una válida.

Solución:

Contando los subconjuntos majos según el número de números pares que a él pertenezcan (habida cuenta de que un conjunto con n elementos posee 2^n subconjuntos), tenemos:

Con 0 números pares, $2^6 = 64$ subconjuntos majos.
Con 1 número par, $5.2^4 = 80$ subconjuntos majos.
Con 2 números pares,
- a) consecutivos, $4.2^3 = 32$ subconjuntos majos.
- b) no consecutivos, $6.2^2 = 24$ subconjuntos majos.

Con 3 números pares,
- a) consecutivos, $3.2^2 = 12$ subconjuntos majos.
- b) dos de ellos consecutivos y el tercero no, $6.2 = 12$ subconjuntos majos.
- c) no consecutivos $1.1 = 1$ subconjunto majo.

Con 4 números pares,
- a) consecutivos, $2.2 = 4$ subconjuntos majos.
- b) tres de ellos consecutivos y el cuarto no, $2.1 = 2$ subconjuntos majos.
- c) sólo dos de ellos consecutivos, $1.1 = 1$ subconjunto majo.

Con 5 números pares, 1 subconjunto majo (el propio M)

Resultando, en total *233 subconjuntos majos.*

Miguel Amengual Covas
Cala Figuera

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.°	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										
		1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°	9.°	10.°	
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	–	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	–	–	–	–	–	–	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	–	–	–	–	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	–	–	–	–	–	–	–	–	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	–	–	–	–	–	–	–	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	–	–	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	–	–	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	XX	44	45	32	44	44	32	32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	–	–	–	–	–	–	–	–	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	–	–	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	–	–	–	–	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	46	XX	33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	–	–	–	–	–	–	
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	XX	XX	XX	35	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	XX	35	34	–	–	–	–	–	
32	OMI-92-MOSC´U/	35	XX	XX	XX	XX	XX	38	35	46	38	
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	–	–	–	–	–	–	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	XX	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	
	/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	–	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	–	–	–	–	
35	OMI-93-Turq./	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	39	
	OI-93-Méjico/PNS	XX	XX	39	39	XX	XX	–	–	–	–	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	
37	OME-f2-94/PNS	40	XX	XX	40	XX	XX	45	45	40	–	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
39	OI-94-Brasil/OME-	43	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	
	f1-94/f1-94(v)	46	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	–	–	–	–	
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
43	OME-f-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
44	OMI-96-India/	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	45	XX	XX	XX	–	–	–	–	
45	OI-96-Costa Rica	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
	OME-96-f1	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	–	–	

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. OMR = Mat. Rioplatense. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVIO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACION EN EL BOLETIN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente

Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4. Si se utiliza LATEX, el formato debe ser 17cm × 12,8 cm en 11 puntos (para ser aprovechado directamente en la imprenta).

Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el boletín).

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además,si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo dos archivos:

a) archivo del documento para el procesador de texto utilizado.
b) archivo del documento en código ASCII

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.

Si se desea, las figuras pueden incluirse en archivos de extensión TIF (en otro caso se captarán por escaneado)

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín (no al apartado, que ya no está operativo).

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

RELACION DE OTROS ARTICULOS QUE HAN SIDO ADMITIDOS PARA SER PUBLICADOS EN PROXIMOS NUMEROS DE ESTE BOLETIN

- Una introducción a la ordenación de polinomios y al cálculo de bases de Groebner, por Carlos Ramón Laca y Eugenio Roanes Lozano.
- Demostración del teorema de Tales por métodos elementales, por Pedro Pescador Díaz.
- Una demostración del teorema del coseno, por Juan Carlos Cortés López.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen grauitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

3	4	34	35	37	38	39
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
40	41	42	43	44	45	46
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

Envío adjuntos sellos para el franqueo (32 pts. por cada número del boletín).
Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5 al 33 y 36 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid
Tel. 394 62 48

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION

D. .... Teléf. (....) ....
Dirección particular ....
Ciudad .... Cod.° Postal ....
Centro de trabajo ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de la misma ....
para que cargue en la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1996-97 y siguientes.

Fecha .... de .... de 1997

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (incluida la cuota federativa de 2.000 ptas.).
Remítanse ambas partes a
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517). Tel. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.

Fecha .... BANCO: ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de ésta ....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....
Nombre de la cuenta ....

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION (CENTROS)

D. ....

como .... del Centro ....

domiciliado en ....

Ciudad .... Cod.° Postal .... Teléf. ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....

Sucursal o Agencia .... en ....

Dirección de la misma ....

para que cargue en la cuenta: .... / .... / ..../ ..../.

abierta al nombre: ....

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1996-97 y siguientes.

Fecha .... de .... de 1997

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (incluida la cuota federativa de 2.000 ptas.).
Remítanse ambas partes a
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517). Tel. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.

Fecha .... BANCO: ....

Sucursal o Agencia .... en ....

Dirección de ésta ....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....

Nombre de la cuenta ....