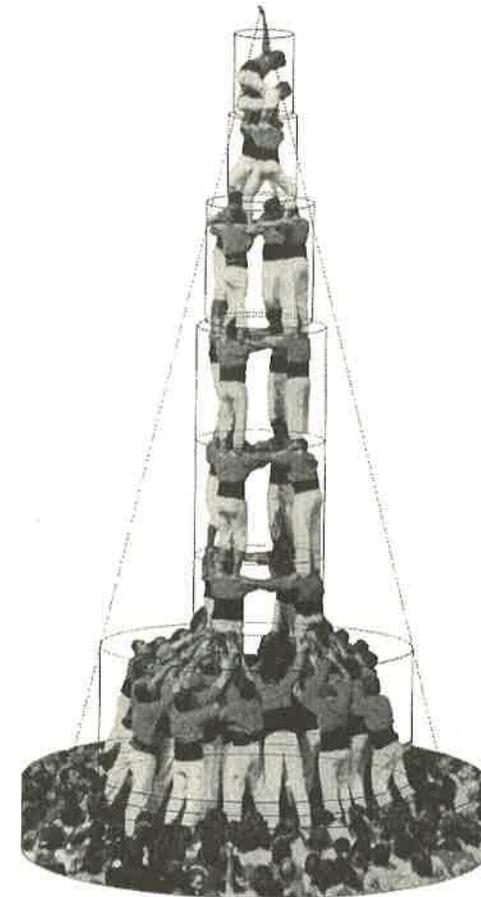


**SOCIEDAD «PUIG ADAM»
DE PROFESORES DE MATEMATICAS**



**BOLETIN N.º 43
JUNIO DE 1996**

ESTE BOLETIN SE DISTRIBUYE GRATUITAMENTE ENTRE LOS SOCIOS DE LA SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS.

NO SE VENDE NI SE ADMITEN SUSCRIPCIONES.

La confección de este número ha estado a cargo de E. Roanes.

ISSN: 1135-0261

Depósito Legal: M-7762-1995

Gráficas Loureiro, S.L. - San Pedro, 23 bis - 28917 Leganés (Madrid).
Teléf.: 611 59 94 - Fax: 611 59 88.

La portada de este número reproduce la figura de portada del folleto publicado con motivo de la XXXII Olimpiada Matemática Española celebrada en Tarragona los días 22 al 24 de febrero de 1996, de cuyos resultados damos cuenta en este Boletín.

Toda la correspondencia deberá dirigirse a la sede de nuestra sociedad

SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
Facultad de Educación (despacho 3517)
Paseo Juan XXIII, s/n
Ciudad Universitaria
28040 Madrid.

ÍNDICE

	<u>Págs.</u>
Noticias sobre la Asamblea General	5
XXXII Olimpiada Matemática Española. Fase final	8
Notas breves	10
The construction of symmetrical patterns via iterated transformations, por <i>Hans Schupp</i>	11
Procedimientos para lograr aproximaciones de distintos irracionales algebraicos por <i>Javier Peralta</i>	26
Estudio de transformaciones lineales de R^3 con Sistemas de Cómputo Algebraico por <i>E. Roanes Macías</i> y <i>E. Roanes Lozano</i>	40
Los eternos cuadrados mágicos por <i>Concepción Romo Santos</i>	61
Implementación de un paquete de dibujo de grupos cristalográficos planos por <i>Martín Garbayo</i> y <i>Eugenio Roanes Lozano</i>	71
Las mediatrices de un triángulo y su relación con las medias por <i>Juan Bosco Romero Márquez</i> y <i>María Angeles López y Sánchez-Moreno</i>	78
Reseña de libros	84
Problemas propuestos.....	87
Problemas resueltos.....	89
Indice de soluciones publicadas	92
Instrucciones para el envío de originales para su publicación en este boletín.	93
Relación de otros artículos que han sido admitidos para ser publicados en próximos números de este boletín.....	93

JUNTA DIRECTIVA

Presidente:

JOSÉ JAVIER ETAYO GORDEJUELA

Vicepresidentes:

EUGENIO ROANES MACÍAS (Madrid)
JUAN BOSCO ROMERO MÁRQUEZ (Castilla-León)
SALVADOR HERRERO PALLARDO (Castilla-La Mancha)

Vocales:

JULIO FERNÁNDEZ BIARGE (Redacción de publicaciones)
JOSÉ VICENTE GARCÍA SESTAFE (Relaciones institucionales)
EUGENIO ROANES LOZANO (Gestión de publicaciones)
MARTÍN GARBAYO MORENO (Actividades y concursos)

Secretario:

FRANCISCO GONZÁLEZ REDONDO

Vicesecretario:

MIGUEL ANGEL GALLARDO ORTIZ

Tesorero:

ALBERTO AIZPÚN LÓPEZ

Bibliotecaria:

CARMEN GARCÍA-MIGUEL FERNÁNDEZ

Noticias sobre la Asamblea General Ordinaria de 1996 de la Sociedad «Puig Adam» de profesores de Matemáticas

En la Facultad de Matemáticas de la U.C.M. sita en la Ciudad Universitaria, a las doce horas del día veintisiete de abril de mil novecientos noventa y seis, en segunda convocatoria, reunidos los miembros de la Sociedad, bajo la presidencia de D. Javier Etayo Gordejuela, dio comienzo la Asamblea General Ordinaria de mil novecientos noventa y seis. Justifica y excusa su ausencia el Tesorero, D. Alberto Aizpún. Se desarrolló con arreglo al siguiente orden del día:

Punto primero. Lectura y aprobación, si procede, del acta de la sesión anterior. Se procede a la lectura del acta de la Asamblea anterior, que queda aprobada por unanimidad tras modificar el Punto séptimo, sustituyendo «a) D. Joaquín Hernández propone enviar el Boletín al directorio de Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. D. Juan Bosco Romero Márquez amplía esta iniciativa a otras instituciones», por «a) D. Juan Bosco Romero Márquez propone enviar el Boletín al directorio de Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. D. Joaquín Hernández amplía esta iniciativa a otras instituciones».

Punto segundo. Informe del Presidente sobre las actividades de la Sociedad. El Presidente informa sobre las actividades realizadas y a realizar.

- a) Se informa que está previsto celebrar el XIV Concurso de Resolución de Problemas que convoca la Sociedad en colaboración con el Colegio de Licenciados y el patrocinio de la firma comercial Coca-Cola el 22 de junio de 1996 en aulas de la Facultad de Matemáticas de la U.C.M. Las pruebas se realizarán por la mañana y la entrega de premios se efectuará por la tarde. Se informa, también, que los problemas y la relación de premiados se publicarán en el Boletín de la Sociedad, y se destaca que ya se han recibido algunas preinscripciones.
- b) Se informa que desde la Asamblea General anterior han salido los números 40, 41 y 42 del Boletín siguiendo el nuevo formato iniciado en el número 39. También se apunta que hay muchos artículos pendientes de publicación y que el envío, que ahora está en manos del propio impresor, se ha racionalizado notablemente. El Presidente informa también de las gestiones realizadas con el Zentralblatt, cuyos responsables han contestado afirmativamente a la petición de la Sociedad con vistas a que se incluyan referencias a los artículos publicados en nuestro Boletín.

- c) Se informa de que con el cambio de editores de la revista Suma la relación con éstos es más fluida, aunque sigue pendiente el envío a los socios de dos números de SUMA pendientes, lo que harán en cuanto reunan ejemplares suficientes.
- d) Se informa de la participación de miembros de la Sociedad en la Olimpiada Matemática, en la que la práctica totalidad de los organizadores han sido miembros de nuestra Sociedad. También se destacan los resultados de nuestros representantes en la fase nacional. D. Joaquín Hernández comenta los cambios efectuados en la convocatoria, en la línea iniciada el año anterior de flexibilizar los requisitos. D. Víctor Manuel Sánchez recuerda algunas de las decisiones en este sentido y las vías por las que desde el Colegio de Licenciados se va a hacer pública la convocatoria del Concurso, con ligeras modificaciones con respecto a lo publicado en el Boletín, lo que facilitará las inscripciones. D. Eugenio Roanes apunta que el impresor no pudo incluir a tiempo estas modificaciones en el número correspondiente del Boletín.

Punto tercero. Informe del Tesorero. Presentación y aprobación, en su caso, de las cuentas de ingresos y gastos. Excusada la ausencia del Tesorero, D. Alberto Aizpún, le sustituye en sus funciones el Secretario, D. Francisco González Redondo, quien distribuye entre los asistentes copias en las que se detallan los movimientos de tesorería de la Sociedad: gastos, ingresos y saldo actual. Tras la explicación detallada de los diferentes conceptos el Informe queda aprobado por unanimidad.

Punto cuarto. Elección de nuevos cargos directivos, si procede. El Presidente informa del cese en su puesto del Secretario por haber finalizado el período por el cual fue elegido, proponiendo, en nombre de la Junta Directiva, su reelección, que queda aprobada. Se solicita a los socios que se autorice a la Dirección a realizar las gestiones oportunas con la Bibliotecaria, Dña. Carmen García-Miguel, con vistas a confirmarla en su cargo o a buscar un sustituto, a lo que queda autorizada.

Punto cinco. Asuntos de trámite. No hay.

Punto seis. Ruegos y preguntas.

- a) D. Víctor Manuel Sánchez comenta algunos detalles acerca de la Olimpiada Matemática Rioplatense, a la que asistió nuestra consocia María Gaspar, ofreciendo a la Biblioteca de la Sociedad un ejemplar del Boletín del Colegio de Licenciados en el que se informa detalladamente sobre el tema. Apunta que en el mes de mayo se celebrarán nuevas olimpiadas de la Federación Iberoamericana. También informa de que 1996 será el último año en que la firma Coca-Cola participe en nuestro Concurso de Resolución de Problemas, por lo cual solicita el

- respaldo de la Sociedad para iniciar la búsqueda de nuevos patrocinadores. Comenta, por otro lado, la necesidad de hacer una mayor difusión del Concurso.
- b) D. Joaquín Hernández informa que fueron ganadores de nuestro Concurso los que participaron en la Olimpiada Iberoamericana. Se acuerda que se siga manteniendo esta relación, informando explícitamente a los alumnos que participen en el Concurso de la Sociedad que los ganadores podrán participar en la Olimpiada Iberoamericana.
- c) D. Juan Bosco Romero Márquez propone contactar con editoriales para que publiquen los problemas propuestos en los diferentes Concursos, recordando algunos libros sobre temas análogos en los que su inclusión podría servir de propaganda. Por otro lado, pregunta si no sería oportuno publicar una versión actualizada del índice de autores y artículos publicados en el Boletín aparecidos algunos años atrás, ante lo cual D. Julio Fernández Biarge hace suya la propuesta. También propone se inicie el intercambio del Boletín con otras revistas semejantes, tanto españolas como extranjeras.
- d) D. Víctor Manuel Sánchez recuerda las gestiones que viene realizando desde hace algún tiempo con vistas a publicar los problemas en un libro recopilatorio.

Llegados a este punto, el Presidente levanta la sesión a las trece horas y treinta minutos de la fecha arriba indicada.

XXXII Olimpiada Matemática Española

Fase final

La fase final de la XXXII Olimpiada Matemática Española se ha celebrado este año en Tarragona, durante los días 22, 23 y 24 de febrero. Se ha podido disfrutar de un excelente ambiente, tanto en su versión científica como lúdica. Vaya por delante nuestro reconocimiento al Presidente del Comité Local Organizador, Manuel Sanromé, por su buen hacer, su bien informar y su bien saber estar en cuantas ocasiones ha sido preciso.

La recepción tuvo lugar el día 22 en el Rectorado de la Universidad Rovira i Virgili desde donde se desplazó tanto a concursantes como acompañantes a la que sería residencia durante los días de concurso, la «Ciutat de Repòs i de Vacances». Sólo se oyeron halagos acerca de los apartamentos en que nos alojaron.

El día 23 por la mañana, fuimos recibidos por el Exmo. Sr. Alcalde de Tarragona en el Ayuntamiento de la ciudad. A continuación el presidente del Comité Organizador nos llevó de visita por la ciudad, haciéndonos revivir, con la intensidad de su relato, el nacimiento y evolución de la ciudad. La visita concluyó en el rectorado de la Universidad, donde la Olimpiada quedó oficialmente inaugurada por el Mco. y Exmo. Sr. Rector acompañado por la Ilma. Sra. Subdirectora Gral. de Becas del Ministerio de Educación y Ciencia, el Prof. Aroca, Presidente de la RSME y el Prof. Xambò, presidente de la SCM.

El viernes tarde y el sábado mañana se celebraron las sesiones de problemas, mientras la organización obsequió a los acompañantes con visitas a los lugares más reconocidos de la ciudad. Es de hacer notar la profusión de medios de comunicación que se dieron cita al comienzo de la primera sesión de problemas.

El sábado tarde quedó libre para concursantes y acompañantes, no así para los miembros del Tribunal, que trabajando concienzudamente, consiguieron tener todo a punto para la entrega de premios.

Ante la presencia de gran número de autoridades, se rindió antes de la entrega de premios, un caluroso y sentido homenaje al Profesor Dou, uno de los mejores problemistas españoles de los últimos tiempos.

Tras entregar los premios que la Subdirección General de Becas ha otorgado a los 84 ganadores de la Primera Fase, presentes en esta Olimpiada, se procedió al reparto de medallas a los ganadores de esta XXXII edición y que han recaído en las siguientes personas:

Medalla de Oro:

Elizalde Torrent, Sergi	29 puntos	(Barcelona)
Palacios Gutiérrez, Tomás	28 puntos	(Madrid)
Rambla Barreno, Fernando	26 puntos	(Cádiz)
Jara de las Heras, Antonio	25 puntos	(Jaén)
Sebastián Celorrio, Patricia	20 puntos	(Zaragoza)
Martínez de Albéniz, Víctor	20 puntos	(Barcelona)

Medalla de Plata:

Parkhoutik, Vera
Güeto de la Rosa, Edgar
Das López, José Rodolfo
Silvestre Salas, Manuel
Tarafa Mate, Lluís
Selgas Buznego, Virginia

Medalla de Bronce:

Vela Aguilera, Raúl
Sáez Domingo, Daniel
Moner López, Pedro
Martínez Cerezo, Pablo
Cañizo Rincón, José Alfredo
Ingelmo Benito, Miguel Ángel

Los ganadores de las medallas de oro serán nuestros representantes en la Olimpiada Internacional que se celebrará este año en la India.

No nos gustaría acabar esta crónica sin hacer referencia al «seny» de los profesores Grané y Xambò que colaboraron en todo cuanto hizo falta con total desinterés y sin regateo de ningún tipo de esfuerzo, todo ello salpicado con la fina ironía de su buen saber hacer. La categoría humana e intelectual del Prof. Aroca quedó patente una vez más.

Notas breves

NOTAS NECROLÓGICAS

La Junta Directiva ha tenido conocimiento del fallecimiento de nuestro consocio D. José Luis Aguirre Ruiz, de Villarcayo (Burgos). Deseamos expresar en nombre de todos los miembros de la Sociedad nuestro sentimiento de pesar por la pérdida de este activo compañero.

Después de cerrar este número, hemos tenido noticia del fallecimiento de la esposa de nuestro Vicepresidente de Castilla-La Mancha, Salvador Herrero Pallardo, a quien deseamos transmitir el pésame en nombre de todos los miembros de la Sociedad.

RED INTERNET

Está en tramitación la inclusión de una página con información sobre nuestra Sociedad en el servidor del Ministerio de Educación y Ciencia, gestionado por el Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y la Comunicación. Este Programa estaba adscrito a la Dirección General de Renovación Pedagógica, que ha sido suprimida por Real Decreto del pasado día 10 de mayo, por lo que habrá que estar a la reorganización que resulte.

De los avatares de este proyecto tendrán cumplida información nuestros socios.

INCLUSIÓN EN ZDM

Según se acordó en su momento en la Asamblea General de la Sociedad nos hemos dirigido a los editores del Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, para la inclusión de nuestro Boletín entre las revistas cuyos artículos son referenciados. La respuesta de esta prestigiosa revista de referencia ha sido positiva, por lo que próximamente comenzarán a aparecer en ella las correspondientes recensiones. Nos han solicitado que se publique un resumen en inglés de los artículos que sean en castellano, política que iniciamos en este número.

The Construction of Symmetrical Patterns Via Iterated Transformations

Hans Schupp

*Fachbereich Mathematik der Universität des Saarlandes
Postfach 15 11 50, D-66041 Saarbrücken*

Nota de los editores: Continuando con la sección dedicada a colaboraciones de prestigiosos profesores extranjeros, comenzada en nuestro Boletín núm. 39, publicamos aquí este artículo del Prof. Dr. Hans Schupp de la Universidad de Saarbrücken (Alemania). Ha sido profesor de «gymnasium». Ha participado en Formación de Profesores. Ha sido Presidente de la Sociedad Alemana de Didáctica de la Matemática. Su interés en investigación se centra en Didáctica de la Geometría y en Educación Estadística. Con su equipo ha desarrollado una extensa colección de programas en lenguaje Pascal, encaminados a facilitar el descubrimiento y aprendizaje en temas geométricos y estadísticos. Es uno de los profesores invitados a impartir una conferencia plenaria en el ICME 8.

1. Symmetry in mathematics

Symmetry respectively to symmetrize is a *fundamental idea* of science and mathematics in general and of geometry in particular (s.[3],[4],[7],[8]). Why?

- The intention to produce new things from given ones in an both economical and aesthetic manner has *archetypal character*. Dreyfus; Eisenberg (s.[1]) speak of the «inborn desire of man to symmetrize». We - symmetrical beings ourselves - are surrounded by natural and artificial symmetrical objects and are increasing them steadily, in daily life, mathematics, science, engineering and arts.
- One can handle symmetry at rather *different levels*.
- Especially geometers have explored and used *symmetry from ancient up to recent times*, from regular figures and solids up to fractals.
- How this is done (in geometry, group theory, combinatorics, probability theory etc.) *sheds light on mathematical thinking* and behaving.
- There are *close connections* to other central ideas (in geometry: to tessellate, to optimize, to zoom, to transform, to iterate).

2. Deficits in the current treatment of symmetry in our schools (at least in Germany)

We mention above all:

- The concept of *symmetry is mostly restricted to axial and central symmetry*, i.e. to simple forms of involution symmetry.
- *Spatial symmetry is totally neglected.*
- *There is a concentration on analytic* to the disadvantage of synthetic characterization.
- *The study of symmetrical figures predominates over their construction.*
- *The heuristic potential of the symmetry concept is not in the last exhausted.*

3. Reasons for the discrepancy between scientific importance and didactical relevance of symmetry

Why is symmetry –instead of being a guide line in mathematics instruction or at least in its geometrical parts– reduced to simple types and to early grades of this instruction?

I shall concentrate on *two possible reasons* (there are more!, s.[5]).

One is the *euclidean tradition* (exactly said: the tradition of school courses in euclidean geometry). Although the greece geometers delt intensively with symmetrical figures and solids they didn't build a symmetry concept. The word «symmetry» doesn't even appear in Euclid's «Elements». One needs transformations to define symmetry; but transformations were no mathetical entities at that time, from serious philosophical objections. As a consequence explicit dealing with symmetry could enter the schools not until the watering down of the euclidean course by a propedeutical precourse and only within this first, preformal encounter with geometrical phenomena.

It's true the «New Math» of the Sixties did establish transformation geometry in school, but unfortunately neglected the strong interdependence between figure and transformation that is constituent for symmetry and symmetrizing.

As a second reason we cite the *difficulties to produce nontrivial symmetrical figures by means of traditional media*. It is laborious to construct say an interesting frieze pattern with straightedge and compass, and ambitious to analyze such an ornament when no constructions did precede.

4. A symmetry program

To overcome the above mentioned discrepancy we have developped a learnware, that allows –we believe in a simple and convincing manner– to *create symmetrical pat-*

terns by subduing an arbitrarily chosen figure (a motif) to the cyclic group of a nonidentical, otherwise also arbitrarily chosen transformation (in class-room language: by iterating the transformation of a figure). The choices are done with menu or mouse, the transformation works after simply having pushed the for the b-key (forward or backward (inverse transformation)).

Examples:

- a) Rotation symmetry (rosette symmetry, s. fig. 1)
 motif: broken line
 transformation: rotation (center = origin of the co'system)
 The pattern is complete after $n = 5$ iterations.

More general:

If the measure of the rotation angle is $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$ then $n = \frac{q \cdot 360}{\text{gcd}(p; 360)}$.

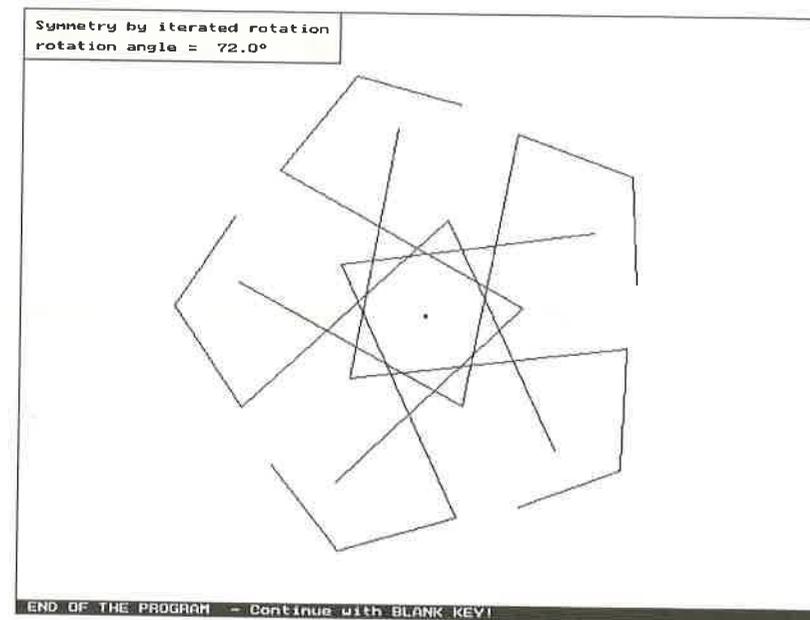


Figure 1

b) *Translation symmetry (frieze symmetry, s. fig. 2)*

motif: pentagon

transformation: translation The pattern cannot be completed ($n \rightarrow \infty$), but is «at hand» (as a line is).

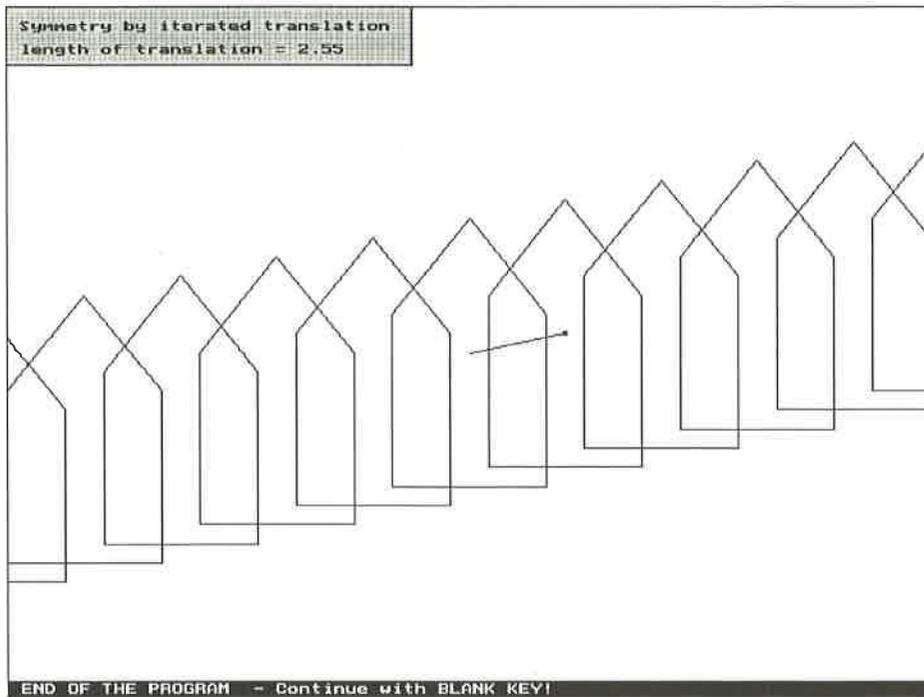


Figure 2

c) *Stretching symmetry (funnel symmetry, s. fig. 3)*

motif: circle

transformation: central stretching (homothety)

$n \rightarrow \infty$

d) *Rotation-stretching symmetry (spiral symmetry, s. fig. 4)*

motif: triangle

transformation: rotation-stretching

$n \rightarrow \infty$

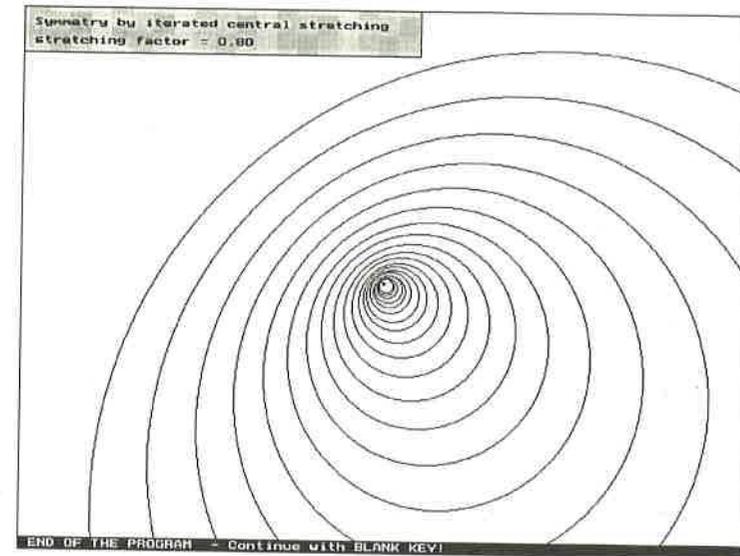


Figure 3

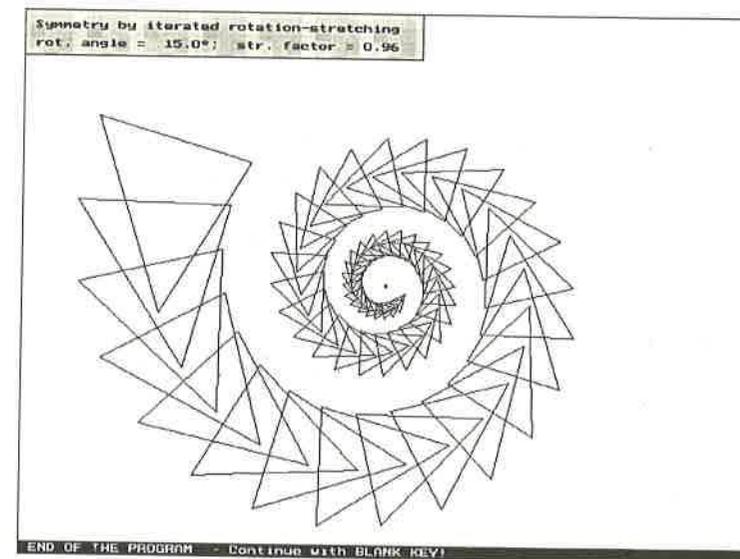


Figure 4

5. «Theory»

The *theoretical background* of our strategy is very simple and easily to work out. It consists of a definition and a statement together with an important special case.

