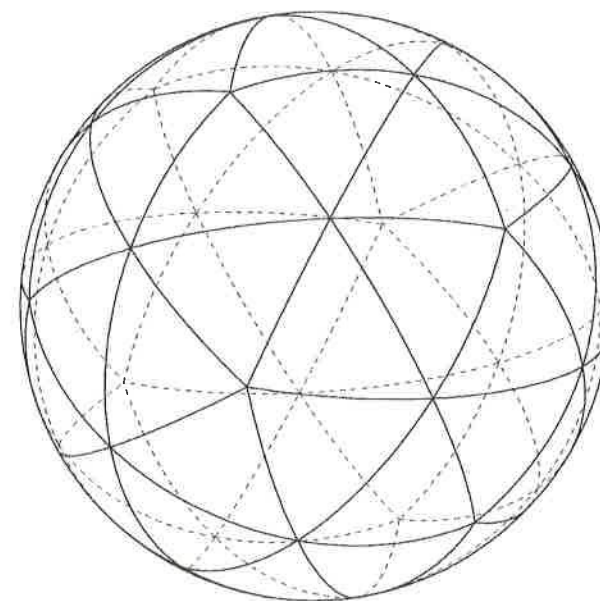


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMATICAS**



**BOLETIN N.º 44
OCTUBRE DE 1996**

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS
DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de Eugenio Roanes.

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L. - San Pedro, 23 bis - 28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: 611 59 94 - Fax: 611 59 88.

La portada de este número reproduce la figura 2 del artículo titulado Triangulación
de la Superficie Esférica, contenido en este número 44 de nuestro Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid.
Telf. (91) 394 62 48

ÍNDICE

	<i>Págs.</i>
XIV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas	5
XXXVII Olimpiada Matemática Internacional	11
Indice de noticias sobre Olimpiadas Matemáticas y Concursos de Problemas publicados en este Boletín	12
Notas breves	14
Triangulación de la Superficie Esférica por <i>Julio Fernández Biarge</i>	15
La ecuación de Cauchy-Euler: ¿Un caso límite de la ecuación de Friedmann?, por <i>Benito Hernández Bermejo</i>	24
Unos ejemplos de interés didáctico de Algebras de Boole finitas: divisores de un producto de primos distintos dos a dos por <i>Luis M. Laita de la Rica, Eugenio Roanes Lozano y Eugenio Roanes Macías</i>	34
Una aplicación geométrica del método de mínimos cuadrados por <i>Julio Benítez López</i>	45
La Biblioteca del Monasterio del Escorial como recurso didáctico en la clase de Matemáticas de Secundaria por <i>M.M. Garbayo Moreno, Charo Morata Sebatión y J.M. Sordo Juaneda</i>	51
Divisores de un número grande por <i>Fernando Lisón Martín</i>	63
Reseña de libros	74
Reseña de congresos	76
Problemas propuestos.....	79
Problemas resueltos.....	83
Indice de soluciones publicadas	91
Instrucciones para el envío de originales para su publicación en este boletín.	92
Relación de otros artículos que han sido admitidos para ser publicados en próximos números de este boletín	93

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS	(Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ	(Castilla-León)
SALVADOR HERRERO PALLARDO	(Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE	(Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE	(Relaciones institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO	(Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO	(Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ANGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecario:

JOAQUÍN HERNÁNDEZ GÓMEZ

XIV Concurso de Resolución de Problemas de Matemáticas

El XIV Concurso de Resolución de Problemas, convocado por nuestra Sociedad y por el Colegio de Doctores y Licenciados en Ciencias y en Filosofía y Letras, se celebró en la mañana del sábado 23 de Junio de 1996 en los locales de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid.

Concurrieron a él 105 participantes, algunos más que el año anterior, pero menos que en los precedentes. Varios de ellos procedían de Comunidades Autónomas distintas de la de Madrid. La mayoría cursaban el B.U.P., pero también había alumnos de la E.S.O. e incluso alguno de F.P. y concursaron distribuidos en tres niveles, según establecían las normas de la convocatoria.

Como otros años, se propusieron cuatro problemas a los alumnos de cada nivel, para que los resolviesen en dos tandas de hora y media cada una. Cada problema se calificaba de 0 a 10 puntos. A continuación de esta crónica damos sus enunciados, con datos estadísticos que reflejan sus dificultades relativas.

La entrega de premios y diplomas se hizo en un acto muy concurrido y entrañable, que se celebró en los antiguos locales de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E.G.B. «Pablo Montesino».

El Presidente pronunció unas breves palabras de felicitación a todos los participantes, especialmente a los premiados, y a los profesores y centros que los han preparado y de agradecimiento a la firma «Coca-Cola» que un año más ha costado la mayor parte de los premios entregados, así como al Colegio de Doctores y Licenciados y a la editorial Euler que los enriquecieron con valiosos libros y a las autoridades que han cedido amablemente los locales para la celebración de los actos.

Estos han sido los alumnos premiados en cada nivel:

NIVEL I

1. **D. Carlos DOMINGO MAS**, de 1.º de B.U.P.
del I. B. de Requena (Valencia)
2. **D. Oscar MORENO DIAZ**, de 1.º de B.U.P.
del Colegio N.º S.º de Loreto (Madrid)
3. **D. Alvaro NAVARRO TOVAR**, de 1.º de B.U.P.
del Colegio del Prado (Madrid)
4. **D. Roberto Carlos BARRERA MORIANA**, de 1.º de B.U.P.
del Colegio Joyfe (Madrid)
5. **Dña. María GARCIA CERDEÑO**, de 3.º de E.S.O.
del I. B. San Juan Bautista (Madrid)

NIVEL II

1. **D. Iñaki ARMENDARIZ BENITEZ**, de 2.º de B.U.P.
del I. B. Avda. de los Toreros (Madrid)
2. **D. Borja GUARDIOLA DEL CORRAL**, de 2.º de B.U.P.
del Colegio del Prado (Madrid)
3. **D. Jesús CARNICERO GOMEZ**, de 2.º de B.U.P.
del Colegio del Prado (Madrid)
4. **D. Nelo Alberto MAESTRE BLANCO**, de 2.º de B.U.P.
del Colegio Retamar (Madrid)
5. **D. Sergio MARTIN AHIJADO**, de 2.º de B.U.P.
del Colegio San Viator (Madrid)

NIVEL III

1. **D. Pablo ANGULO ARDOY**, de 3.º de B.U.P.
del I. B. Cervantes (Madrid)
2. **Dña. Carolina ALONSO DIAZ**, de 3.º de B.U.P.
del I. B. San Juan Bautista (Madrid)
3. **D. Raúl GARCIA MENA**, de 3.º de B.U.P.
del I. B. García Moliner (Coslada)
4. **D. Daniel DONAIRE HOYAS**, de 3.º de B.U.P.
del Colegio Corazón de María (Zamora)
5. **D. Teodoro SEOANE AMADO**, de 3.º de B.U.P.
del Colegio del Prado (Madrid)

Debemos resaltar que el premiado en primer lugar del Nivel III, D. Pablo Angulo Ardo, obtuvo ese puesto destacado resolviendo totalmente los cuatro problemas propuestos, obteniendo así 13 puntos más que cualquier otro de cualquier nivel; en 1994 participó también en nuestro Concurso, en el Nivel I, obteniendo entonces el 4.º premio.

Señalaremos también que Iñaki Armendariz Benítez y Borja Guardiola del Corral, primero y segundo del Nivel II, ocuparon esos mismos puestos en el Nivel I, en nuestro Concurso de 1995, que Raúl García Mena obtuvo el 5.º premio del Nivel II en 1995 y que Teodoro Seoane Amado quedó en 4.º lugar del Nivel II en 1995 y en 2.º lugar de Nivel I en 1994, confirmando así todos ellos una trayectoria muy prometedora para el futuro.

También debemos resaltar la sistemática repetición, año tras año, de éxitos obtenidos por alumnos de los mismos centros, lo que prueba la tenaz y eficaz labor formativa de algunos de sus profesores, a los que queremos felicitar.

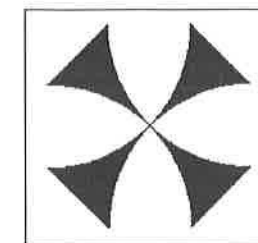
Damos a continuación los enunciados de los problemas propuestos en este concurso, señalando, para cada uno, las calificaciones medias obtenidas por la totalidad de los participantes y por los premiados de cada nivel.

PRIMER NIVEL

PROBLEMA 1.º:

Hallar el área sombreada, siendo 1 el lado del cuadrado.

Puntuación media de todos: 2,7; de los 5 premiados: 9,6.



PROBLEMA 2.º:

Si entre los pares ordenados de la forma (a,b) , donde a y b son números reales, se define la operación

$$(a,b) * (c,d) = (ac + bd, ad + bc)$$

entonces, al operar (a,b) con $(0,1)$ resulta (a,b) , es decir, $(1,0)$ resulta ser el elemento neutro, según se comprueba inmediatamente. Se dice que el par (x,y) es simétrico de (a,b) , si al operarlos resulta el neutro $(1,0)$. Razonar cuáles son los pares que no poseen simétrico y describir el conjunto de puntos del plano cuyas coordenadas son los pares ordenados de números reales que no poseen simétrico respecto de esta operación.

Puntuación media de todos: 0,4; de los 5 premiados: 2,8.

PROBLEMA 3.º:

¿Cuál es la anchura mínima que debe tener un pasillo para que una mesa rectangular de 2 m por 1 m, con cuatro patas bajo sus vértices, pueda apoyar una de sus patas en cualquier punto del suelo, quedando en posición horizontal?

Puntuación media de todos: 0,4; de los 5 premiados: 1,2.

PROBLEMA 4.º:

Hallar todas las ternas (m, n, p) de números mayores que 2, tales que:

$$\frac{2}{m} + \frac{2}{n} - \frac{2}{p} = 1$$

Puntuación media de todos: 3,2; de los 5 premiados: 7,8.

SEGUNDO NIVEL**PROBLEMA 1.º:**

Un hexágono regular tiene su lado de 1 m. Hallar el área de un cuadrado *inscrito* en él (es decir, con sus cuatro vértices situados en los lados de aquel) que tenga los lados paralelos a otros dos del hexágono.

Puntuación media de todos: 1,9; de los 5 premiados: 7,8.

PROBLEMA 2.º:

Al escribir un número de 4, 5 ó 6 cifras, es frecuente utilizar un punto tras las unidades de millar, para separar las tres últimas. En Matemáticas, puede resultar desaconsejable, por el riesgo de confundir el número así escrito con un producto indicado de dos números. Demostrar que en ningún caso se da la circunstancia de que el número representado en la forma antedicha tenga el mismo valor que el producto indicado que resulta de la otra interpretación.

Puntuación media de todos: 3,1; de los 5 premiados: 6,6.

PROBLEMA 3.º:

Sean c_1 y c_2 dos circunferencias del espacio, contenidas en planos distintos, con un punto común T , tales que las rectas tangentes en T a ambas, son la misma recta t . Razonar si existe, o no existe, una superficie esférica que contenga a ambas circunferencias.

Puntuación media de todos: 0,7; de los 5 premiados: 2,4.

PROBLEMA 4.º:

Probar que el cubo de todo número natural se puede expresar como diferencia de dos cuadrados, tales que al menos uno de ellos es múltiplo de 9.

Puntuación media de todos: 0,7; de los 5 premiados: 3,0.

TERCER NIVEL**PROBLEMA 1.º:**

Se construye un recipiente cónico cerrado, con un semicírculo de 4 dm de radio de lámina delgada para la superficie lateral y un círculo de 4 dm de diámetro para la base. ¿Cuánto mide la arista del mayor cubo (exaedro regular) que puede estar contenido en su interior, con una cara apoyada en la base?

Puntuación media de todos: 1,2; de los 5 premiados: 5,8.

PROBLEMA 2.º:

En la fracción $F(m, n) = \frac{(2^{10})! m + 1}{(2^{10})! n + 1}$, m y n son enteros positivos distintos y m mayor que n .

Demostrar:

1.º) Para que F resulte reducible es necesario que se cumpla

$$m - n > 1024.$$

2.º) Para que F sea irreducible es suficiente que se cumpla

$$m < 1001 \text{ y } n < 1001.$$

Puntuación media de todos: 0,6; de los 5 premiados: 3,2.

PROBLEMA 3.º:

Determinar los posibles pares de números reales r y t , que verifican simultáneamente todas las condiciones siguientes:

$$0 \leq r \leq 1, 0 \leq t \leq 1, r + t - 2rt - 1 = 0.$$

Puntuación media de todos: 4,9; de los 5 premiados: 7,8.

PROBLEMA 4.º:

Juan da a Pedro un número escrito en un sistema de numeración de base menor que 9, en el que todas las cifras son menores que 3, pero Pedro cree que se trata de un número escrito en el sistema de numeración decimal, por lo que comete un error. Sabiendo que este error es 15861, ¿cuál era la base del sistema en que Juan escribió el número?

Puntuación media de todos: 1,1; de los 5 premiados: 5,8.

XXXVII Olimpiada Internacional de Matemáticas

India 1996

La XXXVII Olimpiada Matemática Internacional (O.M.I.) se celebró en Bombay, en el mes de julio de 1996.

Las pruebas se realizaron los días 10 y 11. Se propusieron, como de costumbre, seis problemas, cuyos enunciados pueden verse en la sección de **Problemas Propuestos** de este número del Boletín. Se realizaron en dos sesiones, de cuatro horas y media cada una.

Cada problema fue calificado con una puntuación de 0 a 7 puntos, por lo que cada alumno podía obtener **un máximo de 42 puntos**. Los problemas seleccionados fueron difíciles. Los 42 puntos sólo fueron alcanzados por un estudiante, el rumano Ciprian Manolescu. Las medallas de oro se concedieron a los 35 estudiantes que obtuvieron entre 28 y 42 puntos, las de plata a los 76 estudiantes que obtuvieron entre 20 y 27 puntos, y las de bronce a los 99 estudiantes que obtuvieron entre 12 y 19 puntos. Hubo además 22 estudiantes que recibieron Mención Honorífica (M.H.), por haber resuelto bien un problema (7 puntos), sin recibir medalla.

Participaron en esta XXXVII O.M.I. 420 alumnos de 75 países, ya que algunos de estos presentaron menos de los seis alumnos permitidos. Por países, ocuparon los tres primeros puestos Rumanía, U.S.A. y Hungría.

Los representantes españoles tuvieron una actuación discreta, peor que la del año anterior, obteniendo únicamente una **Mención Honorífica**. Estos fueron sus resultados:

Sergi Elizalde Torrent , de Barcelona	11 puntos M.H.
(Primer clasificado en la XXXII O.M.E.)	
Fernando Rambla Barreno , de Cádiz	10 puntos
(Tercer clasificado en la XXXII O.M.E.)	
Víctor Martínez de Albeniz Margalez , de Barcelona	10 puntos
(Sexto clasificado en la XXXII O.M.E.)	
Antonio Jara de las Heras , de Jaén	6 puntos
(Cuarto clasificado en la XXXII O.M.E.)	
Patricia Sebastian Celorrio , de Zaragoza	5 puntos
(Quinto clasificado en la XXXII O.M.E.)	
Tomás Palacios Gutierrez , de Madrid	2 puntos
(Segundo clasificado en la XXXII O.M.E.)	

(Como en convocatorias anteriores, el orden de puntuación obtenida en la O.M.I. no coincide con el obtenido en la O.M.E.).

Estos datos han sido facilitados por el Jefe de la Delegación Española, profesor Francisco Bellot Rosado.

INDICE DE NOTICIAS SOBRE OLIMPIADAS MATEMÁTICAS Y CONCURSOS DE PROBLEMAS PUBLICADOS EN ESTE BOLETIN

CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD

núm.	(año)	Convocado en Boletín	Crónica/enunciados
I	(1983)	1	2, pág. 11
II	(1984)	3	4, pág. 7
III	(1985)	5	7, pág. 3
IV	(1986)	9	10, pág. 5
V	(1987)	13	15, pág. 3
VI	(1988)	17	19, pág. 17
VII	(1989)	20	22, pág. 9
VIII	(1990)	24	26, pág. 3
IX	(1991)	27	29, pág. 3
X	(1992)	30	32, pág. 3
XI	(1993)	33	34, pág. 9
XII	(1994)	36	38, pág. 3
XIII	(1995)	39	41, pág. 5
XIV	(1996)	42	44, pág. 5

CONCURSO DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE NUESTRA SOCIEDAD

núm.	(año)	1 fase (distritos)	2 fase (final)
XX	(1984)	— —	3, pág. 77
XXI	(1985)	5, págs. 8 y 9	5, págs. 8 y 10
XXII	(1986)	8, pág. 5	9, págs. 15 y 75
XXIII	(1986-87)	11, págs. 3 y 87	13, págs. 9 y 83
XXIV	(1987-88)	16, págs. 7 y 70	17, págs. 7 y 71
XXV	(1988-89)	20, págs. 13 y 79	21, págs. 7 y 61
XXVI	(1989-90)	24, págs. 11 y 67	25, págs. 9 y 73
XXVII	(1990-91)	27, págs. 7 y 77	28, págs. 17 y 79
XXVIII	(1991-92)	30, págs. 19 y 67	31, págs. 11 y 81
XXIX	(1992-93)	33, págs. 5 y 71	34, págs. 17 y 71
XXX	(1993-94)	36, págs. 9 y 75	37, págs. 13 y 109
XXXI	(1994-95)	39, págs. 12 y 86	40, págs. 16 y 75
XXXII	(1995-96)	42, págs. 9 y 82	43, págs. 8 y 87

OLIMPIADA IBEROAMERICANA DE MATEMATICAS

núm.	(año)	Lugar	Crónica y enunciados en boletín núm.
I	(1986)	Colombia	8, págs. 11 y 83
II	(1987)	Paraguay	12, págs. 3 y 75
III	(1988)	Perú	18, págs. 5 y 73
IV	(1989)	Cuba	21, págs. 11 y 63
V	(1990)	España (Valladolid)	26, págs. 13 y 73
VI	(1991)	Argentina	30, págs. 15 y 65
VII	(1992)	Venezuela	32, págs. 11 y 71
VIII	(1993)	Méjico	35, págs. 5 y 65
IX	(1994)	Brasil	39, págs. 11 y 85
IX	(1995)	Chile	42, págs. 8 y 81

OLIMPIADA MATEMATICA INTERNACIONAL

núm.	(año)	Lugar	Crónica y enunciados en boletín núm.
XXIV	(1983)	París	2, pág. 15
XXV	(1984)	Praga	4, pág. 67
XXVI	(1985)	Helsinski	7, págs. 9 y 89
XXVII	(1986)	Varsovia	10, pág. 11 y 11, pág. 89
XXVIII	(1987)	Cuba	15, págs. 9 y 73
XXIX	(1988)	Australia	19, págs. 23 y 77
XXX	(1989)	Alemania (R.F.A.)	22, págs. 15 y 73
XXXI	(1990)	China	26, págs. 11 y 71
XXXII	(1991)	Suecia	29, págs. 11 y 79
XXXIII	(1992)	Rusia	32, págs. 9 y 69
XXXIV	(1993)	Turquía	35, págs. 3 y 63
XXXV	(1994)	Hong-Kong	38, págs. 9 y 79
XXXVI	(1995)	Canadá	41, págs. 9 y 87
XXXVII	(1996)	India	44, págs. 11 y 79

Notas breves

RECENSIONES DE NUESTRO BOLETIN EN ZENTRALBLATT FÜR DIDAKTIK DER MATHEMATIK

Como anunciamos oportunamente, la dirección de Zentralblatt für Didaktik der Mathematik ha aceptado incluir en sus volúmenes la recensión de los artículos publicados en nuestro Boletín, razón por la cual se publican actualmente con un resumen en inglés.

Las primeras recensiones han aparecido ya, y nos complace dar en este lugar las referencias de las publicadas hasta el momento, para conocimiento de los autores de los trabajos, y de todos nuestros socios. Han sido publicadas en el número 2 de 1996, último del que tenemos noticia, y corresponden a nuestro Boletín n.º 41. Son las tres siguientes:

- #1190 (sección G95). Geometría computacional: la geometría contra-reloj, M. Abellanas, Bol. Soc. Puig Adam 41, págs. 11-32.
- #1228 (sección I23). Imagen mental de los estudiantes de bachillerato sobre el concepto de función, M.D. de Prada Vicente, Bol. Soc. Puig Adam 41, págs. 59-76.
- #1235 (sección I25). Harmonics and periodic functions: a computer-aided path to introduce Fourier analysis, M.T. Galiza y M. Mascareli, Bol. Soc. Puig Adam 41, págs. 33-49.

Continuaremos dando cuenta de las que vayan apareciendo sucesivamente. Los interesados en alguna de ellas pueden dirigirse a la Sociedad en demanda de copias.

CONTESTADOR AUTOMATICO

Según lo acordado en nuestra última Asamblea, se ha ubicado en nuestra sede un contestador automático conectado al teléfono 394 6248.

NOTA NECROLOGICA

Después de cerrar este número, la Junta Directiva ha tenido noticia del fallecimiento del Presidente de la Federación de Sociedades Matemáticas, prof. Gonzalo Sánchez Vázquez. Deseamos expresar, en nombre de todos los miembros de la Sociedad, nuestro más sentido pésame.

Triangulación de la superficie esférica

Julio Fernández Biarge

*E.T.S. de Ingenieros Navales.
Universidad Politécnica de Madrid*

Several classical triangle partitions of the spherical surface are reviewed in connection to the finite elements method. These are taken as the basis to generate successive decompositions through a computer code that is outlined in this note.

En muchas tareas relacionadas con el método de elementos finitos se requiere descomponer la superficie esférica en un gran número de elementos triangulares, de modo que cada triángulo esférico pueda tener común con otro un lado, un vértice o nada.

En cualquier descomposición de ese tipo, llamaremos **vértices** (de la descomposición) a los puntos que son vértices de varios de los triángulos esféricos, **aristas** a los lados de esos triángulos (cada arista es un lado común a dos triángulos) y **caras** a los triángulos. El número de aristas que concurren en un vértice, lo llamaremos **orden** de éste. Si los triángulos que tienen un vértice común, tienen en él ángulos iguales, diremos que el vértice es **regular**.

