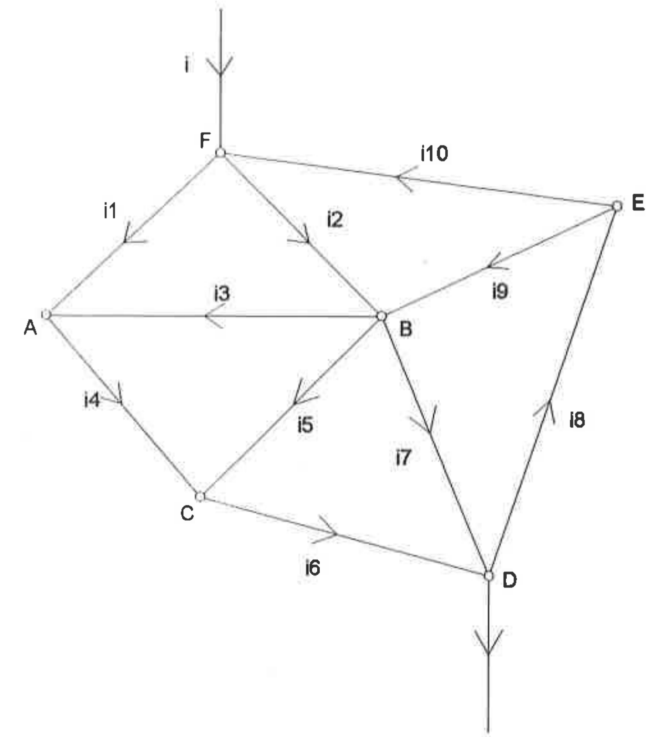
SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS



BOLETIN N.° 45
FEBRERO DE 1997

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS
DE LA SOCIEDAD "PUIG ADAM" DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L.- San Pedro, 23 bis -28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: 611 59 88

La portada de este número reproduce la figura 3 del artículo titulado "Un algoritmo nuevo para una aplicación conocida", contenido en este número 45 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad:

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juán XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 - Madrid
Telf. (91) 394 6248

ÍNDICE

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS	(Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ	(Castilla-León)
SALVADOR HERRERO PALLARDO	(Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE	(Relaciones Institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO	(Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ÁNGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

JOAQUÍN GONZÁLEZ GÓMEZ

Convocatoria de la Asamblea General Ordinaria de 1997

Se convoca la Asamblea General Ordinaria de la Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas correspondiente a 1997 para el día 26 de abril de 1997, en los locales de la Facultad de CC. Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid (edificio nuevo), Ciudad Universitaria, a las 11:30 en primera convocatoria y a las 12:00 en segunda, con el siguiente

ORDEN DEL DIA

1. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior.
2. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad
3. Informe del tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos.
4. Elección de nuevos cargos directivos.
5. Asuntos de trámite.
6. Ruegos y preguntas.

¡¡Esperamos tu asistencia!!

XV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

convocado por

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
y Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras

BASES

Primera: Podrán participar en el Concurso los alumnos de B.U.P., E.S.O. y F.P. en tres niveles: a) Primer nivel: alumnos de 1° B.U.P., 3° E.S.O. y F.P. I b) Segundo nivel: alumnos de 2° B.U.P., 4° E.S.O. y 1° de F.P. II c) Tercer nivel: alumnos de 3° B.U.P., 1° Bachillerato y 2° y 3° de F.P. II

Segunda: Las pruebas consistirán en la resolución de problemas (los mismos para todos los concursantes de cada uno de los tres niveles) y se realizarán en Madrid, en un solo día, el sábado 21 de junio de 1997 a partir de las 10 horas.

Tercera: Se concederán diplomas, acompañados de los premios correspondientes, a los mejores de cada nivel.

Cuarta: Los Centros que deseen presentar a algunos de sus alumnos (hasta un máximo de seis) deberán realizar la preinscripción antes del dia 21 de Mayo de 1997, dirigiéndose por carta al presidente de nuestra sociedad:

Prof. Javier Etayo Gordejuela
Departamento de Algebra
Facultad de Ciencias Matemáticas
Ciudad Universitaria
28040-Madrid

En esta preinscripción no es preciso hacer constar los nombres de los alumnos seleccionados. Si algún centro desea presentar más de seis alumnos, debe solicitarlo antes de la fecha mencionada anteriormente.

Quinta: Los centros entregarán a los alumnos que envíen, credenciales individuales en las que se haga constar que han sido seleccionados por su excepcional aprovechamiento en Matemáticas, así como el curso en que están matriculados en el año académico 1996-97.

NOTA IMPORTANTE: Los dos primeros clasificados de cada nivel están invitados a participar en la VI Olimpiada Rioplatense, que está previsto celebrar en diciembre de 1997 en la ciudad de Mendoza (Argentina). Ello en el supuesto de que se consigan becas para pagar los billetes hasta Buenos Aires. De la pasada edición de la Olimpiada Rioplatense se hace una reseña más adelante, en este mismo número del Boletín.

Luto por Pascual Ibarra

Sí, estamos de luto, amigos. El que fuera fundador, primer Presidente y, mientras tuvo fuerzas, alma de nuestra Sociedad nos ha dejado en los comienzos de este diciembre. Un largo tiempo de sufrimiento progresivo que llegó a agotar su indomable resistencia le ha llevado a encontrar el supremo descanso y el premio eterno que podemos esperar para quien supo vivir sus creencias y su religiosidad con la integridad y el rigor que puso en todo cuanto de verdad sentía.

No estará de más que esta Sociedad que él principalmente creó llegue a homenajear debidamente su memoria; pero hoy, forzado por la cercanía de las fechas y porque en mi retiro navideño no me es factible, ni tampoco tendría sentido, intentar un acopio de datos personales o biográficos, únicamente sabré dedicar a nuestro grande y buen compañero las modestas palabras que me dicten nuestra vieja amistad y el recuerdo de tantos puntos de coincidencia entre su camino y el mío. Largos caminos ambos.

El primero de esos encuentros, naturalmente, es el de nuestro mutuo conocimiento. Debió de ser allá por el año 60 cuando Julio Fernández Biarge me llamó para proponerme participar en unos cursillos que se organizaban todos los años para preparación de profesores de los institutos laborales entonces existentes. Julio había intervenido en las ocasiones anteriores pero aquel año, y a última hora, le habían comprometido para examinar en las mismas fechas en Guinea; de alguna reválida probablemente. La urgencia del caso y su deseo de no producir ninguna perturbación hizo que me recomendase –desconocido como yo era– y me presentara al organizador de aquellos cursillos que era precisamente Pascual Ibarra. Así creo que nos conocimos. Por lo demás, el curso funcionó bien y me dejó un excelente sabor; y nosotros desde entonces fuimos amigos.

Por insustancial y estrictamente personal que pueda parecer este episodio, se me perdonará su evocación por lo que a mí en particular me sugiere y pueda resultar de significativo a los demás. Es curioso en efecto que, por las vueltas que da la vida, figuramos en él Pascual, Biarge y yo mismo, los primeros que sucesivamente ocupamos la Presidencia de la Sociedad "Puig Adam". Pero, además, este mismo nombre tiene claras resonancias en la vida de Pascual Ibarra. Sin la menor duda quiso él bautizar así a nuestra Sociedad en homenaje a quien para él fue maestro, inspirador y amigo. Don Pedro Puig Adam había fallecido poco antes, en enero de aquel 1960, y aún podíamos rememorar las palabras que le ofrendaron Fernández Biarge, con quien había convivido en el Instituto San Isidro, y Pascual Ibarra, que sentía por él auténtica veneración. Como colaborador suyo en la formación de la enseñanza laboral que en aquellas fechas nos congregó, se trasladaba desde su cátedra en Valladolid, un Valladolid que a mi parecer quedó para siempre fuertemente impreso en su alma cuando más tarde pasó definitivamente a Madrid.

Aquí se entregó con el vigor y el ímpetu en él acostumbrados a su labor en la cátedra o en la Inspección de Enseñanza Media, en los programas de actualización de la enseñanza

de la Matemática o en la Escuela de Formación del Profesorado, en actividades de la Real Sociedad Matemática Española, en ponencias para comisiones y comunicaciones a congresos, en conferencias, artículos, lecciones y, de modo especial para nosotros, en formar y consolidar nuestra Sociedad, ocupándose de los menores detalles, desde los concursos de problemas hasta este mismo Boletín, para el que solicitaba colaboraciones a sus colegas cuando no era él mismo quien entregaba sus propios trabajos. Así hasta pasada su jubilación en la que muchos de nosotros le acompañamos. En unas u otras de esas tareas lo hemos conocido casi todos y yo, en particular, he recorrido con él grandes tramos de nuestro quehacer común.

Ahora que se nos ha ido, la imagen que a mí al menos me queda presenta distintas notas, todas ellas sin embargo relacionadas. La primera, por ser seguramente para él la más acusada, ya la hemos señalado: su devoción por la figura y la obra de su maestro, en la vida y en la enseñanza, don Pedro Puig Adam. Honró su memoria en toda ocasión, nos ilustraba con las actitudes, posturas y lecciones de él recibidas, y fue él su referencia y guía constante en toda su actuación. Tal demostración de fidelidad, virtud admirable y más en tiempos en que no parece abundar demasiado, es, entre las que componían su personalidad y su carácter, digna de figurar en un lugar de privilegio.

Carácter el suyo, por otra parte, sólido y de gran fuerza y entereza. No era persona versátil ni que se dejase llevar de vaivenes. Había abrazado unos principios muy bien fundamentados y los defendía incluso con vehemencia pero siempre, también, con argumentos claros y bien construidos, haciendo compatible el respeto a los demás con la firmeza de su posición. Ello se reflejaba hasta en su porte exterior: para algunos casi la figura de un militar. No ignoremos tampoco entre sus cualidades el culto a la amistad al que siempre rindió tributo. Tocado ya por la enfermedad y por las limitaciones físicas, seguía manteniendo una tertulia en la que compañeros y amigos le dedicaban sus atenciones generosamente correspondidas.

Dejo para el final la consideración de la que fue su indiscutible vocación: la enseñanza. A su servicio sacrificó otras dedicaciones. Me contaba una vez la posibilidad y aun facilidad con que podría haberse hecho doctor, impulsado por compañeros suyos, como Santaló, que le ofreció su dirección. "¿Y para qué? -me explicaba- ¡Si a mí lo que me gusta, lo que yo quiero, es dar clases de bachillerato!" Y, ciertamente, sus clases debieron de ser estupendas. No podemos pensar de otro modo quienes le hemos escuchado en conferencias y lecciones llenas de sugerencias, manteniendo sin pestañear la atención del oyente. La elección de magníficos ejemplos ilustrativos, el establecimiento de insospechadas relaciones entre situaciones diversas, la progresiva y morosa elaboración del motivo principal, convertían en un verdadero gozo sus explicaciones. La mano de su maestro asomaba seguramente por detrás sin despojarle pese a ello de toda su originalidad. Y lo mismo ocurría con las lecciones y artículos que dio a la publicación. Añádase a la consistencia científica la corrección y la elegancia literaria, tanto en la expresión oral como en la escrita, para completar el retrato.

Un retrato que, desde luego, habría merecido mayor profundidad y un mejor intérprete: sin duda lo sería cualquiera de los que disfrutaron de su conocimiento y cercanía. Tengo la esperanza de que todos ellos, y más que nadie su esposa y su hijo, sabrán disculpar la premura y la falta de serenidad con que he tenido que pergeñar este dibujo. Porque todos estamos hoy de luto. Para todos ha sido un maestro, a todos nos ha enseñado y nos dejó tal lección que seguiremos todavía aprendiendo de él. Seguro que le gustaría que terminase aplicándole algunas de las palabras que su venerado maestro dedicó a quien lo fue suyo:

"La lección que nos dio no está acabada. ¡Y el corazón no olvida!"

José Javier Etayo

Recuerdo de Gonzalo Sánchez Vázquez

En la crónica-resumen publicada en el último número de nuestro Boletín dando cuenta de la celebración en Sevilla del VIII I.C.M.E., señalábamos cuál fue la nota dominante en el transcurso del encuentro : el sentir general de tristeza por la forzosa ausencia del Presidente del Comité Nacional y principal impulsor de la celebración de aquel Congreso en Sevilla, Gonzalo Sánchez Vázquez, primer Presidente, también, de la Federación a la que pertenece nuestra Sociedad. Cerrado ya el número llegó la noticia del fallecimiento del Prof. Sánchez Vázquez.

Todo aquel que tuvo la oportunidad de tratarle y conocerle más allá del simple trato superficial de las conversaciones profesionales accidentales, quedaba atraído por algo que superaba la coincidencia de actividad docente. Fue un hombre de fortaleza interior poco común, que le permitió resistir humanamente situaciones muy adversas y vencer dificultades vitales muchas veces fatales para otros. En nuestra opinión es esa faceta de lucha contra las adversidades y el ejemplo de su entereza ante ellas lo que habría que destacar.

Pero también es cierto que esas son cuestiones que deben quedar, mejor, para la autoestima de cada uno y airearlas ante otros, a veces desconocidos, parece una intromisión indebida.

Hombre de extensa cultura, su afición intelectual preferida fue el estudio de la Geometría, muy especialmente de la métrica euclídea; sobre su significado y sobre su enseñanza en los distintos niveles de la educación ha dejado muchos escritos e impartió muchos cursos para el Profesorado.

Su labor docente se cumplió como Catedrático de Matemáticas de Institutos, y una parte de ella la ejerció en Venezuela, donde aún se recuerda su labor, como he tenido oportunidad de comprobar. Fue al poco de su regreso a España y una vez instalado definitivamente en Sevilla, cuando supo conglomerar las inquietudes profesionales de muchos de sus compañetros para formar la Sociedad Andaluza de Profesores de Matemáticas "Thales", en 1981 , que acogió a todo Profesor de Matemáticas desde la Escuela Maternal hasta la Universidad, la que inmediatamente comenzó a organizar encuentros y cursos tanto para Profesores de EGB como de Bachillerato y de Formación Profesional.

Tres años más tarde aparecía el número 0 de la revista "Thales", en cuya presentación pudo expresar algunas de las muchas ideas que fueron constantes para él. Por ejemplo: "Nuestra revista no es, no quiere ser, el órgano elitista de un grupo minoritario de profesores, por muy capacitado que sea, sino que quiere ser el marco de comunicación y de expresión no sólo de nuestros socios, sino de todos los pofesores y grupos interesados en las cuestiones didácticas de las matemáticas, aunque no pertenezcan a nuestra Sociedad". Y aún:

"Creemos que hay que llegar a crear una revista de gran calidad con las demás Sociedades y grupos de nuestro país. Una revista ambiciosa que sea de y llegue a todos los profesores de matemáticas españoles, porque, en definitiva, los problemas de su enseñanza son similares y tenemos el derecho y el deber de enriquecernos con las sugerencias, experiencias e investigaciones de los demás."

Esa misma idea de dar a conocer a todos el trabajo de todos fue la principal de las que le llevaron a impulsar la creación de la Federación de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Bajo su presidencia se llevaron a cabo en 1987 la redacción de Estatutos y la concreción de objetivos, en las que trabajaron las cuatro Sociedades con las que en principio quedó formada la Federación: Sociedad Andaluza "Thales", Sociedad Aragonesa "P. Sánchez Ciruelo", Sociedad Canaria "Isaac Newton y la nuestra, entonces Sociedad Castellana "Puig Adam".

Y una vez consolidada la Federación, animó a todos para trabajar en la consecución de algo que nunca había tenido lugar en España: uno de los Congresos del I.C.M.E. Aunque se intentó, no pudo conseguirse en 1992 (que se celebró en Quebec), pero sí en 1996 con el último de Sevilla. Desde el primero, celebrado en Lyon en 1969, no había vuelto ese Congreso a un país latino.

Nombrado, como no podía ser menos, Presidente del Comité Nacional, tuvo que abandonar los trabajos meses antes de la apertura del Congreso por causa de la enfermedad que habría de ser final. Como si la vida hubiera tenido la mezquindad de negarle la última satisfacción. Sin embargo el afecto de todos los asistentes le acompañó en la sesión de clausura con las miradas en una silla vacía.

Los que le conocimos le echaremos de menos.

Alberto Aizpún

XI Olimpiada Ibero-Americana de Matemáticas

Costa Rica - 1996

La XI Olimpiada Ibero-americana de Matemática se celebró en la ciudad de San José de Costa Rica, en los días 18 al 29 de septiembre de 1996, y como en el año precedente, a continuación del Simposio Iberoamericano de Educación Matemática en el Nivel Medio y de la Reunión Anual del SIPROMA (Sociedad Iberoamericana para la Promoción de la Matemática).

Los estudiantes participantes quedaron alojados en las magníficas instalaciones de la Escuela de Agricultura de la Regón Tropical Húmeda, en Guapiles (provincia de Limón).

Las pruebas de la Olimpiada se realizaron los dias 24 y 25. Los cuatro alumnos españoles (escogidos por haber obtenido los mejores resultados en la XXXVII Olimpiada Internacional de Matemáticas) fueron acompañados por los profesores don Francisco Bellot Rosado y don José V. Aymerich Miralles.

Se propusieron, como de costumbre, seis problemas, cuyos enunciados pueden verse en la sección de **PROBLEMAS PROPUESTOS** de este Boletín, para resolverlos en dos sesiones, de cuatro horas y media cada una. Tres de esos seis problemas fueron propuestos por España.