Definition: Let t be a (bijective, but non identical) transformation (in the euclidean plane). Then a figur F (= nonempty subset of the set of all points of this plane) is called *t-symmetrical* iff $F' := t(F) = F$.

Statement: Let M be a figure (motif) and $t \neq \text{id}$ a transformation applied to it, $M^{(i)}$ the image of M after i iterations of t , $M^{(-i)}$ the image of M after i iterations of t^{-1} (the invers transformation of t), and $M^{(0)} = M$, then the overall figure (pattern) $P = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} M^{(i)}$ is *t-symmetrical*.

Special case: If there is a (minimal) $n \in \mathbb{N}^*$ so that $t^n := t \circ t \circ \dots \circ t$ with n «factors» $t = \text{id}$, then the pattern consists of n images of the motif: $P = \bigcup_{i=1}^n M^{(i)}$.

We have enlarged the usual school concept of symmetry ($n = 2$) (of course without having exhausted it) and have got an interesting and economic way of getting affiliated patterns.

6. Free activities

But the *decisive question* is: *What can the students do*, what can they explore and what can they really learn within this approach?

First of all notice that *the actual designer is not the computer but its user*. It is he who chooses the type of the motif and its details as well as type and extent of the transformation.

That *one always gets a symmetrical and therefore delightful pattern* is a fascinating observation and insight for the students. They likewise enjoy the –compared with traditional constructions– warranted degrees of freedom. What they do turns out to be *more a composition than a construction*.

Our –till now not representative– experiences show, that –at first– the students simply play with this charming tool, but very soon tend to *experiment, to reflect and to argue*, in the sense of

«What happens if...?»	(preview)
«Why did...happen?»	(lookback)
«What must happen, so that...?»	(planning).

Here some examples of what they have worked out.

a) Role of the motif

The final symmetry does not at all depend on the motif but (surprisingly) only on the chosen transformation. However the motif can influence the appearance of the pattern.

b) Ambiguity of the motif

Not only the chosen figure but each of its images could have served as motif. In case of the rotation: Even each sector of the plane with the center as top and the rotation angle as opening angle. (This fact explains comparatively simply why a square is divided in four congruent parts by each pair of perpendicular lines passing its center.)

c) Additional symmetries

A circle as motif for rotation symmetry leads to a pattern, that has symmetries we didn't intend (s. fig. 5): There are not only the n fix-rotations but equally n fix-reflexions of the pattern (for experts: The symmetry group is D_n (dihedral) instead of C_n (cyclic)). Why that?

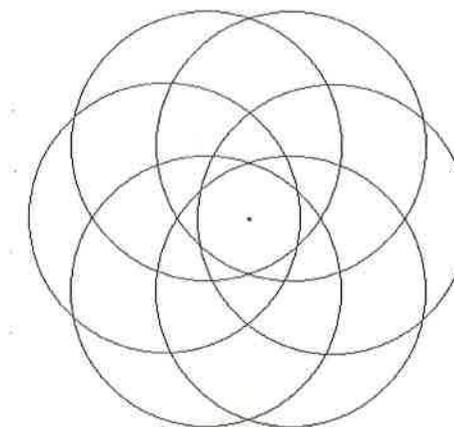


Figure 5

First conjecture: Because the motif itself is already axial symmetrical. A simple rectangle ruins it (s. fig. 6).

Fortunately the program allows a very simple alternation of the motif (you only have to use the c(hange)-key), so that the pattern shows the above mentioned reflexion symmetries. Thus we come to the

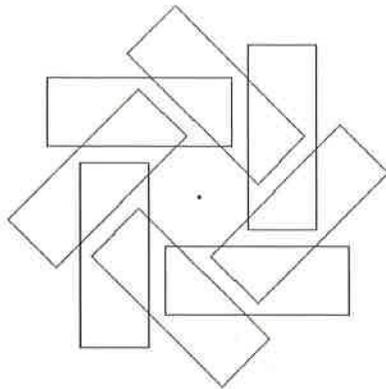


Figure 6

Second conjecture: There are n additional symmetry axes passing the center, iff the motif itself has such an axis. This always holds, if we start with a line or a circle.

Whether we verify this conjecture depends on the age and the quality of the learning group.

d) *Subpatterns*

In case of a finite n (= number of iterations needed to complete the pattern) take a nontrivial divisor d of n . In case of an infinite n take any $d \in \mathbb{N}^*$ (> 1). Then the motif,

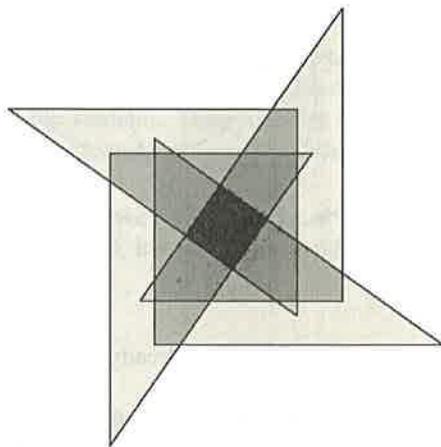


Figure 7 (a)

its d -th image (under t and t^{-1}), $2d$ -th image etc. form together a subpattern (of course as we are in a subgroup of the cyclic group mentioned above).

Example: Take a house in fig. 2 (a circle in fig. 5) and each second image.

Likewise we get a subpattern when we start from a subset of the original motif. A trivial remark, but with interesting consequences: As subset we choose the intersection of the original motif and its first image, then the intersection of the subset and its first two images etc., as long as further images exist and these intersections are nonempty. Then we get a sequence of subpatterns, each within the former ones, in case of rotation symmetry maximal n (s. fig.7 a),b)).

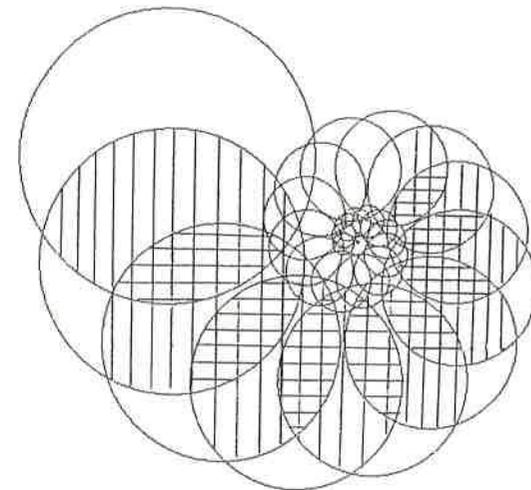


Figure 7 (b)

7. Guided activities

a) Symmetry as proof strategy

Two examples (for others s. [2]):

α) To show that the inner quadrangle in fig. 8 is a square too we remind that an iterated rotation with the midpoint of the given square as center and angle 90° doesn't affect this square but turns each of the inner lines (from a corner to the midpoint of the next side but one) into all others. As we have seen above (s. 6.c)) their union must surround a regular quadrangle, i.e. a square.

Compare this simple argument with the corresponding congruence proof. And notice, that at least two generalizations seem reasonable: Instead of the square you can

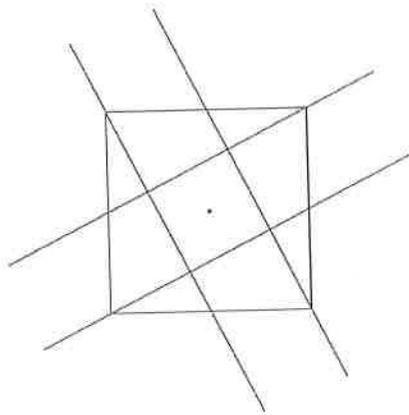


Figure 8

start from a regular n -gon and get an inner regular n -gon. Instead of the midpoint you can choose just any point on the next side but one if only the n ratios correspond.

β) Given the four sides of a trapezoid. Do construct it!

Iterated translation of a reflecting figure produces the solution triangle in a natural manner (s. fig. 9).

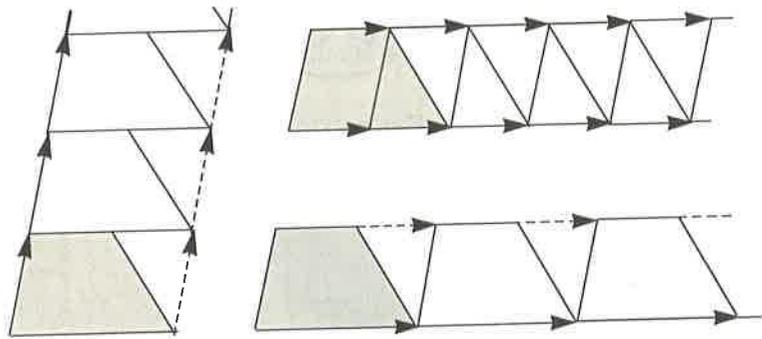


Figure 9

b) Pattern analysis as simulation of pattern construction

The analysis of symmetric patterns in the world around us is a fine example of an instruction that faces real life and –at the same time– goes into remarkable creations of cultural life. Unfortunately such an analysis can be pretty hard for a student (s. fig. 10).

A predeceasing synthesis may help to reduce these difficulties. *Analysis can be carried out as simulated synthesis.* Is it possible to create such a figure myself (with or without computer)? Through which motif and which transformation?

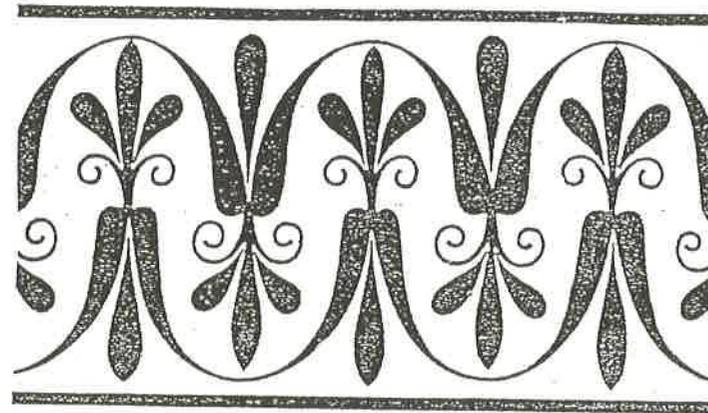


Figure 10

c) Convergency and self-similarity

Symmetrizing by using similarity transformations can be a welcome opportunity to visualize convergency. Indeed: The distances between the center and the iterated images of a point outside form a convergent geometrical sequence (s. fig. 11, with a point as motif and a rotation-stretching as transformation).

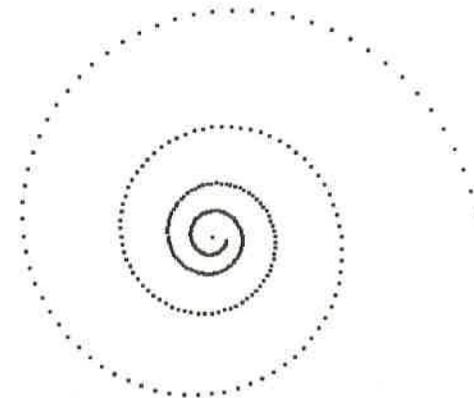


Figure 11

What happens near the center? We use the z(oom)-key and notice: exactly the same: $d \cdot k^i$ (d = original distance, k = stretching factor < 1) turns into $a \cdot (d \cdot k^i) = (a \cdot d) \cdot k^i$ (a = zoom factor) = $a' \cdot k^i$. This may be the first encounter with *self-similarity*, still of local nature, i.e. reduced to the environment of the center.

8. Outlook

a) Fractal symmetry

Our strategy «Symmetrizing via iterating» of course covers *affine transformations* but doesn't bring essentially new insights. Therefore we alter it.

Instead of one such transformation we take a set $T = \{t_1; t_2; \dots; t_r\}$ of them. Image $M^{(i+1)}$ of the last image $M^{(i)}$ of the given motif M shall be the *union* $\bigcup_{j=1}^r M_j^{(i)}$ of all images belonging to the single transformations t_j . To avoid an explosion of the $M^{(i)}$, each t_j shall be a contraction.

The fixpoint-theorem of Banach ensures the convergency of the sequence $\langle M^{(i)} \rangle$ with a limit figure $M^{(\infty)}$ that is totally independent of M and *T-symmetrical* in the sense $T(M^{(\infty)}) = M^{(\infty)}$.

Thus we see: Like each single transformation in the traditional geometry each set of affine contractions has its own symmetry.

As we are now in fractal geometry, we speak of *fractal symmetry*. But we have a significant difference: Now, not only the symmetry but even the final figure itself doesn't depend on the motif.

In fig. 12 we have characterized each contraction by a triangle (always the same) and its image. This is comfortable, ensures the contraction quality and allows the direct planning of the final fractal (s. fig. 13).

b) Spatial symmetry

The strategy of course holds for *spatial figures and transformations*. Of peculiar interest are those transformations (resp. symmetries) which are not direct prolongations of plane transformations (reflexions, rotations, translations, stretchings) like cylindric or conic screwings (s. fig. 14, 15).

Such patterns are not at all artificial; think at screws (for wood and for iron), spiral staircases, screwdrivers etc.

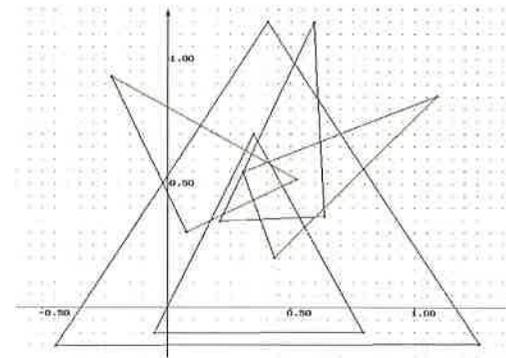


Figure 12

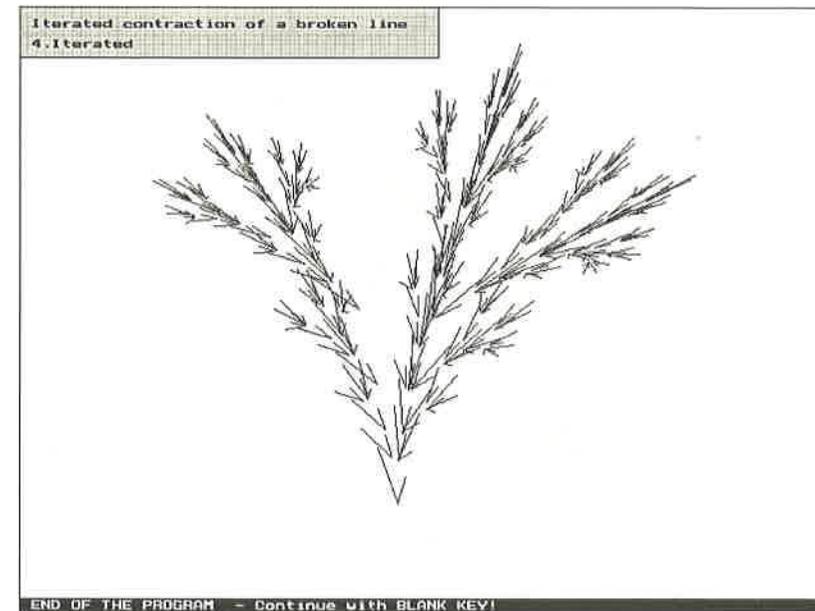


Figure 13

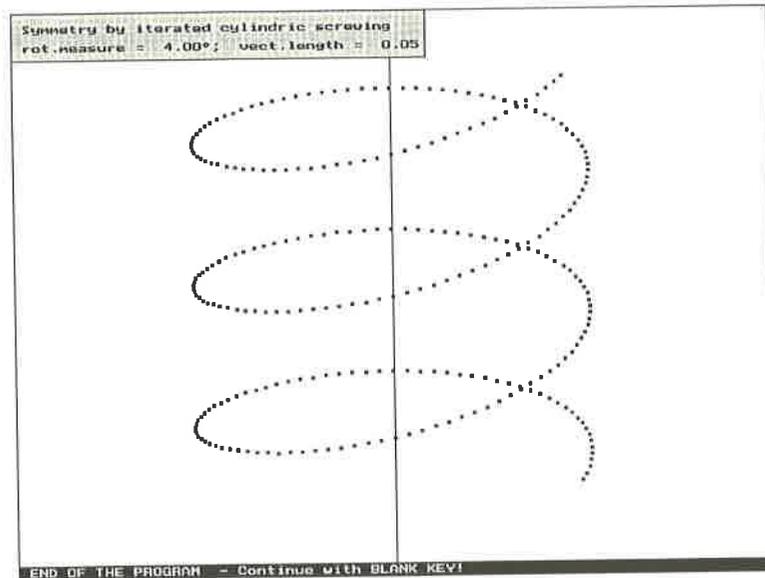


Figure 14

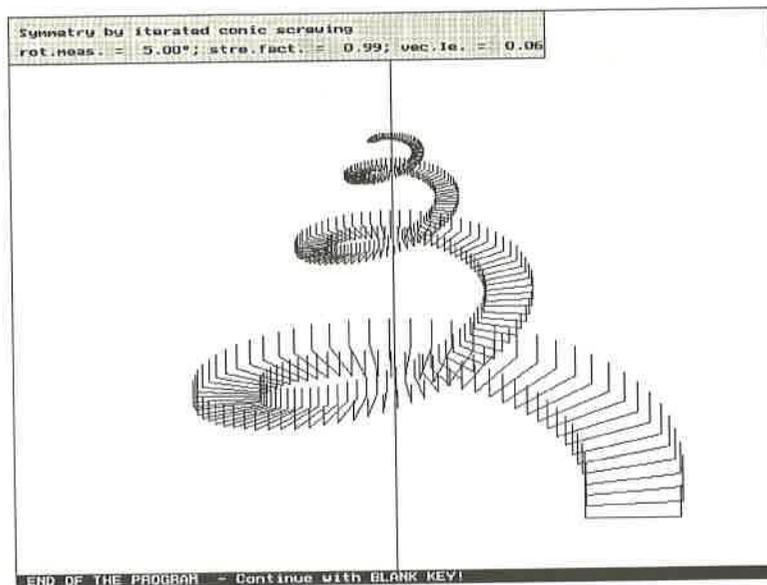


Figure 15

9. Final remark

A broader and deeper understanding of symmetry as well as a better using and enjoying of appropriate features are valuable goals of geometrical instruction. We are convinced, that our program package and the underlying strategy provide an important help to strive for these goals.

Readers who want to study and to use (and maybe to improve) the package (written in PC-TURBO-PASCAL, containing both PAS- and EXE-Files) may have a free copy. They should send a formatted disk to the author.

References

- [1] DREYFUS, T.; EISENBERG, Th. (1990). Symmetry in mathematics learning, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 22, p. 53-59.
- [2] GOLDIN, G.; MCCLINTOCK, E. (1980). The Theme of Symmetry in Problem Solving, *Problem Solving in School Mathematics*. Reston (USA): NCTM.
- [3] LOCKWOOD, E.H.; MACMILLAN, R.H. (1978). *Geometric Symmetry*. Cambridge (UK): University Press 1978.
- [4] HARGITTAI, I. (Ed.) (1986). *Symmetry: Unifying Human Understanding*. New York (USA): Pergamon.
- [5] SCHUPP, H. (1994). Zum Symmetriebegriff im Geometrieunterricht. *Der Wandel im Lehren und Lernen von Mathematik und Naturwissenschaften, Bd.1: Mathematik*. Weinheim(FRG): Deutscher Studienverlag.
- [6] SCHUPP, H. (to appear 1996). Symmetrie und Iteration. *Der Mathematikunterricht*, 42.
- [7] STEWART, I.; GOLUBITSKY, M. (1993). *Denkt Gott symmetrisch?* Basel (CH): Birkhäuser.
- [8] WEYL, H. (1955). *Symmetrie*. Basel (CH): Birkhäuser.

Procedimientos para lograr aproximaciones de distintos irracionales algebraicos

Javier Peralta

Universidad Autónoma de Madrid

Abstract:

This paper deals with the possibility of getting more familiar with some algebraic irrationals - those of the type p/q , $p, q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ - as a contribution to solving the relevant didactic problem of the introduction of the real number. For this purpose, we develop some geometrical constructions and we display different convergent sequences to the irrationals mentioned above.

1. Introducción

1.1. Es bien sabido que la introducción de los números reales –problema didáctico importante, sin duda, en la enseñanza de las matemáticas–, ofrece serias dificultades, que conducen en muchos casos a que el alumno se quede únicamente con ciertos axiomas y propiedades de los mismos, sin llegar a su auténtica comprensión. Obviamente, la mayor complicación radica en los números irracionales, cuya expresión decimal consta de infinitas cifras no periódicas; razón suficiente para originar importantes conflictos, tal como ha sucedido a lo largo de la historia, donde pueden encontrarse numerosas controversias sobre el particular.

1.2. A nuestro juicio, la introducción del número real exige básicamente cumplir los cuatro requisitos siguientes:

- Mostrar la necesidad de ampliar el conjunto de los números racionales; lo que suele hacerse patente presentando alguna ecuación no resoluble en \mathbb{Q} , tal como $x^2 - 2 = 0$. Ello obliga además a probar que $\sqrt{2}$ (si la ecuación propuesta es la anterior) no puede expresarse como cociente de dos enteros.
- Resaltar el hecho de que, aunque los números racionales están «muy juntos» unos de otros (entre cada dos de ellos hay otro racional y, por tanto, infinitos racionales); en cambio, hay huecos en la representación de los mismos sobre una recta.

- Tratar que el alumno se familiarice con los números irracionales y no los contemple como algo inaccesible.
- Una vez que se ha tomado conciencia de la existencia de los irracionales y se ha tenido ocasión de manejar algunos de ellos, ya se puede definir el conjunto de los números reales.

1.3. La experiencia nos confirma, en cambio, que suele hacerse lo siguiente: dejar constancia de la necesidad de la ampliación de \mathbb{Q} , probar que $\sqrt{2}$ es irracional, hacer su representación sobre la recta, y tratar de dar una definición o construcción formal de \mathbb{R} . Quedan por tanto en un segundo plano los dos aspectos que se indican a continuación, y a los que nos dedicaremos en este trabajo.

- La representación y estudio de algún irracional distinto de $\sqrt{2}$.
- La manipulación de los irracionales mediante aproximaciones de los mismos a partir de fracciones (las técnicas de aproximación utilizadas casi siempre suelen reducirse simplemente a encajar cada irracional en intervalos a cuyos extremos se les va añadiendo cada vez una nueva cifra decimal).

1.4. Esas son las razones que nos han animado ahora a presentar este artículo sobre los irracionales de la forma p/q , $p, q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, para tratar de desmitificarlos y hacerlos accesibles a los alumnos; en otros trabajos nos ocuparemos de irracionales de otros tipos.

El medio que emplearemos para ello será fundamentalmente la utilización de sucesiones de racionales convergentes a los irracionales indicados; no sólo para que quede constancia de la propiedad arquimediana de \mathbb{R} , sino también para disponer de distintos métodos de aproximación, lo que permitirá, a su vez, establecer comparaciones entre los mismos.

2. Unas construcciones geométricas elementales

2.1. La manera habitual de comprobar que $\sqrt{2}$ tiene asignado un punto en la recta suele realizarse construyendo un triángulo rectángulo isósceles de cateto 1, y girando posteriormente la hipotenusa con origen el punto correspondiente a 0 (figura 1).

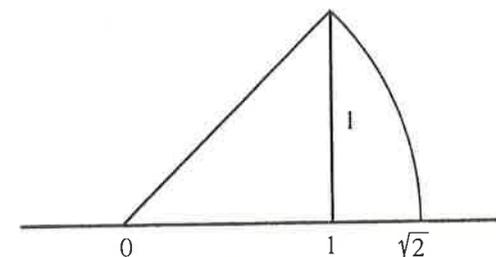


Figura 1

Una vez demostrado ([2]) que \sqrt{n} es irracional si n es un número natural que no sea cuadrado perfecto, y reiterando la construcción anterior, pueden asimismo representarse en la recta los irracionales $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, etc., como se observa en las Figuras 2 y 3, cuyas interpretaciones son obvias.

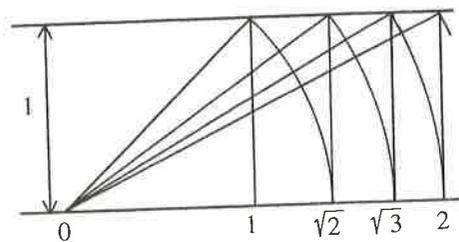


Figura 2

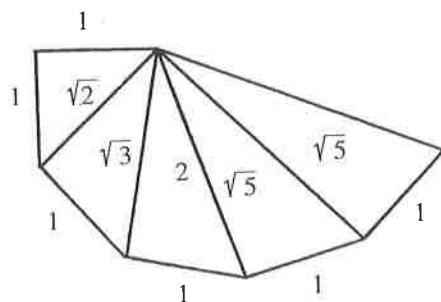


Figura 3

2.2. También pueden idearse otros procedimientos elementales para obtener geoméricamente los irracionales anteriores.

En primer lugar, para dibujar $\sqrt{2}$ no es necesario conocer el teorema de Pitágoras, ya que basta con hallar un segmento de longitud x que verifique: $x^2 = 2$. Y ello puede lograrse mediante la construcción de la figura 4, en la que se observa —por ejemplo, por plegado— que el área del cuadrado ABCD

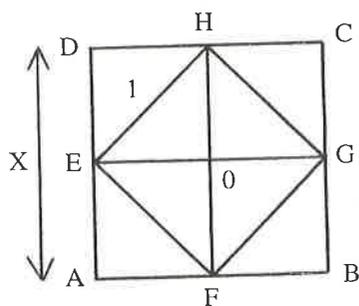


Figura 4

es el doble que la del cuadrado EFGH, de lado 1, por lo que x es el segmento buscado.