Al ser las caras triangulares, si hay c de ellas, el número a de aristas será $a = 3c/2$, por lo que el número de caras ha de ser necesariamente par. En todo lo que sigue supondremos $c = 2n$ (n igual a la mitad del número de caras), con lo que $a = 3n$. Por el teorema de Euler, el número v de vértices será $a - c + 2$, o sea, en definitiva

$$c = 2n, \quad a = 3n, \quad v = n + 2 \quad [1]$$

1. Descomposiciones con vértices regulares y caras iguales

Si todas las caras son triángulos esféricos iguales, habrá uno, dos o tres tipos de ángulos de caras, según que éstas sean triángulos equiláteros, isósceles o escalenos. Si hay vértices de la descomposición de orden p , llamaremos α al número de ellos, si hay otros de un orden distinto q , llamaremos β a su número y si hay otros de un tercer orden r , llamaremos γ a su número. También habrá uno, dos o tres tipos de aristas. Designaremos con α' , β' o γ' a los números de aristas opuestas (en alguna cara) a un ángulo con

vértice en un vértice de la descomposición de orden p , de orden q o de orden r , respectivamente. Evidentemente, según [1],

$$\alpha + \beta + \gamma = n + 2, \quad \alpha p + \beta q + \gamma r = 6n, \quad \alpha' + \beta' + \gamma' = 3n \quad [2]$$

Consideraremos separadamente los casos de triángulos equiláteros, isósceles o escalenos.

1.1. Caso de triángulos equiláteros

Es bien sabido que la pretensión de conseguir una descomposición en triángulos esféricos equiláteros iguales solo tiene solución para los casos correspondientes a los poliedros regulares de caras triangulares inscritos en la superficie esférica: tetraedro, octaedro e icosaedro. Los ángulos de los triángulos equiláteros esféricos son $A = 2\pi/p$, con $p = 3, 4$ ó 5 , lo que se resume en la tabla:

p	A	n	caras	aristas	vérts.	caso	poliedro inscrito
3	120°	2	4	6	4	A	tetraedro regular
4	90°	4	8	12	6	B	octaedro regular
5	72°	10	20	30	12	C	icosaedro regular

La descomposición del tipo C (icosaedro esférico) se representa en la figura 1.^a.

1.2. Caso de triángulos isósceles

Podemos ser algo menos exigentes, buscando descomposiciones en triángulos isósceles (no equiláteros) iguales, de modo que todos los vértices de la descomposición sean regulares.

Como vamos a ver, las posibilidades de elección también en este caso son bastante reducidas. Al ser isósceles las caras, habrá dos tipos de aristas y dos tipos de vértices. Sean A, B, B las medidas de los ángulos de cada cara, con $A \neq B$. Habrá vértices donde concurren ángulos A y vértices donde concurren ángulos B. Si los primeros son de orden p , será $A = 2\pi/p$, y si los otros son de orden q , será $B = 2\pi/q$, (con $p \geq 3, q \geq 3$ y $p \neq q$, para que el triángulo no sea equilátero).

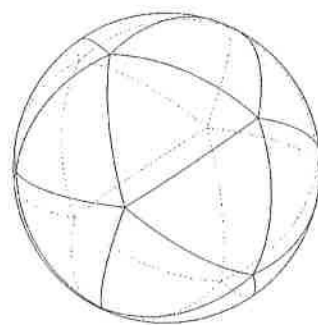


Figura 1

El exceso esférico de cada triángulo será $\pi(2/p + 4/q - 1)$, con lo que si hay $2n$ caras en total, para que quede cubierta exactamente la superficie esférica, la suma de sus excesos habrá de ser 4π , o sea $2n\pi(2/p + 4/q - 1) = 4\pi$; es decir,

$$n(2/p + 4/q - 1) = 2 \quad [3]$$

Además, α' será igual a la mitad del número de caras, $2n$, o sea $\alpha' = n$, y de [2] (con $\gamma = r = \gamma' = 0$), obtenemos

$$\alpha = [(6 - q)n - 2q]/(p - q), \quad \beta = [(p - 6)n + 2p]/(p - q), \quad \alpha' = n, \quad \beta' = 2n \quad [4]$$

Por otra parte, en los vértices de orden q concurren aristas de los dos tipos y habrán de estar situadas alternativamente de uno y otro (ya que dos aristas iguales siempre concurren formando un ángulo A), lo que exige que q sea par.

El caso $q = 4$ da lugar a una infinidad de soluciones (aunque de escaso interés), en las que $p = n$, con n arbitrario (lo que evidentemente cumple [3]). Estas soluciones corresponden a la división de la superficie terrestre mediante el ecuador y n semimeridianos, lo que da lugar a $2n$ triángulos birectángulos y birectiláteros, que cuando n es grande resultan muy alargados, inadecuados para un problema de elementos finitos. Agruparemos estas descomposiciones en un tipo designado con D_n ; si excluimos estos casos, podemos suponer que es $q \geq 6$ (ya que ha de ser par).

Como el valor de la expresión entre paréntesis de [3] ha de ser positivo, tendrá que ser $2/p > 1 - 4/q \geq 1/3$, o sea $p < 6$, con lo que sólo quedan, para p , los posibles valores 3, 4 y 5. Además, ha de ser $4/q > 1 - 2/p \geq 1 - 2/3 = 1/3$, lo que da $q < 12$, quedando como únicos valores posibles de q (pares y excluido el 4), los 6, 8, y 10. Además, suponiendo que sea $q \geq 8$, se tendrá que $2/n + 1 - 2/p = 4/q \leq 1/2$, o sea $2/p \geq 2/n + 1/2 > 1/2$, con lo que $p < 4$, o sea $p = 3$. Los únicos pares (p,q) que quedan como posibles son entonces (3,6), (4,6), (5,6), (3,8) y (3,10).

Los cuatro corresponden a descomposiciones existentes, cuyas características se reúnen en la siguiente tabla:

p	q	A°	B	n	c	a	v	α	β	α'	β'	caso
n	4	360/n	90°	n	2n	3n	n+2	2	n	n	2n	D_n
3	6	120°	60°	6	12	18	8	4	4	6	12	E
4	6	90°	60°	12	24	36	14	6	8	12	24	F
3	8	120°	45°	12	24	36	14	8	6	12	24	G
5	6	72°	60°	30	60	90	32	12	20	30	60	H
3	10	120°	36°	30	60	90	32	20	12	30	60	I

El caso E da lugar, uniendo con segmentos rectilíneos sus vértices, a un poliedro semiregular que es el tetraedro apuntado (es decir que se obtiene de un poliedro regular añadiendo pirámides regulares de base en cada una de sus caras y de altura conveniente para que su vértice esté sobre la superficie esférica circunscrita a él). Es dual del tetredro truncado y tiene 12 caras triangulares.

El caso F da lugar análogamente al cubo apuntado, dual del octaedro truncado, y el G al octaedro apuntado, dual del cubo truncado. Ambos tienen 24 caras triangulares.

El caso H da lugar al dodecaedro apuntado, dual del icosaedro truncado y el I al icosaedro apuntado, dual del dodecaedro truncado. Ambos tienen 60 caras triangulares. El caso H es el más interesante, ya que sus caras son más parecidas a triángulos equiláteros, al tener cada una un ángulo de 72° y dos de 60° . Esta descomposición se representa en la figura 2.^a

1.3. Caso de triángulos escalenos

Sean A, B, C, los ángulos (distintos) de cada cara, con $A > B > C$. Habrá vértices de la descomposición de tres tipos, según concurren en ellos ángulos A, B o C; sean sus órdenes respectivos p, q y r, y el número de ellos α , β , y γ respectivamente. Será

$$\begin{aligned} 2 < p < q < r, \\ A = 2\pi/p, \quad B = 2\pi/q, \quad C = 2\pi/r. \end{aligned} \quad [5]$$

Como cada cara tiene un solo ángulo y un solo lado de cada tipo, será

$$c = 2n = \alpha p = \beta q = \gamma r = 2\alpha' = 2\beta' = 2\gamma' \quad [6]$$

El exceso esférico de cada cara será $A + B + C - \pi = 2\pi(1/p + 1/q + 1/r - 1/2)$ y como la suma de los excesos para las $2n$ caras ha de ser 4π , será

$$1/p + 1/q + 1/r - 1/2 = 1/n \quad [7]$$

Obsérvese que siendo (según [2]) $\alpha + \beta + \gamma = v = n + 2$, de [6] se deduce [7].

Como en cada vértice han de concurrir aristas de dos tipos, alternativamente, el orden de todos los vértices habrá de ser **par**. En virtud de esto y de [5], se tendrá, por tanto:

$$p \geq 4, \quad q \geq 6, \quad r \geq 8 \quad [8]$$

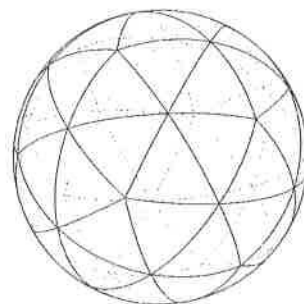


Figura 2

Por otra parte, p no puede ser igual a 6 o mayor, ya que si lo fuese, de [7] se deduciría $1/6 + 1/q + 1/r - 1/2 \geq 1/n > 0$, o sea $1/p + 1/r \geq 1/2 - 1/6 = 1/3$, lo que no es compatible con [8]. Por tanto, ha de ser precisamente $p = 4$, con lo que [7] se convierte en

$$1/q + 1/r = 1/4 + 1/n$$

Entonces, q no puede ser igual o mayor que 8, ya que si lo fuese, sería

$$1/r \geq 1/4 - 1/8 + 1/n > 1/8,$$

en contradicción con [8]. Así ha de ser precisamente $q = 6$ y en consecuencia,

$$1/r = 1/4 - 1/6 + 1/n > 1/12,$$

con lo que los únicos valores posibles para r son 8 y 10.

Quedan solamente dos tipos posibles de descomposiciones en triángulos escalenos iguales (con vértices regulares), cuyas características podemos resumirlas en la siguiente tabla:

p	q	r	A	B	C	n	c	a	v	α	β	γ	caso
4	6	8	90°	60°	45°	24	48	72	26	12	8	6	J
4	6	10	90°	60°	36°	60	120	180	62	30	20	12	K

El caso J, al trazar las cuerdas de sus aristas, da lugar a un poliedro de 48 caras triangulares, que es el dual de uno semiregular (cubo-octaedro-truncado) de 48 vértices y 72 aristas, con 26 caras (12 cuadradas, 8 exágonoales y 6 octogonales) que resulta de trincar un cubo tanto por sus aristas como por sus vértices.

El caso K, de igual manera, da lugar a un poliedro de 120 caras, dual de uno semiregular de 62 caras (30 cuadradas, 20 exagonales y 12 decagonales) que resulta de trincar un icosaedro tanto por sus aristas como por sus vértices.

En resumen, excluidas las infinitas descomposiciones del tipo D_n , tan solo hemos encontrado diez descomposiciones de la superficie esférica en triángulos iguales, con vértices regulares. Si queremos descomposiciones en mayor número de triángulos, como requieren normalmente las aplicaciones del método de los elementos finitos, habremos de renunciar a que los triángulos sean todos iguales o a que todos los vértices sean regulares.

2. Generación de descomposiciones sucesivas

Renunciando a que los vértices de la descomposición sean regulares, se pueden generar descomposiciones sucesivas, cada vez de mayor número de caras, no muy diferentes de triángulos equiláteros, de manera que, mediante un programa de ordenador, se

puedan obtener, para cada una de ellas, la descripción completa de cada uno de sus vértice, aristas y caras. El método más sencillo consiste en partir de una de las descomposiciones representadas en las figuras 1.^a o 2.^a y obtener nuevas «generaciones» descomponiendo cada cara triangular de la generación anterior en cuatro triángulos mediante los arcos que unen los puntos medios de sus lados.

Si, por ejemplo se empieza con el icosaedro esférico de la figura 1.^a, la generación «cero», o de partida, tiene 20 caras equiláteras, con ángulos de $A = 72^\circ$ y lados, cuya medida, $a = 63,434949^\circ$, se obtiene de la relación (consecuencia de las fórmulas de Bessel):

$$\cos(a/2) \sin(A/2) = 1/2$$

Los arcos de circunferencia máxima que unen los puntos medios de los lados de una cara, descomponen ésta en cuatro triángulos, uno de ellos equilátero (de ángulos A' y lados a') y tres isósceles iguales (de ángulos ϕ', ϕ' y A y lados $a/2, a/2$ y a'), como se ve en la figura 3.^a.

Si se tiene en cuenta que la circunferencia máxima que tiene sus polos en dos vértices opuestos del icosaedro esférico, corta a 10 aristas del mismo en sus puntos medios, quedando arcos iguales entre ellas, resulta que $a' = 36^\circ$ (décima parte de dicha circunferencia). Además el ángulo A' , que es el diedro formado por dos circunferencias de las consideradas, será igual al arco que une sus polos, o sea $A' = a$.

La primera descomposición generada de esta manera (1.^a generación) tiene 80 caras (20 equiláteras y 60 isósceles iguales), 120 aristas (60 de longitud a' y 60 de longitud $a/2$) y 42 vértices (12 de orden 5 y 30 de orden 6), y puede verse en la figura 4.^a. En

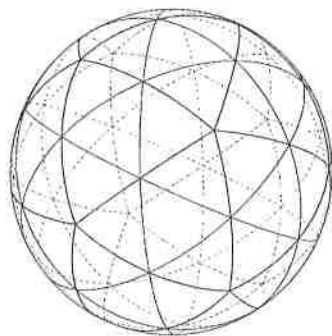


Figura 4

cada nueva generación, se cuadruplica el número de caras, y según las relaciones [1], la generación m -ésima tendrá $20 \cdot 4^m$ caras, $30 \cdot 4^m$ aristas y $10 \cdot 4^m + 2$ vértices. Veinte de las caras serán triángulos equiláteros y doce de los vértices serán de 5.º orden y regulares (los mismos que los del icosaedro inicial) y los restantes, de 6.º orden, pero no regulares.

Si se parte de la descomposición H (figura 2.^a), que tiene 60 caras (triángulos isósceles iguales), 90 aristas (de dos longitudes) y 32 vértices, tras la m -ésima generación se obtiene una descomposición con $60 \cdot 4^m$ caras, $90 \cdot 4^m$ aristas y $30 \cdot 4^m + 2$ vértices.

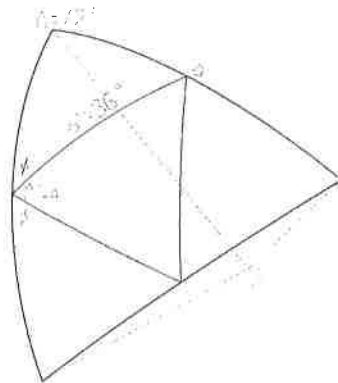


Figura 3

2.1. Estructura del programa

Se ha desarrollado un programa, escrito en C, para llevar a cabo las sucesivas generaciones; su estructura es sencilla, aunque se alarga un poco por el deseo de que proporcione datos completos sobre los vértices, aristas y caras de la descomposición resultante y proporcione dibujos de la perspectiva deseada de ésta.

En este programa permite partir de las descomposiciones C o H y en él se define:

- Un vector de estructuras para albergar los vértices que se van generando, definido cada uno por su latitud y su longitud «geográficas».
- Un vector de estructuras para las aristas (no sólo las de la última generación, sino todas las que se ven generando), dando, para cada una, los números de los vértices extremos, el número de la arista de anterior generación sobre la que está (o -1 si no está sobre otra), su amplitud en grados, el número del vértice que se crea en su punto medio y los números de las dos aristas en que queda descompuesta por ese punto medio (los tres últimos solo se calculan al comenzar la siguiente generación).
- Un vector de estructuras para las caras (no sólo las de la última generación), dando para cada una los números de los vértices y los números de las aristas que constituyen los lados opuestos, así como los valores de los tres ángulos.

Se reserva dinámicamente memoria para todos ellos (con un compilador de Turbo C, será preciso utilizar punteros «huge») y se crean directamente los datos de la «generación 0» correspondiente al icosaedro regular (con 12 vértices, 30 aristas y 20 caras) o al dodecaedro apuntado (con 32 vértices, 90 aristas y 60 caras). Se aplica después, el número de veces preciso, el proceso de obtener una nueva generación.

Este proceso se hace en dos fases: en la primera, para cada arista de la última generación, se añade su punto medio en el vector de vértices, y en el vector de aristas las dos en que queda descompuesta por ese punto medio, completando los datos de la de partida. En la segunda fase, para cada cara de la generación anterior, se añaden en el vector de aristas las tres que unen los puntos medios de sus lados (calculando sus amplitudes), y se añaden en el vector de caras las cuatro en que se descompone la de partida (sólo hay que calcular sus ángulos).

Los cálculos pueden reducirse fácilmente a la quinta parte, debido a la simetría de orden 5 respecto a un eje de las descomposiciones. Podrían reducirse más haciendo uso de otras simetrías, pero no compensa hacerlo, pues se complica el algoritmo.

En cualquier PC moderno, se tarda mucho más tiempo en dar por teclado en número de generaciones, la dirección de la proyección y el nivel de impresión deseados, que en efectuar los cálculos requeridos y presentar el dibujo (con eliminación de partes ocultas). En las figuras 5.^a y 6.^a se pueden ver las descomposiciones obtenidas mediante las gene-

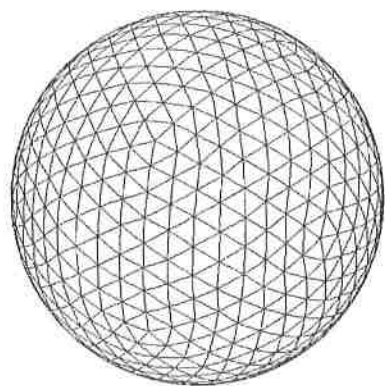


Figura 5

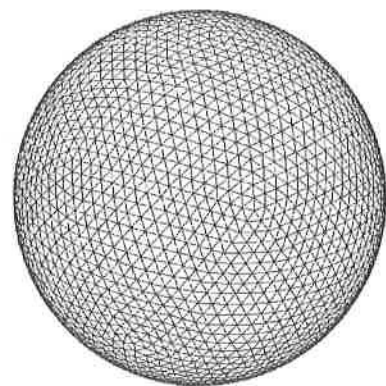


Figura 6

raciones tercera y cuarta, a partir del icosaedro regular y en las figuras 7.^a y 8.^a las obtenidas tras las generaciones segunda y tercera, a partir del dodecaedro apuntado.

El programa suministra también informes impresos con los datos de las descomposiciones obtenidas. Por ejemplo, la cuarta generación a partir del icosaedro regular (figura 6.^a) da lugar a 5120 caras de las que:

- 20 son triángulos equiláteros con ángulos de $60,057^\circ$, lados de $4,734^\circ$ y área de $0,000236$ (como fracción de la superficie esférica);
- 900 son isósceles, de 15 tipos diferentes (60 de cada tipo) de triángulos cuyo ángulo mayor varía entre $62,225^\circ$ y 72° , el menor entre $54,065^\circ$ y $59,722^\circ$ y su área entre $0,000181$ y $0,000234$; y

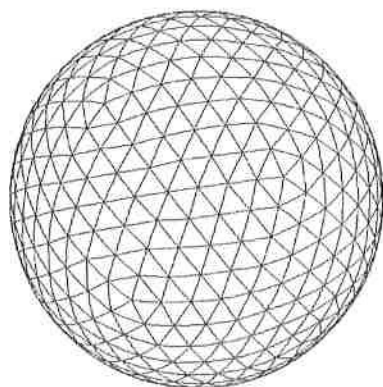


Figura 7

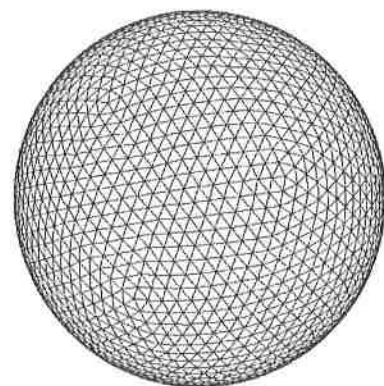


Figura 8

- 4.200 son escalenos, de 35 tipos diferentes (120 de cada tipo) de triángulos cuyo ángulo mayor varía entre $62,212^\circ$ y $71,779^\circ$ y el menor entre $54,090^\circ$ y $59,639^\circ$, con áreas entre $0,000181$ y $0,000232$.

El número de aristas de esta descomposición es de 7680, las mayores de $4,734^\circ$ y las menores de $3,965^\circ$.

Si se parte del dodecaedro apuntado, la 3.^a generación (figura 8.^a) da lugar a 3840 caras de 36 tipos diferentes (8 tipos de isósceles con 60 caras cada uno) y 28 tipos de escalenos con 120 caras cada uno). El mayor de los ángulos de las caras es de 72° y el menor, de $54,091^\circ$. Las aristas son de 24 longitudes distintas, variando desde $4,672^\circ$ a $5,498^\circ$. Las áreas de las caras (como fracción de la superficie esférica) están entre $0,000252$ y $0,000277$.

Como se ve, en uno y otro caso, las caras de las descomposiciones obtenidas no discrepan demasiado de ser triángulos equiláteros, ni son de áreas muy diferentes, por lo que pueden resultar útiles para una descomposición en elementos finitos.

Para generaciones posteriores a las consideradas, debe alterarse algo la estructura del programa por las dificultades relativas al uso como índices de variables enteras cortas (de 2 bytes) y por las limitaciones de la asignación dinámica de memoria.

La ecuación de Cauchy-Euler: ¿Un caso límite de la ecuación de Friedmann?*

Benito Hernández Bermejo

*Departamento de Física Fundamental.
Universidad Nacional de Educación a Distancia.
Apartado 60141, 28080 Madrid.
Email: benito@fisfun.uned.es*

Abstract

Friedmann equation plays a major role in mathematical physics. Its explicit solution is in general impossible in the most realistic cases. In this work this equation is solved for several scenarios by means of perturbation methods. When the exact solution is known, the approximate solutions are seen to be its corresponding Taylor series, and thus convergent. These series solutions can reproduce in all cases the known qualitative features of the solutions. The use of this technique always reduces the problem to the solution of one particular Cauchy-Euler equation, which can then be considered as a limit case associated to the Friedmann equation.

Introducción

En un sistema de unidades adecuado [1], podemos escribir la ecuación de Friedmann en forma general como:

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 + k - \Lambda a^2 = a^2 p(a) \quad (1)$$

donde $a(0) = 0$ y $t \in [0, \infty]$. Esta ecuación fue introducida por Einstein [2] e independientemente por Friedmann [3], y describe la evolución temporal de un elemento de

espacio $a(t)$, a medida que un universo relativista se expande o se contrae. En (1), k es la curvatura del espacio-tiempo einsteniano y Λ es la constante cosmológica (introducida por Einstein para permitir la existencia de soluciones estacionarias en el modelo). Por otra parte, $p(a)$ es la densidad del universo, que escribiremos en la forma

$$p = \frac{1}{a^4}$$

donde el término a^{-4} representa un universo compuesto únicamente por radiación. Según se sabe actualmente, esta es una muy buena aproximación, debido a la aniquilación masiva materia-antimateria que tuvo lugar durante el primer microsegundo de vida del universo [4]. Es claro que la posibilidad de describir dinámicamente este proceso mediante una única variable a es debida a que se trata de modelos cosmológicos homogéneos e isótropos, es decir, la materia y/o la energía se encuentran distribuidas uniformemente [5]. Como es bien sabido hoy día [6], esta es una excelente aproximación a escalas lo suficientemente grandes, mayores que 10^{24} m. De hecho, gran parte del interés actual de esta ecuación se centra en su utilidad como primera aproximación, sencilla pero notablemente exacta, a modelos más refinados [6]. No obstante, no deja de sorprender la ausencia de expresiones analíticas de las soluciones en la literatura, salvo en los casos triviales (por ejemplo cuando Λ es nula). Esto es explicable a partir de la ubicuidad de los enfoques puramente numéricos en el tratamiento actual de muchos problemas físico-matemáticos.