Tal como se acordó en la Olimpiada anterior, cada problema fue calificado con una puntuación de 0 a 7, como en la Internacional, por lo que cada alumno podía obtener un máximo de 42 puntos. La calificación tuvo lugar el día 26 y el 27 se acordó conceder 6 medallas de oro (a partir de 34 puntos), 12 de plata (entre 26 y 33), 18 de bronce (entre 13 y 25) y 6 menciones honoríficas a los estudiantes que, sin obtener medalla, resolvieron completamente bien un problema.

Las medallas de oro fueron ganadas por un estudiante de cada uno de los seis países: Argentina, Uruguay, Chile, Colombia, México y Brasil.

Los cuatro estudiantes españoles obtuvieron sendas medallas de bronce, con las siguientes puntuaciones:

Sergi ELIZALDE TORRENT: 24 puntos. **MEDALLA DE BRONCE**
(de Barcelona. Fue el primero en la XXXII O.M.E. Obtuvo Mención honorífica en la XXXVII O.M.I.)

Antonio JARA DE LAS HERAS: 24 puntos. **MEDALLA DE BRONCE**
(de Jaén. Fue cuarto en la XXXII O.M.E.)

Víctor MARTÍNEZ DE ALBÉNIZ MARGALEZ: 23 puntos. **MEDALLA DE BRONCE**
(de Barcelona. Fue sexto en la XXXII O.M.E.)

Fernando RAMBLA BARRENO: 20 puntos. **MEDALLA DE BRONCE**
(de Cádiz. Fue tercero en la XXXII O.M.E.)

La Copa Puerto Rico, que premia al país con mayor progresión en las últimas olimpiadas, fue ganada por México. El acto de clausura se celebró en la E.A.R.T.H. el día 28.

La próxima Olimpiada Iberoamericana tendrá lugar en Guadalajara (Jalisco, México), del 11 al 21 de septiembre de 1997.

Podemos anunciar también que la XXXVIII Olimpiada Internacional de Matemáticas se celebrará en Argentina en el próximo mes de julio de 1997.

XXXIII Olimpiada Matemática Española

Primera fase - Madrid

Las pruebas de la PRIMERA FASE de la *"XXXIII Olimpiada Matemática Española"* correspondientes al curso 1996-97 y a los distritos de Madrid, se han celebrado en los días 29 y 30 de noviembre de 1996.

Esta Olimpiada está organizada por la *Real Sociedad Matemática Española,* bajo el patrocinio de la *Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio.* Podían participar en ella los alumnos matriculados en C.O.U., en el último curso de Formación Profesional de segundo grado, 2° curso del 2° ciclo de Bachillerato Experimental (Reforma), tercer curso de B.U.P. y 1° y 2° curso del bachillerato L.O.G.S.E. Excepcionalmente, otros de cursos inferiores, si son avalados por sus profesores.

Como es sabido, esta Olimpiada se desarrolla en dos fases: la Primera tiene lugar en los distintos distritos; este año, tres de ellos corresponden a la Comunidad de Madrid, que cuenta con cinco Universidades estatales, además de las privadas; los tres ganadores de cada distrito son propuestos a la Subdirección General de Becas y Ayudas al Estudio, a través de la R.S.M.E., para la concesión de un premio en metálico (este año, de 50.000, 35.000 y 25.000 pesetas para los tres ganadores de cada Distrito) y son invitados a participar en la Segunda Fase. Los mejores clasificados en ésta, además de recibir los premios correspondientes, servirán de base para formar los equipos que representarán a España en las próximas olimpiadas internacionales.

La mencionada Segunda Fase se realizará en **Valencia** los días 6, 7 y 8 de marzo de 1997.

Como de costumbre, las pruebas se desarrollaron en dos sesiones de cuatro horas de duración cada una, en las que se propusieron ocho problemas, cuyos enunciados pueden verse en nuestra sección de **Problemas Propuestos** de este mismo Boletín. Estos problemas son los mismos que se propusieron simultáneamente en la mayor parte de los distritos españoles.

Las pruebas de los tres distritos que corresponden este año a todas las universidades de nuestra Comunidad, se realizaron conjuntamente, y a ellas concurrieron 129 alumnos de los 144 inscritos, casi el doble que el año anterior.

Cada problema se calificó con un máximo de **10 puntos,** por lo que había una posibilidad teórica de obtener **80 puntos.** El nivel medio de preparación de los asistentes fue bastante bajo, debido a la presencia de un buen número de alumnos que mostraron desconocer lo que son unas pruebas olímpicas, no consiguiendo ni un solo punto en los ocho problemas. Unos pocos, no obstante, destacaron claramente sobre ese nivel medio.

Damos a continuación los nombres de los alumnos premiados en los distritos de Madrid A, B y C, ordenados por puntuaciones decrecientes:

1° A	**D. Miguel FADON PERLINES,** del C.O.U. del I. B. "Cardenal Cisneros" de Madrid	**55 puntos**
1° B	**D. Pablo ANGULO ARDOY,** del C.O.U. del I. B. "Cervantes", de Madrid	**48 puntos**
1° C	**D. Gerardo GARCIA DE BLAS,** del C.O.U. del Colegio "Buen Suceso" de Madrid	**42 puntos**
2° A	**D. Miguel de la TORRE RODRIGUEZ,** del C.O.U. del I.B. "San Juan Bautista" de Madrid	**38 puntos**
2° B	**Dña. Carolina ALONSO DIAZ,** del C.O.U. del I.B. "San Juan Bautista" de Madrid	**33 puntos**
2° C	**D. Angel NUÑEZ MENCIAS,** del C.O.U. del I. B. "Avenida de los Toreros" de Madrid	**30 puntos**
3° A	**D. Nelo Alberto MAESTRE BLANCO,** de 3° de B.U.P. del Colegio "Retamar" de Madrid	**29 puntos**
3° B	**D. Iker ALMANDOZ GARCIA,** del C.O.U. del "Colegio Menesiano" de Madrid	**26 puntos**
3° C	**D. Jorge GONZALO ALONSO,** del C.O.U. del Colegio "Los Sauces" de Madrid	**26 puntos**

Debemos señalar que los premiados **D. Miguel FADON PERLINES** y **D. Angel NUÑEZ MENCIAS,** ya participaron en la O.M.E. anterior, siendo alumnos de 3° de B.U.P. quedando clasificados, respectivamente, en los lugares **1° B** y **2ª C,** por lo que pudieron concurrir a la 2ª fase.

El premiado **D. Pablo ANGULO ARDOY,** consiguió el primer premio de nuestro Concurso de Resolución de Problemas, como alumno de 3° de B.U.P. en 1996 y el cuarto, como alumno de 1°, en 1994. También **D. Nelo Alberto Maestre Blanco,** de 3° de B.U.P., obtuvo el 4° puesto en nuestro Concurso de 1996, como alumno de 2°. Los premiados en nuestros concursos anteriores **D. Raúl GARCIA MENA** y **D. Iñaki ARMENDARIZ BENITEZ,** quedaron dignamente clasificados en esta O.M.E., con 24 y 23 puntos, siendo destacable que el último participaba como alumno de 3° de B.U.P.

También este año puede comprobarse que los Centros de procedencia de los alumnos premiados son, en su mayoría, los mismos que en los anteriores, lo que es prueba de que en ellos se realiza una encomiable labor de estímulo y preparación.

Los problemas propuestos resultaron de desigual dificultad para los alumnos. No aparecieron soluciones aceptables de los problemas 7° y 8°, ni totalmente correctas del 3°. Damos a continuación las puntuaciones medias alcanzadas, en cada uno de los problemas (el máximo era de 10 puntos), por todos los participantes y por los nueve premiados:

Problema n°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°
Puntuación media								
de todos:	0,5	0,7	0,7	1,5	0,7	2,2	0,1	0,5
de los premiados:	3,8	5,4	3,2	6,9	5,7	9,0	0,3	2,0

Nuestra enhorabuena a los premiados y a los profesores que los han preparado.

Olimpiadas Matemáticas Argentinas

OLIMPIADA DE MAYO

Cuando en noviembre de 1994 se constituye la Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas, se propone como objetivo prioritario la convocatoria y organización de una olimpíada que permita a los estudiantes más jóvenes de habla española o portugesa participar en una competición internacional con un nivel adecuado a su edad y formación. Dados los escasos recursos económicos de los países iberoamericanos, esta olimpíada debía ser además de bajo costo.

Nace así la Olimpíada de Mayo, que, al estilo de la Olimpíada de la Cuenca del Pacífico, se realiza por correspondencia. Tiene dos niveles:

- Primer Nivel, para estudiantes que cumplan 13 años a partir del 1 de enero del año en que se celebra la Olimpíada.
- Segundo Nivel, para estudiantes que cumplan 15 años a partir del 1 de enero del año en que se celebra la Olimpíada.

En su primera edición, celebrada en mayo de 1995, participaron nueve países. Este número llegó a 13 en la II Olimpíada de Mayo, que tuvo lugar en mayo de 1996.

La organización de la Olimpíada de Mayo es la siguiente:

Un Coordinador Central, un Coordinador Auxiliar, un Delegado de cada país con participación, un Organizador Local (que puede coincidir con el Delegado del país), un Comité Olímpico, integrado por los Coordinadores Central y Auxiliar y hasta cinco miembros más.

El Comité Olímpico designa anualmente una Comisión de problemas, responsable de proponer la prueba, que consiste, en cada nivel, en la resolución por escrito de cinco problemas en un tiempo máximo de tres horas. La corrección se realiza en cada país, de acuerdo con los criterios de evaluación establecidos por la Comisión de problemas. Cada problema vale diez puntos.

El número de participantes no está limitado, pero se consideran participantes oficiales de cada país únicamente a los diez mejores de cada nivel. Las calificaciones de los participantes oficiales son enviadas al Coordinador Central, junto con las pruebas completas del primero, tercero y séptimo de cada nivel.

Los premios (Diplomas de Medalla de Oro, de Plata o de Bronce) se asignan de modo que, en cada país:

- No haya más de una Medalla de Oro.
- No haya más de tres medallas, sumando los oros y las platas.
- No haya más de siete medallas en total.

Además, se otorga Mención de Honor a quienes obtengan diez puntos en algún problema sin llegar a merecer Medalla.

El pasado año, los ganadores de Medalla de Oro de ambos niveles fueron invitados a participar en un Campamento Matemático, que tuvo lugar en Chapadmalal, junto a Mar del Plata, sede de la próxima Olimpíada Internacional. Acudieron quince chicos de nueve países distintos, entre los que figuraban los españoles

- Alberto Suárez Real, de Salinas (Asturias) Medalla de Oro en el Primer Nivel, y
- Pablo José Mira Castello, de Agost (Alicante) , Medalla de Oro en el Segundo Nivel.

La experiencia resultó enormemente motivadora, y se repetirá este año: El 2° Campamento de los Oros de Mayo reunirá a los ganadores de 1997 en la República Argentina entre los días 4 y 9 de agosto.

Existe el proyecto de organizar, como fase previa a la Olimpíada, a mediados de marzo, un concurso que se pretende hacer masivo, con cincuenta cuestiones de opción múltiple, que se resolverían durante una hora aproximadamente. Podrían inscribirse en él Centros o clases completas –de 1°, 2° y 3° de ESO o equivalentes– y serviría para seleccionar a los concursantes de la fase final

La III Olimpíada de Mayo se celebrará en 1997 el día 10 de Mayo.

V OLIMPIADA RIOPLATENSE

Impulsada por la Federación Iberoamericana de Competiciones Matemáticas, la Olimpíada Rioplatense se realiza anualmente en el mes de diciembre en la República Argentina, y reúne a jóvenes iberoamericanos, previamente seleccionados a través de Concursos reconocidos por la Federación y que se desarrollen en varios niveles.

Si bien en las tres primeras ediciones participaron únicamente estudiantes argentinos y uruguayos, a partir de 1995 se abre la invitación a alumnos de otras nacionalidades, y en la V Olimpíada, celebrada el pasado mes de diciembre en Puerto Iguazú (Argentina), han tomado parte 64 estudiantes procedentes de siete países iberoamericanos: Argentina, Brasil, Colombia, Chile, España, México y Uruguay. Sus edades oscilaban entre los 12 y los 18 años, y estaban distribuidos en cuatro niveles:

- Nivel A : estudiantes con menos de 8 años de escolarización.
- Primer Nivel: estudiantes con 8-9 años de escolarización.

– Segundo Nivel: estudiantes con 10-11 años de escolarización.
– Tercer Nivel: estudiantes con 12-13 años de escolarización.

Como es habitual en las Olimpiadas, la competición es individual, y consiste, para cada nivel, en la resolución de seis problemas por escrito en dos días consecutivos - tres problemas cada día - en un tiempo máximo de tres horas y media.

La corrección de las pruebas se realiza conjuntamente por el Jurado - integrado por un máximo de tres Profesores de cada nacionalidad - sin que se agrupe en ningún momento a los estudiantes por países. Se asigna 1 punto a cada problema bien resuelto, y sólo eventualmente medio punto a soluciones incompletas. Se intenta que, en cada nivel, aproximadamente la mitad de los participantes resulten premiados, distribuyendo las Medallas de Oro, Plata y Bronce en la proporción aproximada 1:2:3. En la Ceremonia de Clausura y entrega de premios no se hacen públicas las puntuaciones de ningún estudiante.

Los 24 problemas propuestos podrán encontrarse en el próximo número de este Boletín.

La distribución de medallas se recoge en la siguiente tabla:

	NIVEL A	NIVEL 1	NIVEL 2	NIVEL 3
ORO	2	1	2	1
PLATA	2	3	3	2
BRONCE	4	4	4	3

Los estudiantes españoles invitados a participar, ganadores de la última edición del concurso de Resolución de Problemas de nuestra Sociedad fueron los siguientes:

- Carlos Domingo.
- Iñaki Armendáriz.
- Borja Guardiola.
- Pablo Angulo.
- Carolina Alonso.

Compitieron en los niveles Primero y Segundo, ya que en el momento de celebrarse la Olimpíada ninguno de ellos tenía 12 años completos de escolarización. Obtuvieron Medalla de Bronce Carlos Domingo (Primer Nivel) y Pablo Angulo (Segundo Nivel)

En el Jurado se integraron las Profesoras Mercedes Sánchez y María Gaspar, mientras que Marco Castrillón, ganador en su momento del Concurso de la Puig Adam, y ex olímpico medallista en la V Olimpiada Iberoamericana, acompañó a los alumnos en calidad de Profesor Tutor.

Hay que agradecer a la Dirección General de Educación de la Consejería de Educación y Cultura de la Comunidad de Madrid su colaboración, que ha hecho posible la presencia de los estudiantes y profesores madrileños en esta Olimpiada.

Al innegable interés que las Olimpiadas tienen para quienes en ellas participan, se suma, en este caso, para los estudiantes españoles, el hecho de que la Olimpiada Ríoplatense les ha permitido participar en una Competición internacional en una edad más temprana de lo habitual, conviviendo y compartiendo experiencias con otros muchachos con aficiones e intereses similares a los suyos, muchos de los cuales han participado, con gran éxito, en las últimas Olimpíadas Internacional e Iberoamericana. Por todo ello, la experiencia ha resultado única y enormemente motivadora.

La VI Olimpíada Rioplatense se celebrará en diciembre de 1997 en Mendoza (Argentina). Nuestra sociedad está invitada a participar. Merece la pena el esfuerzo necesario para hacerla posible.

I Concurso Iberoamericano de Generación de Problemas SIPROMA

En la reunión anual del SIPROMA (Sociedad Iberoamericana para la Promoción de la Matemática) celebrada en Costa Rica coincidiendo con la XI Olimpiada Iberoamericana se acordó convocar, conjuntamente con la O. E. I. (Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura) el "I Concurso Iberoamericano de generación de problemas de Matemáticas". Las Bases son las siguientes:

1. Este Concurso pretende estimular la participación de profesores, estudiantes y público en general en la generación de problemas originales de Matemáticas.
2. Cada persona puede enviar al concurso uno o más problemas.
3. Los problemas deben ser originales e inéditos y no lejanos al tipo de problemas de la Olimpiada Iberoamericana.
4. Los problemas deben enviarse a alguna de las Sedes Regionales de la OEI, por cualquier via de comunicación (correo electrónico, fax, correo usual, courier, etc.) antes del 15 de marzo de 1997, a "Concurso SIPROME - OEI".
5. Los problemas han de ser confidenciales hasta su envío y el autor o autores se comprometen a mantener la confidencialidad durante dos años después de la fecha de cierre de esta convocatoria.
6. El autor o autores dan su consentimiento para que la SIPROMA haga el uso que más le convenga de estos problemas.
7. Cada problema debe estar encabezado por el nombre de su creador, dirección postal, teléfono, fax y correo electrónico y debe llevar la solución.
8. No se aceptarán problemas cuyos enunciados lleven datos que permitan identificar al autor o autores.
9. Los idiomas oficiales de este concurso son español y portugués.
10. Las decisiones del Jurado Internacional creado para este Concurso son inapelables.
11. Se otorgará un primer premio de 1.000 US dólares, un segundo premio de 500 U.S. dólares y un tercero de 300 U.S. dólares. A cada uno de los premiados se les otorgará un diploma y una medalla. En caso de considerarlo conveniente, el Jurado otorgará tantas menciones como sean necesarias. El Jurado podrá declarar vacante uno o más de estos premios.
12. Los miembros del Jurado no podrán participar en el Concurso.
13. El fallo del Jurado se dará a conocer en septiembre de 1997 durante la ceremonia de clausura de la XII Olimpiada Iberoamericana de Matemática.

14. Cualquier circunstancia no contemplada en esta convocatoria será resuelta por el Jurado.
15. La participación en este Concurso supone la aceptación de estas bases.