Y en cuanto a la construcción geométrica de los restantes irracionales mencionados, pueden concebirse otros métodos consistentes en el dibujo de determinadas cuadrículas, como la que aparece en la figura 5, y que no creemos necesario comentar. El profesor podría presentar dicha

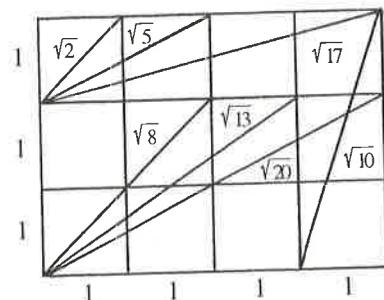


Figura 5

cuadrícula u otras similares, únicamente con las dimensiones de los lados de los rectángulos, e invitar a sus alumnos a la obtención de irracionales, mediante el trazado de diagonales y la utilización del teorema de Pitágoras.

3. El par de números «lado y diagonal»

3.1. Hay un procedimiento recursivo —probablemente el primero en la historia de la matemática— para la determinación de $\sqrt{2}$, que ya aparece en los Elementos de Euclides, consistente en la construcción del par de números «lado y diagonal» ([3]), y que puede presentarse a los alumnos de la siguiente forma.

Se dibuja un cuadrado de lado $1 + \sqrt{2}$ y, dentro del mismo, otro de lado 1, como aparece en la figura 6. Se piden hallar las diagonales de ambos, con lo que se llega a que $D_1 = \sqrt{2}$ es la diagonal del cuadrado pequeño, y $D_2 = 2 + \sqrt{2}$ la del grande; por tanto, $AB = 2$.

Se dirá entonces a los alumnos que intenten repetir el ejercicio, suponiendo ahora que L_1 y D_1 son el lado y la diagonal del cuadrado pequeño C_1 ; y que construyan después el cuadrado grande C_2 . Se tienen:

$$D_1 = L_1\sqrt{2}, \quad L_2 = L_1 + D_1,$$

$$D_2 = L_2\sqrt{2} = (L_1 + D_1)\sqrt{2} = (D_1 + L_1\sqrt{2})\sqrt{2} = 2L_1 + D_1;$$

por lo que para construir C_2 basta prolongar la diagonal OA, tomando $AB = 2L_1$. La diagonal OB nos permite dibujar C_2 .

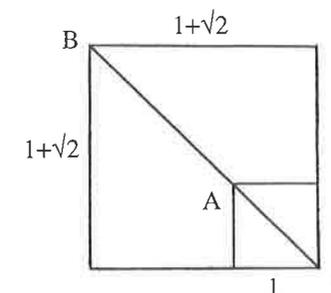


Figura 6

3.2. Repitiendo el proceso con cuadrados $C_3, C_4, \dots, C_n, \dots$, se obtienen las expresiones:

$$L_n = L_{n-1} + D_{n-1}, \quad D_n = D_{n-1} + 2L_{n-1} \quad (1)$$

Si se toma, por ejemplo, $L_1 = 1$, se tienen: $D_1 = \sqrt{2}$, $L_2 = 1 + \sqrt{2}$, $D_2 = 2 + \sqrt{2}$, $L_3 = 3 + 2\sqrt{2}$, $D_3 = 4 + 3\sqrt{2}$, ...; lo que conduce a:

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \frac{2 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} = \frac{4 + 3\sqrt{2}}{3 + 2\sqrt{2}} = \frac{10 + 7\sqrt{2}}{7 + 5\sqrt{2}} = \dots = \sqrt{2} \quad (2)$$

3.3. La idea del procedimiento descrito en el apartado anterior, servirá para obtener aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$.

Basta para ello con que tomemos dos unidades: la unidad-lado L_1 , y la unidad-diagonal D_1 , y continuemos el proceso iterativamente a partir de las fórmulas (1).

Se tienen, por tanto:

$$L_1 = 1, D_1 = 1; L_2 = 2, D_2 = 3; L_3 = 5, D_3 = 7; L_4 = 12, D_4 = 17; \dots$$

Sea ahora la sucesión de término general $t_n = D_n / L_n$; esto es:

$$t^1 = 1/1, t_2 = 3/2, t_3 = 7/5, t_4 = 17/12, t_5 = 41/29, \dots \quad (3)$$

Se deducen entonces las subsucesiones (t_{2n+1}) y (t_{2n}) , que se aproximan por defecto y por exceso, respectivamente, a $\sqrt{2}$. Se observa también que la primera subsucesión es monótona creciente, y la segunda, monótona decreciente.

Todo ello puede ser probado formalmente, si se desea, aunque la finalidad es otra: obtener aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$, elaborar dichas conjeturas mediante el uso de la calculadora, y profundizar en el concepto de límite de una sucesión.

3.4. Por no extendernos más, en el presente trabajo no nos ocuparemos del desarrollo en fracción continua de los irracionales cuadráticos, cuyas sucesiones de fracciones reducidas proporcionan otro método de aproximación de los mismos, aunque no podemos resistirnos a decir que la sucesión que se obtiene por este procedimiento para $\sqrt{2}$, coincide con la (t_n) definida en (3), como puede verse en [4].

4. Generalización del método de los pitagóricos

4.1. En virtud de las relaciones (1), que ligaban las sucesiones (L_n) y (D_n) , (t_n) puede ser asimismo expresada por recurrencia. En efecto:

$$t_n = \frac{D_n}{L_n} = \frac{2L_{n-1} + D_{n-1}}{L_{n-1} + D_{n-1}} = \frac{2 + t_{n-1}}{1 + t_{n-1}}$$

Por tanto, (t_n) puede definirse si se desea, como

$$t_n = \frac{2 + t_{n-1}}{1 + t_{n-1}}, t_1 = 1 \quad (4)$$

4.2. Como la sucesión (t_n) tiene por límite $\sqrt{2}$, es obvio que, asimismo la $(2/t_n)$ tendrá el mismo límite; por lo que también puede considerarse la sucesión (\bar{t}_n) definida como:

$$\bar{t}_n = \frac{2(1 + t_{n-1})}{2 + t_{n-1}}, \bar{t}_1 = 2 \quad (5)$$

para obtener aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$.

Llegados a este punto, se les puede invitar a los alumnos a que establezcan comparaciones entre (t_n) y (\bar{t}_n) . Para ello, se les pedirá que calculen un cierto número de cada una de las citadas sucesiones (8 ó 10, por ejemplo).

Llegarán sin dificultad a que, a diferencia de (t_n) , (\bar{t}_n) , está acotada inferiormente por $\sqrt{2}$, por lo que suministra aproximaciones racionales por exceso de dicho número.

Asimismo puede observarse que $\bar{t}_{2n} = t_{2n}$, y que $\bar{t}_{2n+1} = \frac{2}{t_{2n+1}}, \forall n$.

4.3. Hay, sin embargo, sucesiones más generales que la (t_n) , de los pitagóricos —y que pueden ser construidas con su misma idea geométrica— que son de utilidad para aproximar $\sqrt{2}$. Para obtenerlas se planteará la siguiente cuestión a los alumnos.

El método de los pitagóricos estaba basado, fundamentalmente, en la idea geométrica de que si L y D eran el lado y la diagonal, respectivamente, de un cuadrado, entonces $L' = L + D$ y $D' = 2L + D$ son también, a su vez, el lado y la diagonal de otro cuadrado.

Supongamos ahora que L y D tuvieran el significado que hemos dicho, ¿será posible que $d = 2aL + bD$ fuera la diagonal de otro cuadrado cuyo lado l habría que averiguar?

Ello daría lugar a:

$$d = 2aL + bD = (2a + b\sqrt{2})L = 2(\sqrt{2}a + b)L$$

y como debe ser $d = \sqrt{2}l$, se deduce que $l = (\sqrt{2}a + b)L = aD + bL$.

Se llegará por tanto, a que $l = bL + aD$ y $d = 2aL + bD$ son, respectivamente, el lado y la diagonal de otro cuadrado.

En consecuencia, si se toman las sucesiones (l_n) y (d_n) definidas como:

$$l_n = bl_{n-1} + ad_{n-1}, d_n = 2al_{n-1} + bd_{n-1}$$

entonces la sucesión de término general $u_n = d_n/l_n$ converge a $\sqrt{2}$, y sirve para hallar aproximaciones de dicho número.

4.4. Si se prefiere, como, $d_n = \frac{2a l_{n-1} + b d_{n-1}}{b l_{n-1} + a d_{n-1}} = \frac{2a + b u_{n-1}}{b + a u_{n-1}}$, (u_n) puede ser definida por recurrencia así:

$$u_n = \frac{2a + b u_{n-1}}{b + a u_{n-1}}, u_1 = 1 \quad (7)$$

Evidentemente debe ser $a \neq 0 \neq b$, ya que si $a = 0$, resulta la sucesión constante 1, y si $b = 0$, es $u_n = 2/u_{n-1}$, con lo que se obtiene la sucesión 1, 2, 1, 2, ...

Además, a y b tienen que ser positivos, debido a la interpretación geométrica que se ha hecho anteriormente, y exigiremos que sean racionales, puesto que nuestro objetivo es construir sucesiones racionales que converjan a $\sqrt{2}$. Así pues, si $\mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$, tiene que cumplirse que $a, b \in \mathbb{Q}^+$.

4.5. De todo lo anterior se deduce que $u_n > 0, \forall n$, pero no es posible inferir nuevas propiedades de (u_n) independientes de a y b . En vista de ello, procedería decir a los alumnos que estudiarán (u_n) para algunos valores particulares de a y b , y que tratarán de extraer conclusiones de las mismas que pudieran, posteriormente, ser extrapolables a casos más generales.

Por no alargarnos innecesariamente en estas líneas, omitiremos esa fase de experimentación y de elaboración de conjeturas, y pasaremos a la fase siguiente, en la que las conjeturas ya se encuentran formuladas. En concreto, probaremos que la condición necesaria y suficiente para que u_n^2 sea menor que 2 es que $(2a^2 - b^2) \cdot (2 - u_{n-1}^2)$ sea menor que cero.

En efecto, dado que $2a^2 - b^2 \neq 0$, se cumplen las siguientes equivalencias:

$$(2a^2 - b^2) \cdot (2 - u_{n-1}^2) < 0 \Leftrightarrow 2(2a^2 - b^2) < (2a^2 - b^2)u_{n-1}^2 \Leftrightarrow 4a^2 + 4abu_{n-1} + b^2u_{n-1}^2 < 2b^2 + 4abu_{n-1} + 2a^2u_{n-1}^2 \Leftrightarrow (2a + bu_{n-1})^2 < 2(b + au_{n-1})^2 \Leftrightarrow \left(\frac{2a + bu_{n-1}}{b + au_{n-1}}\right)^2 = u_n^2 < 2,$$

como queríamos demostrar.

Por tanto, si $2a^2 < b^2$, entonces es equivalente afirmar que $u_n^2 < 2$, o que $u_{n-1}^2 < 2, \forall n$; y si $2a^2 > b^2$, $u_n^2 < 2 \Leftrightarrow u_{n-1}^2 > 2, \forall n$.

Como $u_1 = 1 < \sqrt{2}$, $u_2^2 < 2$; luego si $2a^2 < b^2$, se tiene: $u_n^2 < 2$. Se llega en consecuencia a que si $2a^2 < b^2$, la sucesión (u_n) está acotada superiormente por $\sqrt{2}$. Además, (u_n) es monótona creciente, ya que como $u_{n-1} < \sqrt{2}$, también $bu_{n-1} + a^2u_{n-1} < 2a + bu_{n-1}$; esto es, $u_{n-1} < (2a + bu_{n-1})/(b + au_{n-1})$, luego $u_{n-1} < u_n, \forall n$.

Se concluye análogamente que si $2a^2 > b^2$, (u_{2n}) está acotada inferiormente por $\sqrt{2}$, y (u_{2n+1}) está acotada superiormente por $\sqrt{2}$. Además, (u_{2n}) es monótona decreciente, y (u_{2n+1}) , monótona creciente.

Tengamos en cuenta por último que, evidentemente, la sucesión (t_n) definida en (4) es un caso particular de (u_n) para $a = b = 1$.

4.6. A partir de la sucesión (\bar{t}_n) definida en (5) que también tenía por límite $\sqrt{2}$, puede ahora llegarse mediante un proceso parecido al anterior, a que (\bar{u}_n) dada por:

$$\bar{u}_n = \frac{2b' + 2a'\bar{u}_{n-1}}{2a' + b'\bar{u}_{n-1}}, \bar{u}_1 = 2, a', b' \in \mathbb{Q}^+ \quad (8)$$

también converge a $\sqrt{2}$.

De todas formas, ello no ofrece ningún interés, por ser esta sucesión del tipo de la (u_n) definida en (7), con $a' = b/2$, $b' = a$ (salvo su primer término \bar{u}_1 , lo que no afecta a su límite $\bar{u} = \sqrt{2}$). Que efectivamente converge a $\sqrt{2}$ puede probarse, asimismo, resolviendo la ecuación $\bar{u} = (2b' + 2a'\bar{u}) / (2a' + b'\bar{u})$; esto es, atendiendo únicamente a la ley de recurrencia.

5. Extensión a otros irracionales algebraicos

5.1. En este momento, puede plantearse a los alumnos si los métodos de aproximación de $\sqrt{2}$ podrían generalizarse a otros irracionales. O dicho con más precisión: si el proceso de construcción de la sucesión (u_n) que tiende a 2, descrito anteriormente, podría extenderse a otra sucesión convergente a \sqrt{p} , siendo $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, y tal que p no sea un cuadrado perfecto. El paso siguiente consistirá en ampliar el procedimiento a sucesiones que tiendan a $p^{1/q}$.

Para resolver el primero de los problemas propuestos, se recordaría que (u_n) ha sido construida a partir de las sucesiones (l_n) y (d_n) definidas en (6). Se trata, por tanto, de introducir alguna modificación en éstas para que proporcionen otra nueva sucesión que converja a \sqrt{p} , en lugar de a $\sqrt{2}$.

Surgirá así fácilmente que las nuevas sucesiones (l'_n) y (d'_n) deben ser definidas como:

$$l'_n = b l'_{n-1} + a d'_{n-1}, d'_n = p a l'_{n-1} + b d'_{n-1}, l'_1 = d'_1 = 1; a, b \in \mathbb{Q}^+.$$

A partir de las mismas, construiremos la de término general $u'_n = d'_n / l'_n$ que, en virtud de que $(pa'_{n-1} + bd'_{n-1}) / (bl'_{n-1} + ad'_{n-1}) = (pa + bu'_{n-1}) / (b + au'_{n-1})$, puede ser expresada por:

$$u'_n = \frac{pa + bu'_{n-1}}{b + au'_{n-1}}, u'_1 = 1 \quad (9)$$

5.2. Para demostrar que (u'_n) tiende a \sqrt{p} , procederemos con razonamientos similares a los utilizados en 4.5, que no repetiremos. Nos limitaremos a enunciar los pasos a seguir.

Se prueba en primer lugar que:

$$u'^2_n < p \Leftrightarrow (pa^2 - b^2) \cdot (p - u'^2_{n-1}) < 0,$$

lo que implica que si se verifica que $pa^2 < b^2$, entonces la sucesión (u'_n) es monótona creciente y está acotada superiormente por \sqrt{p} . Si, en cambio, $pa^2 > b^2$, (u'_{2n}) es monótona decreciente y está acotada inferiormente por \sqrt{p} , y (u'_{2n+1}) es monótona creciente y está acotada superiormente por p . Y con ello se agotan todas las posibilidades, pues es obvio que $pa^2 \neq b^2$.

Se deduce, en consecuencia, que en cualquier caso (u'_n) es convergente, y su límite u' verificará: $u' = (pa + bu') / (b + au')$. De ello se concluye que $u' = \sqrt{p}$.

5.3. Llegamos ahora a una situación en que es pertinente plantear a los alumnos si el proceso podría ser generalizado a la obtención de sucesiones convergentes a $p^{1/q}$, $p, q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$.

Posiblemente sea mejor, para que puedan participar en la creación del procedimiento, decirles que primeramente resuelvan el problema en un caso particular, para generalizar posteriormente; es decir, que intenten circunscribirlo, en una primera tentativa, al caso de $p^{1/3}$, por ejemplo.

Para ello se les dará la siguiente indicación: analizar con detenimiento el proceso mediante el cual se dedujo anteriormente que $u' = \sqrt{p}$, y dejar que los alumnos reflexionen.

Se les debe conducir a que observen que se ha llegado a esa conclusión al resolver la ecuación $u' = (pa + bu') / (b + au')$; esto es, $bu' + au'^2 = pa + bu'$. Y esto ha llevado a que $au'^2 = pa$, de donde $u' = \sqrt{p}$.

Planteadas así la cuestión, el alumno intentará ahora que le quede la ecuación $au'^3 = pa$, lo que debe conducirlos a $u' = (pa + bu') / (b + au'^2)$; esto es, a considerar la sucesión: $u'_n = (pa + bu'_{n-1}) / (b + au'^2_{n-1})$.

Pasar de ahí al caso general, no debe ofrecer dificultades. Se llegará, por tanto, a que si $p, q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, y p no es una potencia q -ésima de algún número natural, entonces la sucesión (u''_n) definida como:

$$u''_n = \frac{pa + bu''_{n-1}}{b + au''_{n-1}}, u''_1 = 1 \quad (10)$$

tiene por límite a $p^{1/q}$, y los sucesivos términos de (u''_n) sirven para lograr aproximaciones del mismo.

Se invitará posteriormente al alumno a que dé valores a p, q, a y b y obtenga distintas sucesiones que tengan por límite $p^{1/q}$, para lo cual, deberá hallar suficientes términos de cada una de aquéllas, con ayuda de la calculadora.

6. Sucesión de rectángulos que «tienden a cuadrados»

6.1. La idea fundamental del procedimiento de los pitagóricos para lograr aproximaciones de $\sqrt{2}$ está basada en que $\sqrt{2}$ es la diagonal de un cuadrado de lado unidad. Ahora bien, hay otra interpretación geométrica posible, por supuesto, el considerar que $\sqrt{2}$ es el lado de un cuadrado de área 2 ([1]).

Esta última idea va a guiarnos para obtener aproximaciones racionales de dicho número irracional. Para ello basta con construir una sucesión de rectángulos de área 2 que «tiendan» al cuadrado, es decir, cuyos lados se diferencien cada vez menos. Entonces, la sucesión de las bases de los mismos (o de las alturas, si se prefiere) convergerá a $\sqrt{2}$.

Sea $v_1 = 1$ la base del primer rectángulo, cuya altura será $2/v_1$. Elegimos entonces como base del segundo rectángulo la media aritmética de las dimensiones del primero: $v_2 = (v_1 + 2/v_1)/2$, y continuamos el proceso. Se tiene, por tanto, la sucesión:

$$v_1 = \frac{1}{2} \left(v_{n-1} + \frac{2}{v_{n-1}} \right), v_1 = 1 \quad (11)$$

esto es: $v_1 = 1, v_2 = 3/2, v_3 = 17/12, v_4 = 577/408, v_5 = 665857/470832, \dots$

6.2. Se puede llegar asimismo a esta sucesión utilizando el método de Newton aplicado a la función $f(x) = x^2 - 2$.

Como es sabido, dicho procedimiento sirve para la aproximación de raíces de una ecuación $f(x) = 0$, y consiste en sustituir el punto de intersección de la curva $y = f(x)$ con el eje de abscisas, por el de su tangente y dicho eje. Para ello se considera la recurrencia $v_n = v_{n-1} - f(v_{n-1}) / f'(v_{n-1})$.

En nuestro caso, nos conduce a $v_n = v_{n-1} \frac{v_{n-1}^2 - 2}{2v_{n-1}}$, coincidente con la expresión de v_n de (11).

6.3. La sucesión (v_n) , obtenida por cualquiera de los dos métodos, puede ser utilizada para establecer conjeturas sobre la misma, una vez que sean hallados suficientes términos; posteriormente, y dependiendo del curso al que nos estemos dirigiendo, deberán ser probadas.

Para demostrar la existencia de límite, se estudiarán su monotonía y acotación.

Como $(v_{n-1} - 2)^2 \geq 0, \forall n$, se deduce que $v_{n-1}^2 + 2 \geq 2\sqrt{2v_{n-1}}$, o lo que es lo mismo, que $(v_{n-1} + 2/v_{n-1}) / 2 \geq \sqrt{2}$, lo que indica que todos los términos de (v_n) (salvo el primero) están acotados inferiormente por $\sqrt{2}$.

Además, (v_n) es monótona decreciente (si excluimos a v_1), ya que como $v_{n-1}^2 \geq 2$, también $2v_{n-1}^2 \geq v_{n-1}^2 + 2$; esto es, $(v_{n-1}^2 + 2) / (2v_{n-1}) \leq v_{n-1}$, o lo que es lo mismo: $v_n \leq v_{n-1}, \forall n \neq 2$.

De todo ello se llega a que (v_n) es convergente, y su límite v verifica: $v = (v + 2/v) / 2$, lo que nos conduce a $v = \sqrt{2}$, como era de esperar.

6.4. Se pueden establecer ahora comparaciones entre (v_n) y (t_n) , definida en (4).

De la simple observación de los seis u ocho primeros términos, parece concluirse que (v_n) converge a $\sqrt{2}$ más rápidamente que (t_n) . Por ejemplo, $v_4 = 577/408 = 1'41421686\dots$ proporciona cinco decimales exactos de $\sqrt{2}$, mientras que $t_4 = 17/12 = 1'41\bar{6}$ sólo suministra dos; $v_5 = 665857/470832 = 1'414213562\dots$ da nueve cifras exactas, cuando $t_5 = 41/29 = 1'413793103\dots$ sólo facilita dos; etc.

Es más, en un examen elemental, si se han calculado algunos términos más, puede deducirse que (v_n) es una subsucesión de (t_n) o, más precisamente, que $v_n = t_{2n-1}$ (12).

Para demostrarlo, primeramente se probará por inducción que:

$$t_{2m} = \frac{t_m^2 + 2}{2t_m}, \forall m \quad (13)$$

En efecto, $t_2 = (t_1^2 + 2) / (2t_1)$; y admitamos que $t_{2m} = (t_m^2 + 2) / (2t_m)$. Entonces: $t_{2m+2} = (2 + t_{2m+1}) / (1 + t_{2m+1}) = (2 + 2t_{2m} + 2 + t_{2m}) / (1 + t_{2m} + 2 + t_{2m}) = (4 + 3t_{2m}) / (3 + 2t_{2m})$, y por la hipótesis de inducción se llega a que:

$$t_{2m+2} = \frac{3t_m^2 + 8t_m + 6}{2t_m^2 + 6t_m + 4} \quad (14)$$

Ahora bien, $3t_m^2 + 8t_m + 6 = (4 + 4t_m + t_m^2) + 2(1 + 2t_m + t_m^2) = (2 + t_m)^2 + 2(1 + t_m)^2$, y $2t_m^2 + 6t_m + 4 = 2(1 + t_m) \cdot (2 + t_m)$, y sustituyendo en (14):

$$t_{2m+2} = \frac{(2 + t_m)^2 + 2(1 + t_m)^2}{2(1 + t_m) \cdot (2 + t_m)} = \frac{\left(\frac{2 + t_m}{1 + t_m}\right)^2 + 2}{2\left(\frac{2 + t_m}{1 + t_m}\right)} = \frac{t_{m+1}^2 + 2}{2t_{m+1}}$$

con lo que queda probado (13).

Y a partir de (13) se prueba (12), asimismo por inducción.

En efecto, $v_1 = t_1$. Y si $v_n = t_{2n-1}$, entonces:

$$t_{2^n} = t_{2 \cdot 2^{n-1}} = \frac{t_{2^{n-1}}^2 + 2}{2t_{2^{n-1}}} = \frac{v_n^2 + 2}{2v_n} = v_{n+1}$$

con lo que queda demostrado.

7. Generalización de este último procedimiento

7.1. Si los alumnos han asimilado las ideas expuestas en 6.1 para lograr aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$, posiblemente estén capacitados para extender este procedimiento al cálculo de $\sqrt[p]{p}$, siendo p un número entero positivo que no sea cuadrado perfecto.

Todo consiste en construir una sucesión de rectángulos de área p que «tiendan a cuadrados», y considerar las bases (o las alturas) de los mismos. Se tiene así la sucesión (v'_n) dada por:

$$v'_n = \frac{1}{2} \left(v'_{n-1} + \frac{p}{v'_{n-1}} \right), v'_1 = 1 \quad (15)$$

Dicha sucesión se deduce que está acotada inferiormente por $\sqrt[p]{p}$ (salvo v'_1) y que tiene por límite $\sqrt[p]{p}$, por lo que permite hallar aproximaciones del mismo sin más que tomar un número suficiente de términos de ella.

7.2. Para generalizar este método al cálculo de $p^{1/q}$, se partirá de la siguiente idea geométrica.

Se van tomando en \mathbb{R}^q prismas q -dimensionales que se asemejen cada vez más a un cubo q -dimensional de volumen p . Si partimos de $v''_1 = 1$ y hay $q-1$ aristas iguales a v''_1 , la arista restante medirá p/v''_1^{q-1} , por lo que la arista de la figura prismática siguiente deberá ser la media aritmética de las anteriores: $v''_2 = [(q-1)v''_1 + p/v''_1^{q-1}]/q$, y así sucesivamente.