Por otra parte, entre el estudio numérico y la resolución directa de una ecuación (esto último imposible en la mayor parte de los problemas reales) cabe la posibilidad intermedia de construir soluciones explícitas aproximadas, mediante técnicas perturbativas [7,8]. Esto ofrece la ventaja de disponer de expresiones simples, generalmente en series de potencias, que aproximan la solución exacta en un intervalo determinado. Para ello es necesario que en el problema que se estudia haya algún parámetro muy pequeño o muy grande respecto al cual poder desarrollar en serie la solución. En nuestro caso (1) los parámetros k y Λ son mucho menores que 1. En efecto:

- Tal y como señala Hawking [9], la velocidad de expansión del universo es aun hoy en día muy próxima a la velocidad crítica. Esto significa que la curvatura k o bien es cero o está próxima a cero.

* Este trabajo está dedicado a mi colega y amiga entrañable Elena Sánchez Badorrey.

- Λ es extraordinariamente pequeña [10]. En unidades del Sistema Internacional su cota máxima establecida es de $|\Lambda| \leq 10^{-53} \text{ m}^{-2}$.

Así pues la ecuación de Friedmann ofrece la posibilidad de obtener soluciones perturbativas explícitas a partir de dos constantes pequeñas. En este artículo se construyen las soluciones aproximadas utilizando los dos parámetros de forma escalonada. Siguiendo la norma en trabajos similares, se procederá hasta primer orden. Comenzamos por el escenario más sencillo posible.

Caso I: Desarrollo en k ($\Lambda = 0$)

Si como primera aproximación al problema tomamos $\Lambda = 0$, la ecuación (1) queda:

$$(\dot{a}^2 + k)a^2 = 1, \quad (3)$$

donde $\dot{a} = da/dt$. La solución al problema no perturbado ($k = 0$) se obtiene fácilmente: $a(t, k = 0) = \sqrt{2t}$. Como $|k| \ll 1$, es posible desarrollar mediante la siguiente expansión en serie de Maclaurin en k :

$$a(t, k) = a(t, 0) + k \left. \frac{\partial a(t, k)}{\partial k} \right|_{k=0} + O(k^2), \quad (4)$$

Entonces podemos escribir:

$$a(t, k) = \sqrt{2t} + k\xi_1(t) + O(k^2) \quad (5)$$

Ahora basta sustituir esta expresión en (3), donde $\xi_1(t)$ es una función incógnita. Al hacer esta operación y agrupar los términos del mismo orden resulta:

$$\sqrt{2t}(\xi_1 + \sqrt{2t}(\sqrt{2}\dot{\xi}_1 + \sqrt{t}))k + O(k^2) = 0 \quad (6)$$

Por tanto la ecuación será cero orden a orden. Si igualamos a cero el término de orden k llegamos a la siguiente ecuación de tipo Cauchy-Euler [11]:

$$t\xi_1 + \frac{1}{2}\xi_1 = -\frac{t^{3/2}}{\sqrt{2}} \quad (7)$$

La solución general de esta ecuación es:

$$\xi_1(t) = bt^{-1/2} - \frac{t^{3/2}}{2\sqrt{2}} \quad (8)$$

Debido a la condición inicial $a(0) = 0$, ξ_1 no puede ser divergente para $t \rightarrow 0$, luego ha de ser $b = 0$. Por tanto:

$$\xi_1(t) = -\frac{t^{3/2}}{2\sqrt{2}} \quad (9)$$

Así obtenemos la aproximación a primer orden:

$$a(t, k) = \sqrt{2t} - k\frac{t^{3/2}}{2\sqrt{2}} + O(k^2) \quad (10)$$

Cualitativamente, esta ecuación reproduce el comportamiento esperado de la solución exacta [12]. Así, para $k < 0$ (universo abierto), se tiene una expansión indefinida, mientras que para $k > 0$ (universo cerrado) el universo se expande hasta un tamaño máximo, tras lo cual la expansión se invierte y el universo se contrae, hasta reducirse de nuevo a una singularidad.

En realidad, la ecuación (3) puede resolverse explícitamente de forma elemental. Al hacer esto se obtiene la solución exacta:

$$a(t, k) = \sqrt{2t - kt^2} \quad (11)$$

Si ahora desarrollamos en serie de Taylor queda:

$$\begin{aligned} a(t, k) &= \sqrt{2t} \sqrt{1 - \frac{kt}{2}} = \sqrt{2t} \left(1 - \frac{kt}{4} - \frac{k^2 t^2}{32} + O(k^3) \right) = \\ &= \sqrt{2t} - k\frac{t^{3/2}}{2\sqrt{2}} - k^2\frac{t^{5/2}}{16\sqrt{2}} + O(k^3), \end{aligned} \quad (12)$$

donde vemos que la corrección que hemos obtenido se corresponde con el término en k de esta serie. De hecho, en este caso no es difícil hacer teoría de perturbaciones a segundo orden para comprobar que efectivamente se obtiene el siguiente término de la serie (12). Para ello planteamos el desarrollo:

$$a(t, k) = \sqrt{2t} - k\frac{t^{3/2}}{2\sqrt{2}} + k^2\xi_2(t) + O(k^3) \quad (13)$$

Sustituyendo en (3) y simplificando se obtiene

$$\frac{\sqrt{t}}{8}(8\sqrt{2}\xi_2 + t(16\sqrt{2}\dot{\xi}_2 + 3t^{3/2}))k^2 + O(k^3) = 0 \quad (14)$$

Igualando a cero el coeficiente del orden dominante (k^2), resulta una ecuación de Cauchy-Euler similar a la anterior:

$$t\dot{\xi}_2 + \frac{1}{2}\xi_2 = -\frac{3t^{5/2}}{16\sqrt{2}} \quad (15)$$

La solución general será:

$$\xi_2(t) = b't^{-1/2} - \frac{t^{5/2}}{16\sqrt{2}} \quad (16)$$

Por el mismo motivo, ahora $b' = 0$, con lo cual:

$$\xi_2(t) = -\frac{t^{5/2}}{16\sqrt{2}} \quad (17)$$

Así pues se llega a la siguiente expresión, válida a orden $O(k^3)$:

$$a(t, k) = \sqrt{2t} - k\frac{t^{3/2}}{2\sqrt{2}} - k^2\frac{t^{5/2}}{16\sqrt{2}} + O(k^3) \quad (18)$$

que es precisamente el resultado obtenido en (12), como era de esperar. Nótese que esta serie converge para $|kt/2| < 1$, esto es para $t < t_k = |2/k|$. ¿Es este un tiempo representativo físicamente? Consideremos el caso $k > 0$ (universo cerrado). La vida del universo en este caso es, a partir de (11), $2/k$, es decir, precisamente el radio de convergencia de nuestra serie perturbativa. En otras palabras, la serie es convergente para un tiempo varias veces superior a la edad actual del universo. Por tanto la serie converge para tiempos suficientemente largos desde el punto de vista físico, como ha de ser para que los cálculos tengan sentido.

En este problema la solución perturbativa no tiene mayor interés, dado que la ecuación se sabe resolver exactamente. Sin embargo, en la mayoría de las ocasiones esto último no es factible, y la única posibilidad que queda es emplear esta técnica. Este va a ser el caso a continuación.

Caso II: Desarrollo en Λ

Si ya no hacemos $\Lambda = 0$ en (1), nuestro problema ahora se escribe como:

$$(\dot{a}^2 + k - \Lambda a^2)a^2 = 1 \quad (19)$$

Vamos a buscar una solución a orden 1 de modo análogo al empleado en la sección anterior, esto es:

$$a(t, k, \Lambda) \equiv a(t, \Lambda) = \lambda_0(t) + \Lambda\lambda_1(t) + O(\Lambda^2) \quad (20)$$

Sustituyendo en (19) y agrupando se obtiene:

$$((\dot{\lambda}_0^2 + k)\lambda_0^2 - 1)\Lambda^0 - \lambda_0(\lambda_0^3 - 2\lambda_0\dot{\lambda}_0\dot{\lambda}_1 - 2\lambda_1(k + \dot{\lambda}_0^2))\Lambda^1 + O(\Lambda^2) = 0 \quad (21)$$

A orden Λ^0 tenemos que λ_0 es solución de la ecuación no perturbada (3). Dado que la solución que vamos a obtener es correcta hasta el orden $O(\Lambda^2) = O(k^2)$, podemos hacer:

$$\lambda_0(t) = \sqrt{2t} - k\frac{t^{3/2}}{2\sqrt{2}} + O(\Lambda^2) \quad (22)$$

de forma consistente con (10). Sustituyendo ahora en el orden Λ^1 de (21) y simplificando llegamos de nuevo a una ecuación de Cauchy-Euler similar a las anteriores:

$$t\dot{\lambda}_1 + \frac{1}{2}\lambda_1 = \sqrt{2}t^{5/2} \quad (23)$$

La solución físicamente aceptable en este caso es:

$$\lambda_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{3}t^{5/2} \quad (24)$$

Por tanto se encuentra que:

$$a(t, k) = \sqrt{2t} - k\frac{t^{3/2}}{2\sqrt{2}} + \Lambda\frac{\sqrt{2}}{3}t^{5/2} + O^2, \quad (25)$$

donde por O^2 se designa tanto a $O(\Lambda^2)$ como a $O(k^2)$. Por la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, se sabe [12] que para la solución exacta de (19), en el caso $\Lambda \neq 0$, pueden esperarse dos comportamientos estables:

- El universo es abierto y se expande muy rápidamente. Esto ocurre si y sólo si $\Lambda > 0$ y k es menor que un cierto valor umbral positivo que depende de Λ , i.e., para $\Lambda > 0$ y $k < k_0(\Lambda)$, donde $k_0(\Lambda)$ es una función estrictamente creciente que verifica $k_0(0) = 0$.
- El universo es cerrado, tanto para $\Lambda < 0$ y curvatura arbitraria como para $\Lambda > 0$ y $k > k_0(\Lambda)$.

Es fácil ver que, de hecho, la expresión (25) se ajusta a estos dos comportamientos: si igualamos (25) a cero y excluimos la solución trivial $t = 0$, llegamos a la ecuación:

$$t^2 - \frac{3k}{4\Lambda}t + \frac{3}{\Lambda} = 0 \quad (26)$$

cuya solución es:

$$t = \frac{1}{2} \left[\frac{3k}{4\Lambda} \pm \sqrt{\left(\frac{3k}{4\Lambda}\right)^2 - \frac{12}{\Lambda}} \right] \quad (27)$$

De aquí se ve que el universo es abierto si y sólo si

$$k < 8\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}, \quad \Lambda > 0 \quad (28)$$

en (25), en cuyo caso para tiempos grandes se expande a un ritmo rápido (proporcional a $t^{5/2}$), y es cerrado en cualquier otro caso.

Por otra parte, la ecuación (19) en el caso especial $k = 0$ puede resolverse explícitamente, con solución:

$$a(t, k = 0, \Lambda) = \Lambda^{-1/4} \sinh^{1/2}(2\sqrt{\Lambda}t), \quad \Lambda > 0 \quad (29)$$

o bien

$$a(t, k = 0, \Lambda) = (-\Lambda)^{-1/4} \sin^{1/2}(2\sqrt{-\Lambda}t), \quad \Lambda < 0 \quad (30)$$

Para tiempos grandes y $\Lambda > 0$, esta solución representa una expansión muy rápida, a un ritmo exponencial:

$$a(t, k = 0, \Lambda) \simeq \frac{\Lambda^{-1/4}}{\sqrt{2}} \exp(\sqrt{\Lambda}t), \quad \sqrt{\Lambda}t \gg 1 \quad (31)$$

Este tipo de crecimiento acelerado se conoce como expansión inflacionaria del universo. Podemos aproximar la raíz cuadrada del seno hiperbólico del modo siguiente:

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow \sinh^{1/2}(x) = \sqrt{x} \left(1 + \frac{x^2}{12} + \dots \right), \quad (32)$$

donde hay convergencia para

$$-1 < \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots = \frac{\sinh(x)}{x} - 1 \leq 1 \quad (33)$$

Resolviendo numéricamente esta inecuación obtenemos $0 \leq x \leq x^+ = 2.1773\dots$ (obviamente sólo vamos a estar interesados en valores no negativos de x). Si ahora desarrollamos (29) de esta forma llegamos inmediatamente a:

$$a(t, k = 0, \Lambda) = \sqrt{2t} + \Lambda \frac{\sqrt{2}}{3} t^{5/2} + O(\Lambda^2), \quad (34)$$

que no es más que la expresión (25) evaluada para $k = 0$. La serie será convergente para

$$t \leq t_+ = \frac{x^+}{2\sqrt{\Lambda}} \simeq \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \quad (35)$$

Si comparamos este tiempo con t_k (Sección 2) vemos que

$$\frac{t_+}{t_k} \propto \frac{|k|}{\sqrt{\Lambda}} \gg 1, \quad (36)$$

prácticamente para cualquier valor no nulo de k , dada la extrema pequeñez de Λ (Sección 1).

Por otra parte, podemos hacer una aproximación parecida para el seno:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \dots \Rightarrow \sin^{1/2}(x) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{x^2}{12} + \dots \right), \quad (37)$$

con convergencia para

$$-1 < -\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots = \frac{\sin(x)}{x} - 1 \leq 1, \quad (38)$$

es decir, para $0 \leq x < \pi$. Aproximando (30) de esta forma se obtiene nuevamente la expresión (34), lo cual es consistente. Así pues, vemos que (34) es correcta con independencia del signo de Λ , como era de esperar. Además, en el caso $\Lambda < 0$ el universo es cerrado, como se deduce de (30), y la expansión (37) es de hecho válida para toda la vida del mismo, esto es para tiempos:

$$t < t_- = \frac{\pi}{2\sqrt{-\Lambda}} \quad (39)$$

El análisis anterior muestra que la solución (25) es siempre válida para tiempos lo suficientemente largos, como es físicamente necesario. Por tanto, la solución perturbativa (25) es consistente, reproduce el comportamiento esperado para este modelo y, cuando se cumple (28), físicamente representa el primer orden del fenómeno de expansión inflacionaria.

Conclusiones

Hemos visto que un problema básico de la Cosmología como es la ecuación de Friedmann es susceptible de resolverse perturbativamente mediante series que son convergentes en radios significativos. Estas soluciones son consistentes con otros cálculos más simples y reproducen exactamente en todos los casos el comportamiento dinámico esperado. Además, dado que se trata de soluciones simples explícitas y polinómicas, pueden emplearse para realizar otros cálculos de tipo más específico, como pueden ser tiempos de vida, velocidades de expansión, aproximaciones a la constante de Hubble, etc., problemas estos en los

cuales no nos hemos detenido, ya que no son significativos a la hora de perfilar la idea fundamental de este artículo: que a menudo existen aproximaciones alternativas a las puramente numéricas, estas últimas de más difícil interpretación física y matemática en general.

Por otra parte, tampoco se ha querido insistir de forma exhaustiva en todas las posibilidades que caben para la ecuación de Friedmann. Estas se centran especialmente en la forma de la densidad $\rho(a)$, que puede generalizarse, por ejemplo, para incluir términos de materia (proporcionales a a^{-3}). Sin duda, una sistematización completa cae fuera de los propósitos de este trabajo y, al igual que en el caso de las consideraciones hechas con anterioridad, tampoco aportaría nada significativo a nivel conceptual, como el lector interesado podrá comprobar fácilmente.

Los cálculos anteriores muestran además que el problema perturbativo se reduce en todos los casos a la resolución de una misma ecuación de Cauchy-Euler:

$$t\dot{\psi}_1 + \frac{1}{2}\psi_1 = \alpha t^\beta, \quad (40)$$

donde $\psi(t)$ sería la función incógnita del desarrollo correspondiente (por ejemplo, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ ó $\lambda_1(t)$ en los casos que hemos considerado), y α y β son números reales. En este sentido puede afirmarse de un modo un tanto informal que esta ecuación parece estar asociada a la de Friedmann, de la cual constituiría, en esencia, el caso límite correspondiente a las situaciones $k \rightarrow 0$ y $\Lambda \rightarrow 0$. De hecho, esta misma ecuación aparece también en otros casos no considerados aquí, como los que involucran la presencia de materia, que ya fueron mencionados. En tal sentido, (40) parece ser una "ecuación característica" asociada a todos los desarrollos perturbativos que surgen en relación con la ecuación de Friedmann, aspecto este no comprendido en la actualidad y que merecería ser estudiado en el futuro.

Referencias

- [1] W. MISNER, K. S. THORNE y J. A. WHEELER: *Gravitation* (San Francisco: Freeman, 1973), págs. 728-51.
- [2] A. EINSTEIN, *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber.*, págs. 142-52, 1917.
- [3] A. FRIEDMANN, *Z. Phys.* 10, págs. 377-86, 1922.
- [4] P. DAVIES: *El universo desbocado* (Barcelona: Salvat, 1988), pág. 30.
- [5] J. HEIDMANN: *Introduction à la Cosmologie* (Paris: Presses Universitaires de France, 1973), págs. 131-154.
- [6] E. BERTSCHINGER, *Physica D* 77, págs. 354-79, 1994.

- [7] J. KERKOVIAN y J. D. COLE: *Perturbation Methods in Applied Mathematics* (New York: Springer-Verlag, 1981).
- [8] A. H. NAYFEH: *Perturbation Methods* (New York: Wiley, 1973).
- [9] S. W. HAWKING: *Historia del Tiempo: del Big Bang a los agujeros negros* (Barcelona: Crítica, 1988), pág. 163.
- [10] P. DAVIES: *El universo accidental* (Barcelona: Salvat, 1986), pág. 144.
- [11] C. H. EDWARDS y D. E. PENNEY: *Elementary Differential Equations with Applications* (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1985), págs. 155-8.
- [12] C. GERTHSEN, H. O. KNESER y H. VOGEL: *Física* (Madrid: Dossat, 1979), págs. 659-63.

Unos ejemplos de interés didáctico de Álgebras de Boole finitas: divisores de un producto de primos distintos dos a dos

Luis M. Laita de la Rica*

Eugenio Roanes Lozano†

Eugenio Roanes Macías‡

* Dpto. Inteligencia Artificial, Fac. Informática (Univ. Politécnica de Madrid)

†,‡ Dpto. Álgebra, Fac. Educación (Univ. Complutense de Madrid)

Abstract

The set of divisors of a natural number which is a product of primes is a model of finite Boolean Algebra with didactic interest. An algorithm to calculate its ideals, filters, atoms, maximal elements,... is described. It can be also applied to other unique factorization domains. An implementation in a Computer Algebra System is expounded.

Introducción

Es sabido que el conjunto D_N , de divisores del número natural N , es un álgebra de Boole respecto de la relación ser divisor y N es producto de primos distintos dos a dos. Por su simplicidad, es un modelo de interés didáctico de álgebra de Boole finita, pero los cálculos son tediosos, incluso cuando N no es grande.

Se trata aquí de describir un algoritmo, que hemos desarrollado, para automatizar la generación de los elementos de D_N , calcular el ideal y el filtro

*e-mail: laita@fi.upm.es

†e-mail: eroanes@eucmos.sim.ucm.es

‡e-mail: roanes@eucmos.sim.ucm.es

generados por un elemento dado, hallar los átomos y elementos maximales del álgebra de Boole, así como determinar aquellos elementos que poseen un número dado de divisores primos.

Comenzaremos describiendo el algoritmo, para ocuparnos después de su implementación en Sistemas de Cómputo Algebraico. Tales sistemas ya traen implementadas las operaciones máximo común divisor y mínimo común múltiplo, que son las operaciones del anillo booleano correspondiente a este álgebra de Boole.

Los números primos mencionados pueden ser sustituidos por los elementos irreducibles de un dominio de factorización única (por ejemplo, polinomios con coeficientes en un cuerpo), lo que permite extender la validez del algoritmo descrito.

1. Conceptos previos

1.1 Definición.- Dado un elemento, x , de un álgebra de Boole, se llama *ideal* (principal) generado por x al conjunto de elementos relacionados con x (sus divisores, en nuestro caso). Análogamente, el *filtro* (principal) generado por x es el conjunto de elementos tales que x está relacionado con ellos (sus múltiplos, en nuestro caso).

1.2 Definición.- Los *átomos* son los elementos minimales de la ordenación.

1.3 Consecuencia.- En nuestro caso, los minimales (respect. maximales) son los elementos con, exactamente, dos divisores: el 1 y él mismo, e.e., los primos (respect. con exactamente dos múltiplos: él mismo y el supremo, N).

1.4 Ejemplo.- Sea $N = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$. La relación de orden "ser divisor" (usual), restringida al conjunto de divisores de 210, da lugar a un álgebra de Boole finita

$$D_{210} = \{1, 2, 3, 5, 7, 6, 10, 14, 15, 21, 35, 30, 42, 70, 105, 210\}$$

En el anillo de Boole correspondiente las operaciones son el m.c.d. y m.c.m. habituales.

Podemos caracterizar los elementos del conjunto según su número de divisores primos:

Infimo del retículo: 1

Átomos (primos): 2,3,5,7

Productos de dos primos: 6,10,14,15,21,35

Elementos maximales (productos de tres primos): 30,42,70,105

Supremo del retículo (producto de cuatro primos): 210

(obviamente, para que x sea divisor de y , es condición necesaria que x sea producto de un número menor o igual de primos que y).

Por ejemplo, el ideal principal generado por 6 es $\{1,2,3,6\}$ y el filtro principal generado por 10 es $\{10,30,70,210\}$.