La Sede central de la O. E. I. en España es la siguiente:

c/ Bravo Murillo, 38.
28015- MADRID.
Tels.: 594 43 82 / 44 42 / 45 02 / 46 22 / 46 82 / 45 62
Fax: 594 32 86
e-mail; weboei@oei.es
URL: http://www.oei.es/sipconc.htm

Recensiones en Zentralblatt Für Didaktik der Mathematik

Como ya anunciamos en números anteriores de nuestro Boletín, la dirección de Zentralblatt für Didaktikder Mathematik (ZDM) incluye en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Nos complace dar cuenta de las nuevas recensiones aparecidas, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL 28 (4) DE 1996

#2399 (sección F60). Algunos problemas relacionados con los polinomios de Lucas y Pell, por J. Bosco Romero y B. Hernández Bermejo, Bol. Soc. Puig Adam 42 (1996), págs. 12-27.

#2400 (sección F60). La cuarta dimensión: una alternativa al teorema de Fermat, por J. Sanz Pascual, Bol. Soc. Puig Adam 42 (1996), págs. 65-74.

#2512 (sección H60). Transformaciones lineales con sistemas de cómputo algebraico, por E. Roanes Lozano y E. Roanes Macías, Bol. Soc. Puig Adam 42 (1996), págs. 28-46.

#2678 (sección N10). Prácticas de cálculo numérico con Matlab, por C. Montes y M. de los Angeles Navarro, Bol. Soc. Puig Adam 42 (1996), págs. 47-64.

RECENSIONES PUBLICADAS EN ZDM VOL 28 (15) DE 1996

#3147 (sección G40). Las mediatrices de un triángulo y su relación con las medianas, por J. B. Romero Márquez y M. Angeles López, Bol. Soc. Puig Adam 43 (1996), págs. 78-83.

#3236 (sección H40). Implementación de un paquete de dibujo de grupos cristalográficos planos, por M. Garbayo Moreno y E. Roanes Lozano, Bol. Soc. Puig Adam 43 (1996), págs. 71-77.

#3239 (sección H60). Estudio de transformaciones lineales de R^3 con sistemas de cómputo algebraico, por E. Roanes Lozano y E. Roanes Macías, Bol. Soc. Puig Adam 43 (1996), págs. 40-60.

#3302 (sección K20). Los eternos cuadrados mágicos, por C. Romo Santos, Bol. Soc. Puig Adam 43 (1996), págs. 61-70.

#3087 (sección F50). Procedimientos para lograr aproximaciones de distintos irracionales algebraicos, por J. Peralta, Bol. Soc. Puig Adam 43 (1996), págs. 26-39.

Copias de las recensiones están en nuestra Sociedad, a disposición de los interesados.

Notas breves

CALENDARIO MATEMATICO (Curso 96-97)

En la misma línea que los calendarios que posiblemente visteis en la revista SUMA anterior al número 20 y en la misma que los calendarios que suelen aparecer en revistas como Mathematics Teacher, y con la mayoría de los problemas originales, o al menos sin haber aparecido en otros calendarios, Floreal García Alcaine, del Centro de Profesores de Castellón, ha coordinado el trabajo de varios profesores de Matemáticas –la mayoría de la Comunidad Valenciana– y, con la colaboración de S.M., han editado un calendario en el que, desde Septiembre del 96 a Junio del 97, aparecen unas 300 cuestiones, entre problemas –la mayoría– paradojas, datos históricos, etc., que pueden conseguir que nuestros alumnos –fundamentalmente los de secundaria– se animen a trabajar sobre matemáticas que se salen algo de las rutinas de clase.

Aparte de la suerte que supone para nosotros, los profesores, tener un material con estas características, nuestros alumnos, si lo desean, pueden participar en un concurso a nivel nacional que, apoyado en este calendario, han preparado los organizadores del mismo.

Todos los miembros de la Sociedad Puig Adam podéis disponer de él, gratis, sin más que solicitarlo por escrito a la dirección de nuestra sociedad.

Con esta nota, quiero animaros a que lo pidáis, así como agradecer a Floreal García Alcaine su fantástica disposición a enviarnos el material en cuanto le fue solicitado y felicitarlo por su magnífico trabajo.

Joaquín Hernández Gómez

A DONDE DIRIGIR LA CORRESPONDENCIA

Nuestro antiguo apartado está fuera de servicio, por lo que se recuerda a nuestros consocios, y a cualquier otra persona, que toda la correspondencia que desee enviarse a la sociedad debe dirigirse a la sede de la misma:

Sociedad "Puig Adam" de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n.
Ciudad Universitaria
Madrid-28040

CONTESTADOR AUTOMATICO

Se recuerda que en nuestra sede existe un contestador automático conectado al teléfono 394 62 48.

Un algoritmo nuevo para una aplicación conocida

Leo Klingen
Bonn (Alemania)

Abstract

The currents that go across a network of n electric resistances can be computed applying Kirchhoff's laws. The resultant linear system has n equations and n unknowns, and it can easily be solved with the help of a Computer Algebra System. Usually, to solve this linear system, a $n \times n$ matrix would be considered. But in this article, an approximate method of resolution by iteration, that only needs to deal with a n-vector, is described. Moreover, it can be implemented even on a programmable pocket-calculator. Its didactic interest is emphasized along the article.

Nota de los editores:

En nuestra sección dedicada a colaboraciones de profesores extranjeros, contamos en este número del Boletín con este artículo del Catedrático de Secundaria alemán Dr. Leo Klingen. El mismo nos lo envió escrito en nuestro idioma (ha enseñado Matemáticas en Sudamérica durante varios años).

El prestigioso profesor Klingen está muy interesado en el uso de Sistemas de Cómputo Algebraico en Educación Matemática. Fruto de esa dedicación es el libro titulado "Atlas mathematischer Bilder", publicado por Addison-Wesley en 1996 (y reseñado en el número 44 de nuestro Boletín).

El redactor de este número del Boletín se ha encargado de subsanar los pequeños errores ortográficos y sintácticos de la versión original del artículo del profesor Klingen, así como de detallar algunas cuestiones del planteamiento electrotécnico del problema, con objeto de facilitar su lectura a la mayoría de nuestros socios, profesores de Matemáticas (no de Física).

Introducción

En principio, dos resistencias eléctricas pueden ser conectadas en serie o en paralelo. De modo más general, n resistencias pueden conectarse formando una red (plana o incluso tridimensional) de nudos y mallas. Las intensidades de corriente eléctrica que las atraviesan y las tensiones correspondientes pueden ser calculadas aplicando las dos leyes de Kirchhoff:

i) en cada nudo la suma de las corrientes orientadas es nula

ii) en cada malla cerrada la suma de las tensiones (calculadas según la ley de Ohm) es nula

Resulta así un sistema de ecuaciones lineales, que se resuelve aplicando los métodos usuales del Algebra Lineal. Con ayuda de un Sistema de Computo Algebraico las soluciones pueden ser calculadas de modo cómodo y rápido.

Si es n el número de resistencias, ello requiere trabajar con una matriz de $n \times n$ elementos. En este artículo se describe un nuevo método aproximado de resolución por iteración, que sólo requiere trabajar con un n-vector y puede ser implementado incluso en una calculadora de bolsillo programable.

La idea consiste en elegir una *senda inicial*, que conecte la entrada con la salida de la red. Como situación inicial, se supone que todas las resistencias situadas en dicha senda inicial son recorridas por la misma intensidad de corriente y por todas las demás resistencias no pasa corriente. Es claro que en esta situación se verifica la primera de las leyes de Kirchhoff.

A continuación, se aplica la segunda ley de Kirchhoff a cada una de las mallas, pero introduciendo una corrección en la corriente que atraviesa dicha malla. Las correcciones previamente efectuadas influyen en las correcciones siguientes, debido a que hay resistencias comunes a más de una malla. Después de efectuar cada corrección en la corriente, sigue verificándose la ley i de Kirchhoff en cada nudo.

Al terminar con la última malla, el proceso de iteración comienza de nuevo. El proceso es convergente, porque en cada paso de iteración la corrección de corriente resulta ser una fracción propia de la anterior (como puede comprobarse), de modo que los valores absolutos de las correcciones decrecen de manera monótona.

Aunque la notación del proceso general que describe estos hechos no es cómoda, su aplicación a casos concretos es muy sencilla, como se verá en los ejemplos que se proponen. Existen varias generalizaciones interesantes del proceso, que también son útiles en aplicaciones técnicas.

El interés didáctico del proceso es doble. De una parte, la idea ha sido tomada a partir de una situación real del mundo de la Física. De otra parte, se presta a realizar prácticas escolares de comprobación mediante experimentos reales (y baratos) con pequeñas resistencias de carbón.

1 El puente de Wheatstone

La conexión de resistencias mas simple, que no puede ser considerada como conexión en paralelo o en serie, es el puente de Wheatstone, que aparece en la figura 1.

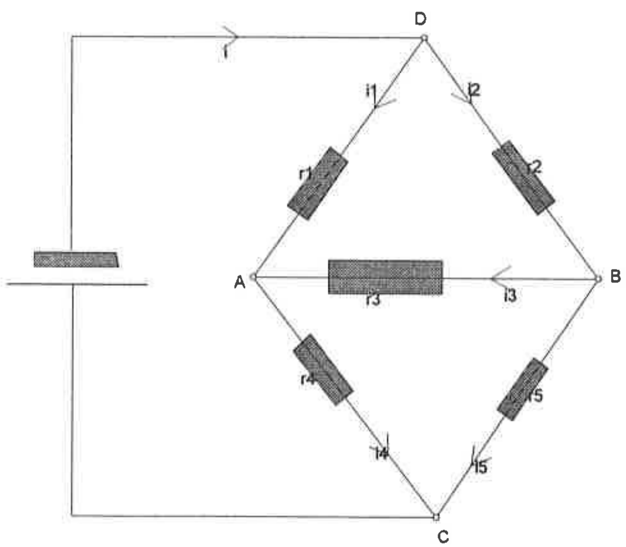


Figura 1

Los electrotécnicos usan esta conexión para la medición de resistencias, inductancias y capacidades de componentes electrónicos, por comparación. De acuerdo con la figura 1, existe *equilibrio* en el puente (esto es, la corriente $i3$, que pasa por la resistencia $r3$, es nula), si son iguales los potenciales en los nudos A y B, lo cual ocurre si se verifica la relación $r1 : r4 = r2 : r5$ en

los valores de las otras resistencias.

Volviendo al caso general, al aplicar las leyes de Kirchhoff al puente de la figura 1, se obtiene el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{aligned} i1 + i3 - i4 &= 0 \\ i2 - i3 - i5 &= 0 \\ i4 + i5 &= i \\ r1 \cdot i1 - r2 \cdot i2 - r3 \cdot i3 &= 0 \\ r3 \cdot i3 + r4 \cdot i4 - r5 \cdot i5 &= 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

Las tres primeras ecuaciones se han obtenido aplicando la ley i de Kirchhoff a los nudos A, B y C, respectivamente (teniendo en cuenta el sentido de corriente elegido en cada tramo). Se ha omitido la correspondiente al nudo D, ya que daría una ecuación linealmente dependiente de aquellas tres. Las dos últimas ecuaciones se han obtenido aplicando la ley ii de Kirchhoff a las mallas ABD y ABC, respectivamente (teniendo en cuenta los sentidos de las corrientes).

El problema también admite otra interpretación no eléctrica. En una zona turística de esquí hay 4 estaciones en alturas diferentes (nudos), conectadas entre sí por 5 pistas que soportan corrientes de turistas. Las leyes de Kirchhoff se interpretan así:

i) cada turista que llega a una estación tiene que dejar la misma rápidamente, porque las estaciones son demasiado pequeñas

ii) en cada camino circular, donde la salida y el destino coinciden, no se puede ganar altura, aunque las estaciones estén situadas en alturas diferentes y las pistas tengan cambios de nivel positivos o negativos diferentes

Para resolver el sistema lineal (1), el matemático aplica su propio método. Este sistema no homogéneo de ecuaciones lineales puede expresarse matricialmente en la forma

$$R \cdot v = w$$

donde

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ r1 & -r2 & -r3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r3 & -r4 & -r5 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} i1 \\ i2 \\ i3 \\ i4 \\ i5 \end{pmatrix} \quad , \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

siendo su solución

$$v = R^{-1} \cdot w$$

Con ayuda de un Sistema de Computo Algebraico se obtiene cómodamente su solución simbólica:

$$i1 = \frac{i(r2(r3+r4+r5)+r3r5)}{r1(r3+r4+r5)+r2(r3+r4+r5)+r3(r4+r5)}$$
$$i2 = \frac{i(r1(r3+r4+r5)+r3r4)}{r1(r3+r4+r5)+r2(r3+r4+r5)+r3(r4+r5)}$$
$$i3 = \frac{i(r1r5-r2r4)}{r1(r3+r4+r5)+r2(r3+r4+r5)+r3(r4+r5)}$$
$$i4 = \frac{i(r1r5+r2(r3+r5)+r3r5)}{r1(r3+r4+r5)+r2(r3+r4+r5)+r3(r4+r5)}$$
$$i5 = \frac{i(r1(r3+r4)+r4(r2+r3))}{r1(r3+r4+r5)+r2(r3+r4+r5)+r3(r4+r5)}$$

En la tercera igualdad se reconoce fácilmente la condición para el equilibrio del puente ($i3 = 0$, si $r1 \cdot r5 = r2 \cdot r4$).

Si, en particular, para las resistencias se toman los valores

$$r1 = 1, r2 = 2, r3 = 9, r4 = 2, r5 = 4 \tag{2}$$

se obtiene la solución $v = (2/3, 1/3, 0, 2/3, 1/3)i$, como cabía esperar.

2 Una segunda visión del puente de Wheatstone

El método anterior usa el algoritmo de diagonalización de Gauss (inversión de la matriz), necesitando para, por ejemplo, una red de 100 resistencias (es decir, en caso de 100 variables), una matriz de 10000 elementos. Es cierto que muchos de esos elementos son nulos, pero los métodos especiales para matrices con muchos ceros no suelen ser conocidos por los alumnos.

Vamos pues a aplicar al puente de Wheatstone el método de aproximación citado en la introducción. Comenzamos eligiendo una *senda inicial*, que conecte la entrada con la salida de la red. Como situación inicial, se supone que todas las resistencias situadas en dicha senda inicial son recorridas por la misma intensidad de corriente y por todas las demás resistencias no pasa corriente. En la figura 2 se muestran esquemáticamente tres posibles modos de elegir la senda inicial, entendiendo que la corriente fluye únicamente por las líneas de trazo continuo, no pasando corriente por las líneas de trazo discontinuo.

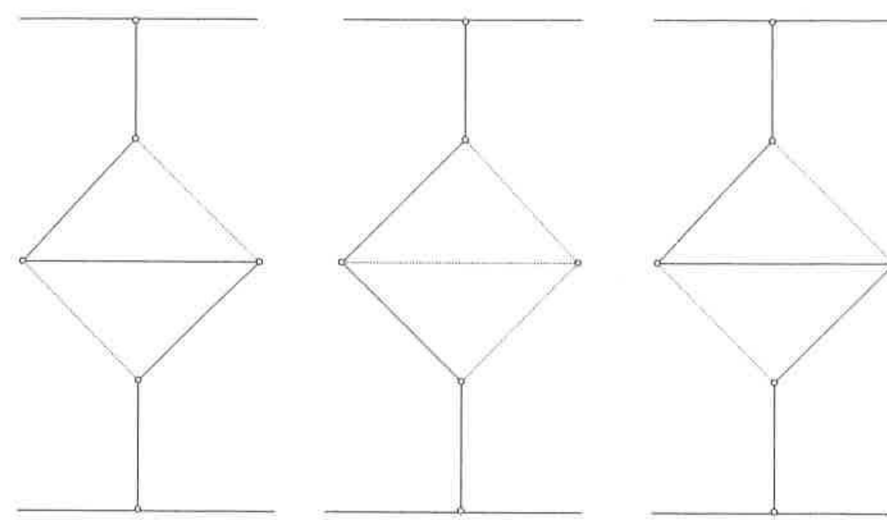


Figura 2

Notemos que en la situada a la derecha hay dos salidas de corriente. Es claro que existen más posibilidades para elegir la senda inicial, pero en cualquiera de ellas se verifica la primera de las leyes de Kirchhoff.

A continuación, se aplica la segunda ley de Kirchhoff a cada una de las mallas, pero introduciendo una corrección en la corriente que atraviesa dicha malla. A partir de la cuarta ecuación del sistema (1), relativa a la malla ABD de la figura 1, introduciendo la corrección δ en la corriente que atraviesa dicha malla, se tiene

$$-(i1-\delta)r1+(i2+\delta)r2+(i3+\delta)r3=0$$

donde los signos que preceden a δ vienen impuestos por los sentidos elegidos en cada tramo para las corrientes (más adelante se insistirá el mecanismo de elección de signos). De aquí resulta

$$\delta=\frac{i_1r_1-i_2r_2-i_3r_3}{r_1+r_2+r_3} \tag{3}$$

Después de esta primera corrección, la ley i de Kirchhoff sigue siendo verificada en todos los nudos de esta primera malla ABD, según puede comprobarse, mediante simple cálculo mental o manual. De modo análogo, a partir de la quinta ecuación del sistema (1), relativa a la malla ABC de la figura 1, introduciendo la corrección $\delta 1$ en la corriente que atraviesa dicha malla, se obtiene

$$\delta 1=\frac{i_5r_5-i_3r_3-i_4r_4}{r_3+r_4+r_5} \tag{4}$$

Notemos que la corriente $i3$ interviene tanto en la malla superior, ABD, como en la inferior, ABC. Por ello, la corriente en el tramo AB es corregida dos veces. Notemos que ahora la ley *ii* de Kirchhoff es verificada en la malla ABC, pero ya *no* en la ABD. En este estadio repetimos el mismo algoritmo de nuevo. Se puede demostrar que las correcciones bajan con valores monótonos; por eso termina el algoritmo.