En consecuencia, si $p, q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$ y p no es una potencia q -ésima de algún número natural, entonces (v''_n) definida como:

$$v''_n = \frac{1}{q} \left((q-1)v''_{n-1} + \frac{p}{v''_{n-1}^{q-1}} \right), v''_1 = 1 \quad (16)$$

converge a $p^{1/q}$.

8. Utilización de otras medias

8.1. En la construcción del procedimiento anterior ha sido utilizada la media aritmética, en vista de lo cual se podría pensar el idear métodos similares con la ayuda de otras medias.

La experiencia nos dice que el alumno conoce casi exclusivamente la media aritmética o, en el mejor de los casos, la media geométrica; pero que la mayoría de ellos ignora (o ha olvidado) la existencia de la media armónica y de la media cuadrática. Sería ésta una buena ocasión para recordarlas.

Si a y b son dos números reales positivos distintos, y es por ejemplo $0 < b < a$, las medias aritmética, geométrica, armónica y cuadrática son, respectivamente

$$\bar{x} = (a + b) / 2, \quad x' = \sqrt{ab}, \quad \bar{x} = 2ab / (a + b), \quad \hat{x} = (a^2 + b^2) / 2,$$

Podría entonces proponerse para familiarizarse con ellas, que se establecieran comparaciones entre a , b , \bar{x} , x' , \bar{x} , y \hat{x} . Se les puede indicar, por ejemplo, que las eleven al cuadrado y luego las resten de dos en dos. Llegarán a lo siguiente:

$$\bar{x}^2 - b^2 = b^2(3a + b)(a - b) / (a + b)^2 > 0, \quad x'^2 - \bar{x}^2 = ab(a - b)^2 / (a + b)^2 > 0, \\ \bar{x}^2 - x'^2 = (a - b)^2 / 4 > 0, \quad a^2 - \hat{x}^2 = (a^2 - b^2) / 2 > 0, \quad \hat{x}^2 - \bar{x}^2 = (a - b)^2 / 4 > 0;$$

de donde se deduce que $b < \bar{x} < x' < \bar{x} < \hat{x} < a$.

8.2. Una vez recordados los conceptos de media aritmética, geométrica, armónica y cuadrática, puede intentarse abordar el problema planteado al comienzo del apartado 8.1. En concreto, se tratará de reemplazar la media aritmética de las dimensiones de los rectángulos por las otras medias.

Por desgracia, la utilización de la media geométrica no conduce a nada, pues

$$x_n = \sqrt{x_{n-1} \cdot \frac{2}{x_{n-1}}} = \sqrt{2}$$

La media cuadrática tampoco sirve para nuestros propósitos, pues si se toma,

$$x_n = \sqrt{(x_{n-1}^2 + (2/x_{n-1})^2) / 2} = \sqrt{x_{n-1}^4 + 4} / \sqrt{2 \cdot x_{n-1}}$$

nos lleva a la sucesión $x_1 = 1$, $x_2 = \sqrt{5}/2$, $x_3 = 1/2 \cdot \sqrt{41/5}$, ..., que, si bien tiene por límite $\sqrt{2}$, sin embargo no proporciona aproximaciones racionales suyas.

8.3. En cambio, sí obtenemos una nueva sucesión de racionales convergentes a $\sqrt{2}$ si consideramos la media armónica de las dimensiones del rectángulo.

En efecto, será $x_n = 2 / (1/x_{n-1} + x_{n-1}/2)$; esto es, la sucesión (x_n) definida como: $x_n = 4x_{n-1} / (2 + x_{n-1}^2)$, $x_1 = 1$; cuyos primeros términos son: $x_1 = 1$, $x_2 = 4/3$, $x_3 = 24/17$, $x_4 = 816/577$, $x_5 = 941664/665857$, ...

De la observación de los términos de dicha sucesión, los propios alumnos pueden deducir que esté acotada superiormente por $\sqrt{2}$ y es monótona creciente.

En efecto, como $\sqrt{2}(x_{n-1} - 2)^2 \geq 0$, será $4x_{n-1} \leq 2\sqrt{2} + 2x_{n-1}^2$, de donde se llega a que $4x_{n-1} / (2 + x_{n-1}^2) \leq \sqrt{2}$; esto es, $x_n \leq \sqrt{2}$, $\forall n$. Y también que $x_n - x_{n-1} = x_{n-1}(2 - x_{n-1}^2) / (2 + x_{n-1}^2) \geq 0$.

De todo ello se concluye que (x_n) tiene un límite x , que verifica: $x = 4x / (2 + x^2)$; o sea, $x = 2$, como era de esperar.

8.4. Ahora se pedirá que se establezcan comparaciones entre esta sucesión (x_n) y la (v_n) definida en (11), y se llegará por simple observación a que $x_n = 2/v_n$ si $2 \leq n \leq 5$.

Veamos que dicha relación se cumple $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Para ello basta con demostrar los dos puntos siguientes:

i) $x_1 = 2/v_1$.

Hagamos constar que tanto si se toma $x_1 = 1$ como $x_1 = 2$, se llega a que $x_2 = 4/3$ y, por la ley de recurrencia de (x_n) , los restantes términos de la misma coincidirán en cualquiera de los dos supuestos. Por tanto, no hay inconveniente en redefinir la sucesión (x_n) como la siguiente:

$$x_n = \frac{4x_{n-1}}{2 + x_{n-1}^2}, \quad x_1 = 2 \quad (17)$$

que seguirá teniendo su mismo límite, y verifica que $x_1 = 2/v_1$.

ii) $x_{n-1} = 2/v_{n-1}$ implica que $x_n = 2/v_n$.

En efecto, $x_n = 2 / (1/x_{n-1} + x_{n-1}/2) = 2 / (v_{n-1}/2 + 1/v_{n-1}) = 2/v_n$, c.q.d.

8.5. Con razonamientos análogos se llega también a que la sucesión:

$$x'_n = \frac{2px'_{n-1}}{p + x_{n-1}^2}, \quad x'_1 = p \quad (18),$$

converge a \sqrt{p} , siendo $p \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $p \neq m^2$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Y asimismo que (x''_n) definida por:

$$x''_n = \frac{pqx''_{n-1}}{p(q-1) + x_{n-1}^q}, \quad x''_1 = p \quad (19),$$

tiene por límite $p^{1/q}$, donde $p, q \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$, $p \neq m^q$, $\forall m \in \mathbb{N}$.

Bibliografía

- [1] R. AGUADO y R. ZAMARREÑO. *Las calculadoras en el aula*. Revista de Bachillerato, n.º 7, 51-55. Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid, 1978.
- [2] T. M. APOSTOL. *Análisis Matemático*. Reverté. Barcelona, 1972.
- [3] M. DE GUZMÁN. «Los pitagóricos». *Historia de la Matemática hasta el siglo XVII*, 11-35. Real Academia de Ciencias. Madrid, 1986.
- [4] J. PERALTA. *Sobre la analogía observada entre ciertos procedimientos de obtención de los números áureo y 2*. Boletín de la Sociedad Puig Adam, n.º 36, 35-46. Madrid, 1994.

Estudio de transformaciones lineales de \mathbb{R}^3 con Sistemas de Cómputo Algebraico

E. Roanes Macías y E. Roanes Lozano

Dpto. de Algebra. Universidad Complutense

The purpose of this article is to describe how Computer Algebra Systems can be excellent tools to study linear transformations (l.t.) in the 3-dimensional real affine space (including isometries, similarities and affinities). In these systems it is possible to develop a package that: a) calculates images of points, lists of points and algebraic surfaces; b) obtains equations of l.t. defined in synthetic mode; c) classifies l.t.; d) calculates the product transformation of the previously executed l.t.; e) obtains the l.t. in which the second list of two lists of points is the image of the first one; f) produces the plots of the polygonal lines of a given list of points and its image. The development of the package is fully explained. Finally, the practical and didactic interest are also treated.

Resumen

El estudio de transformaciones lineales en el espacio afín real de dimensión tres (que incluyen los movimientos, semejanzas y afinidades) se facilita extraordinariamente con los denominados Sistemas de Cómputo Algebraico. En estos sistemas es posible desarrollar un paquete que automatice varios procesos, de otro modo incómodos: obtener imágenes de puntos, listas de puntos (poligonales) y polinomios (de planos, cuádricas o superficies algebraicas); calcular ecuaciones de transformaciones lineales definidas de modo sintético; clasificar el tipo de transformación lineal y determinar sus parámetros; hallar la transformación producto de las previamente ejecutadas o su inversa; calcular la transformación en que se corresponden dos listas de puntos dadas; representar gráficamente las figuras original y final consideradas en una transformación. En este artículo se describe como conseguirlo y se trata su interés práctico y didáctico.

Introducción

El objetivo de este artículo es estudiar en el espacio afín real de dimensión tres (abreviadamente 3D), las transformaciones cuyas ecuaciones vienen dadas por expresio-

nes polinómicas de grado uno (lineales), denominadas por ello transformaciones lineales (abreviadamente t.l.), con ayuda de Sistemas de Cómputo Algebraico.

Se comienza tratando como puede adaptarse el problema geométrico para ser implementado sobre un manipulador simbólico (que es lo más original del artículo). Después se comenta nuestra implementación y se muestra una hoja de trabajo o «worksheet», con el propósito de motivar al lector a interesarse por la incorporación de estas tecnologías al estudio de las t.l. y de otros problemas que se prestan a ello.

1. Ecuaciones de las t.l. del espacio afín 3D

Las transformaciones lineales son aquellas que hacen corresponder al punto de coordenadas (x, y, z) , el punto de coordenadas (x', y', z') , dado por las ecuaciones lineales

$$x' = a_{01} + a_{11}x + a_{21}y + a_{31}z, \quad y' = a_{02} + a_{12}x + a_{22}y + a_{32}z, \quad z' = a_{03} + a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z \quad (1)$$

o, en notación matricial (con objeto de aprovechar la posibilidad de operar matrices simbólicas que tienen los sistemas de cómputo algebraico),

$$x' = xA; \quad x' = (1, x', y', z'), \quad x = (1, x, y, z), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 0 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (2)$$

De entre ellas, las más interesantes son las biyectivas, por ser las transformaciones propias del espacio afín, denominadas por ello *afinidades*, que constituyen el grupo afín 3D.

Un subgrupo importante de este es el formado por las transformaciones lineales que conservan la razón de distancias entre puntos homólogos, las cuales conservan la forma de las figuras, por lo que se denominan *semejanzas* y constituyen el grupo equiforme 3D.

Finalmente, el subgrupo más importante del equiforme lo constituyen las transformaciones que conservan la distancia entre puntos homólogos, denominadas por ello *isometrías, congruencias o movimientos*, que forman el grupo euclídeo 3D.

La posibilidad de multiplicar matrices simbólicas, que tienen los sistemas de cómputo algebraico, facilita extraordinariamente la composición de t.l. y, en consecuencia, nos decide a utilizar notación matricial en la adaptación del problema geométrico para su implementación sobre un manipulador simbólico.

1.1. Ecuaciones de los movimientos directos 3D

En el espacio euclídeo real de dimensión 3, existen tres tipos de movimientos directos (que conservan el sentido): *traslación*, *rotación* (alrededor de un eje) y *movimiento helicoidal* (rotación seguido de traslación de vector paralelo al eje de rotación).

Por simplicidad de cálculo, se supondrá métrico el sistema de referencia, mientras no se explicita lo contrario.

La *traslación* de vector $v = (a, b, c)$, tiene por ecuaciones $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$, o en notación matricial

$$x' = x \cdot T(v) \quad ; \quad T(v) = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La *rotación* de amplitud φ alrededor del eje z , tiene por ecuaciones: $x' = x \cdot \cos(\varphi) + y \cdot \sin(\varphi)$, $y' = -x \cdot \sin(\varphi) + y \cdot \cos(\varphi)$, $z' = z$, o en notación matricial

$$x' = x \cdot G(\varphi) \quad ; \quad G(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) & 0 \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Si el eje de rotación es la recta que, pasando por el punto O , tiene la dirección del vector v , entonces basta efectuar un cambio de sistema de referencia, al nuevo sistema $\mathcal{R}' = \{O; w1, w2, w3\}$, donde $w3$ es el vector unitario en la dirección y sentido del v , $w1$ es un vector unitario paralelo al plano $z = 0$ y perpendicular al vector v , y $w2$ es el producto vectorial de $w3$ por $w1$. Denotando pues $B(O, v)$ a la matriz de dicho cambio de sistema de referencia, la ecuación matricial de tal rotación resulta ser

$$x' = x \cdot B(O, v)^{-1} \cdot G(\varphi) \cdot B(O, v) \quad (5)$$

En particular, las rotaciones de amplitud dos rectos en el espacio afín 3D se denominan *simetrías axiales*.

En consecuencia, para el *movimiento helicoidal* consistente en la rotación de amplitud φ alrededor de la recta que pasando por el punto O tiene la dirección del vector v , seguido de la traslación de vector v , resulta la ecuación matricial

$$x' = x \cdot B(O, v)^{-1} \cdot G(\varphi) \cdot B(O, v) \cdot T(v) \quad (6)$$

1.2. Ecuaciones de los movimientos inversos 3D

Como ya fue probado por Euler (1776), en el espacio euclídeo real de dimensión tres, existen tres tipos de movimientos inversos (que cambian el sentido): *reflexión* (respecto de un plano), *reflexión con deslizamiento* (reflexión seguida de traslación de vector

paralelo al plano de reflexión) y *reflexión rotatoria* (reflexión seguida de rotación de eje perpendicular al plano de reflexión).

Como los dos últimos son producto de otros movimientos más simples, es suficiente considerar sólo reflexiones (junto con las traslaciones y rotaciones de 1.1), para generar los tres tipos de movimientos inversos. Sin embargo, por su interés práctico, es aconsejable considerar separadamente la simetría central (respecto de un punto), aunque sea caso particular de reflexión rotatoria (de amplitud dos rectos).

La simetría central de centro el origen del sistema de referencia tiene por ecuaciones: $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = -z$, o en notación matricial

$$x' = x \cdot H \quad ; \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Si el centro de simetría es el punto O , de coordenadas (a, b, c) , basta efectuar una traslación de ejes de coordenadas al nuevo origen O , con lo cual la ecuación matricial de tal simetría resulta ser

$$x' = x \cdot T(O)^{-1} \cdot H \cdot T(O) \quad (8)$$

donde T y H son las matrices (3) y (7).

La *reflexión* respecto del plano $z = 0$ tiene por ecuaciones: $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$, o en notación matricial

$$x' = x \cdot R \quad ; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Si el plano de reflexión es el que, pasando por el punto O , es perpendicular al vector v , entonces basta efectuar un cambio de sistema de referencia, análogo al indicado en 1.1 para rotación cuyo eje no es el z , de modo que, denotando, como allí, $B(O, v)$ a la matriz de cambio, la ecuación matricial de tal reflexión resulta ser

$$x' = x \cdot B(O, v)^{-1} \cdot R \cdot B(O, v) \quad (10)$$

1.3. Ecuaciones de las semejanzas 3D

Puesto que toda semejanza es producto de movimiento por homotecia, para generar semejanzas es suficiente añadir sólo las homotecias a las transformaciones básicas que ya han sido tratadas anteriormente.

La homotecia de razón k ($k \neq 0$) con centro el origen de coordenadas, tiene por ecuaciones: $x' = x \cdot k$, $y' = y \cdot k$, $z' = z \cdot k$, o en notación matricial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{H}(k) \quad ; \quad \mathbf{H}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \quad (11)$$

Si el centro de homotecia es el punto O , basta efectuar una traslación de ejes de coordenadas al nuevo origen O , con lo cual la ecuación matricial de tal homotecia resulta ser

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{T}(O)^{-1} \cdot \mathbf{H}(k) \cdot \mathbf{T}(O) \quad (12)$$

donde T y H son las matrices (3) y (11).

1.4. Ecuaciones de las afinidades 3D

Las afinidades más interesantes son las denominadas *afinidades homológicas*, que poseen un plano de puntos invariantes (*plano de la afinidad*). En una afinidad homológica, las rectas que pasan por cada punto, P , y su imagen, P' , son todas de la misma dirección (*dirección de la afinidad*) y denotando P^* al punto de intersección de la recta PP' con el plano de afinidad, es constante la razón de segmentos orientados P^*P'/P^*P , denominada *característica de la afinidad*.

Puesto que las afinidades pueden generarse a partir de semejanzas y de afinidades homológicas, nos ocuparemos por ahora sólo de estas últimas.

Respecto de un sistema de referencia (no métrico, en general), $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \partial\}$, tal que O sea un punto del plano de afinidad, \mathbf{w}_1 y \mathbf{w}_2 paralelos a dicho plano y ∂ un vector de la dirección de afinidad, las ecuaciones de la afinidad homológica de característica k son $x' = x$, $y' = y$, $z' = z \cdot k$, o en notación matricial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot \mathbf{M}(k) \quad ; \quad \mathbf{M}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \quad (13)$$

Denotando pues por v a un vector perpendicular al plano de afinidad (es decir, perpendicular a \mathbf{w}_1 y a \mathbf{w}_2), por ∂ a un vector de la dirección de afinidad y por $B'(O, v, \partial)$ a la matriz de cambio al sistema de referencia \mathcal{R} , la ecuación matricial de tal afinidad homológica (respecto del sistema de referencia canónico) resulta ser

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} \cdot B'(O, v, \partial)^{-1} \cdot \mathbf{M}(k) \cdot B'(O, v, \partial) \quad (14)$$

1.5. Ecuaciones de las proyecciones 3D

Entre las t.l. que no son biyectivas, la más interesante es la proyección sobre un plano (*plano de proyección*) paralelamente a una recta fija, es decir, en una determinada dirección (*dirección de proyección*), por lo que se la denomina *proyección paralela*.

Puesto que las t.l. pueden generarse a partir de afinidades y de proyecciones paralelas, basta ocuparse de estas últimas. En cuanto a su ecuación, basta tener en cuenta que las proyecciones paralelas son las afinidades homológicas de característica de afinidad cero.

2. Producto de t.l. en el espacio afín 3D: clasificación

La determinación de la matriz de la transformación producto o composición de varias t.l. se reduce a un sencillo proceso recurrente. Siendo A la matriz producto de las matrices de las t.l. previamente efectuadas y F la matriz de la última t.l. efectuada, su producto, AF , será la matriz de la transformación producto de todas las t.l. efectuadas (con el único prerrequisito de inicializar A como matriz unidad).

A continuación se trata de caracterizar qué tipo de t.l. es aquella cuya matriz es A . La t.l. (1) será *afinidad* (es decir, biyectiva) si permite calcular x, y, z (únicas), dadas x', y', z' , es decir, si y sólo si verifica $\det(A) \neq 0$.

Por otra parte, para que una afinidad sea semejanza, es decir, para que se conserve la razón de segmentos, es necesario y suficiente que los tres vectores fila de la submatriz A^* , menor complementario del elemento (1, 1) de la matriz A , tengan el mismo módulo y sean ortogonales dos a dos.

Finalmente, para que la t.l. (1) sea una *isometría*, es decir, para que conserve las distancias, es necesario y suficiente que la submatriz A^* sea ortogonal, es decir, que los tres vectores fila de la submatriz A^* , sean unitarios y ortogonales dos a dos. En consecuencia, supuesto que (1) es una semejanza, para que sea isometría, es necesario y suficiente que sea igual a uno el valor absoluto del $\det(A^*)$.

Una vez comprobado que la t.l. (1) es un movimiento, para decidir si el movimiento conserva, o no, el sentido en el plano, basta comprobar el signo de $\det(A^*)$. Si es positivo, se trata de un *movimiento directo*, y si es negativo, de un *movimiento inverso*.

2.1. Clasificación de movimientos directos 3D

En caso de movimiento directo, si la submatriz A^* es la matriz unidad de orden 3, entonces se trata de la traslación de vector (a_{01}, a_{02}, a_{03}) . Si, en particular, dicho vector es nulo, la transformación será la *identidad*.

Si, por el contrario, A^* no es la matriz unidad, la transformación puede ser rotación o movimiento helicoidal. Para distinguir ambas posibilidades, basta considerar el subespacio de puntos invariantes por (1), esto es, el subconjunto de puntos que satisfacen el sistema lineal

$$(x,y,z) \cdot (A^*-I) = (-a_{01}, -a_{02}, -a_{03}) \quad (15)$$

Si la solución de este sistema es una variedad afin de dimensión 1 (una recta), entonces se trata de una *rotación* de eje dicha recta, y si es el conjunto vacío (esto es, si el sistema es incompatible), entonces se trata de un *movimiento helicoidal*.

Caso de ser *rotación*, para calcular su amplitud, basta efectuar un cambio a un sistema de referencia cuyo origen sea un punto del eje de rotación y cuyo tercer vector sea de la dirección de dicho eje. Respecto de dicho sistema de referencia, la matriz de la rotación será de la forma (4), siendo pues su amplitud el arco seno del elemento a_{12} , si $a_{11} \geq 0$, o el opuesto de dicho arco seno, si $a_{11} < 0$.

Caso de ser *movimiento helicoidal*, para hallar la dirección de su eje, observemos que los planos perpendiculares a dicho eje son paralelos a sus respectivas imágenes. Además, tales planos son los únicos paralelos a sus imágenes (excepto si es de dos rectos la amplitud de rotación, en cuyo caso son invariantes los planos que contienen al eje).

Para determinar tales planos paralelos a sus imágenes, notemos que la imagen del plano $mx + ny + pz + q = 0$ en la transformación (2) es el plano $m'x + n'y + p'z + q' = 0$, tal que $(q', m', n', p') = (q, m, n, p) \cdot (A^*)^{-1}$ (donde A^* es la traspuesta de A) y, en consecuencia, para que ambos sean paralelos, es necesario y suficiente que (m, n, p) sea vector propio de la inversa de la submatriz A^* .

Por tanto, interesará hallar un valor propio, λ , de A^* , que sea real y de multiplicidad uno (pues si es de dos rectos la amplitud de rotación, los planos invariantes que contienen al eje corresponden a una subvariedad lineal de dimensión dos de vectores propios, cuyo valor propio sería pues de multiplicidad mayor que uno). Un vector propio (para λ) tendrá pues la dirección del eje del movimiento helicoidal.

Siendo \mathbf{u} un vector unitario de dicha dirección, P un punto arbitrario y P' su imagen en el movimiento helicoidal, bastará proyectar el vector PP' sobre \mathbf{u} , para obtener el vector traslación, $\mathbf{v} = (PP' \cdot \mathbf{u})\mathbf{u}$, del movimiento helicoidal. Ahora, la matriz producto de A por la de la inversa de dicha traslación será la matriz de rotación (de dicho movimiento helicoidal), cuya amplitud se halla como ya se indicó para caso de ser rotación.

2.2. Clasificación de movimientos inversos 3D

En caso de ser movimiento inverso, si la submatriz A^* es la opuesta de la matriz unidad de orden 3, entonces se trata de la simetría de centro el punto $(a_{01}/2, a_{02}/2, a_{03}/2)$.

En otro caso y de acuerdo con lo indicado en 1.2, la transformación puede ser reflexión, reflexión rotatoria o reflexión con deslizamiento. Para distinguir estas posibilidades, basta considerar el subespacio de puntos invariantes por la t.l., es decir, la variedad afín solución de (15).

Si su dimensión es 2, se trata de una *reflexión* respecto del plano solución de dicho sistema lineal.

Si existe un único punto invariante, O , se tratará de una *reflexión rotatoria*, cuyos únicos planos paralelos a su imagen son los paralelos al plano de reflexión (de la reflexión rotatoria), esto es, los perpendiculares al eje de rotación. Por tanto, la dirección del eje de reflexión rotatoria puede determinarse (como ya se indicó en caso de movimiento helicoidal) como vector propio para el valor propio real de multiplicidad 1 de A^{*-1} .

Finalmente, si el sistema (15) es incompatible, esto es, si no existen puntos invariantes, entonces se trata de una *reflexión con deslizamiento*. Notemos que ahora los planos de dirección invariante son, no sólo los paralelos al plano de reflexión, sino también todos sus perpendiculares, lo que invalida el método usado en el caso anterior para determinar la dirección perpendicular al plano de reflexión (de la reflexión rotatoria).

Ahora bien, es fácil verificar que el punto medio del segmento de extremos un punto cualquiera y su imagen en esta transformación ha de estar en el plano de reflexión. En consecuencia, basta considerar tres puntos no alineados, hallar sus imágenes y los respectivos puntos medios, O, P, Q , determinarán dicho plano de reflexión (si los vectores OP y OQ fueran linealmente dependientes, bastaría sustituir uno de los tres puntos iniciales por otro no coplanario con ellos).

La traslación (de la reflexión con deslizamiento) es la que hace pasar de un punto cualquiera del plano de reflexión a su imagen en la reflexión con deslizamiento.

2.3. Clasificación de semejanzas 3D que no son isometrías

En caso de ser una semejanza propiamente dicha, si la submatriz A^* es igual a la matriz unidad de orden 3 multiplicada por un escalar, k , entonces se trata de la *homotecia* de razón k , cuyo centro es el único punto invariante por la transformación, que es la solución del sistema (15).

Por otra parte, es sabido que toda semejanza 3D de razón distinta de uno que no sea homotecia, se reduce a una *rotación con dilatación*, esto es, a una rotación alrededor de un eje por una homotecia de centro un punto, O , de dicho eje, denominado *centro de semejanza*, por ser el único punto invariante por esta transformación.

En consecuencia, O puede determinarse resolviendo el sistema (15). Además, la matriz de la rotación con dilatación es producto de la matriz de una rotación (cuyo determinante es uno), por la matriz de una homotecia (cuyo determinante es el cubo de la razón, k , de homotecia), luego k es la raíz cúbica real del determinante de la matriz de la rotación con dilatación.

Queda aún por determinar la rotación (de la rotación con dilatación), pero esta conmuta con la homotecia, luego al multiplicar la matriz de la rotación con dilatación por la matriz de la homotecia de centro O y razón $1/k$, resulta la matriz de nuestra rotación, cuyo eje y amplitud pueden ahora ser calculados como se indicó en el apartado 2.1.

2.4. Clasificación de afinidades 3D que no son semejanzas

Se trata ahora de clasificar tales afinidades propiamente dichas, es decir, las que no son semejanzas. Para ello, atenderemos a la dimensión de la subvariedad de puntos invariantes de la afinidad, solución de (15).