2. Ideas para elaborar el algoritmo

Consideremos un número natural producto de n primos, es decir, de la forma

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

donde los p_j son primos tales que $p_j \neq p_k$ si $j \neq k$. Sus divisores son los números de la forma

$$p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_n^{\delta_n} ; \delta_j \in \{0,1\}$$

Las n -tuplas de exponentes pueden identificarse con las aplicaciones de $\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n\}$ en $\{0,1\}$. Por ser 2^n el número de tales aplicaciones, N tendrá 2^n divisores. Por otra parte, es claro que las aplicaciones citadas se pueden identificar con los números binarios cuyo número de cifras es menor o igual que n , esto es, con:

0 0 0 ... 0 0 0
0 0 0 ... 0 0 1
0 0 0 ... 0 1 0
0 0 0 ... 0 1 1
.....
1 1 1 ... 1 1 1

De este modo, los divisores de N son identificables con los números naturales menores que 2^n (incluido el cero), pudiéndose ordenar dichos divisores, en la ordenación que induce tal identificación. Ello permite denotar a los divisores de N en la forma d_i ; $0 \leq i \leq 2^n - 1$.

De acuerdo con esta notación, si d_i es el divisor de N

$$d_i = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} \dots p_n^{\delta_n}$$

entonces el exponente δ_j (del primo p_j) puede obtenerse calculando (en base decimal) el cociente de la división entera del número natural i entre 2^{j-1} , y reduciéndolo módulo 2, según puede comprobarse.

En adelante, por brevedad, notaremos a_{ij} al exponente δ_j del divisor d_i del número natural N .

3. Algoritmo

Entradas

Lista o conjunto ordenado de primos: $P = [p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}, \dots, p_r]$

Número, n , de primos a considerar (para determinar $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$)

3.1 Divisores primos de N

3.1.1: Inicializar PS como lista vacía.

3.1.2: Alojar en PS los n primeros elementos de P .

Los elementos de PS son los divisores primos de N .

3.2 Conjunto, D_N , de los 2^n divisores de N

3.2.1: Inicializar L como lista vacía.

3.2.2: Para i variando de 0 a $2^n - 1$ y j variando de 1 a n , hacer a_{ij} igual al resto de dividir entre 2 al cociente de la división entera de $i - 1$ entre 2^{j-1} .

3.2.3: Para i variando de 0 a $2^n - 1$, alojar los productos $\prod_{j=1}^n p_j^{a_{ij}}$ en la lista L .

Los elementos de L son los divisores de N .

3.3 Divisores primos del elemento x

3.3.1: Inicializar LDP como lista vacía.

3.3.2: Para h variando de 1 a la longitud de la lista PS , si el elemento h -ésimo de PS es divisor de x , añadirlo a la lista LDP .

Los elementos de LDP son los divisores primos del elemento x .

3.4 Ideal generado por el elemento x

3.4.1: Inicializar LD como lista vacía.

3.4.2: Determinar la lista, LDP , de los divisores primos de x (como en 3.3).

3.4.3: Hallar el conjunto de divisores de x (como en 3.2, pero sustituyendo N por x , y L por LD).
Los elementos de LD son los elementos del ideal generado por x .

3.5 Átomos

Los elementos de PS son los átomos del álgebra de Boole.

3.6 Elementos maximales

3.6.1: Inicializar LMA como lista vacía.
3.6.2: Determinar la lista, PS , de átomos del álgebra de Boole.
3.6.3: Para cada elemento, d , de la lista PS , hallar el cociente N/d y añadirlo a la lista LMA .
Los elementos de LMA son los elementos maximales del álgebra de Boole.

3.7 Filtro generado por el elemento x

3.7.1: Inicializar LDD como lista vacía.
3.7.2: Para h variando de 1 a la longitud de la lista PS , si el elemento h -ésimo de PS no está en LDP , añadirlo a la lista LDD .
3.7.3: Inicializar $LAUX$ como lista vacía y alojar en ella a los elementos del álgebra generada por los elementos de la lista LDD (como en 3.2).
3.7.4: Inicializar LM como lista vacía y alojar en ella a los números que se obtienen multiplicando a x por los elementos de $LAUX$.
Los elementos de LM son los elementos del filtro generado por x .

3.8 Elementos que tienen exactamente m divisores primos.

3.8.1: Inicializar LP como lista vacía.
3.8.2: Para i variando de 1 a la longitud de la lista L , hacer:
 3.8.2.1: hallar la suma, s , de los a_{ij} , para j variando de 1 a n .
 3.8.2.2: si $s = m$, añadir el elemento correspondiente a la lista LP .
Los elementos de LP son los que tienen exactamente m divisores primos.

4. Implementación

La implementación la hemos efectuado en el Sistema de Cómputo Algebraico Maple V.4. Omitimos, por brevedad, el código, que ofrecemos a los lectores interesados, pero comentamos los procedimientos utilizados. Son los

siguientes:

genera(LIP): su entrada, LIP , es una lista de primos, siendo su salida la lista LID (obtenida siguiendo 3.2), de todos los divisores del número producto de los elementos de LIP .

gene(n): su entrada, n , es un número natural menor o igual que el número de primos de la lista P , siendo su salida la lista L (obtenida con **genera**), de divisores de N .

divpri(x): su entrada, x , es un elemento del álgebra de Boole, siendo su salida la lista LDP (obtenida siguiendo 3.3), de divisores primos de x .

ideal(x): su entrada, x , es un elemento del álgebra de Boole, siendo su salida la lista LD (obtenida siguiendo 3.4), de elementos del ideal de x .

filtro(x): su entrada, x , es un elemento del álgebra de Boole, siendo su salida la lista LM (obtenida siguiendo 3.7), de elementos del filtro de x .

atomos(): su entrada es vacía, siendo su salida la lista PS (obtenida siguiendo 3.5), de átomos del álgebra de Boole.

maximales(): su entrada es vacía, siendo su salida la lista LMA (obtenida siguiendo 3.6), de elementos maximales del álgebra de Boole.

sonproductode(m): su entrada, m , es un número natural menor o igual que el número de primos divisores de N , siendo su salida la lista LP (obtenida siguiendo 3.8), de divisores del N que son producto de exactamente m primos.

5. Ejecución del programa

Después de definir P , como lista, o como conjunto, de primos, se ha de comenzar ejecutando **gene(n)** para generar el álgebra de Boole. A continuación, se pueden pedir, en el orden que se desee, ideales, filtros,... como en los siguientes ejemplos.

Cargar el programa:

```
[ > read('boolefin.map') :
```

5.1. Caso de ser N un producto de 5 números primos

Denotar P a una lista de números primos:

```
[ > P:=[2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47] :
```

Generar el álgebra de Boole que resulta a partir de los 5 primeros elementos de la lista P:

```
[ > gene(5) ;  
  
      Este Álgebra de Boole consta de, 32, elementos:  
1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210, 11, 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330, 77,  
154, 231, 462, 385, 770, 1155, 2310
```

Calcular el ideal que genera el elemento 105:

```
[ > ideal(105) ;  
  
      Este ideal consta de, 8, elementos:  
1, 3, 5, 15, 7, 21, 35, 105
```

Calcular el filtro que genera el elemento 15:

```
[ > filtro(15) ;  
  
      Este filtro consta de, 8, elementos:  
15, 30, 105, 210, 165, 330, 1155, 2310
```

Pedir los elementos maximales del álgebra de Boole:

```
[ > maximales() ;  
  
      Este Álgebra de Boole contiene, 5, maximales:  
210, 330, 462, 770, 1155
```

Hallar los elementos que son producto de 3 primos:

```
[ > sonproductode(3) ;  
  
      En este Álgebra de Boole hay, 10, elementos  
      que son producto de, 3, primos:  
30, 42, 70, 105, 66, 110, 165, 154, 231, 385
```

5.2. Caso de ser N un producto de 7 números primos

Generar el álgebra de Boole que resulta a partir de los 7 primeros elementos de la misma lista P, del apartado 5.1:

```
[ > gene(7) ;  
  
      Este Álgebra de Boole consta de, 128, elementos:  
1, 2, 3, 6, 5, 10, 15, 30, 7, 14, 21, 42, 35, 70, 105, 210, 11, 22, 33, 66, 55, 110, 165, 330, 77,  
154, 231, 462, 385, 770, 1155, 2310, 13, 26, 39, 78, 65, 130, 195, 390, 91, 182, 273, 546, 455,  
910, 1365, 2730, 143, 286, 429, 858, 715, 1430, 2145, 4290, 1001, 2002, 3003, 6006, 5005,  
10010, 15015, 30030, 17, 34, 51, 102, 85, 170, 255, 510, 119, 238, 357, 714, 595, 1190, 1785,  
3570, 187, 374, 561, 1122, 935, 1870, 2805, 5610, 1309, 2618, 3927, 7854, 6545, 13090,  
19635, 39270, 221, 442, 663, 1326, 1105, 2210, 3315, 6630, 1547, 3094, 4641, 9282, 7735,  
15470, 23205, 46410, 2431, 4862, 7293, 14586, 12155, 24310, 36465, 72930, 17017, 34034,  
51051, 102102, 85085, 170170, 255255, 510510
```

Calcular el filtro que genera el elemento 15:

```
[ > filtro(15) ;  
  
      Este filtro consta de, 32, elementos:  
15, 30, 105, 210, 165, 330, 1155, 2310, 195, 390, 1365, 2730, 2145, 4290, 15015, 30030, 255,  
510, 1785, 3570, 2805, 5610, 19635, 39270, 3315, 6630, 23205, 46410, 36465, 72930,  
255255, 510510
```

Pedir los elementos maximales del álgebra de Boole:

```
[ > maximales() ;  
  
      Este Álgebra de Boole contiene, 7, maximales:  
30030, 39270, 46410, 72930, 102102, 170170, 255255
```

Hallar los elementos que son producto de 5 primos:

```
[ > sonproductode(5) ;  
  
      En este Álgebra de Boole hay, 21, elementos  
      que son producto de, 5, primos:  
2310, 2730, 4290, 6006, 10010, 15015, 3570, 5610, 7854, 13090, 19635, 6630, 9282, 15470,  
23205, 14586, 24310, 36465, 34034, 51051, 85085
```

5.3. Caso de ser N un producto de polinomios irreducibles en una variable

Denotar P a una lista de polinomios irreducibles en una variable, con coeficientes enteros:
 $[> P := [x, x^2 + 5x - 3, x - 1, x + 1, x + 3, x^2 + 1] :$

Generar el algebra de Boole que resulta a partir de los 4 primeros elementos de la lista P:

```
> gene(4);
```

Este Algebra de Boole consta de, 16, elementos:

$$1, x, x^2 + 5x - 3, x^3 + 5x^2 - 3x, x - 1, x^2 - x, x^3 + 4x^2 - 8x + 3, x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3x, x + 1,$$

$$x^2 + x, x^3 + 6x^2 + 2x - 3, x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 3x, x^2 - 1, x^3 - x, x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 5x + 3,$$

$$x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 3x$$

Calcular el ideal que genera el elemento $(x^3 - x)$:

```
> ideal((x^3 - x));
```

Este ideal consta de, 8, elementos:

$$1, x, x - 1, x^2 - x, x + 1, x^2 + x, x^2 - 1, x^3 - x$$

Calcular el filtro que genera el elemento $x + 1$:

```
> filtro(x + 1);
```

Este filtro consta de, 8, elementos:

$$x + 1, x^2 + x, x^3 + 6x^2 + 2x - 3, x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 3x, x^2 - 1, x^3 - x, x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 5x + 3,$$

$$x^5 + 5x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 3x$$

Pedir los elementos maximales del algebra de Boole:

```
> maximales();
```

Este Algebra de Boole contiene, 4, maximales:

$$x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 3x, x^4 + 6x^3 + 2x^2 - 3x, x^3 - x, x^4 + 5x^3 - 4x^2 - 5x + 3$$

Calcular los elementos que son producto de 2 irreducibles:

```
> sonproductode(2);
```

En este Algebra de Boole hay, 6, elementos que son producto de, 2, irreducibles:

$$x^3 + 5x^2 - 3x, x^2 - x, x^3 + 4x^2 - 8x + 3, x^2 + x, x^3 + 6x^2 + 2x - 3, x^2 - 1$$

5.4 Caso de ser N un producto de polinomios irreducibles en varias variables

Denotar P a una lista de polinomios irreducibles en varias variables con coeficientes racionales:
 $[> P := [x + (2/5) * z, (4/3) * x - y, z * x - y, y^2 - 3/4, x + z^2, x^2 + 1] :$

Generar el algebra de Boole que resulta a partir de los 3 primeros elementos de la lista P:

```
> gene(3);
```

Este Algebra de Boole consta de, 8, elementos:

$$1, x + \frac{2}{5}z, \frac{4}{3}x - y, \frac{4}{3}x^2 - xy + \frac{8}{15}zx - \frac{2}{5}zy, zx - y, zx^2 - xy + \frac{2}{5}z^2x - \frac{2}{5}zy,$$

$$\frac{4}{3}zx^2 - \frac{4}{3}xy - yzx + y^2, \frac{4}{3}x^3z - \frac{4}{3}x^2y - x^2yz + xy^2 + \frac{8}{15}z^2x^2 - \frac{8}{15}yzx - \frac{2}{5}z^2yx + \frac{2}{5}zy^2$$

Calcular el filtro que genera el elemento $(4/3)x - y$:

```
> filtro((4/3)*x - y);
```

Este filtro consta de, 4, elementos:

$$\frac{4}{3}x - y, \frac{4}{3}x^2 - xy + \frac{8}{15}zx - \frac{2}{5}zy, \frac{4}{3}x^3z - \frac{4}{3}x^2y - x^2yz + xy^2 + \frac{8}{15}z^2x^2 - \frac{8}{15}yzx - \frac{2}{5}z^2yx + \frac{2}{5}zy^2$$

Calcular los elementos que son producto de 2 irreducibles:

```
> sonproductode(2);
```

En este Algebra de Boole hay, 3, elementos que son producto de, 2, irreducibles:

$$\frac{4}{3}x^2 - xy + \frac{8}{15}zx - \frac{2}{5}zy, zx^2 - xy + \frac{2}{5}z^2x - \frac{2}{5}zy, \frac{4}{3}zx^2 - \frac{4}{3}xy - yzx + y^2$$

Calcular el m.c.d. y el m.c.m. de los dos últimos elementos, de entre los tres que se acaban de obtener:

```
> gcd(z*x^2 - x*y + (2/5)*z^2*x - (2/5)*z*y, (4/3)*z*x^2 - (4/3)*x*y - y*z*x + y^2);
```

z x - y

```
> lcm(z*x^2 - x*y + (2/5)*z^2*x - (2/5)*z*y, (4/3)*z*x^2 - (4/3)*x*y - y*z*x + y^2);
```

$$\frac{4}{3}x^3z - \frac{4}{3}x^2y - x^2yz + xy^2 + \frac{8}{15}z^2x^2 - \frac{8}{15}yzx - \frac{2}{5}z^2yx + \frac{2}{5}zy^2$$

6. Conclusiones

Con este artículo se pretenden dos objetivos. De una parte, ayudar a quienes utilicen estos modelos de álgebras de Boole finitas a ahorrar el tiempo de los cálculos tediosos, centrando la atención en lo puramente conceptual. Y de otra parte, mostrar esta curiosa codificación de los divisores de un producto de primos, que permite ordenarlos.

Bibliografía

- [1] ABELLANAS, M. y LODARES, D. (1990), *Matemática Discreta*, Ra-Ma.
- [2] HALMOS, P.R. (1974), *Lectures on Boolean Algebras*. Reprint de la edición (1963) de Van Nostrand, Springer-Verlag.
- [3] HECK, H. (1993), *Introduction to Maple*, Springer.
- [4] HERMES, H. (1963), *La teoría de retículos y su aplicación a la lógica matemática*. Madrid, Conf. Mat. VI, Pub. Instituto «Jorge Juan» (CSIC).
- [5] LAITA, L.M.; DE LEDESMA, L.; E. ROANES LOZANO, E. y ROANES MACÍAS, E. (1995), *An Interpretation of the Propositional Boolean Algebra as a k-algebra*. *Effective Calculus*. En: CAMPBELL, J. y CALMET, J. (editores), *Proceedings of the Second International Workshop-Conference on Artificial Intelligence and Symbolic Mathematical Computing (AISMC-2)*, Lecture Notes in Computer Science 958, Springer-Verlag.
- [6] MONK, D. (1989), *Handbook of Boolean Algebras*. New York, North-Holland.
- [7] REDFERN, D. (1996), *The Maple Handbook*, Springer.
- [8] SOTO, M.J. y VICENTE, J.L. (1995), *Matemáticas con Maple*, Addison-Wesley.

Una aplicación geométrica del método de los mínimos cuadrados

Julio Benítez López

Departamento de Matemática Aplicada
Universidad Politécnica de Valencia

Abstract

A general method to calculate the distance between two affine lineal varieties is presented. It is based on least square technique. Moreover, a point in each variety, such that the distance between them is minimal, is determined.

En un curso de álgebra lineal los estudiantes tienen que memorizar demasiadas fórmulas para encontrar la distancia entre dos variedades lineales, por ejemplo dos rectas paralelas, dos rectas que se cruzan, dos planos paralelos, un punto y una recta, etc. No hay una fórmula general para encontrar estas distancias. Además, estas fórmulas no nos proporcionan los puntos de mínima distancia. Veremos un método fácil, basado en el método de mínimos cuadrados, que nos dará la distancia entre dos variedades lineales y los puntos de estas variedades que minimizan la distancia.

Comenzamos con una breve introducción:

Si U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^k$ y P es un punto de $\mathbb{R}^k$, la *variedad lineal pasando por P con subespacio soporte U* es el siguiente conjunto:

$$P + U = \{P + u : u \in U\}.$$

La distancia entre las dos variedades lineales $P + U$ y $Q + V$ es

$$d(P + U, Q + V) = \inf\{d(P + u, Q + v) : u \in U, v \in V\}.$$

Todavía no sabemos si este ínfimo existe, pero veremos que este ínfimo es realmente un mínimo y sabremos cómo encontrarlo.

Nuestro método está basado en el teorema siguiente: ([I-T] Página 504)

TEOREMA 1 Sea A una matriz $n \times m$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Si $x_0 \in \mathbb{R}^m$ es una solución del sistema lineal $A^T A x = A^T b$ (las Ecuaciones normales) entonces x_0 satisface $\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Puede probarse que el sistema de las ecuaciones normales es siempre un sistema compatible y tienen solución única si y sólo si el rango de A es m . ([I-T] Página 507)

El Teorema 1 se usa frecuentemente para resolver aproximadamente sistemas de ecuaciones lineales. El número $\|Ax_0 - b\|$ mide el error cometido en la aproximación. En nuestro caso este número medirá la distancia entre las dos variedades. Otro resultado que nos será de utilidad es el siguiente: ([Q-R] Página 114)

TEOREMA 2 Sean $P + U$ y $Q + V$ dos variedades lineales. Entonces su intersección es no vacía si y solamente si $\vec{PQ} \in U + V$.

Consideremos las ecuaciones paramétricas de las dos variedades lineales $P + U$, $Q + V$.

$$P + U : X = P + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n \quad (1)$$

$$Q + V : Y = Q + \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_m v_m$$

Tenemos que encontrar $X^* \in P + U$, $Y^* \in Q + V$ tales que

$$\|X^* - Y^*\| = \inf\{\|X - Y\| : X \in P + U, Y \in Q + V\}.$$

Para simplificar los cálculos siguientes supongamos que $P + U$ y $Q + V$ son unidimensionales (dos rectas). Tenemos que minimizar $\|X - Y\|$, donde $X \in P + U$, $Y \in Q + V$. Por lo que hay que encontrar $\lambda^*, \mu^* \in \mathbb{R}$ tales que

$$\|P + \lambda^* u - (Q + \mu^* v)\| \leq \|P + \lambda u - (Q + \mu v)\| \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Sean $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix}$, $\Lambda^* = \begin{pmatrix} \lambda^* \\ -\mu^* \end{pmatrix}$ y A la matriz cuyas columnas son u y v . Entonces (2) puede escribirse

$$\|A\Lambda^* - \vec{PQ}\| \leq \|A\Lambda - \vec{PQ}\| \quad \forall \Lambda \in \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

Sabemos que (3) tiene solución por el Teorema 1, y esta solución satisface

$$A^T A \Lambda = A^T \vec{PQ}. \quad (4)$$

Por lo que, dadas dos variedades lineales siempre podremos encontrar dos puntos, cada uno en una variedad, que minimizan la distancia entre ambas. Podemos resolver (4) para encontrar λ^* y μ^* y los puntos buscados son $X^* = P + \lambda^* u$ e $Y^* = Q + \mu^* v$.

Además podemos decir algo sobre la relación geométrica entre estos puntos y las variedades: Si desarrollamos (4) conseguimos

$$\begin{pmatrix} \langle u, u \rangle & \langle u, v \rangle \\ \langle u, v \rangle & \langle v, v \rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda^* \\ -\mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \vec{PQ}, u \rangle \\ \langle \vec{PQ}, v \rangle \end{pmatrix}, \quad (5)$$

denotando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto interno usual. De (5) tenemos

$$\langle u, \lambda^* u - \mu^* v - \vec{PQ} \rangle = \langle v, \lambda^* u - \mu^* v - \vec{PQ} \rangle = 0.$$

Por otra parte

$$Y^* \vec{X}^* = X^* - Y^* = P + \lambda^* u - (Q + \mu^* v) = \lambda^* u - \mu^* v - \vec{PQ}.$$

Por lo que $Y^* \vec{X}^*$ es perpendicular a u y a v .

Los cálculos precedentes se pueden generalizar sin ningún problema a cualquier par de variedades lineales: Dadas las variedades lineales cuyas ecuaciones paramétricas están escritas en (1) no tenemos más que definir

$$A = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ -\mu_1 \\ \vdots \\ -\mu_m \end{pmatrix}.$$

En general el vector que une los puntos de mínima distancia es perpendicular a los subespacios soporte.

Nos gustaría cerrar este trabajo con dos simples notas y varios ejemplos:

1) El error cometido en la aproximación es la distancia entre las dos variedades. Si este error es cero el sistema $A\Lambda = \vec{PQ}$ es compatible, por lo que $\vec{PQ} \in \mathcal{R}(A) = U + V$, siendo $\mathcal{R}(A)$ el subespacio generado por las columnas de A . ([I-T] Página 211). Como $\vec{PQ} \in U + V$, por el Teorema 2, se tiene $(P + U) \cap (Q + V) \neq \emptyset$. Por lo que si la distancia entre dos variedades

lineales es 0 su intersección es no vacía. Esta afirmación no es cierta para conjuntos arbitrarios, por ejemplo una hipérbola y su asíntota.

2) Las columnas de la matriz A son los vectores que generan U y V , por lo que el rango de A es $\dim(U + V)$, por otra parte, A tiene $\dim U + \dim V$ columnas. Como

$$\dim U + \dim V = \dim(U + V) - \dim(U \cap V),$$

si $U \cap V = \{0\}$ entonces A tiene tantas columnas como su rango, por lo que la solución es única. Y recíprocamente.