A continuación se explicita el algoritmo, para el caso en que la senda inicial elegida sea la de la izquierda de la figura 2, al que corresponden las siguientes intensidades de corriente (supuesto que es 1 la intensidad de corriente total)

$$i_1=1, i_2=0, i_3=1, i_4=0, i_5=1$$

por lo que se introduce $\{1,0,1,0,1\}$ como valor inicial del vector, v, de intensidades de corriente. Por otra parte, para el caso en que los valores de las

resistencias sean los indicados en (2), la corrección δ, calculada en (3), queda $(i_1-2i_2-9i_3)/12$, por lo que se introduce $(v[1]-2*v[2]-9*v[3])/12$ como valor de δ (nótese que $v[1]$ es la componente 1 del vector v, de intensidades de corriente, $v[2]$ la componente 2, como valor de δ (nótese que $v[1]$ es la componente 1 del vector intensidades, $v[2]$ la componente 2, es decir $i2$, etc). A continuación, se han de tomar $v[1]-\delta, v[2]+\delta, v[3]+\delta$ como nuevos valores respectivos de $v[1]$, $v[2]$ y $v[3]$.

Por otra parte, para el caso en que los valores de las resistencias sean los indicados en (2), la corrección $\delta 1$, calculada en (4), queda $(4i_5-2i_4-9i_3)/15$, por lo que se introduce $(4*v[5]-2*v[4]-9*v[3])/15$ como valor de $\delta 1$. A continuación, se han de tomar $v[3]+\delta 1, v[4]+\delta 1, v[5]-\delta 1$ como nuevos valores respectivos de $v[3]$, $v[4]$ y $v[5]$, con lo que termina el proceso iterativo.

Se puede implementar el algoritmo en la pequeña computadora TI-92. Por razones de control, se ha elegido una construcción de tipo FOR para el proceso iterativo (aunque, naturalmente, se puede preferir una construcción de tipo UNTIL, usando el valor absoluto de una de las correcciones, o de ambas correcciones):

```
:korr()
:Prgm
:{1,0,-1,0,1} → v
:Input "Zahl der Iterationen ",n
:For i,1,n,1
: (v[1]-2*v[2]-9*v[3])/12 → δ
: v[1]-δ → v[1]
: v[2]+δ → v[2]
: v[3]+δ → v[3]
: (4*v[5]-2*v[4]-9*v[3])/15 → δ1
: v[3]+δ1 → v[3]
: v[4]+δ1 → v[4]
: v[5]-δ1 → v[5]
:EndFor
:Disp {v[1],v[2],v[3]}
:Disp {v[4],v[5]}
:EndPrgm
```

3 Generalización para una red grande

En contraposición al método de Gauss, el nuevo algoritmo descrito opera solamente con el vector de las intensidades de corriente, lo que permite trabajar con redes mayores (con más variables).

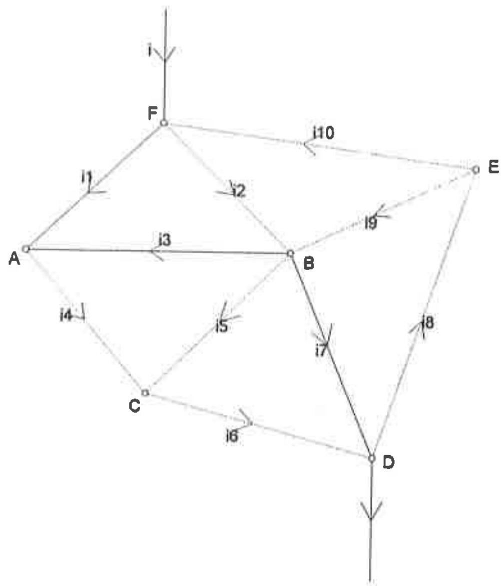


Figura 3

La figura 3 muestra el caso de una red con 10 variables. Sus seis nudos se han denotado A, B, C, D, E, F. Las líneas continuas muestran la senda inicial elegida. De modo análogo al indicado en el apartado 2, se puede aplicar la ley i de Kirchhoff a los nudos A, B, C, D, E y la ley ii de Kirchhoff a las mallas ABF, ACB, CDB, DEB, EFB, para obtener un sistema lineal similar al (1), pero ahora con 10 ecuaciones y 10 incógnitas. Si, en particular, se toman para las resistencias los valores siguientes

$$r1 = 1, r2 = 2, r3 = 9, r4 = 2, r5 = 4$$

$$r6 = 5, r7 = 8, r8 = 1, r9 = 3, r10 = 7$$

la matriz R resulta ser

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0 & -0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 5 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos, en primer lugar, después de 20 iteraciones, y, luego, después de 25 iteraciones. Se puede así, observar experimentalmente la convergencia de este proceso de iteración:

```
20
{.329811 .422975 -.05736}
{.272451 .005158 .279608}
{.178328 -.542064 -.29485 -.247214}
Zahl der Iterationen
25
{.329789 .422991 -.057356}
{.272433 .005164 .279597}
{.178329 -.542074 -.294853 -.24722}
```

4 Sentido de las corrientes y otras consideraciones

En el ejemplo anterior, la orientación de las corrientes fue elegida de manera arbitraria. En consecuencia, los signos en las correcciones de las corrientes también parecen poco sistemáticos.

Para el caso de la red de la figura 4, se pueden elegir las orientaciones sistemáticamente, de modo que aparezcan signos + en todas las correcciones. Pero esto no es posible en otros casos, como, por ejemplo, para la red de la figura 5, para la de la figura 3, o en caso de redes tridimensionales. Por tanto, no puede eludirse el tener que tomar signo −, cuando se encuentra una orientación en sentido contrario (comparar el programa!).

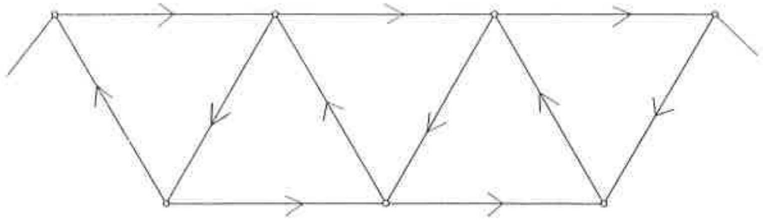


Figura 4

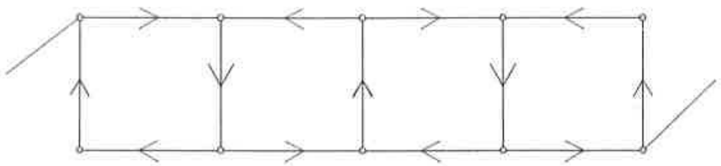


Figura 5

Notemos también que en las redes planas se puede omitir la ecuación relativa a uno de los nudos y en las redes tridimensionales (por ejemplo, un tetraedro de resistencias) se puede, además, omitir la ecuación relativa a una de las mallas.

Al efectuarlas correcciones, se garantiza así la validez de la ley i de Kirchhoff, ya que en una malla en cada de sus nudos entra y sale una línea. Naturalmente se pueden automatizar las correcciones y usar un único subprograma para ellas. Así se pueden resolver redes con 100 resistencias y aún más con una computadora de bolsillo. Para ello se define una función *signum*(), que de valor cero para el argumento cero y resistencias negativas en casos de orientación contraria, lo que permite incluir todas las combinaciones de signos en un subprograma general.

La iteración es convergente, no sólo cuando la caída de las tensiones en las líneas es lineal (ley de Ohm), sino también cuando es *cuadrática*. Una ley de aproximación similar es aplicable a líquidos y gases fluyendo por tuberías. Por ello, los ingenieros pueden usar este algoritmo para la simulación de flujos en tuberías petrolíferas. Así, pueden estudiar las consecuencias que

acarrearía la puesta en servicio de nuevas tuberías, al ser incorporadas a las redes de tubos ya existentes, sin necesidad de llegar a remover tierra para realizar su instalación. Ahora bien, en este caso cuadrático (no lineal) es preciso tener en cuenta la orientación del flujo, mediante una función *signum*() adicional, ya que un sólo signo " − " se pierde al elevar al cuadrado. En esos casos varias entradas y varias salidas son frecuentes, como ocurre en el caso de la red eléctrica de la siguiente figura 6.

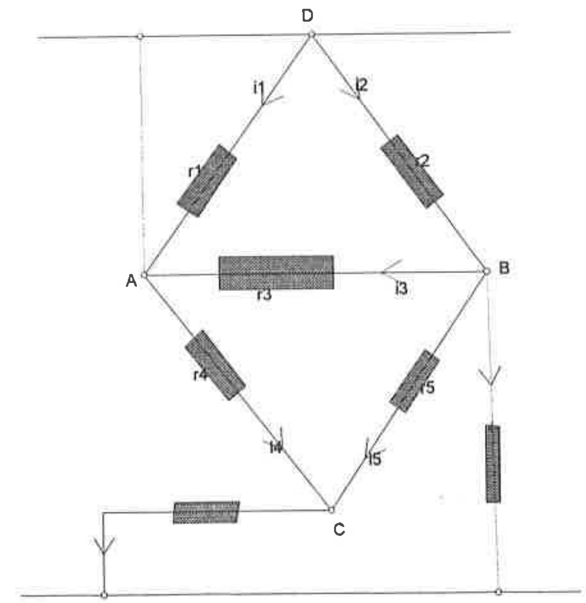


Figura 6

En estos casos, de varias entradas y salidas, se puede también aplicar el principio de superposición de Helmholtz, efectuando los cálculos para dos redes y sumando los resultados.

Desde un punto de vista estrictamente matemático, se puede probar la convergencia con otras relaciones de dependencia más generales que la cuadrática, que, en principio, no tienen aplicación en la Física o en la Técnica. Por ejemplo, en caso de relaciones exponenciales, o incluso de estas combinadas con relaciones cuadráticas.

5 Apéndice

Presentamos finalmente el programa k1 (Main program) con el subprograma $k(a,b,c,x,y,z)$, donde los valores paramétricos x,y,z significan los valores de las resistencias en una malla triangular y los valores a,b,c los índices de los conductores que toman parte en la misma. El programa principal se refiere aquí al puente de Wheatstone. Para cada malla, es necesaria una única llamada al subprograma.

```
:k1()
:Prgm
:{1,0,-1,0,1} → s
:Input "Zahl der Iterationen " ,h
:For ii,1,h,1
:  k(1,2,3,-1,2,9)
:  k(3,4,5,9,2,-4)
:EndFor
:Disp s[1],s[2],s[3]
:Disp s[4],s[5]
:EndPrgm

:k(a,b,c,x,y,z)
:Prgm
:  -(x*s[a]+y*s[b+z*s[c])/(abs(x)+abs(y)+abs(z)) → d
:  s[a]+d*sign(x) → s[a]
:  s[b]+d*sign(y) → s[b]
:  s[c]+d*sign(z) → s[c]
:EndPrgm

Zahl der Iterationen
20
.666667
.333333
.15309E-8
.666667
.333333
```


6 Conclusiones didácticas

Para los estudiantes, la comparación de los métodos de Gauss y de iteración es interesante. Por el método de Gauss se ha de resolver un sistema de ecuaciones que implica trabajar con una matriz cuadrada $n \times n$, mientras que con el nuevo algoritmo de aproximación iterativo aquí propuesto, solamente el número de mallas es decisivo.

Además, los alumnos pueden realizar experimentos reales construyendo redes de resistencias de carbón. Se puede organizar el trabajo de preparar la red, soldando con estaño, por grupos de alumnos, y terminar acumulando los resultados obtenidos por los distintos grupos. Para tomar medidas, sin cortar la red, es preferible medir las tensiones parciales, en vez de las intensidades de corriente.

Hay alumnos que prefieren el trabajo de organizar la información, arreglando matrices redundantes de corrientes, mallas y nudos, con la posibilidad de comprobar los datos mutuamente.

El objetivo fundamental es hacer entender que el descubrimiento matemático de un hecho sometido a las leyes de la física es eficaz. La historia de las matemáticas muestra muchos ejemplos famosos análogos. Aquí hemos presentado un ejemplo moderno.

Bibliografía

KREYZIG (1983), *Advanced Engineering Mathematics*, J. Wiley.

KLINGEN (1993), *Ein neues Lsungsverfahren fr Gleichungssysteme von vermaschten Leitungsnetzen (en: W.Blum, Anwendungen und Modellbildung im Mathematikunterricht)*, Verlag Franzbecker.

Cálculo de integrales particulares de una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes trigonométricos

Adam Marlewski * Stanislaw Rawicki †

Eugenio Roanes Lozano ‡ Eugenio Roanes Macías §

* Institute of Mathematics
†Institute of Industrial Electrical Engineering
(Poznan University of Technology)
‡, § Departamento de Algebra
(Universidad Complutense de Madrid)

Abstract

The study of levels of vibration and noise of electrical induction motors leads to mathematical models in which appears an ordinary differential equation of first order with trigonometric coefficients. It can be replaced by an infinite system of differential equations with constant coefficients. A method which produces an analytic expression approximating the exact solution is described. This expression is a sum and its components are determined by the solution of a system of linear algebraic equations, which is solved with the help of a computer algebra system.

*e-mail: amarlew@math.put.poznan.pl
†e-mail: amarlew@math.put.poznan.pl
‡e-mail: eroanes@eucmos.sim.ucm.es
§e-mail: eroanes@eucmos.sim.ucm.es

1 Introducción

Recientemente, los dos primeros autores han trabajado sobre diagnósis de motores de inducción eléctricos (análisis espectral de la corriente del estator) y reducción de vibración y ruido de máquinas eléctricas. En estas dos cuestiones tienen lugar complicadas interacciones de los armónicos espaciales del campo magnético. En los modelos matemáticos de estos fenómenos aparece ([2],[6]) la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden con coeficientes trigonométricos

$$[\alpha_0 + a_1 \cdot cos(\omega t + a_2)] \cdot \frac{d}{dt} y(t) =$$
$$[\beta_0 + b_1 \cdot cos(\omega t + b_2)] \cdot y(t) + c_1 \cdot cos(\omega_1 t + c_2) \tag{1}$$

donde $\alpha_0, a_1, a_2, \beta_0, b_1, b_2, c_1, c_2, \omega$ y ω_1 son constantes reales, t es la variable independiente (tiempo) e $y = y(t)$ es la función.

En [3] se da el método general mediante una aproximación a la solución general del problema de Cauchy, consistente en la ecuación (1) y la condición inicial por la que se asigna un valor a la función en el instante inicial $t = 0$. La integral general describe las componentes transitorias de las corrientes eléctricas. En este artículo nos ocupamos de la determinación de las componentes estacionarias. Ello significa que hemos de considerar integrales particulares de la ecuación (1).

Los dos últimos autores, habituales trabajadores en cuestiones de Aplicaciones de Matemática Computacional, se han ocupado de automatizar la resolución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales a que conduce la solución aproximada de (1), descrita en este artículo, utilizando para ello un sistema de cómputo algebraico.

2 Eliminación de los coeficientes trigonométricos

En adelante, manejamos la ecuación (1) en la línea de sustituirla por un sistema infinito de ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes.

En este propósito, expresamos todos los cosenos por funciones exponenciales y denotamos

$$\alpha_1 := \frac{1}{2}a_1 \cdot e^{ja_2} \quad , \quad \beta_1 := \frac{1}{2}b_1 \cdot e^{jb_2} \quad , \quad \gamma_1 := \frac{1}{2}c_1 \cdot e^{jc_2}$$

donde j es la unidad imaginaria ($j := \sqrt{-1}$). La conjungación convierte a estas cantidades en α_{-1}, β_{-1} y $\gamma{-1}$, respectivamente. Esta es la razón por la cual nuestra ecuación se convierte en la siguiente

$$(\alpha_0 + \alpha_1 e^{j\omega t} + \alpha_{-1} e^{-j\omega t}) \cdot \frac{d}{dt} y(t) =$$

$$(\beta_0 + \beta_1 e^{j\omega t} + \beta_{-1} e^{-j\omega t}) \cdot y(t) + c_0 \tag{2}$$

donde

$$c_0 := \gamma_1 e^{j\omega_1 t} + \gamma_{-1} e^{-j\omega_1 t}. \tag{3}$$

Para cualquier número entero, n, definimos

$$c_n := c_0 \cdot e^{jn\omega t} \quad , \quad y_n := y_0 \cdot e^{jn\omega t} \tag{4}$$

donde $y_0 := y(t)$.