Si tal dimensión es dos, entonces la afinidad posee un plano de puntos invariantes, y por tanto se trata de una *afinidad homológica*, cuyo plano es la solución de (15). Para determinar la dirección de afinidad, basta considerar un punto, P , no perteneciente a dicho plano, y su imagen, P' , pues entonces la recta PP' es de la dirección buscada. Si PP' corta a dicho plano en P^* , entonces la característica de afinidad será la razón de medidas de segmentos P^*P'/P^*P . Puede ocurrir que sea PP' perpendicular al eje (caso de *afinidad ortogonal*) o paralela a él (caso de *afinidad especial*).

Si el sistema (15) tiene por solución una subvariedad de dimensión uno, entonces la afinidad posee una recta de puntos invariantes, y por tanto se trata de una *afinidad axial*, cuyo eje es la solución del sistema (15). Si tiene solución única, entonces la afinidad posee un único punto invariante, y por tanto se trata de una *afinidad central*, cuyo centro es la solución del sistema (15). Finalmente, si el sistema (15) es incompatible, entonces se trata de una *afinidad sin puntos invariantes*.

2.5. Planos dobles o invariantes

Especialmente en caso de ser afinidad, tiene interés determinar los planos invariantes de la t.l., cuya dirección (vector perpendicular al plano) será vector propio de A^* (de acuerdo con lo indicado en 2.1). Así pues habremos de comenzar calculando los valores propios reales de A^{*-1} y, para cada uno de ellos, determinar una base del correspondiente subespacio nulo. Los vectores así hallados son las direcciones de planos de dirección invariante, debiendo ahora ajustar el término independiente de su ecuación de modo que el plano sea doble en la afinidad. Observemos que si ello se consigue independientemente del valor de dicho término independiente, se tendrá un haz de planos paralelos invariantes. Y si el referido subespacio nulo es de dimensión dos, pueden resultar dos planos secantes invariantes (procedentes de un valor propio común), en cuyo caso son invariantes todos los planos del haz que generan esos dos (notemos que, en una afinidad que no sea semejanza, el subespacio propio de un autovalor no puede ser de dimensión tres, ya que entonces se trataría de una homotecia).

2.5. T.l. del espacio afín 3D que no son afinidades

En las transformaciones lineales que no son afinidades la dimensión del espacio imagen es menor que la del espacio original (tres en nuestro caso). Para determinar el espacio imagen pueden considerarse cuatro puntos no coplanarios, O, P, Q, M , para calcular sus respectivas imágenes en la transformación, O', P', Q', M' , siendo el espacio imagen el subespacio afín

$$O' + r \cdot \overrightarrow{OP'} + s \cdot \overrightarrow{OQ'} + t \cdot \overrightarrow{OM'} \quad (r, s, t \in \mathbb{R}) \quad (16)$$

y su dimensión el máximo número de vectores linealmente independientes de entre los tres que aparecen en (16).

Como en casos anteriores, la solución del sistema lineal (15) proporciona el subespacio de puntos invariantes. Si resulta ser un plano, entonces la transformación es una *proyección paralela* sobre dicho plano en una dirección que se calcula de modo similar a como se determinó la dirección de afinidad (en caso de afinidad homológica). Si, en particular, tal dirección es perpendicular al plano imagen, se tratará de *proyección ortogonal*.

3. Descomposición en producto de reflexiones y de simetrías axiales

Es sabido que todo movimiento puede descomponerse en producto finito de, a lo más, cuatro reflexiones, pudiendo elegir un punto por el que han de pasar algunos de los planos de reflexión (restricción a dimensión tres del teorema de Cartan-Dieudonne [ST]). En particular, si el movimiento es directo, también puede descomponerse en producto de dos simetrías axiales, pudiendo elegirse un punto por el que ha de pasar uno de los dos ejes. Vamos a ocuparnos del proceso constructivo de dichas descomposiciones.

3.1. Descomposición de movimientos 3D en producto de reflexiones

La traslación de vector v puede descomponerse en producto de dos reflexiones respecto de planos, Π_1 y Π_2 , ambos perpendiculares a v , uno de los cuales pasa por un punto arbitrariamente elegido, P . Si Π_1 pasa por P , entonces Π_2 pasa por el punto imagen de P en la traslación de vector $(1/2)v$. Y si Π_2 pasa por P , entonces Π_1 pasa por el punto imagen de P en la traslación de vector $(-1/2)v$.

La rotación de eje e y amplitud ϕ puede descomponerse en producto de dos reflexiones respecto de planos, Π_1' y Π_2' , que se cortan en e , uno de los cuales pasa por un punto arbitrariamente elegido, P , no perteneciente a e . Si Π_1' pasa por P , entonces Π_2' pasa por el punto imagen de P en la rotación de eje e y amplitud $\phi/2$. Y si Π_2' pasa por P , entonces Π_1' pasa por el punto imagen de P en la traslación de vector $-\phi/2$.

Por ser el *movimiento helicoidal* de eje e producto de rotación por traslación, aquel podrá descomponerse en producto de dos pares de reflexiones, uno de ellos respecto de planos que pasan por e y el otro respecto de planos perpendiculares al eje e , pudiendo elegir un punto por el que han de pasar un plano del primer par y otro del segundo par, elegidos como se indicó anteriormente.

La *reflexión con deslizamiento* es producto de traslación por reflexión respecto de plano paralelo al vector traslación. En consecuencia, aquella podrá descomponerse en producto de un par de reflexiones respecto de planos paralelos (cuyo producto sea dicha traslación) por una tercera respecto de un plano perpendicular a aquellos (el de la citada reflexión). Tal descomposición puede hacerse eligiendo un punto arbitrario por el que ha de pasar el primero (o el segundo) de los planos paralelos entre sí, determinados del modo anteriormente indicado para descomponer traslaciones.

La *reflexión rotatoria* es producto de rotación alrededor de un eje por reflexión respecto de un plano perpendicular a dicho eje. En consecuencia, aquella podrá descomponerse en producto de dos reflexiones respecto de planos secantes por una tercera respecto de un plano perpendicular a los dos anteriores, pudiendo elegirse un punto arbitrario por el que ha de pasar el primero (o el segundo) de los dos primeros planos de reflexión, determinados del modo anteriormente indicado para descomponer rotaciones.

Si, en particular, la rotación de la reflexión rotatoria es de amplitud dos rectos, entonces la reflexión rotatoria degenera en *simetría central*. En consecuencia, una simetría central es producto de tres reflexiones respecto de planos perpendiculares dos a dos.

Notemos que, aunque las reflexiones generan el grupo de los movimientos del plano, tiene interés práctico y didáctico seguir considerando como generadores de dicho grupo a las traslaciones, rotaciones y reflexiones.

3.2. Descomposición de movimientos directos 3D en producto de simetrías axiales

El producto de dos reflexiones respecto de planos ortogonales es una simetría axial (rotación de amplitud dos rectos). Este hecho puede ser utilizado para descomponer los movimientos directos en producto de simetrías axiales, aprovechando lo indicado en 3.1. Vamos a ocuparnos del proceso constructivo de tales descomposiciones.

De acuerdo con 3.1, la *traslación* t de vector v es producto de dos reflexiones, r_1 y r_2 , respecto de planos perpendiculares a v y tales que la distancia entre ellos sea la mitad del módulo de v , pudiendo imponerse a uno de esos dos planos la condición de pasar por un punto arbitrario, P . Siendo ahora r_0 la reflexión respecto de un plano que pase por P y sea paralelo a v

$$t = r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot (r_0 \cdot r_0) \cdot r_2 = (r_1 \cdot r_0) \cdot (r_0 \cdot r_2) = s_1 \cdot s_2$$

donde $s_1 = r_1 \cdot r_0$ y $s_2 = r_0 \cdot r_2$ son simetrías axiales respecto de ejes ortogonales a v , contenidos en un mismo plano paralelo a v y tal que la distancia entre ambos sea la mitad

del módulo de v . Además, por pasar por P , tanto el plano de r_0 , como el de r_1 (o el de r_2), pasará por P el eje de s_1 (o el de s_2).

De acuerdo con 3.1, la *rotación* g de eje e y amplitud φ es producto de dos reflexiones, r_1 y r_2 , respecto de planos que pasan por e y tales que el rectilíneo del diedro orientado del primero al segundo plano sea la mitad de v , pudiendo imponerse a uno de esos dos planos la condición de pasar por un punto arbitrario, P . Siendo ahora r_0 la reflexión respecto del plano que pasa por P y es perpendicular al eje e , se tiene

$$g = r_1 \cdot r_2 = r_1 \cdot (r_0 \cdot r_0) \cdot r_2 = (r_1 \cdot r_0) \cdot (r_0 \cdot r_2) = s_1 \cdot s_2$$

donde $s_1 = r_1 \cdot r_0$ y $s_2 = r_0 \cdot r_2$ son simetrías axiales respecto de ejes secantes, que se cortan en un punto del eje e y son perpendiculares a e , y tales que el ángulo del primero al segundo sea $\varphi/2$. Además, por pasar por P , tanto el plano de r_0 , como el de r_1 (o de r_2), pasará por P el eje de s_1 (o de s_2).

De acuerdo con 3.1, el *movimiento helicoidal* h de eje e es producto de la rotación g de amplitud φ y la traslación t de vector v , cada una de las cuales es producto de un par de reflexiones, (r_1, r_2) y (r_3, r_4) , pudiendo imponerse a uno de los dos planos de cada par la condición de pasar por un punto arbitrario, P . De acuerdo con esta notación y teniendo en cuenta que r_2 y r_3 son reflexiones respecto de ejes perpendiculares y por tanto conmutan, se tiene

$$h = g \cdot t = (r_1 \cdot r_2) \cdot (r_3 \cdot r_4) = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3) \cdot r_4 = r_1 \cdot (r_3 \cdot r_2) \cdot r_4 = (r_1 \cdot r_3) \cdot (r_2 \cdot r_4) = s_1 \cdot s_2$$

donde $s_1 = r_1 \cdot r_3$ y $s_2 = r_2 \cdot r_4$ son simetrías axiales respecto de ejes que se cruzan, siendo e la perpendicular común a ambos, tales que el diedro orientado de arista e cuyas respectivas caras contienen a s_1 y s_2 tiene por rectilíneo $\varphi/2$, y tales que los puntos de intersección de e con los respectivos ejes de s_1 y s_2 son origen y extremo de un vector mitad del v . Además, por pasar por P un plano de cada uno de los dos pares de planos antes citados, pasará por P el eje de s_1 o el de s_2 .

4. T.I. en que se corresponden dos cuaternas de puntos

Sean P_1, P_2, P_3 y P_4 cuatro puntos no coplanarios, de coordenadas respectivas $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$, y (x_4, y_4, z_4) , y sean $\mathbb{Q}_1, \mathbb{Q}_2, \mathbb{Q}_3$ y \mathbb{Q}_4 cuatro puntos cualesquiera, de coordenadas respectivas $(u_1, v_1, w_1), (u_2, v_2, w_2), (u_3, v_3, w_3)$ y (u_4, v_4, w_4) . Si estos cuatro últimos puntos son las respectivas imágenes de aquellos en la transformación lineal (2), entonces

$$\begin{aligned} (1, u_1, v_1, w_1) &= (1, x_1, y_1, z_1)A ; (1, u_2, v_2, w_2) = (1, x_2, y_2, z_2)A \\ (1, u_3, v_3, w_3) &= (1, x_3, y_3, z_3)A ; (1, u_4, v_4, w_4) = (1, x_4, y_4, z_4)A \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$Q = P \cdot A \quad ; \quad P = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix} \quad , \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & u_1 & v_1 & w_1 \\ 1 & u_2 & v_2 & w_2 \\ 1 & u_3 & v_3 & w_3 \\ 1 & u_4 & v_4 & w_4 \end{pmatrix}$$

siendo invertible la matriz P, por ser no coplanarios los puntos P_1, P_2, P_3 y P_4 , luego la matriz A debe verificar $A = P^{-1}Q$, lo que permite determinar la matriz A de la t.l. en que tales puntos son homólogos. Una vez calculada dicha matriz A, para determinar de qué tipo de t.l. se trata, basta tener en cuenta lo indicado en el apartado 2.

5. Implementación

Las consideraciones geométricas anteriormente indicadas, permiten implementar las t.l. sobre sistemas de cómputo algebraico. Nosotros hemos desarrollado una implementación sobre el sistema Maple V, cuya sintaxis pasamos a describir, para que sirva de modelo.

Para ejecutar una transformación, se aplica el nombre abreviado de la misma (tres letras) a sus entradas, que pueden introducirse de cualquiera de los modos usuales. Así, por ejemplo, para ejecutar una reflexión, puede hacerse de cualquiera de los modos siguientes:

```
ref(punto_del_plano, vector_normal_al_plano);  
ref(punto_original, punto_imagen);  
ref(punto_del_plano, punto_del_plano, punto_del_plano);  
ref(polinomio_ecuacion_del_plano);
```

Para obtener la imagen de un objeto (punto, lista de puntos o polinomio), se añade una «_» al nombre de la transformación y el objeto como último elemento del argumento. Así, para el primer modo:

```
ref_(punto_del_plano, vector_normal_al_plano, objeto);
```

El programa devuelve como salida la imagen en la reflexión. De manera análoga se hace para traslaciones, rotaciones, simetrías axiales, reflexiones, homotecias, afinidades homológicas y proyecciones paralelas, como se verá en la «worksheet». Notemos que la descripción del objeto imagen obtenido como «output», viene escrito en aritmética exacta. A veces, los valores obtenidos incluyen expresiones numéricas para las que no es fácil intuir su orden de magnitud. En tal caso, el programa permite convertir su salida por pantalla (no los datos que se usen para cálculos internos) al modo coma flotante (aproximando el resultado).

Para transformaciones definidas por sus ecuaciones, aplicamos el nombre abreviado de la transformación a los polinomios que expresan las ecuaciones y, finalmente, al objeto. Así, por ejemplo, para efectuar la t.l. de ecuaciones $x' = ax + by + cz + d$, $y' = ex + fy + gz + h$, $z' = mx + ny + pz + q$:

lin(ax + by + cz + d, ex + fy + gz + h, mx + ny + pz + q);

Para t.l. definidas por dos objetos homólogos, aplicamos el nombre abreviado del tipo de transformación (mov, sem, afi, lin) a ambos objetos en el orden apropiado. Así, para definir el movimiento que transforma el objeto obj1 en el obj2:

mov(obj1, obj2);

Notemos que, en este último caso, nuestro programa compara las listas de puntos obj1 y obj2, avisando si son de distinto número de puntos. Además busca en dichas listas dos ternas de puntos homólogos. Si las encuentra, calcula la matriz de la transformación y finalmente compara los restantes puntos homólogos, para avisar si hay algún par que no se corresponda.

Por otra parte, el programa permite: *i*) clasificar la transformación *producto* de todas las ejecutadas desde que se inicializó por última vez; *ii*) determinar la inversa de la última transformación ejecutada o del producto; *iii*) descomponer en reflexiones o en simetrías axiales.

Las representaciones gráficas se obtienen de modo similar al utilizado en nuestra implementación de la «Turtle Geometry» para Maple ([RR1], [RR2], [RR3] o [RR4]). El dibujo queda almacenado en una variable, que se inicializa como la lista vacía. En dicha lista se almacenan valores en coma flotante, para aumentar la velocidad, mientras que los cálculos algebraicos se realizan en aritmética exacta, de modo que no se produzcan errores de acarreo y los valores numéricos solución sean correctos. En cualquier momento, los dibujos almacenados en dicha lista pueden hacerse visibles en pantalla, realizando un PLOT de la lista.

Esta concepción permite dibujar sólo aquellos de los pasos intermedios que se desee, así como recuperar en cualquier momento la pantalla gráfica previamente calculada. Se consiguen dibujar los objetos inicial e imagen de la última transformación efectuada o de la transformación producto, indicando el máximo valor representado para la coordenada (tomando el programa 3/4 de dicho valor, como valor máximo representable para las otras dos coordenadas).

A continuación se presenta una hoja de trabajo o «worksheet» que muestra ejemplos de como funcionan los operadores de cada uno de los tipos que se acaban de describir. En ellos puede observarse la comodidad que supone la utilización de este tipo de programas.

EJEMPLO DE "WORKSHEET" DE TRANSFORMACIONES LINEALES 3D

Cargar el programa:
> read ('lin3.map');

EJEMPLO 1: Ejecutar dos simetrías centrales, componer y descomponer en reflexiones.

> ini();

Se ha inicializado (para componer transformaciones y para dibujar).

Ejecutar la simetría central de centro el punto (0,0,1):

> sim([0,0,1]);

Simetría central ejecutada.

> sim([0,0,3]);

Clasificar el producto de las dos transformaciones anteriores:

> proCla();

Transformación producto:

Es la traslación de vector, [0, 0, 4]

Descomponer en reflexiones dicho producto, de modo que pase por (0,0,1) el plano 2:

> desRefPro([0,0,1],2);

Se descompone en:

reflexión 1 de plano, $z + 1 = 0$

reflexión 2 de plano, $z - 1 = 0$

EJEMPLO 2: Componer una rotación y una traslación y descomponer en semigiros.

> ini();

Ejecutar la rotación alrededor de la recta que pasa por el punto (0,0,0) y es paralela al vector (0,0,1), de amplitud 90 grados:

> rot([0,0,0],vector([0,0,1]),90):

Ejecutar la traslación de vector (0,0,4):

> tra(vector([0,0,4]));

> proCla();

Transformación producto:

Es el movimiento helicoidal cuyo eje pasa por el punto, [0, 0, 0]

y tiene la dirección del vector, [0, 0, 1]

consistente en la rotación de amplitud, 90, grados

(en sentido dextrosum respecto de dicho vector)

y la traslación de vector, [0, 0, 4]

Descomponer en simetrías axiales ese producto, de modo que pase por (0,3,0) el eje 1:

> desAxiPro([0,3,0],1);

Se descompone en:

simetría axial 1 de eje, $x = 0, y = 3 + 3t, z = 0$

simetría axial 2 de eje, $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}t, y = \frac{1}{2}\sqrt{2}t, z = 2$

EJEMPLO 3. Aplicar a una lista de puntos una reflexión y un semigiro, y dibujar.

> ini();

Denotar obj1 a una lista de puntos:

> obj1:=[[2,-2,0],[3,-2,0],[2,-2,1],[2,-2,0],[2,-1,0],[2,-1,1],[2,-2,1]];

Denotar obj2 a su imagen en la reflexión respecto del plano de ecuación $y-1=0$

> obj2:=ref_(y-1,obj1);

obj2 := [[2, 4, 0], [3, 4, 0], [2, 4, 1], [2, 4, 0], [2, 3, 0], [2, 3, 1], [2, 4, 1]]

Aplicar a obj2 la simetría axial cuyo eje pasa por (0,4,0) y es paralelo al vector (1,0,0):

> axi_([0,4,0],vector([1,0,0]),");

[[2, 4, 0], [3, 4, 0], [2, 4, -1], [2, 4, 0], [2, 5, 0], [2, 5, -1], [2, 4, -1]]

> proCla();

Transformación producto:

Es la reflexión con deslizamiento consistente en la

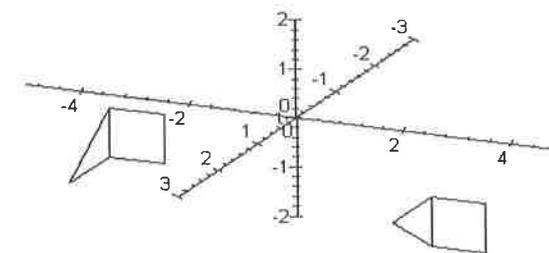
reflexión respecto del plano, $z = 0$

y la traslación de vector, [0, 6, 0], (paralelo al plano)

Dibujar los objetos inicial y final de transformación producto en el

ortodrocaja(3,5,2)={ $(X,Y,Z) | -3 < X < 3, -5 < Y < 5, -2 < Z < 2$ }

> dibPro(3,5,2);



Nota: la figura de la izquierda está encima de $z=0$ y la de la derecha debajo.

EJEMPLO 4: Dar dos listas de puntos y hallar el movimiento que pasa de una a otra.

> ini():

> ob1:=[[0,0,0],[1,0,0],[1,1,0],[0,0,1]]:

> ob2:=[[0,0,2],[0,1,2],[-1,1,2],[0,0,1]]:

Ejecutar el movimiento que pasa de ob1 a ob2:

> mov(ob1,ob2);

Movimiento que transforma el primer argumento en el segundo:

Es la reflexion rotatoria consistente en la reflexion de plano:

$$z - 1 = 0$$

y la rotacion cuyo eje pasa por el punto, [0, 0, 1]

y tiene la direccion del vector, [0 0 1], (perpendicular al plano)

siendo su amplitud, 90, grados

(en sentido dextrosum respecto de dicho vector)

Pedir las ecuaciones de esta última transformación:

> ultEcu();

Ecuaciones de la ultima transformacion:

$$X = -y, Y = x, Z = 2 - z$$

EJEMPLO 5: Hallar la inversa de una homotecia y la imagen en ella de una esfera.

> ini():

Ejecutar la homotecia de centro (0,3,3) y razón -2:

> hom([0,3,3],-2):

Ejecutar la transformación inversa de esta última:

> invUlt();

Transformacion inversa de la ultima:

Es la homotecia de centro, [0, 3, 3], y razon, $-\frac{1}{2}$

En la última transformación ejecutada hallar la imagen de la esfera $x^2+y^2+z^2=1$:

> ult_($x^2+y^2+z^2-1$);

$$4x^2 + 4y^2 - 36y + 4z^2 - 36z + 161$$

EJEMPLO 6: Dar un objeto semejante a ob1 y ejecutar la semejanza de ob1 a él.

> ini():

> ob3:=[[0,0,5],[0,2,5],[-2,2,5],[0,0,7]]:

Ejecutar la semejanza que pasa de ob1 a ob3:

> sem(ob1,ob3);

Semejanza que transforma el primer argumento en el segundo:

Es la rotacion con dilatacion consistente en:

la rotacion cuyo eje pasa por el punto, [0, 0, -5]

y tiene la direccion del vector, [0, 0, 1]

siendo su amplitud, 90, grados

(en sentido dextrosum respecto de dicho vector)

por la homotecia de centro, [0, 0, -5], y razon, 2

(Nota: el centro de la homotecia esta en el eje de la rotacion)

EJEMPLO 7: Componer dos afinidades homológicas.

> ini():

Ejecutar la afinidad homológica cuyo plano de puntos invariantes pasa por (1,0,0) y es perpendicular al vector (0,0,1), de dirección la del vector (0,1,1) y de característica 2:

> afh([1,0,0],vector([0,0,1]),vector([0,1,1]),2):

Ejecutar la afinidad homológica cuyo plano de puntos invariantes es $y-1=0$, en la que el punto (0,2,0) tiene por imagen el punto (0,4,0):

> afh(y-1,[0,2,0],[0,4,0]):

> proCla();

Transformacion producto:

Es la afinidad axial cuyos puntos invariantes son los del eje:

$$x = t, y = 1, z = 0$$

EJEMPLO 8: Definir una transf. lineal por sus ecuaciones y hallar sus planos dobles.

> ini():

Ejecutar la transformación lineal de ecuaciones $x'=x+y$, $y'=x-y$, $z'=x+y-z$:

> lin(x+y,x-y,x+y-z);

Transformacion lineal dada por sus ecuaciones:

Es la afinidad central cuyo punto invariante es el centro:

$$x = 0, y = 0, z = 0$$

Hallar los planos dobles o invariantes en esta última transformación:

> plaDobUlt();

Planos dobles o invariantes en la ultima transformacion:

$$-x + y + z = 0$$

$$(\sqrt{2} + 1)x + y = 0$$

$$x + (-\sqrt{2} - 1)y = 0$$

EJEMPLO 9: Dar otro objeto y hallar la transformación lineal que pasa de ob1 a él.

> ini():

> [[0,0,2],[1,0,2],[1,1,2],[0,0,2]]:

Ejecutar la transformación lineal que pasa de ob1 al objeto anterior:

> tli(ob1,"");

Transformación lineal que pasa del primer argumento al segundo:

Esta transformación lineal no es afinidad.

Se trata de la proyección sobre el plano:

$$z - 2 = 0$$

en la dirección del vector, [0, 0, 1]

perpendicular al plano (proyección ortogonal)

EJEMPLO 10: Dar un objeto, aplicarle sucesivas rotaciones y dibujar todos ellos.

> ini():

Elegir una lista de puntos que sean vértices de una línea poligonal en forma de silla:

> silla1:=[[4,-1,0],[4,-1,2],[4,0,2],[4,0,0],[4,0,1],[4,-1,1],[3,-1,1],[3,-1,0],[3,-1,1],[3,0,1],[3,0,0],[3,0,1],[4,0,1]];

Preparar la lista para dibujar este objeto (silla1):

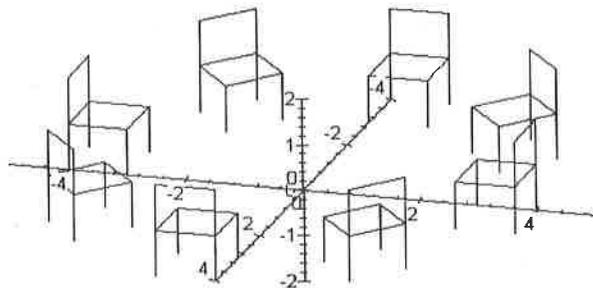
> dibuja(silla1):

Aplicar 7 veces la rotación de eje la recta intersección de los planos $x-y=0$, $x=0$, de amplitud 45 grados y preparar para dibujar todos estos objetos:

> for i to 7 do silla.(i+1):=rot_(x-y,x,45,silla.i); dibuja(silla.(i+1)); od:

Dibujar todos esos objetos en la caja(4,5,2)={{(X,Y,Z)}|-3<X<3,-5<Y<5,-2<Z<2}

> FullScreen(4,5,2);



6. Interés práctico y didáctico

Como se ha podido comprobar en la «worksheet», la implementación que propugnamos permite aplicar transformaciones lineales a diversos tipos de objetos: puntos, listas de puntos (poligonales) o polinomios (de planos, cuádricas, superficies algebraicas), calcular la transformación producto o la inversa y dibujar las figuras original e imagen en una transformación.