3) Sean las rectas

$$\begin{aligned} r : (x, y, z) &= (1, 0, 1) + \lambda(0, 2, 0) & \lambda \in \mathbb{R} \\ s : (x, y, z) &= (0, 1, 0) + \mu(1, 0, 0) & \mu \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Obviamente las ecuaciones

$$(1, 0, 1) + \lambda(0, 2, 0) = (0, 1, 0) + \mu(1, 0, 0)$$

o

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

forman un sistema incompatible, pero si lo resolvemos por mínimos cuadrados:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

la solución del último sistema es $\lambda^* = \frac{1}{2}$, $\mu^* = 1$. Por lo que los puntos que minimizan la distancia son

$$\begin{aligned} X^* &= (1, 0, 1) + \lambda^*(0, 2, 0) = (1, 1, 1) \\ Y^* &= (0, 1, 0) + \mu^*(1, 0, 0) = (1, 1, 0) \end{aligned}$$

La distancia entre las dos rectas es $\|X^* - Y^*\| = 1$.

4) **Proyección de un punto sobre una variedad.** Sean Q un punto y $P + U$ una variedad en $\mathbb{R}^n$ de dimensión m . Queremos hallar la proyección ortogonal de Q sobre $P + U$.

Sean $\{u_1, \dots, u_m\}$ los vectores que generan U , que suponemos que forman un sistema ortonormal. Sea $\Pi_{P+U}(Q)$ la proyección ortogonal de Q sobre $P + U$. $\Pi_{P+U}(Q)$ debe cumplir

$$\Pi_{P+U}(Q) = P + \lambda_1^* u_1 + \lambda_2^* u_2 + \dots + \lambda_m^* u_m.$$

Sean, de acuerdo con los párrafos precedentes,

$$A = (u_1, \dots, u_m) \quad \Lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*)^T.$$

Entonces la ecuación que debe verificar Λ^* es

$$A^T A \Lambda^* = A^T \vec{PQ}$$

que desarrollándola obtenemos $\lambda_i^* = \langle u_i, \vec{PQ} \rangle$, $i = 1, \dots, m$. Por tanto

$$\Pi_{P+U}(Q) = P + \sum_{j=1}^m \langle u_j, \vec{PQ} \rangle u_j.$$

5) **Distancia entre una recta y un hiperplano.** Recordemos que un hiperplano es una variedad de codimensión 1. Sean H un hiperplano y r una recta en $\mathbb{R}^{n+1}$. Sus ecuaciones paramétricas son

$$H : P + \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$$

$$r : Q + \mu v$$

Si v no fuese combinación lineal de $u_1, \dots, u_n$, entonces $\{v, u_1, \dots, u_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^{n+1}$ y por el Teorema 2 la distancia es 0.

Por tanto podemos suponer $v = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n$ ($\alpha_i \in \mathbb{R}$), es decir, las variedades son paralelas. Podemos suponer asimismo que los vectores $\{u_1, \dots, u_n\}$ forman un sistema ortogonal. Sean $Q + \mu^* v$ y $P + \sum_{j=1}^n \lambda_j^* u_j$ los puntos de la recta y el hiperplano que minimizan la distancia. Sabemos a priori por la segunda nota que hay infinitas soluciones. Sean

$$A = (u_1, \dots, u_n, \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j) \quad \Lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_n^*, -\mu^*)^T.$$

La ecuación $A^T A \lambda^* = A^T \vec{PQ}$ desarrollada es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n & \sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \\ \vdots \\ \lambda_n^* \\ -\mu^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle u_1, \vec{PQ} \rangle \\ \langle u_2, \vec{PQ} \rangle \\ \vdots \\ \langle u_n, \vec{PQ} \rangle \\ \sum_{j=1}^n \alpha_j \langle u_j, \vec{PQ} \rangle \end{pmatrix},$$

se ve claramente que si multiplicamos la j -ésima ecuación por α_j y las sumamos todas obtenemos la última, por lo que podemos ignorarla. De las n primeras obtenemos $\lambda_j^* = \mu^* \alpha_j + \langle u_j, \vec{PQ} \rangle$. Por lo que las soluciones son $Q + \mu^* v$ y $P + \sum_{j=1}^n (\mu^* \alpha_j + \langle u_j, \vec{PQ} \rangle) u_j$. Ahora se ve que obtenemos infinitas soluciones simplemente variando μ^* . Además tenemos

$$P + \sum_{j=1}^n (\mu^* \alpha_j + \langle u_j, \vec{PQ} \rangle) u_j = P + \mu^* \sum_{j=1}^n \alpha_j u_j + \sum_{j=1}^n \langle u_j, \vec{PQ} \rangle u_j = \mu^* v + \Pi_H(Q)$$

por lo que la distancia entre la recta y el hiperplano es

$$d(\mu^* v + \Pi_H(Q), Q + \mu^* v) = d(\Pi_H(Q), Q),$$

de donde se ve que la distancia es independiente del valor de μ^* y para hallar esta distancia basta con hallar la distancia de un punto de la recta (por ejemplo Q) al hiperplano.

Referencias

- [I-T] J. IZQUIERDO, J. R. TORREGROSA. *Algebra lineal y ecuaciones diferenciales*. Ed. Universitaria Politécnica de Valencia (1991).
 [Q-R] M. QUEYSANNE, A. REVUZ. *Geometría*. Compañía Editorial Continental, S.A. (1976).

La Biblioteca del Monasterio de El Escorial como recurso didáctico en la clase de Matemáticas de Secundaria

M.M. Garbayo Moreno[†],
Charo Morata Sebastián[‡]
J.M. Sordo Juanena^{*}

[†]Dto. Didáctica de las Matemáticas, U.C.M.,

[‡]Profesora de Historia en Secundaria,

^{*}Dto. Didáctica de las Matemáticas, U.C.M.

Abstract

We consider that it is desirable to include historical notes as a teaching aid in the class of Mathematics. In this paper we develop this idea, using the collection of the library of the El Escorial monastery (dating from the time of Felipe II —XVII century—).

This library is considered one of the best of its kind in the world. There, treasures that are fundamental to know the evolution of knowledge are accumulated.

«Quien esta hambre tuviere, venga a San Lorenzo el Real, que entrambas necesidades remedia, la del cuerpo, con el mantenimiento corporal, y la del ánima, con manjar sobrenatural».

Introducción

El Monasterio de El Escorial ha sido ampliamente estudiado desde la Historia del Arte como paradigma de la arquitectura del Renacimiento español, y desde la perspectiva historiográfica como emblema de un reinado y de una época. Pero entendemos que no ha sido puesto suficientemente en relación con la evolución de la ciencia en España y más concretamente con las Matemáticas. A este respecto hemos de señalar dos excepciones: el magnífico trabajo de Juan Antonio Sánchez Pérez en su obra *Las matemáticas en la Biblioteca de El Escorial*, realizada en 1929 por encargo de la Academia de Matemá-

ticas de Madrid, y la aportación realizada desde el Seminario de Historia de la Matemática de la Facultad de Ciencias Matemáticas de la Universidad Complutense de Madrid, por Jesús Andrés Pascual en *Presencia de la matemática en el Monasterio de «El Escorial»*, realizada en 1991 con motivo del IV Centenario de la finalización de las obras del Real Monasterio de San Lorenzo de El Escorial.

En España disponemos de una de las mejores Bibliotecas del mundo, sólo superada por la biblioteca de El Vaticano, en la que se acumulan tesoros fundamentales para conocer la evolución de todos los saberes y en definitiva la evolución de la humanidad.

Este artículo pretende hacer una somera aproximación a la Biblioteca del Monasterio de El Escorial, centrándonos en los fondos relacionados con las Matemáticas, siendo nuestro interés hacer ver que en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, los estudiantes, adquieren cantidades substanciales de matemática con gran detalle, pero normalmente reciben poca información sobre sus orígenes o sobre las motivaciones que han conducido a su descubrimiento y su formalización.

Nosotros pensamos que es positivo para comprender mejor las Matemáticas, incluir en la Transposición Didáctica, algunos aspectos históricos y por consiguiente crear objetos propios de enseñanza que no formen parte del Saber Sabio, pero sí como una ayuda didáctica.

Estamos seguros que esta visión histórica no corresponde únicamente a los profesores de Matemáticas, pero sí que estos son parte importante, ya que a ellos corresponde tomar la decisión de cuándo, cómo y porqué se debe hacer esta inclusión.

Con este fin, partiremos del interés despertado por las Matemáticas en la Corte de Felipe II; seguiremos haciendo un recorrido por la Biblioteca de la mano de las impresionantes matronas que presiden la bóveda, donde se simbolizan las Artes del *Trivium* y *Quadrivium*, para finalizar, acercándonos a algunas de las obras de los matemáticos más importantes de la Historia.

1. Las Matemáticas en la Corte de Felipe II

Felipe II fue un rey culto, con una profunda formación humanística y defensor a ultranza de las teorías de Raimundo Llull. Fue discípulo de uno de los matemáticos españoles más prestigiosos de la primera mitad del siglo XVI, Juan Martínez Silíceo, quien ejerció como catedrático en las universidades de París y Salamanca gozando de la consideración internacional.

Junto al monarca, la personalidad de Juan de Herrera, que se incorporó a la corte en 1558, a la vuelta de su estancia en Italia donde entró en contacto con las preocupaciones matemáticas que se estaban desarrollando por aquella época. En 1562 se puso al servicio del arquitecto Juan Bautista de Toledo que había sido encargado de la construcción de la gran obra de Felipe II, el Monasterio del Escorial. A la muerte de Juan Bautista de

Toledo en 1567, Juan Herrera asume la dirección de las obras, poniendo al servicio de su ejecución todos los conocimientos que había adquirido en sus estancias en Flandes e Italia, así como su ingenio en la elaboración de máquinas y grúas que permitieron la terminación de las obras en 1572.

Aunque Juan de Herrera es más conocido como arquitecto que como matemático, quizá porque no dejó escrita alguna obra específicamente matemática, lo cierto es que su interés por esta ciencia así como su conocimiento e investigación en este campo, hicieron que fuera reconocido como uno de los más insignes matemáticos españoles del siglo XVI, tanto por sus contemporáneos como por los cronistas de la Ciencia española en la actualidad. El mismo consideraba las Matemáticas como base de su formación, desarrollando su actividad como arquitecto en base a la Geometría, dando lugar a un estilo propio denominado «herreriano».

Por otra parte, el carácter especulativo de la ciencia pura, tenía escasos cultivadores en el Renacimiento español a pesar de hacer un uso intensivo de ella. El mundo de las matemáticas encontró en la navegación y la guerra importantes campos de aplicación práctica como fueron la cartografía, náutica y las ingenierías naval y militar. Como escribía Pedro Simón Abril en 1589 «...de no aprenderse la matemática viene haber gran falta de ingenieros en las cosas de la guerra, de pilotos para la navegación y de arquitectos para los edificios y fortificaciones».

Precisamente fue esta carencia de artilleros y de cartas de navegación fiables, unido a la influencia de Juan Herrera como matemático, lo que dio lugar a la institucionalización de la enseñanza de las matemáticas en España, creándose la *Academia de Matemáticas de Madrid* a través de una Real Cédula de 31 de enero de 1584. Al frente de la Academia se colocó al propio Juan Herrera, quien se encargaría de la enseñanza de la Arquitectura y de dirigir el trabajo del resto de profesores. Los maestros de la recién creada Academia fueron los portugueses Juan Bautista Labaña, encargado de «leer matemáticas», Luis Georgio encargado de las artes de la cartografía y Pedro Ambrosio de Ondériz encargado de traducir del latín libros de Matemáticas de los clásicos.

El proyecto de creación de esta institución había nacido en 1582 en Lisboa, en un viaje realizado por Felipe II con motivo de la adhesión de Portugal al imperio. En 1583 comenzó sus actividades la Academia y bajo su influjo apareció el grupo de geómetras españoles constituidos por Molina, Falcó y Julio César Firrufino, todos ellos encabezados por Juan de Herrera [1].

Además de las matemáticas, las grandes cuestiones científicas que entonces se discutían en Europa, también encontraron eco en España, optando en ocasiones por actitudes más abiertas que en otros lugares. Sirva de ejemplo el apoyo de la Universidad de Salamanca a la teoría heliocéntrica de Copérnico, mientras que en París, Zurich o Turinga se prohibía su enseñanza y discusión, dando muestras de la apertura de ideas, en el aspecto científico, de la corte de Felipe II.

2. La Biblioteca del Monasterio de El Escorial

«A la derecha del zaguán de entrada al Patio de los Reyes se abre la puerta que conduce a la Biblioteca, situada a la altura del tercer piso, y cuyas ventanas y balcones corresponden al lado oeste, por la lonja, y al lado oriental, por el Patio de los Reyes. Tiene una bella portada, cuyo centro ocupa la puerta, flanqueada por dos pedestales con sus correspondientes columnas, sobre las que se desplaza el frontón; este frontón presenta una lápida negra en la que, con tipos dorados, se fulmina excomunión contra quienes saquen libros de la biblioteca». Así nos describe el acceso a la Biblioteca Federico Carlos Sainz de Robles [2]. En su interior nos encontramos con un espléndido salón de 54 por 9 metros y 10 de altura, con el pavimento de mármol gris y blanco y la bóveda de cañón con lunetos.

Las librerías, de estilo toscano, fueron dibujadas por Juan de Herrera y ejecutadas magistralmente por el italiano Giuseppe Flecha y los españoles Gamboa, Serrano y otros. En los materiales podemos encontrar una gran variedad de maderas, como ácana, caoba, ébano, cedro, naranjo, terebinto y nogal, ofreciendo un bello contraste de colores. Los armarios se componen con tres, cuatro o seis columnas que corren sobre un cuerpo bajo a modo de basamento, el cual, a su vez, sirve de apoyo para examinar los libros. El friso del entablamento tiene encima un pequeño cuerpo rematado en los extremos y en los ejes de las columnas con los típicos obeliscos con bolas, todo ello dorado, dando un significado de grandeza y majestuosidad a los libros que albergan. En su interior, los libros están ordenados por materias y por tamaño, y dispuestos de forma muy original, con el canto dorado hacia el exterior con lo que toda la estantería ofrece un aspecto suntoso, como cubierta de oro.

Como afirma Pascual (1991), la Biblioteca es la prueba concluyente de que en la concepción de Felipe II y la ejecución por su arquitecto Juan de Herrera, preside la idea de perpetuar en El Escorial un culto especial a la Matemática, como parte integrante de la cultura científica. Este culto salta a la vista en la simbología iconográfica representada en la bóveda.

El simbolismo de los frescos que adornan la bóveda de la Biblioteca, aparece ya en su misma distribución y estructura. Los mundos de la oración y del estudio están representados respectivamente por las alegorías de la *Teología* y la *Filosofía*, y no es casual que la primera de ellas ocupe el lugar contiguo al convento, justo enfrente del lugar en que se halla la alegoría de la Filosofía, que se encuentra en la parte del Colegio. Se unen de esta forma el saber divino y el humano, las ciencias sagradas y las profanas.

Los frescos, obra de Peregrino Tibaldi, se completan con la representación de las Artes Liberales colocadas en el intrados de la bóveda, junto a los personajes más insignes que sobresalieron en cada una de ellas. En los flancos de cada tramo se sitúan historias referentes a cada ciencia, seleccionadas por ser portadoras de un doble sentido.

La mayoría de las ciencias están representadas por eruditos de la Antigüedad clásica y las escenas que ilustran el friso provienen casi exclusivamente del ámbito pagano y judío, selección que se atribuye a la colaboración directa del humanista Arias Montano, profundo conocedor de los textos antiguos y sagrados.

Vamos a detenernos en la iconografía de los frescos que plasman la preocupación por los dos saberes diferentes. Por una parte, un saber racionalista y humanista que vendría simbolizado en la idea de las Artes Liberales, y en la representación de los valores del *Trivium*; y por otra, un saber esotérico y científico representado por la inclusión de científicos, astrónomos y magos del *Quadrivium*.

2.1. La Filosofía

Coincidiendo con el frontispicio del testero de la pared, aparece la Filosofía por ser considerada la madre de todas las ciencias y saberes humanos. Está representada como una joven matrona sentada ante un globo que simboliza su carácter universal y poder ilimitado. Va acompañada por Aristóteles, Platón, Séneca y Sócrates, por considerarse los más importantes filósofos de la antigüedad clásica.

En el friso tenemos el tema de «*La Escuela de Atenas*», donde se representan las dos tendencias más importantes en que se dividen los filósofos atenienses: los estoicos dirigidos por Cenón, que basaban sus principios en una moral austera y estricta, frente a los Académicos con Sócrates a la cabeza, que encontraban en la frase «*conócete a ti mismo*» su más alto ideal.

La bóveda se inicia con el «*Trivium*» o conjunto de las tres Artes Liberales relativas a la elocuencia: la Gramática, la Retórica y la Dialéctica.

2.2. La Gramática

Esta primera Arte Liberal aparece como una gran matrona, sentada sobre nubes y rodeada de niños que llevan cartillas y libros. Enseñan en sus manos una corona de laurel y unas *disciplinas* (látigo) como símbolos del premio y del castigo, por ser ésta la base del sistema educativo renacentista.

A los lados, bajo los lunetos con figuras de «*ignudis*» o jóvenes desnudos, hay cuatro célebres gramáticos: a la derecha Marco Terencio Varrón y Sexto Pomponio, y a la izquierda, Tiberio Donato y Antonio Nebrija.

En los frisos, debajo de la cornisa, puede verse «*La Construcción de la Torre de Babel*» por los hijos de Noé, representando el momento del nacimiento de la Gramática por la confusión de lenguas y diferenciación de idiomas.

2.3. La Retórica

El arte del buen decir aparece representado por una matrona de elegantes vestiduras que porta en una de sus manos el caduceo del dios Mercurio, símbolo de la elocuencia pagana. A su lado vemos un león que, según Sigéenza, significa que «con la fuerza del buen hablar se amansan los ánimos más feroces». En los lunetos encontramos, a la derecha, a dos grandes oradores griegos: Isócrates y Demóstenes; frente a ellos, creando un claro paralelismo, dos retóricos romanos: Cicerón y Quintiliano.

Los frisos contienen escenas relativas al poder de la palabra: Marco Tulio Cicerón ante el senado romano, defendiendo a Cayo Ralirio a quien acusaban del crimen de esa nación. El arco resaltado se aprovecha para representar a cuatro importantes poetas de la Antigüedad clásica: Homero y Píndaro de la tradición griega; Virgilio y Horacio del mundo latino.

2.4. La Dialéctica

El arte del Diálogo y la Discusión se simbolizan en una mujer que tiene los brazos extendidos, con su mano derecha abierta simbolizando la capacidad de exponer un supuesto, y su mano izquierda cerrada, significando la habilidad de poder resumir este mismo planteamiento de forma concisa. Sobre su cabeza podemos ver dos cuernos, o una media luna, que representan el dilema o argumento que parten de dos suposiciones opuestas para llegar a una misma conclusión.

En el friso, «*Zenón de Elea señalando a sus discípulos las puertas de la verdad y de la mentira*». Se muestra la historia de Zenón Eleates, estableciendo el criterio de los sentidos; para demostrárselo a sus discípulos se acerca a dos puertas en las que se lee *VERITAS*, *FALSITAS*. Está en actitud de tocarlas para demostrar que si la vista se ha engañado, el tacto desvanece la duda y pone de manifiesto la verdad.

Las restantes Artes Liberales se agrupan bajo el epígrafe de «*Quadrivium*» o ciencias relativas a la Matemática, y su estudio se inicia tras conseguir el dominio del «*Trivium*».

2.5. La Aritmética

Al igual que las anteriores Artes, está simbolizada por una matrona rodeada de niños, ante los cuales está calculando un problema, utilizando para su resolución los dedos de la mano. Representando a esta disciplina encontramos a Arquitas de Tarento y Boecio a nuestra derecha, y Jordán de Sajonia y Jenócrates Calcedonense en el lado opuesto.

Las escenas que aparecen en el friso son «*Salomón y la reina de Saba*». El sabio rey de Israel explica todos los enigmas y cálculos aritméticos que ha presentado la Reina de Saba. Sobre la mesa encontramos una tabla con números, una balanza y una vara de medir; y escritas en hebreo sobre las caídas del tapete que cubre la mesa, y como si fueran dichas por Salomón, las palabras del Salmo: «*Quoniam in número, pondere et mensura*», que significa: «Todo lo hizo el Señor con número, peso y medida».

En el lado opuesto, figuran grupos de antiguos *GIMNOSOFISTAS*, haciendo cálculos matemáticos en la arena llamados *MENSAN SOLIS*. Otros observan los números pares o impares de un triángulo que es comparado al alma racional, esperando poder comprender por aquel cálculo la naturaleza, potencias y afecciones del alma.

2.6. La Música

También era considerada parte de la matemática, ya que, según demostró el filósofo griego Pitarrosa, la base de los sonidos son los números. Está representada por una hermosa mujer, con un rostro que muestra serenidad y satisfacción y que toca un laúd de siete cuerdas, recordándonos a la musa de la Música Euterpe. Junto a ella un grupo de niños con instrumentos y partituras musicales, y un gran cisne, animal de Apolo, dios de la música, en actitud de cantar.

Bajo estas figuras tenemos la historia de David apaciguando con su arpa la cólera del rey Saúl. Y enfrente «*Orfeo y Eurídice*» representando el momento en que Orfeo con su lira, adormece al perro Cancerbero, guardián de los infiernos, para liberar a su amada Eurídice, que camina tras él, y que había sido robada por Plutón.

2.7. La Geometría

La parte más noble de las Matemáticas aparece representada por una circunspecta y ensimismada matrona, que mide con un compás una porción de picos desiguales, rodeada de niños con instrumentos matemáticos. Va acompañada en los lunetos por Arquímedes y Juan de Monterregio a la derecha, y Aristarco de Samos y Abdelariz Alcabicio a la izquierda.

En el friso, «*Los sacerdotes egipcios dividiendo las tierras*», operación que tenían que realizar cada vez que el río Nilo recuperaba su curso para así delimitar las lindes de cada propiedad y devolver a cada colono el terreno que le correspondía proporcionalmente. Los filósofos del antiguo Egipto, que eran también sacerdotes del país, utilizaban la geometría y métodos geométricos para medir las tierras que bordeaban el Nilo. El renacimiento consideró a Egipto como el gran depósito de sabiduría antigua. A la izquierda, «*Arquímedes muerto por los romanos*», ya que, al estar absorto y distraído en

la solución de un problema geométrico que tiene trazado en el suelo, ignora a los romanos que tras rendir la ciudad de Siracusa le quitan la vida. Junto al egipcio Herón de Alejandría, Arquímedes fue considerado como una de las figuras más prominentes de la antigüedad en el campo de la mecánica, la dióptrica y la neumática, ramas de la ciencia clasificadas como magias naturales, y por consiguiente menos sospechosas a otras formas de «magia».