Ahora hacemos uso de la relación

$$e^{jp\omega t} \cdot \frac{d}{dt} y_0 = \frac{d}{dt} y_p - jp\omega \cdot y_p \quad , \tag{5}$$

la cual es cierta para $p \in \{-1, 0, 1\}$, y escribimos de nuevo la ecuación (2) en la forma

$$\alpha_{-1} \frac{d}{dt} y_{-1} + \alpha_0 \frac{d}{dt} y_0 + \alpha_1 \frac{d}{dt} y_1 =$$

$$(\beta_{-1} - j\omega\alpha_{-1}) y_{-1} + \beta_0 y_0 + (\beta_1 + j\omega\alpha_1) y_1 + c_0 \tag{6}$$

La relación (5) puede ser extendida para cualesquiera valores enteros de los parámetros n y s:

$$e^{jn\omega t} \cdot \frac{d}{dt} y_s = \frac{d}{dt} y_{n+s} - jn\omega \cdot y_{n+s}. \tag{7}$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (6) por $e^{jn\omega t}$ y teniendo en cuenta (7), obtenemos el sistema infinito formado por las ecuaciones

$$\mu_{n-1} y_{n-1} + \delta_n y_n + \nu_{n+1} y_{n+1} = c_n \quad , \quad n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \tag{8}$$

donde

$$\mu_n := \alpha_{-1} \cdot (\frac{d}{dt} - jn\omega) - \beta_{-1}; \; \delta_n := \alpha_0 \cdot (\frac{d}{dt} - jn\omega) - \beta_0; \; \nu_n := \alpha_1 \cdot (\frac{d}{dt} - jn\omega) - \beta_1$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (8) es lo que buscábamos en esta parte.

3 Determinación de una aproximación de la solución particular

Las fórmulas (3) y (4) dicen que los términos libres en el sistema (8) son de la forma

$$c_n := \gamma_1 e^{j(\omega_1 + n\omega)t} + \overline{\gamma}_1 e^{-j(\omega_1 - n\omega)t}.$$

Ello prueba que $c_{-n} = \overline{c}_n$ y conduce a la idea acerca de la expresión de la integral particular. Esa es la razón que nos hace suponer que tal integral sea de la forma

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [Y_n \cdot e^{j(\omega_1 + n\omega)t} + \overline{Y}_n \cdot e^{-j(\omega_1 + n\omega)t}]. \tag{9}$$

Con objeto de determinar las amplitudes complejas Y_n, remitimos al principio de superposición, que es bien conocido en electrotecnia teórica (ver [1, pág 94], por ejemplo). Este teorema permite analizar circuitos complicados de líneas eléctricas mediante tratamiento separado de respuestas individuales (voltajes o intensidades de corriente) producidas por cada fuente independiente actuando sóla.

Comencemos con la amplitud Y_0 correspondiente a la pulsación ω_1. Para nuestro propósito, suponemos que la única función forzada es c_0, no habiendo ninguna otra fuente activa. En consecuencia, la ecuación (8) toma la forma

$$u_{n-1} y_{n-1} + v_n y_n + w_{n+1} y_{n+1} = \gamma_1 \delta_{n,0} \tag{10}$$

donde

$$u_n := j\alpha_{-1}(\omega_1 - n\omega) - \beta_{-1}; \; v_n := j\alpha_0(\omega_1 - n\omega) - \beta_0; \; w_n := j\alpha_1(\omega_1 - n\omega) - \beta_1$$

y $\delta_{j,k}$ es la función delta de Kronecker.

Las ecuaciones (10) forman un sistema tridiagonal infinito. En este sistema todas las variables y_n son auxiliares, excepto $y_0 = Y_0$.

El razonamiento indicado anteriormente sigue siendo válido para una amplitud arbitraria Y_n correspondiente a la pulsación $\omega_1 + n\omega$. Ello nos lleva al sistema

$$u_{s+n-1}y_{n-1} + v_{s+n}y_n + w_{s+n+1}y_{n+1} = \gamma_1\delta_{s+n,0} \qquad (11)$$

En el sistema s-ésimo todas las cantidades y_n son auxiliares, excepto $y_0 = Y_s$ $(s = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...)$.

Observemos que cada uno de los sistemas (11) tiene la misma matriz infinita de coeficientes. Dos sistemas sucesivos cualesquiera, el s-ésimo y el (s+1)-ésimo, difieren sólo en el cambio por 1 de todas las filas de esta matriz tridiagonal infinita. Un cambio similar se verifica en sus términos libres. En otras palabras, dos sistemas (8) cualesquiera sólo difieren en los nombres de las incógnitas. Esta observación lleva a la conclusión de que las amplitudes Y_n satisfacen el sistema formado por las ecuaciones

$$w_{-(n-1)}Y_{n-1} + v_{-n}Y_n + u_{-(n+1)}Y_{n+1} = \gamma_1\delta_{n,0}\ ,\ n = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... \qquad (12)$$

Es este un sistema tridiagonal infinito de ecuaciones algebraicas lineales con coeficientes constantes. Lo reducimos a un sistema finito, suponiendo que $Y_n = 0$ para $n < -m$ y $n > m$, siendo m un número natural fijo arbitrariamente elegido. Por tanto, no buscamos la solución exacta de la forma (9), contentándonos con la aproximación de $2m + 1$ términos:

$$y(t) \approx \sum_{n=-m}^{m} [Y_n e^{j(\omega_1+n\omega)t} + \overline{Y}_n e^{-j(\omega_1+n\omega)t}]$$

En la práctica, el grado de esta aproximación (esto es el truncamiento de error) ha de ser controlado.

4 Cálculos prácticos

El sistema de cero-sucesiones del motor trifásico de inducción de jaula de ardilla es satisfecho por las relaciones [4]:

$$\frac{d}{dt}\psi_s = -R_s i_s + U_m \cdot cos(\omega_1 t + \gamma);\ \frac{d}{dt}\psi_r = -R_r i_r \qquad (13)$$

$$\psi_s = L_s i_s + M \cdot cos3(\omega t + \phi_0) \cdot i_r;\ \psi_r = L_r i_r + M \cdot cos3(\omega t + \phi_0) \cdot i_s$$

donde ψ_s , ψ_r e i_s, i_r son los flujos concatenados y las intensidades de corriente del estator (s) y del rotor (r), R_s, R_r y L_s, L_r las resistencias y las inductancias del estator (s) y del rotor (r), con devanado o arrollamiento de fase, M el valor máximo de la inductancia mutua entre el estator y el rotor, con devanado o arrollamiento de fase, ω la velocidad del rotor, U_m, ω_1, γ el máximo valor, la frecuencia angular y la fase inicial del voltaje de arranque, ϕ_0 la posición angular del rotor en relación con el estator en el instante inicial $t = 0$.

Encontramos las componentes estacionarias de la corriente del estator, i_s, y de la corriente del rotor, i_r, por medio del método presentado en este artículo. Por ejemplo, las soluciones de la forma (9) son ahora las series

$$y_s = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\sigma_{6n} \cdot e^{j(\omega_1+6n\omega)t} + \overline{\sigma}_{6n} \cdot e^{-j(\omega_1+6n\omega)t}]$$

$$y_r = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\rho_{6n-3} \cdot e^{[j(\omega_1+(6n-3)\omega]t} + \overline{\rho}_{6n-3} \cdot e^{-j[\omega_1+(6n-3)\omega]t}] \qquad (14)$$

El sistema resolvente de ecuaciones algebraicas lineales (11) toma ahora la forma:

$$\begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{-6} & A_{-6} & D_{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{-3} & B_{-3} & D_{-3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_0 & A_0 & D_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & B_3 & D_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & A_6 & D_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_9 & B_9 & D_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdots \\ \rho_{-9} \\ \sigma_{-6} \\ \rho_{-3} \\ \sigma_0 \\ \rho_3 \\ \sigma_6 \\ \rho_9 \\ \sigma_{12} \\ \cdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ U' \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \end{pmatrix} \qquad (15)$$

donde

$$U' := \frac{1}{2}U_m e^{j\gamma}\ ,\ M' := \frac{1}{2}M e^{j3\phi_0}$$

$$C_k := M' j(\omega_1 + k\omega)\ ,\ A_k := L_s j(\omega_1 + k\omega) + R_s$$

$$B_k := L_r j(\omega_1 + k\omega) + R_r \quad , \quad D_k := \overline{M}' j(\omega_1 + k\omega).$$

Si hacemos $\rho_q = \sigma_q = 0$ para $|q| > 15$, reducimos el sistema (15). La solución de este sistema está formada por los valores $\rho_{-15}, \sigma_{-12}, \rho_{-9}, \ldots.., \rho_9, \sigma_{12}, \rho_{15}$. Los módulos de estos valores determinan las longitudes de las barras mostradas en las figuras 1 y 2.

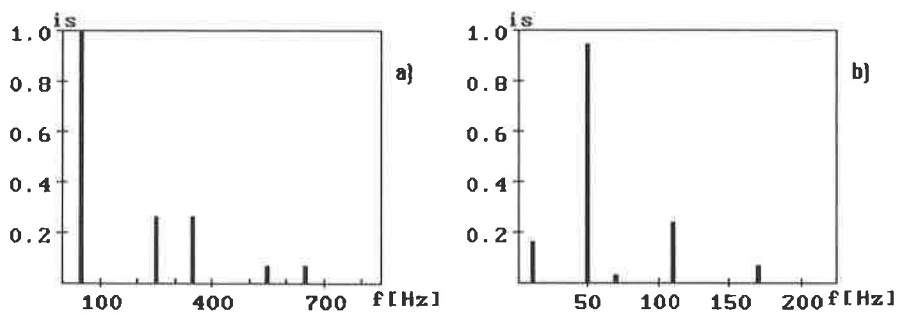


Figura 1

Concretamente, la figura 1 muestra el espectro de componentes de la corriente del estator, para velocidades del rotor $\omega = \omega_1$ (fig 1 a) y $\omega = 0.2\omega_1$ (fig 1 b), mientras que la figura 2 muestra el espectro de componentes de la corriente del rotor, para velocidades del rotor $\omega = \omega_1$ (fig 2 a) y $\omega = 0.2\omega_1$ (fig 2 b).

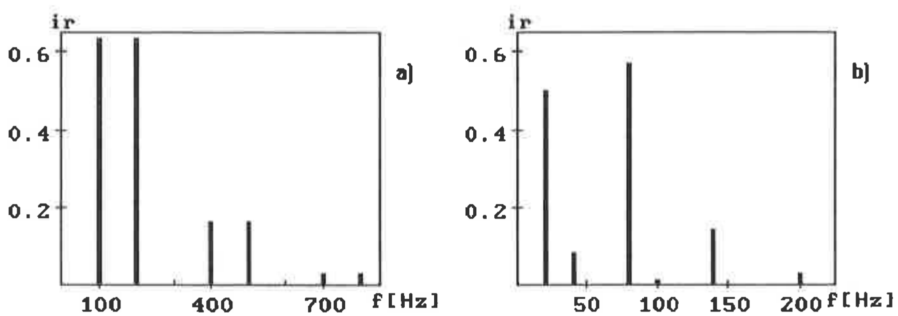


Figura 2

Esas barras han sido dibujadas correspondiendo a las frecuencias $(\omega_1 + 6n\omega)/(2\pi)$ en caso de corriente de estator y $[\omega_1 + (6n-3)\omega]/(2\pi)$ en caso de corriente de rotor.

En la figura 3 se representan las componentes del espectro de componentes del par electromagnético, para velocidades del rotor $\omega = \omega_1$ (fig 3 a), $\omega = 0.6\omega_1$ (fig 3 b), $\omega = 0.4\omega_1$ (fig 3 c) y $\omega = 0.2\omega_1$ (fig 3 d).

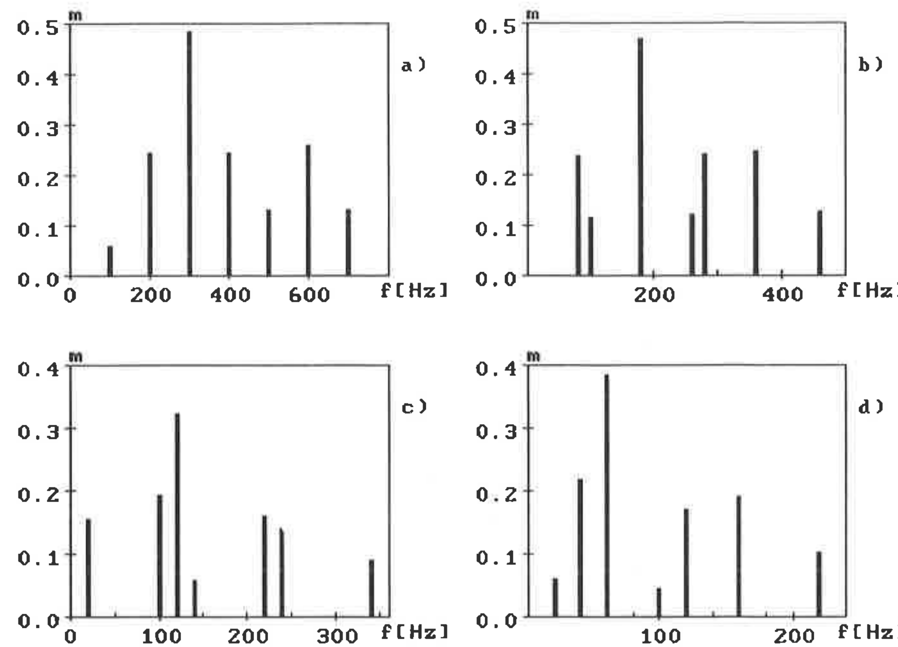


Figura 3

Los cálculos han sido hechos para un motor de inducción de jaula de ardilla trifásico, trabajando con los siguientes valores: potencia: $5.5kw$ de potencia, voltaje de $380V$, frecuencia de $50Hz$; resistencias: $R_s = 0.79\Omega$, $R_r = 0.11\Omega$; inductancias: $L_s = 0.0217H$, $L_r = 0.00228H$; valor máximo de inductancia mutua: $M = 0.00586H$.

El par constituye una propiedad importante de un motor; su par pulsatorio informa acerca de la intensidad de vibraciones electromagnéticas. El par está relacionado con las corrientes i_s e i_r mediante la fórmula [4]:

$$m = -3p \cdot M \cdot i_s \cdot i_r \cdot sin3(\omega t + \phi_0)$$

donde p es el número par polar del motor. En el ejemplo ilustrado en la figura 3 su valor era $2p = 4$.

5 Automatización de cálculos

Para resolver el sistema lineal (15) es aconsejable ayudarse de un sistema de cómputo automático. Vamos aquí a describir como hacerlo con ayuda del sistema Maple (release 4). Por brevedad, nos limitaremos al caso de sólo tres variables.

Comenzamos asignando los valores de U' y M', que notamos, respectivamente Uu y Mm (por no admitir el sistema la notación "prima"), así como los valores de C_k, A_k, B_k, D_k, que por ser funciones de la variable entera k, los notamos $C(k), A(k), B(k), E(k)$, respectivamente (se ha sustituido D por E, por ser D variable reservada en Maple):

```
> Uu:=(1/2)*U[m]*exp(I*gamma);
```

$$Uu := \frac{1}{2} U_m e^{j\gamma}$$

```
> Mm:=(1/2)*M*exp(I*3*phi[0]);
```

$$Mm := \frac{1}{2} * M * e^{3*I*\phi_0}$$

```
> C:=k-> Mm*I*(omega[1]+k*omega);
```

$$C := k \rightarrow IMm(\omega_1 + k\omega)$$

```
> A:=k-> L[s]*I*(omega[1]+k*omega)+R[s];
```

$$A := k \rightarrow IL_s(\omega_1 + k\omega) + R_s$$


```
> B:=k-> L[r]*I*(omega[1]+k*omega)+R[r];
```

$$B := k \rightarrow IL_r(\omega_1 + k\omega) + R_r$$

```
> E:=k-> conjugate(Mm)*I*(omega[1]+k*omega);
```

$$E := k \rightarrow I\overline{Mm}(\omega_1 + k\omega)$$

Supuesto cargado el paquete *linalg* de Maple, definimos la matriz cuadrada y la matriz columna del segundo miembro de (15), que notamos respectivamente **mat3** y **vec3**, y aplicamos el comando **linsolve** para resolver automáticamente el sistema, en caso de tres incógnitas:

```
> mat3:=matrix([[B(-3),E(-3),0],[C(0),A(0),E(0)],[0,C(3), B(3)]]):
> vec3:=vector([0,Uu,0]):
> linsolve(mat3,vec3);
```

$$\left[-\frac{1}{2} \frac{I \overline{M\%2} (-\omega_1 + 3\,\omega)(\%1 + 3\,I L_r\,\omega + R_r)\, U_m\, e^{(I\gamma)}}{\%3}, \right.$$
$$\frac{(-\%1 + 3\,I L_r\,\omega - R_r)(\%1 + 3\,I L_r\,\omega + R_r)\, U_m\, e^{(I\gamma)}}{\%3},$$
$$\left. -\frac{1}{2} \frac{I M\%2 (\omega_1 + 3\,\omega)(-\%1 + 3\,I L_r\,\omega - R_r)\, U_m\, e^{(I\gamma)}}{\%3} \right]$$

$$\%1 := I L_r\, \omega_1$$

$$\%2 := e^{(3\,I\,\phi_0)}$$

$$\%3 := -I\overline{M\%2}\,\omega_1^{\,3} M\%2\, L_r - \overline{M\%2}\,\omega_1^{\,2} M\%2\, R_r + 9\,I\overline{M\%2}\,\omega_1 M\%2\, L_r\,\omega^2 + 2\,I L_s\,\omega_1^{\,3} L_r^{\,2}$$
$$+ 4\,L_s\,\omega_1^{\,2} L_r R_r - 18\,I L_s\,\omega_1 L_r^{\,2}\omega^2 - 2\,I L_s\,\omega_1 R_r^{\,2} + 2\,R_s L_r^{\,2}\omega_1^{\,2} - 4\,I R_s L_r\,\omega_1 R_r$$
$$- 18\,R_s L_r^{\,2}\omega^2 - 2\,R_s R_r^{\,2}$$

En caso de cinco incógnitas, se opera de modo similar (el resultado se omite por brevedad):

```
> mat5:=matrix([[A(-6),E(-6),0,0,0], [C(-3),B(-3),E(-3),0,0],[0,C(0),A(0),
                 E(0),0],[0,0,C(3),B(3),E(3)],[0,0,0,C(6),A(6)]]):
> vec5:=vector([[0,0,Uu,0,0]):
> linsolve(mat5,vec5);
```

6 Conclusiones

El método descrito en este artículo conduce a una expresión analítica que aproxima la solución exacta de la ecuación (1). Esta expresión es una suma cuyas componentes se determinan resolviendo un sistema de ecuaciones lineales. El número de componentes que forman esta suma y, en consecuencia, la calidad de la aproximación depende del número de ecuaciones del sistema (al aumentar este número, se consigue más precisión). Gracias a la forma anaítica de la aproximación, el ingeniero puede observar, de modo directo, la influencia de varios parámetros constructivos sobre las amplitudes y frecuencias de las corrientes y el par. Ello mejora significativamente el proceso de diseño orientado a construir motores eléctricos con mejores parámetros de explotación (esto es, con más bajos niveles de vibración y ruido).