Por otra parte, las transformaciones utilizadas pueden ser definidas de diversos modos: por los atributos que la determinan (traslaciones por su vector, reflexiones por su plano, homotecias por su centro y razón, etc), como producto de otras transformaciones previamente efectuadas, como transformación en que se corresponden dos figuras homólogas, o por sus ecuaciones.

Ello invita a su utilización de modo multivalente: al modo de la Geometría Analítica elemental, o al modo de la Geometría Sintética, sin que el usuario haga uso de las expresiones polinómicas que internamente va utilizando el manipulador simbólico.

A modo de ejemplo, una utilización adecuada de este tipo de programas como apoyo para estudiar movimientos y semejanzas, ayuda a descubrir la composición de transformaciones en subgrupos típicos generados por:

- traslaciones unidireccionales
- rotaciones coaxiales
- movimientos helicoidales coaxiales
- simetrías centrales
- reflexiones respecto de planos paralelos
- reflexiones respecto de planos secantes que pasan por una recta
- reflexiones con deslizamiento de plano de reflexión común
- homotecias concéntricas
- homotecias y traslaciones
- afinidades.

Asimismo, ayuda a descubrir experimentalmente cómo las afinidades conservan propiedades que las hacen más interesantes:

- alineación de puntos (son colineaciones)
- coplanariedad de puntos
- paralelismo
- punto medio
- razón simple de puntos alineados
- cociente de áreas de figuras homólogas
- especie de una cuádrica.

También ayudan a descomponer una transformación en producto de otras:

- movimiento en reflexiones (en número ó4)
- movimiento directo en dos simetrías axiales
- movimiento inverso en reflexión por simetría axial

- semejanza en rotación por homotecia
- afinidad en semejanza por afinidad homológica
- afinidad axial en dos afinidades homológicas
- afinidad central en tres afinidades homológicas, o en semejanza por afinidad homológica (con el mismo punto invariante)
- transformación lineal en producto de cuatro afinidades homológicas.

En todo caso, el estudio de estas transformaciones con ayuda de estos programas sobre un manipulador simbólico, permite a profesores y alumnos aprovechar la tecnología computacional para hacer más rápido y cómodo su trabajo. De una parte, mediante una utilización adecuada de estos programas informáticos, se agiliza la proposición y corrección de ejercicios. Y de otra, la rapidez con que estos programas pueden ser ejecutados, permiten acumular experiencias, que facilitan la elaboración mental de los conceptos abstractos que encierran estas transformaciones, permitiendo redescubrir experimentalmente sus propiedades, lo que ayuda, de modo natural, a interesarse por ellas. De ahí su interés didáctico. Notemos finalmente que la elaboración de este tipo de programas requiere conocer a fondo tanto la fundamentación matemática del problema a implementar, como el sistema de cómputo algebraico. Ahora bien, una vez elaborados tales programas, su manejo no exige al usuario de prerrequisito informático alguno, lo que permite generalizar su utilización.

Bibliografía

- [Be] M. BERGER: *Geometry I*. Springer, 1987.
- [Ch] B. CHAR et al: *Maple V. Library Reference Manual*. Springer, 1991.
- [He] A. HECK: *Introduction to Maple*. Springer-Verlag, 1993.
- [Ma] G. E. MARTIN: *Transformation Geometry*; Springer, 1987.
- [Mo] A. MONTES: Apuntes de Maple V. Univ. Politècnica de Catalunya, 1994. [Ri] F. Rincón et al: *Cálculo científico con Maple*. Ra-ma, 1995.
- [RR1] E. ROANES L., E. ROANES M.: *An Implementation of «Turtle Graphics» in Maple V.2*. En Computer Algebra Nederland, Nieuwsbrief 12, 1994.
- [RR2] E. ROANES L., E. ROANES M.: *«Turtle Graphics» in Maple V.2. En Maple V: Mathematics and Its Applications* (editor R. J. Lopez). Birkhäuser, 1994.
- [RR3] E. ROANES L., E. ROANES M.: *Nuevas tecnologías en Geometría*. Editorial Complutense, 1994.
- [RR4] E. ROANES L., E. ROANES M.: *An Implementation of «Turtle Graphics» in Maple V*. En MapleTech, Special Issue, 1994.
- [RR5] E. ROANES L., E. ROANES M.: *Semejanzas en Maple V.3*. Actas del I Congreso de Usuarios de Maple. Dpto de Algebra, Computación, Geometría y Topología, Univ. de Sevilla, 1995.
- [ST] E. SNAPPER, R. TROYER: *Metric Affine Geometry*. Academic Press, 1971. [SV1] M. J. Soto, J. L. Vicente: *Algebra Lineal con MatLab y Maple*. Prentice Hall, 1995.
- [SV2] M. J. SOTO, J. L. VICENTE: *Matemáticas con Maple*. Addison-Wesley Iberoamericana, 1995.

Los eternos cuadrados mágicos

Concepción Romo Santos

Catedrática de Algebra. Universidad Complutense de Madrid

Abstract

In this work we study the magic squares and cubes in general. The magic squares by Durero, Fermat and Euler, the magic algebraic squares and the antimagic squares are also studied.

Introducción

El primer cuadrado mágico tuvo su origen en China y fue el siguiente

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Según la leyenda, este cuadrado mágico le fue comunicado a los hombres por una tortuga del río Lo, en los días del emperador Yii, famoso ingeniero hidráulico.

Este cuadrado mágico puede aún verse comunmente en China hoy en día; no solamente se le encuentra sobre los edificios y en diseños artísticos, sino que cualquier clarividente lo emplea también en su negocio.

Pasaron muchos siglos antes que el cuadrado mágico encontrara un camino hacia los países vecinos. En el siglo IX usaban los astrólogos árabes este cuadrado mágico en la lectura de horóscopos. El cuadrado mágico apareció en la India en el siglo XI ó XII.

El cuadrado mágico parece haber entrado a Europa tempranamente en la Era Cristiana, aunque el primer escritor conocido sobre el tema fue Emanuel Moschopoulos que vivió probablemente hacia 1.300 D.C.

En este trabajo estudiaremos las principales propiedades de los cuadrados y cubos mágicos. También introduciremos los cuadrados antimágicos.

1. Definiciones

Entenderemos que un cuadrado mágico es un cuadrado dividido en $n \times n$ celdas, en las cuales se colocan números desde uno hasta $n \times n$, de modo tal que las sumas son idénticas a lo largo de las filas, de las columnas y de ambas diagonales.

La suma común de las filas, columnas y diagonales de un cuadrado mágico con $n \times n$ celdas es

$$\frac{nx(n^2 + 1)}{2}$$

Esto podemos demostrarlo fácilmente. Sabemos que la suma de $1 + 2 + \dots + n \times n$ es

$$\frac{n^2x(n^2 + 1)}{2}$$

Puesto que esta suma se ha de dividir entre n filas ó n columnas, la suma de cada fila ó columna es

$$\frac{nx(n^2 + 1)}{2}$$

2. El cuadrado mágico de orden tres

La suma de cada fila, columna y diagonal es 15. Esta suma es la llamada constante mágica.

Comprobaremos que el número central tiene que ser cinco.

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array}$$

Efectivamente si sumamos la fila, la columna y las diagonales que contienen al elemento central e , obtenemos 2

$$(a + e + i) + (g + e + c) + (d + e + f) + (b + e + h) = 3e + (a + b + c + d + e + f + g + h + i)$$

Pero la suma de todos los elementos del cuadrado debe ser igual a la suma de los nueve primeros números naturales:

$$a + b + c + d + \dots + i = 1 + 2 + \dots + 9 = 9(9 + 1) / 2 = 45$$

Por lo tanto, $3e + (a + b + c + \dots + i) = 3e + 45$

La constante mágica es 15 luego $3e + 45 = 4 \times 15 = 60$ luego $e = 5$

Demostremos que 1 no puede ocupar una celda correspondiente a una esquina. Supongamos $a = 1$, entonces $i = 9$, $d + g = 14$, luego las únicas posibilidades para d y g son 6 y 8.

Pero g es distinto de 8, porque $i = 9$ y $9 + 8 > 15$; y g es distinto de 6 porque $9 + 6 = 15$ y, por lo tanto, $h = 0$, lo que es imposible. Por lo tanto 1 no puede ocupar una esquina. Por lo tanto 1 y 9 deben ocupar una fila común o columna común que pase por el centro, sea $b = 1$ y $h = 9$.

El número 3 no puede ocupar una esquina. Si 3 estuviese en la esquina inferior izquierda, es decir $g = 3$, entonces $c = 7$. Pero ahora $g + h + i = 3 + 9 + i = 15$ y $i = 3$, pero $g = 3$, por lo que i es distinto de 3. De manera semejante demostramos que 3 no puede ocupar la esquina inferior derecha.

Si tres estuviese en la esquina superior izquierda, esto es $a = 3$ entonces $i = 7$. Pero $7 + h = 7 + 9 = 16 > 15$. De manera semejante demostramos que 3 no puede ocupar la esquina superior derecha. Concluimos que tres y siete no ocuparán esquinas.

Hemos probado que ninguno de los números impares puede ocupar una esquina del cuadrado. Si disponemos 1, 3, 7 y 9 de todas las maneras aceptables obtenemos los ocho cuadrados.

2 9 4	4 9 2	6 1 8	8 1 6
7 5 3	3 5 7	7 5 3	3 5 7
6 1 8	8 1 6	2 9 4	4 9 2
2 7 6	4 3 8	6 7 2	8 3 4
9 5 1	9 5 1	1 5 9	1 5 9
4 3 8	2 7 6	8 3 4	6 7 2

En realidad es un único cuadrado visto de ocho formas distintas.

Algo más que un juego hay, sin embargo, en los cuadrados mágicos: algunas inesperadas relaciones entre ellos, descubiertas a veces al azar, nos hablan de extrañas conexiones internas no bien exploradas aún. Sirvan de ejemplo estas sorprendentes igualdades entre las filas, columnas y diagonales de los cuadrados anteriores.

$$\begin{aligned} 816^2 + 357^2 + 492^2 &= 618^2 + 753^2 + 294^2 \\ 834^2 + 159^2 + 672^2 &= 438^2 + 951^2 + 276^2 \end{aligned}$$

Para mayor perplejidad, estas igualdades no parecen ligadas a ninguna base de numeración decimal, pues se dan también con la de base 12, por ejemplo.

Para analizar el sorprendente comportamiento de las sumas de los cuadrados de estos números formados por las distintas filas, expresemos estos en función de una base de numeración cualquiera, n . Reduzcamos el análisis al cuarto y al tercer cuadrado mágicos.

$$(8n^2 + n + 6)^2 + (3n^2 + 5n + 7)^2 + (4n^2 + 9n + 2)^2$$

$$(6n^2 + n + 8)^2 + (7n^2 + 5n + 3)^2 + (2n^2 + 9n + 4)^2$$

Restando estas igualdades término a término aparecen tres diferencias de cuadrados, que podemos expresar como producto de suma por diferencia. Debido a la simetría de las expresiones, se opera una notable simplificación, quedando el factor común (n al cuadrado menos uno). Agrupando con respecto a él se obtiene

$$4(n^2 - 1) [(7n^2 + n + 7) - (10n^2 + 10n + 10) + (3n^2 + 9n + 3)]$$

Cada uno de los paréntesis del interior del corchete son simétricos en cuanto a sus coeficientes, por proceder de la suma de dos términos hemisimétricos. Y, por otra parte, el central es suma de ambos al llevar coeficiente 2 y proceder de un término con los números en progresión aritmética y de suma, al igual que los anteriores, igual a 15. Fácil es ver que todo el corchete es nulo, lo que justifica la igualdad de partida en cualquier caso.

3. Cuadrados mágicos de orden cuatro

Sigamos con los cuadrados mágicos. Existen técnicas bien definidas para la obtención sistemática de los de cuarto orden. Sin duda la más sencilla es la de la «distribución compensada».

Obtenemos así el cuadrado mágico:

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

cuya suma es siempre 34.

4. El cuadrado mágico melancolía

En la obra de Durero puede apreciarse cierta influencia de Pacioli, especialmente en el famoso grabado de 1.514 titulado Melancolía, en el que aparece de una manera prominente el cuadrado mágico que reproducimos a continuación

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Este cuadrado mágico suele considerarse como el primero que aparece en Occidente, pero Pacioli había dejado un manuscrito inédito titulado «De viribus quantitatis» en el que trata ya de tales cuadrados.

A primera vista puede éste parecer un cuadrado mágico ordinario de orden cuatro, pero éste es tan sólo el comienzo. La fecha en que el grabado fue hecho, 1.514, aparece en las filas centrales de la fila inferior. La suma de los números de las dos filas superiores es igual a la suma de los números en las dos filas inferiores:

$$16 + 3 + 2 + 13 + 5 + 10 + 11 + 8 = 68$$

$$9 + 6 + 7 + 12 + 4 + 15 + 14 + 1 = 68$$

Esto es muy notable de por sí, pero, más notable aún es el hecho de que las sumas de los cuadrados de estos números sean iguales:

$$16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2 + 5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2 = 748$$

$$9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2 + 4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2 = 748$$

Otra propiedad de este cuadrado es que la suma de números en filas alternadas (primera y tercera, segunda y cuarta) es el mismo número, y también son iguales las sumas de los cuadrados de éstos números.

$$16 + 3 + 2 + 13 + 9 + 6 + 7 + 12 = 68$$

$$5 + 10 + 11 + 8 + 4 + 15 + 14 + 1 = 68$$

$$16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2 + 9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2 = 748$$

$$5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2 + 4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2 = 748$$

Otro hecho asombroso acerca de este cuadrado mágico es que la suma de los números situados en las diagonales iguala a la suma de los números que no están en las diagonales:

$$16 + 10 + 7 + 1 + 13 + 11 + 6 + 4 = 68$$

$$2 + 8 + 12 + 14 + 15 + 9 + 5 + 3 = 68$$

Aún otro hecho sorprendente es que la suma de los cuadrados de los números situados en las diagonales es igual a la suma de los cuadrados de los números no situados en las diagonales, y las sumas de sus cubos también son iguales.

$$16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2 + 13^2 + 11^2 + 6^2 + 4^2 = 748$$

$$2^2 + 8^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 9^2 + 5^2 + 3^2 = 748$$

$$16^3 + 10^3 + 7^3 + 1^3 + 13^3 + 11^3 + 6^3 + 4^3 = 9.248$$

$$2^3 + 8^3 + 12^3 + 14^3 + 15^3 + 9^3 + 5^3 + 3^3 = 9.248$$

¡Este es ciertamente un cuadrado mágico notable!

5. Otros cuadrados mágicos. Cuadrados mágicos de Fermat y Euler

En el siglo XVI pueden citarse a Pacioli, Durero y Stiffel, pero es en el siglo XVII cuando aparece la obra más importante de las que la precedieron: «Problèmes, plaisons et délectables, qui se font par les nombres» de Bachet de Méziriac, dedicada a los cuadrados mágicos de orden impar.

Debemos mencionar asimismo a Fermat, que da la regla para la construcción de cuadrados mágicos que conservan su propiedad después de haberle suprimido su contorno formado por las filas y columnas exteriores, como el de la figura. Sólo el exterior tiene suma mágica 369 y, análogamente a los anteriores, están los 81 primeros números.

2	11	12	13	77	78	79	81	16
6	18	27	26	61	62	65	28	76
7	59	30	35	51	53	36	23	75
8	58	32	38	45	40	50	24	74
73	57	49	43	41	39	33	25	9
72	22	48	42	37	44	34	60	10
68	19	46	47	31	29	52	63	14
67	54	55	56	21	20	17	64	15
66	71	70	69	5	4	3	1	80

Sería innumerable la lista de los matemáticos que se han ocupado también de los cuadrados mágicos, como Pascal, Cayley, Franklin, etc., y muy especialmente Euler, quien construye no exactamente un cuadrado mágico, ya que la suma de las filas y de las columnas coinciden y es 260, pero no la suma de las diagonales (ver figura). Tiene una propiedad curiosísima: puede recorrerse desde el número 1 al 64 a salto de caballo de ajedrez, cubriendo todos los números del cuadrado. Otra propiedad notable es que puede descomponerse en cuatro cuadrados que no son mágicos exactamente pero en los que la suma de filas o de columnas en cada uno de ellos es 130, no coincidente en cambio con la suma de diagonales.

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

6. Cuadrados mágicos algebraicos

Propondremos un ejemplo de cuadrado mágico donde es necesario calcular la incógnita. Ejemplo

$$\begin{array}{ccc} 4(x-1) & x & 2(x-2) \\ 4x-1 & 2x-3 & 4x-3 \\ (x-1) & x-2 & x-1 \end{array}$$

En éste caso $x = 1$ y el cuadrado mágico será

8	1	6
3	5	7
4	9	2

7. Cuadrados antimágicos

Es posible construir también un cuadrado antimágico, es decir, uno en donde la suma de todas las filas, columnas y diagonales sea distinta. Sorprendentemente, estos cuadrados son, al menos al principio, más raros que los mágicos, puesto que no existe ninguno de orden dos ni de orden tres. De orden cuatro ya hay uno (salvo simetrías).

He aquí el cuadrado antimágico de orden cuatro

					Sumas	
	15	2	12	14	43	
	1	4	10	5	20	
	8	9	3	16	36	
	11	13	6	7	37	
Sumas:	44	35	28	31	42	29

8. Más cuadrados

He aquí otro tipo de cuadrado, si no mágico, sí al menos misterioso:

13	16	9	27	18	21
11	14	7	25	16	19
8	11	4	22	13	16
22	25	18	36	27	30
16	19	12	30	21	24
4	7	0	18	9	12

Su sorprendente característica es que la suma de cinco elementos cualesquiera de él, no pertenecientes dos a dos a la misma fila ni columna, es siempre 100. Dicho de otra forma: tómesese un número del cuadrado y táchese el resto de la fila y la columna en que se encuentra. De entre los números sobrantes, elíjase otro, suprimiéndose también el resto de su fila y su columna. Y así sucesivamente mientras queden números libres. La suma de los seleccionados (siempre serán seis) será infaliblemente 100.

Aunque esta propiedad parece realmente sorprendente, un análisis comparativo de las filas y columnas del cuadrado da la clave de su secreto. Una vez hallada, construiremos un cuadrado de 3 x 3 con una propiedad análoga, y con un valor para las sumas igual a 50.

Un examen del cuadrado muestra que la diferencia entre los elementos correspondientes de dos líneas paralelas es constante (por ejemplo, entre la 2.^a y la 4.^a columna existe una diferencia, constante para cada dos elementos de la misma fila, de 11). Ello indica que el cuadrado puede ser generado como suma de dos grupos de elementos constantes. O, en términos más simples, que el cuadrado no es más que una tabla de sumar de los valores, fácilmente deducible.

	4	7	0	18	9	12
9	13	16	9	27	18	21
7	11	14	7	25	16	19
4	8	11	4	22	13	16
18	22	25	18	36	27	30
12	16	19	12	30	21	24
0	4	7	0	18	9	12

De paso, los elementos-columna generadores son los mismos que los elementos-fila generadores, en otro orden distinto. Ahora se comprende la misteriosa propiedad del cuadrado: al tomar cinco elementos en filas y columnas distintas, estamos recogiendo en realidad los elementos del margen, sumados dos veces cada uno a través de los números seleccionados. La suma encontrada será en cada caso el doble de la suma de los «elementos generadores», es decir, $2 \times 50 = 100$.

Conocido el procedimiento, es fácil construir cuadrados de este tipo de un orden y una suma cualesquiera. Por ejemplo, el de 3x3 y suma 50, donde indicamos los elementos generadores:

	6	11	8
8	14	19	16
6	12	17	14
11	17	22	19

9. Cubos mágicos

Podríamos plantearnos si existen cubos mágicos, es decir, permutaciones de los $n \times n \times n$ primeros números dispuestos en tres dimensiones de forma que siga cumpliéndose la condición de suma por filas, columnas, filas transversales y diagonales. La respuesta es negativa para los de 2.^o y 3.^o orden, pero existen ya los de 4.^o orden.

Intentaremos hallar uno. No es tan difícil como parece, Utilizando una técnica en todo análoga a la expuesta para los cuadrados de orden cuatro. Antes de empezar los tanteos puede ya pronosticarse el valor de ésta suma múltiple.

El valor de la suma resulta inmediatamente de considerar que la de 64 términos, por la fórmula de la suma de las progresiones aritméticas es:

$$S = 1/2 \times 64 \times 65 = 2.080$$

que será igual a 16 sumas (las de todas las filas o columnas o filas transversas). Una de ellas vale, pues:

$$S = 2.080 / 16 = 130$$

He aquí una posible solución:

Piso 4. ^o	1	48	32	49
	60	21	37	12
	56	25	41	8
	13	36	20	61
Piso 3. ^o	62	19	35	14
	7	42	26	55
	11	38	22	59
	50	31	47	2
Piso 2. ^o	63	18	34	15
	6	43	27	54
	10	39	23	58
	51	30	46	3
Piso 1. ^o	4	45	29	52
	57	24	40	9
	53	28	44	5
	16	33	17	64

Bibliografía

- [1] ALBAIGES OLIVART, José M. *¿Se atreve Vd. con ellos?*. Marcombo S.A. 1.981.
- [2] ANDRÉS, W.S. *Magic Squares and Cubes*. New York: Dover. Publishing Co., 1.960.
- [3] GRUPO AZARQUIEL. *Ideas y actividades para enseñar Algebra*. Editorial Síntesis. Madrid 1991.
- [4] BOYER, CARL. B. *Historia de la Matemática*. Alianza Universidad.
- [5] PERALTA, Javier. *Principios didácticos e históricos para la enseñanza de la Matemática*. Huerga y Fierro Editores. Madrid 1.995.
- [6] STEINHAUS, H. *One hundred problems in elementary mathematics*. Pergamon Press. 1963.
- [7] WILLERDING MARGARET, F. *Conceptos matemáticos, un enfoque histórico*. C.E.C.S.A. Méjico 1.979.

Implementación de un paquete de dibujo de Grupos Cristalográficos Planos

Martín Garbayo Moreno *
Eugenio Roanes Lozano **

*Depto. Didáctica de las Matemáticas, Fac. de Educación (Univ. Complutense Madrid)

** Depto. Algebra, Fac. de Educación (Univ. Complutense Madrid)

Abstract

This article shows the possibilities of the package «Tort-Decó» for drawing wallpaper patterns. This is a Turtle-Geometry based Turbo-Pascal package, that allows the user to design a motif and replicate it via any admissible wallpaper group.

Resumen

La lógica conclusión de nuestros artículos publicados previamente sobre generación de rosetones y de frisos, es este, en el que abordamos la generación de un diseño cualquiera de los 17 grupos cristalográficos planos (pavimentos).

Siguiendo con la filosofía de nuestros trabajos anteriores, el objetivo de este nuevo programa es generar pavimentos con motivos diseñados por el usuario. En el dominio replicado los desplazamientos realizados por el cursor gráfico son traducidos a órdenes de la Geometría de la Tortuga y almacenados en una lista dinámica en memoria. A partir de este dominio se construye la célula que, sometida a las traslaciones pertinentes, genera el pavimento.

Nuestro paquete ha sido desarrollado en Turbo-Pascal, usando nuevamente la Implementación de la *Geometría de la Tortuga* [RR1], y funciona en ordenadores compatibles PC con tarjeta VGA o superior (en el modo 640 x 480 puntos, 16 colores, normas del BGI de Borland).

* e-mail: garbayo@eucmos.sim.ucm.es

** e-mail: eroanes@eucmos.sim.ucm.es

1 Los diecisiete grupos de pavimentos

Un pavimento M es una figura plana tal que el subgrupo de traslaciones de E_2 (plano euclídeo) que transforman M en sí mismo, está generado por dos traslaciones cuyos vectores son linealmente independientes. Tal subgrupo se denomina **grupo de traslaciones** de M y se denota por $T(M)$.

Se define **célula** del pavimento M como un subconjunto $C \subseteq E_2$ convexo y compacto, que verifica las siguientes condiciones:

- i) las imágenes de C mediante las traslaciones de $T(M)$ recubren E_2
- ii) ningún subconjunto cerrado propio de C posee la propiedad anterior.

Se llama **grupo de las isometrías** de M , $G(M)$, al subconjunto de movimientos del grupo de las isometrías de E_2 que transforman M en sí mismo.

Un **dominio fundamental** del pavimento M es un subconjunto $D \subseteq E_2$, convexo, compacto y de interior no vacío, que verifica:

- i) las imágenes de D por las isometrías de $G(M)$ recubren el plano
- ii) dichas imágenes no se solapan.

Una **célula reticular** del pavimento, es un paralelogramo que verifica:

- i) dicho paralelogramo es una célula de M .
- ii) las traslaciones que generan $T(M)$ son paralelas a los lados de dicho paralelogramo.

Siendo M un pavimento y $X \in E_2$, el subconjunto de puntos imágenes del X por las traslaciones de M se denomina **red de puntos** del par (M, X) .

Las redes de puntos de pavimentos suelen clasificarse en cinco tipos: **oblicua, rectangular, rómbica, cuadrada y exagonal**.

A su vez, cada uno de esos cinco tipos de red permite replicar el dominio fundamental según distintos grupos cristalográficos, resultando un total de 17 grupos posibles. La clasificación se puede hacer reconociendo los máximos ordenes de los centros de giro, así como si hay centros de giro en ejes de simetría,...

Se sale del objetivo previsto para este trabajo el dar una relación exhaustiva de los 17 grupos, y recomendamos al lector el excelente texto de Martin [Ma] o Roanes-Roanes [RR2] como una amena introducción. La nomenclatura usada a lo largo del trabajo para identificar a cada uno de dichos grupos se debe a la clasificación de grupos cristalográficos planos dada por D. Schattschneider [Scha].

2. Originalidad del paquete. Implementación

El objetivo del programa es dibujar pavimentos de cualquiera de los grupos posibles, fundiendo las ideas recogidas en [A-d] así como las usadas en los programas existentes para el dibujo de rosetones, frisos y pavimentos.