2.8. La Astronomía

La última disciplina del *Quadrivium* se representa como una gran matrona sentada sobre un globo y sosteniendo en sus brazos una esfera celeste. En su mano derecha lleva un compás, aludiendo a la Geometría de la que se auxilia para realizar sus cálculos con objeto de determinar el movimiento de los astros. A su lado niños portando otros instrumentos de precisión y estudiando el curso de los astros. En los nichos tenemos, a la derecha, a Alfonso X el Sabio y Ptolomeo; y a la izquierda, a Euclides y a Juan Sacrobosco.

En los frisos situados bajo los lunetos encontramos a San Dionisio Areopajita y Apolofanes con el astrolabio observando el eclipse de sol el día de la muerte de Jesucristo. En el lado opuesto, el rey Ezequías, enfermo en cama, es visitado por el profeta Isaiás, anunciándole que el Señor le concede quince años más de vida, y como prueba de ello le hace ver el retroceso del cuadrante solar.

2.9. La Teología

El programa iconográfico de la bóveda termina con la alegoría de la Teología, por ser ciencia suprema de la revelación. Aparece representada como una mujer joven y agraciada, ya que no admite corrupción ni vejez, bajo un templo que simboliza la Iglesia donde ella tiene su trono y cátedra. Sobre su cabeza, sostenida por una aureola de resplandores, aparece una corona, símbolo de su superioridad y realeza. En sus manos tiene la Biblia que muestra a los cuatro doctores de la Iglesia latina: San Jerónimo, San Ambrosio, San Gregorio Magno y San Agustín.

En el friso aparece «El Concilio de Nicea», celebrado en esta ciudad griega en el año 325. En este Concilio Ecuménico presidido por el legado papal Osio de Córdoba y celebrado en presencia del emperador Constantino, se condenó la doctrina de Arrio que negaba la consubstancialidad del Padre y del Hijo, se declararon artículos de la Fe, base de la Teología Cristiana, y se proclamó y fijó la oración del Credo como profesión de fe de los cristianos.

3. Presencia de las Matemáticas en la Biblioteca

La Biblioteca fue establecida por Felipe II en 1575 con la base de 4.000 volúmenes de su biblioteca particular, encomendándose su custodia a los Padres Jerónimos. Los fondos se vieron aumentados por las aportaciones de bibliotecas particulares como las de Don Diego de Mendoza, Ponce de León, Zurita, Paéz de Castro, Arias Montano y otros, y con la adquisición de la famosa biblioteca árabe de Muley Zidán.

En 1854 fue disuelta la comunidad de Jerónimos, estableciéndose una Corporación de Capellanes Reales en 1859 que fueron los nuevos encargados de la Biblioteca hasta la cesión del Monasterio a los Padres Escolapios en 1872. Y desde 1885, los fondos se encuentran bajo la custodia de los Reverendos Padres Agustinos.

La Biblioteca fue pasto de las llamas en 1671, acabando con más de 4.000 manuscritos y muchos impresos que eran ejemplares únicos. Sufrió el saqueo de las huestes de Napoleón en 1809, desapareciendo libros de gran valor; y a pesar de estos avatares, cuenta hoy con unos 40.000 impresos y cerca de 5.000 manuscritos.

De los fondos dedicados a las Matemáticas, Sánchez Pérez (1929) referenció 934 impresos, 106 manuscritos latinos o castellanos, 130 manuscritos árabes y 58 manuscritos griegos. Nosotros vamos a dar cuenta de una pequeña muestra con los autores que nos han parecido más significativos por sus aportaciones a la matemática.

Para empezar, hablaremos de uno de los mayores genios investigadores de la Historia: **Arquímedes** (287-212 a. de J.C.). En la Biblioteca se conservan traducciones y comentarios a sus obras de **Eutocio** y **Federico Commandino** de un valor extraordinario, destacando las traducciones de los siguientes tratados: *De sphaera et cilindro*, *Circuli dimensio*, *De conoidibus et sphaeroidibus figuris*, *De lineis spiralibus*, *De aequo-ponderantibus vel centra gravitatis planorum*, *De quadratura parabola* y *De Harenae numero*.

Existen numerosos manuscritos árabes entre los que destacamos las obras de **Abdala Abenjalil Benyusuf el Mardiní**, más conocido como **Gemaleddin**, autor muerto al comenzar el siglo XV, y de las que se conservan su *Cuadrante astronómico*, estructurado en XX capítulos y su *Libro de Aritmética*. También son dignos de señalar por su originalidad las obras de **Abdelaziz Benabichamia (Abulfadl)** con su obra *Carmen de Aritmética*, y a **Abdala Abenmohamed Benhachach (Benelyasmin)** que vivió en la última mitad del siglo XII, con su *Poema de Reglas de Aritmética*. Los títulos «Carmen» y «Poema» hacen referencia a trabajos breves y elementales puestos en verso.

Otro autor importantísimo fue **Chéber Beneflah el Ixbilí (Abumohamed)**. Conocemos su obra *Elementos astronómicos*, a través de una traducción latina que hizo Gerardo de Cremona editada en 1534: *Gebri filii Affla hispalensis astronomi vetustissimi pariter et peritissimi, libri IX de Astronomia ante aliquot secula Arabice scripti, et per Giriardum Cremonensem latinitate donati, nunc vero omnium primum in lucem editi*. Esta es una obra de gran valor histórico que va precedida de un tratado de Trigonometría, en el que critica mucho los métodos complicados de Ptolomeo y Menelao, demos-

trando varias fórmulas de modo original, dos de ellas muy importantes históricamente, pues eran desconocidas por Ptolomeo, Albateno y Benyunus; la primera de estas fórmulas es la que hoy se conoce con el nombre de teorema de Chéber: $\cos B = \cos b \sin C$,

aplicada a los triángulos esféricos rectángulos; la segunda es $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$

que se deduce fácilmente de las fórmulas de Ptolomeo, pero que fue Chéber quien la dedujo.

De Savasorda la biblioteca dispone de su *Liber Embadorum* y la *Astronomia Sahera Mundi*.

En representación del siglo XIII, hemos recogido la *Arithmeticae* de Anicio Manlio Torcuato Severino (Boecio), senador romano que vivió entre el 470 y 526, y cuya obra de dos libros se recoge en un manuscrito de un Códice en pergamino del siglo XIII. Representativo de este siglo fue también Jordano Nemorario, fundador de la Mecánica, cuya obra aparece ampliamente representada: *Opuscula varia, Liber de Ponderibus, Theorica Planetarum, Numeris Datis, Arithmetica Decem, o su Libri Demonstrationes*.

Del siglo XIV destacaremos la *Geometria* de Thomas Bradwardino y dos obras de Alberto de Sajonia: *Questiones subtilissime in libro de celo et mundi* y su *Tractatus Proportionum*.

El siglo XV aparece ampliamente representado con autores como Juan Regiomontano, divulgador de las Matemáticas en este siglo, del que se encuentran en la Biblioteca las siguientes obras: *Almagesto*, *De Triangulis Omnimodis* y la *Tabulae Primi Mobilis*. Nicolás de Cusa, *De Quadratura Circuli*. Y Luca Pacioli, con el que se da paso a otra época de las Matemáticas. De este autor se conserva su *Summa* en la que aparecen magníficos dibujos de Leonardo Da Vinci, y *De Divina proportionem*.

En el siglo XVI encontramos figuras como Pedro Apiano de cuya obra destacamos *Astronomicum Caesarum*, dedicada a Carlos V y editada en latín en 1540. En su interior podemos ver numerosas láminas en colores y articuladas, resultando verdaderos instrumentos astronómicos. En *Instrumentum sinuum, seu primi mobilis*, trata el uso, construcción y explicación del Cuadrante Universal y presenta unas tablas de senos de minuto en minuto desde 0 a 90 grados.

Junto a este autor aparecen otros igualmente importantes como Copérnico y su *Revolutionibus*, Alberto Durero con su obra *Institutionem Geometricarum* y Nicola Tartaglia que estudia el movimiento y la caída de los cuerpos. De este autor destacamos las obras siguientes: *General Trattato, División de las Figuras e Inventionem Novamente Trovata...*

El siglo XVI fue especialmente brillante para las Matemáticas en España, ya que aparecieron grandes figuras cuyo trabajo fue reconocido en el resto de Europa. Los que citaremos a continuación son sólo una pequeña muestra de todos ellos.

Juan Pérez de Moya, nacido en Jaén en 1512, enseñó Matemáticas en Salamanca y Madrid, siendo considerado por los historiadores de la Matemática como uno de los más

insignes matemáticos españoles del siglo XVI. De su obra destacamos el *Tratado de Mathematicas* que se divide en nueve libros. El primero expone la numeración y las cuatro operaciones elementales con números enteros, progresiones e interés simple. El segundo trata de los números fraccionarios y sus operaciones, completándose con problemas del tipo: hallar tres números cuadrados cuya suma sea también un número cuadrado. El tercer libro trata de «la regla de tres y compañías y testamentos o partijas, y finezas de oro, y otras cosas tocantes al arte que dicen menor». El libro cuarto lo dedica a la Geometría elemental. Los siguientes libros los dedica a la Artimética especulativa; parte de la Aritmética tradicional haciendo una magnífica recopilación; como capricho aritmético explica el juego de la «Ritmimachia pitagórica», que es una especie de ajedrez con números.

De Gaspar de Texeda hemos seleccionado la *Suma De Arithmetica practica y de todas mercaderias con la horden de contadores*, editado en Valladolid en 1546. Se trata de un libro muy curioso en el que explica la numeración en la cuenta castellana y en guarismos; utiliza la U prolongada para indicar los millares, y la abreviatura q^os para separar los cuentos o millones. Para la multiplicación expone los siguientes métodos operatorios: «por berricolo, castellucio, cruzeta, cuadrilatero, graticola, por capa o a la francesa y el usado por Texeda». Trata el cálculo de la raíz cuadrada de los números enteros, que obtiene por el método antiguo de la torre de números sobre el radicando, y hace la prueba por 7 y por 9. Da el método de hallar la raíz propinquisima, es decir, con aproximación, y lo aplica a las raíces cuadradas de 5, 7, 8, 9, 10, 13 y 29, y explica la regla para hallar la raíz cúbica.

Julio César Firrufino desarrolló su actividad en la primera mitad del siglo XVII, siendo catedrático en la Academia de Matemáticas de Madrid. En su obra *El perfecto artillero. Theorica y practica*, dedica una pequeña parte a exponer la regla para la extracción de raíces cuadradas, de la que dice Sánchez Pérez (1929) «...es más clara que la que dan todos los matemáticos anteriores a él». La regla, con un ejemplo, es la siguiente:

«Entendido que cosa sea raíz cuadrada, daremos una regla de muy pocos sabida, para que de qualquiera numero que nos propusieren, le demos, o saquemos su raíz». El ejemplo es la raíz de 524176; señala con puntos las cifras 2, 1 y 6, ya que «... los tres puntos nos dan a entender, que tantas letras ha de tener el numero que fuese raíz del numero de que al presente la sacamos». En las raíces inexactas advierte que «la sobra nunca puede ser tanta, que se iguale al duplo de la raíz y mas la unidad, porque si lo fuere, es argumento, que la raíz ha de ser menor».

Para finalizar, hablaremos de Juan de Herrera, de quien ya dijimos que no había dejado ninguna obra de Matemáticas escrita. Sin embargo, existe un manuscrito con el título *Discurso del Sr. Juan de Herrera, aposentador mayor de S. M., sobre la figura cúbica*, en el que hace un estudio al estilo luliano, del hexaedro desde el punto de vista filosófico y matemático.

Como último dato a destacar, diremos que entre todos estos ilustres hombres matemáticos, hubo una mujer que mereció figurar entre las más nobles mentes de la ciencia española. Nos referimos a **Sor María de Jesús de Agreda**, que vivió entre 1602 y 1665. De su obra se conserva en la Biblioteca, el *Tratado de la mapa y discrezion vrebbe de los orbes zelestiales; elemtales desde el zielo Impirio asta el zentro de la Tierra, y el Tratado de la redondez de la Tierra y de los Abitadores de ella y lo que en si contiene*, esta última, un manuscrito en letra del siglo XVII, presenta un interesante tratamiento de los datos astronómicos sobre distancias del Sol y los planetas a la Tierra.

Bibliografía

- SÁNCHEZ PÉREZ, J. A. (1929). *Las matemáticas en la Biblioteca de El Escorial*. Memorias. Real Academia de Ciencias. Serie 2. Tomo VII. Madrid.
- REY PASTOR, J. (1926). *Los Matemáticos españoles del siglo XVI*. Madrid: Biblioteca Scentia.
- PASCUAL VICENTE, J.A. (1991). Presencia de la Matemática en el Monasterio de «El Escorial». *Seminario de historia de la Matemática*. Madrid: Facultad de Ciencias Matemáticas de la U.C.M. AA.VV. (1995). *Historia del Arte Español*, Tomo VI, *La España Imperial. Renacimiento y Humanismo*. Barcelona: Lunverg-Planeta.
- SAINZ DE ROBLES, F.C. (1966). *Crónica y Guía de la provincia de Madrid*. Madrid: Espasa Calpe.

Notas

- [1] PASCUAL, J.A. (1991). *Presencia de la matemática en el Monasterio de «El Escorial»*. En *Seminario de Historia de la Matemática*. Universidad Complutense. Madrid.
- [2] SAINZ DE ROBLES, F.C. (1966). *Crónica y Guía de la provincia de Madrid*. Espasa Calpe. Madrid, p. 570.

Divisores de un número grande

Fernando Lisón Martín

C.P. Lope de Vega de Parla (Madrid)

Abstract

The objective of this article is to present two efficient methods in order to determine the whole of divisors of a natural number. The first method is based on the definition of divisor, while the second one (less intuitive but very much fast for big numbers), is based on the fact that all divisors of a number are able to get multiplying by certain divisors that we call «primary divisors».

0. Introducción

A raíz de la aparición en [3] de un comentario sobre los números «amigos entre sí», me pareció oportuno utilizar algunas parejas de estos números para motivar a los alumnos en los procesos de aprendizaje de los conceptos propios de la divisibilidad, en los primeros cursos de la E.S.O.

Para ello, me dispuse a elaborar en WIN-LOGO un programa que nos facilitara los primeros números «amigos entre sí». La estrategia era sencilla:

1. Obtener la suma, S_1 , de divisores de un número N .
2. Obtener la suma, S_2 , de divisores del número S_1 .
3. Si $S_2 = N$, imprimir en pantalla S_1 y $S_2 = N$.
4. Comprobar el siguiente número.

El objetivo del presente artículo es presentar dos algoritmos capaces de determinar el conjunto de divisores de un número. El primero de ellos se basa en la definición de divisor, mientras que el segundo (menos intuitivo pero muchísimo más rápido con números grandes), se basa en el hecho de que todos los divisores de un número se pueden obtener multiplicando entre sí los elementos de ciertos conjuntos de divisores que llamaremos «divisores primarios».

1. Divisores de un número

Comencemos recordando algunas definiciones y resultados bien conocidos, de los que haremos uso.

Definición 1

En el conjunto de los números naturales, decimos que el número a es divisor del número b (escribimos $a|b$), si existe un cierto número natural h , tal que $a \cdot h = b$.

Observación 1

Si $a|b$ y h es tal que $a \cdot h = b$, entonces $h|b$.

Teorema 1

La relación «ser divisor» en el conjunto de los números naturales, es una relación de orden parcial.

2. Conjunto de divisores de un número

Encontrar el conjunto formado por todos los números naturales que son divisores de un número natural dado, n , es un problema trivial: para cada número natural $a \leq n$, se efectúa la división n/a , si esta división es exacta, a es divisor de n , y no lo es en caso contrario.

El procedimiento descrito requiere dos mejoras urgentes:

- Si no contamos al propio n , su último divisor no puede ser mayor que $n/2$ (según la observación 1), lo que permite economizar la mitad de las divisiones.
- Si el número n no es par, entonces, por la propiedad transitiva, ningún múltiplo de 2 puede ser divisor de n , por lo que, en este caso, los candidatos a divisores de n sólo hay que buscarlos entre los números impares.

3. Algoritmo 1

A pesar de las mejoras descritas en el apartado anterior, este procedimiento, que llamaremos **algoritmo 1**, es extremadamente penoso para números grandes, aún confiando en la velocidad de cálculo de los más modernos ordenadores.

Una posible implementación en WIN-LOGO del algoritmo 1 es la siguiente:

```
Para divi1 :num
haz «listadiv []
divi0 1 :num
Fin
```

```
Para divi0 :a :num
Si :a > (:num/2) + 1 [Dev fr :listadiv :num]
Si Resto :num :a = 0 [haz «listadiv fr :listadiv :a]
Si Resto :num 2 = 0 [divi0 :a + 1 :num] [divi0 :a + 2 :num]
Fin
```

4. Divisores primarios

Utilizando la propiedad reflexiva y la observación 1, se concluye que, excepto el 1, todo número natural n tiene al menos dos divisores: 1 y n .

Definición 2

Decimos que un número natural es un número primo cuando tiene sólo dos divisores.

Observación 2

Si un número natural n no tiene ningún divisor primo menor o igual que su raíz cuadrada, entonces es primo, puesto que si tuviese un divisor $d > \sqrt{n}$, sería $n = d \cdot h$ y entonces $h \leq \sqrt{n}$.

Teorema 2

Cualquier número natural se puede expresar como producto de números primos de forma única.

Teorema 3

Si $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_n^{a_n}$ es una factorización prima de n , entonces:

- Todos los productos $p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_n^{b_n}$ con $b_i \leq a_i$ son divisores de n . Resulta obvio aplicando la propiedad transitiva.

ii) Todos los divisores de n son de la forma:

$$p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_n^{b_n} \text{ con } b_i \leq a_i$$

Observación 3

Si la descomposición prima de n es:

$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m}$, se establecen los siguientes conjuntos, que llamaremos subconjuntos de divisores primarios de n :

$$c_1 = \{p_1^0, p_1^1, p_1^2, \dots, p_1^{a_1}\}$$

$$c_2 = \{p_2^0, p_2^1, p_2^2, \dots, p_2^{a_2}\}$$

$$\dots$$

$$c_m = \{p_m^0, p_m^1, p_m^2, \dots, p_m^{a_m}\}$$

Entonces, como caso particular del teorema 3, todos los divisores de n resultan de realizar todas las multiplicaciones de m factores, en las que el primer factor pertenece a C_1 , el segundo a C_2 , y sucesivamente, el m -ésimo a C_m .

5. El algoritmo 2

Basándose en la observación 3, el algoritmo 2, que estableceremos a continuación, seguirá los siguientes pasos:

1. Establecerá el conjunto de divisores primarios del número en forma de lista de sublistas: $[[C_1] [C_2] \dots [C_m]]$, si bien, eliminando las unidades para evitar elementos repetidos (procedimientos **divi1**, **divi2**, **divprimos**, **dprimos** y **terminar**). Además generará los números primos que necesite (procedimientos **hazprimos-hasta** y **primon**).
2. Efectuará todos los productos descritos en la observación 3, procediendo como se indica (procedimientos **multi.v**, **multi.2** y **multi.1**):

$$[[C_1] [C_2] \dots [C_m]]$$

$$[[C_1, C_2, C_1 \times C_2] \dots [C_m]]$$

$$[[C_1, C_2, C_1 \times C_2, \dots, C_m, C_1 \times C_m, C_2 \times C_m, C_1 \times C_2 \times C_m, \dots, C_1 \times C_2 \times \dots \times C_m]]$$

3. El tercer paso será la ordenación de la caótica lista que se obtiene en el punto anterior (procedimientos **ordena** y **menor**).

```
Para multi.1 :num :lista
Si Vacío? :lista [dev :num]
Dev Fr :num * Pri :lista multi.1 :num MP :lista
Fin
```

```
Para ordena :lista
Si Vacío? :lista [dev []]
Haz «meno menor :lista
Dev Fr :meno ordena Elimina :meno :lista
Fin
```

```
Para menor :lista
Si Cuenta :lista = 1 [dev pri :lista]
Si Pri :lista < Pri MP :lista [dev menor fr pri :lista mp mp :lista]
Dev menor MP :lista
Fin
```

6. Comparación de los dos algoritmos

La Tabla 1 recoge los tiempos reales, en segundos, invertidos por cada uno de los algoritmos para establecer en la pantalla los conjuntos de divisores de todos los números comprendidos en los intervalos indicados.

TABLA 1

Intervalo	Algoritmo 1	Algoritmo 2
2-250	80.08	144.68
251-500	196.3	190.92
501-750	311.87	214.43
751-1000	427.05	230.8
1001-1250	539.59	244.2
1251-1500	654.16	255.74
1501-1750	768.4	263.64
1751-2000	882.98	274.46

Como se aprecia, el algoritmo 1 es más rápido que el 2 para números pequeños, pero la tendencia se invierte a favor del algoritmo 2 en cuanto que el número a tratar es mayor que 300. Se observa también que, mientras que los tiempos que emplea el algoritmo 1 en los sucesivos intervalos aumentan muy rápidamente, de forma casi lineal, los tiempos empleados por el algoritmo 2 aumentan de una forma mucho más suave.

```
Para divi1 :num
Dev ordena divi2 :num
Fin
```

```
Para divi2 :num
Dev PP 1 multi.v divprimos :num
Fin
```

```
Para divprimos :num
Haz «listadp [[]]
Haz «cont 0
dprimos :num :listaprimos
Dev :listadp
Fin
```

```
Para dprimos :num :listap
Si Vacío? :listap [dprimos :num hazprimoshasta (rc :num) + 20 ul :listaprimos alto]
Si Y (Pri :listap) > (RC :num) :cont = 0 [terminar alto]
Si No Resto :num Pri :listap = 0 [haz «cont 0 si no vacío? ul :listadp [haz «listadp
pu [] :listadp dprimos :num mp :listap alto] [dprimos :num mp :listap alto]]
Haz «cont :cont + 1
Si Cuenta :listadp > 1 [haz «listadp fr mu :listadp (lista pu
potencia pri :listap :cont ul :listadp)] [haz «listadp (lista pu
potencia pri :listap :cont ul :listadp)]
dprimos :num/Pri :listap :listap
Fin
```

```
Para terminar
Si :num = 1 [si vacío? ul :listadp [haz «listadp mu :listadp alto]
[alto]]
Si Vacío? Ul :listadp [haz «listadp pu (lista :num) mu :listadp]
[haz «listadp pu (lista :num) :listadp]
Fin
```

```
Para hazprimoshasta :lim :primo
Si :primo > :lim [dev :listaprimos]
Si primon :primo + 2 :listaprimos [haz «listaprimos fr
:listaprimos :primo + 2]
Dev hazprimoshasta :lim :primo + 2
Fin
```

```
Para primon :num :lista
Si Pri :lista > RC :num [dev «CIERTO]
Si Resto :num Pri :lista = 0 [dev «FALSO]
primon :num MP :lista
Fin
```

```
Para multi.v :lista
Si Cuenta :lista = 1 [dev pri :lista]
Dev multi.v (Fr (Lista multi.2 Pri :lista Pri MP :lista) MP MP :lista))
Fin
```

```
Para multi.2 :lista1 :lista2
Si Vacío? :lista1 [dev :lista2]
Dev (Fr multi.1 Pri :lista1 :lista2 multi.2 MP :lista1 :lista2)
Fin
```

7. Gestión eficaz de los números primos y presentación en pantalla

Los procedimientos que se listan a continuación permiten una visualización en pantalla más elegante y hacen que el programa sea totalmente transparente para el usuario, que sólomente deberá ponerlo en marcha escribiendo: DIVISORES (y pulsando la tecla INTRO).