Bibliografía

[1] W.H.Hayt, J.E.Kennedy, *Engineering circuits analysis*, Mc Graw Hill Book Company, 1978

[2] V.Heller, V.Hamata, *Harmonic field effects in induction machines*, Elsevier, Amsterdam, 1977

[3] A.Marlewski, S.Rawicki, *Numerical solution of differential equations with trigonometric coefficients in mathematical models of electric motors*, Proceedings of the First Workshop on Numerical Analysis and Applications, Rousse, June 24-27, 1996, Springer-Verlag (en prensa)

[4] S.Rawicki, *Transformations of polyharmonic three-phase slip-ring induction machine* (en polaco), Proceedings of the IX Symposium "Applications of Computers in Electrotechnics", Tódź, 1984, 139-143

[5] D.Refern, *The Maple Handbook*, Springer-Verlag, 1996

[6] T.Sobczyk, *Infinitely-dimensional linear and quadratic forms of electric machines*, Rozprawy Elektrotechniczne, núm. 29, 1983, 697-707

Una demostración del Teorema de Tales

Ricardo Moreno Castillo

I.E.S. Gregorio Marañón
Dpto. Análisis Matemático
Universidad Complutense de Madrid

Abstract

In this note it's given a demonstration of the Fundamental Theorem of Similarity of Triangles and, in short, of Tales' Theorem, based on Pitagoras' Theorem. This demonstration avoids any boring consideration about irrationals.

En esta nota se demuestra el teorema fundamental de semejanza de triángulos y, en definitiva, del teorema de Tales, basándose en el teorema de Pitágoras (*). Como éste se puede demostrar sin utilizar proporciones (como se hace en los *Elementos),* la demostración que damos aquí evita toda consideración acerca de magnitudes inconmensurables.

Sea un triángulo rectángulo *ABC* con lados *a, b* y *c*. Trazamos una recta paralela a *b* y tenemos el triángulo *EBD* (figura 1). Se trata de demostrar que *ABC* y *EBD* son semejantes.

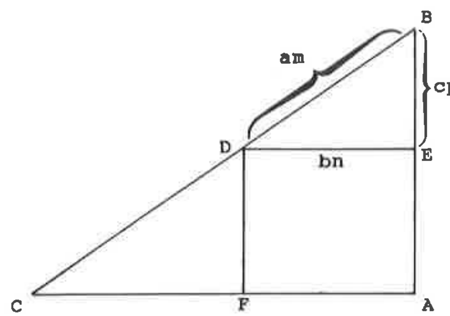


Figura 1

(*) La conveniencia de buscar una demostración de este tipo me fue sugerida por mi compañero Máximo Anzola.

Sean *am, bn* y *cp* los lados de *EBD*, y aplicando el teorema de Pitágoras a ambos triángulos tenemos que:

$$a^2 = b^2 + c^2 \qquad [1]$$

$$a^2m^2 = b^2n^2 + c^2p^2 \qquad [2]$$

Trazamos ahora desde *D* una paralela al lado *c* y se forma un nuevo triángulo rectángulo *FDC*. Aplicando nuevamente el teorema de Pitágoras, llegamos a la siguiente expresión:

$$(a - am)^2 = (b - bn)^2 + (c - cp)^2$$

que, desarrollados los cuadrados y hechas las simplificaciones pertinentes, se convierte en:

$$a^2m = b^2n + c^2p \qquad [3]$$

La condición de compatibilidad de [1], [2] y [3] es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & n & p \\ m^2 & n^2 & p^2 \end{vmatrix} = 0$$

El primer miembro es el determinante de Vandermonde, que sólo puede ser nulo si son iguales dos de los tres números *m, n, p*. Ahora de [2] se sigue que $m = n = p$. Consecuentemente *ABC* y *EBD* son semejantes.

Si el triángulo *ABC* no es rectángulo, el teorema se demuestra descomponiéndolo en dos triángulos que sí lo sean, como se ve en la figura 2.

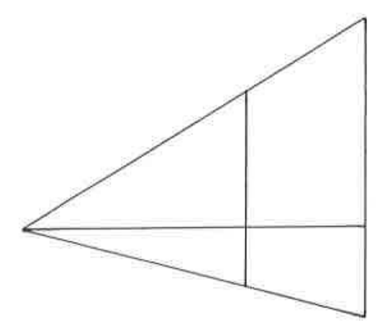


Figura 2

Solución de algunas ecuaciones diofánticas por métodos elementales

Juan-Bosco Romero Márquez

I.B. Isabel de Castilla de Avila

Abstract

We solve the diophantine equation $y^x - x^y = k(y^z - x^z)$, *where* x, y, z, k *are positive integers with* $x \neq y \neq z$, *and others like it, using only elementary methods. Other diophantine equations of exponential or algebraic type are solved by use of harmonic-geometric-arithmetic-quadratic-contraharmonic mean inequalities.*

Introducción

En este artículo presentamos la resolución de algunas ecuaciones diofánticas en enteros positivos de tipo algebraico y exponencial, utilizando para ello, los dos siguientes resultados elementales :

1) Si x e y son dos números naturales positivos, tales que, $y - x > 1$, entonces entre ellos, sólo hay un número finito de números naturales. (Para un estudio de esta propiedad, ver [1] y [28]).

2) El teorema de las medias armónica-geométrica-aritmética-cuadrática-contraarmónica de dos números reales positivos: Si $0 < a < b$, donde a y b son números reales positivos, entonces

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < \frac{a^2+b^2}{a+b} < b$$

La demostración de este resultado se hace de forma elemental por un cálculo algebraico directo. Para ver otras demostraciones y otros significados geométricos y las propiedades sobre las medias mirar, [1], [2], [3], [6] y [7].

Observaciones

Algunas de las ecuaciones diofánticas que resolvemos y proponemos en la última sección de este trabajo, es claro que, se podrán resolver quizás, por otros métodos también sencillos. He aquí una de las grandezas más nobles y grandes de libertad que tiene, el pensar, el razonar y el resolver problemas. Otro tanto sucede, a la hora de probar o de refutar las conjeturas sobre las intuiciones que dan origen a las cuestiones, en forma de proposiciones y teoremas o de contraejemplos que se suscitan y se plantean sobre los distintos entes de la Matemática. También, en la resolución de alguna ecuación diofántica por el método de las medias pudieran aparecer soluciones enteras negativas o racionales no esperadas de acuerdo con la técnica empleada. Habrá que hacer luego un análisis cuidadoso del significado algebraico y geométrico de estas soluciones.

Por ejemplo, al resolver la ecuación diofántica $y^3 = x(x+1)(x+5)$ en enteros positivos por el método basado en los principios 1) y 2) anteriores, aparecen como posibles soluciones, $x = -5/6$, que nos da solución para y, en la ecuación propuesta; y la solución racional, $x = 1/3$, $y = 4/3$, como se puede comprobar. También, estudiad, los puntos imaginarios que pueda poseer la curva algebraica definida por la ecuación dada.

1. Resultados

En esta sección daremos los resultados principales de nuestro artículo, y los resultados previos en los que nos basamos.

Comenzamos, con estos últimos, enunciando los siguientes lemas:

Lema 1.–Si x es un número real positivo, entonces $1 + x < e^x$.

Demostración.–Estudiar la monotonía de la función continua y diferenciable, definida por $f(x) = e^x - 1 - x$, para $x \geq 0$.

Lema 2.–Si x es un entero positivo, entonces:

a) $2x + 1 < 2^x$ $\quad (x \geq 3)$
b) $x^2 \leq 2^x$ $\quad (x \geq 4)$

Demostración.–La parte *a)* del lema se prueba por inducción, y la parte *b)* se deduce de *a)*.

Ahora, vamos a dar la demostración del resultado principal.

Teorema 3.–La ecuación diofántica

$$y^x - x^y = k(y^z - x^z) \qquad [1]$$

donde k, x, y, z son enteros positivos y $x \neq y \neq z$, no tiene solución cuando $k > 1$, pero, si $k = 1$ las únicas soluciones son (2, 3, 1) y (3, 2, 1).

Demostracion.–Si (x, y, z) satisface [1], podemos suponer por la simetría entre las incógnitas x e y que $y > x$, y pongamos $y = x + t$ donde $t \geq 1$ es un entero. Usando [1] y el lema 1, obtenemos

$$0 < k\,\frac{(x+t)^z - x^z}{x^{x+t}} = \frac{(x+t)^x}{x^x}\,\frac{1}{x^t} - 1 < \left(\frac{e}{x}\right)^t - 1$$

que implica necesariamente $e/x > 1$ y por lo tanto $x = 1$ ó $x = 2$. Si $x = 1$, la ecuacion [1] se reduce a

$$y - 1 = k(y^z - 1) = k\,(y - 1)\,(y^{z-1} + y^{z-2} + \ldots + y + 1) \qquad [2]$$

y por tanto $y = 1$ es una solución (para todo $z \geq 1$), pero esta posibilidad es excluida por la condición $y \neq x$. Si $y > 1$, la ecuación [2] da

$$1 = k(y^{z-1} + y^{z-2} + \ldots + y + 1)$$

que es imposible para todo $z \geq 1$ cuando $k > 1$, pero para $k = 1$ esto implica $z = 1$, que se excluye de nuevo por la condición $x \neq z$. Si $x = 2$, la ecuación [1] se reduce a

$$y^2 - 2^y = k(y^z - 2^z) \qquad [3]$$

Como por hipótesis $y > x = 2$, entonces $y^z - 2^z > 0$ para todos los enteros positivos z. Por el lema 2(*b*) aplicado a [3], implica $y \leq 3$. Así $y = 3$, y [3] se convierte $k(3^z - 2^z) = 3^2 - 2^3 = 1$, que es imposible para todo $z \geq 1$, cuando $k > 1$, pero, si $k = 1$ deducimos que $z = 1$.

Por consiguiente, las únicas soluciones posibles de [1] cuando $k = 1$ son (2, 3, 1) y (3, 2, 1), mientras que para $k > 1$, [1] no tiene soluciones.

Observación.–Con un razonamiento análogo probamos que las únicas soluciones (x, y, z) positivas de la ecuación $x^{yz} - y^{xz} = 1$, $(x > y)$ son (2, 1, 1) y (3, 2, 1).

2 Algunos enunciados de problemas sobre ecuaciones diofánticas

En la siguiente sección damos diferentes ejemplos de ecuaciones diofánticas con soluciones en enteros positivos y que, para resolverlas empleamos el conocido teorema de la medias armónica-geométrica-aritmética-cuadrática-contraarmónica, ya citado en la introducción de este trabajo, en la forma particular siguiente:

Lema 4.–a) Si $0 < a < b$, entonces $a < \sqrt{ab} < \dfrac{a+b}{2} < b$.

b) Si $0 < a < b < c$, entonces $a < \sqrt[3]{abc} < \dfrac{a+b+c}{3} < c$.

Para generalizar este resultado para más variables, ver [6] y [7].

Ejemplos.–Las siguientes ecuaciones diofánticas no tienen solución (x, y) para naturales $x, y > 1$:

a) $x^2 + 9 = 4^y$.
b) $y^3 = x(x+2)\,(x+4)$.
c) $3(x+y) + xy = x^2 + y^2$, para $x, y > 0$.

Resolvamos a): $x^2 = (2^y)^2 - 3^2 = (2^y - 3)\,(2^y + 3)$, por lo tanto (cuando y > 1) al aplicarle el lema 4 , obtenemos

$$2^y - 3 < x < \frac{1}{2}\,[(2^y - 3) + (2^y + 3)] = 2^y,$$

de aquí $x = 2^y - 2$ ó $x = 2^y - 1$. Como de a) se deduce que x debe ser impar, tenemos por ello que, $x = 2^y - 1$; pero entonces $(2^y - 1)^2 + 9 = 4^y$ da $10 = 2^{y+1}$, que es imposible.

Observación: Un análogo razonamiento permite llegar a las mismas conclusiones sobre las soluciones en naturales positivos de las siguientes ecuaciones diofánticas:

$$x^{2y} + 1 = 4^x, \quad x^{2y} + 1 = 4^y, \quad x^2 - 4^y = 1.$$

b) Tenemos que si $1 < x, y$, entonces

$$x^3 < x(x+2)\,(x+4) = y^3.$$

y por lo tanto por el lema 4

$$x < y = \sqrt[3]{x(x+2)(x+4)} < \frac{x+(x+2)+(x+4)}{3} = x+2,$$

de aquí $y = x + 1$. Entonces $(x+1)^3 = x(x+2)(x+4)$ y operando llegamos a $3x^2 + 5x - 1 = 0$, que es una ecuación polinómica que no tiene soluciones enteras.

c) Supongamos que, $0 < x \leq y$, por simetría es una solución de la ecuación que estamos considerando. Tenemos entonces los siguientes casos:

1. Si $x = y$, entonces de $3(x+y) + xy = x^2 + y^2$ obtenemos, $6x + x^2 = 2x^2$, y por lo tanto, $6x = x^2$. De aquí, $x = y = 6$, que es una de las soluciones buscadas.

2. Si $0 < x < y$, es otra posible solución de c), entonces por el teorema de las medias armónica-geométrica-aritmética-cuadrática-contraarmónica, podemos escribir

$$3 + \frac{xy}{x+y} = \frac{x^2+y^2}{x+y} > \frac{2xy}{x+y}$$

De aqui, llegamos a

$$3 > \frac{xy}{x+y}, \text{ y por lo tanto } 6 > \frac{2xy}{x+y} > x > 0.$$

Esto último implica que los valores posibles para x, son $x = 1, 2, 3, 4, 5$.

Probando con cada uno de los valores obtenidos antes para x, en la ecuación c) llegamos a que sólo para $x = 3$, tenemos una nueva solución entera para la ecuación dada.

Por consiguiente, y de la simetría que hay entre las incógnitas x, y, tenemos que las soluciones de la ecuación c) son : $(3, 6), (6, 3), (6, 6)$.

Otros ejercicios a resolver son los siguientes:

Utilizando el teorema de las medias armónica-geométrica-aritmética-cuadrática-contraarmónica, encontrar las soluciones en naturales positivos de las siguientes ecuaciones diofánticas:

a) $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = \frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$,

b) $\sqrt{xy}\,\frac{x+y}{2} = \frac{2xy}{x+y}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$

c) $2(x+y) + xy = x^2 + y^2$, donde $x, y > 0$.

Nota.–En el libro [16] de A. Faisant, y cuyo título es *L'equation diophantine du second degré*, se encuentra de forma detallada y completa la resolución de las ecuaciones diofánticas de segundo grado, usando las técnicas algebraicas propias y potentes de la teoría de los números tales como las siguientes: las formas binarias y los módulos, las fracciones continuas, los numeros algebraicos, los cuerpos cuadráticos reales e imaginarios, el número de clases de ellos, los ideales de los cuerpos cuadráticos y otros tópicos.

Observación.–Los libros [4], [5], [8], [9], [10], [11], etc., son excelentes. Tratan sobre la teoría de números, y en especial, se trata con detalle el tópico de las ecuaciones diofánticas. Así, por ejemplo, en [4], Chapter 5, Some Diophantine equations, pp. 212-296, tenemos los teoremas siguientes, entre otros:

1. Los teoremas de Mordell, Lutz-Nagell y Mazur para las curvas elípticas con coeficientes enteros con relación a las propiedades algebraicas que tiene el grupo asociado a todos los puntos racionales de una curva elíptica.

2. El teorema de Legendre para las soluciones enteras de cónicas. Uno de los problemas interesantes y difíciles es: caracterizar y hallar todas las soluciones enteras de una cónica. Por ejemplo: la ecuación diofántica $x^2 + y^2 = 3$, no tiene soluciones enteras. Mientras que, la ecuación diofántica $x^2 + y^2 = 1$,tiene entre sus soluciones enteras $x = y = 1$.

3.–Teorema de Faltings.–Sea $f(x, y)$ un polinomio con coeficientes racionales que es irreducible sobre el cuerpo de los números complejos. Si la curva $C_f(\mathbb{C})$ tiene género $g > 1$, entonces el conjunto $C_f(\mathbb{Q})$ de sus puntos racionales sobre la curva es a lo más finito.

También se exponen resultados sobre las ecuaciones diofánticas de tipo cuadrático y cúbico, algunas de las cuales pueden ser tratada por los métodos elementales expuestos aquí, para ver si tienen o no soluciones. En el caso afirmativo de haber alguna solución racional de estas ecuaciones proceder por el método usual, de la cuerda-tangente a través del haz de rectas que pasa por una de las soluciones de la ecuación diofántica dada y así obtener las restantes soluciones.