En el diseño del dominio que se va a replicar, siempre se consideran dos puntos para determinar cada uno de los elementos que definirán a aquél. Cada uno de estos elementos se almacenará en uno o dos registros definidos con seis campos: uno tipo byte (1 byte de tamaño en memoria), dos tipo word (2 bytes) más tres tipo real (6 bytes). 23 bytes en total por registro. Con esto, cada uno de los elementos considerados ocupará:

- Nada, Segmento, Circunferencia o Relleno: Un registro en el que el primer campo identifica el elemento, los dos siguientes el color y el ancho (ceros en el caso de nada), ocupando avance, giro y 0 los tres restantes.
- Arco: Dos registros para almacenar el código de arco, color, ancho, giro, avance, centro del arco y ángulos que definen su amplitud.

Para una explicación más detallada sobre la obtención de cada uno de los parámetros anteriores, véase [GR1] y [GR2].

3. Manejo del paquete

Al arrancar el programa, éste muestra la pantalla de presentación. Pulsando cualquier tecla se accede a la primera pantalla, en la que se ofertan dos opciones: dibujar un pavimento o leerlo del disco.

Si se elige la opción 1, se ofrece la posibilidad de colorear regiones delimitadas.

La siguiente pantalla (figura 1) muestra la pantalla siguiente en la que se requiere al usuario para que elija uno de entre los cinco posibles retículos.

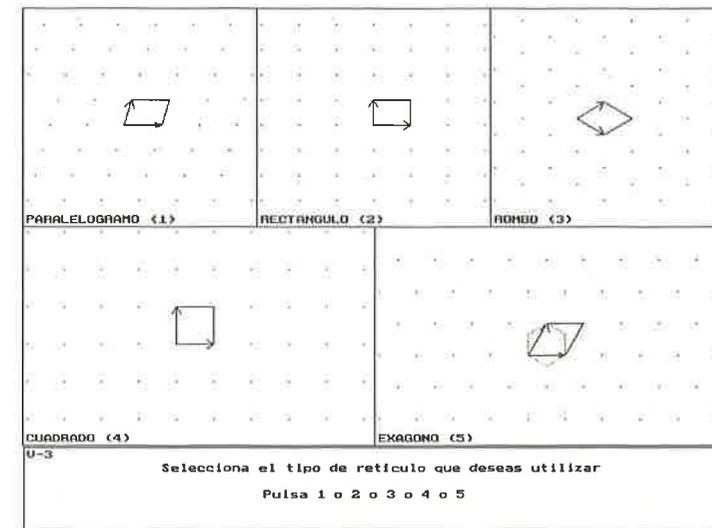


Figura 1

Según se elija uno de los cinco retículos, aparecerán en pantalla los grupos asociados a dicha red (las figuras 2 y 3 muestran los casos 5 y 3), solicitándose la elección de uno de ellos.

En los ejemplos que siguen, se supone que hemos elegido el la red exagonal y dentro de esta el grupo 3 (p31m).

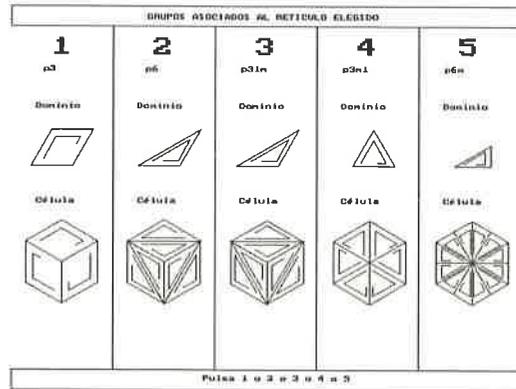


Figura 2

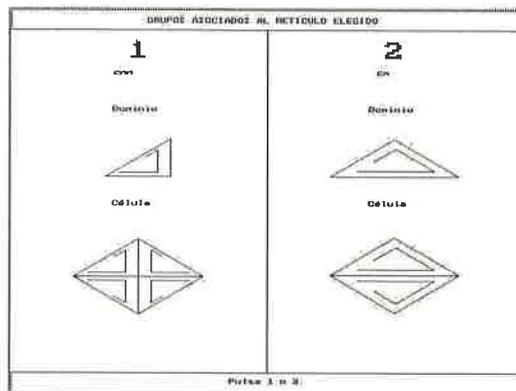


Figura 3

3.1 Diseño del dominio fundamental

Una vez elegido el grupo, la siguiente pantalla (figura 4) es el pupitre de dibujo, en el que se muestra un dominio y se ofrece la posibilidad de modificar sus dimensiones. Aparecen siempre en los vértices del dominio las coordenadas de estos así como un ángulo (en este caso el que forman el lado mayor del dominio con la horizontal).

Una vez elegidas las dimensiones del dominio, aparece una cruz-cursor en la esquina inferior izquierda del dominio y el mensaje de la ventana inferior del pupitre pasa a indicar cómo desplazarse por el interior del dominio y cómo dibujar.

En la parte superior izquierda del pupitre aparece durante el proceso de dibujo del dominio, la célula correspondiente al grupo elegido. En el ejemplo de la figura 5 se han trazado dos segmentos en el dominio, rellenando a continuación coloreado dos zonas.

Si no se hubiese elegido la posibilidad de rellenar zonas con colores, se habrían podido dibujar los segmentos, arcos, ... con distintos colores.

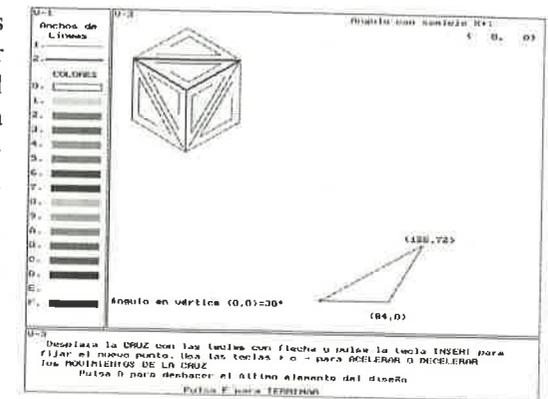


Figura 4

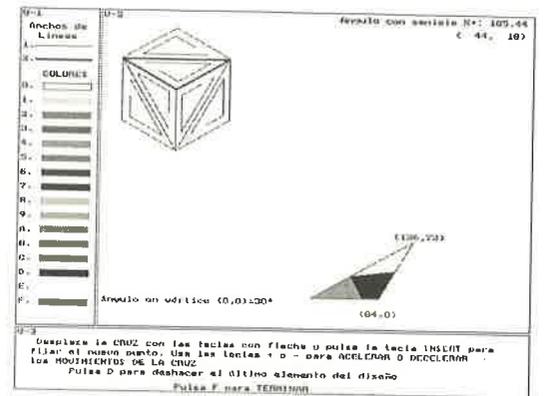


Figura 5

3.2 Dibujo de un pavimento

Una vez finalizado el diseño del dominio, pulsando la letra F se accede a la pantalla de la figura 6 en la que se ve el pavimento generado con el dominio correspondiente.

3.3 Análisis de los movimientos que dejan invariante al pavimento

Tras representarse el pavimento, pulsando una tecla, aparece la ventana en la que se ofrece la posibilidad de marcar los elementos que lo definen. La figura 7 muestra el análisis hecho sobre el pavimento de la figura 6.

A continuación se ofrece la posibilidad de dibujar otro pavimento con

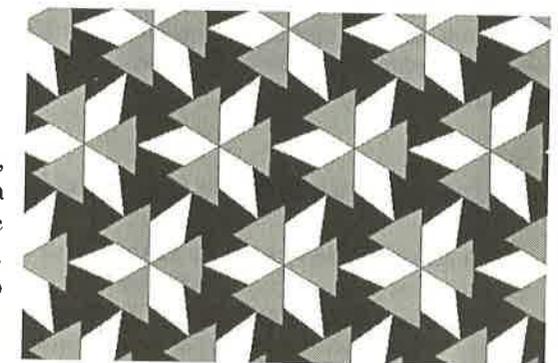


Figura 6

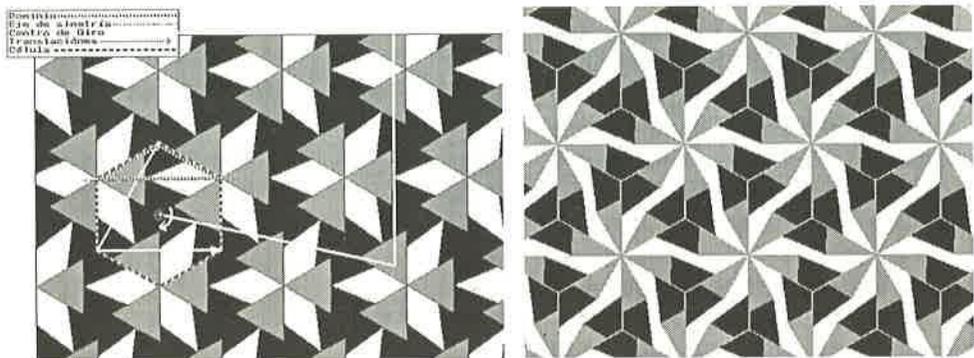


Figura 7

Figura 8

el mismo dominio pasando, si se elige S, a la pantalla de la figura 2 (repetiéndose de nuevo el proceso).

La figura 8 es un ejemplo del replicado del dominio anterior, si se elige el grupo p6.

3.4 Grabar un pavimento en el disco

Antes de salir, se ofrece la posibilidad de grabar en disco el pavimento dibujado. El nombre del archivo se dará a continuación sin extensión, añadiéndosele automáticamente la extensión. PAV.

3.5 Cargar un friso

La segunda opción de la primera pantalla consiste en leer un pavimento del disco. Basta con elegir la opción 2 y teclear el nombre del pavimento. Este se cargará y representará en pantalla, pudiéndose repetir para el dominio que lo define todo el proceso indicado a partir de 3.3.

4. Almacenamiento de la información

La secuencia de órdenes de la tortuga se almacena en memoria dinámica y se ejecuta sucesivas veces (una por cada dominio).

Para dar una idea de la bondad del tratamiento en cuanto al pequeño tamaño de los bloques de órdenes a memorizar, indicaremos que los archivos correspondientes a las figuras 6 y 8 ocupan 161 bytes.

5. Conclusión

En nuestra opinión, al explicitarse el proceso matemático constructivo más extensamente, nuestro paquete ofrece claras ventajas sobre otros existentes, como puede ser RepTiles, pues aún siendo excelentes, no resaltan los aspectos indicados.

Bibliografía

- [A-d] H. ABBELSON, A. DISSA: *Turtle Geometry. The Computer as a Medium for Exploring Mathematics*. M.I.T., 1981.
- [APR] C. ALSINA, R. PÉREZ, C. RUIZ: *Simetría dinámica*. Ed. Síntesis, 1989.
- [Am] M.A. ARMSTRONG: *Groups and Symmetry*. Springer-Verlag, 1988.
- [Bo] Y. BOSSARD: *Rosaces, Frises et Pavages*. Ed. Cedic, 1977.
- [GR1] M. GARBAYO, E. ROANES L.: *Implementación de un paquete de dibujo de rosetones (Grupos de Leonardo)*. Boletín de la Sociedad «Puig Adam», nm. 37, pgs. 87-96.
- [GR2] M. GARBAYO, E. ROANES L.: *Implementación de un paquete de dibujo de frisos*. Boletín de la Sociedad «Puig Adam», nm. 39, pgs. 87-96.
- [Ma] G.E. MARTIN: *Transformation Geometry. An Introduction to Symmetry*. Springer-Verlag, 1982.
- [RR1] E. ROANES M., E. ROANES L.: *Desarrollo de una implementación mejorada y flexible de la «Turtle geometry»*. III Encuentro de Geometría Computacional. Univ. de Zaragoza, 1-3 Julio, 1992.
- [RR2] E. ROANES M., E. ROANES L.: *Simulación didáctica de los Grupos de Simetría en el Arte Hispano-Musulmán*. Pub. Pablo Montesino. Univ. Complutense, 1993.
- [RR3] E. ROANES M., E. ROANES L.: *MACO. Matemáticas con ordenador*. Ed. Síntesis, 1988.
- [RR4] E. ROANES M., E. ROANES L.: *Nuevas tecnologías en Geometría*. Ed. Complutense, 1994.
- [Scha] D. SCHATTSCHNEIDER: *The plane symmetry groups: their recognition and notation*; Am. Math. Monthly, vol. 85, núm. 6(439-450) 1978.
- [-] -: *Manuales Turbo-Pascal*, v. 7.0. Borland, 1993.

Las mediatrices de un triángulo y su relación con las medias

Juan Bosco Romero Marquez y Maria Angeles Lopez y Sanchez-Moreno.

I.B. Isabel de Castilla. Avila.

Abstract

In this note the relation between the perpendicular bisectors of the sides of a triangle and the arithmetic, geometric and harmonic medias is presented. The geometric construction of these medias using perpendicular bisectors of the triangle is also explained.

En esta corta nota de caracter elemental presentamos la relación que existe entre las mediatrices de un triángulo y las medias armónica y geométrica, así como la media aritmética ponderada de dos numeros reales positivos, o lo que es lo mismo, de las longitudes de los segmentos geometricos asociados. Así mismo damos la construcción geométrica de todas las medias anteriores a través del triángulo y sus mediatrices.

1. Conceptos y resultados previos

Comenzamos esta sección presentado los conceptos y los resultados más importantes sobre las medias de dos numeros reales positivos.

1.1. Medias asociadas a dos numeros reales positivos

Sean $0 < a < b$, dos numeros reales positivos y $r \in \mathbb{R}$, llamamos media r -ésima de los números a y b , al numero $m_r(a, b)$ definido como sigue:

$$m_r(a, b) = \left(\frac{a^r + b^r}{2} \right)^{1/r} \quad (1)$$

$$m_0(a, b) = \sqrt{ab}, \quad m_{-\infty}(a, b) = a, \quad m_{+\infty}(a, b) = b$$

En particular, si hacemos en (1), $r = -1$, $r = 1$, $r = 2$, se obtiene las medias armónica, aritmética y cuadrática de a y b , respectivamente.

En el teorema siguiente resumimos las propiedades más importantes que tienen las medias de dos numeros reales positivos.

Teorema 1. Si $0 < a < b$, son dos numeros reales, entonces se verifica:

- i) $m_r(a, b) = m_r(b, a)$ (simetría).
- ii) $m_r(a, b) = t m_r(a, b)$, $t > 0$ (homogeneidad).
- iii) $a < m_r(a, b) < b$.
- iv) Si $r < s$, implica que, $m_r(a, b) < m_s(a, b)$ (monotonía).

Por métodos elementales de calculo algebraico simple se puede probar el siguiente resultado:

Corolario. Si $0 < a < b$, son numeros reales, entonces se tiene:

$$a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} < b$$

Ver, [1] y [2].

Para un estudio algebraico, analítico y geométrico de estos tipos de medias, de algunas identidades y desigualdades fundamentales que se establecen entre ellas, así como la relación existente con algunos problemas de máximos y mínimos sobre ciertas figuras del plano, veanse los libros [1] y [2] citados en la bibliografía.

Para una generalización de las medias y de otros resultados sobre ellas, vease, [26].

2. Resultados

En esta sección probamos los resultados más importantes de nuestro trabajo utilizando para ello el Teorema de Tales aplicado a la semejanza entre triángulos.

2.1. La media armónica y la media aritmética ponderada caracterizadas a través de los triángulos acutángulos y obtusángulos

Suponemos conocido en todo lo que sigue los conceptos de mediatrices y circuncentro de un triángulo y las propiedades de las medias armónica, geométrica y aritmética (ponderadas o no) de dos numeros reales positivos.

Comenzamos enunciando el siguiente teorema.

Teorema 2. Sea ABC un triángulo de lados $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$.

Tracemos la mediatriz al lado BC por su punto medio A', y sean los puntos C' y B' donde esta corta a los lados (o a sus prolongaciones) AB y AC, respectivamente. Si denotamos por h = AA'' a la altura correspondiente al lado BC, y si ponemos x = A'C', y = A'B', m = BA'' y n = A''C, (ver figura 1), entonces se verifica:

$$h = \frac{mx + ny}{m+n} = \frac{2xy}{x+y}$$

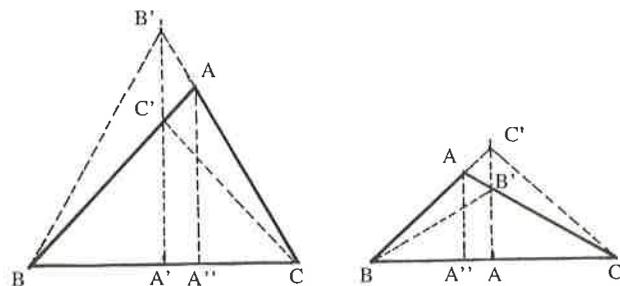


Figura 1

Demostración. Veamos la demostración del teorema para el caso en que el triángulo es acutángulo (si es obtusángulo se hace de una forma similar).

Por las construcciones que hemos hecho en las figuras indicadas, los triángulos rectángulos ABA'' y A'C'B son semejantes ya que tienen los lados paralelos.

Por lo tanto tenemos: $a h = 2 m x$, de donde:

$$h = \frac{2mx}{a} \quad (2)$$

De forma similar, los triángulos rectángulos A'B'C y AA''C son también semejantes, ya que tienen un ángulo común, C.

Por ello: $a h = 2 n y$, y de aquí tenemos que:

$$h = \frac{2ny}{a} \quad (3)$$

Sumando (2) con (3) obtenemos:

$$2h = \frac{2}{a} (mx + ny)$$

y ahora despejando h, teniendo en cuenta que $m x = n y$, llegamos a

$$h = \frac{mx + ny}{m+n} = \frac{2xy}{x+y} \quad (4)$$

Con lo que tenemos así probado que h es a la vez la media aritmética ponderada y la media armónica de los segmentos de longitudes x e y, respectivamente, en virtud de la proporcionalidad que hay entre los segmentos, m, n, x e y que intervienen en (4).

Como una consecuencia inmediata tenemos:

Corolario. El área del triángulo ABC es la media armónica de las áreas de los triángulos isósceles BCC' y BCB'.

Ejercicio. Utilizando una construcción similar a la anterior dibujar el segmento:

$$h = \frac{2xy}{y-x} \quad \text{donde } y > x > 0. \quad (\text{Ver la figura 2}).$$

Notas

- 1) Observar que, la clave en todo lo anterior ha sido el utilizar los triángulos isósceles para determinar la altura de todo triángulo como una media armónica de las alturas de los triángulos isósceles, BCB' y BCC'.

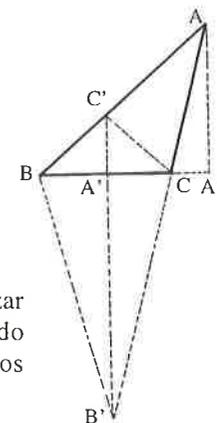


Figura 2

2.2. La media armónica y la media geométrica son equivalentes en un triángulo rectángulo

De la misma forma que antes, pero vía el triángulo rectángulo podemos demostrar el siguiente teorema:

Teorema 3. Sea ABC un triángulo rectángulo en A de lados $a > b \geq c$. Si denotamos por $a = BC$, $x = A'B'$, $y = A'C'$, $m = A''C$, $n = A''B$, donde A'' es el punto proyección ortogonal (pie de la perpendicular) trazada desde el punto A sobre el lado BC, entonces

$$h = \frac{2xy}{x+y} = \sqrt{mn} \quad (5).$$

Demostración

Por la construcción realizada, en la figura 3, los triángulos rectángulos A'B'C y AA''C, son semejantes ya que tienen un ángulo común en el vértice C y los lados C'A' (mediatriz de BC) y AA'' (altura) paralelos y perpendiculares al segmento BC.

De forma análoga se prueba que los triángulos rectángulos A'C'B y AA''B son semejantes, ya que tienen un ángulo común en el vértice B y los lados B'A' y AA'' paralelos.

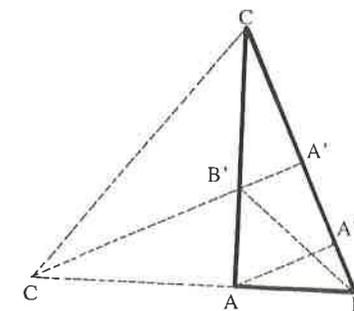


Figura 3

Por lo tanto, escribiendo la relación de semejanza entre los siguientes pares de triángulos, obtenemos:

$$\frac{h}{x} = \frac{A''C}{a}, \quad A''C = \frac{ha}{2x} \text{ para el par } AA'B'C, AAA''C, y$$

$$\frac{h}{y} = \frac{A''B}{a}, \quad A''B = \frac{ha}{2y} \text{ para el par } AA'C'B, AAA''B,$$

Ahora bien

$$a = BC = A''C + A''B = \frac{ha}{2x} + \frac{ha}{2y} = \frac{ha}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

y, despejando h, obtenemos:

$$h = \frac{2xy}{x+y} = \sqrt{mn}$$

con lo que el teorema queda probado.

3. Conclusiones, comentarios y observaciones

Creemos que los resultados elementales aquí expuestos sobre las caracterizaciones y las construcciones de las medias usuales vía el triángulo pueden ser explicados como una experiencia didáctica novedosa sobre la geometría plana elemental en el aula, por ser esta sencilla, tanto a los alumnos de BUP como a los de la ESO.

En definitiva, como conclusión u observación última podemos afirmar que, en el noble y difícil arte de enseñar, si los profesores somos creativos, imaginativos e investigadores en el aula, y eso lo ven, lo viven, lo tocan, lo juegan, lo aman y lo observan nuestros alumnos, también ellos lo serán y lo demostrarán algún día, en cualquier campo profesional donde tengan que realizar su trabajo. Y esto es la satisfacción más grande que puede recibir un profesor de los alumnos a los que ha enseñado y educado en las Matemáticas: ser creativos e imaginativos.

Menudo reto es en la enseñanza actual el conseguir este objetivo.

Bibliografía

- [1] A.S. POSAMENTIER: *The harmonic Mean and Its Place among Means*, pp. 215-224, Reading for enrichment in secondary school mathematics, NCTM, Edited by M.A. Sobel, 1988. Reston.
- [2] F.E. BECKENBACH and R. BELLMAN: *An Introduction to Inequalities*, Chapter 2, pp. 21-14, and Chapter 4: The Classical Inequalities, pp. 47-78, New York, Random House, 1961.

- [3] L. H. LANGE, POLYA'S, «Mushrooms» a *Mathematical Concert Remembering George Polya, Teaching and Learning: A Problem- Solving Focus*, pp. 73-84, Edited by, F. R. Curcio, NCTM, 1989, Reston.
- [4] V. GUSEV, V. LITVINENKO, A. MORDKOVICH, *Solving Problems in Geometry*, Mir Publishers Moscow, 1988.
- [5] P. GUSIATNIKOV, S. REZNICHENKO, *Algebra Vectorial en ejemplos y problemas*, Editorial Mir, Moscu, 1988.
- [6] P. PUIG ADAM, *Curso de Geometría Métrica*, Vol I, II, Editorial Matematica, S.L, Madrid, 1961.
- [7] I. F. SHARYGIN, *Problems in Plane Geometry*, Mir Publishers, Moscow, 1988.
- [8] I.M. YAGLOM, *Geometric Transformations*, Vol I, II, III, MAA, 1973.
- [9] E.Z. SHUVALOVA, *GEOMETRY*, Mir Publishers, Moscow, 1980.
- [10] A.V. POGORELOV, *GEOMETRÍA ELEMENTAL*, Mir, Moscu, 1974.
- [11] E.E. MOISE, *Geometría Elemental desde un punto de vista avanzado*, CECSA, Barcelona, 1978.
- [12] A.S. POSAMENTIER, CH.T. SALKIND, *Challenging Problems in Geometry*, Dale Seymour Publications, Palo Alto, California, 1988.
- [13] M. QUEYSANNE, A. REVUZ, *Geometría*, CECSA, Barcelona, 1976.
- [14] H. EVES, *Estudios de las Geometrías*, Vol I, II, Uteha, Mexico, 1969. Libro excelente desde todos los puntos de vista de la Geometría. Tiene una buena y completa bibliografía.
- [15] H.S.M. COXETER, *Fundamentos de la Geometría*, Limusa-Wiley, México, 1971. Libro donde se exponen de forma maravillosa –la vena de la geometría– con diferentes tópicos que van desde la geometría elemental a la geometría avanzada.
- [16] B. SENECHAL, *Geometrie classique et mathematiques modernes*, Hermann, Paris, 1979.
- [17] B. SENECHAL, *Groupes et geometries*, Hermann, Paris, 1979.
- [18] H.S.M. COXETER y S.L. GREITZER, *Retorno a la Geometría*, DLS-Euler, Editores, Madrid, 1993. Libro muy bueno sobre la Geometría Elemental.
- [19] E. CASTELNUOVO, *Geometría Intuitiva*, Labor, Barcelona.
- [20] C. ALSINA y otros, *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. E. Sintesis, Madrid, 1987.
- [21] SHANG-CHING CHOU, *Mechanical Geometry Theorem Proving*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1987.
- [22] D.S. MITRINOVIC, J.E. PECARIC, y V. VOLONEC, *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Academic Press, Dordrecht, 1989.
- [23] C. HERBERT CLEMENS, M.A. CLEMENS, *Geometry for the classroom*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [24] EDITED, H. BEHNKE, F. BACHMANN, K. FLADT, H. KUNLE, *Fundamental of Mathematics, Geometry*, Vol II, MIT Press Cambridge, Massachusetts, 1974.
- [25] D.M. BLOOM, *Linear Algebra and Geometry*, Cambridge University Press, 1979, Cambridge.
- [26] D.S. MITRINOVIC.- *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [27] J.N. CEDERBERG, *A Course in Modern Geometries*, Springer-Verlag, NY, 1991.
- [28] E. PERRY, *Geometry: Axiomatic Development with Problem Solving*, Marcel Dekker, NY, 1992.

Reseña de libros

GABRIELA CONSTANTINESCU y ELIODOR CONSTANTINESCU: *Kangourou des Mathématiques*. Editura Sigma, Bucarest, 1995. 134 páginas.