Además estos procedimientos gestionan de manera eficaz la lista de números primos que el programa conoce:

1. Al arrancar divisores por vez primera, se genera una lista de divisores primos formada por los números 2 y 3.
2. Durante la ejecución, como ya se vio, el procedimiento **dprimos** solicita de **hazprimoshasta** los números primos que va necesitando para poder factorizar el número.
3. Al salir de divisores la nueva lista de números primos se almacena en un archivo llamado LISTA.LOG (en el directorio actual), y será la lista utilizada en las sesiones siguientes.

Para divisores
 PonTítulo «TEXTOS «Divisores
 LimpiaVentana «TEXTOS
 MV «TEXTOS
 Si No Var? «listaprimos [Si No Archivo? «LISTA.LOG [haz «listapri
 mos [2 3] [carga «lista]]
 PonProp «listaprimos «VARGRUPO «listas
 divisores2
 PonCursor Fr 20 (Ul Cursor) + 3
 Teclea [¿Repetimos?]
 Haz «resp LC
 Si O :resp = «s :resp = «S [divisores alto]
 BoArchivo «lista.log
 Guarda «lista «listas
 Fin

Para divisores2
 PonCursor [2 1]
 (Teclea [Escribe el número y pulsa INTRO:] Car 255)
 Haz «resp LP
 Si No Número? :resp [novale]
 Haz «resp Abs Entero :resp
 Si :resp = 1 [novale]
 PonCursor [10 3]
 (Es [Entrada válida:] :resp)
 PonCursor [2 6] Teclea [Espera, por favor.]
 Haz «a Reloj
 Haz «list divi1 :resp
 Haz «b Reloj
 PonCursor [2 6] borron 20
 PonCursor [2 6]
 (Teclea [Div () :resp ()] = {})
 divisores3 :list
 PonCursor Fr 40 (Ul Cursor) + 2
 (Es [He tardado:] (:b - :a)/100 [segundos])
 Fin

Para novale
 PonLT 0
 PonCursor [33 1] borron 40
 PonCursor [10 3]

Es [Entrada no válida]
 divisores2
 Fin

Para borron :t
 Repite :t [teclea car 255]
 Fin

Para divisores3 :lista
 Si Vacío? :lista [teclea «} alto]
 Si (Pri Cursor) + (Cuenta Pri :lista) > 70 [poncursor fr 15 (ul cursor) + 1]
 Si Cuenta :lista = 1 [teclea pri :lista] [(teclea pri :lista «, car 255)]
 divisores3 MP :lista
 Fin

La importancia de esta gestión se pone de manifiesto en la Tabla 2, en la cual se comparan los tiempos reales, en segundos, que necesita el algoritmo 2 para escribir la lista de divisores de los números expresados (obtenidos al azar) en dos situaciones distintas: en la primera (columna A), el programa comienza conociendo sólo los números primos 2 y 3; en la segunda (columna B), el programa comienza conociendo previamente todos los números primos que va a necesitar.

TABLA 2

Número	A	B
153 292	1.92	1.05
527 313	2.75	0.83
2 923 902	3.74	1.92
48 275 436	24.77	13.73

8. Una aplicación: números amigos entre sí

Aunque obtener de una forma eficiente la lista de divisores de un número grande es suficientemente gratificante, se ofrece a continuación el listado de procedimientos que permiten identificar parejas de números amigos entre sí, para dar respuesta a la inquietud planteada en la introducción de este artículo.

Además de los procedimientos siguientes, se utilizan también los propios del algoritmo 2, excepto: **divi1**, **ordena** y **menor**, ya que es innecesario ordenar una lista de

números que van a ser sumados entre sí (propiedades conmutativa y asociativa). Los procedimientos **amigos** y **amigos2**, establecen la presentación en pantalla, mientras que los procedimientos **amigo** y **sumar** se encargan de los cálculos.

El proceso determina también los números perfectos (aquellos en los que la suma de sus divisores propios es igual al mismo número), y que nosotros llamaremos «números egoístas», porque son amigos de sí mismos (6, 28, 96,...).

Por último, se hace notar que después de obtener la suma de los divisores propios del número, sólo se continúa si el número es abundante o egoísta (la suma de los divisores propios del número es mayor o igual que el propio número).

```
Para amigos
PonTítulo «TEXTOS «Amigos
LimpiaVentana «TEXTOS
MV «TEXTOS
Si No (Var? «listaprimos) [si archivo? «lista.log [carga «lista]
[haz «listaprimos [2 3]]]
PonProp «listaprimos «VARGRUPO «listas
amigos2
BoArchivo «lista.log
Guarda «lista «listas
Fin
```

```
Para amigos2
PonCursor [2 1]
(Teclea [¿Por qué número empezamos?] Car 255)
Haz «resp LP
Si No Número? :resp [novale]
Haz «resp Abs Entero :resp
Si :resp = 1 [novale]
PonCursor [10 3]
(Es [Entrada válida:] :resp)
PonCursor [2 6]
(Teclea [¿Cada cuántos números informo?] Car 255)
Haz «resp2 LP
Si No Número? :resp2 [novale]
Haz «resp Abs Entero :resp
LV «TEXTOS
amigo :resp :resp2
Fin
```

```
Para amigo :a :b
si tecla? [alto]
Si Resto :a :b = 0 [ (es [ * * * * ] :a [ * * * * ])]
Haz «s1 (sumar divi2 :a) - :a
Si :s1 < :a [amigo :a + 1 :b alto]
Haz «s2 (sumar divi2 :s1) - :s1
Si :s2 = :a [ (es :a «y :s1 [son amigos entre sí]]
amigo :a + 1 :b
Fin
```

```
Para sumar :lista
Si Cuenta :lista = 2 [dev (pri :lista) + (ul :lista)]
Dev (Pri :lista) + sumar MP :lista
Fin
```

Algunos de los primeros números «egoístas» son: 6, 28, 496, 8128.... Algunas parejas de números «amigos entre sí» son: 220 y 284, 1184 y 1210, 2620 y 2924, 5020 y 5564, 6232 y 6368,...

Bibliografía

- [1] ROANES, M. y ROANES, L.: *Matemáticas con ordenador*. Síntesis. 1988.
- [2] RODRÍGUEZ ROSELLÓ: *De la tortuga a la inteligencia artificial*. Vector. 1986.
- [3] SÁNCHEZ BENITO: *La expresión oral y escrita en las Matemáticas de la Educación Secundaria Obligatoria: Una experiencia de trabajo en el aula*. Revista SUMA, núm. 16. 1994.

Reseña de libros

JOHN D. BARROW: *La trama oculta del Universo. (Contar, pensar, existir)*. Colección Drakontos. Crítica (Grijalbo Mondadori) Barcelona, 1966. 340 páginas

El deleite que me ha producido la lectura esta obra me lleva a escribir esta reseña, para que nuestros socios no se vean privados del placer de su lectura por simple desconocimiento de su existencia.

El extraño título de la versión española se adoptó ante la imposibilidad de verter al castellano el juego de palabras que encerraba el título original «*Pi in the sky*», cuya pronunciación es similar a la de «pie in the sky» (un pastel en el cielo, que en castellano equivale a «castillos en el aire»).

Su autor era ya conocido, especialmente por su libro «*Teorías del Todo (Hacia una explicación fundamental del Universo)*» publicado hace dos años en la misma colección.

Precisamente el último capítulo de éste llevaba el título «¿Está 'pi' realmente en el cielo?» y el libro que comentamos hoy puede considerarse como un desarrollo de los problemas planteados en él.

Se trata de un libro sobre las Matemáticas, sobre su creación o descubrimiento por parte de los matemáticos y sobre «la irrazonable efectividad de las Matemáticas» para la comprensión del mundo físico. Aborda los problemas más profundos de la Filosofía de las Matemáticas, que han conducido a planteamientos tan dispares como irreconciliables.

Ilustra estos temas con apasionantes relatos que nos muestran la historia de la evolución de las ideas sobre la naturaleza de las Matemáticas, con especial referencia a los papeles desempeñados por Cantor, Kronecker, Hilbert, Brouwer, Russel y Gödel, así como el singular caso de Ramanujan.

El libro dedica un extenso capítulo, muy documentado, a la historia de la operación de contar, y a la de los distintos sistemas de numeración, persiguiendo el momento histórico en que unas y otras civilizaciones llegan a establecer el concepto de número, desligado de los objetos a cuyas colecciones se aplica.

A lo largo del libro, siempre está presente el problema de la existencia o no de los «cielos platónicos», en especial referencia al mundo platónico de las matemáticas y el último capítulo está explícitamente dedicado a este tema. Se estudian críticamente las últimas aportaciones a este problema procedentes de los trabajos de Gödel, Turing y de Roger Penrose. El autor, no se muestra muy conforme con las tesis de este último, expuestas en su libro «*La Nueva Mente del Emperador*» (de lectura tan grata como imprescindible, a mi entender), que son decididamente neo-platónicas. El libro está enriquecido con una divertida colección de citas de la más diversa procedencia, que se insertan precediendo a cada párrafo.

J.F.B.

LEO H. KLINGEN: *Atlas Mathematischer Bilder*, Addison-Wesley, Bonn, 1996, 224 páginas y un disquete HD de 3.5'.

En este libro se muestra de modo brillante como los Sistemas de Cómputo Algebraico pueden ser usados para ilustrar de modo intuitivo conceptos matemáticos muy diversos, a través de imagen visual dinámica.

El libro es presentado en 12 capítulos cuyos títulos, muy diversos, que hacen pensar en los temas tan variados a que hoy son aplicables estas técnicas: Matemática Elemental, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Geometría, Análisis numérico, Teoría de números, Fractales, Teoría de Funciones, Resolución de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones Técnicas, Geometría Diferencial en dimensión dos y en dimensión tres.

El autor exhibe una acertada elección de conceptos, ejemplos, problemas y ejercicios a los que aplicar estas técnicas. Los temas considerados son muy variados:

- a) *de cálculo diferencial e integral*: representación de funciones en coordenadas cartesianas, paramétricas y polares, desarrollos de Taylor, desarrollos en serie de Fourier, aplicaciones físicas, sumas de Riemann, cálculo de áreas y volúmenes por integración, función gamma,...
- b) *geométricos*: construcciones, transformaciones euclídeas, equiformes, afines y proyectivas, configuraciones geométricas clásicas, teoremas de Desargues, Pappus, Pascal, Brianchon, Feuerbach, Morley,..., cuádras, perspectiva caballera, políedros regulares,...
- c) *de aproximación*: cálculo de raíces por bisección, método de Newton, regla falsi y teoremas de punto fijo, interpolación por método de Lagrange y por splines,...
- d) *de teoría de números*: algoritmos de divisibilidad con interpretación gráfica, expresiones irracionales y trascendentes,...
- e) *de funciones de variable compleja*: representación gráfica de varias funciones usuales y su relación con las transformaciones geométricas;
- f) *de ecuaciones diferenciales*: métodos de resolución, funciones de Bessel, transformada de Laplace, aplicaciones físicas;
- g) *de geometría diferencial elemental*: representación de evolutas y evolventes.

Los Sistemas de Cómputo Algebraico utilizados por el autor son DERIVE y Maple V. El primero lo usa en la mayoría de los ejemplos más sencillos, por su mayor difusión a nivel de enseñanza media. El segundo lo emplea cuando el problema exige mayor potencia de cálculo.

La presentación es excelente, utilizando color en aquellas figuras en que la policromía ayuda a su interpretación.

En principio el libro se ha editado en alemán, pero su calidad augura una pronta traducción, al menos al inglés.

E. Roanes

Reseña de Congresos

CELEBRACION EN SEVILLA DEL 8º I.C.M.E.

Durante los días 14 a 21 de julio pasado se celebró en Sevilla el 8º I.C.M.E. (Congreso Internacional para la Enseñanza de las Matemáticas) con asistencia de cerca de cuatro mil congresistas y jornadas intensivas de trabajo desde primera hora de la mañana.

La simple enunciación de las secciones de que constaba el Congreso, aparte las sesiones de apertura y clausura, da idea de su amplitud:

- Cuatro conferencias plenarias, una de ellas a cargo del Prof. Miguel de Guzmán, actual Presidente del ICMI, sobre «El papel del Matemático en la Educación Matemática».
- Ochenta conferencias sobre distintos aspectos de la enseñanza de las Matemáticas, muchas de ellas seguidas de interesantes coloquios. Los Profs. españoles Balbuena, Fortuny, Luelmo, Pérez Fernández, Puig, Rico, J. Vicente Córdoba, fueron algunos de los ponentes.
- Veintiséis grupos de trabajo, en los que se discutió durante cuatro sesiones sobre otros tantos temas relativos a la enseñanza de las Matemáticas.
- Veintiséis Grupos Temáticos, que describieron la situación actual de temas generales.
- Se presentaron cerca de ochocientas comunicaciones breves, preseleccionadas por un Comité dirigido por el Prof. Ricardo Luengo, actual Presidente de nuestra Federación. Esa misma Federación organizó y mantuvo ocho actividades permanentes, entre las que, a nuestro juicio, resultó especialmente interesante la Exposición de Libros Antiguos de Matemáticas, no solamente por la extraordinaria importancia bibliográfica del material presentado, sino también por su magnífica situación. Todo ello corrió a cargo del Profesor Mariano Martínez (U. Complutense), asiduo colaborador en nuestro Boletín.

Varios países presentaron y comentaron los aspectos principales de su organización de la enseñanza de las Matemáticas. Por parte de España, como país anfitrión, se organizó una Mesa Redonda especial con el título de «Matemáticos españoles del siglo XX» en la que, con la coordinación organizativa de nuestro Tesorero, Prof. Aizpún, fueron glosadas las obras y figuras de los Profs. Zoel García de Galdeano, Rey Pastor, Puig Adam y Santaló, realizadas, respectivamente por los Profs. Mariano Hormigón (U. de Zaragoza), Luis Español (U. de la Rioja), Mariano Martínez (U. Complutense) y J.L. Vicente Córdoba (U. de Sevilla).

Descripción de Proyectos (como el presentado por la U. de Granada bajo la dirección del Prof. Luis Rico), talleres, otras exposiciones (de material didáctico, sobre unidades de medida, Escultura, Fotografía, Textos, etc.) completaron las actividades abiertas a todos los congresistas y muchas Organizaciones aprovecharon las fechas del Congreso para celebrar reuniones internacionales (ICMI, CIBEM, editores de revistas, competiciones y otras).

Toda esa actividad continua tuvo una organización perfecta. Horarios, salas, medios audiovisuales, coloquios, intervinientes, tiempos de descanso, etc., se presentaron tal y como estaban programados y anunciados, sin un solo fallo. Por eso resulta muy grato felicitar desde aquí a los Comités organizadores, especialmente al comité local, presidido por el Profesor Antonio Pérez Jiménez.

Y sin embargo, a pesar de la perfecta organización, a pesar de la extensa oferta de trabajo e información, el desarrollo del Congreso estuvo rodeado de tristeza, producida por la forzosa ausencia del Presidente del Comité Nacional y primer Presidente de la Federación, Prof. Gonzalo Sánchez Vázquez, quien venía trabajando con toda su ilusión desde hace más de diez años para que un ICME se celebrara en un país de habla hispana por primera vez y particularmente en Sevilla. Y aunque son muchas las personas que trabajaron tan esforzada como eficazmente en su organización, éste pasado ICME deja principalmente el recuerdo humano de Gonzalo Sánchez, sobre todo por su ausencia. La produjo una enfermedad que se nos aparece como una injusticia, precisamente por el tiempo en que ha ocurrido. Ojalá la supere y podamos contar de nuevo con él.

Alberto Aizpún

INTERNATIONAL DERIVE AND TI-92 CONFERENCE

Organizada por «The International Council for Computeralgebra in Matheducation», se celebró los días 2 al 6 de julio de 1986 en el Schloss Birlinghoven, situado en las proximidades de Bonn (Alemania). Este palacio es la sede del GMD (centro alemán de investigación en Matemática e Informática). Al citado congreso asistieron cerca de trescientos profesores de todo el mundo.

Las conferencias corrieron a cargo de prestigiosos profesores, investigadores en el área y autores, entre los que cabe destacar:

- Bruno Buchberger (Universidad de Linz).
- John Berry (director del International Derive Journal).
- Bert Waits (Universidad Ohio State).
- Benny Evans (autor de varios libros de Matemáticas con Derive).
- Josef Böhm (director del Derive Newsletter).
- Bernhard Kutzler (Softwarehouse Europa y autor de varios libros de Matemáticas con Derive).

asistiendo también David Stoutemyer (Softwarehouse), uno de los creadores de Derive.

La dirección del encuentro corrió a cargo de la profesora Bärbel Barzel, siendo «chairman» de una de las sesiones el vocal de nuestra sociedad Eugenio Roanes Lozano.

II CONGRESO DE USUARIOS DE MAPLE

Organizado por el departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología de la Universidad de Sevilla y por la empresa de software científico Add-Link, se celebró los días 24 y 25 de septiembre de 1966, en la Facultad de Matemáticas de dicha universidad. La reunión contempló:

- Conferencias plenarias por parte de reconocidos especialistas.
- Presentación de trabajos.
- Exhibición técnica.
- Exhibición de publicaciones relacionadas con Maple V.
- Presentación técnica de Add-Link Software Científico.

II ENCUENTRO DE ALGEBRA COMPUTACIONAL Y APLICACIONES

Organizado por el departamento de Álgebra, Computación, Geometría y Topología de la Universidad de Sevilla, se celebró los días 26 y 27 de septiembre de 1966, en la Facultad de Matemáticas de dicha universidad, siendo los temas de interés:

- Álgebra Computacional.
- Métodos efectivos en Álgebra, Geometría, Topología y Análisis.
- Cálculo Científico vía Métodos Simbólico-Numérico.
- Aplicaciones en Ciencia y Tecnología.
- Desarrollo de Software Simbólico-Numérico.
- Complejidad de Algoritmos.

E. Roanes

Problemas propuestos

**Problemas propuestos
en la XXXVII OLIMPIADA INTERNACIONAL DE MATEMATICAS
celebrada en La India en Julio de 1996**

Problema 1

Sea ABCD un tablero rectangular, con $AB = 20$ y $BC = 12$. El tablero se divide en 20×12 cuadrados unitarios. Sea r un entero positivo dado. Una ficha puede moverse de un cuadrado a otro si y solo si la distancia entre los centros de los cuadrados es exactamente $\sqrt{r}$. Se trata de hallar una sucesión de movimientos que lleve la ficha del cuadrado que tiene el vértice A al cuadrado que tiene el vértice B.

- a) Demostrar que éso no es posible si r es divisible por 2 ó por 3.
- b) Demostrar que si es posible cuando $r=73$.
- c) ¿Es posible hallar tal sucesión de movimientos cuando $r=97$?

Problema 2

Sea P un punto interior al triángulo ABC tal que

$$\widehat{APB} - \widehat{ACB} = \widehat{APC} - \widehat{ABC}$$

(igualdad entre diferencias de ángulos). Sean D y E los incentros de los triángulos APB y APC, respectivamente. Demostrar que AP, BD y CE son concurrentes.

Problema 3

Sea $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los enteros no negativos. Hallar todas las funciones f , definidas en S y que toman sus valores en S , tales que

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

cualesquiera que sean $m, n \in S$.

Problema 4

Sean a y b enteros estrictamente positivos tales que $15a + 16b$ y $16a - 15b$ son, ambos, cuadrados de enteros estrictamente positivos. Determinar el menor valor posible que puede tomar el menor de esos dos cuadrados.

Problema 5

Sea ABCDEF un hexágono convexo tal que AB es paralelo a ED, BC paralelo a FE y CD paralelo a AF. Sean R_A , R_C y R_E los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos FAB, BCD y DEF, respectivamente, y sea p el perímetro del hexágono. Probar que

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$$

Problema 6

Sean n, p, q enteros positivos tales que $n > p + q$. Sean $x_0, x_1, \dots, x_n$ enteros que verifican las siguientes condiciones:

- a) $x_0 = x_n = 0$.
- b) Para cada i , $1 \leq i \leq n$, se tiene que, o bien $x_i - x_{i-1} = p$, o bien $x_i - x_{i-1} = -q$.

Demostrar que existe una pareja (i, j) con $i < j$, $(i, j) \neq (0, n)$, tal que $x_i = x_j$.

Problemas propuestos por nuestros socios

Problema n.º 7:

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$, consideremos el sólido

$$S : \sum_{i=1}^4 |x_i| \leq 1, \text{ y el hiperplano } H : \sum_{i=1}^4 x_i = 0.$$

Halla la forma y dimensiones de:

- 1) La proyección ortogonal de S sobre H .
- 2) La sección de S por H .

(Propuesto por Joaquín Gómez Rey)

Problema n.º 8:

Cada cara de un dodecaedro nos da un punto hallando la intersección de los cinco planos que contienen a sus cinco caras contiguas. Uniendo adecuadamente estos doce puntos obtenemos un icosaedro. Halla la razón entre las aristas de dichos dodecaedro e icosaedro.

(Propuesto por Joaquín Gómez Rey)

Problema n.º 9:

$$\text{Sea } a_k = \binom{n}{k-1} \binom{n}{k}; \forall k = 1, 2, \dots, n.$$

Demuestra que la media aritmética de los a_k , $\forall n = 1, 2, \dots$ es un número entero.

(Propuesto por Joaquín Gómez Rey)

Problema n.º 10:

En el espacio euclídeo n -dimensional, consideremos el n -cubo. Halla el límite, cuando n tiende a infinito, de la razón entre los volúmenes de las esferas circunscrita (pasando por todos los vértices) e inscrita (tangente a todas sus 2-caras).

(Propuesto por Joaquín Gómez Rey)

Problema n.º 11:

Sean a, b, c números reales no negativos y no mayores que 1.

Probar que $\sqrt{c(1-ab)} \leq \sqrt{1-a} + \sqrt{1-b} + \sqrt{1-c}$.