En todos los casos en que la ecuación diofántica dada sea de tipo algebraico polinomial, dada por la ecuación $P(x, y) = 0$, donde $P(x, y)$ es un polinomio con coeficientes enteros. Entonces pasar esta curva al plano proyectivo. Luego, estudiad los posibles puntos singulares de la curva si los tiene, y que estén a distancia finita y en el infinito. Finalmente, calculad el género de la curva en la forma que es usual para hallar su posible parametrización.

Ejemplos.

1) Resolver la ecuación diofántica $x^2 + y^2 = 1$.
2) Probar que la ecuación cúbica de Fermat $x^3 + y^3 = 1$, tiene sólo dos puntos racionales, $(1, 0)$ y $(0, 1)$, como ya probó Euler.
3) Hallar las soluciones positivas de la ecuación diofántica $(x^2 + y^2)^2 = (x + y)^3$.

Algunas de las ecuaciones diofánticas que vamos a continuación a proponer son difíciles de resolver ya que, a veces, se requieren técnicas, ideas y razonamientos muy sofisticadas. Otras ecuaciones diofánticas, sin embargo, como la ecuación general de Catalan, $x^n - y^m = 1$, con x, y, m y n enteros positivos, esta pendiente todavía de hallar todas sus soluciones. Se sabe por ejemplo, que la ecuación particular y original de Catalan, $3^x - 2^y = 1$, tiene las soluciones triviales: $x = y = 1$; y, $x = 2, y = 3$, pero no se ha encontrado si tiene o no más soluciones. Ver por ejemplo, [29]. Y la célebre ecuación de Fermat, $x^n + y^n = z^n$, propuesta por él, en el siglo XVII ha sido resuelta con teorías muy complicadas, recientemente, por A. Wiles.

Ejemplos.–La resolución de las siguientes ecuaciones diofánticas son difíciles, tanto por los razonamientos como por las técnicas algebraicas y geométricas especiales que se emplean. Algunas de las que aquí proponemos resolver han sido publicadas como artículos de revistas especializadas de teoría de números. Ver [15].

1) Resolver la ecuación diofántica pitagórica $x^2 + y^2 = z^2$.
2) Hallar las soluciones de la ecuación diofántica de Pell $x^2 - 2y^2 = 1$.
3) Utilizando el método del descenso de Fermat, probar que la ecuación diofántica $x^4 + y^4 = z^2$ no tiene soluciones no triviales.
4) La ecuación diofántica $3y(y + 1) = x(x + 1)(2x + 1)$ tiene como únicas soluciones positivas $(x, y) = (1, 1), (5, 10), (6, 13), (85, 645)$.
5) Selberg, ha probado que la ecuación diofántica $x^4 - y^3 = 1$ no tiene solución.
6) Mordell ha demostrado que las únicas soluciones posibles para la ecuación diofántica $x(x + 1)(x + 2) = y(y + 1)$ son aquellas en las que la $x = -2, -1, 0, 1, 5$.
7) Euler demostró que la única solución de ecuación diofántica $x^2 - y^3 = 1$, es $x = 3$, $y = 2$.
8) Hallar todos los triángulos cuyos lados, medianas y áreas sean números naturales.
9) Hallar todos los cuadriláteros tales que sus lados, sus diagonales y áreas sean números naturales.
10) Hallar las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo para que el radio inscrito sea un número racional.
11) Hallar las dimensiones que ha de tener una caja para que sus lados, las diagonales de sus caras y la diagonal principal sean todos números naturales.

12) Resolver las siguientes ecuaciones diofánticas:

a) $x^2 - 2y^2 = -1$; b) $x^3 - 2y^3 = -1$; c) $x^4 - 2y^4 = -1$.

Para todos estos problemas, ver [15].

Ver [11] y otros libros citados en la bibliografía para encontrar numerosos ejemplos y cuestiones teóricas sobre las interesantes propiedades de las curvas elípticas.

Mirar también las revistas especializadas que existen sobre la Teoría de los Números.

Los paquetes que hay para ordenador en los que se tratan los diferentes procedimientos y algoritmos algebraicos para la resolución de los diversos tópicos de la Teoría de Números.

Por ultimo, consultar los libros y monografías que existen sobre la Teoría de los Números.

3. Conclusiones y comentarios

Creemos que parte de este trabajo puede ser utilizado en el perfeccionamiento y en la actualización del profesorado de la enseñanza secundaria, como una incitación, provocación e invitación al profesorado a estudiar la apasionante y la interesante, pero difícil, teoría elemental de números que es bella, hermosa y sorprendente y con una historia llena de episodios emocionantes. La teoría de los números puede servir también al profesorado para espolearle a ser intuitivo, creativo e imaginativo en el aula. Y asimismo hacerle recordar conocimientos que, posiblemente, alguna vez, estudió y ahora quiera rememorar. Por todo ello, el profesor necesita a través de la innovación en la clase embarcarse en la maravillosa y en la difícil aventura de la creación e investigación de los problemas, y de las conjeturas que se le ocurra a él, como aquellas otras propuestas por otros.

Necesita, de la ayuda y de la propuesta de temas apropiados en la clase, en los seminarios de perfeccionamiento, etc., para saberlos usar en las dosis adecuadas la investigación en el aula, que se susciten esos temas. Esta aventura apasionante de descubrir, de resolver problemas y de demostrar o refutar conjeturas sera para él y para sus alumnos un reto que se convierte en una meta educativa difícil de conseguir. Si se logra, el profesor, aunque sea parcialmente, habrá puesto en alguno de sus alumnos una semilla que germinará y dará buenos frutos. Porque ha utilizado el mejor y el más noble y sublime de los recursos metodológicos y didácticos: la intucición, la creación, la imaginación e investigación, que sirven para entusiasmar, embelesar y dar ejemplo a sus alumnos en el aula, de lo que es un matemático. Y así, la enseñanza, el aprendizaje y la educación matemática que trasmite a sus alumnos, tendrá en todos los tiempos y en todos los niveles educativos una gran calidad. También, pensamos que algunos tópicos sobre las ecuaciones diofánticas sencillas, pueden ser explicadas, adaptándolas, metodológica y didácticamente, tanto a los alumnos de la ESO, como a los alumnos del nuevo Bachillerato. En esto consiste el noble, el difícil, el grandioso y genuino arte de enseñar las Matemáticas a los alumnos: intentar enseñar en el aula que lo que es difícil se puede hacer con arte matemático lo más fácil posible para la mayoría.

Agradecimientos.–El autor de este artículo de carácter elemental agradece de forma entrañable, al Profesor G. Gerrish, de England, por todas las sugerencias y las ayudas que me ha aportado de una forma desinteresada para que este trabajo saliera a la luz.

Bibliografía

[1] I. STEWART y D. TALL: *The foundations of Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1977.

[2] E. BECKENBACH y R. BELLMAN: *An Introductión to inequalities*, MAA, Washington, 1961.

[3] R. B. NELSEN: *Proof without words: Five means and their Means*. Mathematics Magazine, Vol. 69, N.1, February, 1996, págs. 64-65.

[4] I. NIVEN, H. S. ZUCKERMAN y H. C. MONTGOMERY: *An Introductión to theory of numbers*, Wiley, New York, 1991.

[5] L.J. MORDELL: *Diophantine Equations*, Academic Press,London,1969

[6] H. HARDY y L. LITLEWOOD: *Inequalities*, Cambridge University Press, Oxford, 1960.

[7] D. MITRINOVIC y otros: *Analytiques Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[8] W. SIERPINSKI: *250 problems in elementary number theory*, Elsevier, New Jersey, 1970.

[9] Z. I. BOREVIC e I. R. SHAFAREVIC: *Number Theory*, Academic Press, New York, 1966.

[10] L. K. HUA: *Introduction to Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[11] D. HUSEMOLLER: *Elliptic Curves*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[12] K. F. IRELAND y M. ROSEN: *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[13] K. H. ROSEN: *Elementary Number Theory and Its Applications*, Addison-Wesley (Reading), New York, 1984.

[14] Juan-Bosco ROMERO MÁRQUEZ: Problem 476, *"A somewhat Symmetric Diophantine equation*, published en CMJ, Vol. 24, núm. 3, May, 1993, págs. 272-3.

[15] L. E. DICKSON: *History of the theory of Numbers*, Chelsea, New York, 1950.

[16] J. ROBERTS: *Lure of the integers*, MAA, Washington, 1992.

[17] A. FAISANT: *L'equation diophantine du second degré*, Hermann, París, 1991.

[18] G. H. HARDY y E. M. WRIGHT: *An Introduction to the theory of numbers*, Clarendon Press, 1960, Oxford.

[19] P. SAMUEL: *Theorie algebrique des nombres*,Hermann,París,1967.

[20] D. SHANKS: *Solved and unsolved problems in number theory*, Chelsea, New York, 1978.

[21] R. HONSBERGER: *More Mathematical Morsels*, MAA, Washington, 1991 (*).

* Este autor, dentro de la misma colección, tiene cinco libros interesantes y excelentes, y que están dedicados a diversos tópicos de la matemática elemental, en forma de problemas y cuestiones que incitan a la investigación y a la creación de otros problemas y de otras cuestiones matemáticas.

[22] W. J. LEVEQUE: *Teoría elemental de los números*, Herreros y sucesores, México, 1966.

[23] A. J. PETTOFREZZO y D. R. BYRKIT: *Introducción a la teoría de los números*, Prentice, Madrid, 1972.

[24] O. ORE: *Number Theory and its History*, McGraw-Hill, New York, 1948.

[25] T. NAGELL: *Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley New York, 1951.

[26] M .R. SCHROEDER: *Number Theory in Science and Comunications*, Springer, Berlin, 1984.

[27] V. KLEE y S. WAGON: *Old and new unsolved problems in Plane Geometry and Number Theory*, MAA, N. 11, 1991, Washigton (**).

[28] H. D. EBBINGHAUS, H. HERMES, F. HIRZEBRUCH y otros: Numbers, Springer-Verlag, New York, 1991.

[29] P. RIBENBOIN: *Catalan's Conjecture*, MAA, Monthly, August-September, Vol. 103, N. 7, págs. 529-38, Washigton, 1996 (***).

(**) Libro que es excelente para investigar y que tiene una amplia bibliografía. Ver, Chapter 2, Number Theory, págs. 167-238. Este libro junto con los libros N. 1, 2, 3, 4, 9, 10, de R. Honsberger pertenecen a la colección: The Dolciani Mathematical Expositions.

(***) Recientemente ha sido publicado un libro que trata de forma detallada y exhaustiva la ecuación diofántica citada en [29].

Índice de los artículos publicados en los 44 primeros números de este Boletín (1983-96)

Reseña de libros

TONY GARDINER: *Mathematical Challenge*. Cambridge University Press, 1996

Los concursos de matemáticas con pruebas de elección múltiple, sobre todo para alumnos con edades parecidas a los nuestros de Secundaria, cada día tienen más seguidores. Es posible que una de las razones sea que la estructura de la prueba permita que una participación de decenas o centenares de miles de estudiantes no requiera una gran cantidad de personas para la corrección de las mismas, en tanto que un lector óptico, o simplemente unas pocas personas, sea suficiente. Por otra parte, puede ocurrir también que, al ser pruebas cortas, los estudiantes las vean más asequibles y esto les anime a participar. En cualquier caso, son ya en muchos países donde se celebran pruebas así. Una de las más prestigiosas revistas del mundo sobre resolución de problemas, la canadiense Crux Mathematicorum, publica ininterrumpidamente, desde enero de 1995, todos los meses, una prueba de este tipo –para alumnos menores de 15 ó 16 años– celebrada de algún país. La Editorial Euler, en algunos libros de su colección "La Tortuga de Aquiles", intenta dar a conocer en España los AHSME, unos concursos de matemáticas con pruebas de elección múltiple que se celebran desde hace casi 50 años –comenzaron en 1950– en EE.UU.

El libro que cito en esta recensión –*Mathematical Challenge*– contiene los United Kingdom School Mathematical Challenge Papers, concursos que tienen lugar en el Reino Unido, desde 1988, y que ya arrastran a unos 300.000 estudiantes de más de 3.000 institutos, en edades comprendidas entre los 11 y 15 años.

Aunque este concurso está diseñado para el 35% de los alumnos de más alto rendimiento, dentro de esta edad, la mayoría de las cuestiones son accesibles (con alguna modificación en algunas) a otros grupos de alumnos de estas edades y muchas de ellas son difíciles para alumnos de mayor edad.

Cada concurso consiste en 25 cuestiones a resolver en 1 hora.

El libro, de 137 páginas, consta de dos partes: la sección A contiene los seis primeros concursos, celebrados entre 1988 y 1993, así como la lista de las respuestas correctas en cada uno de ellos. Al final de cada prueba aparece la estadística de los resultados seguida de un breve, pero muy rico, comentario sobre los mismos. Esta estadística puede sernos útil si queremos comparar el nivel de nuestros alumnos con los del Reino Unido.

La sección B contiene cuarenta y dos pruebas, de diez cuestiones cada una, totalmente análogas a las de los concursos, junto a las listas correspondientes a las respuestas correctas. En total, pues, en el libro se pueden encontrar unas seiscientas cuestiones, en las que no encontramos casi ninguna cuya resolución sea consecuencia de aplicar directamente alguna rutina de cálculo.

Yo vengo trabajando el material de este libro, durante el presente curso, un día a la semana, en la asignatura de Taller de Matemáticas, en 3° de ESO, y puedo asegurar que mis estudiantes, además de engancharse a estas cuestiones que se salen de las rutinas usuales, disfrutan más, y, sobre todo, piensan más, que con las cuestiones que normalmente les planteo en la asignatura de Matemáticas.

Para terminar, y como muestra de alguna de las cuestiones que aparecen en el libro, he aquí algunas:

- ¿Cuál es el mayor resto que se puede obtener al dividir un número de dos cifras por la suma de éstas? A 9; B 13; C 15; D 16; E 17.
- Un instituto tiene 657 alumnos. De ellos, hay 384 entre 4° de ESO y cursos más altos y 376 entre 4° de ESO y cursos más bajos. ¿Cuántos alumnos hay en 4° de ESO? A 8; B 103; C 113; D 273; E 281.
- En la foto de final de Curso de un instituto, los 630 alumnos están ordenados en filas. Si cada fila contiene 3 estudiantes menos que la que está encima, ¿qué número de filas, de las siguientes, no es posible que haya? A 3; B 4; C5; D 6; E 7.

Pedido a Cambridge University Press resulta más barato que los libros españoles de tamaño parecido y lo envían en poco más de un mes.

Joaquín Hernández Goméz.

ROGER B. NELSEN: *Exercises in Visual Thinking*. Classroom Resource Materials. Number 1. Mathematical Association of America.

En una colección que se propone aportar trabajos para su utilización inmediata en el aula, Classroom resource materials, la Mathematical Association of America ha publicado este libro con la idea de proporcionar, a los profesores fundamentalmente, un material con un enfoque poco habitual de presentar las ideas matemáticas.

Muchos matemáticos estarán de acuerdo en que las "demostraciones sin palabras" no son demostraciones en el sentido estricto pero, como se observa en este libro, son dibujos o diagramas que ayudan al lector a ver por qué es cierta una determinada afirmación o por dónde debe empezar si quiere probarla.

Mientras que en algunas puede aparecer una o dos ecuaciones que sirven de ayuda, el énfasis se hace claramente en el aspecto visual que puede servir para estimular el pensamiento matemático.

En el libro podemos encontrar demostraciones sin palabras de la antigua China, de los griegos, de la India del siglo XII, incluso una sobre el teorema de Pitágoras de James

Garfield, que fue presidente de los EE.UU., aunque la mayoría son relativamente recientes y han aparecido en Mathematics Magazine y The College Mathematics Journal, dos de las revistas de la Mathematical Association of America. Están ordenadas, por temas, en seis capítulos: Geometría y Álgebra, Trigonometría, Cálculo y Geometría Analítica, Suma de enteros positivos, Sucesiones y series y un capítulo final con problemas de todo tipo.

El libro consta de 144 páginas, en cada una, una demostración sin palabras, más cinco páginas al final donde aparece la reseña bibliográfica de la que está extraída cada una de las 144 demostraciones. Por supuesto, la dificultad del Inglés en el que está escrito –dada la naturaleza del libro– es nula.

Joaquín Hernández Gómez

Problemas propuestos

Problemas propuestos
en la XI OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMÁTICAS
celebrada en Costa Rica en septiembre de 1996

Problema nº 1:

Sea n un número natural. Un cubo de arista n puede ser dividido en 1996 cubos cuyas aristas son también números naturales. Determine el menor valor posible de n.

Problema nº 2:

Sea M el punto medio de la mediana AD del triángulo ABC (D pertenece al lado BC).La recta BM corta al lado AC en el punto N. Demuestre que AB es tangente a la circunferencia ciscunscrita al triángulo NBC si, y solamente si, se verifica la igualdad

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{MN}} = \frac{(\overline{BC})^2}{(\overline{BN})^2}$$

Problema nº 3:

Tenemos un tablero cuadriculado de $k^2 - k + 1$ filas y $k^2 - k + 1$ columnas, donde $k = p + 1$ y p es un número primo. Para cada primo p, dé un método para distribuir números 0 y 1, un número en cada casilla del tablero, de modo que en cada fila haya exactamente k números 0 y además no haya ningún rectángulo de lados paralelos a los lados del tablero con números 0 en sus cuatro vértices.