El «Kangourou» es la mayor competición escolar del mundo en el ámbito de las matemáticas. Sus juegos-concursos están organizados por la asociación «Math pour Tous» bajo el patrocinio de *l'Académie des Sciences Française*. Están destinados a alumnos de 8 a 18 años. Iniciados en Francia en 1991, se extendieron rápidamente a Rumanía y Polonia y poco después a numerosos países de todo el mundo. A la vez, se han ido aceptando nuevas categorías de alumnos.

La mascota de estas competiciones es un canguro, en honor a los australianos que fueron sus precursores quince años antes, pero se trata de una imagen de un canguro muy especial, ya que con imágenes (directa o inversamente) iguales, se puede «embaldosar» el plano entero.

En 1994, el número de participantes se elevó ya a 800.000. Las pruebas se realizan simultáneamente en todos los países. Las 30 cuestiones propuestas son las mismas para todos y van clasificadas en tres conjuntos de 10, con distinta dificultad y con distinta valoración en puntos de las respuestas. Para cada cuestión se ofrecen cinco respuestas posibles y el alumno debe simplemente escoger la que encuentra acertada.

El librito que comentamos recoge, con presentación atractiva, las cuestiones propuestas en los Kangourou de los años 1991 a 1994, junto con la tabla de respuestas correctas y una colección de indicaciones para la resolución de las cuestiones más difíciles.

J. F. B.

E. BARBEAU, M.S. KLAMKIN, W.MOSER: *Five Hundred Mathematical Challenges*. The Mathematical Association of America. I.S.B.N. 0-88385-519-4. Washington, 1995. 227 páginas.

Hace veinte años, la *Canadian Mathematical Society* comenzó la publicación de una serie de folletos titulados *Mil y un problemas de Matemáticas escolares*, al asombroso precio de 1\$80 cada uno, con objeto de popularizar la resolución de problemas interesantes de Matemáticas Elementales. Sus autores, tres matemáticos de gran prestigio: Barbeau, Klamkin y Moser. La serie tuvo un enorme éxito y desde hace mucho tiempo se echaba en falta la reedición. Es de esperar que, inflación aparte, la publicación que comentamos merezca, al menos, la misma atención que su predecesora. En alguna ocasión me han preguntado: ¿Se sigue publicando *Mil y un problemas...*? Porqué sólo llega al número 500. Tal vez la serie nació con vocación de continuidad (de hecho, en los folletos no se publicaban todas las soluciones de los problemas incluidos en cada uno), pero yo prefiero pensar en Scherezadeh.

El nivel de dificultad de los problemas es muy variado: desde el ejercicio que se resuelve en una línea, hasta el teorema de Van Aubel (si se unen los centros de los cuadrados, contruídos exteriormente sobre los lados opuestos de un cuadrilátero, los dos segmentos así determinados son iguales y perpendiculares). Es un excelente auxiliar para la preparación de concursos, seminarios de resolución de problemas y actividades similares. Esporádicamente se incluyen citas como ésta (de F. Bowman, en *Mathematical Gazette*, 1935, p. 273): Una vez compré un ejemplar del libro de Casey Sequel to Euclid en una librería de segunda mano, y en la contraportada había pegada una etiqueta azul, de las usadas en los frascos de medicinas, con la inscripción: *Veneno-tómese tres veces al día*.

Al final del libro se incluye una *Mathematical toolchest* con los resultados necesarios para la resolución de los problemas.

Francisco Bellot Rosado

ROSS HONSBERGER: *From Erdős to Kiev. Problems of Olympiad Caliber*. The Mathematical Association of America. Dolciani Mathematical Expositions, número 17. ISBN 0-88385-324-8. Washington 1996. 257 páginas.

El prolífico autor canadiense Ross Honsberger, de la Universidad de Waterloo, acaba de publicar su-por ahora- último trabajo: una recopilación de problemas, principalmente de Olimpiadas, casi todos procedentes de la magnífica revista *crux mathematicorum*, pero con un considerable número de soluciones originales del autor, o de otros colegas cuyos nombres figuran invariablemente citados en el curso de la exposición. Una costumbre, dicho sea de paso, que se suele echar en falta por estos pagos en más de una ocasión.

Ochenta y nueve problemas se incluyen en el libro: treinta de Combinatoria y Geometría Combinatoria; treinta y ocho de Álgebra, Teoría de Números, Probabilidad y Cálculo diferencial; y el resto de Geometría clásica.

La exposición sigue las líneas características de todos los libros y conferencias del autor, al que personalmente considero un verdadero maestro en el arte de «instruir deleitando»; una solución contada por Honsberger es «otra cosa». Hay que leerla (o verla) para apreciarla en todo su valor.

Entre los problemas seleccionados por Honsberger hay tres españoles:

Construir el triángulo ABC, dados el lado AB, la longitud del segmento OH y sabiendo que OH es paralelo a AB. (Problema propuesto por España en la 26 Olimpiada Internacional de Finlandia).

Para cada entero positivo n, probar que la ecuación

$$P_n(x) = x^{n+2} - 2x + 1 = 0$$

tiene exactamente una raíz c_n entre 0 y 1, y determinar $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. (Problema propuesto en la fase final de la 23 O.M.E. de 1987).

En el triángulo rectángulo ABC, de baricentro G, se consideran los triángulos AGB, GBC, CGA. Si los lados de ABC son números naturales, demostrar que las áreas de AGB, GBC y CGA son números pares.

(Problema propuesto en la primera fase de la 23 O.M.E., noviembre de 1986).

Los aficionados a la resolución de problemas disfrutaremos, a buen seguro, con la lectura de este libro, que resultará extraordinariamente útil en la labor de preparación de los estudiantes.

Francisco Bellot Rosado

RETOS. Revista de Problemas de Matemáticas.

Tras *L'Aula de Matemàtiques y Algorisme* la Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana Al-Khwarizmi pone en circulación una tercera publicación con el título RETOS. Revista de Problemas de Matemáticas.

RETOS va destinada al profesorado y alumnado de la ESO. No es una revista para leer, es una revista que obligará a actuar, muy ágil y amena. Ofrece material listo para usar y totalmente adaptable a cualquier situación escolar. Presenta una amplia y escogida batería de problemas y actividades con el fin de provocar e incitar a la reflexión de forma continuada.

Entre sus secciones figuran:

Olimpiadas Matemáticas. Recopilación de problemas propuestos en las diferentes fases de las Olimpiadas que se celebran en distintas latitudes.

Grandes autores de Problemas. Selección de problemas de matemáticas recreativas de autores de todos los tiempos desde los clásicos Sam Loyd, Henry E. Dudeney o Edouard Lucas, a los más recientes como Eric Emmet, Jean-Pierre Alem, Joseph S. Madachy, David Hall, Martin Gardner, Raymond Smullyam o Iam Stewart.

Actividad Central. Doble página con una propuesta que facilita la comprensión de enunciados o el abordaje de un llamativo problema, que obliga a usar una determinada estrategia, que da luz a una noción matemática o que abre caminos para indagar variantes o nuevas posibilidades.

Retos Matemáticos. La sección principal de la revista, con problemas de una mayor dificultad y de contenido muy variado.

Geometría. Sección que pretende ir introduciendo al alumno en el arte de la deducción: concatenar sencillas premisas para ir extrayendo unas conclusiones muy directas.

Papiroflexia Matemática. Actividades para facilitar el paso, en un sentido y otro, de la 2.^a a la 3.^a dimensión.

Juegos de Estrategia. Un solitario o un juego para dos personas, de reglas sencillas y con posibilidades para analizar.

Afrontar un problema exige organización, sistematización, concentración, tesón, perseverancia, creatividad, versatilidad, flexibilidad de pensamiento...; pone en tela de juicio la impulsividad, osadía, superficialidad y rebuscamiento del alumno, requiere análisis y adaptabilidad, obliga a la revisión, a la reflexión y a la síntesis, provoca ansiedad, desaliento, incertidumbre, entusiasmo, incitación y disfrute. El proceso de resolución de un problema supone, sin duda alguna, una vivencia rica y formativa, y ningún profesor debe renunciar a que sus alumnos pasen por ella. RETOS pretende facilitar esa ardua y apasionante labor.

Antonio Ledesma López

Problemas propuestos

FASE FINAL DE LA XXXII OLIMPIADA MATEMÁTICA ESPAÑOLA

Primera sesión

1. Los números naturales a y b son tales que $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ es entero. Demostrar que el máximo común divisor de a y b no es mayor que $\sqrt{a+b}$.

2. Sea G el baricentro del triángulo ABC . Demostrar que si $AB + GC = AC + GB$ entonces ABC es isósceles.

3. Sean a, b y c tres números reales. Se consideran las funciones

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad y \quad g(x) = cx^2 + bx + a.$$

Sabiendo que $|f(-1)| \leq 1$, $|f(0)| \leq 1$, y $|f(1)| \leq 1$, probar que si $-1 \leq x \leq 1$, entonces

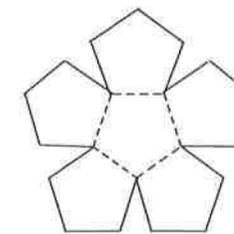
$$|f(x)| \leq \frac{5}{4} \quad y \quad |g(x)| \leq 2.$$

Segunda sesión

4. Encontrar todos los valores reales de x en la ecuación $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$ donde p es un parámetro real que debe acotarse.

5. En Port Aventura hay 16 agentes secretos. Cada uno de ellos vigila a algunos de sus colegas. Se sabe que si el agente A vigila al agente B, entonces B no vigila a A. Además, 10 agentes cualesquiera pueden ser numerados de forma que el primero vigila al segundo, éste vigila al tercero, ..., el décimo vigila al primero. Demostrar que también se pueden numerar de esa manera 11 agentes cualesquiera.

6. La figura adjunta se compone de seis pentágonos regulares de lado un metro. Se dobla por las líneas de puntos hasta que coinciden las aristas no punteadas que confluyen en cada vértice. ¿Qué volumen de agua cabe en el recipiente así formado?



Problemas propuestos por nuestros socios

Problema 7: ¿De cuántas formas es posible colocar 8 torres en un tablero de ajedrez sin que se capturen entre ellas y sin que ninguna esté situada sobre cualquiera de las dos diagonales (blanca o negra)?

Joaquín Gómez Rey (Alcorcón, Madrid)

Problema 8: Siendo n un entero positivo y para todo $r = 0, 1, 2, \dots, n$ demuestre que:

$$\sum_{k=r}^{\lfloor \frac{n+r}{2} \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{r} \binom{2n-2k}{n-r} = (-1)^r \binom{n}{r} 2^{n-r} \quad \text{usando un razonamiento combinatorio.}$$

Joaquín Gómez Rey (Alcorcón, Madrid)

Problema 9: En el espacio euclídeo \mathbb{R}^n consideremos el n -cubo unidad con una pequeña partícula brillante situada sobre un vértice. En cada unidad de tiempo, la partícula puede moverse hacia un vértice contiguo (a lo largo de la respectiva arista) o bien permanecer en el mismo vértice, con la misma probabilidad para cada posible vértice. Supuesto que el nivel de energía de la partícula es la suma de las coordenadas del punto sobre el que está situada, después de largo tiempo, y para todo $k = 0, 1, \dots, n$ ¿Cual es la probabilidad de que la partícula tenga un nivel de energía k ?

Joaquín Gómez Rey (Alcorcón, Madrid)

Problema 10: Para diseñar una bandera se dispone de n bandas horizontales y de una urna con n bolas iguales y colores diferentes; de ella se extraen sucesivamente y con reposición n bolas. El color de la k -ésima bola extraída se le asigna a la k -ésima banda. Sea p_n la probabilidad de que no haya dos bandas consecutivas de igual color. Halla $\lim p_n$.

Joaquín Gómez Rey (Alcorcón, Madrid)

Problema 11: Siendo m y n enteros positivos, consideremos los caminos que partiendo desde el origen $(0,0)$ y yendo siempre una unidad hacia el norte o hacia el este, llegan al punto $(m+n, m+n)$. Demuestre que el número de esos caminos que pasan por (n,n) es mayor o igual que el número de caminos que pasan por (m,n) .

Joaquín Gómez Rey (Alcorcón, Madrid)

Problema 12: El conjunto de los 12 vértices del icosaedro regular es partido en 3 clases de 4 vértices cada una, de tal modo que los 4 vértices de cada clase sean los vértices de un rectángulo áureo y los tres rectángulos estén en planos perpendiculares entre sí dos a dos. ¿De cuántas formas puede ser hecho?

Joaquín Gómez Rey (Alcorcón, Madrid)

Problemas resueltos

PROBLEMA 1 (BOLETÍN 39)

Se dice que un número natural n es «sensato» si existe un entero r , con $1 < r < n-1$, tal que la representación de n en base r tiene todas sus cifras iguales. Por ejemplo, 62 y 15 son sensatos, ya que 62 es 222 en base 5 y 15 es 33 en base 4. Demostrar que 1993 no es sensato pero 1994 sí lo es.

Solución:

Si n es sensato entonces tiene la forma:

$$n = ar^0 + ar^1 + \dots + ar^k = a \cdot \left(\sum_{i=0}^k r^i \right) = a \cdot \left(\frac{r^{k+1} - 1}{r - 1} \right) = a \cdot b$$

Si factorizamos 1994 tenemos $1994 = 2 \cdot 997$. Esto implica que si 1994 es sensato tiene que ser $a = 1$, $b = 1994$, o bien $a = 2$ y $b = 997$. Si escogemos esta última, la condición $b = 997$ sustituida en (1) nos da:

$$r^{k+1} = 997r - 996$$

que admite la solución trivial $r = 996$, $k = 1$. Esto significa que $1994 = 2 \cdot 996^0 + 2 \cdot 996^1$, es decir, 22 en base 996, y por tanto 1994 es un número sensato.

Por otra parte, como 1993 es primo la única posibilidad es $a = 1$, $b = 1993$. Al sustituir en (1) este valor de b resulta la condición:

$$r^{k+1} = 1993r - 1992$$

o bien:

$$k = \frac{\ln(1993r - 1992)}{\ln r} - 1$$

Esta es una función en el plano (r,k) . Se trata de ver cuándo ambas variables pueden ser enteras simultáneamente. Analizando gráficamente el comportamiento de (2) con cualquiera de los programas que existen al efecto, es fácil comprobar que los únicos puntos de la curva tal que ambas componentes son enteras son $(r_1, k_1) = (1, 1992)$ y $(r_2, k_2) = (1992, 1)$. Como por definición $r < 1$ y $r < (n-1)$ y, ninguna de las anteriores soluciones es válida y 1993 no es sensato.

Benito Hernández Bermejo, UNED (Madrid)

PROBLEMA 8 (BOLETIN NUMERO 39)

Demostrar que si $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$ entonces $x + y = 0$.

Solución:

Tomando logaritmos naturales a ambos lados tenemos:

$$\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) + \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 0$$

Pero dado que para $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \operatorname{argseh}(x)$ para $-\infty < x < \infty$, resulta:

$$\operatorname{argseh}(x) = -\operatorname{argseh}(y) = \operatorname{argsenh}(-y)$$

Como es una función uno a uno en $(-\infty, \infty)$ esto implica $x = -y$, o bien $x + y = 0$, como queríamos.

Benito Hernández Bermejo, UNED (Madrid)

PROBLEMA 10 (BOLETIN NUMERO 39)

Determinar el menor número natural m tal que, para todo número natural $n \geq m$, se verifique $n = 5a + 11b$, siendo a y b enteros mayores o iguales que 0.

Solución:

Sea m la solución. Entonces la descomposición existe para todos los enteros posteriores, y en particular:

$$m + 1 = 5(a - 2) + 11(b + 1)$$

$$m + 2 = 5(a - 4) + 11(b + 2)$$

$$m + 3 = 5(a - 6) + 11(b + 3)$$

$$m + 4 = 5(a + 3) + 11(b - 1)$$

$$m + 5 = 5(a + 1) + 11b, \text{ etc.}$$

De las expresiones de $m + 3$ y $m + 4$ vemos que $a \geq 6$ y $b \geq 1$, respectivamente. Esto nos da, en principio, una cota superior para: $m: m \leq 5 \cdot 6 + 11 \cdot 1 - 41$. No obstante, si $m = 5a + 11b$ con $b \geq 1$, entonces $m - 1$ también es expresable de esta forma como $m - 1 = 5(a + 1) + 11(b - 1)$. Este es el caso aquí, ya que $40 = 5 \cdot 8$. En cambio, la regla anterior ya no es aplicable para 40, porque ahora tenemos $b = 0$. El hecho de que 39 ya no se puede descomponer como $39 = 5a + 11b$ nos confirma que la solución es $m = 40$.

Benito Hernández Bermejo, UNED (Madrid)

PROBLEMA 11 (BOLETIN NUMERO 39)

Un subconjunto $A \subseteq M = \{1,2,3,\dots,10,11\}$ es *majo* si tiene la siguiente propiedad:

«Si $2k \in A$, entonces $2k - 1 \in A$ y $2k + 1 \in A$ »

(El conjunto vacío y M son majos). ¿Cuántos subconjuntos majos tiene M ?

Solución:

Por la definición, un subconjunto A es majo si cuando un número par pertenece a A , los enteros anterior y posterior también pertenecen a A . Esto significa que los «bloques» con los cuales se construyen los conjuntos majos son los elementos del conjunto B , donde

$$B = \{ \{1,2,3\}; \{3,4,5\}; \{5,6,7\}; \{7,8,9\}; \{9,10,11\} \}$$

Cualquier conjunto formado por la unión de elementos de B será majo. Viceversa: por definición, todo conjunto majo podrá descomponerse de modo inmediato como unión de elementos de B , con sólo identificar los números pares que contiene. Así pues, si es el número de subconjuntos majos de M , tendremos:

$$N = \operatorname{card} \{P(B)\} = 2^5 = 32$$

donde P denota el conjunto de partes de B .

Benito Hernández Bermejo
Departamento de Física Fundamental. UNED.
Apartado 60.141. 28080 Madrid.
E-mail: benito@fisfun.uned.es

Índice de soluciones publicadas

Propuestos en el n.º	Procedentes de	Número de Boletines en que aparecen las soluciones de los problemas de números												
		1.º	2.º	3.º	4.º	5.º	6.º	7.º	8.º	9.º	10.º			
1	Varios	4	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
2	OMI-83-Paris	3	3	3	4	4	4	—	—	—	—	—	—	C
3	OME-f2-84	19	19	19	19	18	19	19	19	—	—	—	—	C
4	OMI-84-Praga	5	5	6	5	6	14	—	—	—	—	—	—	C
5	Varios	8	7	12	7	7	8	—	—	—	—	—	—	C
6	Varios	7	7	16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
7	OMI-85-Finlandia	9	9	16	16	9	9	—	—	—	—	—	—	C
8	OI-85-Bogotá	10	10	17	10	10	11	—	—	—	—	—	—	C
9	OME-f2-86/Varios	18	19	20	18	19	19	17	17	11	17	—	—	C
10	China/Australia	20	15	21	20	15	21	20	23	21	—	—	—	C
11	OME-f1-86/	13	14	14	14	14	23	20	15	20	12	—	—	C
	OMI-86-Varsovia	26	20	12	21	—	—	—	—	—	—	—	—	C
12	OI-87-Urug./OME-f1	16	14	14	17	15	17	15	15	15	21	—	—	C
13	OME-f2-87	20	21	21	21	21	21	—	—	—	—	—	—	C
14	Varios	15	15	15	15	—	—	—	—	—	—	—	—	C
15	OMI-87-Cuba	18	18	18	21	21	21	—	—	—	—	—	—	C
16	OME-f1-87	22	22	21	18	22	22	22	22	—	—	—	—	C
17	OME-f2-88	25	23	23	23	23	23	—	—	—	—	—	—	C
18	OI-88-Perú	23	23	23	23	25	25	—	—	—	—	—	—	C
19	OMI-88-Australia	23	26	24	24	23	26	—	—	—	—	—	—	C
20	OME-f1-88/Putnam	24	26	24	25	24	26	24	26	26	24	—	—	C
21	OME-f2-89/	24	27	24	27	27	24	27	25	27	26	—	—	C
	OI-89-Cuba	26	27	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
22	OMI-89-R.F.A./	28	28	XX	28	29	30	30	30	30	31	—	—	C
	Oposiciones	31	30	29	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
23	Oposiciones	27	27	28	28	29	31	31	30	—	—	—	—	C
24	OME-f1-90	30	31	31	30	31	30	30	31	—	—	—	—	C
25	OME-f2/f1-90	34	31	29	29	31	32	32	32	32	33	—	—	C
26	OMI-90-China/	32	XX	XX	32	XX	XX	XX	32	XX	34	—	—	C
	OI-90-Valladolid	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	C
	OME-f1-91	33	XX	33	33	XX	35	XX	XX	—	—	—	—	C
28	OME-f2-91	32	32	XX	XX	33	33	—	—	—	—	—	—	C
29	OMI-91-Suecia	38	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	C
30	OI-91-Argentina/	XX	XX	XX	33	38	XX	XX	33	33	33	—	—	C
	OME-f1-91	33	34	34	34	—	—	—	—	—	—	—	—	C
31	OME-f2-92/	36	XX	36	36	36	XX	XX	XX	XX	35	—	—	C
	OME-f1-91/PNS	XX	XX	XX	35	34	—	—	—	—	—	—	—	C
32	OMI-92-Moscu/	35	XX	XX	XX	XX	XX	38	35	XX	38	—	—	C
	OI-92-Venez./PNS	38	38	38	38	—	—	—	—	—	—	—	—	C
33	OME-f1-92/f1-92(v)	XX	XX	XX	XX	XX	35	XX	XX	XX	XX	—	—	C
	/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	—	C
34	OME-f2-93	36	36	XX	36	36	36	—	—	—	—	—	—	C
35	OMI-93-Turq./	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	39	—	—	C
	OI-93-Méjico/PNS	XX	XX	39	39	XX	XX	—	—	—	—	—	—	C
36	OME-f1-93/f1-93(v)	XX	XX	XX	40	XX	XX	40	XX	40	40	—	—	C
37	OME-f2-94/PNS	41	XX	XX	41	XX	XX	XX	XX	41	—	—	—	C
38	OMI-94-Hong-Kong	XX	40	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	C
39	OI-94-Brasil/OME-	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	C
	f1-94/f1-94(v)	XX	XX	XX	XX	XX	XX	42	42	42	XX	—	—	C
40	OME-f2-95	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	C
41	OMI-95-Canadá	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	C
42	OI-95-Chile	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	—	—	—	—	C
	OME-f1-95/PNS	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	XX	—	—	C

CLAVES: XX = Pendiente de publicación; C = Completo; OME = Olimpiada Matemática Española (fase I o 2); OMI = OI. Mat. Internac. OI = OI. Iberoamer. de Mat. PNS = Propuestos por nuestros socios.

INSTRUCCIONES PARA EL ENVÍO DE ORIGINALES PARA SU PUBLICACIÓN EN EL BOLETÍN

Por haber sido cambiado el modo de impresión del Boletín a partir del número 39, nos vemos obligados a cambiar las normas de presentación de originales, que deben enviarse en papel y además también en disquete, del modo siguiente:

Copias en papel (por duplicado)

Escritas con un procesador de texto en hojas DIN A-4.

Los artículos comenzarán con el título, nombre de autores y referencia de su departamento o institución e incluirán un breve resumen en inglés.

Las figuras deben ser de buena calidad, incluidas en el lugar apropiado del texto en el tamaño en que deben ser reproducidas. Además, si se desea, pueden volver a incluirse al final en mayor tamaño, para ser escaneadas.

Las soluciones de problemas deben comenzar indicando: «Problema número (Boletín número)», tal como suelen aparecer en el boletín, y terminar con el nombre del autor de la solución de cada problema.

Las reseñas de libros como suelen aparecer en el boletín, con el nombre del autor de la reseña al final.

Copia en disquete

Se enviará un disquete formateado para PC compatible (DOS 3. x o superior), conteniendo dos archivos:

- archivo del documento para el procesador de texto utilizado
- archivo del documento en código ASCII.

Este último es el que más probablemente utilizará la imprenta.

Si se desea, las figuras pueden incluirse en archivos de extensión TIF (en otro caso se captarán por escaneado)

Selección de originales

Serán revisados por profesionales del mundo académico, para decidir si se ajustan a la línea general del Boletín. Si se considera oportuno, se pedirá a los autores que reduzcan su extensión o hagan algunas modificaciones en su contenido.

RELACION DE OTROS ARTICULOS QUE HAN SIDO ADMITIDOS PARA SER PUBLICADOS EN PROXIMOS NUMEROS DE ESTE BOLETIN

- La historia de la Matemática como recurso didáctico (continuación), por *Mariano Martínez Pérez*.
- La Biblioteca del Monasterio de El Escorial como recurso didáctico en la clase de Matemáticas de Secundaria por *M.M. Garbayo Moreno, Charo Morata Sebastián y J.M. Sordo Juaneda*.
- Divisiones de un número grande, por *Fernando Lisón Martín*.

**SOCIEDAD «PUIG ADAM» DE PROFESORES DE MATEMATICAS
BOLETIN DE INSCRIPCION (CENTROS)**

D.
como del Centro
domiciliado en
Ciudad Cod^o Postal..... Telef.

SOLICITA EL INGRESO DE ESE CENTRO COMO SOCIO BENEFACTOR

Con esta fecha autorizo al Banco
Sucursal o Agencia en
Dirección de la misma
para que cargue en mi cuenta:...../...../...../...../
abierta al nombre:
los recibos de las cuotas correspondientes al curso 1995-96 y siguientes.

Fecha de de 1995

Fdo.:

La cuota anual está actualmente establecida en 5.000 pesetas (incluida la cuota federativa de 2.000 ptas.).
Remítanse ambas partes a
**Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas. Facultad de Educación (despacho 3517).
Paseo Juan XXIII, s/n. Ciudad Universitaria. 28040 Madrid**

Fecha BANCO:
Sucursal o Agencia en
Dirección de ésta.....

RUEGO ABONEN con cargo a mi cuenta:...../...../...../
los recibos de mi cuota anual de la Sociedad «Puig Adam» de Profesores de Matemáticas, hasta
nueva orden.

Les saluda atentamente:

Firmado:

Nombre y Apellidos
Dirección