(Propuesto por Juan-Bosco Romero Márquez)

Problema n.º 12:

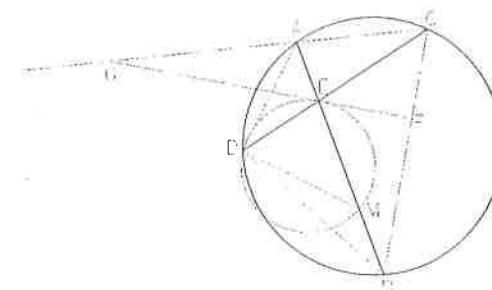
Dada la cónica con centro C y focos F y F' , tomamos sobre ella un punto variable P . Determinar el lugar geométrico de los baricentros, de los ortocentros, de los incentros y de los circuncentros de todos los triángulos PPF' .

(Propuesto por Juan-Bosco Romero Márquez)

Problemas resueltos

PROBLEMA 1.º (BOLETIN N.º 26)

Se consideran en una circunferencia dos cuerdas AB y CD que se cortan en el punto E interior a la circunferencia. Sea M un punto del segmento EB situado estrictamente entre B y E . La tangente a la circunferencia que pasa por D, E y M en el punto E corta a las rectas BC, AC en los puntos F, G respectivamente.



Si $AM/AB = t$, determínese EG/EF en función de t .

Solución:

Se une D con A, B y M . Siendo $\widehat{CEF} = \widehat{DEG} = \widehat{EMD}$ y $\widehat{ECF} = \widehat{MAD}$, se tiene que los triángulos CEF y AMD son semejantes y por tanto, $CE \cdot MD = AM \cdot EF$.

Por otra parte, siendo $\widehat{ECG} = \widehat{MBD}$ y $\widehat{CGE} = \widehat{CEF} - \widehat{GCE} = \widehat{EMD} - \widehat{MBD} = \widehat{BDM}$, se tiene que los triángulos CGE y BDM son semejantes y por tanto $GE \cdot MB = CE \cdot MD$.

$$\text{Se concluye que } GE \cdot MB = AM \cdot EF \text{ y } \frac{GE}{EF} = \frac{AM}{MB} = \frac{t \cdot AB}{(1-t) \cdot AB} = \frac{t}{1-t}$$

(Nota: Si el punto M está entre A y E , se pueden intercambiar los papeles de A y B por F y G y haciendo $t' = 1 - t$, se concluye, igual que antes,

$$\frac{EF}{GE} = \frac{MB}{AB} = \frac{t'}{1-t'} = \frac{1-t}{t} \text{ y } \frac{GE}{EF} = \frac{t}{(1-t')}$$

M. Mercedes Sánchez Benito (Alcorcón)

PROBLEMA 2.º (BOLETIN N.º 26)

Se da un conjunto E de $2n - 1$ ($n \geq 3$) puntos distintos sobre una circunferencia. Se supone que exactamente k de los puntos dados se colorean en negro. Tal coloración de k

puntos es «buena» si existe al menos un par de puntos negros tal que el interior de uno de los arcos formados por esos dos puntos contiene exactamente n puntos de E .

Hállese el mínimo valor de k para el que toda coloración de exactamente k puntos es «buena».

Solución:

Dos puntos se dicen «relacionados» si hay exactamente n puntos de E en uno de los arcos entre ellos. Necesitamos determinar el menor k con la propiedad de que cualquiera k puntos de E contiene al menos un par de puntos «relacionados». Uniendo cada par de los puntos «relacionados» obtenemos un grafo G de grado 2 en cada vértice. G está compuesto entonces de ciclos disjuntos. Hay dos casos:

- (i) Si 3 no divide a $2n - 1$, entonces $\text{m.c.d.}(2n - 1, n + 1) = \text{m.c.d.}(2n - 1, 3) = 1$ y G es un ciclo en sí mismo.
- (ii) Si 3 divide a $2n - 1$, entonces $\text{m.c.d.}(2n + 1, n + 1) = \text{m.c.d.}(2n - 1, 3) = 3$ y hay 3 ciclos en G , cada uno de los cuales contiene $(2n - 1)/3$ vértices.

En el caso (i), el menor valor de k es

$$[(2n - 1)/2] + 1 = n.$$

En el caso (ii), el menor valor de k es

$$3[((2n - 1)/3)/2] + 1 = n - 1.$$

Por lo tanto, el menor valor de k es:

n , si $2n - 1$ no es múltiplo de 3.

$n - 1$, si $2n - 1$ es múltiplo de 3.

M. Mercedes Sánchez Benito (Alcorcón)

PROBLEMA 4.º (BOLETIN N.º 26)

Sea Q^+ el conjunto de los números racionales estrictamente positivos. Constrúyase una función $f: Q^+ \rightarrow Q^+$ tal que

$$f(xf(y)) = f(x)/y \quad \forall x, y \in Q^+$$

Solución:

f es inyectiva, ya que si $f(y) = f(y')$ se deduce $y = y'$.

Para $y = 1$, $f(xf(1)) = f(x)$, de donde $f(1) = 1$. Para $x = 1$ se deduce que $\forall y \in Q^+$, $f(f(y)) = 1/y$, y también que $f(1 \cdot f(f(y))) = f(1/y) = 1/f(y)$, con lo que $f(y) \cdot f(1/y) = 1$.

Si ponemos $y = f(1/t)$, será $f(y) = f(f(1/t)) = t$ con lo que $f(x \cdot t) = f(x \cdot f(y)) = f(x)/y = f(x)/f(1/t) = f(x) \cdot f(t)$.

Recíprocamente, cualquier función verificando $\forall x, t \in Q^+$

$$(a) \quad f(xt) = f(x)f(t)$$

$$(b) \quad f(f(x)) = 1/x$$

resuelve la ecuación funcional.

Una función $f: Q^+ \rightarrow Q^+$ tal que satisfaga (a) puede ser construida definiéndola primero en los números primos y luego extendiéndola aplicando (a) a la descomposición en factores primos (con exponentes enteros). Tal función satisface (b) si y sólo si satisface (b) para cada primo.

Una posible construcción sería (siendo $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ la sucesión de números primos):

$$f(p_j) = p_{j+1} \text{ si } j \text{ es impar.}$$

$$f(p_j) = 1/p_{j-1} \text{ si } j \text{ es par.}$$

Extendiéndola a Q^+ , se tiene la función pedida.

M. Mercedes Sánchez Benito (Alcorcón)

PROBLEMA 5.º (BOLETIN N.º 26)

Dos personas A y B participan en un juego eligiendo alternativamente los números $n_1, n_2, \dots$ de acuerdo con las siguientes reglas:

Al principio, se da un número natural $n_0 > 1$.

Una vez conocido n_{2k} , el jugador A puede escoger cualquier $n_{2k+1} \in \mathbb{N}$ tal que $n_{2k} \leq n_{2k+1} \leq n_{2k}^2$.

Después, el jugador B escoge un número $n_{2k+2} \in \mathbb{N}$ tal que n_{2k+1}/n_{2k+2} es una potencia de un número primo con exponente entero estrictamente positivo.

El jugador A gana el juego si logra elegir el número 1990, y el jugador B gana el juego si logra elegir el número 1.

- (a) ¿Para qué valores iniciales n_0 el jugador A puede asegurar su victoria?
- (b) ¿Para qué valores iniciales n_0 el jugador B puede asegurar su victoria?
- (c) ¿Para qué valores iniciales n_0 puede cada jugador asegurar que el otro no ganará?

Solución:

Sea ω el conjunto de los valores iniciales n_0 que aseguran la victoria de A. Veamos el siguiente lema:

Supongamos $\{m, m+1, \dots, 1990\} \subset \omega$, $s \leq 1990$ y $s/p^r \geq m$, con p^r el mayor factor de s tal que p es primo y $r \in \mathbb{N}$.

Entonces, todos los números naturales n_0 tales que $\sqrt{s} \leq n_0 \leq m$ pertenecen a ω .

Demostración:

Empezando con n_0 , el jugador A toma $n_1 = s$. Entonces B tiene que elegir un número natural n_2 con $m \leq 1/p^r \leq n_2 < s \leq 1990$. Como $n_2 \in \omega$, el jugador A puede ganar el juego después.

Debido a que $45^2 = 2025 > 1990$, es evidente que todos los n_0 que cumplen $45 \leq n_0 \leq 1990$ están en ω .

Tomando

$$m = 45 \text{ y } s = 420 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7,$$

que satisfacen las hipótesis del lema y

$$\sqrt{420} < 21 \leq 45,$$

se deduce que

$$\{21, 22, \dots, 44\} \subset \omega.$$

Usando el lema con $m = 21$ y $s = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$, $\{13, 14, \dots, 20\} \subset \omega$.

Para $m = 13$ y $s = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, $\{11, 12\} \subset \omega$.

Para $m = 11$ y $s = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$, $\{8, 9, 10\} \subset \omega$.

Por tanto, $\{8, 9, \dots, 1990\} \subset \omega$.

Para $n_0 > 1990$, A puede escoger un n_0 natural tal que:

$$2^2 \cdot 3^2 < n_0 \leq 2^{r+1} \cdot 3^2 < n_0^2$$

y entonces tomar $n_1 = 2^{r+1} \cdot 3^2$.

Ahora, independientemente de la elección de B, $8 \leq n_2 < n_0$.

Después de un número finito de pasos, la situación será $8 \leq n_{2k} < 1990$ y concluimos que para $n_0 \geq 8$, A puede ganar.

Sea ahora $n_0 \leq 5$. Como el producto más pequeño de tres diferentes primos es

$$2 \cdot 3 \cdot 5 = 30 > 5^2,$$

el jugador A tiene que tomar $n_1 = p^r \cdot q^s$, donde p es primo, q es primo o 1, $p^2 > q^s$ y $r \geq 1$, $s \geq 1$. Entonces B puede elegir

$$n_2 = q^s = n_1/p^r < \sqrt{n_1} \leq n_0$$

Después de un número finito de pasos B conseguirá $n_{2h} = 1$ y gana.

Para $n_0 = 6$ o $n_0 = 7$, A tiene que elegir $n_1 = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ o $n_1 = 42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ y B tiene que elegir 6. Así A y B van eligiendo alternativamente 30, 6, 30, 6, ... evitando perder y llegando a un empate.

Por consiguiente:

Si $1 < n_0 \leq 5$, B gana el juego.

Si $6 \leq n_0 \leq 7$, A y B pueden impedir que gane el otro.

Si $8 \leq n_0$, A gana el juego.

M. Mercedes Sánchez Benito (Alcorcón)

PROBLEMA 6.º (BOLETIN N.º 26)

Demuéstrese que existe un polígono convexo de 1990 lados con las propiedades siguientes:

- (i) Todos los ángulos son iguales.
- (ii) Las longitudes de los 1990 lados son una permutación de los números $1^2, 2^2, \dots, 1989^2, 1990^2$.

Solución:

Suponemos que el polígono $A_0A_1A_2\dots A_{1989}$ de 1990 lados tiene las propiedades (i) y (ii). Expresemos el vector A_rA_{r+1} como un número complejo $n_r \cdot e^{ir\alpha}$, donde $\alpha = 2\pi/1990$, $r \in \{0, 1, \dots, 1989\}$ y se supone $A_{1990} = A_0$. Entonces $n_0, n_1, \dots, n_{1989}$ deben ser una permutación de los números $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$.

El problema puede ser reformulado como sigue:

Encontrar una permutación $(n_0, \dots, n_{1989})$ de los números $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$, tal que

$$\sum_{r=0}^{1989} n_r \cdot e^{ir\alpha}$$

Llamaremos, por conveniencia, a n_r , «peso». Supongamos un disco unidad apoyado horizontalmente por un alfiler en su centro O.

El problema es: ¿Cómo podemos colocar los pesos $1^2, 2^2, \dots, 1990^2$ en la frontera del disco sobre los puntos que dividen la circunferencia en arcos iguales para conseguir un sistema en equilibrio?

Para comenzar dividamos los 1990 pesos en 995 pares $(1^2, 2^2), (3^2, 4^2), \dots, (1989^2, 1990^2)$ y pongamos cada par en los extremos finales de ciertos diámetros.

El problema se reduce entonces al siguiente: ¿Cómo colocar 995 pesos: $3 = 2^2 - 1^2$, $7 = 4^2 - 3^2, \dots, 3979 = 1990^2 - 1989^2$, en los puntos que dividen la circunferencia unidad en 995 arcos iguales, para obtener un sistema equilibrado?

Sabemos que $995 = 5 \cdot 199$. Dividamos los 995 pesos en 199 grupos $(3, 7, 11, 15, 19), (23, 27, 31, 35, 39), \dots, (3963, 3967, 3971, 3975, 3979)$ y sea $\beta = 2\pi/199$, $\gamma = 2\pi/5$.

Denotamos por F_1 el pentágono con vértices $1, e^{i\gamma}, e^{2i\gamma}, e^{3i\gamma}, e^{4i\gamma}$, y por F_{k+1} el pentágono $e^{ik\beta} \cdot F_1$. Poniendo los 5 pesos del $k+1$ grupo en los vértices del pentágono F_{k+1} obtenemos el $k+1$ grupo de números complejos:

$$(2k+3)e^{ik\beta}, (2k+7)e^{i(k\beta+\gamma)}, (2k+11)e^{i(k\beta+2\gamma)}, (2k+15)e^{i(k\beta+3\gamma)}, (2k+19)e^{i(k\beta+4\gamma)}$$

donde $k = 0, 1, 2, \dots, 198$.

Observamos $1 + e^{i\gamma} + \dots + e^{4i\gamma} = 0$, y podemos escribir la suma de números complejos del grupo $k+1$ como $\eta e^{ik\beta}$, siendo $\eta = 3 + 7e^{i\gamma} + 11e^{2i\gamma} + 15e^{3i\gamma} + 19e^{4i\gamma}$. La suma total de todos los 199 grupos de números complejos es $\eta (1 + e^{i\beta} + \dots + e^{198i\beta}) = 0$.

Concluimos que existe un polígono de 1990 lados que cumple (i) y (ii).

Finalmente señalamos que la solución puede ser construida como sigue:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{k=0}^{198} \sum_{l=0}^4 (20k+4l+3) e^{i(k\beta+l\gamma)} = \\ &= \sum_{k=0}^{198} \sum_{l=0}^4 \{ (10k+2l+2)^2 - (10k+2l+1)^2 \} e^{i(k\beta+l\gamma)} = \\ &= \sum_{k=0}^{198} \sum_{l=0}^4 \sum_{m=0}^2 (10k+2l+m)^2 e^{i(k\beta+l\gamma+mn)} \end{aligned}$$

Cuando k toma $0, 1, \dots, 148$, l toma $0, 1, 2, 3, 4$ y m toma $1, 2$, la expresión $10k+2l+m$ toma $1, 2, \dots, 1990$ y tomando cada valor exactamente una vez y la expresión

$$e^{i(k\beta+l\gamma+mn)} = e^{2\pi i (10k+398l+995m)/1990}$$

toma los valores $1, e^{i\alpha}, \dots, e^{1989i\alpha}$ cada vez.

M. Mercedes Sánchez Benito (Alcorcón)

PROBLEMA 2 (BOLETÍN 43)

Sea G el baricentro del triángulo ABC. Demostrar que si $AB + GC = AC + GB$ entonces ABC es isósceles.

Solución:

El teorema de Stewart afirma que:

$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n$ siendo p la longitud del segmento AX (en este caso es una mediana), m es la longitud de BX y n es la longitud de XC, donde a, b, c son los lados del triángulo.

Despejando p podemos calcular las longitudes de las medianas GC y GB, sabiendo que $m = n = a/2$:

$$\text{a) Longitud de mediana GC} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2}$$

$$\text{b) Longitud de mediana GB} = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2}$$

Sustituyendo estos valores en la hipótesis: $AB + GC = AC + GB$ se tiene:

$$c + \frac{2}{3} \left[\frac{\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{2} \right] = b + \frac{2}{3} \left[\frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{2} \right]$$

Operando llegamos a:

$$\begin{aligned} b^4 + c^4 - a^2c^2 - a^2b^2 + 6b^2c^2 + 2a^2bc - 4b^3c - 4bc^3 &= 0 \\ (b^2 + c^2)^2 - a^2c^2 - a^2b^2 + 4b^2c^2 + 2a^2bc - 4b^3c - 4bc^3 &= 0 \\ (b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2) + 4b^2c^2 + 2a^2bc - 4b^3c - 4bc^3 &= 0 \\ (b^2 + c^2)(b^2 + c^2 - a^2) - 2bc(b^2 + c^2 - a^2) + 4b^2c^2 - 2b^3c - 2bc^3 &= 0 \\ (b^2 + c^2 - a^2)(b^2 + c^2 - 2bc) - 2bc(b^2 + c^2 - 2bc) &= 0 \\ (b^2 + c^2 - a^2)(b - c)^2 - 2bc(b - c)^2 &= 0 \\ (b - c)^2(b^2 + c^2 - a^2 - 2bc) &= 0 \\ (b - c)^2((b - c)^2 - a^2) &= 0 \end{aligned}$$

luego:

$$(b - c)^2 = 0 \text{ entonces } b = c, \text{ quedando probado}$$

o bien

$$(b - c)^2 - a^2 = 0$$

entonces se tiene:

- a) $b - c = a$, que no sería un triángulo
- b) $b - c = -a$, que tampoco lo sería.

Miguel Ángel Vidal Martín
I.E.S. Alonso de Madrigal (Ávila)

Índice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.º	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números										
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º	
1	Varios	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	—	—	—	—	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	—	—	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	—	—	—	—	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	—	—	—	—	C
6	Varios	7	7	16	—	—	—	—	—	—	—	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	—	—	—	—	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	—	—	—	—	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	—	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	—	—	—	—	—	—	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	—	—	—	—	C
14	Varios	15	15	15	15	—	—	—	—	—	—	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	—	—	—	—	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	—	—	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	—	—	—	—	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	—	—	—	—	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	—	—	—	—	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	C
	OI-89-Cuba	26	27	—	—	—	—	—	—	—	—	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	C
	Oposiciones	31	30	29	—	—	—	—	—	—	—	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	—	—	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	—	—	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	C
26	OMI-90-China/	32	44	XX	32	44	44	XX	32	XX	34	C
	OI-90-Valladolid	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	—	C
27	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	—	—	C
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	—	—	—	—	C
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	C
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	XX	XX	33	33	33	C
	OME-f1-91	33	34	34	34	—	—	—	—	—	—	C
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	XX	XX	XX	35	C
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	XX	35	34	—	—	—	—	—	C
32	OMI-92-Moscu/	35	XX	XX	XX	XX	XX	38	35	XX	38	C
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	—	—	—	—	—	—	C
33	OME-f1-92/f1-92(v)	XX	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	C
	/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	C
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	—	—	—	—	C
35	OMI-93-Turq./	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	39	C
	OI-93-Méjico/PNS	XX	XX	39	39	XX	XX	—	—	—	—	C
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	40	40	C
37	OME-f2-94/PNS	41	XX	XX	41	XX	XX	XX	XX	41	—	C
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	C
39	OI-94-Brasil/OME-	XX	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	XX	C
	f1-94/f1-94(v)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	C
40	OME-f2-95	42	XX	XX	42	XX	XX	—	—	—	—	C
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	C
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	C
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	C
43	OME-f-96	XX	44	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	C
	OME-f1-96/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	C

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase 1 o 2); OMI = OI. Mat. Internac. OI = OI. Iberoamer. de Mat. PNS = Propuestos por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVIO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACION EN EL BOLETIN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del Boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente:

Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4.

Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución e incluirán un breve resumen en inglés.

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: «Problema número (Boletín número)», tal como suelen aparecer en el boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3. x o superior), conteniendo dos archivos:

- a) archivo del documento para el procesador de texto utilizado
- b) archivo del documento en código ASCII.

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.

Si se desea, las figuras pueden incluirse en archivos de extensión TIF (en otro caso se captarán por escaneado)

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

RELACION DE OTROS ARTICULOS QUE HAN SIDO ADMITIDOS PARA SER PUBLICADOS EN PROXIMOS NUMEROS DE ESTE BOLETIN

- Un algoritmo nuevo para una aplicación conocida, por Leo H. Klingen.
- Una introducción a la ordenación de polinomios y al cálculo de bases de Groebner, por Carlos Ramón Laca y Eugenio Roanes Lozano.
- Cálculo numérico de integrales particulares de ecuaciones diferenciales con coeficientes trigonométricos, por Adam Marlewski, Stanislav Rawicky y Eugenio Roanes Lozano.
- La historia de la Matemática como recurso didáctico (continuación), por Mariano Martínez Pérez.
- Soluciones de algunas ecuaciones diofánticas por métodos elementales, por Juan Bosco Romero Márquez.

Como socio de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas, deseo que me envíen gratuitamente los siguientes números atrasados del Boletín:

(señalar con una X los que interesen)

3	4	35	37	38	39
☐	☐	☐	☐	☐	☐
40	41	42	43	44	
☐	☐	☐	☐	☐	

Envío adjuntos sellos para el franqueo.

Utilicen para el envío la dirección consignada en este recuadro:

Los números 1, 2, 5 al 34 y 36 están agotados.

Si desea acogerse a este ofrecimiento, recorte o copie este cupón y envíelo a la:

Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas

Facultad de Educación (despacho 3517)

Paseo Juan XXIII, s/n

Ciudad Universitaria

28040 Madrid

Telf. 394 62 48

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION

D. Teléf.(...)

Dirección particular

Ciudad Cod° Postal.....

Centro de trabajo.....

SOLICITA EL INGRESO COMO SOCIO DE NUMERO DE LA SOCIEDAD.

Con esta fecha autorizo al Banco
 Sucursal o Agencia en
 Dirección de la misma
 para que cargue en la cuenta:...../...../...../...../
 los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1995-96 y siguientes.

Fecha de de 1995

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (incluida la cuota federativa de 2.000 ptas.). Remítanse ambas partes a
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517). Telf. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria, 28040 Madrid.

Fecha BANCO:
 Sucursal o Agencia en
 Dirección de ésta.....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta:...../...../...../...../
los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta
nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos

Nombre de la cuenta

**SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION (CENTROS)**

D.
como del Centro
domiciliado en
Ciudad Codº Postal..... Telef.

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR

Con esta fecha autorizo al Banco
Sucursal o Agencia en
Dirección de la misma
para que cargue en la cuenta:...../...../...../...../
abierta al nombre:
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1995-96 y siguientes.

Fecha de de 1995

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (incluida la cuota federativa de 2.000 ptas.).
Remítanse ambas partes a
Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517).
Telf. (91) 394 62 48. Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid

Fecha BANCO:
Sucursal o Agencia en
Dirección de ésta.....

RUEGO ABONEN con cargo a la cuenta:...../...../...../
los recibos de la cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta
nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos
Dirección