Problema nº 4:

Dado un número natural $n \geq 2$, considere todas las fracciones de la forma $1/ab$, donde a y b son números naturales, primos entre sí y tales que

$$a < b \leq n$$
$$a + b > n.$$

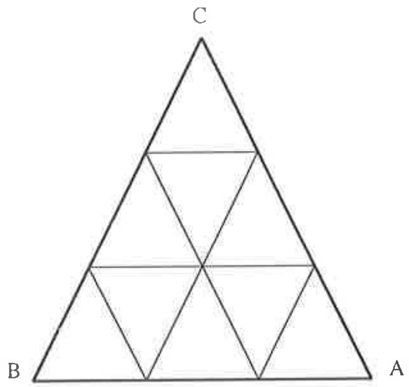
Demuestre que para cada n la suma de estas fracciones es 1/2.

Problema nº 5:

Tres fichas A, B y C están situadas una en cada vértice de un triángulo equilátero de lado n. Se ha dividido el triángulo en triángulos equiláteros de lado 1, tal como muestra la figura en el caso $n = 3$. Inicialmente todas las líneas de la figura están pintadas de azul. Las fichas se desplazan por las líneas, pintando de rojo su trayectoria, de acuerdo con las dos reglas siguientes:

(i) Primero se mueve A, después B, después C, después A y así sucesivamente, por turnos. En cada turno, cada ficha recorre exactamente un lado de un triangulito, de un extremo al otro.

(ii) Ninguna ficha puede recorrer un lado de un triangulito que ya esté pintado de rojo; pero puede descansar en un extremo pintado, incluso si hay otra ficha esperando allí su turno.



Demuestre que para todo $n > 0$ es posible pintar de rojo todos los lados de los triangulitos.

Problema nº 6:

Se tienen n puntos distintos $A_1, \dots, A_n$ en el plano y a cada punto A_i se ha asignado un número real λ_i distinto de cero, de manera que $(\overline{A_iA_j})^2 = \lambda_i + \lambda_j$ para todos los i, j con $i \neq j$. Demuestre que

(a) $n \leq 4$

(b) Si $n = 4$, entonces $\dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} + \dfrac{1}{\lambda_3} + \dfrac{1}{\lambda_4} = 0$

Problemas propuestos en la I FASE DE LA OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA en la mayor parte de los distritos, en noviembre de 1996

Problema nº 7: (1º de la O.M.E.)

Demostrar que todo número complejo no nulo se puede escribir como suma de otros dos cuya diferencia y cuyo cociente sean imaginarios puros.

Problema nº 8: (2º de la O.M.E.)

Se considera una circunferencia de centro O, radio r y un punto P exterior. Se trazan cuerdas AB paralelas a OP.

a) Demostrar que $PA^2 + PB^2$ es constante.
b) Hallar la longitud de la cuerda AB que hace máxima el área del triángulo ABP.

Problema nº 9: (3º de la O.M.E.)

Seis músicos participan en un festival de música. En cada concierto, algunos de esos músicos tocan y los demás escuchan. ¿Cuál es el mínimo número de conciertos necesario para que pueda suceder que cada músico haya escuchado a cada uno de los otros?

Problema nº 10: (4º de la O.M.E.)

La suma de dos de las raíces de la ecuación

$$x^3 - 503x^2 + (a+4)x - a = 0$$

es igual a 4. Determinar el valor de a .

Problema nº 11: (5º de la O.M.E.)

Si a, b, c son números reales positivos, demostrar la desigualdad

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 3(b-c)(a-b).$$

¿ Cuándo se verifica la igualdad?

Problema n° 12: (6° de la O.M.E.)

Encontrar, razonadamente, todos los números naturales n tales que n^2 tenga solamente cifras impares.

Problema n° 13: (7° de la O.M.E.)

En el triángulo rectángulo ABC (rectángulo en A), AD es la altura. Las bisectrices de ABD y ADB se cortan en I_1, mien tras que las bisectrices de ACD y ADC se cortan en I_2. Calcular los ángulos agudos del triángulo ABC, sabiendo que la suma de las distancias de I_1 e I_2 a la altura AD es igual a BC/4.

Problema n° 14: (8° de la O.M.E.)

Para cada número real x, representamos con $\lfloor x \rfloor$ el mayor entero menor o igual que x. Definimos

$$q(n) = \left[\frac{n}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right]$$

a) Forma una tabla de los valores de $q(n)$ para $1 \leq n \leq 25$. Examinando la tabla, conjetura cuáles serán los valores de n para los cuales $q(n) < q(n+1)$.

b) Demuestra la conjetura, es decir determina razonadamente todos los enteros positivos tales que $q(n) > q(n+1)$.

Problemas resueltos

Problema 3° (BOLETÍN N.° 26)

Hállense todos los números enteros $n > 1$ tales que $(2^n + 1)/n^2$ es un entero.

Solución:

Como $2^n + 1$ es impar, si n^2 es divisor suyo, n ha de ser impar. Sea n un entero igual o mayor que 3 que verifica la propiedad de que n^2 divide a $2^n + 1$, y sea p el menor número primo de la descomposición de n. Será entonces $p \geq 3$ y p divisor de $2^n + 1$, o sea $2^n \equiv -1$ (mód. p).

Si hay tal número n, sea i el menor número natural tal que $2^i \equiv -1$ (mód. p). Por el teorema de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1$ (mód. p) y las potencias de 2 de exponentes 1 a $p-1$ darán todos los restos posibles (mód. p), por lo que si i es el menor exponente para el que el resto es $p-1$ (congruente con -1), será $i < p-1$.

Supongamos ahora $n = ki + r$, con $0 \leq r \leq i-1$, con lo que $2^n = 2^{ki} \cdot 2^r \equiv (-1)^k \cdot 2^r$ (mód. p).

Si k es impar, $2^n \equiv (-1) \cdot 2^r$ (mód. p) y como $2^n \equiv (-1)$ (mód. p) será $2^r \equiv 1$ (mód. p). Veamos que ha de ser $r = 0$: si $r > 0$, entonces $i = r + d$, col $1 \leq d < i$, $2^i = 2r^n \cdot 2^d \equiv -1$ (mód. p), pero esto da $2^d \equiv -1$, lo que contradice la elección de i. Por tanto, $n = ki$. Como i es divisor de n y menor que p (que era el menor divisor primo de n), será $i = 1$. Entonces, p es divisor de $2 + 1$, o sea $p = 3$.

Sea ahora $n = 3^k \cdot d$, con $k \geq 1$ y m.c.d. $(d, 3) = 1$. Vamos a probar que $k = 1$. Para ello, supongamos que $k \geq 2$; como n^2 divide a $2^n + 1$, 3^{2k} dividirá a $(3-1)^n + 1$; pero $(3-1)^n + 1 =$
$= \binom{n}{1} \cdot 3 - \binom{n}{2} \cdot 3^2 + \dots + (-1)^{k+1}\binom{n}{k+1} \cdot 3^{k+1} + (-1)^{k+2}\binom{n}{k+2} \cdot 3^{k+2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot 3^n = 3^{k+1} \cdot d$
$- \binom{n}{2} \cdot 3^2 + \dots + (-1)^{k+1}\binom{n}{k+1} \cdot 3^{k+1} + (-1)^{k+2}\binom{n}{k+2} \cdot 3^{k+2} + \dots + \binom{n}{n} \cdot 3^n$ ya que es $\binom{n}{1} \cdot 3$
$= 3n = 3^{k+1} \cdot d$). Obviamente, 3^{k+2} divide a $(3-1)^n + 1$, pues si $k \geq 2$, $k + 2 \leq 2k$. Por tanto, 3^{k+2} dividirá a $3^{k+1} \cdot d - \binom{n}{2} \cdot 3^2 + \dots + (-1)^{k+1}\binom{n}{k+1} \cdot 3^{k+1}$; observando que el exponente de 3 en $\sum_{j=2}^{k+1} \binom{n}{j} \cdot 3^j(-1)^j$ es mayor que $k + 1$, con lo que 3^{k+2} dividiría a 3^{k+1}, lo que es absurdo; así que $n = 3d$. Por fin, vamos a ver que $d = 1$. Si $d > 1$, sea q el menor primo de la descomposición de d; como m.c.d. $(d, 3) = 1$, será $q \geq 5$ y como q ha de ser divisor de 2^{n+1}, será $2^n \equiv -1$ (mód. q); sea ahora j el menor número que haga que $2^j \equiv -1$ (mód. q); como antes, utilizando el teorema de Fermat, $2^{q-1} \equiv 1$ (mód. q), se obtiene que $j < q-1$ y también igual que antes, se deduce que j divide a n.

Como $n = 3d$, con m.c.d.$(3, d) = 1$ y $j < q - 1$, se deduce $j = 1$ ó $j = 3$. La congruencia $2^j \equiv -1$ (mód. q) da entonces que q divide 3 o que q divide a 9, por lo que $q = 3$, en contradicción con la desigualdad $q \geq 5$ deducida antes.

Conclusión: Si $n > 1$, n^2 divide a $2^n + 1$ sólo si $n = 3$.

M. Mercedes Sánchez Benito (Alcorcón)

Problema 7° (BOLETÍN N.° 37)

Demostrar que para todo n natural, $n^2(n^2 + 11)$ es múltiplo de 12.

Solución:

Basta probar que el número dado, al que llamaremos N, es múltiplo de 3 y también de 4.

1) Si n es múltiplo de 3, N también lo es. Si n es de la forma $3k + 1$ o $3k - 1$, resulta $n^2 + 1 = (3k \pm 1)^2 + 11 = 9k^2 \pm 6k + 12$, que es múltiplo de 3.

2) Si n es par, n^2 es múltiplo de 4. Si n es impar, $n^2 + 11 = (2k + 1)^2 + 11$, que es múltiplo de 4.

Luego en todo caso, N es múltiplo de 12.

Alberto Aizpún

Problema 8° (BOLETÍN N.° 37)

Hay n cajas de cerillas situadas en fila india. Si el doble del número de cerillas de la caja número k más el número de cerillas de la(s) caja(s) contiguas es $\binom{n+1}{k}$ para $k = 1, 2, ..., n$, ¿Cuántas cerillas tiene cada caja?

Solución:

La relación fundamental entre números combinatorios se expresa por:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Esa misma relación, aplicada a cada uno de los sumandos del primer miembro, da

$$\binom{n}{k-1} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-2}; \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Sustituidos estos dos valores en la igualdad primera, resulta,

$$2\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-2} = \binom{n+1}{k},$$

que es precisamente la condición del enunciado. Por tanto, la caja número k tiene $\binom{n-1}{k-1}$. Las cajas 1.ª, 2.ª, ... kª, ..., nª, tienen, respectivamente, 1, $\binom{n-1}{1}$, $\binom{n-1}{2}$, ,,,,,,$\binom{n-1}{k-1}$, ..., 1 cerillas.

Alberto Aizpún

Problema 1° (BOLETÍN N.° 39)

Se dice que un númeron natural n es "sensato" si existe un entero r, con $1 < r < n - 1$, tal que la representación de n en base r tiene todas sus cifras iguales. Por ejemplo, 62 y 15 son sensatos, ya que 62 es 222 en base 5 y 15 es 33 en base 4. Demostrar que 1993 no es sensato pero 1994 sí lo es.

Solución:

Si la cifra que se repite es a el número n ha de ser de la forma $n = a(r^p + r^{p-1} + ... + 1)$. Como 1993 es primo sería $a = 1$ y $1992 = r^p + r^{p-1} + ... + r$, por lo que la base r habría de ser un divisor de 1992 distinto de 1 y de 1992; se comprueba que ninguno de ellos conviene.

Para 1994: la descomposición en factores primos es $1994 = 2 \times 997$, luego la cifra que se repite o es 1 o es 2. Para $a = 2$, se llega a $997 = r^p + ... + ... + r + 1$ y r debe ser uno de los divisores de 996 distintos de 1. Se comprueba que solamente 996 cumple la condición. Así, 1994 se escribe 22 en base 996.

Alberto Aizpún

Problema 9° (BOLETÍN N.° 44)

Sea $a_k = \binom{n}{k-1}\binom{n}{k}$, $\forall k = 1, 2, ..., n$.

Demuestra que la media aritmética de los a_k, $\forall n = 1, 2, ...$, es un número entero.

Solución:

Fijado n ,la media aritmética de los correspondientes a_k es $\frac{1}{n}\Sigma a_k$ con $k = 1, 2, ..., n$. Demostraremos que a_k es múltiplo de n para todos esos valores de k y por tanto la media es la suma de los enteros $\frac{a_k}{n}$.

Es $a_k = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k+2)}{(k-1)!} \cdot \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$, lo que es lo mismo que $a_k = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k+2)}{k!} \cdot \dfrac{(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{(k-1)!} \cdot n$.

El producto del segundo miembro es un entero, porque a_k lo es. Pero la segunda fracción también es un entero, porque el numerador es el producto de $(k-1)$ enteros consecutivos y por tanto es múltiplo de $(k-1)!$. Así que la primera fracción también es un entero y a_k es de la forma ABn, con A y B enteros.

Alberto Aizpún

Indice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.°	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números 1.°	2.°	3.°	4.°	5.°	6.°	7.°	8.°	9.°	10.°	
1	Varios	4	4	–	–	–	–	–	–	–	–	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	–	–	–	–	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	–	–	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	–	–	–	–	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	–	–	–	–	C
6	Varios	7	7	16	–	–	–	–	–	–	–	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	–	–	–	–	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	–	–	–	–	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	–	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	–	–	–	–	–	–	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	–	–	–	–	C
14	Varios	15	15	15	15	–	–	–	–	–	–	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	–	–	–	–	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	–	–	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	–	–	–	–	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	–	–	–	–	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	–	–	–	–	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	–	–	–	–	–	–	–	–	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	
	Oposiciones	31	30	29	–	–	–	–	–	–	–	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	–	–	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	–	–	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	32	44	XX	32	44	44	XX	32	XX	34	
	OI-90-Valladolid	XX	XX	–	–	–	–	–	–	–	–	
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	–	–	
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	–	–	–	–	
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	XX	XX	33	33	33	
	OME-f1-91	33	34	34	34	–	–	–	–	–	–	
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	XX	XX	XX	35	
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	XX	35	34	–	–	–	–	–	
32	OMI-92-MOSC'U/	35	XX	XX	XX	XX	XX	38	35	XX	38	
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	–	–	–	–	–	–	
33	OME-f1-92/f1-92(v)	XX	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	
	/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	–	
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	–	–	–	–	
35	OMI-93-Turq./	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	39	
	OI-93-Méjico/PNS	XX	XX	39	39	XX	XX	–	–	–	–	
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	XX	40	
37	OME-f2-94/PNS	40	XX	XX	40	XX	XX	45	45	40	–	
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
39	OI-94-Brasil/OME-	43	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	43	
	f1-94/f1-94(v)	43	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	–	–	–	–	
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	
43	OME-f-96/	XX	44	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
44	OMI-96-India/	XX	XX	XX	XX	XX	XX	–	–	–	–	
	PNS	XX	XX	45	XX	XX	XX	–	–	–	–	

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 ó 2); OMI = Ol. Mat. Internac. OI = Ol. Iberoamer. de Mat. PNS = Propuesta por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVIO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACION EN EL BOLETIN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente

Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4. Si se utiliza LATEX, el formato debe ser 17cm × 12,8 cm en 11 puntos (para ser aprovechado directamente en la imprenta).

Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución (como suelen aparecer en el boletín).

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además,si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: "Problema número (Boletín número)", tal como suelen aparecer en el boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3.x o superior), conteniendo dos archivos:

a) archivo del documento para el procesador de texto utilizado.
b) archivo del documento en código ASCII

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.

Si se desea, las figuras pueden incluirse en archivos de extensión TIF (en otro caso se captarán por escaneado)

Envío

Todo ello se enviará a la sede de nuestra Sociedad, que figura en la página 2 de este número del Boletín (no al apartado, que ya no está operativo).

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

RELACION DE OTROS ARTICULOS QUE HAN SIDO ADMITIDOS PARA SER PUBLICADOS EN PROXIMOS NUMEROS DE ESTE BOLETIN

- Una introducción a la ordenación de polinomios y al cálculo de bases de Groebner, por Carlos Ramón Laca y Eugenio Roanes Lozano.
- La historia de la Matemática como recurso didáctico (continuación), por Mariano Martínez Pérez.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen grauitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

3	4	34	35	37	38	39
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
40	41	42	43	44	45	
☐	☐	☐	☐	☐	☐	

Envío adjuntos sellos para el franqueo.
Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5 al 33 y 36 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid
Tel. 394 62 48

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION

D. .... Teléf. (....) ....
Dirección particular ....
Ciudad .... Cod.° Postal ....
Centro de trabajo ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de la misma ....
para que cargue en la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1996-97 y siguientes.

Fecha .... de .... de 1997

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (incluida la cuota federativa de 2.000 ptas.).
Remítanse ambas partes a
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517). Tel. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.

Fecha .... BANCO: ....
Sucursal o Agencia .... en ....
Dirección de ésta ....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.
Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....
Nombre de la cuenta ....

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION (CENTROS)

D. ....

como .... del Centro ....

domiciliado en ....

Ciudad .... Cod.° Postal .... Teléf. ....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco ....

Sucursal o Agencia .... en ....

Dirección de la misma ....

para que cargue en la cuenta: .... / .... / .... / ..../.

abierta al nombre: ....

los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1996-97 y siguientes.

Fecha .... de .... de 1997

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (incluida la cuota federativa de 2.000 ptas.).
Remítanse ambas partes a
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517). Tel. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid.

Fecha .... BANCO: ....

Sucursal o Agencia .... en ....

Dirección de ésta ....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta: .... / .... / .... / .... /.
los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos ....

Nombre de la cuenta ....